§13. Отношения.
Бинарные отношения.
Операции над бинарными отношениями

Определение

Отношением, определённым на наборе непустых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$, $r \geqslant 1$, называется произвольное подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \ldots A_r$.

- Число r называют арностью отношения.
- Если $r = 1$, отношение называют унарным,
- если $r = 2$ — бинарным,
- если $r = 3$ — тернарным,
- ...

Unary (англ.)	—	«[состоящий] из одного»
Binarius (лат.)	—	«[состоящий] из двух»
Ternarius (лат.)	—	«[состоящий] из трёх»
	...	

Пусть X — непустое множество.

- Произвольное подмножество R множества X называется унарным отношением, заданным на множестве X.
- Унарное отношение могут называть свойством.

Пример:

$X = \mathbb{N}$

- $R_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$,
- $R_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $R_3 = \varnothing$.

Пусть X, Y — непустые подмножества.

Определение

Бинарным отношением, определённым на паре множеств X, Y (взятых именно в таком порядке), называется произвольное подмножество $R \subseteq X \times Y$.

- Если $X = Y$, то говорят, что бинарное отношение R задано на (во) множестве X.
- Высказывание
  «x находится в отношении R к элементу y»,
  т. е. $(x, y) \in R$,
  часто записывают в виде xRy.

Пусть $R \subseteq X \times Y$ — бинарное отношение.

- Областью определения отношения R называется множество всех первых компонент пар из R, т. е. множество

$$D_R = \{x \in X \mid \text{существует } y \in Y \text{ такой, что } xRy\}$$

- Областью значений отношения R называется множество всех вторых компонент пар из R, т. е. множество

$$E_R = \{y \in Y \mid \text{существует } x \in X \text{ такой, что } xRy\}$$

Пример 1:

$X = Y = \mathbb{N}$,

$R \subseteq X \times Y$ — бинарное отношение,

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x$ делится на y.

- $(8, 4) \in R$
- $(8, 2) \in R$
- $(5, 6) \notin R$

$D_R = \{x \in X \mid$ существует $y \in Y$ такой, что $xRy\} =$

$=\{x \in \mathbb{N} \mid$ существует $y \in \mathbb{N}$ такой, что x делится на $y\} =$

$=\mathbb{N}$,

т. к. для любого $x \in \mathbb{N}$ существует $y \in \mathbb{N}$
(например, равный 1), такой что x делится на y.

Пример 1:

$X = Y = \mathbb{N}$,

$R \subseteq X \times Y$ — бинарное отношение,

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x$ делится на y.

- $(8,4) \in R$
- $(8,2) \in R$
- $(5,6) \notin R$

$E_R = \{y \in Y \mid$ существует $x \in X$ такой, что $xRy\} =$
$=\{y \in \mathbb{N} \mid$ существует $x \in \mathbb{N}$ такой, что x делится на $y\} =$
$=\mathbb{N}$,

т. к. для любого $y \in \mathbb{N}$ существует $x \in \mathbb{N}$
(например, равный y), такой что x делится на y.

Пример 2:

$$X = \{1, 3, 5\},$$
$$Y = \{2, 4\}$$
$R \subseteq X \times Y$ — бинарное отношение,
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x < y.$$

- $(3, 4) \in R$,
- $(2, 5) \notin R$,
- $(1, 4) \in R$,
- $(1, 3) \notin R$.

Пример 2:

$X = \{1, 3, 5\}$,

$Y = \{2, 4\}$

$R \subseteq X \times Y$ — бинарное отношение,

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x < y$.

$$D_R = \{x \in X \mid \text{существует } y \in Y \text{ такой, что } xRy\} =$$
$$= \{x \in X \mid \text{существует } y \in Y \text{ такой, что } x < y\} =$$
$$= \{1, 3\},$$

т. к. $(1, 4) \in R$, $(3, 4) \in R$, но не существует $y \in Y$ такого, что $(5, y) \in R$
(поскольку $(5, 2) \notin R$ и $(5, 4) \notin R$).

Пример 2:

$X = \{1, 3, 5\}$,

$Y = \{2, 4\}$

$R \subseteq X \times Y$ — бинарное отношение,

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x < y$.

$$E_R = \{y \in Y \mid \text{существует } x \in X \text{ такой, что } xRy\} =$$
$$= \{y \in Y \mid \text{существует } x \in X \text{ такой, что } x < y\} =$$
$$= Y,$$

т. к. для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ (например, x=1), такой что $x < y$.

Чем бинарное отношение
отличается от отображения?

Пусть X, Y — непустые подмножества.

- Отображением множества X во множество Y или функцией, определённой на множестве X со значениями во множестве Y называется правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

  (При этом на такое соответствие обычно навешивается смысл «превращения».)

- Бинарным отношением, определённым на паре множеств X, Y (взятых именно в таком порядке), называется произвольное подмножество $R \subseteq X \times Y$.

Отличия

Отображение $f : X \to Y$	Отношение $R \subseteq X \times Y$
правило*	множество
каждому $x \in X$	не обязательно каждому $x \in X$
ставит в соответствие (имеет смысл «превращает»)	ставит в соответствие (имеет смысл «устанавливает связь», не имеет* смысл «превращает»)
единственный $y \in Y$	не обязательно единственный $y \in Y$

* но если очень нужно, то можно это нарушить

Если очень нужно

Пусть X, Y — непустые множества.

Определение

Отображением множества X во множество Y называется бинарное отношение $F \subseteq X \times Y$, такое что

для каждого $x \in X$

существует единственный $y \in Y$ такой,

что xFy.

Если очень нужно 2

Пусть X, Y — непустые множества.

Определение

Отображением множества X во множество Y называется бинарное отношение $F \subseteq X \times Y$, такое что

$D_F = X$

и для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$

$$xFy_1 \wedge xFy_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Если очень нужно 3

Пусть X, Y — непустые множества.

Определение

Отображением множества X во множество Y называется бинарное отношение $F \subseteq X \times Y$,

область определения которого совпадает с X,

и в котором нет пар
с одинаковыми первыми компонентами
и различными вторыми.

Операции над бинарными отношениями

Операции над бинарными отношениями

Пусть $R, R_1, R_2 \subseteq X \times Y$.

Поскольку отношения — это множества, к ним применимы операции над множествами:

- $R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid (xR_1y)$ и $(xR_2y)\}$,
- $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid (xR_1y)$ или $(xR_2y)\}$,
- $R_1 \setminus R_2 = \{(x, y) \mid \big((x, y) \in R_1\big)$ и $\big((x, y) \notin R_2\big)\}$,
- $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$,
- $\overline{R}_{X \times Y} = (X \times Y) \setminus R = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \notin R\}$.

Но есть и другие операции.

Операции над бинарными отношениями

Пусть $R \subseteq X \times Y$.

- $R^{-1} = \{(y, x) \mid xRy\}$
  $R^{-1} \subseteq Y \times X$ — отношение, обратное к R.

Пример:

$X = \{1, 3, 5\}, \quad Y = \{2, 4\}, \quad R \subseteq X \times Y,$

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x < y.$

- $R = \{\,(1, 2), (1, 4), (3, 4)\}.$
- $R^{-1} = \{\,(2, 1), (4, 1), (4, 3)\};$
- $yR^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad y > x \quad \Leftrightarrow \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad xRy.$

Пусть $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$.

- Умножением (композицией) бинарных отношений R_1 и R_2 называется бинарное отношение $R_1 \circ R_2 \subseteq X \times Z$, которое определяется следующим образом:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \mid \text{существует } y \in Y, \text{ такой что } xR_1y \text{ и } yR_2z\}.$$

Пример:

$$X = Y = \mathbb{R},$$
$$R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}.$$

$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \mid \text{существует } y \in Y, \text{ такой что } xR_1y \text{ и } yR_2z\} =$

$= \{(x, z) \mid \text{существует } y \in \mathbb{R}, \text{ такой что } y = x^2 \text{ и } z = 2y + 1\} =$

$= \{(x, z) \mid z = 2x^2 + 1\},$

так как

- если существует $y \in \mathbb{R}$, такой что $y = x^2$ и $z = 2y + 1$, то $z = 2x^2 + 1$,
- если $z = 2x^2 + 1$, то существует $y \in \mathbb{R}$ (например, $y = x^2$), такой что $y = x^2$ и $z = 2y + 1$.

Пример:

$$X = Y = \mathbb{R},$$
$$R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}.$$

$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid$ существует $y \in Y,$ такой что xR_2y и $yR_1z\} =$

$=\{(x, z) \mid$ существует $y \in \mathbb{R},$ такой что $y = 2x + 1$ и $z = y^2\} =$

$=\{(x, z) \mid z = (2x + 1)^2\},$

так как

- если существует $y \in \mathbb{R}$, такой что $y = 2x + 1$ и $z = y^2$, то $z = (2x + 1)^2$,
- если $z = (2x + 1)^2$, то существует $y \in \mathbb{R}$ (например, $y = 2x + 1$), такой что $y = 2x + 1$ и $z = (2x + 1)^2$.

Пример:

$$X = Y = \mathbb{R},$$
$$R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}.$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \mid z = 2x^2 + 1\} = \{(x, 2x^2 + 1) \in \mathbb{R}^2\},$$
$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid z = (2x + 1)^2\} = \{\big(x, (2x + 1)^2\big) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Пусть $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$.

- Композиция бинарных отношений R_1 и R_2 в общем случае не коммутативна (даже если $X = Y = Z$).
- Но хоть ассоциативна?

Теорема

Пусть $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times W$.

Тогда композиции $(R \circ S) \circ T$ *и* $R \circ (S \circ T)$ *определены и*

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Доказательство

$R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times W$.
Тогда:

- $R \circ S \subseteq X \times Z$,
- $(R \circ S) \circ T \subseteq X \times W$.
- $S \circ T \subseteq Y \times W$,
- $R \circ (S \circ T) \subseteq X \times W$.

Таким образом, обе композиции $(R \circ S) \circ T$ и $R \circ (S \circ T)$ определены и заданы на $X \times W$.

Рассмотрим $(x, w) \in X \times W$ и высказывания
$(x, w) \in (R \circ S) \circ T$
и $(x, w) \in R \circ (S \circ T)$.

Доказательство

$R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times W$.

$$(x, w) \in (R \circ S) \circ T$$

$$\Updownarrow [\text{опр. } \circ + \in]$$

существует $z \in Z$, такое что $(x, z) \in (R \circ S)$ и $(z, w) \in T$

$$\Updownarrow [\text{опр. } \circ + \in]$$

существует $z \in Z$, такое что

существует $y \in Y$, такой что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in S$,

и $(z, w) \in T$

$$\Updownarrow [\text{св-ва квантора существования}]$$

существуют $y \in Y$, $z \in Z$, такие что

$(x, y) \in R$, и $(y, z) \in S$,

и $(z, w) \in T$

Доказательство

$R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times W$.

$$(x, w) \in R \circ (S \circ T)$$

$$\Updownarrow \text{[опр. } \circ + \in]$$

существует $y \in Y$, такой что $(x, y) \in R$ и $(y, w) \in (S \circ T)$

$$\Updownarrow \text{[опр. } \circ + \in]$$

существует $y \in Y$, такой что

$$(x, y) \in R$$

и существует $z \in Z$, такое что $(y, z) \in S$ и $(z, w) \in T$

$$\Updownarrow \text{[св-ва квантора существования]}$$

существуют $y \in Y$, $z \in Z$, такие что

$(x, y) \in R$, и $(y, z) \in S$,

и $(z, w) \in T$

Доказательство

Таким образом,

$$(x, w) \in R \circ (S \circ T)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{существуют } y \in Y,\ z \in Z, \text{ такие что}$$

$$(x, y) \in R, \text{ и } (y, z) \in S,$$

$$\text{и } (z, w) \in T$$

$$\Updownarrow$$

$$(x, w) \in R \circ (S \circ T),$$

т. е. $(x, w) \in R \circ (S \circ T) \quad \Leftrightarrow \quad (x, w) \in R \circ (S \circ T)$,

а значит, $R \circ (S \circ T) = R \circ (S \circ T)$.

Утверждение / упражнение?

Пусть $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$.

Тогда
$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

§14. Отношения эквивалентности

Рассмотрим бинарное отношение R, заданное на множестве A, т. е. $R \subseteq A^2$.
Отношение R называется:

- рефлексивным, если
  для любого $a \in A$ выполнено aRa;
- симметричным, если
  для любых $a, b \in A$ из aRb следует bRa;
- транзитивным, если
  для любых $a, b, c \in A$ из aRb и bRc следует aRc ;
- антисимметричным, если
  для любых $a, b \in A$ из aRb и bRa следует $a = b$;
- антирефлексивным, если
  для любого $a \in A$ выполнено $(a, a) \notin R$.

Минутка некачественного перевода с древних языков

Среднев. лат. reflexivus — «отражённый»;

др.-греч. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\varsigma$ — «соразмерный»;

лат. transitivus — «проходящий через».

Определение

Бинарное отношение R, являющееся

- рефлексивным,
- симметричным
- и транзитивным,

называется отношением эквивалентности.

- Если элементы a и b множества A,
  на котором задано отношение эквивалентности R,
  находятся в этом отношении,
  то будем говорить, что
  a и b эквивалентны в смысле R или R-эквивалентны.

  (А я буду говорить, что они R-квиваленты.)

Очевидные примеры:

Отношениями эквивалентности являются:

- отношение равенства на любом множестве чисел;
- как правило, отношение равенства на множестве объектов, для которых определено понятие равенства;
- отношение подобия на множестве однотипных геометрических фигур;
- отношение эквивалентности $(R = \{(A, B) \mid A \Leftrightarrow B = И\})$ на любом фиксированном множестве высказываний;
- отношение равносильности на множестве формул логики высказываний;
- и многие другие.

Пример:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y$ кратно $3\}$.

- Для любого $x \in \mathbb{Z}$ выполнено
  $x - x$ кратно 3 (поскольку $x - x = 0$),
  т. е. xRx для любого $x \in \mathbb{Z}$,
  а значит, R рефлексивно.
- Для любых $x, y \in \mathbb{Z}$:
  если $x - y$ кратно 3, то и $y - x$ кратно 3
  (поскольку $y - x = -(x - y)$),
  т. е. для любых $x, y \in \mathbb{Z}$ выполнение xRy влечёт yRx,
  а значит, R симметрично.

Пример:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \text{ кратно } 3\}.$$

- Для любых $x, y, z \in \mathbb{Z}$:
  если $x - y$ кратно 3 и $y - z$ кратно 3,
  то и $(x - y) + (y - z) = x - z$ кратно 3,
  т. е. для любых $x, y, z \in \mathbb{Z}$ выполнена импликация $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$,
  а значит, R транзитивно.
- Таким образом, R — рефлексивное симметричное транзитивное отношение, т. е. отношение эквивалентности.

Пусть $R \subseteq A^2$ — отношение эквивалентности.

- Множество $\{x \in A \mid aRx\}$
(или, что то же самое, множество $\{x \in A \mid xRa\}$),
т. е. множество всех элементов множества A,
R-эквивалентных a,
называется классом эквивалентности элемента a
или его смежным классом.

Обозначения

$[a]_R$,

$[a]$ — если понятно,
о каком отношении эквивалентности речь.

Тот же пример:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \text{ кратно } 3\}$ — отношение эквивалентности.

- $[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 1) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 \text{ кратно } 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $[42] = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 42) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 42 \text{ кратно } 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ кратно } 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $[3] = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 3) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 3 \text{ кратно } 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

Можно заметить, что $[42] = [3] = [3k]$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1

Пусть $R \subseteq A^2$ *— отношение эквивалентности.*
Справедливы следующие утверждения:

1) *для любого* $a \in A$ *выполнено* $a \in [a]$*;*
2) *для любых* $a, b \in A$ *имеет место*

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad [a] = [b],$$

т. е. классы эквивалентности совпадают у любых двух R*-эквивалентных элементов множества* A *и только у таких.*

Доказательство

Докажем утверждение 1.

- R — отношение эквивалентности на множестве A.
- В частности, оно рефлексивно, т. е.

  для любого $a \in A$ выполнено aRa.
- Поскольку для любого a справедливо $[a] = \{x \in A \mid xRa\}$ и aRa,

  заключаем, что $a \in [a]$ для любого $a \in A$.

Доказательство

Докажем утверждение 2.
Необходимость и достаточность покажем по отдельности.
Начнём с достаточности,
поскольку несложно убедиться, что $[a] = [b]$ влечёт aRb.

- Действительно, из утверждения 1 данной теоремы следует, что $a \in [a]$.
- Но $[a] = [b]$, а значит, $a \in [b]$.
- Откуда, по определению множества $[b]$, заключаем, что aRb.

Доказательство

Докажем теперь необходимость,
то есть покажем, что aRb влечёт $[a] = [b]$.

- Пусть $x \in A$.

  Рассмотрим высказывания $x \in [a]$ и $x \in [b]$.
- Высказывание $x \in [a]$ эквивалентно xRa.
- Учитывая aRb и транзитивность отношения R, заключаем, что xRb,
- т. е. $x \in [b]$.
- Таким образом, для произвольного $x \in A$ выполнено $x \in [a] \Rightarrow x \in [b]$,
- что означает, что $[a] \subseteq [b]$.

Доказательство

- С другой стороны, $x \in [b]$ эквивалентно xRb.
- Истинно aRb,
- а значит, по симметричности отношения R, выполнено и bRa.
- Учитывая это и xRb, по транзитивности отношения R получаем xRa,
- т. е. $x \in [a]$.
- Таким образом, если $x \in [b]$, то $x \in [a]$ для произвольного $x \in A$.
- Это означает, что $[b] \subseteq [a]$.
- Поскольку ранее было доказано, что $[a] \subseteq [b]$,
- заключаем, что $[a] = [b]$ (в предположении, что aRb).

Пусть $R \subseteq A^2$ — отношение эквивалентности.

Теорема

Для любых $a, b \in A$

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad [a] = [b].$$

Следствие 1

Пусть $R \subseteq A^2$ — отношение эквивалентности.

Для любых $a, b \in A$ классы $[a]$ и $[b]$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство

Рассмотрим произвольные $a, b \in A$.

Возможны два случая: $[a] \cap [b] = \varnothing$ и $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

Если $[a] \cap [b] = \varnothing$, то классы $[a]$ и $[b]$ не пересекаются.

Если $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, то

- существует $c \in A$, такой что $c \in [a] \cap [b]$,
- т. е. $c \in [a]$ и $c \in [b]$, а значит, cRa и cRb.
- По уже доказанной теореме (утверждение 2 в ней), $cRa \Leftrightarrow [c] = [a]$, а $cRb \Leftrightarrow [c] = [b]$,
- откуда $[a] = [b]$.

Определение

Разбиением непустого множества A называется система множеств $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ $(k \geqslant 1)$, для которых выполнено:

1) $S_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, 2, \dots;$
2) $S_i \cap S_j = \varnothing$ для любых i, j, где $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots;$
3) $\bigcup\limits_{i=1,2,\dots} S_i = A.$

Иными словами,

разбиением непустого множества A называется непустая система непустых непересекающихся множеств, объединение которых даёт A.

Следствие 1

Пусть $R \subseteq A^2$ *— отношение эквивалентности.*

Для любых $a, b \in A$ *классы* $[a]$ *и* $[b]$
либо не пересекаются, либо совпадают.

Следствие 2

Множество всех различных классов эквивалентности является разбиением множества A.

Теорема 2

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ $(k \geqslant 1)$ *— разбиение непустого множества* A.

Зададим бинарное отношение R *на* A *следующим образом:* xRy *тогда и только тогда, когда* $x, y \in S_i$ *для некоторого* $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда R *— отношение эквивалентности на* A.

Доказательство

Проводится по определению отношения эквивалентности.

§$14\frac{3}{4}$. Чуть-чуть о других типах отношений

Рассмотрим бинарное отношение R, заданное на множестве A, т. е. $R \subseteq A^2$.
Отношение R называется:

- рефлексивным, если
  для любого $a \in A$ выполнено aRa;
- симметричным, если
  для любых $a, b \in A$ из aRb следует bRa;
- транзитивным, если
  для любых $a, b, c \in A$ из aRb и bRc следует aRc ;
- антисимметричным, если
  для любых $a, b \in A$ из aRb и bRa следует $a = b$;
- антирефлексивным, если
  для любого $a \in A$ выполнено $(a, a) \notin R$.

Определение

Бинарное отношение R, являющееся

- рефлексивным,
- симметричным
- и транзитивным,

называется отношением эквивалентности.

Определение

Бинарное отношение R, являющееся

- рефлексивным,
- антисимметричным
- и транзитивным,

называется отношением частичного порядка.

Очевидный пример:

Отношение “$\leqslant$” на множествах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ является отношением частичного* порядка.

*на самом деле, про “$\leqslant$” обычно не говорят, что это частичный порядок, потому что он не «частичный».

- Для любого a из этих множеств выполнено $a \leqslant a$;
- Для любых a, b из этих множеств $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ влечёт $a = b$;
- Для любых a, b, c из этих множеств $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ влечёт $a \leqslant c$.

Другой пример:

$X = \{a, b, c\}$.

Отношение “$\subseteq$” на множестве 2^X
(да и на множестве 2^U для любого множества U)
является отношением частичного порядка:

- Для любого $A \in 2^X$ выполнено $A \subseteq A$;
- Для любых $A, B \in 2^X$ из $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ следует $A = B$;
- Для любых $A, B, C \in 2^X$ из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует $A \subseteq C$.

Третий пример:

Рассмотрим множество всех бинарных упорядоченных последовательностей длины n:

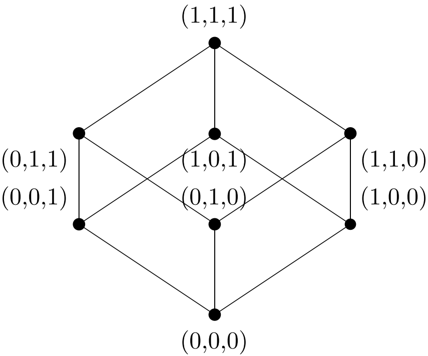
$A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Будем говорить, что последовательность $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ не превосходит последовательность $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примеры:

- $(0, 0, 0)$ не превосходит $(0, 1, 0)$.
- $(1, 0, 1)$ не превосходит $(1, 1, 1)$.
- Из $(0, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$ ни одна не превосходит другую.

Визуализация для $n = 3$:



- Соединены пары наборов (a, b), в которых a не превосходит b, притом a изображается ниже b.
- Для упрощения изображения все соединения, которые можно восстановить по рефлексивности и транзитивности, опущены.

Третий пример:

$A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$

Будем говорить, что последовательность $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ не превосходит последовательность $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Введённое таким образом отношение «не превосходит» является отношением частичного порядка на A.

Третий пример:

- Для любого $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ действительно a не превосходит a:

  $\alpha_i \leqslant \alpha_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Для любых $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$:

  если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$,

  и $\beta_i \leqslant \alpha_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$,

  то $\alpha_i = \beta_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$,

  а значит, $a = b$.

Третий пример:

- Для любых $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $c = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

  если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ (a не превосходит b),

  и $\beta_i \leqslant \gamma_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ (b не превосходит c),

  то $\alpha_i \leqslant \gamma_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$,

  а значит, a не превосходит c.
- Так что отношение «не превосходит» является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Рассмотрим бинарное отношение R, заданное на множестве A, т. е. $R \subseteq A^2$.
Отношение R называется:

- рефлексивным, если
  для любого $a \in A$ выполнено aRa;
- симметричным, если
  для любых $a, b \in A$ из aRb следует bRa;
- транзитивным, если
  для любых $a, b, c \in A$ из aRb и bRc следует aRc ;
- антисимметричным, если
  для любых $a, b \in A$ из aRb и bRa следует $a = b$;
- антирефлексивным, если
  для любого $a \in A$ выполнено $(a, a) \notin R$.

Определение

Бинарное отношение R, являющееся

- рефлексивным,
- антисимметричным
- и транзитивным,

называется отношением частичного порядка.

Определение

Бинарное отношение R, являющееся

- антирефлексивным,
- антисимметричным
- и транзитивным,

называется отношением строгого частичного порядка.

Очевидные примеры:

Отношение “$<$” на множествах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ является отношением строгого частичного* порядка.

*на самом деле, про “$<$” обычно не говорят, что это строгий частичный порядок, потому что он не «частичный».

$X = \{a, b, c\}$.

Отношение “$\subset$” на множестве 2^X
(да и на множестве 2^U для любого множества U)
является отношением строгого частичного порядка.

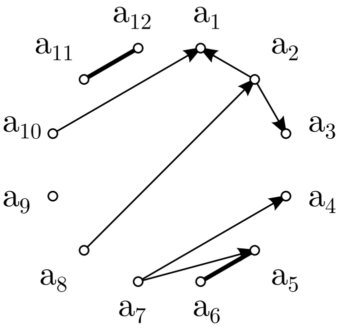
Дальше идёт попытка визуализировать,
что происходит со множеством A,
если на нём задан каркас
какого-то бинарного отношения R,
и на это отношение постепенно навешиваются свойства.

- На происходящее смотрится с точки зрения ответа на вопрос
«Что мы вытащим, если потянем за какой-то элемент множества?»
- Полагается, что при «потягивании» за элемент a вытаскивается множество $\{x \in A \mid aRx\}$.

- Если $(a_k, a_k) \in R$, то элемент a_k изображается закрашенной вершиной, иначе — незакрашенной.
- Ситуация $(a_i, a_j) \in R$, но $(a_j, a_i) \notin R$, изображается стрелкой от a_i к a_j.

  В этом случае будем говорить, что a_j «правее» a_i.
- Если $(a_i, a_j) \in R$ и $(a_j, a_i) \in R$, вместо двунаправленной стрелки рисуется утолщённая линия.

  В этом случае a_i и a_j «равноправны».

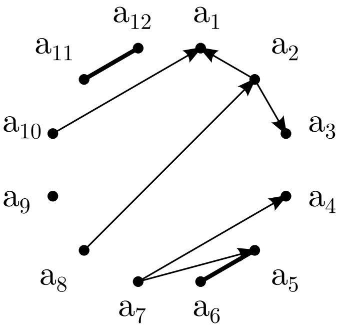


Какие свойства включены?

- Антирефлексивность, но это случайно.

Что вытащится, если потянуть за элемент a?

- Иногда не вытащится вообще ничего (см. a_9).
- Те, кто непосредственно «правее».
  (дальше вытаскивание не передаётся)
- и все те, кто ему «равноправен».

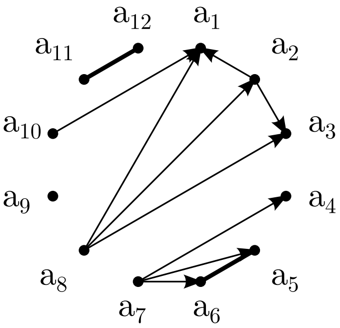


Какие свойства включены?

- Рефлексивность

Что вытащится, если потянуть за элемент a?

- Сам элемент a!
- Те, кто непосредственно «правее»
  (дальше вытаскивание не передаётся)
- и все те, кто ему «равноправен».

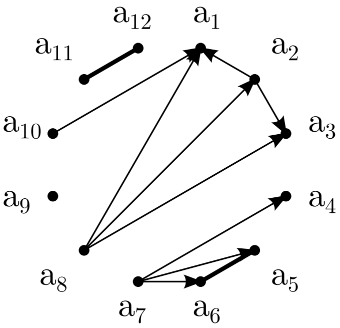


Какие свойства включены?

- Рефлексивность
- Транзитивность

Что вытащится, если потянуть за элемент a?

- Сам элемент a!
- Вообще все, кто «правее»
  (вытаскивание передаётся дальше!)
- и все те, кто ему «равноправен».



Какие свойства включены?

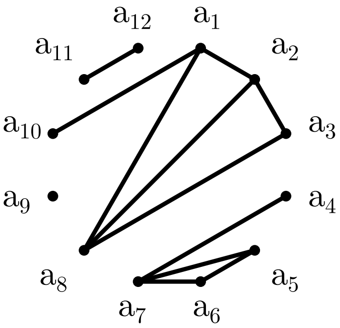
- Рефлексивность
- Транзитивность

Как называется отношение?

- Предпорядок

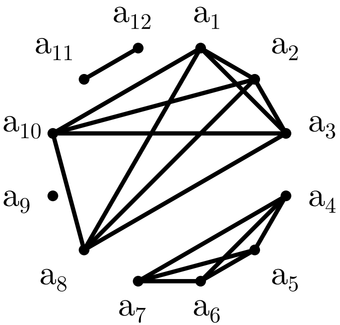
Что со множеством?

- Развалилось на группы, в каждой из которых есть самые «левые»(из них стрелки только выходят), и «промежуточные».
- Самые «правые»(в них стрелки только приходят) могут отсутствовать из-за возможности «равноправия».



Какие свойства включены?

- Рефлексивность
- Транзитивность
- Симметричность

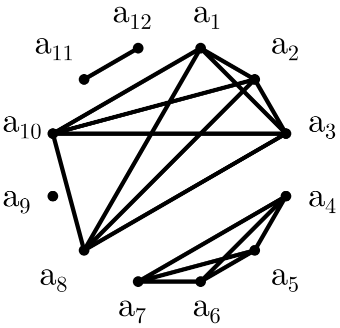


Какие свойства включены?

- Рефлексивность
- Транзитивность!
- Симметричность

Что вытащится, если потянуть за элемент a?

- Все те, кто равноправен a,
- то есть все, кто хоть как-то связан с a.



Какие свойства включены?

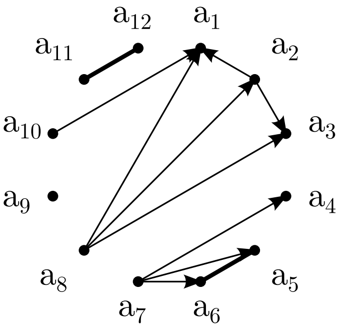
- Рефлексивность
- Транзитивность!
- Симметричность

Как называется отношение?

- Эквивалентность

Что с множеством?

- Развалилось на группы, в которых все связаны друг с другом.
- Если потянуть одного из группы, вытянется вся группа.
- Кого именно из группы вытаскивать, совершенно неважно.



Какие свойства включены?

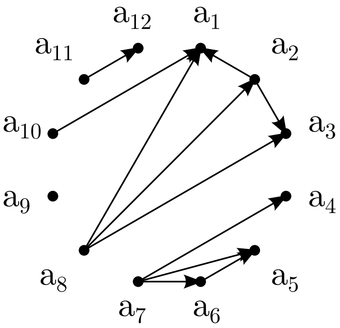
- Рефлексивность
- Транзитивность

Как называется отношение?

- Предпорядок

Что вытащится, если потянуть за элемент a?

- Сам элемент a!
- Вообще все, кто «правее»
  (вытаскивание передаётся дальше!)
- и все те, кто ему «равноправен».

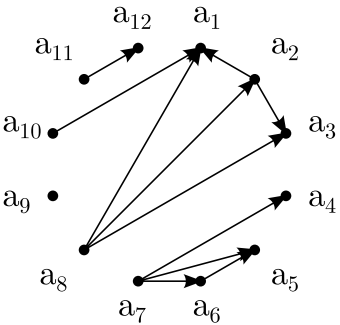


Какие свойства включены?

- Рефлексивность
- Транзитивность
- Антисимметричность

Что вытащится, если потянуть за элемент a?

- Сам элемент a!
- Вообще все, кто «правее»
  (вытаскивание передаётся дальше!)
- (Равноправных больше нет)



Какие свойства включены?

- Рефлексивность
- Транзитивность
- Антисимметричность

Как называется отношение?

- Частичный порядок

Что с множеством?

- Развалилось на группы, в каждой из которых есть самые «левые»(из них стрелки только выходят), «промежуточные»
- и самые «правые»(в них стрелки только приходят).
- Два разных элемента либо не связаны, либо кто-то из них «правее».