МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра биомедицинской информатики

Лабораторная работа 1

Снежко Льва Владимировича
студента 3-го курса

Преподаватель:
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

Вариант 12

1 Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x - 9u = -9(x + y)$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - 4dxdy + 13(dx)^2 = 0$$

$$D = 16(dx)^2 - 52(dx)^2 = -36(dx)^2 < 0$$

Значит, уравнение элиптического типа

$$dy = \frac{4 \pm 6i}{2}dx \Rightarrow y - \frac{4 \pm 6i}{2}x = C$$

$$\xi = y - 2x, \xi_x = -2, \xi_y = 1$$

$$\eta = 3x, \eta_x = 3, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -2u_\xi + 3u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{xx} = -2u_{\xi\xi}\xi_x - 2u_{\xi\eta}\eta_x + 3u_{\xi\eta}\xi_x + 3u_{\eta\eta}\eta_x = 4u_{\xi\xi} - 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = (u_y)_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi_\eta}\eta_x = -2u_{\xi\xi} + 3u_{\xi_\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi_\eta}\eta_y = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 4 - 8 + 13 = 9$$

$$u_{\xi\eta} : -12 + 12 = 0$$

$$u_{\eta\eta} : 9$$

$$u_\xi = -6$$

$$u_\eta = 9$$

Имеем

$$9u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 6u_\xi + 9u_\eta - 9u = -9(\xi + \eta)$$

2 Задание 2. Привести уравнение к каноническому виду

$$y^2 u_{xx} + 2xu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$y^2(dy)^2 - 2xdxdy + 2x^2(dx)^2 = 0$$

$$D = (4x^2 - 8x^2y^2)(dx)^2 = 4x^2(1-2y^2)(dx)^2$$

2.1 Случай 1. Уравнение гиперболического типа

$$D > 0 \Rightarrow 1 - 2y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 1/2$$

$$dy = \frac{2x + 2x\sqrt{1-2y^2}}{2y^2}dx = \frac{1+\sqrt{1-2y^2}}{y^2}xdx$$

$$\xi = 1/2y - 1/2x^2 - 1/2\int\limits_0^y \sqrt{1-2t^2}\,dt$$

$$\xi_x = -x$$

$$\xi_y = 1/2(1 - \sqrt{(}1-2y^2))$$

$$\eta = 1/2y - 1/2x^2 + 1/2\int\limits_0^y \sqrt{1-2t^2}\,dt$$

$$\eta_x = -x$$

$$\eta_y = 1/2(1 + \sqrt{1-2y^2})$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -xu_\xi - xu_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 1/2(1 - \sqrt{1-2y^2})u_\xi + 1/2(1+\sqrt{1-2y^2})u_\eta$$

$$u_{xx} = -u_\xi - u_\eta - x(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - x(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = x^2u_{\xi\xi} + 2x^2u_{\xi\eta} + x^2u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta$$

$$\begin{aligned} u_xy &= -x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) \\ &= -1/2x(1-\sqrt{1-2y^2})u_{\xi\xi} - xu_{\xi\eta} - 1/2x(1+\sqrt{1-2y^2})u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_yy &= (1/2(1-\sqrt{1-2y^2})u_\xi + 1/2(1+\sqrt{1-2y^2})u_\eta)_y \\ &= 1/2(-y^2 - \sqrt{1-2y^2} + 1)U_{\xi\xi} + y^2u_{\xi\eta} \\ &+ 1/2(-y^2 + \sqrt{1-2y^2} + 1)u_{\eta\eta} \\ &+ \frac{y}{\sqrt{1-2y^2}}u_\xi - \frac{y}{\sqrt{1-2y^2}}u_\eta \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : x^2y^2 - 1/2(1-\sqrt{1-2y^2}) * 2x^2 + +2x^2 * 1/2(-y^2 - \sqrt{1-2y^2} + 1) = 0$$

$u_{\xi\eta} : 2x^2y^2 - 2x^2 + 2x^2y^2 = 4x^2y^2 - 2x^2$

$$u_{\eta\eta} : x^2y^2 - 2x^2 * 1/2(1 + \sqrt{1-2y^2}) + 2x^2 * 1/2(-y^2 + \sqrt{1-2y^2} + 1) = 0$$

$u_{\xi} : -y^2 + \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 - \sqrt{1-2y^2})$
$u_{\eta} : -y^2 - \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 + \sqrt{1-2y^2})$
Имеем

$$\begin{aligned}
&(4x^2y^2 - 2x^2)u_{\xi\eta} \\
&+ (-y^2 + \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 - \sqrt{1-2y^2}))u_{\xi} \\
&+ (-y^2 - \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 + \sqrt{1-2y^2}))u_{\eta} = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Случай 2. Уравнение параболического типа

$D = 4x^2(1-2y^2) = 0, x = 0$

$$dy = -\frac{2x}{2y^2}dx \Rightarrow 1/3y^3 = C$$

$$\xi = 1/3y^3, \xi_x = 0, \xi_y = y^2$$

$$\eta = x, \eta_x = 1, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = u_{\eta}$$

$$u_y = u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y = y^2u_{\xi}$$

$$u_{xx} = u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = y^2u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = 2yu_{\xi} + y^2u_{\xi\xi}\xi_y + y^2u_{\xi\eta}\eta_y = 2yu_{\xi} + y^4u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned}
&= u_{\xi\xi} : 2x^2y^4 = 0 \\
&= u_{\xi\eta} : 2xy^2 = 0 \\
&= u_{\eta\eta} : y^2 \\
&= u_{\xi} : 4x^2y + y^3 \\
&= u_{\eta} : 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Имеем

$$y^2u_{\eta\eta} + (4x^2y + y^3)u_{\xi} = 0$$

3 Задание 3. Привести уравнение к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип уравнения

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$y(dy)^2 + x(dx)^2 = 0$$

$$D = -4xy$$

3.1 Случай 1. Уравнение гиперболического типа

$$D > 0, x < 0, y > 0$$

$$dy = \sqrt{-\frac{x}{y}}dx, dy = -\sqrt{-\frac{x}{y}}dx$$

$$\xi = 2/3y^{3/2} + 2/3(-x)^{3/2}, \xi_x = -\sqrt{-x}, \xi_y = \sqrt{y}$$
$$\eta = 2/3y^{3/2} - 2/3(-x)^{3/2}, \eta_x = \sqrt{-x}, \eta_y = \sqrt{y}$$

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\sqrt{-x}u_\xi + \sqrt{-x}u_\eta \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \sqrt{y}u_\xi + \sqrt{y}u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\eta - \sqrt{-x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + \sqrt{-x}(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\
&= -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\eta \\
u_{xy} &= \sqrt{y}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + \sqrt{y}(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\
&= -\sqrt{-xy}u_{\xi\xi} + \sqrt{-xy}u_{\xi\eta} \\
u_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta + \sqrt{x}(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta + yu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + yu_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned}
u_{\xi\xi} &: -xy + xy = 0 \\
u_{\xi\eta} &: 2xy + 2xy = 4xy \\
u_{\eta\eta} &: xy - xy = 0 \\
u_\xi &: -\frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}}) \\
u_\eta &: -\frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}})
\end{aligned}$$

Итог:

$$4xyu_{\xi\eta} - \frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}})u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}})u_\eta = 0$$

3.2 Случай 2. Уравнение параболического типа

$$D = 0, x = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = C$$

$$\xi = y, \xi_x = 0, \xi_y = 1$$

$$\eta = x, \eta_x = 1, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_\eta, u_y = u_\xi,$$
$$u_{xx} = u_{\eta\eta}, u_{xy} = u_{\xi\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : x = 0$$
$$u_{\xi\eta} : 0$$
$$u_{\eta\eta} : y$$
$$u_\xi : 0$$
$$u_\eta : 0$$

Итог:

$$yu_{\eta\eta} = 0$$

3.3 Случай 3. Уравнение элиптического типа

$$D < 0, -4xy < 0, x > 0, y > 0$$

$$dy = \sqrt{\frac{x}{y}} i dx$$

$$\xi = 2/3y^{3/2}, \xi_x = 0, \xi_y = \sqrt{y}$$

$$\eta = 2/3x^{3/2}, \eta_x = \sqrt{x}, \eta_y = 0$$

$$u_x = \sqrt{x}u_\eta$$
$$u_y = \sqrt{y}u_\xi$$
$$u_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}u_\eta + xu_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}u_{\xi\eta}$$
$$u_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\xi + yu_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : xy \qquad u_{\xi\eta} : 0$$
$$u_{\eta\eta} : xy$$
$$u_\xi : \frac{x}{2\sqrt{y}}; \qquad u_\eta : \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

Итог:

$$xyu_{\xi\xi} + xyu_{\eta\eta} + \frac{x}{2\sqrt{y}}u_\xi + \frac{y}{2\sqrt{x}}u_\eta$$

4 Задание 4. Привести уравнение к каноническому виду и упростить

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - (dx)^2 = 0$$

$D = 4(dx)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа. Нетрудно видеть, что:

$$\xi = y - x \qquad \eta = y + x$$
$$\xi_x = -1 \qquad \eta_x = 1$$
$$\xi_y = 1 \qquad \eta_y = 1$$

$$u_x = -u_\xi + u_\eta$$
$$u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : 0 \qquad u_\xi : 0$$
$$u_{\xi\eta} : -4 \qquad u_\eta : 2$$
$$u_{\eta\eta} : 0$$

Итог

$$2u_{\xi\eta} - u_\eta + 2u = 0$$

5 Задание 5. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 24u_{yy} + u_x + 4u_y = y - 4x$$

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 10dxdy + 24(dx)^2 = 0$$

$D = 4(dx)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа

$$dy = 6dx \qquad\qquad dy = 4dx$$

$$\begin{aligned} \xi &= y - 6x & \eta &= y - 4x \\ \xi_x &= -6 & \eta_x &= -4 \\ \xi_y &= 1 & \eta_y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= -6u_\xi - 4u_\eta \\ u_y &= u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} &= 36u_{\xi\xi} + 48u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= -6u_{\xi\xi} - 10u_{\xi\eta} + -4u_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &: 0 & u_\xi &: -2 \\ u_{\xi\eta} &: -4 & u_\eta &: 0 \\ u_{\eta\eta} &: 0 \end{aligned}$$

Получим уравнение

$$-4u_{\xi\eta} - 2u_\xi = \eta$$

Проведем замену: $v = u_\xi$

$$-4v_\eta - 2v\eta = \eta$$

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$v_{oo} = C(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$v = -\frac{1}{2}\eta + C_2(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - 4$$

Получим общее решение неоднородного уравнения:

$$v_{OH} = u_\xi = C(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2}\eta + C_2(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - 4$$

Интегрируем по ξ

$$u = C_5(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{\xi\eta}{2} - 4\xi$$

Подставим x, y:

$$u(x,y) = C_5(y-6x)e^{-\frac{y-4x}{2}} - \frac{(y-6x)(y-4x)}{2} - 4(y-6x)$$

6 Задание 6. В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнения

Задача 3.37

$$xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y = x(y + x^2)$$

6.1 Приведем к каноническому виду

Характеристическое уравнение:

$$x(dy)^2 + 4x^2dxdy + 4x^3(dx)^2 = 0$$

$D = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа

$$dy = -2xdx$$

$$\begin{aligned} &\xi = y + x^2 && \xi_x = 2x && \xi_y = 1 \\ &\eta = x && \eta_x = 1 && \eta_y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= 2xu_\xi + u_\eta \\ u_\eta &= u_\xi \\ u_{xx} &= 4x^2u_{\xi\xi} + 4xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi \\ u_{xy} &= 2xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты:

$$\begin{aligned} &u_{\xi\xi} : 4x^3 - 8x^3 + 4x^3 = 0 && u_\xi : 2x + 2x - 4x = 0 \\ &u_{\xi\eta} : 4x^2 - 4x^2 = 0 && u_\eta : 1 \\ &u_{\eta\eta} : x \end{aligned}$$

В результате:

$$\eta u_{\eta\eta} + u_\eta = \xi\eta$$

6.2 Найдем общее решение

Проведем замену: $v = u_\eta$ Имеем уравнение:

$$\eta v_\eta + v = \xi\eta$$

Найдем общее решение однородного:

$$v_{OO} = \frac{C(\xi)}{\eta}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного:

$$v_\eta = \frac{C_\eta \eta - C}{\eta^2}$$

$$C_\eta \eta = \xi\eta^2 \Rightarrow C_\eta = \xi\eta$$

$$C = \frac{1}{2}\xi\eta^2 + C_2(\xi)$$

Частное решение неоднородного:

$$v = \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{\eta}C_2(\xi)$$

Общее решение неоднородного:

$$v = u_\eta = \frac{C_3(\xi)}{\eta} + \frac{1}{2}\xi\eta$$

Проинтегрируем по η

$$u = C_3(\xi)ln\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2$$

Выразим через x,y:

$$u(x,y) = C_3(y+x^2)ln(x) + \frac{1}{4}(y+x^2)x^2$$

7 Задние 7. Решить задачу Гурса

Задача 12.

$$\begin{cases} u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0, \\ x > 0, y > 0, \\ u(x, 2x) = e^x, u(x, 4x) = xe^x, \end{cases}$$

7.1 Приведем уравнение к каноническому виду

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 6dxdy + 8(dx)^2 = 0$$

$D = 36 - 32 = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа

$$\begin{aligned} dy &= 4dx & dy &= 2dx \\ \xi &= y - 4x & \eta &= y - 2x \\ \xi_x &= -4 & \eta_x &= -2 \\ \xi_y &= 1 & \eta_y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= -4u_\xi - 2u_\eta & u_y &= u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} &= 16u_{\xi\xi} + 16u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} & u_{xy} &= -4u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 16 - 24 + 8 = 0 \qquad u_{\xi} : -4 + 1 = -3$$
$$u_{\xi\eta} : 16 - 36 + 16 = -4 \qquad u_{\eta} : -2 + 1 = -1$$
$$u_{\xi\eta} : 4 - 12 + 8 = 0$$

Имеем:

$$-4u_{\xi\eta} - 3u_{\xi} - u_{\eta} = 0$$

7.2 Найдем общее решение

Проведем замену: $v = ue^{-\frac{1}{8}\xi - \frac{3}{4}\eta}$
Получим уравнение:

$$-4v_{\xi\eta} - v_{\eta} = 0$$

Проведем замену $z = -4v_{\xi} - v$
Получим уравнение:

$$z_{\eta} = 0 \Rightarrow z = -4v_{\xi} - v = C_1(\xi)$$

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$v_{OO} = C(\eta)e^{\frac{\xi}{4}}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного уравнения

$$v_{\xi} = C_{\xi}e^{\frac{\xi}{4}} - \frac{1}{4}Ce^{\frac{\xi}{4}} \Rightarrow C_{\xi} = -\frac{1}{4}C_2(\xi)e^{\frac{\xi}{4}}$$

Частное решение:

$$v = (-\frac{1}{4}C_3(\xi) + C_4(\eta))e^{-\frac{\eta}{4}}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned}
v &= C(\eta)e^{-\frac{\eta}{4}} + (-\frac{1}{4}C_3(\xi) + C_4(\eta))e^{-\frac{\eta}{4}} = ue^{-\frac{1}{8}\xi - \frac{3}{4}\eta} \\
&= (C_5(\eta) - \frac{1}{4}C_3(\xi))e^{-\frac{\eta}{4}} \\
u &= (C_5(\eta) - \frac{1}{4}C_3(\xi))e^{-\frac{1}{8}\xi - \frac{1}{2}\eta} \\
&= (C_5(y - 2x) - \frac{1}{4}C_3(y - 4x))e^{-\frac{1}{8}(y-4x) - \frac{1}{2}(y-2x)} \\
&= (C_5(y - 2x) - \frac{1}{4}C_3(y - 4x))e^{-\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y}
\end{aligned}$$

7.3 Используем начальные условия

$$u(x, 2x) = e^{\frac{1}{4}x}(C_5(2x) + C_3(0)) = e^{x} \Rightarrow C_5(2x) + C_3(0) = xe^{-\frac{1}{2}x}$$
$$u(x, 4x) = xe^{x} = e^{\frac{3}{2}x}(C_5(2x) + C_3(0)) \Rightarrow C_5(0) + C_3(-2x) = e^{\frac{3}{4}x}$$

Имеем:

$$\begin{cases} C_5(2x) + C_3(0) = xe^{-\frac{1}{2}x} \\ C_5(0) + C_3(-2x) = e^{\frac{3}{4}x} \end{cases}$$

$$C_5(2x) = xe^{-\frac{1}{2}x} - C_3(0) \Rightarrow C_5(t) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{4}t} - C_3(0)$$

$$C_5(0) = -C_3(0)$$

$$C_3(-2x) = e^{\frac{3}{4}x} - C_5(0) \Rightarrow C_3(t) = e^{-\frac{3}{8}t} + C_3(0)$$

Тогда

$$u = e^{-\frac{1}{8}\xi+\frac{3}{4}\eta}(\frac{1}{2}\eta e^{-\frac{1}{4}\eta} - C_3(0) + e^{-\frac{3}{8}\xi} + C_3(0)) = e^{-\frac{1}{8}\xi+\frac{3}{4}\eta}(\frac{1}{2}\eta e^{-\frac{1}{4}\eta} + e^{-\frac{3}{8}\xi})$$

Учтём, что $\xi = y - 4x$ и $\eta = y - 2x$:

$$u(x, y) = e^{-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}y}((\frac{1}{2}y - x)e^{-2y+x} + e^{-3y+3x})$$

8 Задание 8. Привести уравнение к каноническому виду и упростить

Задача 2.12

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + u_y = 0$$

$$\begin{aligned} a_1a_2 - 2a_1a_3 + a_2a_3 = [a_1 = t_1 - t_2, a_2 = t_1 + t_2, a_3 = t_3] \\ (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) - 2(t_1 - t_2)t_3 + (t_1 + t_2)t_3 = \\ t_1^2 - t_2^2 - t_1t_3 + 3t_2t_3 = (t_1 - \frac{t_3}{2})^2 - (t_2 - \frac{3}{2}t_3)^2 + 2t_3^2 \end{aligned}$$

Проведем замену $\tau_1 = t_1 - \frac{1}{2}t_3$, $\tau_2 = t_2 - \frac{3}{2}t_3$, $\tau_3 = \sqrt{2}t_3$ Выразим

$$t_1 = \tau_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tau_3 \qquad t_2 = \tau_2 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\tau_3 \qquad t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3$$

Получим уравнение $\tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2 = 0$

Выразим a_i:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_1 - \tau_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3 \\ a_2 &= \tau_1 + \tau_2 + \sqrt{2}\tau_3 \\ a_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Y = A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = x + y \\ y_2 = -x + y \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{cases}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{y_1} - u_{y_2} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_3} \\ u_y &= u_{y_1} + u_{y_2} + \sqrt{2}u_{y_3} \\ u_z &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= u_{y_1y_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_1y_3} - u_{y_2y_2} - \frac{3}{\sqrt{2}}u_{y_2y_3} - u_{y_3y_3} \\ u_{xz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_1y_3} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_2y_3} - \frac{1}{2}u_{y_3y_3} \\ u_{yz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_1y_3} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_2y_3} + u_{y_3y_3} \end{aligned}$$

Подставим в исходное уравнение и получим:

$$u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} - u_{y_3y_3} + 2u_{y_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_3} = 0$$

Проведем замену:

$$u = e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} v(y)$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} u_{y_1} &= (\alpha_1 v + v_{y_1})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_2} &= (\alpha_2 v + v_{y_2})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_2} &= (\alpha_3 v + v_{y_3})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_1y_1} &= (\alpha_1^2 v + 2\alpha_1 v_{y_1} + v_{y_1y_1})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_2y_2} &= (\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_{y_2} + v_{y_2y_2})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_3y_3} &= (\alpha_3^2 v + 2\alpha_3 v_{y_3} + v_{y_3y_3})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \end{aligned}$$

Подставим в полученное уравнение и домножим на $e^{-\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \alpha_3 y_3}$
Получим коэффициенты при производных:

$v_{y_1y_1} : 1$ $\quad$ $v_{y_2y_2} : -1$ $\quad$ $v_{y_3y_3} : -1$

$v_{y_1} : 2\alpha_1 + 2$ $\quad$ $v_{y_2} : -2\alpha_2$ $\quad$ $v_{y_3} : -2\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$v : \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$

Возьмем следующие значения α_i:

$$\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Имеем:

$$(v_{y_1y_1} - v_{y_2y_2} - v_{y_3y_3} - \frac{7}{8}v) = 0$$

9 Задание 9. Решить задачу Коши

$$x\, u_{xx} + (x+y)\, u_{xy} + y\, u_{yy} = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$$
$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \qquad u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}} = -x^4$$

Характеристическое уравнение:

$$x\,(dy)^2 - 2(x+y)\,(dy \cdot dx) + y\,(dx)^2 = 0.$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(x+y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0.$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$xt^2 - 2(x+y)t + y = 0.$$

Дискриминант $D = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа.

Решение уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{y}{x} \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{y}{x}: \quad y = xC_1$$
$$t_2 = 1: \quad y = x + C_2$$

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \xi_x = -\frac{y}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{x}, \quad \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\eta = y - x, \quad \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1$$

Преобразование производных:

$$u_x = -\frac{y}{x^2}u_\xi - u_\eta$$
$$u_y = \frac{1}{x}u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = \frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\xi$$
$$u_{xy} = -\frac{y}{x^3}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}) - u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\xi$$
$$u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & \frac{2y}{x^3}x - \frac{1}{x^2}(x+y) = \frac{(y-x)}{x^2} \\ u_\eta & : & 0 \\ u_{\xi\xi} & : & \frac{y^2}{x^3} - \frac{y(x+y)}{x^3} + \frac{y}{x^2} = 0 \\ u_{\xi\eta} & : & \frac{2y}{x} + (x+y)(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}) + \frac{2y}{x} = -\frac{(y-x)^2}{x^2} \\ u_{\eta\eta} & : & x - (x+y) + y = 0 \end{array}$$

Обратная замена:

$$x = \frac{\eta}{\xi - 1}, \qquad y = \frac{\xi\eta}{\xi - 1}$$

Имеем:

$$-\frac{(y-x)^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{(y-x)}{x^2}u_\xi = 0$$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{y-x}u_\xi = 0$$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{\eta}u_\xi = 0$$

Замена $u_\xi = v$:

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{v}{\eta}$$

$$v_\eta - \frac{1}{\eta}v = 0$$

$$\ln v = \ln\eta + C$$

$$v = \eta \cdot C(\xi)$$

Тогда:

$$u_\xi = \eta \cdot C(\xi)$$

$$u = \int \eta \cdot C(\xi) d\xi + C(\eta)$$

$$u = \eta \cdot C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

Обратная замена:

$$u = (y-x) \cdot C_1(\frac{y}{x}) + C_2(y-x)$$

Используем начальные условия, подставим $y = \frac{1}{x}$ в выражение для $u(x,y)$:

$$\left(\frac{1}{x} - x\right) C_1\left(\frac{1}{x^2}\right) + C_2\left(\frac{1}{x} - x\right) = x^3$$

Тогда

$$\xi = y - x = \frac{1-x^2}{x}, \quad \eta = \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\xi C_1(\eta) + C_2(\xi) = x^3$$

Из второго условия:

$$C_1(\eta) + \frac{1-x^2}{x^2}C_1'(\eta) + C_2'(\xi) = -x^4$$

Проведем замену: $s=\xi$, $t=\eta$ и выразим x через t:

$$x=\frac{1}{\sqrt{t}},\quad s=\frac{t-1}{\sqrt{t}}$$

Запишем уравнения в терминах t:

$$C_2(s)+sC_1(t)=\frac{1}{t^{3/2}},$$
$$C_2'(s)+C_1(t)+(t-1)C_1'(t)=-\frac{1}{t^2}$$

Решим систему уравнений.

1. Выразим $C_2(s)$:

$$C_2(s)=\frac{1}{t^{3/2}}-sC_1(t).$$

2. Подставим это выражение:

$$\left(\frac{1}{t^{3/2}}-sC_1(t)\right)'+C_1(t)+(t-1)C_1'(t)=-\frac{1}{t^2}.$$

Так как $s=\frac{t-1}{\sqrt{t}}$, имеем $ds/dt=\frac{(t-1)'\sqrt{t}-(t-1)(\sqrt{t})'}{t}=\frac{\sqrt{t}-\frac{t-1}{2\sqrt{t}}}{t}$, что упрощается до $ds/dt=\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}$.

3. Производная $C_2(s)$ будет:

$$C_2'(s)=\left(\frac{1}{t^{3/2}}-sC_1(t)\right)'=-\frac{3}{2}t^{-5/2}-\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t)-sC_1'(t).$$

Подставляя это, получаем

$$-\frac{3}{2}t^{-5/2}-\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t)-sC_1'(t)+C_1(t)+(t-1)C_1'(t)=-\frac{1}{t^2}.$$

4. Переписываем уравнение:

$$(t-1-s)C_1'(t)+\left(1-\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}\right)C_1(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{3}{2}t^{-5/2}.$$

Так как $s=\frac{t-1}{\sqrt{t}}$, имеем $t-1-s=\frac{(t-1)(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}$.

5. Разделяем переменные и интегрируем уравнение относительно $C_1(t)$:

$$C_1'(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t-1)^2}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(t)=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

6. Подставляем $C_1(t)$ в уравнение для $C_2(s)$ и находим $C_2(s)=0$.

Подставляя найденные функции, получаем решение:

$$u(x,y)=\frac{x^2}{y}.$$

Ответ: $u = \frac{x^2}{y}$.