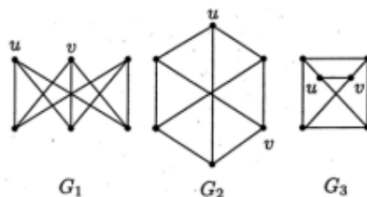


Азбука теории графов.

Граф. Окружение вершины.

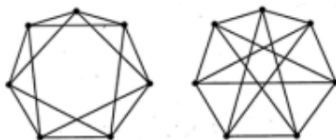
1. Сколько рёбер в полном графе K_n ?
2. Докажите, что наибольшее число рёбер в графе порядка n , не содержащем треугольников, равно $n^2/4$.
3. Найдите окружения $N(u)$ и $N(v)$ вершин u и v в каждом из трёх графов, изображённых на рисунке:



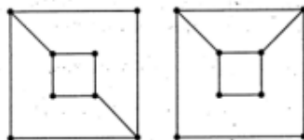
4. Существует ли граф с указанной степенной последовательностью? Если да, то найдите число рёбер в графе, степенная последовательность которого совпадает с одной из следующих:
(а) $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$; (в) $(6, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2)$;
(б) $(3, 3, 2, 2, 2, 2)$; (г) $(7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1)$.
5. Доказать, что в графе с $n \geq 2$ вершинами всегда есть по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями.
6. Доказать, что граф и его дополнение не могут быть одновременно несвязными

Изоморфизм.

1. Докажите, что два графа, изображённые на рисунке, изоморфны:



2. Докажите, что графы, изображённые на рисунке, не изоморфны:



Подграфы. Операции

1. Найдите дополнительный граф \overline{G} для каждого из графов G :

(а) $G = O_n$;

(в) $G = C_4$;

(б) $G = K_n$;

(г) $G = P_4$;

Какие из указанных графов являются самодополнительными?

2. Постройте граф $C_4 \times P_3$.

3. Пусть d_1, d_2, \dots, d_n — степенная последовательность графа G , а d'_1, d'_2, \dots, d'_n — степенная последовательность графа G' . Какая степенная последовательность у графа $G \times G'$?

4. Доказать, что $G_1 \times G_2$ связан тогда и только тогда, когда связны G_1 и G_2 .

Цепи. Циклы. Связные компоненты.

1. Найдите простые циклы длины 5, 6, 8 и 9 в графе Петерсена.

2. Докажите, что если в графе есть ровно две вершины нечётных степеней, то в нём есть соединяющая эти вершины цепь (то есть лежат в одной компоненте графа).

Метрические характеристики графов.

1. Найдите радиус, диаметр, центр и периферию следующих графов:

(а) K_n ;

(в) C_n ;

(б) P_n ;

(г) граф Петерсена.

2. Пусть G и \overline{G} одновременно связны и $d(G) \geq 3$. Докажите, что $d(\overline{G}) \leq 3$.

Двудольные графы.

1. Доказать, что G двудольен тогда и только тогда, когда для любой $v \in V(G)$ не существует ребра xv такого, что $d(x, v) = d(y, v)$