МЕТОД ДАНИЛЕВСКОГО

Связь между канонической формой Фробениуса и характеристическим многочленом матрицы. Регулярный случай приведения матрицы к канонической форме Фробениуса. Нерегулярные случаи приведения матрицы к канонической форме Фробениуса. Вычисление собственных векторов методом Данилевского.

Метод Данилевского относится к прямым методам решения проблемы собственных значений. Метод основан на подобном преобразовании матрицы: преобразованиями матрица приводится к канонической форме Фробениуса, которая фактически содержит коэффициенты характеристического многочлена. Для приведения матрицы порядка n к канонической форме Фробениуса метод требует $O(n^3)$ операций умножения и деления. Метод Данилевского является одним из самых экономичных прямых методов.

Связь между канонической формой Фробениуса и характеристическим многочленом матрицы

Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Известно, что матрица A преобразованием подобия $S^{-1}AS$ может быть приведена к канонической форме Фробениуса вида:

$$\Phi=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Таким образом, имеет место представление

$$\Phi=S^{-1}AS,$$

где S – некоторая невырожденная матрица, а матрица Φ имеет вид (1).

Замечание 1. В литературе встречаются также другие варианты формы Фробениуса, в которых коэффициенты p_i являются элементами не первой, а последней строки, первого или последнего столбца с надлежащим образом расположенными единичными элементами. С точки зрения практического использования все эти представления равноценны.

Лемма 1. *Преобразование подобия не изменяет характеристического многочлена матрицы.*

Покажем, что $\det(B-\lambda E)=\det(A-\lambda E)$, если $B=S^{-1}AS$, S – невырожденная матрица. Имеем:

$$\det(B-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}ES)=\det(S^{-1}(A-\lambda E)S)=$$
$$\det S^{-1}\det(A-\lambda E)\det S=\det(A-\lambda E)\det S^{-1}\det S=\det(A-\lambda E).$$

Обозначим через $P(\lambda)$ собственный многочлен матрицы A:

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n P(\lambda).$$

Лемма 2. *Числа p_i канонической формы Фробениуса являются (с противоположным знаком) коэффициентами собственного многочлена матрицы:*

$$P(\lambda)=(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\ldots-p_n).$$

Справедливость леммы установим путем преобразований, использующих разложение определителя по первому столбцу:

$$\det(A-\lambda E)=\det(\Phi-\lambda E)=\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$\left(p_1-\lambda\right)\left(-\lambda\right)^{n-1}-\begin{vmatrix} p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$\left(p_1-\lambda\right)\left(-\lambda\right)^{n-1}-p_2\left(-\lambda\right)^{n-2}+\begin{vmatrix} p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\ldots=$$

$$\left(p_1-\lambda\right)\left(-\lambda\right)^{n-1}-p_2\left(-\lambda\right)^{n-2}+p_3\left(-\lambda\right)^{n-3}-\ldots$$
$$+\left(-1\right)^{n-1}p_{n-2}\left(-\lambda\right)^{n-(n-2)}+\left(-1\right)^{n}\begin{vmatrix} p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$\left(p_1-\lambda\right)\left(-\lambda\right)^{n-1}-p_2\left(-\lambda\right)^{n-2}+p_3\left(-\lambda\right)^{n-3}-\ldots$$
$$+\left(-1\right)^{n-1}p_{n-2}\left(-\lambda\right)^{n-(n-2)}+\left(-1\right)^{n}p_{n-1}\left(-\lambda\right)^{n-(n-1)}+\left(-1\right)^{n+1}p_n=$$

$$(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-p_3\lambda^{n-3}-\ldots-p_{n-2}\lambda^2-p_{n-1}\lambda-p_n).$$

Таким образом, задача получения характеристического многочлена сводится к отысканию нужной матрицы подобия S (к отысканию канонической формы Фробениуса). В методе Данилевского эта матрица строится последовательно с помощью $n-1$ преобразований подобия, переводящих строки матрицы A, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы Ф. В зависимости от элементов матрицы A различают два случая: регулярный и нерегулярный.

Регулярный случай приведения матрицы к канонической форме Фробениуса

Рассмотрим сначала регулярном случай, т.е. случай, когда возможны все действия следующего алгоритмического предписания.

1. Получить 1 на месте элемента $a_{n\,n-1}$, все остальные элементы n-й строки обратить в 0.

Для этого, по аналогии с методом Гаусса (вариант, в котором на месте ведущего элемента получается 1), следует разделить $(n-1)$-й столбец матрицы A на $a_{n\,n-1}$, а потом элементы $(n-1)$-го столбца умножить на a_{ni} и вычесть из соответствующих элементов i-го столбца. Это действие эквивалентно умножению матрицы A справа на матрицу

$$M_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{n\,n-1}} & \cdots & -\dfrac{a_{n\,n-2}}{a_{n\,n-1}} & \dfrac{1}{a_{n\,n-1}} & -\dfrac{a_{nn}}{a_{n\,n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Умножить получившуюся в пункте 1 матрицу $A\,M_{n-1}$ слева на матрицу

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это делается для того, чтобы получившаяся матрица бала подобна матрице A. Матрица M_{n-1}^{-1} существует, так как $\det M_{n-1}=\dfrac{1}{a_{n\,n-1}}\neq 0$ и предполагается $a_{n\,n-1}\neq 0$.

В результате получим матрицу

$$A_1=M_{n-1}^{-1}A\,M_{n-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1\,n-1}^{(1)} & a_{1\,n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2\,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1}^{(1)} & a_{n-1\,2}^{(1)} & \cdots & a_{n-1\,n-1}^{(1)} & a_{n-1\,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Повторить действия пункта 1 и пункта 2, обращая в 1 элементы на месте $a_{n-1\,n-2}$, …, a_{21}.

Сначала получим

$$A_2 = M_{n-2}^{-1} A_1 M_{n-2} = M_{n-2}^{-1}\, M_{n-1}^{-1} A\, M_{n-1} M_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1\,n-2}^{(2)} & a_{1\,n-1}^{(2)} & a_{1\,n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2\,1}^{(2)} & \cdots & a_{n-2\,n-2}^{(2)} & a_{n-2\,n-1}^{(2)} & a_{n-2\,n}^{(2)} \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$M_{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_{n-1\,1}^{(1)}}{a_{n-1\,n-2}^{(1)}} & \cdots & -\dfrac{a_{n-1\,n-3}^{(1)}}{a_{n-1\,n-2}^{(1)}} & \dfrac{1}{a_{n-1\,n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1\,n-1}^{(1)}}{a_{n-1\,n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1\,n}^{(1)}}{a_{n-1\,n-2}^{(1)}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1}^{(1)} & a_{n-1\,2}^{(1)} & \cdots & a_{n-1\,n-1}^{(1)} & a_{n-1\,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После всех преобразований получим

$$A_{n-1} = M_1^{-1}\, M_2^{-1} \ldots M_{n-2}^{-1}\, M_{n-1}^{-1} A\, M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1 = S^{-1} A S =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1\,n-1}^{(n-1)} & a_{1\,n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \Phi.$$

По первой строке матрицы Φ составляется собственный многочлен матрицы A:

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n.$$

Все преобразования регулярного случая возможны, если

$$a_{n\,n-1} \neq 0,\quad a_{n-1\,n-2}^{(1)} \neq 0,\ \ldots,\ a_{21}^{(n-2)} \neq 0.$$

Нерегулярный случай приведения матрицы к канонической форме Фробениуса

Рассмотрим теперь нерегулярный случай. Пусть преобразования доведены до строки с номером k, далее требуется $(k-1)$-й столбец матрицы A_{n-k} разделить на $a_{k\,k-1}^{(n-k)}$, но $a_{k\,k-1}^{(n-k)}=0$. Возможны два варианта.

Вариант 1. Пусть в k-й строке левее элемента $a_{k\,k-1}^{(n-k)}$ имеется в столбце с номером i элемент $a_{ki}^{(n-k)}$, отличный от нуля.

Тогда вычисления сводятся к регулярному случаю, если поменять местами столбцы с номерами $k-1$ и i. Для того чтобы преобразование было преобразованием подобия, нужно поменять местами и строки с теми же номерами. Соответствующее преобразование можно записать в виде

$$A'_{n-k}=P_{i\,k-1}A_{n-k}P_{i\,k-1}, \tag{2}$$

где $P_{i\,k-1}$ – элементарная матрица перестановок.

Элементарной матрицей перестановок P_{ij} называется матрица, полученная из единичной матрицы перестановкой i-й и j-й строк (или i-го и j-го столбца). Матрица $P_{ij}A$ отличается от матрицы A перестановкой i-й и j-й строк. Матрица AP_{ij} отличается от матрицы A перестановкой i-го и j-го столбца. Преобразование $P_{i\,k-1}A_{n-k}P_{i\,k-1}$ есть преобразование подобия, так как

$$P_{i\,k-1}P_{i\,k-1}=E.$$

Если к матрице A_{n-k} применялось преобразование (2), то далее уже преобразуется $(k-1)$-й столбец матрицы A'_{n-k}.

Замечание 2. Если $k=n$, $a_{n\,n-1}^{(0)}=0$, то в качестве отличного от нуля элемента можно рассмотреть $a_{n\,n}^{(0)}$, находящийся правее $a_{n\,n-1}^{(0)}$.

Вариант 2. Пусть в k-й строке левее элемента $a_{k\,k-1}^{(n-k)}$ все элементы нулевые (напомним, $a_{k\,k-1}^{(n-k)}$ также нулевой).

Тогда уже полученная матрица имеет вид

$$A_{n-k}=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11}^{(n-k)} & \cdots & a_{1\,k-1}^{(n-k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1\,1}^{(n-k)} & \cdots & a_{k-1\,k-1}^{(n-k)} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{1k}^{(n-k)} & \cdots & a_{1\,n-1}^{(n-k)} & a_{1n}^{(n-k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1\,k}^{(n-k)} & \cdots & a_{k-1\,n-1}^{(n-k)} & a_{k-1\,n}^{(n-k)} \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{kk}^{(n-k)} & \cdots & a_{k\,n-1}^{(n-k)} & a_{kn}^{(n-k)} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{n-k} & C_{n-k} \\ 0 & \Phi_{n-k} \end{bmatrix},$$

где Φ_{n-k} имеет канонический вид Фробениуса.

Лемма 3. *Пусть B и Φ – квадратные матрицы. Тогда определитель блочно-треугольной матрицы вида* $\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$ *находится по формуле*

$$\begin{vmatrix} B & C \\ 0 & \Phi \end{vmatrix} = |B| \cdot |\Phi|.$$

Действительно, рассмотрим формулу Лапласа разложения определителя некоторой матрицы A порядка n по m столбцам:

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} M^{i_1, i_2, \ldots, i_m}_{j_1, j_2, \ldots, j_m} A^{i_1, i_2, \ldots, i_m}_{j_1, j_2, \ldots, j_m},$$

где $M^{i_1, i_2, \ldots, i_m}_{j_1, j_2, \ldots, j_m}$ (номера выбранных строк матрицы A указываются верхними индексами, а выбранных столбцов – нижними) и $A^{i_1, i_2, \ldots, i_m}_{j_1, j_2, \ldots, j_m}$ – соответствующие миноры и их алгебраические дополнения. Утверждение леммы есть прямое следствие формулы Лапласа разложения определителя по m столбцам, в которых расположена матрица B (остальные миноры в этих столбцах равны нулю, так как содержат нулевую строку).

Из леммы 3 следует, что

$$\det(A_{n-k} - \lambda E_{n-k}) = \det(B_{n-k} - \lambda E_{k-1}) \det(\Phi_{n-k} - \lambda E_{n-k+1})$$

(индексы у E – порядок единичной матрицы). Задача свелась к приведению к каноническому виду Фробениуса матрицы B_{n-k}.

Замечание 3. Как и все прямые методы, метод Данилевского чувствителен к ошибкам округления. Поэтому, по аналогии с методом Гаусса, можно выбирать главный элемент: на место ведущего элемента $a^{(n-k)}_{k\,k-1}$, на который производится деление, ставится максимальный по модулю элемент матрицы, стоящий левее и (или) выше его. Как и в первом нерегулярном случае, переставлять надо как столбцы, так и строки.

Замечание 4. Для окончательного контроля вычислений надо сравнить p_1 со следом исходной матрицы A: имеет место

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{Sp}\, A$$

(с одной стороны, по теореме Виета $p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, а с другой стороны, следы всех матриц $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ равны $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$).

Вычисление собственных векторов методом Данилевского

Сначала приведем некоторые утверждения, которые не касаются напрямую метода Данилевского.

Лемма 4. *Пусть y – собственный вектор матрицы Фробениуса вида (1), соответствующий собственному значению λ. Тогда, с точностью до постоянного множителя,*

$$y = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, \lambda^1, 1).$$

Действительно, запишем систему $\Phi y = \lambda y$ в матрично-векторной форме:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}.$$

В координатной форме записи система имеет вид

$$\begin{aligned} p_1y_1+p_2y_2+ \dots +p_ny_{n-1}+p_ny_n&=\lambda y_1, \\ y_1 \qquad\qquad\qquad &=\lambda y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-2} \quad &=\lambda y_{n-1}, \\ y_{n-1}&=\lambda y_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя, то можно положить $y_n=1$. Тогда $y_{n-1}=\lambda$, $y_{n-2}=\lambda^2$, … , $y_1=\lambda^{n-1}$. Первое уравнение системы (3) примет вид

$$p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+ \dots +p_{n-1}\lambda +p_n1=\lambda\cdot\lambda^{n-1}.$$

Это верное равенство, так как $\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}- \dots -p_n$ – собственный многочлен $P(\lambda)$ матрицы Φ (и матрицы A).

Замечание 5. Равенство

$$p_1y_1+p_2y_2+ \dots +p_ny_{n-1}+p_ny_n=\lambda y_1$$

можно использовать для контроля вычислений.

Лемма 5. *Если x – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, а y – собственный вектор матрицы $\Phi=S^{-1}AS$, соответствующий тому же собственному значению λ, то $x=Sy$.*

Действительно, так как y – собственный вектор матрицы Φ, то справедливо равенство $\Phi y=\lambda y$. Следовательно, справедливо и равенство $S^{-1}ASy=\lambda y$. Умножая это равенство слева на матрицу S, получим $ASy=\lambda Sy$, т.е. Sy – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ.

Теперь предположим, что собственные значения находились методом Данилевского. Тогда матрица S непосредственно выписывается в регулярном случае и в первом варианте нерегулярного случая.

В регулярном случае

$$S=M_{n-1}M_{n-2}...M_2M_1.$$

поэтому

$$x=Sy=M_{n-1}M_{n-2}...M_2M_1y. \tag{4}$$

Замечание 6. Произведение $x=M_{n-1}M_{n-2}...M_2M_1y$ следует находить, умножая вектор y последовательно на матрицы M_1, M_2,…, M_{n-1} слева. Так как матрицы M_i только i-й строкой отличаются от единичной, то при таком умножении будет изменяться лишь i-я компонента вектора.

В первом варианте нерегулярного случая в формуле (4) появятся матрицы перестановок. Например, если в самом начале выполнения алгоритма менялись местами столбцы с номерами $n-1$ и i, то

$$\Phi = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} P_{i\,n-1} A P_{i\,n-1} M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1 = S^{-1} A S,$$

$$S = P_{i\,n-1} M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1,$$

$$x = Sy = P_{i\,n-1} M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1 y.$$

При втором варианте нерегулярного случая метода Данилевского рассматриваемый прием использовать нельзя и для получения собственных векторов придется использовать другие методы или решать однородные системы $(A-\lambda_i E)x=0,\ i=1,2,\ldots,n$.

Список использованных источников

1. Репников В.И. Вычислительные методы алгебры. Курс лекций. Минск. Белгосуниверситет. Кафедра вычислительной математики. 2011.

Краткий вопрос для зачета: Прямые методы решения полной проблемы собственных значений (три метода, кратко об алгоритмах (получения собственных векторов можно не касаться)).

Ответ (часть ответа):

Метод Данилевского. Алгоритм основан на подобном преобразовании матрицы к канонической форме Фробениуса, которая фактически содержит коэффициенты характеристического многочлена. Для приведения матрицы порядка n к канонической форме Фробениуса метод требует $O(n^3)$ операций умножения и деления.

Вопрос к лабораторной работе «Метод Данилевского»: Метод Данилевского (регулярный случай), об алгоритме метода, вычислительная сложность.

Ответ: Метод Данилевского относится к прямым методам решения проблемы собственных значений. Метод основан на подобном преобразовании исходной матрицы к канонической форме Фробениуса, которая фактически содержит коэффициенты характеристического многочлена. Преобразования подобия переводят строки матрицы, начиная с последней и заканчивая второй, в соответствующие строки матрицы Фробениуса. В регулярном случае преобразования проводятся по аналогии с прямым ходом метода Гаусса. Для приведения матрицы порядка n к канонической форме Фробениуса метод требует $O(n^3)$ операций умножения и деления. Метод Данилевского является одним из самых экономичных прямых методов. При нахождении собственных значений можно записать матрицы, используемые для получения собственных векторов.