ИТЕРАЦИОННЫЙ СТЕПЕННОЙ МЕТОД

Диагонализируемая матрица. Базовые итерации степенного метода. Нормировка векторов итерационной последовательности. Случай вещественного и не кратного наибольшего по модулю собственного значения. Случай вещественного и кратного наибольшего по модулю собственного значения. Случай вещественных и противоположных по знаку наибольших по модулю собственных значений. Случай, когда два наибольших по модулю собственных значения образуют комплексно-сопряженную пару. Вычисление второго по величине модуля собственного значения. Метод обратных итераций.

Итерационный степенной метод[1] (называемый также степенным методом) предназначен для нахождения одного или нескольких собственных значений и соответствующих собственных векторов.

Пусть A – вещественная матрица порядка n. Любая матрица преобразованием подобия $S^{-1}AS$ с подходящей матрицей подобия S может быть приведена к жордановой (нормальной) форме: на главной диагонали – собственные значения, на наддиагонали – нули и/или единицы. Мы рассмотрим степенной метод для случая диагонализируемых матриц (матриц простой структуры). Так называются матрицы, которые преобразованием подобия могут быть приведены к диагональной матрице.

Матрица заведомо диагонализируема в двух важных частных случаях: если она симметричная или если ее собственные значения различны. Диагонализируемая матрица имеет ровно n линейно независимых собственных векторов.

Базовые итерации степенного метода. Нормировка векторов итерационной последовательности

Будем считать, что все собственные значения матрицы A перенумерованы в порядке невозрастания модулей:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Пусть y^0 – произвольный ненулевой вектор (например, $y^0=[1, 0, \ldots, 0]$). Основные вычисления метода – это реализация итерационного процесса

$$y^{k+1} = A\,y^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Получим представление вектора y^k, которое понадобится для исследования поведении y^k при больших значениях k. Для этого разложим y^0 по базису из собственных векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (x_i – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_i):

$$y^0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n. \tag{2}$$

[1] Используется, в частности, в алгоритме PageRank ссылочного ранжирования (вычисление веса веб-страницы путем подсчета важности ссылающихся на нее документов).

Здесь α_i – некоторые числа, среди которых могут быть, вообще говоря, равные нулю. Так как (следует из (2))

$$A^k y^0 = \alpha_1 A^k x_1 + \alpha_2 A^k x_2 + \ldots + \alpha_n A^k x_n,$$

то, с учетом $y^k = A^k y^0$ (следует из (1)) и $A^k x_i = \lambda_i^k x_i$ (следует из $Ax_i = \lambda_i x_i$), получим

$$y^k = \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \alpha_2 \lambda_2^k x_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k x_n. \qquad (3)$$

Если $|\lambda_1|>1$, $\alpha_1 \neq 0$, то при вычислении последовательности (1) на компьютере координаты вектора y^k могут сильно расти (напомним, $|\lambda_1| \geq |\lambda_i|$), что может привести к переполнению. Если $|\lambda_1|<1$, $\alpha_1 \neq 0$, то координаты вектора y^k будут сильно убывать, что может привести к машинному нулю. Поэтому на практике требуется производить нормировку: $u^0 = y^0$, $u^k = \dfrac{Au^{k-1}}{\left\| Au^{k-1} \right\|}$.

Для организации нормированных вычислений удобно использовать две одновременно вычисляемые последовательности:

$$u^0 = y^0,$$

$$v^k = Au^{k-1}, \quad u^k = \frac{v^k}{\left\| v^k \right\|}, \qquad (4)$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Напомним, y^0 – произвольный ненулевой вектор; в частности, в качестве y^0 можно взять любой вектор, норма которого равна единице (чтобы u^0, как и другие u^k, имел единичную длину).

Получим соотношения, связывающие векторы последовательности (1) $y^{k+1} = Ay^k$ и векторы последовательностей (4). Имеем:

$$u^k = \frac{v^k}{\left\| v^k \right\|} = \frac{Au^{k-1}}{\left\| v^k \right\|} = \frac{1}{\left\| v^k \right\|} Au^{k-1} = \frac{1}{\left\| v^k \right\|} A \left(\frac{1}{\left\| v^{k-1} \right\|} Au^{k-2} \right) =$$

$$\frac{1}{\left\| v^{k-1} \right\| \left\| v^k \right\|} A^2 u^{k-2} = \ldots = \frac{1}{\left\| v^1 \right\| \ldots \left\| v^{k-1} \right\| \left\| v^k \right\|} A^k u^0,$$

Отсюда, с учетом $y^k = A^k y^0 = A^k u^0$, получим $u^k = \dfrac{1}{\left\| v^1 \right\| \ldots \left\| v^{k-1} \right\| \left\| v^k \right\|} y^k$. Таким образом, имеют место равенства

$$y^k = u^k \left\| v^1 \right\| \ldots \left\| v^{k-1} \right\| \left\| v^k \right\|,$$

$$y^k = v^k \left\| v^1 \right\| \ldots \left\| v^{k-1} \right\|, \qquad (5)$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Равенства (5) применяются при переходе в формулах от векторов (или координат векторов) последовательности (1) к векторам последовательностей (4). Например,

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k} = \frac{v_i^{k+1}\|v^1\|\ldots\|v^k\|}{u_i^k\;\|v^1\|\ldots\|v^k\|} = \frac{v_i^{k+1}}{u_i^k}. \tag{6}$$

Случай 1: наибольшее по модулю собственное значение вещественное и простое

Пусть наибольшее по модулю собственное значение вещественное и простое (т.е. не кратное):

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Будем предполагать, что в разложении (2) вектора y^0

$$y^0=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n$$

имеет место

$$\alpha_1\neq 0.$$

Замечание 1. Условие $\alpha_1\neq 0$ нельзя проверить заранее. Поэтому, полученные далее приближения собственного значения верны, вообще говоря, не для всех y^0. Если возникают сомнения в правильности приближения, следует произвести вычисления еще для одного y^0.

Введем обозначения координат векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $x_1=(x_{11},x_{12},\ldots, x_{1n})$, $x_2=(x_{21},x_{22},\ldots, x_{2n})$, $\ldots$, $x_n=(x_{n1},x_{n2},\ldots, x_{nn})$.

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right),\; i=1, 2,\ldots, n, \tag{7}$$

$$y_i^k = \alpha_1\lambda_1^k x_{1i}\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right),\; i=1, 2,\ldots, n. \tag{8}$$

Доказательство. Запишем равенство (3)

$$y^k=\alpha_1\lambda_1^k x_1+\alpha_2\lambda_2^k x_2+\ldots+\alpha_n\lambda_n^k x_n$$

в координатной форме:

$$y_i^k=\alpha_1\lambda_1^k x_{1i}+\alpha_2\lambda_2^k x_{2i}+\ldots+\alpha_n\lambda_n^k x_{ni},\; i=1, 2,\ldots, n.$$

Отсюда

$$y_i^k = \alpha_1\lambda_1^k x_{1i}\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1 x_{1i}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_{2i}+\ldots+\frac{\alpha_n}{\alpha_1 x_{1i}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_{ni}\right).$$

Так как $|\lambda_1|>|\lambda_j|$, $2\leq j\leq n$, то $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|<1$. При больших значениях k величина $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k$ будет малой и ей можно пренебречь, т.е. можно записать равенства (8).

Взяв отношение координат двух векторов, полученных на соседних итерациях, будем иметь

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}=\frac{\alpha_1\lambda_1^{k+1}x_{1i}\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k+1}\right)\right)}{\alpha_1\lambda_1^k x_{1i}\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k}\right)\right)},$$

откуда следуют соотношения (7).

Следствие 1. *При достаточно больших значениях k выполняются приближенные равенства*

$$\lambda_1\approx\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k},\ i=1,2,\dots,n. \tag{9}$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, приближенно равен y^k.

Замечание 2. Имеет место покоординатная сходимость к собственному значению: правая часть приближенного равенства (7)

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

зависит от номера i взятой составляющей. Если эта часть будет иметь одинаковые (в пределах требуемой точности) значения при всяких i, то можно предположить, что итерационный процесс сошелся с нужной точностью.

Замечание 3. Из соотношений (8)

$$y_i^k=\alpha_1\lambda_1^k x_{1i}\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right)$$

не следует, что последовательность y^k сходится к какому-то вектору. Из соотношений (8) следует, что для достаточно большого k вектор y^k пропорционален, причем с зависящим от k коэффициентом $\alpha_1\lambda_1^k$, собственному вектору x_1.

При нормированных вычислениях можно, ввиду равенства (6)

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}=\frac{v_i^{k+1}}{u_i^k},$$

положить

$$\lambda_1\approx\frac{v_i^{k+1}}{u_i^k}. \tag{10}$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, приближенно можно, ввиду $y^k=u^k\|v^1\|\dots\|v^{k-1}\|\|v^k\|$, принять равным u^k.

Если для нормированных вычислений использовать максимум-норму вектора v^k, $\left\|v^k\right\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\left|v_i^k\right|$, то из определения (4) имеем $u^k = \dfrac{v^k}{\left\|v^k\right\|_\infty}$. Поэтому для любого i выполняется $0\le\left|u_i^k\right|\le 1$, причем $\left|u_i^k\right|=1$ для такого i, для которого достигается $\max\limits_{1\le i\le n}\left|v_i^k\right|$. Гарантированно избежать деления на 0 (или близкое к нулю число) при вычислении по формуле (10) можно для такого i, для которого достигается $\max\limits_{1\le i\le n}\left|v_i^k\right|$. В этом случае $\left|u_i^k\right|=1$, $\lambda_1\approx v_i^{k+1}\operatorname{sign}\left(u_i^k\right)$.

Лемма 2. *Если матрица A симметричная, то имеет место соотношение*

$$\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right). \tag{11}$$

Если матрица A не является симметричной, то

$$\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k}\right). \tag{12}$$

Доказательство. Если матрица A симметричная, то ее собственные векторы x_1, x_2, $\ldots$, x_n образуют ортонормированный базис. Используя равенство (3), по аналогии с доказательством леммы 1 получим:

$$\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k+1}x_i,\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k}x_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k}x_i,\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k}x_i\right)}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n\alpha_i\alpha_j\lambda_i^{k+1}\lambda_j^k\left(x_i,x_j\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^n\alpha_i\alpha_j\lambda_i^{k}\lambda_j^k\left(x_i,x_j\right)}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i^2\lambda_i^{2k+1}}{\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i^2\lambda_i^{2k}}=\frac{\alpha_1^2\lambda_1^{2k+1}\left(1+O\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k+1}\right)}{\alpha_1^2\lambda_1^{2k}\left(1+O\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right).$$

Если матрица A не является симметричной, то:

$$\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k+1}x_i,\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k}x_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k}x_i,\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^{k}x_i\right)}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n\alpha_i\alpha_j\lambda_i^{k+1}\lambda_j^k\left(x_i,x_j\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^n\alpha_i\alpha_j\lambda_i^{k}\lambda_j^k\left(x_i,x_j\right)}=$$

$$\frac{\alpha_1^2\lambda_1^{2k+1}\left(x_1,x_1\right)\left(1+O\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)}{\alpha_1^2\lambda_1^{2k}\left(x_1,x_1\right)\left(1+O\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right).$$

Следствие 2. *Если матрица A симметричная, то при достаточно больших значениях k выполняется приближенное равенство*

$$\lambda_1\approx\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}, \tag{13}$$

причем сходимость отношения $\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}$ *более быстрая, чем сходимость отношений* $\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}$ *(погрешность возводится в квадрат).*

При нормированных вычислениях, с учетом равенств (5)

$$y^k=u^k\left\|v^1\right\|\ldots\left\|v^{k-1}\right\|\left\|v^k\right\|,\ y^k=v^k\left\|v^1\right\|\ldots\left\|v^{k-1}\right\|,$$

из приближенного равенства (13) получим

$$\lambda_1\approx\frac{\left(v^{k+1},u^k\right)}{\left(u^k,u^k\right)}.$$

Пусть для нормированных вычислений используется евклидова норма: $\left\|v^k\right\|=\left\|v^k\right\|_2=\sqrt{\left(v^k,v^k\right)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^k\right)^2}$. В этом случае $u^k=\frac{v^k}{\left\|v^k\right\|_2}$, u^k – единичный вектор в евклидова норме, $\left(u^k,u^k\right)=1$,

$$\lambda_1\approx\left(v^{k+1},u^k\right).$$

Замечание 4. Из соотношений (7), (8), (12)

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right),\quad y_i^k=\alpha_1\lambda_1^k x_{1i}\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right),\quad \frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

следует, что в рассматриваемом случае 1 степенной метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q=\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|.$$

Если матрица *A* симметричная, то из соотношений (11)

$$\frac{\left(y^{k+1},y^k\right)}{\left(y^k,y^k\right)}=\lambda_1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)$$

следует, что степенной метод (получение наибольшего по модулю собственного значения формуле (13)) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2 .$$

Замечание 5. Заранее неизвестно, выполняется ли сделанное предположение $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\ldots\geq|\lambda_n|$. Если в результате итерационного процесса для разных y^0 придем к одному и тому же (с точностью до множителя) собственному вектору, то это указывает на то, что λ_1 не является кратным собственным значением и что нет собственного значения $(-\lambda_1)$.

Случай 2: наибольшее по модулю собственное значение вещественное и кратное

Пусть имеет место

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$$

и

$$|\lambda_1| > |\lambda_{r+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

В этом случае разложение (3) принимает вид

$$y^k = \lambda_1^k (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r) + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1}^k x_{r+1} + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k x_n$$

или, в координатной форме,

$$y_i^k = \lambda_1^k (\alpha_1 x_{1i} + \ldots + \alpha_r x_{ri}) + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1}^k x_{r+1\, i} + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k x_{ni} .$$

По аналогии со случаем 1 можно записать (в предположении, что $\alpha_1 x_{1i} + \ldots + \alpha_r x_{ri} \neq 0$)

$$y_i^k = \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_{1i} + \ldots + \alpha_r x_{ri}\right)\left(1 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right|^k\right)\right),$$

$$y_i^{k+1} = \lambda_1^{k+1} \left(\alpha_1 x_{1i} + \ldots + \alpha_r x_{ri}\right)\left(1 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right|^{k+1}\right)\right).$$

Итерационная последовательность y^k вновь ведет себя как геометрическая прогрессия (на этот раз со знаменателем, равным $\left|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right|$), поэтому можно записать

$$\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right|^k\right), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Формулировки всех результатов случая 1 сохраняются. В частности, при достаточно больших значениях k выполняются приближенные равенства

$$\lambda_1 \approx \frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}, \quad i=1, 2,\ldots, n;$$

собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, приближенно равен y^k. Сохраняют свой вид и формулы для нормированных вычислений.

Для получения всех линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 (должно быть r таких векторов), следует производить вычисления для разных y^0 до тех пор, пока не начнут получаться линейно зависимые векторы.

Замечание 6. Случай 1 можно рассматривать как следствие случая 2 при $r=1$.

Замечание 7. Если для разных y^0 получается одно и то же λ_1, но в результате итерационных процессов (напомним, см. замечание 3, итерационный процесс не обязан сходиться) придем к не коллинеарным собственным векторам, то это указывает на то, что наибольшее по модулю собственное значение является кратным.

Случай 3: два наибольших по модулю собственных значения вещественны и противоположны по знаку

Пусть

$$\lambda_1 = -\lambda_2$$

и

$$|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

В этом случае, в зависимости от четности числа итераций, разложение (3) $y^k=\alpha_1\lambda_1^k x_1+\alpha_2\lambda_2^k x_2+\ldots+\alpha_n\lambda_n^k x_n$ принимает вид

$$y^{2k}=\lambda_1^{2k}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)+\alpha_3\lambda_3^{2k}x_3+\ldots+\alpha_n\lambda_n^{2k}x_n,$$

$$y^{2k+1}=\lambda_1^{2k+1}(\alpha_1x_1-\alpha_2x_2)+\alpha_3\lambda_3^{2k+1}x_3+\ldots+\alpha_n\lambda_n^{2k+1}x_n.$$

Отсюда видно, что векторы y^{2k} и y^{2k+1} одновременно нельзя использовать для определения λ_1, так как у этих векторов различны, вообще говоря, выражения $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ и $\alpha_1x_1-\alpha_2x_2$.

Однако, используя тот факт, что у последовательностей только с четными, либо только с нечетными номерами $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ или $\alpha_1x_1-\alpha_2x_2$ одинаковы, мы можем определить λ_1^2. Для четных номеров по аналогии с предыдущими случаями имеем (если $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\neq 0$):

$$y_i^{2k}=\lambda_1^{2k}\left(\alpha_1x_{1i}+\alpha_2x_{2i}\right)\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)\right),$$

$$\frac{y_i^{2k+2}}{y_i^{2k}}=\lambda_1^2+O\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^{2k}\right),\ i=1,2,\ldots,n,$$

$$\lambda_{1,2}\approx\pm\sqrt{\frac{y_i^{2k+2}}{y_i^{2k}}}\ .$$

Для нечетных номеров, если $\alpha_1 x_1-\alpha_2 x_2\neq 0$, можно записать

$$y_i^{2k+1}=\lambda_1^{2k+1}\left(\alpha_1 x_{1i}-\alpha_2 x_{2i}\right)\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^{2k+1}\right)\right).$$

$$\frac{y_i^{2k+1}}{y_i^{2k-1}}=\lambda_1^2+O\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^{2k-1}\right),\ i=1,2,\ldots,n,$$

$$\lambda_{1,2}\approx\pm\sqrt{\frac{y_i^{2k+1}}{y_i^{2k-1}}}\ .$$

Последовательности y^{2k} и y^{2k+1} нельзя, вообще говоря, использовать по отдельности для приближений собственных векторов. Для получения собственных векторов рассмотрим пару приближенных (для достаточно больших k) равенств

$$y^{2k+1}\approx\lambda_1^{2k+1}(\alpha_1 x_1-\alpha_2 x_2),$$

$$y^{2k}\approx\lambda_1^{2k}(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2).$$

Умножим второе приближенное равенство на λ_1 и после этого рассмотрим сумму и разность приближенных равенств:

$$y^{2k+1}+\lambda_1 y^{2k}\approx 2\,\lambda_1^{2k+1}\,\alpha_1 x_1,$$

$$y^{2k+1}-\lambda_1 y^{2k}\approx -2\,\lambda_1^{2k+1}\,\alpha_2 x_2.$$

Таким образом, комбинацию $y^{2k+1}+\lambda_1 y^{2k}$ можно взять за собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, а комбинацию $y^{2k+1}-\lambda_1 y^{2k}$ можно взять за собственный вектор, соответствующий собственному значению $(-\lambda_1)$.

Рассмотрим нормированные вычисления. Используем представления (5) $y^k=u^k\left\|v^1\right\|\ldots\left\|v^{k-1}\right\|\left\|v^k\right\|$, $y^k=v^k\left\|v^1\right\|\ldots\left\|v^{k-1}\right\|$. Так как

$$\frac{y_i^{2k+2}}{y_i^{2k}}=\frac{v_i^{2k+2}\left\|v^1\right\|\ldots\left\|v^{2k+1}\right\|}{u_i^{2k}\left\|v^1\right\|\ldots\left\|v^{2k}\right\|}\ ,$$

то

$$\lambda_{1,2}\approx\pm\sqrt{\frac{y_i^{2k+2}}{y_i^{2k}}}=\pm\sqrt{\frac{v_i^{2k+2}\left\|v^{2k+1}\right\|}{u_i^{2k}}}\ ,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Или:

$$\frac{y_i^{2k+1}}{y_i^{2k-1}} = \frac{v_i^{2k+1}\|v^1\|\ldots\|v^{2k}\|}{u_i^{2k-1}\|v^1\|\ldots\|v^{2k-1}\|},$$

поэтому

$$\lambda_{1,2} \approx \pm\sqrt{\frac{y_i^{2k+1}}{y_i^{2k-1}}} = \pm\sqrt{\frac{v_i^{2k+1}\|v^{2k}\|}{u_i^{2k-1}}},\ i=1, 2,\ldots, n.$$

Так как

$$y^{2k+1}+\lambda_1 y^{2k}=v^{2k+1}\|v^1\|\ldots\|v^{2k}\|+\lambda_1 u^{2k}\|v^1\|\ldots\|v^{2k}\|=\|v^1\|\ldots\|v^{2k}\|(v^{2k+1}+\lambda_1 u^{2k}),$$

то собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, приближенно равен $v^{2k+1}+\lambda_1 u^{2k}$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $(-\lambda_1)$, приближенно равен $v^{2k+1}-\lambda_1 u^{2k}$.

Замечание 8. Если заметна покоординатная сходимость отношений $\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}$ отдельно векторов для четных и нечетных k (в реальных вычислениях рассматривают $\frac{v_i^{2k+2}\|v^{2k+1}\|}{u_i^{2k}}$ и $\frac{v_i^{2k+1}\|v^{2k}\|}{u_i^{2k-1}}$), то это указывает на наличие двух наибольших по модулю собственных значений, знаки которых различны.

Случай 4: Два наибольших по модулю собственных значения образуют комплексно-сопряженную пару

Пусть

$$\lambda_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta),\quad \lambda_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta),$$
$$|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Этот случай рассмотрим кратко, без доказательств.

В рассматриваемом случае

$$r \approx \sqrt{\frac{y_j^k y_j^{k+2} - \left(y_j^{k+1}\right)^2}{y_j^{k-1} y_j^{k+1} - \left(y_j^k\right)^2}},\ \cos\theta \approx \frac{y_j^{k+2} + r^2 y_j^k}{2r y_j^{k+1}}.$$

С учетом равенств (5) получим

$$r \approx \sqrt{\frac{v_j^k v_j^{k+2}\|v^{k+1}\| - \left(v_j^{k+1}\right)^2\|v^k\|}{u_j^{k-1} v_j^{k+1} - \left(u_j^k\right)^2\|v^k\|}},\ \cos\theta \approx \frac{v_j^{k+2}\|v^{k+1}\| + r^2 u_j^k}{2r v_j^{k+1}}.$$

Если собственные значения вещественной матрицы комплексно-сопряженные, то и отвечающие им собственные векторы имеют комплексно-сопряженные координаты. Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, приближенно равен $y^{k+1}-\lambda_2 y^k$ ($v^{k+1}-\lambda_2 u^k$ в реальных вычислениях). Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_2, приближенно равен $y^{k+1}–\lambda_1 y^k$ ($v^{k+1}–\lambda_1 u^k$ в реальных вычислениях).

Замечание 9. Характерным признаком случая 4 является колебательный характер последовательности приближений.

Вычисление второго по величине модуля собственного значения

Пусть

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|.$$

Приведем (без доказательств) выражения для вычисления λ_2:

$$\lambda_2 \approx \frac{y_i^{k+1} - \lambda_1 y_i^k}{y_i^k - \lambda_1 y_i^{k-1}},\ i=1, 2, \ldots, n.$$

При нормированных вычислениях (используем представления (5))

$$\lambda_2 \approx \frac{v_i^{k+1}\|v^1\|\ldots\|v^k\| - \lambda_1 v_i^k\|v^1\|\ldots\|v^{k-1}\|}{v_i^k\|v^1\|\ldots\|v^{k-1}\| - \lambda_1 u_i^{k-1}\|v^1\|\ldots\|v^{k-1}\|} = \frac{v_i^{k+1}\|v^k\| - \lambda_1 v_i^k}{v_i^k - \lambda_1 u_i^{k-1}}.$$

Если λ_1 вычислялось по формуле $\lambda_1 \approx \dfrac{y_i^{k+1}}{y_i^k}$ при некотором k, то λ_2 рекомендуется (ввиду $y^{k+1}–\lambda_1 y^k \approx 0$, $y^k–\lambda_1 y^{k-1} \approx 0$ происходит вычитание близких чисел) вычислять по формуле

$$\lambda_2 \approx \frac{v_i^{m+1}\|v^m\| - \lambda_1 v_i^m}{v_i^m - \lambda_1 u_i^{m-1}},\ m<k.$$

Как правило, при вычислении происходит потеря значащих цифр.

Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_2, приближенно равен $y^{k+1}–\lambda_1 y^k$ или, в реальных вычислениях, $v^{k+1}–\lambda_1 u^k$.

Метод обратных итераций

Этот метод предназначен для отыскания наименьшего по модулю собственного значения невырожденной матрицы. Пусть

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

Уравнение $Ax=\lambda x$ можно переписать в виде $A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$. Поэтому собственные значения ν_i матрицы A^{-1} связаны с собственными значениями матрицы A соотношениями $\nu_i=\dfrac{1}{\lambda_i}$. Следовательно,

$$\nu_{\max}=\nu_n=\frac{1}{\lambda_{\min}}=\frac{1}{\lambda_n},$$

$$\frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \ge \ldots \ge \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

Поэтому, для того чтобы найти минимальное по модулю собственное значение матрицы A, достаточно найти максимальное по модулю собственное значение ν_n матрицы A^{-1}. Все утверждения и процедуры степенного метода (случай 1) остаются справедливыми, если базовую итерацию $y^{k+1}=Ay^k$ заменить на базовую итерацию $y^{k+1}=A^{-1}y^k$. При этом можно не обращать матрицу A, достаточно решить относительно y^{k+1} систему

$$Ay^{k+1}=y^k.$$

Нормированные вычисления, с учетом соотношений (4) $u^0=y^0$, $v^k=Au^{k-1}$, $u^k=\dfrac{v^k}{\|v^k\|}$ и замены A на A^{-1}, организуются следующим образом:

$$u^0=y^0,$$
$$Av^k=u^{k-1},\ \ u^k=\frac{v^k}{\|v^k\|}, \qquad (4^*)$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

На каждой итерации решается СЛАУ с одной и той же матрицей, но разными правыми частями. Можно построить LU-разложения матрицы A при выполнении первой итерации ($O(n^3)$ операций, как и при решении СЛАУ). Тогда все последующие итерации могут быть реализованы за $O(n^2)$ арифметических операций.

Метод обратных итераций сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q=\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$; если матрица A симметричная, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q=\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|^2$.

Метод обратных итераций может использоваться и в том случае, когда нужно уточнить уже известное с какой-либо точностью собственное значение. Это использование основано на следующем утверждении из линейной алгебры.

Лемма 3. *Пусть* σ *– числовой параметр,* λ_i *– собственные значения матрицы* A*,* μ_i *– собственные значения матрицы* A–σE*. Тогда* $\mu_i=\lambda_i-\sigma$ (везде $i=1,2,\ldots,n$). *Собственные векторы матриц* A *и* A–σE *совпадают.*

Действительно, собственные значения матрицы $A-\sigma E$ определяются из уравнения $\det((A-\sigma E)-\mu E)=0$ относительно μ. Если переписать это уравнение в виде $\det(A-(\mu+\sigma)E)=0$, то получим $\mu_i+\sigma=\lambda_i$, т.е. $\mu_i=\lambda_i-\sigma$. Далее, пусть $Ax_i=\lambda_i x_i$ и $(A-\sigma E)z_i=\mu_i z_i$. Тогда $(A-\sigma E)z_i=(\lambda_i-\sigma)z_i$, $Az_i-\sigma Ez_i=\lambda_i z_i-\sigma z_i$, $Az_i=\lambda_i z_i$; следовательно, векторы x_i и z_i (с точностью до множителя) совпадают.

Применим метод обратных итераций к матрице $A-\lambda^* E$, где λ^* – достаточно хорошее приближение к собственному значению λ (λ^* играет роль σ в лемме 3). Собственное значение $\mu=\lambda-\lambda^*$ матрицы $A-\lambda^*E$ по модулю значительно меньше остальных. В этом случае обратные итерации быстро сходятся к этому малому собственному значению, т.е. к поправке для λ. Заодно находится (или уточняется, если уже было приближение) собственный вектор матрицы A.

Замечание заключительное. Напомним, мы рассмотрели степенной метод только для случая диагонализируемых матриц. Степенной метод можно применять и в общем (наличие в жордановой форме матрицы клеток порядка два) случае, но скорость сходимости резко падает. Гарантировать диагонализируемость матрицы можно в двух важных частных случаях: если она симметричная или если ее собственные значения различны.

Список использованных источников

1. Репников В.И. Вычислительные методы алгебры. Курс лекций. Минск. Белгосуниверситет. Кафедра вычислительной математики. 2011.
2. Андреев В.Б. Численные методы. М: МГУ, 2013. 336 с.
3. Фалейчик Б.В. Методы вычислений: пособие. Минск: БГУ, 2014. 224 с.
4. Фалейчик Б.В. Методы вычислений. 2020.

Вопрос к лабораторной работе «Итерационный степенной метод»: Степенной метод, схема обоснования формул метода на примере Случая 1.

Ответ: Итерационный степенной метод предназначен для нахождения одного или нескольких собственных значений и соответствующих собственных векторов диагонализируемых матриц. Одна итерация метода – умножение матрицы на вектор, полученный на предыдущей итерации. Пусть наибольшее по модулю собственное значение вещественное и простое. Рассмотрим разложение произвольно выбранного вектора начального приближения по базису из собственных векторов. Из этого разложения получим разложение вектора, вычисляемого на каждом шаге итерационного процесса. Из анализа последнего разложения следует, что отношение любой фиксированной координаты векторов, полученных на текущей и предшествующей итерации, стремится к наибольшему по модулю собственному значению. Сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, определяемым отношением двух наибольших по модулю собственных значений. Собственный вектор, соответствующий наибольшему по модулю собственному значению, приближенно равен вектору, вычисляемому на итерационных шагах.