§7. Приложения логики высказываний

В этом параграфе
на конкретных примерах демонстрируются
следующие приложения логики высказываний:

- Упрощение систем высказываний
- Логическое программирование
- Анализ правильности рассуждений
- Анализ последовательно-параллельных схем

1. Упрощение систем высказываний

$$\begin{cases} (x-1)\cdot(x+1)\cdot(y+z-2)=0 \\ (x+1)\cdot(x+y)=0 \\ (x-1)\cdot y\cdot z=0 \end{cases}$$

- $A =$ «$x - 1 = 0$»
- $B =$ «$x + 1 = 0$»
- $C =$ «$y + z - 2 = 0$»
- $D =$ «$x + y = 0$»
- $E =$ «$y = 0$»
- $F =$ «$z = 0$»

$$\mathfrak{A} = (A \vee B \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (A \vee E \vee F)$$

Упрощение

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \equiv &(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (A \vee E \vee F) \equiv \\
\equiv &(B \vee (A \vee C) \wedge D) \wedge (A \vee E \vee F) \equiv \\
\equiv &(B \vee AD \vee CD) \wedge (A \vee E \vee F) \equiv \\
\equiv &AB \vee BE \vee BF \vee A \wedge (A \vee E \vee F) \wedge D \vee ACD \vee CDE \vee CDF \equiv \\
\equiv &\text{Л} \vee BE \vee BF \vee A \wedge D \vee ACD \vee CDE \vee CDF \equiv \\
\equiv &BE \vee BF \vee AD \vee CDE \vee CDF \equiv \\
\equiv &AD \vee BF \vee BE \vee CDE \vee CDF
\end{aligned}
$$

Результат

$$\mathfrak{A} \equiv AD \vee BF \vee BE \vee CDE \vee CDF$$

- $A =$ «$x - 1 = 0$»
- $B =$ «$x + 1 = 0$»
- $C =$ «$y + z - 2 = 0$»
- $D =$ «$x + y = 0$»
- $E =$ «$y = 0$»
- $F =$ «$z = 0$»

$$\begin{array}{llllll}
AD & \Leftrightarrow & x = 1, & y = -1, & z \text{ произвольное} \\
BF & \Leftrightarrow & x = -1, & y \text{ произвольное}, & z = 0 \\
BE & \Leftrightarrow & x = -1, & y = 0, & z \text{ произвольное} \\
CDE & \Leftrightarrow & x = 0, & y = 0, & z = 2 \\
CDF & \Leftrightarrow & x = -2, & y = 2, & z = 0
\end{array}$$

2. Логическое программирование

Имеется группа B из десяти объектов (например, из чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10).

Хотим описать формулой логики высказываний все такие возможные варианты расположения элементов, которые дают разбиение этой группы на две, т. е. распределения элементов по двум группам B_1 и B_2 таким, что

- ни B_1, ни B_2 не является пустой;
- B_1 и B_2 вместе образуют B;
- B_1 и B_2 не имеют общих элементов.

Вводим переменные

Введём пропозициональные переменные:
$A_{j+10\cdot(i-1)} = И \quad \Leftrightarrow \quad$ элемент j попал в B_i
$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Таким образом, значения переменных $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ дают информацию о том, какие элементы попали в B_1, а переменных $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{20}$ — о том, какие элементы попали в B_2.

Описываем условия

$A_{j+10\cdot(i-1)} = И \quad \Leftrightarrow \quad$ элемент j попал в B_i
$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \ldots, 10)$

Опишем условия:

- B_1 не является пустой:

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots A_{10} = \bigvee_{j=1}^{10} A_j$$

- B_2 не является пустой:

$$A_{11} \vee A_{12} \vee \ldots A_{20} = \bigvee_{j=1}^{10} A_{j+10}$$

Описываем условия

$A_{j+10\cdot(i-1)} = И \quad \Leftrightarrow \quad$ элемент j попал в B_i
$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \ldots, 10)$

Опишем условия:

- B_1 и B_2 вместе образуют B

  (т. е. каждый элемент из B попал в B_1 или в B_2).

  По отдельности для каждого элемента:

  $A_1 \vee A_{11}$

  $A_2 \vee A_{12}$

  $\ldots$

  $A_{10} \vee A_{20}$

  Все сразу: $\bigwedge\limits_{j=1}^{10} (A_j \vee A_{j+10})$

Описываем условия

$A_{j+10\cdot(i-1)} = И \quad \Leftrightarrow \quad$ элемент j попал в B_i
$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \ldots, 10)$

Опишем условия:

- B_1 и B_2 не имеют общих элементов

  (т. е. ни один элемент из B не попал одновременно и в B_1, и в B_2).

  По отдельности для каждого элемента:

  $\overline{A_1 \wedge A_{11}}$

  $\overline{A_2 \wedge A_{12}}$

  $\ldots$

  $\overline{A_{10} \wedge A_{20}}$

  Все сразу: $\bigwedge\limits_{j=1}^{10} \overline{A_j \wedge A_{j+10}}$

Результат

$A_{j+10\cdot(i-1)} = И \quad \Leftrightarrow \quad$ элемент j попал в B_i
$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \ldots, 10)$

Итого условия описываются формулами:

- $\bigvee_{j=1}^{10} A_j$
- $\bigvee_{j=1}^{10} A_{j+10}$
- $\bigwedge_{j=1}^{10} (A_j \vee A_{j+10})$
- $\bigwedge_{j=1}^{10} \overline{A_j \wedge A_{j+10}}$

Их конъюнкция и даёт формулу,
описывающую такие варианты расположения
исходных элементов из B,
которые являются разбиениями B на две группы B_1 и B_2.

3. Анализ правильности рассуждений

«Если курс ДМиМЛ неинтересен, то он полезен»

«Курс ДМиМЛ бесполезен или прост»

«Курс ДМиМЛ непрост»

«Следовательно, курс ДМиМЛ интересен»

- A =«Курс ДМиМЛ интересен»
- B =«Курс ДМиМЛ полезен»
- C =«Курс ДМиМЛ прост»

$\overline{A} \Rightarrow B$

$\overline{B} \vee C$

$\overline{C}$

$\overset{?}{\models} A$

Вариант 1: неуниверсальный метод

$\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B} \vee C,\ \overline{C},\ \overset{?}{\models} A$

- $\overline{B} \vee C,\ \overline{C}\ \models\ \overline{B}$ (правило удаления дизъюнкции)
- $\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B}\ \models\ \overline{\overline{A}}$ (правило «рассуждение от противного»)
- Но $\overline{\overline{A}} \equiv A$, что означает, что $\overline{\overline{A}} \models A$ и $A \models \overline{\overline{A}}$.
- Таким образом, $\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B} \vee C,\ \overline{C},\ \models A$

Вариант 2: более универсальный метод

$$\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B} \vee C,\ \overline{C},\ \overset{?}{\vDash} A$$

- По следствию из теоремы о логическом следствии,

$$\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B} \vee C,\ \overline{C},\ \vDash A$$
$$\Updownarrow$$
$$\vDash\ (\overline{A} \Rightarrow B) \cdot (\overline{B} \vee C) \cdot \overline{C} \Rightarrow A$$

- Проверим, является ли тавтологией формула $\mathfrak{A} = (\overline{A} \Rightarrow B) \cdot (\overline{B} \vee C) \cdot \overline{C} \Rightarrow A$, для чего сначала преобразуем её.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} =& (\overline{A} \Rightarrow B) \cdot (\overline{B} \vee C) \cdot \overline{C} \Rightarrow A \equiv \\
\equiv& \overline{(\overline{A} \Rightarrow B) \cdot (\overline{B} \vee C) \cdot \overline{C}} \vee A \equiv \\
\equiv& \overline{(\overline{A} \Rightarrow B)} \vee \overline{(\overline{B} \vee C)} \vee C \vee A \equiv \\
\equiv& \overline{A} \cdot \overline{B} \vee B \cdot \overline{C} \vee C \vee A \equiv \\
\equiv& \overline{A} \cdot \overline{B} \vee B \vee C \vee A \equiv \\
\equiv& \overline{B} \vee B \vee C \vee A \equiv \\
\equiv& И
\end{aligned}
$$

- Таким образом, $\mathfrak{A} \equiv И$, т. е.
  $\mathfrak{A} = (\overline{A} \Rightarrow B) \cdot (\overline{B} \vee C) \cdot \overline{C} \Rightarrow A$ — тавтология,
  а значит, верным является логическое следование
  $\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B} \vee C,\ \overline{C},\ \vDash A.$

4. Последовательно-параллельные РКС

Рассмотрим некоторую схему
электрической цепи
между двумя полюсами источника тока,
состоящую из контактов реле и проводников,
соединённых последовательно или параллельно.

- Назовём её релейно-контактной схемой (РКС).

- Реле — это «переключатель», замыкающий или размыкающий некоторый управляемый им участок цепи (контакт).

Управляемый реле контакт называется:

- замыкающим, если при срабатывании реле он замыкается и пропускает ток;
- размыкающим, если при срабатывании реле он размыкается и ток не пропускает.

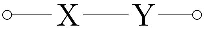
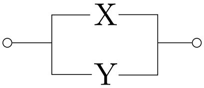
Каждому реле поставим в соответствие свою пропозициональную переменную, значение которой отражает состояние реле:

$$X = \begin{cases} \text{И} & \text{— реле сработало} \\ \text{Л} & \text{— реле отпустило.} \end{cases}$$

Тогда наличие тока (И = есть, Л = нет) через контакты этого реле также может быть выражено через эту переменную — X для замыкающих, $\overline{X}$ для размыкающих.

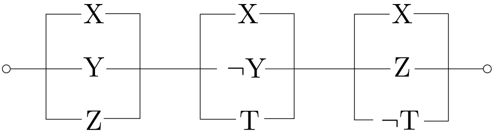
Соединения

Ток через участок цепи, полученный соединением контактов, может быть выражен через соответствующие переменные как результат операции, зависящей от типа соединения.

Участок	Ток через участок
	$X \wedge Y$
	$X \vee Y$

В итоге логику работы такой схемы можно описать формулой логики высказываний $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, которая принимает значение «Истина» на всех тех и только тех наборах состояний реле, при которых цепь пропускает ток.

Пример:



$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= (X \vee Y \vee Z) \cdot (X \vee \overline{Y} \vee T) \cdot (X \vee Z \vee \overline{T}) \equiv \\
&\equiv (X \vee (Y \vee Z) \cdot (\overline{Y} \vee T)) \cdot (X \vee Z \vee \overline{T}) \equiv \\
&\equiv (X \vee (Y \vee Z) \cdot (\overline{Y} \vee T) \cdot (Z \vee \overline{T})) \equiv \\
&\equiv X \vee (Z \vee Y \cdot \overline{T}) \cdot (\overline{Y} \vee T) \equiv \\
&\equiv X \vee \overline{Y} \cdot Z \vee Z \cdot T \equiv X \vee Z \cdot (\overline{Y} \vee T)
\end{aligned}
$$