БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Лекции по курсу "Дифференциальное и интегральное исчисление"

для студентов специальности

"Информатика"

Лектор
Васьковский М.М.

Минск, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Числа

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых и рациональных чисел.

Напомним, что каждое рациональное число представляется единственным образом в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, числа m, n взаимно простые (не имеют общих делителей за исключением тривиальных делителей ± 1).

Вместе с тем каждое рациональное число α можно представить в виде десятичной дроби, которая является либо конечной, либо бесконечной периодической. При этом каждая конечная десятичная дробь имеет 2 представления в виде бесконечной десятичной дроби. Например,

$$0.5 = 0.500\ldots,$$

$$0.5 = 0.499\ldots.$$

Пример 1.1 *Диагональ квадрата со стороной длины 1 не является рациональным числом.*

Действительно, если допустим, что диагональ такого квадрата выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$, то будем иметь $m^2 = 2n^2$. Откуда получаем, что число m – четное, т.е. $m = 2m_1$. Но тогда из равенства $2m_1^2 = n^2$ получим, что число n также четное. Но это противоречит взаимной простоте чисел m и n.

Определение 1.1 *Определим множество действительных чисел (обозначение $\mathbb{R}$) как множество всех бесконечных десятичных дробей*

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ $\forall k \geq 1$.
Непериодические десятичные дроби будем называть иррациональными числами.

Определение 1.2 *Приближением по недостатку порядка $n \geq 0$ неотрицательного действительного числа $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ называется рациональное число $\alpha_n = a_0, a_1 \ldots a_n$. Приближением по недостатку порядка $n \geq 0$ отрицательного действительного числа $\alpha = -a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ называется рациональное число $\alpha_n = -a_0, a_1 \ldots a_n - 10^{-n}$. Приближение по недостатку порядка 0 числа α называется целой частью и обозначается $[\alpha]$.*

Определение 1.3 *Приближением по избытку порядка $n \geq 0$ неотрицательного действительного числа $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ называется рациональное число $\alpha'_n = a_0, a_1 \ldots a_n + 10^{-n}$. Приближением по избытку порядка $n \geq 0$ отрицательного действительного числа $\alpha = -a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ называется рациональное число $\alpha'_n = -a_0, a_1 \ldots a_n$.*

Приведем основные свойства приближений по недостатку, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1. $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ (свойство монотонности приближений);

2. $\alpha_{n+1} - \alpha_n < 10^{-n}$;

3. Если для некоторых действительных чисел α, β и некоторого n выполняется $\alpha_n = \beta_n$, то $\alpha_i = \beta_i \ \forall i \leq n$;

4. Если $\alpha_n < \beta_n$, то $\alpha_n + 10^{-n} \leq \beta_n$.

Определение 1.4 *Будем говорить, что два иррациональных числа равны: $\alpha = \beta$, если $\alpha_n = \beta_n \ \forall n \geq 0$. Будем говорить, что два рациональных числа равны: $\alpha = \beta$, если $\alpha_n = \beta_n$ $\forall n \geq 0$ или существует номер n такой, что $\alpha_i = \beta_i$ для любого $i < n$ и $|\alpha_i - \beta_i| = 10^{-i}$ для любого $i \geq n$ (во втором случае α и β – два представления одной и той же конечной десятичной дроби: одно из них с нулем в периоде, другое – с девяткой).*

Определение 1.5 *Будем говорить, что выполняется нестрогое неравенство двух действительных чисел $\alpha \leq \beta$ если $\alpha = \beta$ или $\alpha_n \leq \beta_n \ \forall n \geq 0$. Будем говорить, что имеет место строгое неравенство двух действительных чисел $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$.*

Теорема 1.1 *(Критерий различия чисел). Пусть α, β – два действительных числа. Тогда неравенство $\alpha < \beta$ эквивалентно существованию индекса $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такого, что*

$$\alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k. \tag{1.1}$$

$\diamondsuit$

Необходимость.

Дано $\alpha < \beta$. Согласно определению неравенства чисел получаем, что $\alpha_n \leq \beta_n \ \forall n \geq 0$, при этом $\alpha \neq \beta$. Если бы для любого n имело место равенство $\alpha_n = \beta_n$, то получили бы $\alpha = \beta$ – противоречие. Поэтому найдется индекс $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $\alpha_i < \beta_i$ (пусть i – наименьшее значение индекса, при котором выполнится такое неравенство). В силу свойства 3) приближений по недостатку получаем:

$$\alpha_n = \beta_n \ \forall n < i;$$

$$\alpha_n < \beta_n \ \forall n \geq i.$$

Если предположить, что неравенство (1.1) не выполнится ни при каком $n \geq i$, то согласно свойству 4) приближений по недостатку получим:

$$\alpha_n + 10^{-n} = \beta_n \ \forall n \geq i.$$

Очевидно, что такая возможность реализуется лишь в случае, когда α и β – два представления одной и той же конечной десятичной дроби, что влечет равенство чисел α, β – противоречие.

Достаточность.

Пусть для некоторого индекса $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется неравенство (1.1). Равенство $\alpha = \beta$ невозможно, т.к. тогда имели бы $\alpha_n = \beta_n$ или $|\alpha_n - \beta_n| = 10^{-n}$ для любого индекса n. Остается доказать, что $\alpha_n \leq \beta_n$ для любого $n \geq 0$. Предположим, что нашелся номер $m \geq 0$ такой, что $\alpha_m > \beta_m$. Рассмотрим 2 случая: 1) $m < k$, 2) $m > k$.

Случай 1: $m < k$. Тогда по свойствам 1), 4), 2) приближений имеем

$$\alpha_{m+1} \geq \alpha_m \geq \beta_m + 10^{-m} > \beta_{m+1}.$$

Аналогично получим, что $\alpha_{m+2} > \beta_{m+2}$ и так далее. Следовательно, $\alpha_k > \beta_k$, что противоречит неравенству (1.1).

Случай 2: $m > k$. Из неравенства (1.1) получаем, что $\beta_k > \alpha_k$. Но тогда, используя рассуждения предыдущего случая, получим $\beta_{k+1} > \alpha_{k+1}$, $\beta_{k+2} > \alpha_{k+2}$ и так далее. Тем самым, $\beta_m > \alpha_m$ – противоречие.

$\square$

Замечание 1.1 *Неравенство (1.1) нельзя заменить более слабым неравенством*

$$\alpha_k + 10^{-k} \leq \beta_k,$$

т.к. в этом случае возможен случай, когда α и β – два представления одной и той же конечной десятичной дроби, что влечет равенство чисел α, β.

Пример 1.2 *Критерий различия чисел дает конструктивный способ доказательства различия двух чисел в отличие от определения, требующего проверки на неравенство всех приближений двух чисел.*

Рассмотрим числа $\alpha = -2,17801...$, $\beta = -2,17799...$ Применяя критерий различия чисел, получаем:

$$\alpha_0 = -3,\ \beta_0 = -3;$$
$$\alpha_1 = -2.2,\ \beta_1 = -2.2;$$
$$\alpha_2 = -2.18,\ \beta_2 = -2.18;$$
$$\alpha_3 = -2.179,\ \beta_3 = -2.178;$$
$$\alpha_4 = -2.1781,\ \beta_4 = -2.1780;$$
$$\alpha_5 = -2.17802, \beta_5 = -2.17800.$$

Т.к. $\alpha_5 + 2 \cdot 10^{-5} \leq \beta_5$, то $\alpha < \beta$.

Теорема 1.2 *(теорема о плотности множества действительных чисел). Для любых двух действительных чисел α, β таких, что $\alpha < \beta$, существует рациональное число r такое, что $\alpha < r < \beta$.*

$\diamondsuit$

Т.к. $\alpha < \beta$, то согласно критерию различия чисел найдется индекс k такой, что

$$\alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k.$$

Докажем, что рациональное число

$$r = \alpha_k + 10^{-k} + 5 \cdot 10^{-(k+1)}$$

удовлетворяет условию теоремы.

Действительно,

$$\alpha_{k+1} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} < \alpha_k + 10^{-k} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} < r - 10^{-(k+1)} \leq r_{k+1}$$

откуда $\alpha < r$ согласно критерию различия чисел.

Аналогично,

$$r_{k+1} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} \leq r + 2 \cdot 10^{-(k+1)} = \alpha_k + 10^{-k} + 7 \cdot 10^{-(k+1)} < \alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k \leq \beta_{k+1},$$

откуда $r < \beta$ согласно критерию различия чисел.

$\square$

2 Грани числовых множеств

В предыдущем параграфе были введены отношения равенства, нестрогого и строго неравенств действительных чисел. Таким образом, для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ можем определить интервал (α, β) и отрезок $[a, b]$ следующим образом:

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\},$$

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Аналогично можно определить полуинтервалы $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$. Через $|\alpha, \beta|$ будем обозначать любой из промежутков (α, β), $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$. Аналогично можно определить промежуток $|\alpha, \beta|$, у которого один или оба конца бесконечны.

Любое подмножество X множества $\mathbb{R}$ будем называть *числовым множеством.*

Числовое множество X называется *ограниченным сверху*, если существует число $\beta \in \mathbb{R}$ (верхняя грань множества X) такое, что $x \leq \beta$ для любого $x \in X$. Аналогично, числовое множество X называется *ограниченным снизу*, если найдется постоянная $\alpha \in \mathbb{R}$ (нижняя грань множества X) такая, что $x \geq \alpha$ для любого $x \in X$. Числовое множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 2.1 *Точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ называют наименьшую из верхних граней множества X, т.е. такое число $\beta \in \mathbb{R}$, что:*

$$\forall x \in X \Rightarrow x \leq \beta;$$

$$\forall \gamma < \beta \ \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > \gamma.$$

Точную верхнюю грань называют супремумом множества X, пишут $\sup X$.

Определение 2.2 *Точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ называют наибольшую из нижних граней множества X, т.е. такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что:*

$$\forall x \in X \Rightarrow x \geq \alpha;$$

$$\forall \gamma > \alpha \ \exists \bar{x} \in X : \bar{x} < \gamma.$$

Точную нижнюю грань называют инфимумом множества X, пишут $\inf X$.

Пример 2.1 *Для конечного промежутка $|\alpha, \beta|$ имеем* $\sup |\alpha, \beta| = \beta$, $\inf |\alpha, \beta| = \alpha$.

Пример 2.2 *Для любого конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ супремум совпадает с максимальным элементом множества X, а инфимум совпадает с минимальным элементом множества X.*

Теорема 2.1 *Любое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а любое непустое ограниченное снизу множество X имеет точную нижнюю грань.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для ограниченного сверху непустого числового множества X.

Рассмотрим 2 случая:

1) существует неотрицательный элемент множества X;

2) все элементы множества X отрицательные.

Случай 1: $\exists x \in X : x \geq 0$.

Без ограничения общности, можем удалить из множества X все отрицательные элементы. Оставшееся непустое множество, состоящее из неотрицательных элементов, также будем обозначать через X.

Заменим все периодические дроби с девяткой в периоде, входящие в множество X, на равные периодические дроби с нулем в периоде.

Множество целых частей чисел из X ограничено сверху, следовательно, в этом множестве существует максимальный элемент b_0. Пусть Y – множество чисел из X, целые части которых равны b_0.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через Y_n множество приближений по недостатку порядка n чисел из Y. Заметим, что каждое из множеств Y_n является конечным, поскольку каждое число этого множества имеет фиксированную первую цифру b_0, а также состоит из n знаков после запятой. Поэтому каждое множество Y_n имеет максимальный элемент β_n.

Рассмотрим множества Y_n и Y_{n+1}. Очевидно, что элементы множества Y_n также можно рассматривать как приближения по недостатку порядка n элементов множества Y_{n+1}. Поэтому максимальный элемент β_n множества Y_n есть приближение по недостатку порядка n максимального элемента β_{n+1} множества Y_{n+1}. Следовательно, существует бесконечная последовательность цифр $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ такая, что

$$\beta_1 = b_0, b_1$$

$$\beta_2 = b_0, b_1 b_2$$

$$\ldots$$

$$\beta_n = b_0, b_1 \ldots b_n$$

$$\ldots$$

Таким образом, можно определить действительное число

$$\beta = b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$$

Докажем, что $\beta = \sup X$. Для этого достаточно проверить, что $\beta = \sup Y$.

Возьмем произвольный элемент $y \in Y$. Для его приближения по недостатку порядка n выполнено

$$y_n \leq \beta_n.$$

Так как последнее неравенство выполняется при любом n, то $y \leq \beta$.

Теперь возьмем произвольное действительное число $\gamma < \beta$. Из критерия различия чисел вытекает существование индекса k такого, что

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k.$$

Из определения множества Y_k вытекает, что существует элемент $\bar{y} \in Y$ такой, что для его приближения по недостатку порядка k выполняется $\bar{y}_k = \beta_k$. То есть

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \bar{y}_k.$$

Следовательно, по критерию различия чисел имеем $\gamma < \bar{y}$.

Таким образом, доказали, что $\beta = \sup Y = \sup X$.

Теперь рассмотрим второй случай.

Случай 2: $\forall x \in X \Rightarrow x < 0$.

В отличие от предыдущего случая будем рассматривать приближения по избытку.

На первом шаге аналогично случаю 1 сформируем множество Y, состоящее из чисел множества X с максимальной целой частью b'_0.

Через Y'_n будем обозначать множество приближений по избытку порядка n чисел из Y. Каждое множество Y'_n имеет максимальный элемент β'_n.

Существует последовательность цифр $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ такая, что

$$\beta'_1 = -b_0, b_1$$

$$\beta'_2 = -b_0, b_1 b_2$$

$$\ldots$$

$$\beta'_n = -b_0, b_1 \ldots b_n$$

$$\ldots$$

где $b_0 = b'_0 + 1$ – максимальное из приближений по избытку порядка 0 чисел множества X.

Определим действительное число

$$\beta = -b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$$

Убедимся, что $\beta = \sup Y$.

Возьмем произвольный элемент $y \in Y$. Для его приближения по избытку порядка n выполнено

$$y'_n \leq \beta'_n.$$

Так как $y'_n = y_n + 10^{-n}$, $\beta'_n = \beta_n + 10^{-n}$, то аналогичное неравенство выполняется и для приближений по недостатку чисел y и β, т.е.

$$y_n \leq \beta_n.$$

Так как последнее неравенство выполняется при любом n, то $y \leq \beta$.

Возьмем произвольное действительное число $\gamma < \beta$. Из критерия различия чисел вытекает существование индекса k такого, что

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k.$$

Из определения множества Y'_k вытекает, что существует элемент $\bar{y} \in Y$ такой, что для его приближения по избытку порядка k выполняется $\bar{y}'_k = \beta'_k$. Но тогда $\bar{y}_k = \beta_k$. То есть

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \bar{y}_k.$$

Следовательно, по критерию различия чисел имеем $\gamma < \bar{y}$. Тем самым, $\beta = \sup Y = \sup X$.

Доказательство теоремы для ограниченного снизу непустого множества X проводится по аналогичной схеме и оставляется читателю в качестве упражнения.

□

Замечание 2.1 *Если множество* X *неограничено сверху, то полагают* $\sup X = +\infty$. *Если множество* X *неограничено снизу, то полагают* $\inf X = -\infty$.

Определим сумму двух действительных чисел α и β как точную верхнюю грань сумм приближений по недостатку этих чисел:

$$\alpha + \beta = \sup\{\alpha_n + \beta_n\}.$$

Под разностью действительных чисел α, β понимаем сумму $\alpha + (-\beta)$.

Определим произведение двух неотрицательных чисел α, β следующим образом:

$$\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha_n \cdot \beta_n\}.$$

Если $\alpha \geq 0$, $\beta < 0$, то полагаем $\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot (-\beta))$. Аналогично определяется умножение для других комбинаций знаков.

Под частным двух чисел $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ понимаем

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sup\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n + 10^{-n}}\right\}.$$

Аналогично умножению вводится деление чисел со знаком.

3 Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Числовой последовательностью называют перенумерованную бесконечную совокупность чисел

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Кратко будем обозначать такую последовательность через (a_n).

Последовательность (a_n) называется ограниченной, если множество $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ является ограниченным.

Удалим из последовательности (a_n) конечное число первых членов, полученный бесконечный набор чисел

$$a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$$

называется остатком последовательности (a_n).

Очевидно, что из ограниченности некоторого остатка следует ограниченность всей последовательности. И наоборот, из ограниченности последовательности вытекает ограниченность любого остатка этой последовательности.

Определение 3.1 *Последовательность (a_n) называется сходящейся, если существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

В противном случае последовательность (a_n) называется расходящейся. Если последовательность (a_n) сходится, то число a называется пределом последовательности (a_n), пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Приведем геометрическую интерпретацию предела последовательности.

Сходимость $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ означает, что для любого заданного отрезка $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ положительной длины все члены последовательности a_n, начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(\varepsilon)$ будут попадать в этот отрезок.

Сформулируем отрицание к условию сходимости $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$: найдется отрезок $[a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0]$ положительной длины такой, что какой бы ни выбрать большой номер $n \in \mathbb{N}$ найдется член a_{n_0} с номером $n_0 \geq n$, такой, что $a_{n_0} \notin [a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0]$.

Формальная запись последнего утверждения выглядит следующим образом:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \geq n \Rightarrow |a_{n_0} - a| > \varepsilon_0.$$

При построения отрицания к формальному математическому утверждению необходимо придерживаться следующего правила Де Моргана:

1) каждый квантор $\forall$ заменяется на квантор $\exists$;

2) каждый квантор $\exists$ заменяется на квантор $\forall$;

3) вывод P заменяется на его отрицание $\bar{P}$.

В приведенном выше примере сходимости последовательности к числу a вывод P представляет собой неравенство $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Кроме того, для удобства чтения записи мы снабжаем нулевым индексом символы, относящиеся к кванторам существования.

Теперь проиллюстрируем исследование сходимости последовательности на основе определения.

Пример 3.1 *Докажем, что* $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство

$$|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \varepsilon.$$

Данное неравенство можно переписать в следующем виде

$$n \leq (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n.$$

Для того, чтобы последнее неравенство выполнилось достаточно, чтобы

$$n \leq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

откуда находим $n \geq \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 := n_0(\varepsilon)$.

Пример 3.2 *Докажем, что* $(-1)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1.$

Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим неравенство

$$|(-1)^{n_0} - 1| > \varepsilon_0,$$

где $n_0 \geq n$, а число $\varepsilon_0 > 0$ не зависит от n. Понятно, что в качестве n_0 можно выбрать любое нечетное число, большее n, а в качестве ε_0 можно взять любое положительное число, меньшее 2.

Лемма 3.1 *(M-лемма). Если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leq M\varepsilon$, *где постоянная* $M > 0$ *не зависит от* ε *и* n, *то* $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и рассмотрим неравенство

$$|a_n - a| \leq \varepsilon_1.$$

Полагая $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{M}$ в условии леммы, находим номер $n_0(\varepsilon_1/M)$, для которого

$$|a_n - a| \leq M\varepsilon = \varepsilon_1$$

при всех $n \geq n_0(\varepsilon_1/M)$. Потому в качестве номера n_0 из определения сходимости можно выбрать найденное значение $n_0(\varepsilon_1/M)$.

$\square$

Говорят, что последовательность (a_n) бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Приведем основные свойства сходящихся последовательностей.

Свойство 3.1 *Сходящаяся последовательность имеет лишь один предел.*

$\diamondsuit$

Предположим, что у последовательности (a_n) есть два различных предела: a и b. Тогда последовательности (α_n), (β_n) являются бесконечно малыми, где

$$\alpha_n = a_n - a,\ \beta_n = a_n - b.$$

Для любых n имеем

$$|a - b| = |\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Поскольку последовательности (α_n), (β_n) бесконечно малые, то можно найти такой номер n_0, для которого

$$|\alpha_n| \leq \frac{|a-b|}{4},\ |\beta_n| \leq \frac{|a-b|}{4}$$

при всех $n \geq n_0$.

Но тогда при всех $n \geq n_0$ получим, что

$$|a - b| \leq \frac{|a-b|}{2},$$

что невозможно для $a \neq b$.

$\square$

Свойство 3.2 *Сходящаяся последовательность ограничена.*

$\diamondsuit$

Возьмем $\varepsilon = 1$ в определении предела, получаем:

$$a - 1 \leq a_n \leq a + 1$$

для всех $n \geq n_0(\varepsilon)$. Таким образом, нашелся остаток последовательности, который ограничен. Потому ограничена вся последовательность.

$\square$

Свойство 3.3 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда справедливы соотношения:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ *в предположении, что* $b_n \neq 0\ \forall n,\ b \neq 0$.

$\diamondsuit$

Докажем утверждение 1).

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0'(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0'(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon;$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0''(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0''(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - b| \leq \varepsilon;$$

тогда для любых $n \geq \max\{n_0'(\varepsilon), n_0''(\varepsilon)\}$ имеем

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon.$$

Теперь применяя М-лемму, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

Докажем утверждение 2).

Из сходимости последовательностей (a_n), (b_n) вытекает их ограниченность:

$$|a_n|\le M,\ |b_n|\le M\ \forall n.$$

Для любых $n\ge\max\{n_0'(\varepsilon),n_0''(\varepsilon)\}$ имеем

$$|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\le|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|\le(M+b)\varepsilon.$$

Согласно М-лемме, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$.

Докажем утверждение 3).

Найдется номер $n_0''(|b|/2)$ такой, что для любого $n\ge n_0''(|b|/2)$ имеем

$$|b_n-b|\le\frac{|b|}{2}.$$

Отсюда получаем, что для таких n выполнено

$$||b_n|-|b||\le|b_n-b|\le\frac{|b|}{2}\Rightarrow\frac{|b|}{2}\le|b_n|\le\frac{3|b_n|}{2}.$$

Теперь для всех $n\ge\max\{n_0'(\varepsilon),n_0''(\varepsilon),n_0''(|b|/2)\}$ получаем

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_n}{b}+\frac{a_n}{b}-\frac{a}{b}\right|\le\frac{|a_n||b_n-b|}{|bb_n|}+\frac{|a_n-a|}{|b|}\le\left(\frac{2M}{|b|^2}+\frac{1}{|b|}\right)\varepsilon.$$

Теперь требуемое утверждение вытекает из M-леммы.

$\square$

Свойство 3.4 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, *и* $a_n\le b_n\ \forall n$. *Тогда* $a\le b$.

$\diamondsuit$

Предположим, что $a>b$. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что $a-\varepsilon>b+\varepsilon$. Для достаточно больших n имеем $a_n\ge a-\varepsilon$, $b_n\le b+\varepsilon$. Но тогда $a_n>b_n$ для таких n. Противоречие.

$\square$

Свойство 3.5 *Пусть* $b_n\le a_n\le c_n\ \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=d$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=d$.

$\diamondsuit$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0'(\varepsilon)>0:\forall n\in\mathbb{N},n\ge n_0'(\varepsilon)\Rightarrow d-\varepsilon\le b_n\le d+\varepsilon;$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0''(\varepsilon)>0:\forall n\in\mathbb{N},n\ge n_0''(\varepsilon)\Rightarrow d-\varepsilon\le c_n\le d+\varepsilon.$$

Отсюда получаем, что для всех $n\ge\max\{n_0'(\varepsilon),n_0''(\varepsilon)\}$ выполняется неравенство

$$d-\varepsilon\le a_n\le d+\varepsilon.$$

$\square$

Свойство 3.6 *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.*

$\diamondsuit$ Пусть $a_n\underset{n\to\infty}{\to}0$, а $|b_n|\le M\ \forall n$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)>0:\forall n\in\mathbb{N},n\ge n_0(\varepsilon)\Rightarrow|a_n|\le\varepsilon\Rightarrow|a_nb_n|\le M\varepsilon.$$

$\square$

4 Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Число e

Последовательность (a_n) называется *строго возрастающей*, если

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$$

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n < \ldots$$

Аналогично определяются строго убывающие и убывающие последовательности.

Возрастающие и убывающие последовательности относят к монотонным последовательностям, а строго возрастающие и строго убывающие – к строго монотонным.

Теорема 4.1 *(о сходимости монотонной ограниченной последовательности). Каждая монотонная и ограниченная последовательность сходится.*

$\diamondsuit$ Докажем теорему для возрастающей последовательности (a_n). По теореме о гранях

$$\exists \sup\{a_n\} = a \in \mathbb{R}.$$

Из определения точной верхней грани вытекает, что

$$a_n \le a \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Из второго условия и возрастания (a_n) получаем, что

$$a_n > a - \varepsilon \ \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) := n_\varepsilon : \forall n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \le a < a + \varepsilon,$$

т.е. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $\Box$

Замечание 4.1 *Из доказательства теоремы вытекает, что для сходимости возрастающей последовательности достаточно ее ограниченности сверху, а для сходимости убывающей последовательности достаточно ограниченности снизу.*

Последовательность (a_n) называется бесконечно большой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \ge \varepsilon.$$

В таком случае говорят, что последовательность a_n имеет бесконечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (однако такие последовательности не относятся к сходящимся!).

Среди бесконечно больших последовательностей выделяют два типа последовательностей:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow a_n \geq \varepsilon$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow a_n \leq -\varepsilon$.

В первом случае говорят, что (a_n) имеет предел $+\infty$, а во втором случае имеет предел $-\infty$.

Пусть (a_n) – последовательность, члены которой отличны от нуля. Из определения предела вытекает, что последовательность (a_n) бесконечно большая тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ бесконечно малая.

Замечание 4.2 *Если последовательность (a_n) возрастающая и неограниченная, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty;$$

если последовательность (a_n) убывающая и неограниченная, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Таким образом, любая монотонная последовательность имеет предел (который может быть бесконечным).

Рассмотрим последовательность (a_n). Если из этой последовательности удалить часть элементов так, чтобы осталось бесконечно много членов, то получим подпоследовательность исходной последовательности:

$$a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \text{ где } n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Теорема 4.2 *(теорема о выборе монотонной подпоследовательности). Из любой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.*

$\diamondsuit$ Возьмем произвольную последовательность (a_n) и рассмотрим 2 случая.

Случай 1: каждый остаток последовательности (a_n) имеет максимальный элемент.

Случай 2: существует остаток последовательности (a_n), который не имеет максимального элемента.

Предположим, что имеет место первый случай. Покажем, что можно выбрать убывающую подпоследовательность. Пусть a_{n_1} – максимальный элемент всей последовательности, a_{n_2} – максимальный элемент остатка

$$a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots,$$

a_{n_3} – максимальный элемент остатка

$$a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \ldots,$$

и так далее. Очевидно, что

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \ldots,$$

тем самым построена убывающая подпоследовательность.

Теперь рассмотрим второй случай и покажем, что можно построить возрастающую подпоследовательность. Рассмотрим остаток последовательности, не имеющий максимального элемента:

$$a_m, a_{m+1}, \ldots$$

Тогда и все последующие остатки не имеют максимального элемента. Положим $a_{n_1} = a_m$. В остатке $a_m, a_{m+1}, \ldots$ нет максимального элемента, поэтому в нем найдется $a_{n_2} > a_{n_1}$. Затем рассмотрим остаток, начинающийся с номера n_2 и в нем выберем $a_{n_3} > a_{n_2}$ и так далее. Таким образом, построим возрастающую последовательность $a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots$ □

Теорема 4.3 *(принцип выбора). Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

♢ Пусть (a_n) – ограниченная последовательность. На основании теоремы о выборе монотонной подпоследовательности найдется монотонная подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n). Очевидно, что (a_{n_k}) является также ограниченной. Тогда на основании теоремы о сходимости монотонной ограниченной последовательности выбранная подпоследовательность (a_{n_k}) сходится. □

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что последовательность (a_n) является возрастающей. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^{n-1} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогично получаем

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 \frac{1}{n+1} + C_{n+1}^2 \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + C_{n+1}^n \frac{1}{(n+1)^n} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Сравнивая почленно первые $n+1$ слагаемых в правых частях равенств для a_n, a_{n+1}, получаем, что каждое соответствующее слагаемое для a_n не превосходит соответствующего слагаемого для a_{n+1}. Кроме того, a_{n+1} содержит дополнительное положительное слагаемое, стоящее на последнем месте. Отсюда можно сделать вывод, что $a_n < a_{n+1}$.

Докажем, что последовательность (a_n) ограничена сверху. Действительно,

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Таким образом, по теореме о сходимости монотонной ограниченной последовательности последовательность (a_n) имеет конечный предел, который обозначают через e.

Известно, что число e является иррациональным, $e = 2,71828...$

5 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

Определение 5.1 *Последовательность (a_n) называется фундаментальной, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Теорема 5.1 *(критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность (a_n) сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальная.*

$\diamondsuit$
Необходимость.
Пусть $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon/2) : \forall n \geq n_0(\varepsilon/2), \forall m \geq n_0(\varepsilon/2) \Rightarrow |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда с помощью неравенства треугольника получаем, что для всех n, $m \geq n_0(\varepsilon/2)$ выполняется

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Достаточность.
Пусть (a_n) – фундаментальная последовательность, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Зафиксируем ε и $m \geq n_0(\varepsilon)$. Для любых $n \geq n_0(\varepsilon)$ выполняется двойное неравенство

$$a_m - \varepsilon \leq a_n \leq a_m + \varepsilon.$$

Таким образом, остаток последовательности (a_n), начинающийся с номера, большего $n_0(\varepsilon)$, ограничен. Но тогда и ограничена вся последовательность (a_n).

На основании принципа выбора существует сходящаяся подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n). Пусть $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} a$.

Из условия фундаментальности последовательности (a_n) получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n, n_k \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| \leq \varepsilon.$$

При каждом фиксированном $n \geq n_0(\varepsilon)$ переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$a_{n_k} - \varepsilon \leq a_n \leq a_{n_k} + \varepsilon,$$

получаем:

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon),$$

что означает сходимость $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.
$\square$

Замечание 5.1 *Условие фундаментальности последовательности (a_n) можно записать следующим образом:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0(\varepsilon), \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Сформулируем отрицание к критерию Коши: последовательность (a_n) не является сходящейся тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0, m_0 \geq n \Rightarrow |a_{n_0} - a_{m_0}| > \varepsilon_0.$$

Пример 5.1 *Докажем, что последовательность*

$$a_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \ldots + \frac{\cos n}{2^n}$$

является сходящейся.

Убедимся, что последовательность (a_n) фундаментальная.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, имеем:

$$|a_n - a_{n+p}| = \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \varepsilon.$$

Усилим неравенство, заменив модуль суммы на сумму модулей, а каждый из косинусов на единицу:

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} \leq \varepsilon.$$

Усилим также и последнее неравенство, дополнив правую часть до бесконечной геометрической прогрессии, получаем:

$$\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, для любых $n \geq n_0(\varepsilon) = \log_2(1/\varepsilon)$, $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| \leq \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность последовательности (a_n), а следовательно, и ее сходимость.

Пример 5.2 *Докажем, что последовательность*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

является расходящейся.

В силу критерия Коши достаточно доказать, что последовательность (a_n) не является фундаментальной.

Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и подберем такие $\varepsilon_0 > 0$ и номера $n_0 \geq n$, $m_0 \geq n$, что выполняется

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| > \varepsilon_0.$$

Пусть для определенности $m_0 > n_0$, тогда

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| = \frac{1}{n_0 + 1} + \frac{1}{n_0 + 2} + \ldots + \frac{1}{m_0}.$$

Очевидно, что каждое из слагаемых в правой части может быть сколь угодно малым с ростом параметра n. Поэтому для того, чтобы обеспечить выполнение неравенства

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| > \varepsilon_0$$

с независящим от n положительным ε_0, необходимо требовать, чтобы величины m_0, n_0, n были одного порядка.

Положим $m_0 = 2n$, $n_0 = n$ и оценим:

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{m_0} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно взять $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, что завершает проверку отрицания к критерию Коши.

Рассмотрим произвольную последовательность (a_n). Частичным пределом последовательность (a_n) называется предел $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ некоторой подпоследовательности (a_{n_k}). Беззнаковую бесконечность не будем рассматривать в качестве возможного частичного предела.

Обозначим через L множество всех частичных пределов последовательности (a_n). В силу теоремы о выборе монотонной подпоследовательности множество L непустое.

Верхним пределом последовательности (a_n) называется $\sup L$, а *нижним пределом* последовательности (a_n) называется $\inf L$. Верхний и нижний пределы обозначают через

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \ \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Таким образом, любая последовательность (a_n) имеет верхний предел (конечный или $+\infty$) и нижний предел (конечный или $-\infty$). Если последовательность (a_n) ограничена, то ее верхний и нижний пределы конечные. Например, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-1)^n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-1)^n = -1$.

Теорема 5.2 *(критерий совпадения верхнего и нижнего пределов). Последовательность (a_n) имеет предел (конечный или бесконечный определенного знака) тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

$\diamondsuit$

Необходимость.

Так как последовательность (a_n) стремится к некоторому a, то любая подпоследовательность стремится к a. Следовательно, множество частичных пределов состоит из одной точки a. Откуда вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a$.

Достаточность.

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a$. Предположим, что последовательность (a_n) не стремится к a. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$ можно найти бесконечно много номеров $n_0(k) \geq k$, таких, что $a_{n_0(k)}$ будет лежать за пределами ε_0-окрестности точки a. Причем индексы $n_0(k)$ можно выбрать так, чтобы $n_0(1) < n_0(2) < \ldots$. Тогда все частичные пределы такой подпоследовательности $(a_{n_0(k)})$ отличны от a. Противоречие.

$\square$

Из доказанной теоремы вытекает, что для сходящейся последовательности понятия предела, верхнего предела и нижнего предала совпадают.

6 Предел функции. Критерий Гейне

Пусть заданы два непустых множества X, Y. Функцией, определенной на множестве X со значениями в Y называют соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ соотносит единственный элемент $y \in Y$. Пишут $f : X \to Y$ или $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$. При этом множество X называется областью определения функции f (обозначают D_f), а множество Y называется областью значений функции f.

Множеством значений функции $f : X \to Y$ называется множество

$$E_f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Вообще говоря, множество значений E_f может не совпадать с областью значений Y. По определению $E_f \subseteq Y$.

Прообразом элемента $y \in Y$ при отображении $f : X \to Y$ называется множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Вообще говоря, прообраз элемента $y \in Y$ может быть пустым множеством (если y не принадлежит E_f).

Если X и Y – числовые множества, то функция f называется вещественной. Пока будем рассматривать лишь вещественные функции. При этом будем считать, что $Y = \mathbb{R}$, если не оговорено иное.

Графиком вещественной функции $f : X \to Y$ называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Функция $f : X \to Y$ называется сюрьективной, если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ непустой. Иными словами, сюрьективность функции f означает, что множество значений E_f совпадает с областью значений Y.

Функция $f : X \to Y$ называется инъективной, если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента. Иными словами функция f отображает различные элементы x_1, x_2 множества X в различные элементы y_1, y_2 множества Y.

Функция f называется биективной (или взаимно однозначной), если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента. По определению биективная функция является сюрьективной и инъективной.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ является биективной. Тогда можно определить функцию $x = g(y)$, $y \in Y$, $x \in X$, где $g(y)$ совпадает с прообразом $f^{-1}(y)$. Такая функция $x = g(y)$ называется обратной функцией к функции $y = f(x)$ и обозначается f^{-1}. Легко видеть, что обратная функция $f^{-1} : Y \to X$ также является биективной. Заметим, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Пусть X, Y, Z – некоторые непустые числовые множества, и заданы две функции $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Композицией функций g и f называют функцию $h : X \to Z$, действующую по правилу:

$$h(x) = g(f(x)), \ x \in X.$$

Обозначают $h = g \circ f$. В частности, композиция биективной функции f и обратной функции f^{-1} является тождественной функцией.

Если $X = Y = Z$, то можно определить композиции $f \circ g$ и $g \circ f$, которые, вообще говоря, являются различными функциями.

Рассмотрим некоторые классы функций $f : X \to \mathbb{R}$, которые относят к элементарным функциям. Будем предполагать,что $X = \mathbb{R}$, если не оговорено иное.

1. Линейная функция: $y = kx + b$, k, $b \in \mathbb{R}$.

2. Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

3. Многочлен степени $n : y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$.

4. Рациональная функция: $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m, $m > 0$. Областью определения рациональной функции является множество
$$\{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}.$$

5. Тригонометрические функции: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$; $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$; $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Степенная функция: $y = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

8. Показательная функция: $y = a^x$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$.

9. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x > 0$. Если основание a совпадает с e, то пишут $y = \ln x$ (натуральный логарифм).

10. Гиперболические функции: $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

11. Обратные гиперболические функции: $y = \operatorname{arcsh}\, x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{arcch}\, x$, $x \geq 1$.

Пусть функция f определена в проколотой Δ-окрестности точки c, т.е. на множестве
$$U_\Delta(c) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - c| \leq \Delta\},$$
где $\Delta > 0$.

Говорят, что функция f имеет предел при $x \to c$, если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$
В таком случае пишут, что $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to c}{\to} A$.

Если $f(x)$ определена в точке c, и $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, то необязательно $A = f(c)$.

Аналогично доказательству М-леммы для предела последовательности можно доказать М-лемму для предела функции.

Лемма 6.1 *(М-лемма для предела функции). Если*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq M\varepsilon,$$
где постоянная M не зависит ни от x ни от ε, то $f(x) \underset{x \to c}{\to} A$.

Пример 6.1 *Докажем, что* $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.

Положим $\Delta = 1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$|x^3 - 8| \le \varepsilon \Leftrightarrow |x-2||x^2+2x+4| \le \varepsilon.$$

Так как $|x^2+2x+4| \le 19$ для любого $x \in [1,3]$, то можем положить $\delta(\varepsilon) := \min\{\frac{\varepsilon}{19}, 1\}$ в определении предела.

Теорема 6.1 *(критерий Гейне). Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел A при $x \to c$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \ne c$, последовательность $f(x_n)$ сходилась к A.*

$\diamondsuit$

Необходимость.

Возьмем прозвольные $\varepsilon > 0$ и последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \ne c$. Так как $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x-c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \le \varepsilon.$$

Так как последовательность x_n сходится к c, и $x_n \ne c$, то

$$\exists n_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : \forall n \ge n_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow 0 < |x_n - c| \le \delta(\varepsilon)$$

Таким образом, для любых $n \ge n_0(\delta(\varepsilon))$ имеем

$$|f(x_n) - A| \le \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Достаточность.

Предположим, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) \ne A$, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_0 \in U_\Delta(c) : 0 < |x_0 - c| \le \delta \Rightarrow |f(x_0) - A| > \varepsilon_0.$$

В частности, для каждого $\delta_n = \frac{1}{n}$ найдется точка $x_{0,n}$ такая, что

$$0 < |x_{0,n} - c| \le \frac{1}{n}, \ |f(x_{0,n}) - A| > \varepsilon_0.$$

Отсюда вытекает, что $x_{0,n} \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \ne c$, но $f(x_{0,n})$ не стремится к A при $n \to \infty$, что противоречит условию теоремы.

$\square$

Замечание 6.1 *Критерий Гейне позволяет перенести свойства 3.1 – 3.6 пределов последовательностей на пределы функций.*

Пример 6.2 *Докажем, что функция $y = \sin(1/x)$, $x \ne 0$, не имеет предела при $x \to 0$.*

Выберем $x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, $x''_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}$. Очевидно, что эти последовательности сходятся к 0, но $y'_n = \sin(x'_n) \to 1$, $y''_n = \sin(x''_n) \to -1$ при $n \to \infty$. Существование предела $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$ противоречило бы единственности предела и критерию Гейне.

7 Свойства пределов функций. Критерий Коши

Свойство 7.1 *Функция не может иметь более одного предела.*

$\diamondsuit$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = B$, $A \neq B$. Возьмем последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$. По критерию Гейне $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} B$, что противоречит единственности предела последовательности.

$\square$

Свойство 7.2 *Пусть $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$, $g(x) \underset{x\to c}{\to} B$. Тогда*
1) $f(x) + g(x) \underset{x\to c}{\to} A + B$;
2) $f(x)g(x) \underset{x\to c}{\to} AB$;
3) если $g(x) \neq 0$ $\forall x \in U_\Delta(c)$ и $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to c}{\to} \frac{A}{B}$.

$\diamondsuit$

Докажем свойство 1). Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$. По критерию Гейне $f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A + B$. Теперь применяя критерий Гейне в обратную сторону, получаем, что $f(x) + g(x) \underset{x\to c}{\to} A + B$. Свойства 2) и 3) доказываются аналогично.

$\square$

Свойство 7.3 *Если $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$, $g(x) \underset{x\to c}{\to} B$ и $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U_\Delta(c)$, то $A \leq B$.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \in U_\Delta(c)$. По критерию Гейне $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} B$. Так как $f(x_n) \leq g(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $A \leq B$.

$\square$

Свойство 7.4 *Если $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U_\Delta(c)$ и $h(x) \underset{x\to c}{\to} A$, $g(x) \underset{x\to c}{\to} A$, то $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \in U_\Delta(c)$. По критерию Гейне $h(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$. Так как $h(x_n) \leq f(x_n) \leq g(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то по лемме о сжатой последовательности имеем $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$.

$\square$

Свойство 7.5 *Произведение бесконечно малой функции $f(x)$, т.е. такой функции, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, на ограниченную функцию $g(x)$, $x \in U_\Delta(c)$, является бесконечно малой функцией.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \in U_\Delta(c)$. По критерию Гейне последовательность $(f(x_n))$ бесконечно малая. Так как последовательность $(g(x_n))$ ограниченная, то последовательность $(f(x_n)g(x_n))$ бесконечно малая. Применяя критерий Гейне в обратную сторону, получим, что функция $f(x)g(x)$ бесконечно малая.

$\square$

Теорема 7.1 *(критерий Коши существования предела функции). Функция $f : U_\Delta(c) \to \mathbb{R}$ имеет предел при $x \to c$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in U_\Delta(c), 0 < |x' - c| \le \delta(\varepsilon), 0 < |x'' - c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Необходимость.

Так как $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\big(\frac{\varepsilon}{2}\big) > 0 : \forall x', x'' \in U_\Delta(c), 0 < |x' - c| \le \delta\big(\frac{\varepsilon}{2}\big), 0 < |x'' - c| \le \delta\big(\frac{\varepsilon}{2}\big) \Rightarrow$$

$$|f(x') - A| \le \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x'') - A| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для таких x', x'' получаем

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| \le \varepsilon.$$

Достаточность.

Возьмем последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \ne c$, и произвольное $\varepsilon > 0$. Для этого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ из условия теоремы. Существует номер $n_0(\delta(\varepsilon))$ такой, что для любых $n, m \ge n_0(\delta(\varepsilon))$ выполняется

$$|x_n - c| \le \delta(\varepsilon),\ |x_m - c| \le \delta(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что для любых $n, m \ge n_0(\delta(\varepsilon))$ выполнено

$$|f(x_n) - f(x_m)| \le \varepsilon,$$

то есть последовательность $(f(x_n))$ является фундаментальной. Согласно критерию Коши сходимости последовательности $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A \in \mathbb{R}$.

Из условия теоремы получаем

$$\forall n \ge n_0(\delta(\varepsilon)),\ \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x_n) - \varepsilon \le f(x) \le f(x_n) + \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow A - \varepsilon \le f(x) \le A + \varepsilon,$$

следовательно, $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$.

$\square$

Пусть $\Delta > 0$ и функция f определена в проколотой правосторонней Δ-окрестности точки c, т.е. на множестве

$$U_\Delta^+(c) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - c \le \Delta\}.$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет предел справа при $x \to c$, если существует число A такое, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta^+(c), 0 < x - c \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \le \varepsilon.$$

При этом пишут: $A = \lim\limits_{x \to c+0} f(x) = f(c+0)$ или $f(x) \underset{x \to c+0}{\to} A$.

Пусть $\Delta > 0$ и функция f определена в проколотой левосторонней Δ-окрестности точки c, т.е. на множестве

$$U_\Delta^-(c) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < c - x \le \Delta\}.$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет предел слева при $x \to c$, если существует число A такое, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta^-(c), 0 < c - x \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \le \varepsilon.$$

Пишут: $A = \lim\limits_{x \to c-0} f(x) = f(c-0)$ или $f(x) \underset{x \to c-0}{\to} A$.

Из определения предела и односторонних пределов вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.2 *(критерий равенства односторонних пределов). Функция $f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(c+0) = f(c-0) = A$.*

Говорят, что функция f, определенная на множестве $[a, +\infty)$ имеет предел при $x \to +\infty$, если существует число A такое, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in [a, +\infty), x \ge \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \le \varepsilon.$$

Обозначают $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty)$ или $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} A$.

Аналогично, $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (-\infty, a], x \le -\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \le \varepsilon.$$

Говорят, что функция $f : U_\Delta(c) \to \mathbb{R}$ стремится к бесконечности при $x \to c$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| \ge \varepsilon,$$

обозначают $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.

Аналогично, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) \ge \varepsilon,$$

и $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) \le -\varepsilon.$$

Замечание 7.1 *Для введенных односторонних и бесконечных пределов имеет место критерий Гейне с соответствующими изменениями. Например: функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to c-0$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \underset{n \to \infty}{\to} c$, $x_n < c$, последовательность $f(x_n)$ стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$.*

8 Замечательные пределы

Замечательный тригонометрический предел

Лемма 8.1 *Если* $\lim\limits_{t\to c}\varphi(t) = b$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = A$, $\varphi(t) \neq b$ *в некоторой проколотой окрестности точки* c, *то* $\lim\limits_{t\to c} f(\varphi(t)) = A$.

♢

Возьмем произвольную последовательность $t_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $t_n \neq c$. По критерию Гейне

$$\varphi(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} b.$$

По условию леммы $\varphi(t_n) \neq b$ для всех достаточно больших n. Поэтому по критерию Гейне

$$f(\varphi(t_n)) \underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Теперь, применяя критерий Гейне в обратную сторону, получаем

$$\lim_{t\to c} f(\varphi(t)) = A.$$

□

Замечание 8.1 *Лемма остается в силе и для односторонних пределов.*

Теорема 8.1 *(замечательный тригонометрический предел).*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

♢

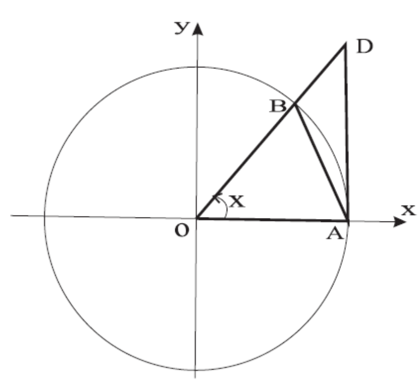

Рис. 1: К доказательству теоремы 8.1

Докажем, что
$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$
Сразу покажем, что
$$\sin x<x<\operatorname{tg}x\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим единичный круг и конфигурацию точек, изображенную на Рис. 1. Легко видеть, что площади треугольника OAB, сектора OAB и треугольника OAD равны соответственно $\frac{1}{2}\sin x$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$. Отсюда и вытекают требуемые неравенства.

Таким образом, для любого $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ имеем
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$
Далее
$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x.$$
Таким образом,
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0:\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),0<x\le\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|\le\varepsilon,$$
что означает $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Теперь докажем, что
$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1.$$
Согласно лемме 8.1 и доказанному равенству $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ имеем
$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1.$$
Таким образом, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, что и требовалось доказать.

$\square$

Замечательный показательно-степенной предел

Теорема 8.2 *(замечательный показательно-степенной предел).*
$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e.$$

$\diamondsuit$

Докажем, что
$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x}=e.$$
Возьмем произвольную последовательность $x_n\underset{n\to\infty}{\to}+0$, $x_n>0$.

Обозначим $k_n=\left[\frac{1}{x_n}\right]$. Тогда
$$k_n\le\frac{1}{x_n}<k_n+1,$$

$$\frac{1}{k_n+1} < x_n \le \frac{1}{k_n}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \le (1+x_n)^{1/x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} \le (1+x_n)^{1/x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Очевидно, что $k_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, $k_n \in \mathbb{N}$. Предположим, что последовательность $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}$ не стремится к e при $n \to \infty$. Тогда найдется подпоследовательность (k'_n) последовательности (k_n) такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k'_n}\right)^{k'_n} = A \ne e.$$

Из последовательности (k'_n) можно выбрать монотонную подпоследовательность (k''_n). Очевидно, что $k''_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ как подпоследовательность последовательности $k_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k''_n}\right)^{k''_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k'_n}\right)^{k'_n} = A.$$

С другой стороны, последовательность (k''_n) является подпоследовательностью последовательности (n). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k''_n}\right)^{k''_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Противоречие. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e.$$

Применяя лемму о сжатой последовательности, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

Согласно критерию Гейне

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Для этого воспользуемся леммой 8.1:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to+0}(1-t)^{-1/t} = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{1/t} = \lim_{t\to+0}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{t}}\left(1+\frac{t}{1-t}\right) = e.$$

□

Замечательный логарифмический предел

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В дальнейшем будет показано, что все элементарные функции, введенные в параграфе 6, а также их композиции являются непрерывными в каждой точке области определения.

Теорема 8.3 *(замечательный логарифмический предел).*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$\diamondsuit$

Воспользуемся леммой 8.1, теоремой 8.2 и непрерывностью функции $f(x) = \ln x$ в точке $x = e:$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \lim_{t \to e} \ln t = \ln e = 1.$$

$\square$

Замечательный показательный предел

Теорема 8.4 *(замечательный показательный предел).*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$\diamondsuit$

Воспользуемся леммой 8.1, теоремой 8.3 и непрерывностью функции $f(x) = e^x$ в точке $x = 0:$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

$\square$

Замечательный степенной предел

Теорема 8.5 *(замечательный степенной предел). Пусть $\mu \in \mathbb{R}$, тогда*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

$\diamondsuit$

Воспользуемся теоремами 8.3, 8.4:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1+x)} \frac{\mu \ln(1+x)}{x} = \mu.$$

$\square$

О-символика

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Пишут $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Например, $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} \operatorname{tg} x \underset{x \to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Замечание 8.2 *При вычислении пределов можно заменять функции на эквивалентные им функции в произведении и в частном, но не в сумме или в разности.*

Говорят, что функция $f(x)$ является бесконечно малой относительно функции $g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

При этом пишут $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$. Произносят $f(x)$ есть о-малое от $g(x)$.

Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Говорят, что функция $f(x)$ растет не быстрее чем функция $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Пишут $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. Произносят $f(x)$ есть о-большое от $g(x)$.

Например, $ax^2 + bx + c = O(x^2)$, при $x \to \infty$.

Пример 8.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x^2}.$$

Имеем

$$\frac{\ln \cos x}{\sin x^2} = \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\sin x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x^2} = -\frac{1}{2}.$$

9 Непрерывная функция. Классификация точек разрыва

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $U_\Delta(x_0) = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$, $\Delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если данное равенство не выполняется, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Запишем определение непрерывности на формальном языке: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(x_0), |x - x_0| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

Величину $\Delta x = x - x_0$ называют приращением аргумента, в величину $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции. Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 можно записать следующим образом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Говорят, что функция $f(x)$ непререрывна на множестве X, если $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X. Если $f(x)$ непрерывна на множестве определения, то говорят, что $f(x)$ непрерывна.

Аналогично критерию Гейне существования предела последовательности доказывается следующий критерий Гейне непрерывности.

Теорема 9.1 *(критерий Гейне непрерывности). Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ имеет место сходимость*

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0).$$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $U_\Delta^+ = [x_0, x_0 + \Delta]$, $\Delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Аналогично функция $f(x)$, определенная на $U_\Delta^- = [x_0 - \Delta, x_0]$, $\Delta > 0$, называется непрерывной слева в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Отметим, что из функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке.

Например, функция $f(x) = 1$, $x \ge 0$, $f(x) = -1$, $x < 0$, является непрерывной справа в точке $x_0 = 0$, но не является непрерывной слева в точке $x_0 = 0$, т.к. $f(-0) = -1$, $f(0) = 1$.

Замечание 9.1 *Имеет место аналог критерия Гейне непрерывности слева и справа: функция $f(x)$ непрерывна слева (соответственно справа) тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 - 0$ (соответственно $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 + 0$) имеет место сходимость*

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0).$$

Теорема 9.2 *(теорема о стабилизации знака). Пусть функция f задана на промежутке $|a,b|$ и непрерывна в точке $x_0 \in |a,b|$. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ принимает значения того же знака, что и $f(x_0)$.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для случая, когда x_0 – внутренняя точка промежутка $|a,b|$ и $f(x_0) > 0$. Имеем

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} \ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2}.$$

Отсюда получаем, что $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0 \ \forall x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)]$.

$\square$

Теорема 9.3 *(теорема о локальной ограниченности непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in |a,b|$. Тогда существует окрестность точки x_0, в которой функция f ограничена.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для случая, когда x_0 – внутренняя точка промежутка $|a,b|$. Имеем

$$\varepsilon := 1 \ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 1.$$

Таким образом, $f(x) \in [f(x_0) - 1, f(x_0) + 1] \ \forall x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)]$.

$\square$

Теорема 9.4 *(теорема о непрерывности арифметических комбинаций). Если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если дополнительно $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывна в точке x_0.*

$\diamondsuit$

Утверждение теоремы для суммы и произведения функций вытекает из соответствующих свойств предела функции.

Если $g(x_0) \neq 0$, то по теореме о стабилизации знака функция $g(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки x_0. Потому в этой окрестности определено частное $\frac{f(x)}{g(x)}$. Теперь применяя свойство для предела частного, получаем требуемое утверждение.

$\square$

Классификация точек разрыва

Предположим, что функция $f(x)$, $x \in U_\Delta(x_0)$, является разрывной в точке x_0.

Равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

нарушается, поэтому реализуется один из следующих случаев:

1) предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и конечен, но отличен от $f(x_0)$. В таком случае говорят, что x_0 – точка устранимого разрыва;

2) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. В таком случае говорят, что x_0 – точка конечного скачка;

3) существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ и хотя бы один из них бесконечен. В таком случае говорят, что x_0 – точка бесконечного скачка;

4) хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует. В таком случае говорят, что x_0 – точка неопределенности.

Точки разрыва 1) и 2) относят к точкам разрыва первого рода. Точки разрыва 3) и 4) называют точками разрыва второго рода.

Пример 9.1 *Пусть* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq f(0)=0$, то $x_0=0$ – точка устранимого разрыва.

Пример 9.2 *Пусть* $f(x)=sgn(x)$, *т.е.* $f(x)=1$ *при* $x>0$, $f(x)=-1$ *при* $x<0$, $f(0)=0$.

Так как $f(+0)=1\neq f(-0)=-1$, то $x_0=0$ – точка конечного скачка.

Пример 9.3 *Пусть* $f(x)=\frac{1}{x}$ *при* $x>0$, $f(x)=0$ *при* $x\leq 0$.

Так как существует оба односторонних предела $f(+0)=\infty$, $f(-0)=0$ и один из них бесконечен, то $x_0=0$ – точка бесконечного скачка.

Пример 9.4 *Пусть* $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ *при* $x\neq 0$, $f(0)=0$.

Докажем, что не существует предела $f(+0)$. Воспользуемся критерием Гейне. Рассмотрим две последовательности

$$x'_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ x''_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Так как $f(x'_n)\underset{n\to\infty}{\to}1$, $f(x''_n)\underset{n\to\infty}{\to}-1$, то предел $f(+0)$ не существует. Таким образом, точка $x_0=0$ – точка неопределенности функции f.

Пример 9.5 *Рассмотрим функцию Дирихле $D(x)$, принимающую значение 1 в рациональных точках x и принимающую значение 0 в иррациональных точках x.*

Докажем, что функция Дирихле разрывна в каждой точке. Возьмем произвольную точку $x_0\in\mathbb{R}$. Можно выбрать две последовательности

$$x'_n\to x_0+0,\ x'_n\in\mathbb{Q};$$

$$x''_n\to x_0+0,\ x''_n\notin\mathbb{Q}.$$

Имеем

$$f(x'_n)\underset{n\to\infty}{\to}1,$$

$$f(x''_n)\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Таким образом, предел $f(x_0+0)$ не существует. Таким образом, каждая точка $x\in\mathbb{R}$ является точкой неопределенности функции Дирихле.

10 Непрерывность обратной и сложной функций

Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется строго возрастающей, если

$$\forall x_1, x_2 \in |a, b| : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично определяются строго убывающие, возрастающие, убывающие функции. Такие функции называются монотонными.

Лемма 10.1 *Если функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ монотонна, то для любого $x_0 \in (a, b)$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.*

$\diamondsuit$

Докажем лемму для возрастающей функции. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Тогда

$$\forall x \in (a, x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Следовательно, множество

$$L = \{f(x) : x \in (a, x_0)\}$$

ограничено сверху. По теореме о гранях существует $\sup L = A \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $A \leq f(x_0)$, иначе можно было бы найти $\varepsilon > 0$ такое, что $A - \varepsilon \geq f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in (a, x_0)$, что противоречит определению точной верхней грани. Кроме того,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (a, x_0) : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon.$$

В силу возрастания f имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in [x_\varepsilon, x_0) \Rightarrow f(x) > A - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon : \forall x \in (a, b), 0 < x_0 - x \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) \leq A.$$

Следовательно, $f(x_0 - 0) = A \leq f(x_0)$.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $f(x_0 + 0) = B \geq f(x_0)$, где

$$B = \inf\{f(x) : x \in (x_0, b)\}.$$

$\square$

Замечание 10.1 *Из доказательства леммы вытекает, что для возрастающей функции*

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0),$$

а для убывающей функции

$$f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + 0).$$

Теорема 10.1 *(критерий непрерывности монотонной функции). Для непрерывности возрастающей на отрезке $[a, b]$ функции f необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений был отрезок $[f(a), f(b)]$. Для непрерывности убывающей на отрезке $[a, b]$ функции f необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений был отрезок $[f(b), f(a)]$.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для возрастающей функции. Если функция f тождественна равна постоянной, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $A = f(a)$, $B = f(b)$, $A < B$. Согласно лемме 10.1 имеем

$$\forall x_0 \in (a,b) \Rightarrow f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0).$$

Необходимость.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Возьмем произвольное $y_0 \in (A,B)$. Определим множество

$$S = \{x \in [a,b] : f(x) < y_0\}.$$

Пусть $x_0 = \sup S$.

Докажем, что для любого $x \in [a, x_0)$ имеем

$$f(x) < y_0.$$

Предположим, что это не так, и найдется $x_1 \in [a, x_0)$ такое, что $f(x_1) \ge y_0$. Но тогда в силу возрастания f выполняется $f(x) \ge y_0$ $\forall x \in [x_1, b]$. Из последнего получаем, что $x_0 = \sup S \le x_1$ – противоречие.

Таким образом, $f(x_0 - 0) \le y_0$.

Докажем, что для любого $x \in (x_0, b]$ имеем

$$f(x) \ge y_0.$$

Допустим, найдется $x_2 \in (x_0, b]$ такое, что $f(x_2) < y_0$. Но тогда получаем, что $x_0 = \sup S \ge x_2$ – противоречие.

Таким образом, $f(x_0 + 0) \ge y_0$.

Так как f непрерывна в точке x_0, то

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Следовательно, $f(x_0) = y_0$.

Достаточность.

Предположим, что функция f разрывна в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$. Пусть x_0 – внутренняя точка отрезка $[a,b]$ (случай, когда x_0 является одним из концов отрезка $[a,b]$, рассматривается аналогично).

Тогда выполняется одно из неравенств: $f(x_0 - 0) < f(x_0)$, $f(x_0 + 0) > f(x_0)$. Допустим, выполняется первое неравенство. Возьмем некоторое $\gamma \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$.

С одной стороны,

$$\forall x \in [a, x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0 - 0) < \gamma,$$

с другой стороны,

$$\forall x \in [x_0, b] \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) > \gamma.$$

Поэтому функция f не принимает значение $\gamma \in [A,B]$. Противоречие.

$\square$

Теорема 10.2 *(теорема о непрерывности обратной функции). Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная строго возрастающая функция. Тогда существует обратная функция f^{-1}, которая определена на отрезке $[f(a), f(b)]$, является непрерывной и строго возрастающей.*

$\diamondsuit$

Существование обратной функции f^{-1} следует из биективности отображения $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$. Обратная функция f^{-1} определена на отрезке $[f(a),f(b)]$, а ее значения покрывают отрезок $[a,b]$. Очевидно, что f^{-1} является строго возрастающей. По критерию непрерывности монотонной функции f^{-1} явлется непрерывной.

$\square$

Теорема 10.3 *(теорема о непрерывности сложной функции). Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то функция $y = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \to x_0$ при $n\to\infty$. По критерию Гейне непрерывности функции имеем

$$y_n = f(x_n) \to f(x_0) = y_0, g(y_n) \to g(y_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

$\square$

Непрерывность элементарных функций

1) Непрерывность функции $y = x$ вытекает из определения непрерывности ($\delta(\varepsilon)=\varepsilon$). Согласно теореме о непрерывности арифметических комбинаций заключаем, что многочлен $P_n(x)$ степени n и рациональная функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывны на множестве определения.

2) Функция $y=\sin(x)$ непрерывна в каждой точке $x\in\mathbb{R}$, т.к.

$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x)-\sin x| = |2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)| \le |\Delta x| \underset{\Delta x\to 0}{\to} 0.$$

По теореме о непрерывности сложной функции $y=\cos(x)=\sin(\pi/2-x)$ непрерывна в каждой точке $x\in\mathbb{R}$. Согласно теореме о непрерывности арифметических комбинаций функции $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$ непрерывны на множестве определения.

3) Рассмотрим показательную функцию $y=a^x$, где $a>0$, $a\ne 1$. По определению можно доказать, что функция $f(x)=a^x$, $x\in\mathbb{Q}$ непрерывна в каждой точке. Если $x\in\mathbb{R}$, то полагают $a^x := \sup\limits_{r\in\mathbb{Q}, r\le x} a^r$. Используя монотонность функции a^x и теорему о плотности множества действительных чисел, делаем вывод о непрерывности функции a^x, $x\in\mathbb{R}$.

Из непрерывности показательной функции и теоремы о непрерывности арифметических комбинаций вытекает непрерывность гиперболических функций $y=\operatorname{sh}x$, $y=\operatorname{ch}x$, $y=\operatorname{th}x$, $y=\operatorname{cth}x$ на множестве определения.

4) Логарифмическая функция $y=\log_a x$, $x>0$, $a>0$, $a\ne 1$, а также обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$, $y=\arccos x$, $x\in[-1,1]$, $y=\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbb{R}$, $y=\operatorname{arcctg}x$, $x\in\mathbb{R}$, и обратные гиперболические функции $y=\operatorname{arcsh}\, x$, $x\in\mathbb{R}$, $y=\operatorname{arcch}\, x$, $x\ge 1$, непрерывны по теореме о непрерывности обратной функции.

5) Степенная функция $y=x^a$, $x>0$, $a\in\mathbb{R}$, непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции, т.к. $x^a=e^{a\ln x}$.

11 Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема 11.1 *(теорема о промежуточных значениях). Пусть непрерывная функция $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ принимает значения A, B, тогда она принимает любое промежуточное значение C.*

$\diamondsuit$

Пусть $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$, $A < C < B$, $x_1 < x_2$.

Сначала докажем теорему для случая $C = 0$. Определим множество

$$L = \{x \in |a,b| : f(t) < 0 \ \forall t \in [x_1, x]\}.$$

Очевидно, что множество L непустое и ограниченное сверху. Поэтому существует $x_0 = \sup L$.

Докажем, что $f(x_0 - 0) \leq 0$. Отметим, что $x_0 < b$, так как $f(x_2) = B > 0$. Следовательно, $x_0 \in |a,b|$. Предел $f(x_0 - 0)$ существует, поскольку функция f непрерывна в точке x_0. Если предположить, что $f(x_0 - 0) > 0$, то по теореме о стабилизации знака нашлась бы левосторонняя окрестность точки x_0, в которой f принимает положительные значения. И в таком случае x_0 не может быть точной верхней гранью множества L. Таким образом, $f(x_0 - 0) \leq 0$.

Докажем, что $f(x_0) \geq 0$. Если предположить, что $f(x_0) < 0$, то найдется окрестность точки x_0, в которой f принимает отрицательные значения. В этом случае x_0 не может быть точной верхней гранью множества L. Таким образом, $f(x_0) \geq 0$.

Так как f непрерывна, то $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = 0$.

Для того, чтобы доказать теорему для произвольного C, достаточно провести те же рассуждения для функции $g(x) = f(x) - C$.

$\square$

Теорема 11.2 *(теорема Вейерштрасса). Непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ достигает максимального и минимального значений на отрезке $[a,b]$.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для случая максимального значения.

Пусть $A = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Возьмем возрастающую последовательность (α_n) такую, что

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a,b]$ такая, что

$$f(x_n) \geq \alpha_n.$$

Так как последовательность (x_n) ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \bar{x}.$$

Докажем, что $\bar{x} \in [a,b]$. Если предположить, что точка $\bar{x}$ находится за пределами отрезка $[a,b]$, то найдется окрестность точки $\bar{x}$, которая также не пересекается с отрезком $[a,b]$. Поэтому в этой окрестности нет членов подпоследовательности x_{n_k}, что противоречит сходимости этой подпоследовательности. Таким образом, $\bar{x} \in [a,b]$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$f(x_{n_k}) \geq \alpha_{n_k},$$

получим

$$f(\bar{x}) \geq A.$$

Следовательно, $A < +\infty$ и $f(\bar{x}) = A$. Теорема доказана.

□

Следствие 11.1 *Непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена.*

Условие непрерывности функции $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ можно записать следующим образом:

$$\forall x' \in |a, b| \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, x') > 0 : \forall x'' \in |a, b|, |x'' - x'| \leq \delta(\varepsilon, x') \Rightarrow |f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Если при каждом $\varepsilon > 0$ величина $\delta(\varepsilon, x')$ может быть выбрана не зависящей от x', то говорят, что функция f равномерно непрерывна на промежутке $|a, b|$. Иными словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in |a, b|, |x'' - x'| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Пример 11.1 *Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является непрерывной на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале, так как*

$$\exists \varepsilon_0 = 1 \; \forall \delta \in (0, 1] \; \exists x_0' = \delta/2, x_0'' = \delta/4 \Rightarrow |f(x_0') - f(x_0'')| > \varepsilon_0.$$

Теорема 11.3 *(теорема Кантора). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

♢

Предположим, что f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_0', x_0'' \in [a, b] : |x_0' - x_0''| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0') - f(x_0'')| > \varepsilon_0.$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$, $x_{0,n}'$, $x_{0,n}'' \in [a, b]$ такие, что

$$|x_{0,n}' - x_{0,n}''| \leq \frac{1}{n}, \; |f(x_{0,n}') - f(x_{0,n}'')| > \varepsilon_0.$$

Так как последовательность $(x_{0,n}')$ ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность

$$x_{0,n_k}' \underset{k \to \infty}{\to} x_0 \in [a, b].$$

Так как

$$|x_{0,n_k}' - x_{0,n_k}''| \leq \frac{1}{n_k} \underset{k \to \infty}{\to} 0,$$

то

$$x_{0,n_k}'' \underset{k \to \infty}{\to} x_0.$$

Согласно критерию Гейне непрерывности $f(x_{0,n_k}') \to f(x_0)$, $f(x_{0,n_k}'') \to f(x_0)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$|f(x_{0,n_k}') - f(x_{0,n_k}'')| > \varepsilon_0,$$

получаем $0 > \varepsilon_0$. Противоречие. Теорема доказана.

$\square$

Величину

$$\omega(f, |\alpha, \beta|) = \sup_{x_1, x_2 \in |\alpha, \beta|} |f(x_1) - f(x_2)|$$

называют колебанием функции f на промежутке $|\alpha, \beta|$.

Рассмотрим разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Величину

$$W(f, \{x_k\}) = \max_{1 \le k \le n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])$$

называют колебанием функции f, соответствующим разбиению $\{x_k\}$, а величину $\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$ называют диаметром разбиения $\{x_k\}$.

Теорема 11.4 *(теорема о колебании функции). Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, $(\{x_k\}_m)$, $0 \le k \le n_m$ – последовательность разбиений отрезка $[a, b]$ с диаметрами $\delta_m \to 0$. Тогда*

$$W(f, \{x_k\}_m) \underset{m \to \infty}{\to} 0.$$

$\diamondsuit$

Согласно теореме Кантора

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon.$$

Так как $\delta_m \to 0$, то

$$\exists m_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : \forall m \ge m_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow \delta_m \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x_k - x_{k-1}| \le \delta(\varepsilon) \; \forall k = 1, \ldots, n_m.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, \exists m_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : \forall m \ge m_0(\delta(\varepsilon)) \, \forall k = 1, \ldots, n_m, \, \forall \xi, \eta \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(\xi) - f(\eta)| \le \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что

$$W(f, \{x_k\}_m) \le \varepsilon \; \forall m \ge m_0(\delta(\varepsilon)).$$

Следовательно,

$$W(f, \{x_k\}_m) \underset{m \to \infty}{\to} 0$$

$\square$

12 Определение производной. Производные элементарных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 12.1 *Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для производной используют обозначение $f'(x_0)$. Если предел существует и конечен, то говорят, что функция имеет конечную производную в точке x_0, если предел бесконечен, то полагают $f'(x_0) = \infty$, если предела не существует, то говорят, что функция не имеет производной в точке x_0.

Рассмотрим точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, лежащие на графике функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точки M_0, M_1, называется секущей графика функции $y = f(x)$ и задается уравнением

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0),$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению агрумента Δx.

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M_1 приближается к прямой

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

которую называют касательной к функции $y = f(x)$ в точке x_0. Таким образом, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, который образует касательная с положительным направлением оси Ox.

В частности, из определения прозводной вытекает, что производная $f'(x_0)$ характеризует скорость роста функции $y = f(x)$ в точке x_0, т.е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\to} f'(x_0).$$

Теорема 12.1 *(теорема о непрерывности функции, имеющей конечную производную). Если существует конечная производная $f'(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывная в точке x_0.*

$\diamondsuit$

Из определения производной вытекает

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1), \ \Delta x \to 0.$$

Отсюда получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \ \Delta x \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

$\square$

Теорема 12.2 *(теорема о производных арифметических комбинаций). Если функции $f(x)$, $g(x)$ имеют конечные производные в точке x, то:*

1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$;

2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *при условии* $g(x) \neq 0$.

$\diamondsuit$

Свойство 1) очевидным образом вытекает из определения производной и свойств пределов.

Докажем свойство 2):

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x)) + (f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Докажем свойство 3):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)(f(x+\Delta x)-f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - f(x)g'(x)).$$

$\square$

Теорема 12.3 *(теорема о производной обратной функции). Пусть функция $f(x)$ строго монотонная и непрерывная в некоторой окрестности точки x_0. Предположим, что существует конечная производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $x = g(y)$, которая является строго монотонной и непрерывной, и кроме того, $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

$\diamondsuit$

Существование, строгая монотонность и непрерывность обратной функции $x = g(y)$ вытекает из теоремы о непрерывности обратной функции.

Из биективности функций $f : U_{x_0} \to V_{y_0}$, $g : V_{y_0} \to U_{x_0}$ вытекает, что для любого $\Delta x \neq 0$ такого, что $x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$ существует единственное $\Delta y \neq 0$ такое, что $y_0 + \Delta y \in V_{y_0}$ и $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$. Так как функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\lim_{\Delta y\to 0} \Delta x = 0.$$

Таким образом,

$$g'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Теорема 12.4 *(теорема о производной сложной функции). Если функции $x = \varphi(t)$, $y = f(x)$ соответственно имеют в точках t_0, $x_0 = \varphi(t_0)$ конечные производные, то сложная функция $g(t) = f(\varphi(t))$ имеет конечную производную в точке t_0, которая вычисляется следующим образом:*

$$g'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

♢

Имеем

$$\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0,$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = 0$, то получаем

$$f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0)) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = f'(x_0)(\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta x) =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0))}{\Delta t} = f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

□

Производные элементарных функций

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = \cos(\pi/2 - x) \cdot (\pi/2 - x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha - 1} \frac{(1 + \Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x/x} = \alpha x^{\alpha - 1},\ x > 0, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1},\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N};$$

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x;$$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x} = \frac{1}{x},\ x > 0;$$

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)' = a^x\ln a,\ \ a>0, a\neq 1;$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a},\ \ a>0, a\neq 1, x>0;$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y, x' = \cos y \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ |x|<1;$$

$$(\arccos x)' = (\pi/2 - \arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ |x|<1;$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y, x' = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2},\ \ x\in\mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$y = \operatorname{arcsh} x \Rightarrow x = \operatorname{sh} y, x' = \operatorname{ch} y \Rightarrow (\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y = \operatorname{arcch} x \Rightarrow x = \operatorname{ch} y, x' = \operatorname{sh} y \Rightarrow (\operatorname{arcch} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \ x>1.$$

Пример 12.1 *Найти производную функции* $f(x) = x^x$ *при* $x > 0$.

Имеем $f(x) = x^x = e^{x\ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 12.2 *Найти производную функции* $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Если $x \neq 0$, то имеем

$$f'(x) = \frac{\sin x\cdot x - (1-\cos x)}{x^2}.$$

При $x = 0$ имеем

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin^2(\Delta x/2)}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}.$$

13 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 13.1 *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если существует постоянная A такая, что*

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. При этом произведение $A\Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0)$. Приращение Δx аргумента часто обозначают dx.

Из определения производной и определения дифференцируемости функции в точке вытекает следующий критерий дифференцируемости.

Теорема 13.1 *(критерий дифференцируемости). Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$, при этом $df(x_0) = f'(x_0)dx$.*

Геометрический смысл дифференциала $df(x_0)$ заключается в том, что $A\Delta x$ – есть приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$.

Кроме того, величину $A\Delta x$ можно рассматривать как линейное приближение приращения Δy функции f, т.е.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx A\Delta x$$

для малых Δx.

Определение 13.2 *Правосторонней и левосторонней производной называют пределы*

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \ f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Из определения производной и односторонних производных вытекает, что функция f имеет конечную производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда односторонние производные в точке x_0 существуют, конечны и равны. В таком случае $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Определение 13.3 *Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), а на концах промежутка существуют конечные односторонние производные (если эти концы принадлежат промежутку). В дальнейшем на концах промежутка рассматриваем лишь односторонние производные, а для сокращения записи будем опускать слово "односторонние".*

Определение 13.4 *Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется непрерывно дифференцируемой, если она дифференцируема, и производная $f'(x)$ непрерывна на $|a, b|$.*

Если производная $f'(x)$ является дифференцируемой функцией, то можно определить вторую производную:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Аналогично можно определить рекуррентным образом производную порядка n:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

При этом полагают $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Определение 13.5 *Функцию $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ называют n раз дифференцируемой (пишут $f \in D^n|a,b|$), если она имеет конечные производные до порядка n включительно. Функция $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ называется n раз непрерывно дифференцируемой (пишут $f \in C^n|a,b|$), если функция f является n раз дифференцируемой и все её производные до порядка n включительно непрерывны на $|a,b|$.*

Имеют место следующие включения:

$$C^0|a,b| \supset D^1|a,b| \supset C^1|a,b| \supset \ldots \supset D^n|a,b| \supset C^n|a,b| \supset \ldots$$

Теорема 13.2 *(правило Лейбница). Пусть u, $v \in D^n|a,b|$, тогда*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

$\diamondsuit$

Докажем теорему индукцией по n. База индукции $n = 0$, $n = 1$ очевидна. Допустим, что верна формула

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}.$$

Имеем

$$(uv)^{(m+1)} = ((uv)^{(m)})' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (u^{(k)} v^{(m-k)})' =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (u^{(k+1)} v^{(m-k)} + u^{(k)} v^{(m+1-k)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} u^{(k)} v^{(m+1-k)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m+1-k)} =$$

$$= C_m^m u^{(m+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^{k-1} + C_m^k) u^{(k)} v^{(m+1-k)} + C_m^0 u^{(0)} v^{(m+1)} =$$

$$= C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k u^{(k)} v^{(m+1-k)} + C_{m+1}^0 u^{(0)} v^{(m+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k u^{(k)} v^{(m+1-k)}.$$

□

Дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ зависит от двух переменных x и dx. Если приращение аргумента dx фиксировано, то df является функцией лишь от x. В этом случае можно определить дифференциал второго порядка следующим образом:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx = f''(x)dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$. Аналогично по индукции можно получить

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Пусть $y = f(\varphi(t))$ – сложная функция. Тогда по теореме о производной сложной функции имеем:

$$y'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Отсюда получаем, что

$$dy(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f'(x)dx,$$

где $x = \varphi(t)$. Таким образом, формула для дифференциала первого порядка верна независимо от того x – независимый аргумент или функция от t. Это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Отметим, что дифференциалы высших порядков не обладают инвариантностью формы. Например,

$$d^2(f(\varphi(t))) = d(f'(\varphi(t))\varphi'(t))dt = f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 dt^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

В ряде случае удобно использовать параметрическое задание функций, т.е. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$. Например, верхнюю полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, можно задать параметрически следующим образом: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (0, \pi)$. Предположим, что существует обратная функция $t = t(x)$ для функции $x = x(t)$, $t \in T$. Тогда определена явная функция $y = y(t(x))$, производную которой можно найти следующим образом:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аналогично можно вычислять производные высших порядков от функции, заданной параметрически:

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t}$$

и так далее.

Например, в случае $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (0, \pi)$, получаем:

$$y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тот же самый результат можно получить, дифференцируя явную сложную функцию

$$(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

14 Неопределенный интеграл. Методы вычисления

Пусть задана функция $f(x)$, $x \in |a,b|$. Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, $x \in |a,b|$, такая, что $F'(x) = f(x)\ \forall x \in |a,b|$.

Теорема 14.1 *(теорема об общем виде первообразной). Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $|a,b|$. Функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + C\ \forall x \in |a,b|$, где C – постоянная.*

Достаточность очевидна. Необходимость вытекает из того факта, что любые две функции с совпадающими производными различаются на константу (см. следствие 17.3).

Определение 14.1 *Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, $x \in |a,b|$, называется неопределенным интегралом и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

Из теоремы об общем виде первообразной вытекает, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Из определения неопределенного интеграла вытекает, что операции дифференцирования и неопределенного интегрирования взаимно обратны, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Если для функций $f(x)$, $g(x)$ существуют первообразные на промежутке $|a,b|$, то выполняется свойство линейности неопределенного интеграла, т.е. для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C.$$

Непосредственной проверкой с помощью таблицы производных находятся следующие интегралы:

1. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsh}\ x + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcch}\ x + C$

Методы вычисления неопределенных интегралов

Внесение множителя под знак дифференциала

Если подынтегральную функцию можно представить в виде

$$f(x) = g(u(x))u'(x),$$

то

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u)du = G(u(x)) + C,$$

где G – первообразная для функции g.

Пример 14.1

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C.$$

Замена переменных

Пусть $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая строго монотонная функция, $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\psi(x)) + C,$$

где $t = \psi(x)$ – обратная функция к функции $x = \varphi(t)$.

Пример 14.2

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = [x = \sin t, dx = \cos t dt] = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемые. Так как $(uv)' = u'v + uv'$, то

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Пример 14.3

$$\int x\ln x dx = [u = \ln x, dv = xdx, du = dx/x, v = x^2/2] = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 14.4

$$\int xe^x dx = [u = x, dv = e^x dx, du = dx, v = e^x] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 14.5

$$\int e^x \sin x dx = [u = \sin x, dv = e^x dx, du = \cos x dx, v = e^x] = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$= [u = \cos x, dv = e^x dx, du = -\sin x dx, v = e^x] = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 14.6

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= [u = x, dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2}, du = dx, v = -\frac{1}{2(x^2+1)}] = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

15 Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим рациональную функцию $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$, где $Q(x)$, $P(x)$ – некоторые многочлены с действительными коэффициентами. Не нарушая общности, можно считать, что старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 1.

Рациональную функцию $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ называют правильной, если $\deg Q<\deg P$. Каждую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=S(x)+\frac{T(x)}{P(x)},$$

где $Q(x)=S(x)P(x)+T(x)$, $\deg T<\deg P$.

Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами и старшим коэффициентом 1 можно разложить в произведение линейных многочленов и квадратичных многочленов с отрицательными дискриминантами:

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Рациональные функции вида

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l},\ A,M,N,\alpha,p,q\in\mathbb{R},p^2-4q<0,k,l\in\mathbb{N},$$

называются простейшими дробями.

Теорема 15.1 *(теорема о разложении рациональной функции). Каждую правильную рацинальную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей:*

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

$\diamondsuit$

Имеем $P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$. Отсюда

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_{1,k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{Q(x)-A_{1,k_1}\widetilde{P}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\widetilde{P}(x)},$$

где $\widetilde{P}(x)=(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$.

Выберем A_{1,k_1} так, чтобы $Q(\alpha_1)-A_{1,k_1}\widetilde{P}(\alpha_1)=0$. Это сделать возможно, так как $\widetilde{P}(\alpha_1)\neq 0$. Следовательно,

$$\frac{Q(x)-A_{1,k_1}\widetilde{P}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\widetilde{P}(x)}=\frac{(x-\alpha_1)\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\widetilde{P}(x)}=\frac{\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}\widetilde{P}(x)}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к рациональной функции $\frac{\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}\widetilde{P}(x)}$, мы выделим слагаемое вида $\frac{A_{1,k_1-1}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}}$ и так далее. Тем самым получим, что

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}+\frac{\widehat{Q}(x)}{\widehat{P}(x)},$$

где $\widehat{P}(x) = (x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$.

Представим рациональную функцию $\frac{\widehat{Q}(x)}{\widehat{P}(x)}$ в виде

$$\frac{\widehat{Q}(x)}{\widehat{P}(x)} = \frac{M_{1,l_1}x+N_{1,l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{\widehat{Q}(x)-(M_{1,l_1}x+N_{1,l_1})\overline{P}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\overline{P}(x)},$$

где $\overline{P}(x) = (x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$.

Пусть $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ – комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2+p_1x+q_1$, $\beta_1 \neq 0$. Выберем постоянные M_{1,l_1}, N_{1,l_1} так, чтобы многочлен $\widehat{Q}(x)-(M_{1,l_1}x+N_{1,l_1})\overline{P}(x)$ имел корни $\alpha_1 \pm \beta_1 i$. Это сделать возможно, т.к. $\overline{P}(\alpha_1 \pm \beta_1 i) \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. Таким образом,

$$\frac{\widehat{Q}(x)-(M_{1,l_1}x+N_{1,l_1})\overline{P}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\overline{P}(x)} = \frac{(x^2+p_1x+q_1)\overline{Q}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\overline{P}(x)} = \frac{\overline{Q}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\overline{P}(x)}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к рациональной функции $\frac{\overline{Q}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\overline{P}(x)}$, выделим слагаемое вида $\frac{M_{1,l_1-1}x+N_{1,l_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}$ и так далее. Тем самым получаем искомое представление

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

$\square$

Методы нахождения коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие дроби

Метод соответствующих коэффициентов

Пример 15.1

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{x^2-3x+2} \Rightarrow$$

$$A+B=0, 2A+B=-1 \Rightarrow A=-1, B=1.$$

Метод домножения

Пример 15.2

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Умножим левую и правую часть на x^3 и подставим значение $x=0$, получаем $A_3 = 1$.

Умножим левую и правую часть на x^3, затем продифференцируем и подставим значение $x=0$. Отсюда получаем, что $A_2 = \left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)'\Big|_{x=0} = 0$.

Умножим левую и правую часть на x^3, дважды продифференцируем и подставим $x=0$. Получаем, что $2A_1 = \left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)''\Big|_{x=0} = -4$. Следовательно, $A_1 = -2$.

Умножим левую и правую часть на $(x^2+1)^2$ и подставим значение $x=i$, получим: $M_2 i + N_2 = \frac{1}{i^3} = i \Rightarrow M_2 = 1, N_2 = 1$.

Умножим левую и правую часть на $(x^2+1)^2$, продифференцируем и подставим значение $x = i$. Получаем: $-4 = ((M_1 x + N_1)(x^2+1) + M_2 x + N_2)'\big|_{x=i} = -2M_1 + 2N_1 i + M_2 \Rightarrow N_1 = 0, M_1 = \frac{5}{2}$.

При вычислениях пользовались следующим правилом: если у многочлена $P(x)$ есть корень α кратности k, то число α будет корнем кратности $k-1$ производной $P'(x)$.

Интегрирование простейших дробей

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = \frac{A(x-\alpha)^{1-k}}{1-k} + C, k \neq 1;\ \int \frac{A}{x-\alpha}dx = \ln|x-\alpha| + C;$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}dx = [x+p/2=t, q-p^2/4=a^2>0] =$$

$$= \int \frac{Mt+N-Mp/2}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N-Mp/2}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C;$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}dx = [x+p/2=t, q-p^2/4=a^2>0, N_1 = N-Mp/2] = \int \frac{Mt+N_1}{(t^2+a^2)^l}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + N_1\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l} = \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^l}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^l}dt =$$

$$= [u = t, dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^l}, du = dt, v = \frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{2(1-l)}] =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}} + \frac{N_1 t(t^2+a^2)^{1-l}}{2a^2(1-l)} - \frac{N_1}{2a^2(1-l)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}}.$$

Алгоритм интегрирования рациональных функций

1. Представить рациональную функцию в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции.

2. Разложить правильную рациональную функцию в сумму простейших дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и простейшие дроби из шагов 1 и 2.

16 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Одночленом от двух переменных u, v называется выражение $Au^k v^m$, где $A \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Многочлен от двух переменных – это конечная сумма одночленов от двух переменных. Рациональная функция от двух переменных – это частное двух многочленов $Q(u,v)$, $P(u,v)$. Легко видеть, что множество рациональных функций замкнуто относительно арифметических операций и композиций. В дальнейшем через $R(u,v)$ обозначаем некоторую рациональную функцию от двух переменных, а через $R_1(t)$, $R_2(t), \ldots$ будем обозначать рациональные функции от переменной t.

Интегрирование функций вида $R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n})$, $m, n \in \mathbb{N}$, $|a| + |b| \neq 0, |c| + |d| \neq 0$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}\right) dx = \left[\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, dx = R_1(t)dt\right] =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t^m\right) R_1(t)dt = \int R_2(t)dt.$$

Интегрирование функций вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $b^2 - 4ac \neq 0$, $a \neq 0$

Так как $ax^2 + bx + c \geq 0$, то $a > 0$ или $b^2 - 4ac > 0$.

Указанные функции интегрируются с помощью подстановок Эйлера:

1. $a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$, $dx = R_1(t)dt \Rightarrow$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, \frac{(t^2-c)\sqrt{a}}{b-2t} + t\right) R_1(t)dt = \int R_2(t)dt.$$

2. $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\lambda_1)t \Rightarrow x = \frac{\lambda_1 t^2 - a\lambda_2}{t^2-a}$, $dx = R_1(t)dt \Rightarrow$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R\left(\frac{\lambda_1 t^2 - a\lambda_2}{t^2-a}, \frac{a(\lambda_1-\lambda_2)t}{t^2-a}\right) R_1(t)dt = \int R_2(t)dt.$$

Интегрирование биномиального дифференциала $x^m(a+bx^n)^p$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Интеграл от биномиального дифференциала выражается через элементарные функции лишь в следующих трех случаях:

1. $p \in \mathbb{Z}$;
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;
3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

В первом случае ($p \in \mathbb{Z}$) производится замена $x = t^r$, где r – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n.

Во втором случае ($\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$) производится замена $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель числа p.

В третьем случае ($\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$) производится замена $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель числа p.

Пример 16.1

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-1/4}dx = \Big[m=0, n=4, p=-1/4, a=b=1, \frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbb{Z},$$

$$x^{-4}+1=t^4, x=(t^4-1)^{-1/4}, dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}dt\Big] = \int \frac{t^2}{1-t^4}dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Интегрирование рационально-тригонометрических функций $R(\cos x, \sin x)$

Функции указанного вида интегрируются с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \left[\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right] =$$

$$= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

В ряде частных случаев можно применять следующие подстановки, которые приводят к менее громоздким вычислениям по сравнению с универсальной тригонометрической подстановкой.

1. $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \Rightarrow t = \cos x$;
2. $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \Rightarrow t = \sin x$;
3. $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \Rightarrow t = \operatorname{tg} x$.

Пример 16.2

$$\int \frac{dx}{\sin x} = [t = \operatorname{tg}(x/2)] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Пример 16.3

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}(t-\frac{1}{t})) + C.$$

Далее будет доказано, что любая непрерывная на промежутке I функция $f(x)$ обладает первообразной на этом промежутке, а значит, существует $\int f(x)dx$ на этом промежутке. При этом интеграл от элементарной функции не обязательно является элементарной функцией. Такие интегралы называются неберущимися. Примерами неберущихся интегралов служат следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл вероятности; 2) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус; 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм; 4) $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля.

17 Свойства дифференцируемой функции. Правило Лопиталя

Определение 17.1 *x_0 называется стационарной точкой функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 17.1 *(теорема Ферма). Если x_0 – точка экстремума функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, и функция f дифференцируема в точке x_0, то x_0 – стационарная точка функции f.*

$\diamondsuit$

Предположим, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. Тогда для любых Δx таких, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0.$$

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x > 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x < 0$. Отсюда получаем, что

$$f'_+(x_0) \leq 0,\ f'_-(x_0) \geq 0.$$

Так как $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

$\square$

Замечание 17.1 *Касательная к графику дифференцируемой в точке экстремума функции параллельна оси Ox.*

Теорема 17.2 *(теорема Ролля). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует стационарная точка функции f.*

$\diamondsuit$

По теореме Вейерштрасса существуют точки $\underline{x}$, $\overline{x} \in [a, b]$ такие, что $f(\underline{x}) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(\overline{x}) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Если $f(\underline{x}) = f(\overline{x})$, то функция f постоянная на отрезке $[a, b]$, и каждая точка интервала (a, b) является стационарной точкой функции f. Пусть $f(\underline{x}) < f(\overline{x})$. Так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одна из точек $\underline{x}, \overline{x}$ принадлежит интервалу (a, b). Тогда по теореме Ферма эта точка является стационарной.

$\square$

Замечание 17.2 *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$, то касательная к графику функции f в некоторой точке интервала (a, b) параллельная оси Ox.*

Теорема 17.3 *(теорема Лагранжа). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$\diamondsuit$

Определим функцию

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))(x - a) - (f(x) - f(a))(b - a).$$

Имеем

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

кроме того, функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), поэтому она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0$.

Таким образом,

$$\varphi'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b - a) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Замечание 17.3 *Так как отношение* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *равно угловому коэффициенту секущей, проходящей через концы* $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ *графика функции* $f(x)$, $x \in [a, b]$, *то теорема Лагранжа утверждает существование точки* $c \in (a, b)$, *в которой касательная к графику параллельна секущей* AB.

Следствие 17.1 *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема на интервале* (a, b), *то для любых* $x, x + \Delta x \in [a, b]$ *существует* $\theta = \theta(x, \Delta x) \in (0, 1)$ *такое, что*

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x.$$

♢

Пусть $\Delta x > 0$. По теореме Лагранжа существует $c \in (x, x + \Delta x)$ такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x.$$

Положим $\theta = \frac{c-x}{\Delta x}$. Очевидно, что $\theta \in (0, 1)$ и $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$.

□

Следствие 17.2 *(критерий постоянства дифференцируемой функции). Для постоянства дифференцируемой на промежутке* $|a, b|$ *функции необходимо и достаточно, чтобы ее производная тождественно равнялась нулю на этом промежутке.*

♢

Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Зафиксируем произвольные $x_0, x_0+\Delta x \in |a, b|$. Выберем отрезок $[\alpha, \beta] \subset |a, b|$ так, чтобы $x_0, x_0 + \Delta x \in [\alpha, \beta]$. Так как функция f непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на интервале (α, β), то по следствию 17.1 имеем:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x$$

для некоторого $\theta \in (0, 1)$. Так как $x_0 + \theta\Delta x \in |a, b|$, то $f'(x_0 + \theta\Delta x) = 0$. Следовательно, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

□

Следствие 17.3 *(теорема о функциях с совпадающими производными). Если две дифференцируемые функции имеют на интервале совпадающие производные, то они отличаются на постоянную на этом интервале.*

$\diamondsuit$

Пусть $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a,b)$. Определим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Так как $h'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, то по следствию 17.2 имеем $h(x) \equiv C$, т.е. $f(x) = g(x) + C\ \forall x \in (a,b)$.

$\square$

Теорема 17.4 *(теорема Коши). Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\diamondsuit$

Из теоремы Лагранжа и условия $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ вытекает, что $g(b) - g(a) \neq 0$.

Определим функцию

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует $c \in (a,b)$ такое, что $\varphi'(c) = 0$. Имеем

$$\varphi'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)).$$

Так как $\varphi'(c) = 0$ и $g(b) - g(a) \neq 0$, то

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$\square$

Правило Лопиталя

Пусть $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, через X_a обозначим некоторую проколотую окрестность точки a. При этом окрестность может быть односторонней (в таком случае запись $\lim\limits_{x \to a} \ldots$ будет означать соответствующий односторонний предел), а бесконечность может быть как беззнаковой, так и знаковой.

Теорема 17.5 *(правило Лопиталя). Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции f, g дифференцируемы на X_a;*
2. *$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in X_a$;*
3. *$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) \in \{0, \infty\}$;*
4. *$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

$\diamondsuit$

Случай 1: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

1.1) Предположим, что $a \in \mathbb{R}$. Определим функции $F(x)$, $G(x)$ так, что $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ при $x \in X_a$, и $F(a) = G(a) = 0$. Используя теорему Коши, получаем

$$x \in X_a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \underset{x\to a}{\to} l.$$

1.2) Предположим, что $a = \infty$. Не нарушая общности, можно считать, что $0 \notin X_a$. Сделаем замену переменной $t = \frac{1}{x}$ и рассмотрим функции $\widetilde{f}(t) = f(\frac{1}{t})$, $\widetilde{g}(t) = g(\frac{1}{t})$, в некоторой проколотой окрестности $\widetilde{X}_0$ точки $t_0 = 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to 0} \widetilde{f}(t) = \lim\limits_{t\to 0} \widetilde{g}(t) = 0$ и

$$t \in \widetilde{X}_0 \Rightarrow \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} = \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to\infty}{\to} l.$$

Отсюда и из рассмотренного выше случая ($a \in \mathbb{R}$) получаем, что

$$x \in X_a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} \underset{x\to\infty}{\to} l.$$

Случай 2: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

2.1) Предположим, что $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из условия (4) теоремы вытекает, что

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X_a, 0 < |x - a| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| l - \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \le \varepsilon.$$

Возьмем произвольные $x, \overline{x} \in X_a$, $x \ne \overline{x}$, лежащие в проколотой $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки a, причем точку $\overline{x}$ зафиксируем. Тогда из теоремы Лагранжа и условия $g'(y) \ne 0$ $\forall y \in X_a$ вытекает, что $g(x) - g(\overline{x}) \ne 0$. С помощью теоремы Коши найдем точку c между x, $\overline{x}$ такую, что

$$\begin{aligned} l - \frac{f(x)}{g(x)} &= \left(l - \frac{f(x) - f(\overline{x})}{g(x) - g(\overline{x})} \right) \frac{g(x) - g(\overline{x})}{g(x)} - \frac{f(\overline{x})}{g(x)} + l\frac{g(\overline{x})}{g(x)} = \\ &= \left(l - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right) \left(1 - \frac{g(\overline{x})}{g(x)} \right) - \frac{f(\overline{x})}{g(x)} + l\frac{g(\overline{x})}{g(x)}. \end{aligned}$$

Так как точка c также лежит в проколотой $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки a, то

$$\left| l - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \le \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то найдется $\nu(\varepsilon, \overline{x}) > 0$ такое, что

$$\forall x \in X_a, 0 < |x - a| \le \nu(\varepsilon, \overline{x}) \Rightarrow \left| \frac{f(\overline{x})}{g(x)} \right| \le \varepsilon, \ \left| \frac{g(\overline{x})}{g(x)} \right| \le \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $x \in X_a$, $0 < |x - a| \le \min\{\delta(\varepsilon), \nu(\varepsilon, \overline{x})\}$ выполняется

$$\left| l - \frac{f(x)}{g(x)} \right| \le \varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon + l\varepsilon \le M\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

2.2) Предположим, что $a\in\mathbb{R}$, $l=\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то $f(x)\neq 0$, $f'(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a. Следовательно, можно применить уже доказанную часть теоремы для $\frac{g(x)}{f(x)}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\frac{1}{l}=0\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty=l.$$

2.3) Предположим, что $a=\infty$. Этот случай сводится к случаю конечного a заменой $t=\frac{1}{x}$.
□

Замечание 17.4 *Правило Лопиталя можно применять лишь для раскрытия неопределенностей вида* $\frac{0}{0}$ *и* $\frac{\infty}{\infty}$. *Тем не менее другие виды неопределенностей* $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ *во многих случаях сводятся с помощью арифметических преобразований к неопределенностям вида* $\frac{0}{0}$ *и* $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 17.1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0,\ \alpha>0$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$, $n\in\mathbb{N}$;
3. $\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=0$, $\alpha>0$;
4. $\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

Пример 17.2

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

18 Формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора

Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0. Многочленом Тейлора называется следующий многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Величину $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называют остаточным членом, а представление

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

называется формулой Тейлора.

Далее рассматриваем некоторый интервал $I = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Теорема 18.1 *(теорема об остаточном члене формулы Тейлора). Пусть $f \in D^{n+1}(I)$; $x \in I$; $\varphi \in D(I)$, $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in I \setminus \{x\}$. Тогда между точками x_0 и x существует такое c, что*

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

$\diamondsuit$

Определим функцию

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Имеем

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Кроме того, $\psi(x_0) = R_n(x)$, $\psi(x) = 0$. По теореме Коши

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Отсюда получаем

$$-\frac{R_n(x)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \frac{1}{\varphi'(c)}.$$

$\square$

Следствие 18.1 *(представление остаточного члена в форме Лагранжа). Пусть $f \in D^{n+1}(I)$, $x \in I$. Тогда*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

для некоторого $\theta = \theta(x, x_0) \in (0, 1)$.

$\diamondsuit$

Положим $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ в теореме 18.1:

$$R_n(x) = \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Теперь полагая $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$, получаем требуемое представление.

$\square$

Следствие 18.2 *(представление остаточного члена в форме Коши). Пусть $f \in D^{n+1}(I)$, $x \in I$. Тогда*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

$\diamondsuit$

Положим $\varphi(t) = x - t$ в теореме 18.1:

$$R_n(x) = \frac{-(x-x_0)}{-1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)^n.$$

Полагая $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$, получаем требуемое представление.

$\square$

Следствие 18.3 *(представление остаточного члена в форме Пеано). Пусть $f \in C^n(I)$, тогда $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

$\diamondsuit$

С помощью следствия 18.1 получаем

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Так как $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0, то получаем

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T_n(x) + o(1)(x-x_0)^n,\ x \to x_0.$$

Отсюда получаем требуемое представление для остаточного члена $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

$\square$

Следствие 18.4 *(формула Тейлора в дифференциалах). Пусть $f \in D^{n+1}(I)$, $x_0 + \Delta x \in I$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда*

$$\Delta f = \frac{df(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}$$

для некоторого $\theta = \theta(x_0, \Delta x) \in (0,1)$.

$\diamondsuit$

Используя следствие 18.1, получаем

$$\Delta f = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1} =$$

$$= \frac{df(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}.$$

$\square$

Разложение элементарных функций по формуле Тейлора

1. **Разложение экспоненты**

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \to 0.$$

2. **Разложение синуса**

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow f^{(2l)}(0) = 0, f^{(2l+1)}(0) = (-1)^l;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), x \to 0.$$

3. **Разложение косинуса**

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow f^{(2l)}(0) = (-1)^l, f^{(2l+1)}(0) = 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0.$$

4. **Разложение логарифма**

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n), x \to 0.$$

5. **Разложение степенной функции**

$$f(x) = (1+x)^\mu \Rightarrow f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1);$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu x}{1!} + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), x \to 0.$$

Пример 18.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+o(x^2)} - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

19 Исследование локальных экстремумов функций

Теорема 19.1 *(критерий монотонности дифференцируемой функции). Для возрастания дифференцируемой функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Для убывания дифференцируемой функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$.*

$\diamondsuit$ Докажем теорему для возрастающей функции.

Необходимость. Так как f возрастающая функция, то для любых x, $x_0 \in (a, b)$, $x > x_0$, имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Отсюда получаем, что для любых $x_0 \in (a, b)$ выполняется

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Достаточность. Возьмем произвольные x_1, $x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$. По теореме Лагранжа найдется точка c между x_1 и x_2 такая, что

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2).$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0,$$

т.е. функция f возрастающая. $\square$

Теорема 19.2 *(критерий строгой монотонности дифференцируемой функции). Дифференцируемая функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ строго возрастает (соответственно строго убывает) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ (соответственно $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$) и $f'(x)$ не обращается в тождественный нуль ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.*

Доказательство теоремы вытекает из критерия монотонности дифференцируемой функции и критерия постоянства дифференцируемой функции.

Пример 19.1 *Функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, т.к. $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ и $f'(x)$ обращается в нуль лишь в одной точке.*

Рассмотрим функцию $f : |a, b| \to \mathbb{R}$, и пусть x_0 – внутренняя точка промежутка $|a, b|$.

Точка x_0 называется точкой локального максимума, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \leq f(x_0)$ для любых $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) < f(x_0)$ для любых $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Аналогично определяются точки локального и строгого локального минимума. Все эти точки называются точками локального экстремума функции f.

Теорема 19.3 *(необходимое условие локального экстремума). Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, и точка x_0 является точкой локального экстремума функции f. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство теоремы вытекает из теоремы Ферма и определения точки локального экстремума.

Достаточные условия локального экстремума

Подозрительными точками на точки локального экстремума являются точки, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль, а также точки недифференцируемости функции f.

Теорема 19.4 *(первое достаточное условие локального экстремума). Пусть x_0 – стационарная точка функции f либо точка, в которой функция недифференцируема; функция f непрерывно дифференцируема на интервалах $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ и непрерывна в точке x_0. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ не меняет знак при переходе чере точку x_0, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

$\diamondsuit$ Докажем теорему для локального максимума. На интервале $(x_0-\delta, x_0)$ функция возрастает, а на интервале $(x_0, x_0+\delta)$ – убывает. Следовательно, x_0 – точка локального максимума. $\square$

Теорема 19.5 *(второе достаточное условие локального экстремума). Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума; если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума.*

$\diamondsuit$ Докажем теорему для локального максимума. По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2.$$

По теореме о стабилизации знака $f''(x) < 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, $f(x) \le f(x_0)$ для всех x из этой окрестности. Т.е. x_0 – точка локального максимума. $\square$

Теорема 19.6 *(третье достаточное условие локального экстремума). Пусть функция f является n раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки x_0; $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если n четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума; если n четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума; если n нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

$\diamondsuit$ По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n.$$

По теореме о стабилизации знака $f^{(n)}(x)$ сохраняет тот же знак, что и $f^{(n)}(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому при четном n и $f^{(n)}(x_0) > 0$ имеем $f(x) \ge f(x_0)$; при четном n и $f^{(n)}(x_0) < 0$ имеем $f(x) \le f(x_0)$; а при нечетном n в любой окрестности точки x_0 функция f принимает значения как большие $f(x_0)$, так и меньшие $f(x_0)$. $\square$

20 Выпуклая функция. Исследование точек перегиба

Определение 20.1 *Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если для любых $x_0, x_1 \in |a, b|$, $x_0 \neq x_1$, и $\tau \in (0, 1)$ выполняется*

$$f(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) \leq f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)). \tag{20.1}$$

Если заменить неравенство $\leq$ в соотношении (20.1) на $<$, $\geq$, $>$, то получим соответственно определения строго выпуклой, вогнутой, строго вогнутой функции.

Замечание 20.1 *(геометрическая интерпретация выпуклости функции). Зафиксируем произвольные $x_0, x_1 \in |a, b|$, $x_0 \neq x_1$ (пусть для определенности $x_0 < x_1$). Отрезок секущей, проходящей через концы графика $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$, имеет параметрическое уравнение*

$$x_\tau = x_0 + \tau(x_1 - x_0),\ y_\tau = f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)), \tau \in [0, 1].$$

Таким образом, условие выпуклости, которое можно переписать в виде

$$f(x_\tau) \leq y_\tau,$$

означает, что часть графика функции с концами A_0, A_1 лежит ниже секущей к графику, проходящей через точки A_0, A_1.

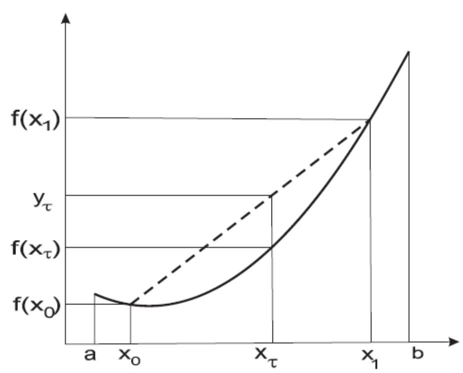

Рис. 2: К определению выпуклости функции

Теорема 20.1 *(критерий выпуклости дифференцируемой функции). Пусть функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ дифференцируемая. Для выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была возрастающей на $|a, b|$.*

$\diamondsuit$ *Необходимость.* Возьмем произвольные x_1, $x_2, x_3 \in |a, b|$, $x_1 < x_2 < x_3$. Положим $\tau = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0, 1)$. Так как $x_2 = x_1 + \tau(x_3 - x_1)$, то из определения выпуклости f вытекают неравенства

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \tau(f(x_3) - f(x_1)),$$

$$f(x_3) - f(x_2) \geq (1-\tau)(f(x_3) - f(x_1)).$$

Учитывая, что $1-\tau = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, можем записать

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{20.2}$$

Пусть M_i – точка с координатами $(x_i, f(x_i))$, $i = 1,2,3$. Дроби, входящие в неравенства (20.2) являются угловыми коэффициентами секущих к графику функции, проходящих соответственно через точки M_2 и M_1, M_3 и M_1, M_3 и M_2. Обозначая соотвествующие угловые коэффициенты через $k(M_1M_2)$, $k(M_1M_3)$, $k(M_2M_3)$, получаем

$$k(M_1M_2) \leq k(M_1M_3) \leq k(M_2M_3). \tag{20.3}$$

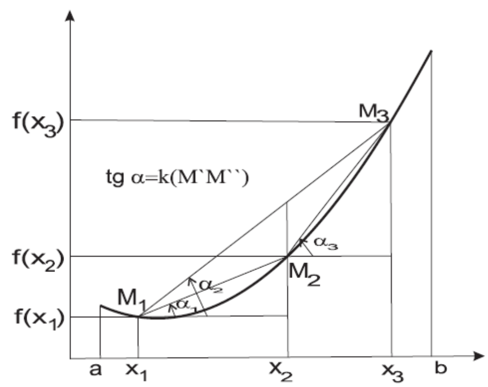

Рис. 3: К неравенству 20.2

Устремляя точку x_2 к точке x_1 в левом неравенстве (20.3), получаем $f'(x_1) \leq k(M_1M_3)$. Аналогично, устремляя точку x_2 к точке x_3 и используя правое неравенство (20.3), получаем $k(M_1M_3) \leq f'(x_3)$. Таким образом, $f'(x_1) \leq f'(x_3)$.

Достаточность. Возьмем произвольные $x_0, x_1 \in |a,b|$, $x_0 < x_1$, $\tau \in (0,1)$. Полагая $x_\tau = x_0 + \tau(x_1 - x_0)$ и используя теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_\tau) - f(x_0) = f'(c_1)(x_\tau - x_0) = f'(c_1)\tau(x_1 - x_0), \tag{20.4}$$

$$f(x_1) - f(x_\tau) = f'(c_2)(x_1 - x_\tau) = f'(c_2)(1-\tau)(x_1 - x_0), \tag{20.5}$$

где $c_1 \in (x_0, x_\tau)$, $c_2 \in (x_\tau, x_1)$.

Умножая неравенство (20.4) на $1-\tau$, неравенство (20.5) – на τ, учитывая возрастание производной $f'(x)$, получаем

$$(1-\tau)(f(x_\tau) - f(x_0)) \leq \tau(f(x_1) - f(x_\tau)). \tag{20.6}$$

Отсюда получаем требуемое неравенство

$$f(x_\tau) \leq f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)).$$

$\square$

Замечание 20.2 *Любая выпуклая функция является непрерывной. Тем не менее, не каждая выпуклая функция является дифференцируемой, например,* $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Следствие 20.1 *(критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции). Пусть функция* $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируемая. Для выпуклости функции* f *необходимо и достаточно, чтобы* $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in |a, b|$.

Доказательство следствия вытекает из критериев выпуклости и монотонности дифференцируемой функции.

Теорема 20.2 *(критерий строгой выпуклости дважды дифференцируемой функции). Пусть функция* $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируемая. Для строгой выпуклости функции* f *необходимо и достаточно, чтобы* $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in |a, b|$ *и* $f''(x)$ *не обращалась в тождественный нуль ни на одном интервале из промежутка* $|a, b|$.

$\diamondsuit$ В силу критерия строгой монотонности дифференцируемой функции достаточно доказать, что условие строгой выпуклости f равносильно условию строгого возрастания производной $f'(x)$. Покажем, что это утверждение вытекает из доказательства критерия выпуклости дифференцируемой функции.

Действительно, условие строгой выпуклости гарантирует выполнение строгих неравенств в (20.2) и, следовательно, в (20.3). Откуда следует строгое возрастание производной $f'(x)$. Обратно, из условия строгого возрастания производной $f'(x)$ следует, что неравенство (20.6) является строгим, что обеспечивает строгую выпуклость функции f. $\square$

Замечание 20.3 *Аналогично можно получить критерии вогнутости и строгой вогнутости функции:*

1) для вогнутости дифференцируемой функции $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ *необходимо и достаточно, чтобы производная* $f'(x)$ *убывала на* $|a, b|$;

2) для вогнутости дважды дифференцируемой функции $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in |a, b|$;

3) для строгой вогнутости дважды дифференцируемой функции f *необходимо и достаточно, чтобы* $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in |a, b|$ *и* $f''(x)$ *не обращалась в тождественный нуль ни на одном интервале из промежутка* $|a, b|$.

Пример 20.1 *В силу критерия строгой выпуклости функция* $f(x) = x^2$ *является строго выпуклой на* $\mathbb{R}$. *А непосредственно из определения выпуклости вытекают многие известные неравенства о средних, в частности, неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим. Полагая в соотношении (20.1)* $f(x) = x^2$, $\tau = \frac{1}{2}$, *получаем*

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 \leq \frac{x_0^2 + x_1^2}{2}.$$

Точки перегиба

Определение 20.2 *Точка непрерывности* x_0 *называется точкой перегиба функции* $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *если существует конечная или бесконечная (определенного знака) производная* $f'(x_0)$, *и* f *выпукла на одном и интервалов* $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ *и вогнута на другом.*

Теорема 20.3 *(необходимое условие перегиба). Пусть функция $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, x_0 – точка перегиба функции f. Тогда $f''(x_0) = 0$.*

$\diamondsuit$ Предположим, что $f''(x_0) \neq 0$. Тогда по теореме о стабилизации знака $f''(x)$ сохраняет постоянный знак в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, в этой же окрестности функция f является либо строго выпуклой, либо строго вогнутой, что противоречит определению точки перегиба. Таким образом, $f''(x_0) = 0$. $\square$

Замечание 20.4 *Точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль, называются точками спрямления. Эти точки являются подозрительными на точки перегиба. Однако, не все такие точки являются точками перегиба. Например, точка $x_0 = 0$ является точкой спрямления функции $f(x) = x^4$, но не является точкой перегиба. Кроме того, точками, подозрительными на точки перегиба, являются точки, в которых функция f непрерывна, но имеет бесконечную (определенного знака) производную, а также точки, в которых функция дифференцируема, но не является дважды дифференцируемой.*

Теорема 20.4 *(первое достаточное условие перегиба). Пусть x_0 – точка, подозрительная на точку перегиба, и пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 – точка перегиба, иначе x_0 не является точкой перегиба.*

Доказательство теоремы вытекает из критериев выпуклости и вогнутости дважды дифференцируемой функции.

Теорема 20.5 *(второе достаточное условие перегиба). Пусть функция f трижды непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба.*

$\diamondsuit$ Пусть для определенности $f'''(x_0) > 0$, тогда по теореме о стабилизации знака $f'''(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Согласно критерию строгой монотонности $f''(x)$ строго возрастает в этой окрестности точки x_0. А так как $f''(x_0) = 0$, то $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Из первого достаточного условия перегиба вытекает, что x_0 – точка перегиба. $\square$

Теорема 20.6 *(третье достаточное условие перегиба). Пусть функция f является n раз непрерывно дифференцируемой на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, и пусть*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Если n – нечетное, то x_0 – точка перегиба, иначе x_0 не является точкой перегиба.

$\diamondsuit$ Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}, \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

где точка c лежит между точками x_0 и x.

Если n четное, то $f''(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0 и, следовательно, f не имеет перегиба в точке x_0. Если n нечетное, то $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Согласно первому достаточному условию перегиба точка x_0 является точкой перегиба. $\square$

21 Глобальный экстремум и асимптоты. Построение графиков функций

Рассмотрим непрерывную функцию $f : |a,b| \to \mathbb{R}$. Подозрительными на точки глобального экстремума являются следующие точки:

1. Стационарные точки f, лежащие в интервале (a,b).

2. Точки интервала (a,b), в которых функция f недифференцируема.

3. Концы промежутка $|a,b|$, принадлежащие этому промежутку.

Если промежуток $|a,b|$ является отрезком, то согласно теореме Вейерштрасса существуют точки глобального минимума и максимума на этом отрезке.

Теорема 21.1 *(теорема о глобальном минимуме выпуклой функции). Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая дифференцируемая функция. Если $x_0 \in (a,b)$ – стационарная точка функции f, то x_0 – точка глобального минимума на интервале (a,b).*

$\diamondsuit$

По критерию выпуклости дифференцируемой функции $f'(x)$ возрастает на (a,b). Так как $f'(x_0) = 0$, то $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, x_0)$ и $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0, b)$. Согласно критерию монотонности функция f убывает на (a, x_0) и возрастает на (x_0, b). Следовательно, x_0 – точка глобального минимума функции f на интервале (a,b).

$\square$

Замечание 21.1 *Аналогично можно доказать, что если $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ – вогнутая дифференцируемая функция, а $x_0 \in (a,b)$ - стационарная точка, то x_0 – точка глобального максимума функции f на интервале (a,b).*

Рассмотрим функцию $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, пусть $x_0 \in (a,b)$.

Определение 21.1 *Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ называется левосторонней вертикальной асимптотой. Аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ называется правосторонней вертикальной асимптотой. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой, если она является как левосторонней, так и правосторонней вертикальной асимптотой.*

Определение 21.2 *Если существуют числа α, β такие, что*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0,$$

то прямая $y = \alpha x + \beta$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$.

Непосредственно из определения наклонной асимптоты вытекает следующая теорема.

Теорема 21.2 *(теорема о наклонной асимптоте). График функции f имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда существует число α такое, что существует конечный предел*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x).$$

При этом

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ \beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x).$$

Замечание 21.2 *Аналогично можно сформулировать определение наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ и получить соответствующую теорему о наклонной асимптоте при $x \to -\infty$.*

Исследование функций и построение графиков

Для построения графика функции $y = f(x)$ исследуют следующие свойства:

1. Находят область определения функции f и определяют точки разрыва.

2. Проверяют функцию f на периодичность. Для периодической функции с периодом T достаточно проводить дальнейшее исследование на отрезке $[0, T]$.

3. Проверяют функцию f на четность и нечетность. Если функция f четная или нечетная, то дальнейшее исследование достаточно проводить для $x \geq 0$.

4. Находят вертикальные и наклонные асимптоты функции f.

5. Находят производную $f'(x)$, определяют участки монотонности функции и исследуют функцию на локальный экстремум.

6. Находят вторую производную $f''(x)$, определяют участки выпуклости и вогнутости и находят точки перегиба.

7. Находят точки пересечения графика с осями координат.

Пример 21.1 *Исследовать функцию $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ и построить ее график.*

1. Функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Функция f не является периодичной, так как f непрерывна и неограничена на $\mathbb{R}$.

3. Функция f не является ни четной, ни нечетной, так как $f(1) = \sqrt[3]{2}$, $f(-1) = 0$.

4. Функция f не имеет вертикальных асимптот, поскольку она непрерывна на $\mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \frac{1}{3},$$

то функция f имеет наклонную асимптоту $y = x + \frac{1}{3}$ при $x \to \pm\infty$.

5. Находим производную
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}x^{-1/3}(3x+2),\ x \neq 0, x \neq -1.$$
На интервалах $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(0, +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-\frac{2}{3}, 0)$ – убывает.

Функция имеет единственную стационарную точку $x_1 = -\frac{2}{3}$. При переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x_1 = -\frac{2}{3}$ – точка локального максимума.

Функция f недифференцируема в точках $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. При переходе через точку $x_2 = -1$ производная $f'(x)$ не меняет знак, поэтому эта точка не является точкой локального экстремума. При переходе через точку $x_3 = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому точка $x_3 = 0$ является точкой локального минимума.

6. Находим вторую производную
$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-5/3}x^{-4/3},\ x \neq 0, x \neq -1.$$
На интервале $(-\infty, -1)$ функция выпуклая, а на интервалах $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ – вогнутая.

Точек спрямления функции нет. Точки $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ являются подозрительными на точки перегиба. При переходе через точку $x_3 = 0$ функция f не меняет характер выпуклости и вогнутости, поэтому эта точка на является точкой перегиба. При переходе через точку $x_2 = -1$ функция меняет характер с выпуклости на вогнутость. Кроме того, существует производная $f'(-1) = +\infty$. Следовательно, $x_2 = -1$ является точкой перегиба.

7. График функции пересекает оси координат в точках $(-1, 0)$, $(0, 0)$.

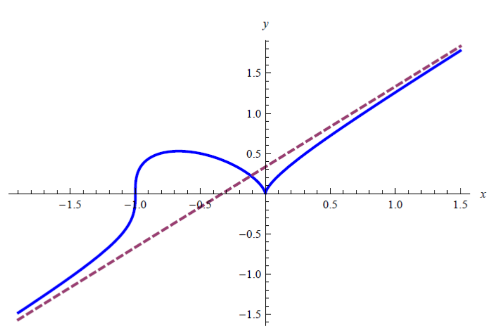

Рис. 4: График функции $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$

22 Определенный интеграл. Необходимые условия интегрируемости

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также разбиение отрезка $[a, b]$ точками $\{x_k\}_{k=0}^n$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Обозначим через $\delta\{x_k\}$ – диаметр разбиения $\{x_k\}$, т.е.

$$\delta\{x_k\} = \max_k \Delta x_k.$$

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем точку ξ_k и определим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{22.1}$$

Замечание 22.1 *Рассмотрим фигуру ограниченную прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f(x)$. Такая фигура называется криволинейной трапецией. Величина $f(\xi_k)\Delta x_k$ составляет площадь прямоугольника, основанием которого является горизонтальный отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, а высотой – вертикальный отрезок $[0, f(\xi_k)]$. Интегральная сумма σ – сумма площадей таких прямоугольников – дает приближенное значение площади криволинейной трапеции.*

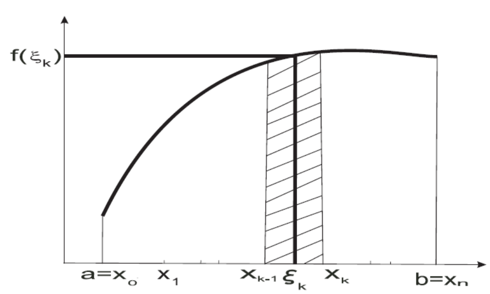

Рис. 5: Геометрический смысл интегральной суммы

Определение 22.1 *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ (далее интегрируемой), если существует число I такое, что*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b],\ \ \delta\{x_k\} \le \delta(\varepsilon), \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| \le \varepsilon.$$

В этом случае число I называют определенным интегралом Римана (далее определенным интегралом) от функции f на отрезке $[a, b]$. Пишут

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Лемма 22.1 *(М-лемма интегрируемости). Если существуют числа I, M такие, что*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a,b],\ \delta\{x_k\} \le \delta(\varepsilon), \forall\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| \le M\varepsilon,$$

то функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема 22.1 *(первое необходимое условие интегрируемости). Пусть функция $f : [a,b]$ является интегрируемой. Тогда для любой последовательности разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$, $m \in \mathbb{N}$, с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ при любом выборе точек $\xi_k^m \in [x_{k-1}^m, x_k^m]$ последовательность интегральных сумм*

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m$$

сходится к $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $m \to \infty$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующее $\delta(\varepsilon) > 0$ из определения 22.1. Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$, то найдется m_0 такое, что для всех $m \ge m_0$ выполняется неравенство

$$\delta_m \le \delta(\varepsilon).$$

Из определения 22.1 для любых $m \ge m_0$ получаем

$$\left|\sigma_m - \int_a^b f(x)dx\right| \le \varepsilon,$$

откуда вытекает требуемая сходимость.

$\square$

Теорема 22.2 *(второе необходимое условие интегрируемости). Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема, то f ограничена.*

$\diamondsuit$

Предположим, что f неограничена на $[a,b]$. Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$. Существует отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция f неограничена. Зафиксируем все точки ξ_k, участвующие в определении интегральной суммы, кроме точки x_i. В таком случае интегральную сумму можно рассматривать как функцию от $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Эта функция является неограниченной, поскольку f неограничена на $[x_{i-1}, x_i]$. Таким образом,

$$\forall I \in \mathbb{R}\ \exists\varepsilon_0 = 1\ \forall\delta > 0\ \exists\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a,b], \delta\{x_k\} \le \delta, \exists\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| > \varepsilon_0,$$

что противоречит определению интегрируемости функции f.

$\square$

23 Критерий Коши. Интегрируемость непрерывной функции

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также две произвольные интегральные суммы σ и τ, соответствующие разбиениям $\{x_k\}_{k=0}^n$ и $\{z_r\}_{r=0}^s$ отрезка $[a, b]$, т.е.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \ \tau = \sum_{r=1}^{s} f(\eta_r)\Delta z_r.$$

Теорема 23.1 *(критерий Коши интегрируемости). Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta\{x_k\} \leq \delta(\varepsilon), \ \forall \{z_r\} : \delta\{z_r\} \leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k, \forall \eta_r \Rightarrow |\sigma - \tau| \leq \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Необходимость очевидным образом вытекает из определения 22.1 и неравенства $|\sigma - \tau| \leq |\sigma - I| + |\tau - I|$, где $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Достаточность. Функция f является ограниченной на $[a, b]$. Действительно, если бы функция f была неограниченной, то разность $|\sigma - \tau|$ можно было бы сделать сколь угодно большой, фиксируя все точки ξ_k, η_r, кроме одной точки ξ_i из отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция неограничена (см. доказательство теоремы 22.1).

Так как f ограничена, то все интегральные суммы ограничены одной и той же постоянной:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b - a).$$

Возьмем последовательность интегральных сумм (τ_m) с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Согласно принципу выбора существует сходящаяся подпоследовательность $\tau_{m_l} \underset{l\to\infty}{\to} A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$ из условия теоремы. Так как $\lim\limits_{l\to\infty} \tau_{m_l} = A$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \delta_{m_l} = 0$, то существует номер l_0 такой, что

$$|\tau_{m_{l_0}} - A| \leq \varepsilon, \ \delta_{m_{l_0}} \leq \delta(\varepsilon).$$

Тогда для любого разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n : \delta\{x_k\} \leq \delta(\varepsilon)$, для любых $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполняется

$$|\sigma - A| \leq |\sigma - \tau_{m_{l_0}}| + |\tau_{m_{l_0}} - A| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Согласно М-лемме интегрируемости функция f является интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

$\square$

Интегрируемость непрерывной функции

Для разбиений $\{x_k\}_{k=0}^n$, $\{z_r\}_{r=0}^s$ отрезка $[a, b]$ через Δ_{kr} обозначим длину пересечения двух отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $[z_{r-1}, z_r]$. Такое пересечение может быть пустым для некоторых k, r, в таком случае $\Delta_{kr} = 0$.

Лемма 23.1 *Пусть δ_1, δ_2 – диаметры разбиений $\{x_k\}_{k=0}^n$, $\{z_r\}_{r=0}^s$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{r=1}^s f(\eta_r)\Delta z_r = \sum_{k,r:|\xi_k-\eta_r|\le\delta_1+\delta_2} (f(\xi_k)-f(\eta_r))\Delta_{kr}.$$

$\diamondsuit$

Так как

$$\sum_{k=1}^n \Delta_{kr} = \Delta z_r,\ \sum_{r=1}^s \Delta_{kr} = \Delta x_k,$$

то

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{r=1}^s f(\eta_r)\Delta z_r = \sum_{k=1}^n\sum_{r=1}^s f(\xi_k)\Delta_{kr} - \sum_{r=1}^s\sum_{k=1}^n f(\eta_r)\Delta_{kr} = \sum_{k=1}^n\sum_{r=1}^s (f(\xi_k)-f(\eta_r))\Delta_{kr}.$$

Если $|\xi_k-\eta_r| > \delta_1+\delta_2$, то отрезки $[x_{k-1},x_k]$, $[z_{r-1},z_r]$ не пересекаются, и в этом случае $\Delta_{kr}=0$.

$\square$

Теорема 23.2 *(теорема об интегрируемости непрерывной функции). Если функция $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна, то f интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

$\diamondsuit$

По теореме Кантора функция f равномерна непрерывна на отрезке $[a,b]$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)>0, \forall x',x''\in[a,b] : |x'-x''|\le\delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Rightarrow |f(x')-f(x'')|\le\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Возьмем две произвольные интегральные суммы σ, τ с диаметрами разбиения, меньшими $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Тогда по лемме 23.1 получаем

$$|\sigma-\tau| = \left|\sum_{k,r:|\xi_k-\eta_r|\le\delta(\frac{\varepsilon}{b-a})} (f(\xi_k)-f(\eta_r))\Delta_{kr}\right| \le \sum_{k,r:|\xi_k-\eta_r|\le\delta(\frac{\varepsilon}{b-a})} |f(\xi_k)-f(\eta_r)|\Delta_{kr}\le\varepsilon.$$

Согласно критерию Коши функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$.

$\square$

Замечание 23.1 *Условие непрерывности функции f не является неоходимым для интегрируемости функции. Например, функция $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$ не является непрерывной на отрезке $[-1,1]$, тем не менее эта функция интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(x)dx = 0.$$

А условие ограниченности функции f не является достаточным для интегрируемости. Функция Дирихле $D(x)$, принимающая значение 1 в рациональных точках и принимающая значение 0 в иррациональных точках, не является интегрируемой ни на каком отрезке $[a,b]$, $a<b$, поскольку при любом сколь угодно малом разбиении отрезка можно построить интегральные суммы, равные $b-a$ и 0 (соответственно выбирая точки ξ_k рациональными в первом случае и иррациональными во втором случае).

24 Геометрический смысл определенного интеграла

Фигурой будем называть любое непустое ограниченное множество точек на плоскости Oxy.

Прямоугольником будем называть множество точек вида

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in |a, b|, y \in |c, d|\},$$

где $a \leq b$, $c \leq d$ – некоторые числа. Площадь прямоугольника P полагают равной $(b-a)(d-c)$ по определению.

Фигура называется простой, если ее можно представить как объединение конечного числа прямоугольников. Площадь простой фигуры по определению равна сумме площадей прямоугольников, из которых она состоит.

Для каждой фигуры Φ определим два числа

$$s_* = \sup_{P_* \subset \Phi} \{\text{пл.} P_*\}, \; s^* = \inf_{\Phi \subset P^*} \{\text{пл.} P^*\},$$

где супремум и инфимум берутся соответственно по всем вписанным простым фигурам P_* в фигуру Φ и описанным простым фигурам P^* около фигуры Φ.

Если $s_* = s^*$, то фигуру Φ называют измеримой по Жордану (далее измеримой), а величину $s = s_* = s^*$ принимают за меру (площадь) фигуры Φ.

Теорема 24.1 *(критерий измеримости). Фигура Φ измеримая тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримые фигуры Φ_*, Φ^* такие, что*

$$\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*, \; \textit{пл.}\Phi^* - \textit{пл.}\Phi_* \leq \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Необходимость. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как фигура Φ измеримая, то существуют простые вписанная и описанная фигуры P_*, P^* такие, что пл.Φ − пл.$P_* \leq \frac{\varepsilon}{2}$, пл.$P^*$ − пл.$\Phi \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, пл.$P^*$ − пл.$P_* \leq \varepsilon$. Поэтому можно взять $\Phi_* = P_*$, $\Phi^* = P^*$.

Достаточность. Предположим, что фигура Φ не является измеримой, т.е.

$$s^* - s_* = q > 0. \tag{24.1}$$

По условию теоремы можно найти измеримые фигуры Φ_*, Φ^* такие, что

$$\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*, \; \text{пл.}\Phi^* - \text{пл.}\Phi_* \leq q/4. \tag{24.2}$$

Так как фигуры Φ_*, Φ^* измеримые, то существуют простые фигуры P_*, P^* такие, что

$$P_* \subset \Phi_*, \; P^* \subset \Phi^*, \; \text{пл.}P^* - \text{пл.}\Phi^* \leq q/4, \; \text{пл.}\Phi_* - \text{пл.}P_* \leq q/4. \tag{24.3}$$

Из неравенств (24.2) и (24.3) получаем

$$\text{пл.}P^* - \text{пл.}P_* \leq 3q/4. \tag{24.4}$$

Поскольку простые фигуры P_*, P^* соответственно вписаны и описаны относительно фигуры Φ, то неравенство (24.4) противоречит неравенству (24.1). Следовательно, фигура Φ измерима.

$\square$

Следствие 24.1 *Пусть фигура* Φ *является измеримой. Тогда* $пл.\Phi = \sup\{пл.\Phi_*\} = \inf\{пл.\Phi^*\}$, *где супремум и инфимум берутся соответственно по всем вписанным и описанным измеримым фигурам* Φ_*, Φ^*.

Пример 24.1 *Пусть* Φ – *фигура, состоящая из точек, лежащих внутри квадрата* $[0,1]^2$ *и имеющих рациональные координаты.*

Покажем, что фигура Φ из определения 24.1 не является измеримой. Действительно, в силу плотности множества рациональных чисел во множестве действительных чисел получаем, что $s^* = 1$, $s_* = 0$.

Замечание 24.1 *Если в определении простой фигуры допустить не более чем счетные объединения попарно непересекающихся прямоугольников, то приходим к определению меры Лебега. Можно доказать, что если фигура измерима по Жордану, то она измерима по Лебегу, и значения мер совпадают. Обратное неверно: в частности, фигура из примера 24.1 имеет нулевую меру Лебега.*

Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим криволинейную трапецию Φ, ограниченную прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$.

Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$. Согласно теореме Вейерштрасса существует точка максимума $\overline{\xi}_k$ и точка минимума $\underline{\xi}_k$ функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$.

Построим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{\xi}_k)\Delta x_k, \ \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)\Delta x_k.$$

Эти суммы соответствуют площадям простых фигур, описанной и вписанной относительно криволинейной трапеции Φ.

Теперь возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a,b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ и определим соответствующие интегральные суммы Дарбу

$$\overline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\overline{\xi}_k^m)\Delta x_k^m, \ \underline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\underline{\xi}_k^m)\Delta x_k^m.$$

Согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Из первого необходимого условия интегрируемости вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\sigma}_m = \lim_{m\to\infty} \underline{\sigma}_m = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Отсюда и из критерия измеримости вытекает, что криволинейная трапеция Φ измерима. А из следствия 24.1 вытекает, что пл.$\Phi = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Площадь криволинейного сектора

Криволинейным сектором Φ называется фигура, ограниченная полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(0 \le \alpha < \beta \le 2\pi)$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Возьмем произвольное разбиение $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Согласно теореме Вейерштрасса существует точка максимума $\overline{\tau}_k$ и точка минимума $\underline{\tau}_k$ функции $r(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$.

Построим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\overline{\tau}_k)\Delta\varphi_k, \ \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\underline{\tau}_k)\Delta\varphi_k.$$

Эти суммы соответствуют площадям описанной и вписанной фигур Φ^*, Φ_*, состоящих из n круговых секторов. Отметим, что любой круг является измеримым, как фигура, состоящая из двух криволинейных трапеций. Отсюда очевидным образом вытекает измеримость кругового сектора и, как следствие, измеримость фигур Φ^*, Φ_*.

Возьмем последовательность разбиений $\{\varphi_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ и определим соответствующие интегральные суммы Дарбу

$$\overline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2} r^2(\overline{\tau}_k^m)\Delta\varphi_k^m, \ \underline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2} r^2(\underline{\tau}_k^m)\Delta\varphi_k^m.$$

Согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi)d\varphi$ существует, а из первого необходимого условия интегрируемости вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\sigma}_m = \lim_{m\to\infty} \underline{\sigma}_m = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Отсюда и из критерия измеримости вытекает, что криволинейная трапеция Φ измерима. А из следствия 24.1 вытекает, что пл.$\Phi = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

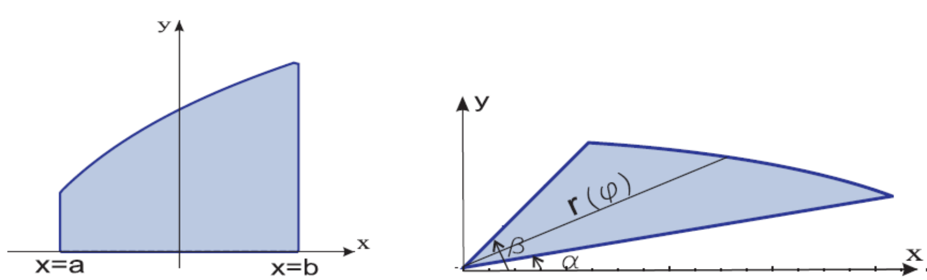

Рис. 6: Криволинейная трапеция и криволинейный сектор

25 Длина кривой

Пусть заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$ на отрезке $[a,b]$. Отображение $M : t \to (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, называется кривой на плоскости.

Точка $M(a)$ называется началом кривой, точка $M(b)$ – концом кривой. Кривая называется замкнутой, если ее начало и конец совпадают.

Кривая называется простой, если она не содержит точек самопересечения, т.е. любые две точки кривой $M(t_1)$, $M(t_2)$ $(t_1 < t_2)$ либо различны, либо являются началом и концом кривой.

Кривая называется гладкой, если функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$ $\forall t \in (a,b)$.

Пример 25.1 *Функции $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, задают единичную окружность на плоскости Oxy. Данная окружность является простой замкнутой гладкой кривой. Если в данном примере заменить отрезок $[0,2\pi]$ на отрезок $[0,4\pi]$, то получим другую кривую, несмотря на то, что множества точек, лежащих на этих кривых совпадают.*

Рассмотрим простую кривую l, имеющую параметрическое уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$. Возьмем некоторое разбиение $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и рассмотрим ломаную $L = M_0M_1 \dots M_n$, вписанную в кривую l, где M_i – точка с координатами $(x(t_i), y(t_i))$. Кривая l называется спрямляемой, если величина $\sup\{\text{дл.}L\}$ конечна, где супремум берется по всем ломаным L, вписанным в кривую l. Если кривая l называется спрямляемой, то величину $\sup\{\text{дл.}L\}$ принимают за длину кривой l.

Теорема 25.1 *(теорема о длине кривой). Пусть кривая l, имеющая параметрическое уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, является простой и гладкой. Тогда кривая l является спрямляемой и ее длине находится по формуле*

$$\text{дл.}l = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

$\Diamond$ Докажем, что кривая l является спрямляемой. Рассмотрим произвольную ломаную L, вписанную в кривую l. Длина ломаной $L = M_0 \dots M_n$ находится следующим образом:

$$\text{дл.}L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Применяя теорему Лагранжа, получим, что

$$\text{дл.}L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\Delta t_k,$$

где $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$. По теореме Вейерштрасса существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| \le M, \ \sup_{t\in[a,b]} |y'(t)| \le M.$$

Отсюда получаем
$$\text{дл.}L \le \sqrt{2}M(b-a).$$
В силу теоремы о гранях существует конечный $\sup\{\text{дл.}L\}$, следовательно, кривая l является спрямляемой.

Возьмем последовательность ломаных L_m, $m \in \mathbb{N}$, так, чтобы дл.$L_m \underset{m\to\infty}{\to}$ дл.l, а диаметры δ_m разбиений $\{t_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a,b]$, соответствующих ломаным L_m, стремились к нулю при $m \to \infty$.

Имеем
$$\text{дл.}L_m = \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\eta_k^m))^2}\Delta t_k^m = \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\xi_k^m))^2}\Delta t_k^m + A_m, \qquad (25.1)$$
где
$$A_m = \sum_{k=1}^{n_m}(y'(\eta_k^m) - y'(\xi_k^m))\frac{y'(\eta_k^m) + y'(\xi_k^m)}{\sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\eta_k^m))^2} + \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\xi_k^m))^2}}\Delta t_k^m.$$
Легко видеть, что дробь в правой части последнего соотношения по модулю не превосходит 1. Кроме того,
$$|y'(\eta_k^m) - y'(\xi_k^m)| \le W(y', \{t_k^m\}),$$
где $W(y', \{t_k^m\})$ – колебание функции $y'(t)$ по разбиению $\{t_k^m\}$.

Следовательно, получаем оценку
$$|A_m| \le W(y', \{t_k^m\}) \sum_{k=1}^{n_m} \Delta t_k^m = (b-a)W(y', \{t_k^m\}).$$

Так как $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$, то согласно теореме о колебании непрерывной функции
$$\lim_{m\to\infty} |A_m| \le (b-a)\lim_{m\to\infty} W(y', \{t_k^m\}) = 0. \qquad (25.2)$$

Функция $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Поэтому из первого необходимого условия интегрируемости получаем, что
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\eta_k^m))^2}\Delta t_k^m = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \qquad (25.3)$$
Таким образом, из (25.1), (25.2), (25.3) вытекает требуемая формула для длины кривой l. □

Следствие 25.1 *Если простая гладкая кривая l задается явно в декартовых координатах, т.е. $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, то, полагая $x = t$, $y = f(t)$, находим, что*
$$\text{дл.}l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$
Если простая гладкая кривая l задается в полярных координатах $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то получаем
$$\text{дл.}l = \int_\alpha^\beta \sqrt{((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2}d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

26 Свойства определенного интеграла. Методы вычисления

Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[a,b]$ функция. По определению полагаем

$$\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx, \ \int\limits_a^a f(x)dx := 0.$$

1. *Линейность.* Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{26.1}$$

$\diamondsuit$ Так как f, g интегрируемы на $[a,b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \forall \{x_k\}_{k=0}^n : \delta\{x_k\} \le \delta(\varepsilon), \ \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$$

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \varepsilon, \ \left|\sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^b g(x)dx\right| \le \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\left|\sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k - \int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx\right| \le |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon.$$

Согласно М-лемме к определению интеграла Римана, получаем, что функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и выполняется равенство (26.1). $\square$

2. *Монотонность.* Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, и $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

$\diamondsuit$ Возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a,b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Так как $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то для любого m имеем

$$\sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m \le \sum_{k=1}^{n_m} g(\xi_k^m)\Delta x_k^m.$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $m \to \infty$, используя при этом первое необходимое условие интегрируемости, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

$\square$

3. *Аддитивность.* Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любых α, β, $\gamma \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int\limits_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

$\diamondsuit$ Пусть $\alpha \le \gamma \le \beta$. Так как функция f непрерывна на каждом отрезков $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \gamma]$, $[\beta, \gamma]$, то она интегрируема на каждом из этих отрезков. Возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ такую, что точка γ совпадает с одной из точек разбиения, назовем ее $x_{l_m}^m$. Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m = \sum_{k=1}^{l_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m + \sum_{k=l_m+1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, используя первое необходимое условие интегрируемости, получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int\limits_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

$\square$

4. *Теорема о среднем.* Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Иными словами, существует точка $c \in [a, b]$ такая, что площадь прямоугольника $[a, b] \times [0, f(c)]$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$.

$\diamondsuit$ По теореме Вейерштрасса существуют $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a, b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Имеют место следующие оценки для интегральных сумм

$$m\sum_{k=1}^{n_m} \Delta x_k^m \le \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m \le M\sum_{k=1}^{n_m} \Delta x_k^m.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$m(b - a) \le \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le M(b - a).$$

Так как $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \in [m, M]$, то по теореме о промежуточных значениях непрерывно функции существует $c \in [a, b]$ такое, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$\square$

5. *Теорема Барроу.* Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$, является первообразной для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

   $\diamondsuit$ Возьмем произвольную точку $x_0 \in [a, b]$. Пусть для определенности x_0 – внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Применяя теорему о среднем и используя непрерывность функции f, получаем

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \lim_{\Delta x \to 0} f(c_{\Delta x}) = f(x_0),$$

   где $c_{\Delta x}$ – некоторая точка, лежащая между x_0 и $x_0 + \Delta x$. $\square$

Методы вычисления определенных интегралов

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F(x)$ – первообразная для непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$. Выражение

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

называют двойной подстановкой.

Из теоремы Барроу вытекает следующая формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b,$$

которая связывает определенный и неопределенный интегралы.

Замена переменной

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ – непрерывно дифференцируемая биективная функция, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{26.2}$$

$\diamondsuit$ Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Так как $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, то согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Требуемая формула замены переменных (26.2) доказана. $\square$

Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

$\diamondsuit$

По формуле Ньютона-Лейбница и формуле интегрирования по частям для неопределенного интеграла получаем

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = \int u(x)v'(x)dx\Big|_a^b = \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right)\Big|_a^b =$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

$\square$

Пример 26.1

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \Big[x = \sin t, t \in [0,\pi/2]\Big] = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 26.2

$$\int\limits_1^2 \ln x dx = \Big[u = \ln x, dv = dx, du = dx/x, v = x\Big] = x\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

27 Критерий Дарбу. Классы интегрируемых функций

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$. Определим интегральное колебание функции f по разбиению $\{x_k\}$:

$$\Omega(f, \{x_k\}) := \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])\Delta x_k,$$

где

$$\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Теорема 27.1 *(необходимое условие Дарбу интегрируемости). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon), \forall\{x_k\}_{k=0}^n : \delta\{x_k\} \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{x_k\}) \le \varepsilon.$$

♢ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши интегрируемости, получаем

$$\exists\delta(\varepsilon) > 0, \forall\{x_k\}_{k=0}^n : \delta\{x_k\} \le \delta(\varepsilon), \forall\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta x_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27.1}$$

Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ с диаметром разбиения $\delta\{x_k\} \le \delta(\varepsilon)$. По определению точной верхней грани на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ можно найти точки ξ_k, η_k такие, что

$$\sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |f(\xi) - f(\eta)| \le f(\xi_k) - f(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{2(b - a)}. \tag{27.2}$$

Из соотношений (27.1), (27.2) получаем

$$\Omega(f, \{x_k\}) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |f(\xi) - f(\eta)|\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\left(f(\xi_k) - f(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{2(b - a)}\right)\Delta x_k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k) - f(\eta_k))\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Теорема 27.2 *(достаточное условие Дарбу интегрируемости). Если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ такое, что $\Omega(f, \{x_k\}) \le \varepsilon$, то функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

♢ Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\Omega(f, \{x_k\}) \le \frac{\varepsilon}{4},$$

и рассмотрим соответствующую интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Докажем, что функция f ограничена. Предположим противное, тогда существует отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция f неограничена. Тогда

$$\Omega(f, \{x_k\}) \geq \sup_{\xi,\eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)| \Delta x_i = \infty,$$

что противоречит неравенству $\Omega(f, \{x_k\}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Таким образом, существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a, b]$.

Возьмем произвольные разбиения $\{z_r\}_{r=0}^s$, $\{y_l\}_{l=0}^m$ отрезка $[a, b]$ с диаметрами $\delta\{z_j\} \leq \frac{\varepsilon}{8Mn}$, $\delta\{y_l\} \leq \frac{\varepsilon}{8Mn}$ и рассмотрим произвольные интегральные суммы по этим разбиениям:

$$\tau = \sum_{r=1}^{s} f(\eta_r) \Delta z_r, \ \ \rho = \sum_{l=1}^{m} f(\zeta_l) \Delta y_l.$$

Обозначим через Δ_{kr} длину пересечения отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $[z_{r-1}, z_r]$. Имеем

$$\sigma - \tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k - \sum_{r=1}^{s} f(\eta_r) \Delta z_r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{s} (f(\xi_k) - f(\eta_r)) \Delta_{kr} =$$

$$= \sum_{k,r:[z_{r-1},z_r] \subset [x_{k-1},x_k]} (f(\xi_k) - f(\eta_r)) \Delta_{kr} + \sum_{k,r:[z_{r-1},z_r] \not\subset [x_{k-1},x_k]} (f(\xi_k) - f(\eta_r)) \Delta_{kr} := \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Оценим слагаемое Σ_1 :

$$|\Sigma_1| \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{s} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta_{kr} = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \sum_{r=1}^{s} \Delta_{kr} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k = \Omega(f, \{x_k\}) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (27.3)$$

Оценим слагаемое Σ_2. Так как $[z_{r-1}, z_r] \not\subset [x_{k-1}, x_k]$, то либо отрезки $[z_{r-1}, z_r]$, $[x_{k-1}, x_k]$ не пересекаются, либо отрезок $[z_{r-1}, z_r]$ содержит хотя бы один из концов отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. В первом случае $\Delta_{kr} = 0$. Таким образом, существует не более n значений индекса r, при которых отрезок $[z_{r-1}, z_r]$ имеет непустое пересечение хотя бы с одним из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. Обозначим эти индексы через $r_1, \ldots, r_t$ $(t \leq n)$. Таким образом получаем оценку:

$$|\Sigma_2| \leq \sum_{j=1}^{t} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\eta_{r_j})| \Delta_{kr_j} \leq 2M \sum_{j=1}^{t} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kr_j} =$$

$$= 2M \sum_{j=1}^{t} \Delta z_{r_j} \leq 2Mt \max_j \Delta z_{r_j} \leq 2Mn \frac{\varepsilon}{8Mn} = \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (27.4)$$

Из соотношений (27.3), (27.4) вытекает, что $|\sigma - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично доказывается, что $|\sigma - \rho| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем

$$|\tau - \rho| \leq |\sigma - \tau| + |\sigma - \rho| \leq \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши интегрируемости функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Замечание 27.1 *Из теорем 27.1 и 27.2 вытекает, что существование хотя бы одного разбиения со сколь угодно малым интегральным колебанием обеспечивает малость интегральных колебаний для всех разбиений с достаточно малым диаметром.*

Замечание 27.2 *Необходимое и достаточное условия Дарбу позволяют перенести свойство аддитивности определенного интеграла, доказанное в предыдущем параграфе, на все интегрируемые на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$. Действительно, если функция f интегрируема на $[a,b]$, то согласно необходимому условию Дарбу интегральное колебание $\Omega(f,\{x_k\})$ может быть сделано сколь угодно малым по всем разбиениям $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$ с достаточно малым диаметром разбиения. Тогда на отрезках $[a,c]$, $[c,b]$ ($a<c<b$) интегральные колебания также могут быть сделаны сколь угодно малыми. Поэтому в силу достаточного условия Дарбу функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$, $[c,b]$. Аналогично, из интегрируемости функции на отрезках $[a,c]$, $[c,b]$ вытекает ее интегрируемость на отрезке $[a,b]$.*

Классы интегрируемых функций

1. Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна, то f интегрируема на отрезке $[a,b]$.

2. Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ монотонна, то f интегрируема на отрезке $[a,b]$.

   $\diamondsuit$ Пусть функция f возрастающая на отрезке $[a,b]$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ с диаметром разбиения $\delta\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Так как
   $$\omega(f,[x_{k-1},x_k])=f(x_k)-f(x_{k-1}),$$
   то
   $$\Omega(f,\{x_k\})=\sum_{k=1}^n\omega(f,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k\le\delta\sum_{k=1}^n(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\delta(f(b)-f(a))\le\varepsilon.$$
   По достаточному условию Дарбу функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. $\square$

3. Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$ и интегрируема на каждом отрезке $[\alpha,\beta]$, $a<\alpha<\beta<b$, то функция f интегрируема на $[a,b]$.

   $\diamondsuit$ Существует постоянная $M>0$ такая, что $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]$. Возьмем произвольные $\varepsilon>0$, $\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{8M})$. Так как функция f интегрируема на отрезке $[a+\delta,b-\delta]$, то по необходимому условию Дарбу можно найти разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a+\delta,b-\delta]$ такое, что $\Omega(f,\{x_k\})\le\frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем разбиение $\{z_r\}_{r=0}^{n+2}$ отрезка $[a,b]$ такое, что $z_0=a$, $z_1=x_0,\ldots,z_{n+1}=x_n$, $z_{n+2}=b$. Тогда имеем
   $$\Omega(f,\{z_r\})\le 2M\delta+\Omega(f,\{x_k\})+2M\delta\le\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$
   Таким образом, по достаточному условию Дарбу функция f интегрируема на $[a,b]$. $\square$

4. Если функция f кусочно монотонная на $[a,b]$ (т.е. существует разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ такое, что на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ функция f монотонна), то f интегрируема на $[a,b]$.

   $\diamondsuit$ Справедливость этого утверждения вытекает из аддитивности определенного интеграла и интегрируемости монотонной на отрезке функции. $\square$

5. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

   $\diamondsuit$ Пусть $\{x_k\}_{k=0}^n$ – разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что на каждом интервале (x_{k-1}, x_k) функция f непрерывна. Так как f непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (x_{k-1}, x_k)$ и f ограничена на $[x_{k-1}, x_k]$, то f интегрируема на $[x_{k-1}, x_k]$. Теперь из аддитивности определенного интеграла вытекает, что f интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\square$

6. Если функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $f(x)g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

   $\diamondsuit$ Так как функции f, g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то согласно второму необходимому условию интегрируемости функции f, g ограничены на отрезке $[a, b]$, т.е. существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$. Для любых $x', x'' \in [a, b]$ имеет место оценка

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \leq |g(x'')||f(x') - f(x'')| + |f(x')||g(x') - g(x'')| \leq$$
$$\leq M|f(x') - f(x'')| + M|g(x') - g(x'')|. \qquad (27.5)$$

   Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$. Из оценки (27.5) вытекает, что

$$\omega(fg, [x_{k-1}, x_k]) \leq M(\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) + \omega(g, [x_{k-1}, x_k])).$$

   Отсюда получаем

$$\Omega(fg, \{x_k\}) \leq M\Omega(f, \{x_k\}) + M\Omega(g, \{x_k\}). \qquad (27.6)$$

   Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из необходимого условия Дарбу вытекает, что существует разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\Omega(f, \{x_k\}) \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \ \Omega(g, \{x_k\}) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

   В силу (27.6) получаем, что $\Omega(fg, \{x_k\}) \leq \varepsilon$. Поэтому согласно достаточному условию Дарбу функция $f(x)g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\square$

Замечание 27.3 *Если функции f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы и различаются на конечном множестве аргументов, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$. В силу сказанного будем считать интегрируемыми функции, заданные на конечных промежутках $|a, b|$, если после доопределения такой функции на концах промежутка получается интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция.*

28 Рекомендации к решению задач по теме "Пределы и непрерывность"

Предел последовательности

1. Удобно пользоваться следующей шкалой роста функций при $n \to \infty$:

$$\log_a n \ll n^a \ll a^n \ll n! \ll n^n \ (a = const > 1).$$

2. Если последовательность является монотонной, то для доказательства её сходимости достаточно доказать ограниченность последовательности.

3. Для доказательства того, что неотрицательная последовательность a_n является бесконечно малой, пользуются леммой о сжатой последовательности, находя такую последовательность $b_n \geq a_n$, для которой свойство бесконечной малости устанавливается легко.

4. Если общий член последовательности является элементарной функцией от n часто вычисление предела последовательности сводят к вычислению соответствующего предела функции (к которому применяют правило Лопиталя, формулу Тейлора или замечательные пределы).

Пример 28.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Заметим, что $1 \cdot n < 2 \cdot (n-1) < 3 \cdot (n-2) < \ldots$. Действительно, если $1 \leq a < b \leq \frac{n}{2}$, то $a(n-a) < b(n-b)$.

Следовательно, $n! > (1 \cdot n)^{n/2}$. Отсюда получаем, что

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{n^{1/2}}.$$

По лемме о сжатой последовательности $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Замечание 28.1 *В дальнейшем будет доказано более сильное утверждение, дающее асимптотическую формулу для факториала (формула Стирлинга):*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ n \to \infty.$$

Пример 28.2 *Доказать, что последовательность сходится*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Заметим, что

$$\ln n = (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n-1) - \ln(n-2)) + \ldots + (\ln 2 - \ln 1) + \ln 1 =$$

$$= \ln\big(1+\frac{1}{n-1}\big)+\ln\big(1+\frac{1}{n-2}\big)+\ldots+\ln\big(1+\frac{1}{1}\big)+\ln 1.$$

Таким образом,

$$a_n = 1+\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\ln\big(1+\frac{1}{k-1}\big)\Big).$$

Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x)=\ln(1+x)$ при $x=\frac{1}{k-1}$:

$$\ln(1+x)=x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}\Rightarrow |\ln(1+x)-x|\le\frac{x^2}{2}.$$

Для доказательства сходимости последовательности (a_n) применим критерий Коши. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и некоторые m, $n\in\mathbb{N}$, $m>n$. Имеем

$$|a_m-a_n| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m}\Big(\frac{1}{k}-\ln\big(1+\frac{1}{k-1}\big)\Big)\Big| \le \Big|\sum_{k=n+1}^{m}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\Big)\Big|+\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\Big(\frac{1}{k-1}-\ln\big(1+\frac{1}{k-1}\big)\Big)\Big|\le$$

$$\le\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{(k-1)^2}<\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\Big(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\Big)<\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}<\frac{2}{n}\le\varepsilon.$$

Таким образом, достаточно взять $n_0=\frac{2}{\varepsilon}$.

Замечание 28.2 *Предел последовательности $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ обозначается через C и называется постоянной Эйлера-Маскерони. Известно, что $C=0.57721...$ Предполагается, что постоянная C является иррациональной, но этот факт до сих пор не доказан.*

Пример 28.3 *Доказать, что последовательность $a_n=\sin n$ не является сходящейся.*

Допустим, существует $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$. Тогда

$$A=\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\cos 1+\sin 1\cos n)=A\cos 1+\sin 1\lim_{n\to\infty}\cos n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\cos n = A\frac{1-\cos 1}{\sin 1}=A\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}.$$

Так как $\sin^2 n+\cos^2 n=1$, то $A^2(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2})=1$. Повторяя те же рассуждения для $\sin(n+2)$, докажем, что $A^2(1+\mathrm{tg}^2\,1)=1$. Противоречие, следовательно, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ не существует.

Пример 28.4 *Найти предел последовательности (a_n), заданной рекуррентно:*

$$a_n=\sin a_{n-1},\ a_0=1.$$

Так как $\sin x<x$ при $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, то последовательность (a_n) монотонно убывает. Кроме того, последовательность (a_n) ограничена снизу: $a_n\ge 0$. Следовательно, существует конечный предел $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Отсюда $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\sin A$. Это равенство возможно лишь при $A=0$.

Предел функции: преобразование неопределенностей и применение правила Лопиталя

Пример 28.5

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}.$$

Пример 28.6

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$$

как произведение бесконечно малой функции на ограниченную.

Пример 28.7

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=[1^\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(1/n)+\cos(1/n)}{\cos(1/n)-\sin(1/n)}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\sin(1/n)}{\cos(1/n)-\sin(1/n)}\right)^{\frac{\cos(1/n)-\sin(1/n)}{2\sin(1/n)}\cdot\frac{2n\sin(1/n)}{\cos(1/n)-\sin(1/n)}}=e^2.$$

Предел функции: использование формулы Тейлора

Пример 28.8

$$\lim_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{2}{x}+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{4}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})-2(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}))+1\right)=-\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 28.9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6))-x(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})x^4+o(x^4))}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{3!}3x^2\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!})-(x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{9})}{x^5}=\frac{1}{120}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120}+\frac{1}{9}=\frac{19}{90}.$$

Определение точек разрыва и их типов

Пример 28.10 *Исследовать на непрерывность функцию* $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

Если $|x|\le 1$, то $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=1$;
если $|x|>1$, то $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=x^2$.
Легко видеть, что функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 28.11 *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \operatorname{sgn}\sin x$.

Функция имеет разрывы в тех точках x, для которых $\sin x = 0$, т.е. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Т.к. $\sin x$ меняет знак при переходе через точки $x_n = \pi n$, то эти точки являются точками конечного скачка функции $y = \operatorname{sgn}\sin x$.

Исследование равномерной непрерывности

Пример 28.12 *Исследовать функцию* $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, 1)$, *на равномерную непрерывность.*

Т.к. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то по теореме Кантора $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0, 1]$. Следовательно, $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0, 1)$.

Пример 28.13 *Исследовать функцию* $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, *на равномерную непрерывность.*

В данном случае теорема Кантора неприменима, т.к. множество задания не является подмножеством отрезка. Исследуем равномерную непрерывность по определению. Возьмем произвольные x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, имеем:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = |2 \sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}|.$$

Если $|x| \leq 1$, то $|\sin x| \leq |x|$ (см. параграф 8). Если $|x| > 1$, то $|x| > 1 \geq |\sin x|$. Таким образом,

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq 2\frac{|x_1 - x_2|}{2} \cdot 1 = |x_1 - x_2|.$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Поэтому функция $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, равномерно непрерывна.

Пример 28.14 *Исследовать функцию* $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, *на равномерную непрерывность.*

Докажем по определению, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной. Возьмем произвольное $\delta > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 = x_1 + \delta$, имеем:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \delta^2 + 2x_1\delta.$$

Если выбрать $x_1 \geq \frac{1}{\delta}$, то получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq 2,$$

следовательно, функция f не является равномерно непрерывной.

Замечание 28.3 *Если дифференцируемая функция* $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную производную* $f'(x)$, *то согласно теореме Лагранжа имеем* $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)||x_1 - x_2| \leq M|x_1 - x_2|$, *то выполняется условие равномерной непрерывности (достаточно взять* $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$*).*

29 Рекомендации к решению задач по теме ”Производная и формула Тейлора”

Вычисление производных и дифференциалов

1. Для вычисления производной от функций вида $(f(x))^{g(x)}$ переходят к экспоненциальной форме записи, т.е. $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, а затем применяют теорему о производной сложной функции.

2. Если функция имеет кусочное задание, то в точках стыка различных элементарных функций производную считают по определению или через теорему об односторонних производных.

3. Производные высших порядков часто вычисляют с помощью правила Лейбница или формулы Тейлора.

Пример 29.1 $(\sqrt[x]{x})' = (x^{1/x})' = (e^{(\ln x)/x})' = e^{(\ln x)/x} \cdot (\frac{\ln x}{x})' = \sqrt[x]{x}\frac{1/x \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \sqrt[x]{x}\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Пример 29.2 *Найти производную функции*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x};$$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Пример 29.3 *Исследовать функцию* $f(x) = \arcsin(\sin x)$ *на дифференцируемость в точке* $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Если $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, то $f(x) = x$;
если $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, то $f(x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.
Так как $f'_-(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq f'_+(\frac{\pi}{2}) = -1$, то не существует производной $f'(\frac{\pi}{2})$, и следовательно, $f(x)$ не является дифференцируемой в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 29.4 *Исследовать функцию на дифференцируемость*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{Q}$, то выбирая $\Delta x = \frac{\sqrt{2}}{n}$, получим, что

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{nx_0^2}{\sqrt{2}} \to -\infty, n \to \infty.$$

Если $x_0 \neq 0$, $x_0 \notin \mathbb{Q}$, то выбирая $\Delta x = x_{0,n} - x_0$ (где $x_{0,n}$ – приближение по недостатку порядка n числа x_0), получим:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_{0,n}^2}{x_{0,n} - x_0} \to -\infty, n \to \infty.$$

Если $x_0 = 0$, то

$$\left|\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right| = \left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right| \leq |\Delta x| \to 0, \Delta x \to 0.$$

Таким образом, функция f дифференцируема лишь в точке $x_0 = 0$.

Пример 29.5 *Кардиоида имеет уравнение в полярных координатах $r = a(1 + cos\varphi)$. Вычислить y'_x, где $y = y(x)$ – уравнение кардиоиды в декартовых координатах.*

Имеем

$$x = r\cos\varphi = a\cos\varphi(1 + \cos\varphi),\ y = r\sin\varphi = a\sin\varphi(1 + \cos\varphi).$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{-\sin\varphi - \sin 2\varphi}.$$

Пример 29.6 *Найти $d^{100}y$, где $y = x\,\mathrm{sh}\,x$.*

Имеем $d^{100}y = y^{(100)}(x)dx^{100}$. По правилу Лейбница находим

$$y^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k x^{(k)}(\mathrm{sh}\,x)^{100-k} = x\,\mathrm{sh}\,x + 100\,\mathrm{ch}\,x.$$

Пример 29.7 *Пусть $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Найти $f^{(100)}(0)$.*

Имеем

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^4} = (1-x)(1 + x^4 + x^8 + \ldots) = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \ldots + x^{100} + o(x^{100}).$$

По формуле Тейлора

$$c_{100} = 1 = \frac{f^{(100)}(0)}{100!} \Rightarrow f^{(100)}(0) = 100!$$

Разложение функций по формуле Тейлора

Пример 29.8 *Разложить функцию e^{2x-x^2} до члена с x^5.*

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2x - x^2}{1!} + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + o(x^5) =$$

$$= 1 + \frac{2x - x^2}{1!} + \frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2!} + \frac{8x^3 - 12x^4 + 6x^5 + o(x^5)}{3!} + \frac{16x^4 - 32x^5 + o(x^5)}{4!} + \frac{32x^5 + o(x^5)}{5!} + o(x^5) =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} - \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

Пример 29.9 *Решить уравнение относительно постоянных A, B :*

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5), x \to 0.$$

Имеем:

$$\cos x(x + Bx^3) = \sin x(1 + Ax^2) + O(x^6),$$

$$(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5))(x + Bx^3) = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6))(1 + Ax^2),$$

$$x + x^3(B - \frac{1}{2}) + x^5(\frac{1}{24} - \frac{1}{2}B) + O(x^6) = x + x^3(A - \frac{1}{6}) + x^5(\frac{1}{120} - \frac{1}{6}A) + O(x^6),$$

$$B - \frac{1}{2} = A - \frac{1}{6}, \frac{1}{24} - \frac{1}{2}B = \frac{1}{120} - \frac{1}{6}A \Rightarrow A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{1}{15}.$$

Исследование локальных экстремумов и перегибов

Пример 29.10 *Исследовать функцию $f(x)$ на локальный экстремум в точке $x = 0$, где*

$$f(x) = \begin{cases} |x|(2 + \cos \frac{1}{x}), x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Так как $f(x) > 0 = f(0)$ для всех $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, то $x = 0$ – точка строгого локального минимума.

Пример 29.11 *Исследовать функцию $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ на локальный экстремум и перегибы.*

Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x+1}, x \geq 1, \\ xe^{x-1}, 0 \leq x < 1, \\ -xe^{x-1}, x < 0. \end{cases}$$

Находим производную

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x+1} - xe^{-x+1}, x > 1, \\ e^{x-1} + xe^{x-1}, 0 < x < 1, \\ -e^{x-1} - xe^{x-1}, x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

в точках 0, 1 функция недифференцируема, т.к. левосторонняя и правосторонняя производные не совпадают.

При переходе через точку $x = 1$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, т.е. $x = 1$ – точка локального максимума.

При переходе через точку $x = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т.е. $x = 0$ – точка локального минимума.

Так как $f''(x) = -2e^{x-1} - xe^{x-1}$ при $x < 0$, то $f''(-1) = -e^{-2} < 0$, то $x_0 = -1$ – точка локального максимума.

Находим вторую производную

$$f''(x) = \begin{cases} -2e^{-x+1} + xe^{-x+1}, x > 1, \\ 2e^{x-1} + xe^{x-1}, 0 < x < 1, \\ -2e^{x-1} - xe^{x-1}, x < 0. \end{cases}$$

В точках $0, 1$ функция не имеет производной $f'(x)$, поэтому достаточно исследовать точки спрямления, т.е. точки, в которых $f''(x) = 0$. Имеется две точки спрямления: $x = \pm 2$.

Так как $f'''(x) = 3e^{-x+1} - xe^{-x+1}$ при $x > 1$, то $f'''(2) = e^{-1} \neq 0$. Поэтому точка $x = 2$ является точкой перегиба.

Аналогично, $f'''(x) = -3e^{x-1} - xe^{x-1}$ при $x < 0$, $f'''(-2) = -e^{-3} \neq 0$. Т.е. точка $x = -2$ также является точкой перегиба.

Глобальный экстремум и доказательство неравенств

Пример 29.12 *Исследовать функцию* $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $x \in [-10, 10]$, *на глобальный экстремум.*

Так как множество задания функции – отрезок, то достаточно рассмотреть концы отрезка, стационарные точки и точки, в которых функция может быть недифференцируема.

Имеем

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, x \in [-10, 1] \cup [2, 10], \\ -x^2 + 3x - 2, x \in (1, 2). \end{cases}$$

Находим

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, x \in (-10, 1) \cup (2, 10), \\ -2x + 3, x \in (1, 2). \end{cases}$$

Таким образом, достаточно рассмотреть точки $x = -10, 1, \frac{3}{2}, 2, 10$.

Имеем $\max\limits_{x \in [-10,10]} f(x) = f(-10) = 132$, $\min\limits_{x \in [-10,10]} f(x) = f(1) = f(2) = 0$.

Пример 29.13 *Доказать неравенства* $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \ \forall x > 0$.

Рассмотрим функцию $g(x) = x - \sin x$, $x > 0$. Так как $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ и не существует интервалов, на которых $g'(x)$ тождественно равна нулю, то $g(x)$ строго возрастающая. Следовательно, $g(x) > g(0) = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Имеем $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f''(x) = -\sin x + x$. По доказанному $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$. Следовательно, производная $f'(x)$ строго возрастает. Поэтому $f'(x) > f'(0) = 0$. Отсюда вытекает, что функция $f(x)$ строго возрастает. Следовательно, $f(x) > f(0) = 0$, что и требовалось доказать.

30 Рекомендации к решению задач по теме "Неопределенный интеграл"

Преобразование подынтегральной функции и использование линейности интеграла

В отдельных случаях возможно преобразовать произведение функций $f(x)g(x)$ в сумму новых функций, т.е. $f(x)g(x) = h_1(x) + h_2(x)$, тогда

$$\int f(x)g(x)dx = \int h_1(x)dx + \int h_2(x)dx.$$

На практике чаще всего этот прием применяют в случае произведений тригонометрических функций. Также удобно пользоваться формулами понижения степени для тригонометрических функций.

Пример 30.1

$$\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx = \int \frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4} \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (3\sin 2x - \sin 6x + 3\sin 2x \cos 4x - \sin 6x \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (6\sin 2x - 2\sin 6x - 3\sin 2x + 3\sin 6x - \sin 2x - \sin 10x) dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{96}\cos 6x + \frac{1}{160}\cos 10x + C.$$

Интегрирование рациональных функций

Пусть $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ – действительная рациональная функция, где $P(x)$ – многочлен со старшим коэффициентом 1.

1. Если $\deg Q(x) \geq \deg P(x)$, то выделяют целую часть рациональной функции, т.е. делят многочлен $Q(x)$ на многочлен $P(x)$ с остатком: $Q(x) = T(x)P(x) + S(x)$. Получаем $R(x) = T(x) + \frac{S(x)}{P(x)}$. Интегрируют многочлен $T(x)$.

2. Рассматриваем правильную рациональную функцию $\frac{S(x)}{P(x)}$. Находим корни многочлена $P(x)$ и раскладываем многочлен $P(x)$ в произведение многочленов вида $(x-\alpha_i)^{k_i}$, $(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$, где α_i, $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $k_i, l_i \in \mathbb{N}$, $p_i^2 - 4q_i < 0$.

3. Представляем правильную рациональную функцию $\frac{S(x)}{P(x)}$ в виде суммы простейших дробей вида $\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}$, $\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_i x+q_i)^j}$ с неопределенными коэффициентами $A_{i,j}, M_{i,j}, N_{i,j}$:

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l_i} \frac{M_{i,j}x + N_{i,j}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}. \qquad (30.1)$$

4. Находим неопределенные коэффициенты простейших дробей. На практике наиболее эффективен следующий метод.

   (a) Пусть α_i – действительный корень многочлена $P(x)$ кратности k_i. Для каждого $j = 0, \dots, k_i - 1$ проводим следующую процедуру: умножаем левую и правую часть соотношения (30.1) на $(x-\alpha_i)^{k_i}$, дифференцируем левую и правую часть j раз и подставляем значение $x = \alpha_i$. В результате мы получаем равенство
   $$\left(\frac{S(x)}{P(x)/(x-\alpha_i)^{k_i}}\right)^{(j)}\Bigg|_{x=\alpha_i} = A_{i,j} \cdot j!,$$
   откуда находим коэффициент $A_{i,j}$.

   (b) Пусть γ_i, $\overline{\gamma_i}$ – пара комплексно-сопряженных корней многочлена $P(x)$ кратности l_i. Для каждого $j = 0, \dots, l_i - 1$ делаем следующие шаги: умножаем левую и правую часть (30.1) на $(x-\gamma_i)^{l_i}$, дифференцируем левую и правую часть j раз и подставляем значение $x = \gamma_i$. В результате получаем равенство
   $$\left(\frac{S(x)}{P(x)/(x-\gamma_i)^{k_i}}\right)^{(j)}\Bigg|_{x=\gamma_i} = \left(\frac{M_{i,j}x + N_{i,j}}{(x-\overline{\gamma_i})^j}\right)^{(j)}\Bigg|_{x=\gamma_i},$$
   откуда находим действительные коэффициенты $M_{i,j}$, $N_{i,j}$.

   (c) В том случае, если некоторые из комплексно- сопряженных корней γ_i, $\overline{\gamma_i}$ приводят к дальнейшим громоздким вычислениям с комплексными числами, можно воспользоваться следующим методом подстановки частных значений: пусть на предыдущих шагах вычислены K из $N = 2\sum\limits_{i=1}^{t} l_i$ коэффициентов $M_{i,j}$, $N_{i,j}$; для нахождения оставшихся $N-K$ коэффициентов в левую и правую часть соотношения (30.1) (с учетом уже найденных коэффициентов) последовательно подставляют $N-K$ различных частных значений $x = x_1, \dots, x_{N-K}$ и находят оставшиеся коэффициенты $M_{i,j}$, $N_{i,j}$.

5. Проинтегрировать простейшие дроби, полученные на предыдущем шаге.

Пример 30.2 *Проиллюстрируем приведенный алгоритм интегрирования рациональной функции на примере. Поскольку исходная рациональная функция правильная, то шаг 1 пропускаем.*
$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \int \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)(1-x+x^2)} =$$
$$= \left[\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{1-x+x^2}\right]$$

Умножаем обе части на $(1+x)^2$ и подставляем $x = -1$:
$$\frac{1}{6} = B.$$

Умножаем обе части на $(1+x)^2$, дифференцируем и подставляем $x = -1$:
$$(((1+x^2)(1-x+x^2))^{-1})'\big|_{x=-1} = A \Rightarrow A = -\frac{1}{36}(-6-6) = \frac{1}{3}.$$

Умножаем обе части на $x - i$ и подставляем $x = i$:

$$\frac{1}{4i} = \frac{Ci + D}{2i} \Rightarrow C = 0, D = \frac{1}{2}.$$

Подставляя значение $x = 0$, получаем:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + F \Rightarrow F = 0.$$

Подставляя значение $x = 1$, получаем:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + E \Rightarrow E = -\frac{1}{3}.$$

Получаем

$$I = \frac{1}{3}\ln|1 + x| - \frac{1}{6}\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x}{1 - x + x^2}dx$$

$$\int \frac{x}{1 - x + x^2}dx = \int \frac{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Основные методы рационализации подынтегральной функции

1. От иррациональности вида $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $n \in \mathbb{N}$, избавляются с помощью подстановки

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^n.$$

2. От иррациональности вида $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ избавляются с помощью подстановок Эйлера:

$$a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t;$$

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \lambda_1)t,$$

где λ_1 – корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3. Биномиальный дифференциал $x^m(a + bx^n)^p$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, рационализируется с помощью подстановок Чебышева:

$$p \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^r;$$

$$\frac{m + 1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + bx^n = t^s;$$

$$\frac{m + 1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow ax^{-n} + b = t^s,$$

где r – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n; s – знаменатель числа p.

4. Интегралы от рационально-тригонометрических функций $R(\cos x, \sin x)$ сводятся к интегрированию рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$
В ряде случаев подстановки вида $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$ приводят к менее громоздким рациональным функциям.

Пример 30.3

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = [\sqrt[6]{x+1} = t, x = t^6-1, dx = 6t^5dt] = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}dt =$$
$$= 6\int(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1)dt + 6\int\frac{t-1}{1+t^2}dt =$$
$$= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\ln(1+t^2) - 6\operatorname{arctg} t + C.$$

Пример 30.4

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}dx = \left[\sqrt{x^2-2x+2} = x+t \Rightarrow x = \frac{2-t^2}{2+2t}, dx = \frac{-t^2-2t-2}{2(1+t)^2}dt\right] =$$
$$= -\frac{1}{4}\int\frac{2+t}{1+t}\cdot\frac{t^2+2t+2}{(1+t)^2}dt = -\frac{1}{4}\int(1+\frac{1}{1+t})(1+\frac{1}{(1+t)^2})dt =$$
$$= -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\ln|1+t| + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{8(1+t)^2} + C.$$

Пример 30.5

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = \left[m=-3, n=2, p=-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}; x^2+1=t^2, x=(t^2-1)^{1/2}, dx = \frac{tdt}{(t^2-1)^{1/2}}\right] =$$
$$= \int\frac{dt}{(t^2-1)^2} = \left[\frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}; B=D=\frac{1}{4}, 1 = -A+B+C+D,\right.$$
$$\left.\frac{1}{9} = A+B+\frac{C}{3}+\frac{D}{9} \Rightarrow B=D=\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}, A=-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}\ln\frac{|t-1|}{|t+1|} - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + C.$$

Пример 30.6

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int\frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x-1)} = [\cos x = t] = \int\frac{dt}{(2+t)(t-1)(t+1)} =$$
$$= \left[\frac{1}{(2+t)(t-1)(t+1)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}; A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{6}, C=-\frac{1}{2}\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\ln(t+2) + \frac{1}{6}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t) + C.$$

Пример 30.7

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right] =$$

$$= \int \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2(2t+1-t^2)} dt = ...$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} d(x+\frac{\pi}{4}) = [x+\frac{\pi}{4} = y] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos 2y}{\sin y} dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos 2y}{\sin^2 y} d(\cos y) = [\cos y = t] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t^2-1}{1-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int (-2 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}) dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} t + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(1-t^2) + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\sin(x+\frac{\pi}{4})| + C.$$

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

применяется в том случае, если интеграл в правой части вычисляется проще, чем интеграл в левой части. В частности, таким методом вычисляются интегралы вида:

$$\int P(x)g(x)dx,$$

где $P(x)$ – некоторый многочлен, а $g(x)$ – одна из функций $\cos x$, $\sin x$, e^x, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

Пример 30.8

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \left[u = \operatorname{arctg} x, dv = x^2 dx, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^3}{3} \right] = \frac{x^3 \operatorname{arctg} x}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^3 \operatorname{arctg} x}{3} - \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{1+x^2} d(x^2) = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C.$$

Пример 30.9

$$\int x^2 \sin x dx = [u = x^2, dv = \sin x dx, du = 2x dx, v = -\cos x] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx =$$

$$= [u = x, dv = \cos x dx, du = dx, v = \sin x] = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Внесение множителя под знак дифференциала и замена переменной

1. При вычислении интеграла вида
$$\int f(g(x))g'(x)dx,$$
удобно пользоваться инвариантностью формы первого дифференциала и полагать $u = g(x)$, $du = d(g(x)) = g'(x)dx$. В этом случае получаем
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$
где u – новая независимая переменная, и к интегралу в правой части можно применять известные методы вычисления неопределенного интеграла.

2. На практике чаще всего вносят под дифференциал функции вида x^n при интегрировании рациональных функций, а также функции $\cos x$, $\sin x$ при интегрировании рационально-тригонометрических функций.

3. В определенном смысле обратной операцией к внесению множителя под дифференциал является замена переменной, т.е.
$$\int f(x)dx = [x = \varphi(t)] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

4. На практике в выражениях вида $\sqrt{a^2 - x^2}$ удобно делать замену $x = a\sin t$, в выражениях вида $\sqrt{a^2 + x^2}$ – замены $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\operatorname{sh} t$ в выражениях $\sqrt{x^2 - a^2}$ – замену $x = a\operatorname{ch} t$.

Пример 30.10

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{d(e^x)}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{d(e^x)}{e^x} - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C.$$

Пример 30.11

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \left[x = \operatorname{tg} t, x^2+1 = \frac{1}{\cos^2 t}, dx = \frac{dt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \left[z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right] = ...$$

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \left[x = \operatorname{sh} t\right] = \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\operatorname{ch} 2t)dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + C.$$

Приложение 1. Список вопросов к экзамену

1. Критерий различия действительных чисел.
2. Теорема о плотности множества действительных чисел.
3. Теорема о гранях.
4. Определение предела последовательности и М-лемма.
5. Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности.
6. Сумма, произведение и частное пределов.
7. Лемма о сжатой последовательности.
8. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.
9. Существование монотонной подпоследовательности и принцип выбора.
10. Число e.
11. Критерий Коши для предела последовательности.
12. Определение предела функции и М-лемма.
13. Критерий Гейне для предела функции.
14. Критерий Коши для предела функции.
15. Тригонометрический предел $\sin(x)/x$.
16. Показательно-степенной предел $(1+x)^{1/x}$.
17. Логарифмический предел $\ln(1+x)/x$.
18. Показательный предел $(e^x-1)/x$.
19. Степенной предел $((1+x)^\mu-1)/x$.
20. О-символика.
21. Определение непрерывности функции и типы точек разрыва.
22. Критерий Гейне непрерывности.
23. Критерий непрерывности монотонной функции.
24. Непрерывность обратной функции.
25. Непрерывность сложной функции.
26. Теорема о стабилизации знака.
27. Теорема о локальной ограниченности непрерывной функции.

28. Непрерывность суммы, произведения, частного функций.
29. Непрерывность элементарных функций.
30. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
31. Теорема Вейерштрасса.
32. Определение равномерной непрерывности и теорема Кантора.
33. Определение производной, её геометрический и механический смысл.
34. Теорема о производных арифметических комбинаций.
35. Производные основных тригонометрических функций.
36. Производные степенной, показательной и логарифмической функций.
37. Теорема о производной обратной функции.
38. Теорема о производной сложной функции.
39. Определение дифференциала функции и критерий дифференцируемости.
40. Правило Лейбница.
41. Инвариантность формы первого дифференциала.
42. Производная параметрически заданной функции.
43. Определение первообразной и теорема об общем виде первообразной.
44. Внесение множителя под знак дифференциала и замена переменной в неопределенном интеграле.
45. Интегрирование по частям.
46. Теорема о разложении рациональной функции в сумму простейших дробей.
47. Интегрирование простейших дробей.
48. Интегрирование произвольных рациональных функций.
49. Рационализация с помощью подстановок Эйлера.
50. Рационализация с помощью подстановок Чебышева.
51. Интегрирование рационально-тригонометрических функций.
52. Теорема Ферма (необходимое условие экстремума).
53. Теорема Ролля.
54. Теорема Лагранжа.
55. Теорема Коши.

56. Критерий постоянства дифференцируемой функции и теорема о функциях с равными производными.

57. Правило Лопиталя.

58. Формула Тейлора и теорема об остаточном члене.

59. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

60. Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши.

61. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

62. Разложение e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$ по формуле Тейлора.

63. Критерии монотонности и строгой монотонности.

64. Необходимое условие локального экстремума.

65. Первое достаточное условие локального экстремума (через изменение знака производной).

66. Второе достаточное условие локального экстремума (с ненулевой второй производной в точке).

67. Третье достаточное условие локального экстремума (с нулевой второй производной в точке).

68. Определение и геометрический смысл выпуклой функции.

69. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.

70. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции.

71. Определение точки перегиба и необходимое условие перегиба.

72. Первое достаточное условие точки перегиба (через изменение знака второй производной).

73. Второе достаточное условие точки перегиба (с ненулевой третьей производной в точке).

74. Третье достаточное условие точки перегиба (с нулевой третьей производной в точке).

75. Теорема о глобальном минимуме выпуклой функции.

76. Асимптоты функций.

77. Определение интеграла Римана. М-лемма.

78. Первое необходимое условие интегрируемости (сходимость последовательности интегральных сумм к значению интеграла).

79. Второе необходимое условие интегрируемости (ограниченность интегрируемой функции).

80. Критерий Коши интегрируемости.
81. Теорема об интегрируемости непрерывной функции.
82. Критерий квадрируемости.
83. Площадь криволинейной трапеции и геометрический смысл определенного интеграла.
84. Площадь криволинейного сектора.
85. Теорема о длине кривой.
86. Линейность, монотонность и аддитивность определенного интеграла.
87. Теорема о среднем и её геометрический смысл.
88. Теорема Барроу.
89. Формула Ньютона-Лейбница.
90. Замена переменных в определенном интеграла.
91. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
92. Теорема о колебании непрерывной функции.
93. Необходимое условие Дарбу интегрируемости.
94. Достаточное условие Дарбу интегрируемости.
95. Классы интегрируемых по Риману функций.

Приложение 2. Требования к практической части на экзамене

Умение решать задачи из сборника Б.П. Демидовича "Сборник задач и упражнений по математическому анализу" из следующих разделов:

1. Пределы последовательностей и функций: вычисление пределов по определению, с использованием свойств пределов, правила Лопиталя и формулы Тейлора и символики Ландау.

2. Непрерывность функции: исследование непрерывности с помощью определения, критерия Гейне, свойств пределов; нахождение точек разрыва и их типов.

3. Равномерная непрерывность функции: исследование по определению, с помощью теоремы Кантора.

4. Производная и дифференциал: нахождение производных по определению, с помощью теоремы о производной сложной функции, производных функций, заданных параметрически; нахождение производных и дифференциалов высших порядков с помощью правила Лейбница.

5. Формула Тейлора: разложение элементарных функций с помощью разложений основных элементарных функций, умение работать с остаточными членами в форме Пеано.

6. Вычисление неопределенных интегралов: знание табличных интегралов, интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций; владение приемами замены переменных, интегрирования по частям.

7. Исследование функций с помощью производных: нахождение локальных экстремумов, точек перегиба, исследование монотонности и выпуклости, построение графиков функций.

Приложение 3. Основные понятия, необходимые (но не достаточные!) для получения положительной оценки на экзамене

1. Знание определений предела, производной, интеграла (определенного и неопределенного).
2. Геометрический и механический смысл производной, геометрический смысл определенного интеграла.
3. Умение вычислять пределы, не содержащие неопределенностей. Умение раскрывать простые неопределенности ($0:0$ или $\infty:\infty$) в выражениях типа отношения двух многочленов.
4. Знание производных и интегралов от основных элементарных функций.
5. Умение вычислять производные, используя теорему о производной сложной функции.
6. Знание замечательных пределов.
7. Знание основных разложений по формуле Тейлора.
8. Понимание связей между непрерывностью, дифференцируемостью, интегрируемостью (т.е. какие из этих свойств следуют одно из другого); существованием пределов, монотонностью, ограниченностью.