§10. Деревья.
Основные свойства деревьев

Теорема (из §7)

Пусть G — (n, m)*-граф,* $k(G) = k$*. Тогда:*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)\cdot(n-k+1)}{2}.$$

Из доказательства первого неравенства по индукции:

- $n - k(G') = n - k \leqslant m - 1$
  (если удаляемое ребро лежит на цикле)
- или $n - k(G') = n - k - 1 \leqslant m - 1$
  (если не лежит).
- Из $n - k \leqslant m - 1$ следует $n - k \leqslant m$.
- Из $n - k - 1 \leqslant m - 1$ также следует, что $n - k \leqslant m$.

Наблюдение:

- Из доказательства можно заметить, что равенство $n - k = m$ может быть достигнуто только на графах, в которых ни одно ребро не лежит на цикле.
- Для связных графов без циклов действительно выполнено $m = n - 1$, и это число рёбер является наименьшим возможным для связных графов.

Граф, в котором нет циклов, называется *ациклическим*.

Определение

Связный ациклический граф называется деревом.

Пример:

В качестве примера
приведём все непомеченные деревья порядка 6.

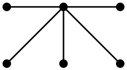
- Для удобства их перечисления (и построения)
стоит отсортировать их по диаметру.

$d = 5:$

$d = 4:$

$d = 3:$

$d = 2:$



Теорема 1 (об эквивалентных определениях дерева)

Для любого (n, m)-графа G эквиваленты следующие утверждения:

0) *G — дерево;*
1) *G — связный ациклический граф;*
2) *G — связный граф с $m = n - 1$;*
3) *G — ациклический граф с $m = n - 1$;*
4) *для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется единственная простая (u, v)-цепь;*
5) *G — ациклический граф, но для любой пары различных не смежных вершин $u, v \in V(G)$ граф $G + uv$ содержит единственный цикл.*

Схема доказательства

- $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)$
  $1) \Rightarrow 2)$ — индукцией по числу вершин,
  остальное — от противного(?)

Доказательство

1) $\Rightarrow$ 2).

1) G — связный ациклический граф;
2) G — связный граф с $m = n - 1$.

Если G — связный ациклический граф, то G — связный граф.
Покажем индукцией по числу вершин графа n,
что если G — связный ациклический граф,
то $m = n - 1$.

База: $n = 1$

- K_1 — связный ациклический граф, $m = 0 = n - 1$.

Пусть импликация верна для любого связного ациклического графа G порядка k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Рассмотрим произвольный
связный ациклический граф G порядка n.

Доказательство

Рассмотрим произвольный
связный ациклический (n, m)-граф G.

- Поскольку G связен, $m \geqslant n - 1$.
- Поскольку $n > 1$, то $m > 0$, т. е. $m \geqslant 1$.
- Выберем произвольное ребро e графа G и рассмотрим граф $G - e$.
- Поскольку G связный ациклический, т. е. ребро e не лежало на цикле, граф $G - e$ имеет ровно две компоненты связности. Обозначим их G_1 и G_2.
- Кроме того, поскольку сам граф G ацикличен, каждая из этих компонент тоже не содержит циклов.
- Таким образом, G_1 и G_2 — связные ациклические графы.

Доказательство

- Обозначим $n_1 = |G_1|$, $m_1 = |E(G_1)|$,
  $n_2 = |G_2|$, $m_2 = |E(G_2)|$.
- Поскольку $n_1 + n_2 = n$ и $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$,
  выполнено $n_1 \leqslant n - 1$ и $n_2 \leqslant n - 1$.
- Поскольку G_1 и G_2 — связные ациклические графы,
  и $n_1 \leqslant n - 1$ и $n_2 \leqslant n - 2$,
  к ним применимо предположение индукции,
  по которому $m_1 = n_1 - 1$ и $m_2 = n_2 - 1$.
- Тогда для графа G выполнено: $n = n_1 + n_2$,
  $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$.
- Что и требовалось доказать.

Доказательство

2) $\Rightarrow$ 3).

2) G — связный граф с $m = n - 1$;
3) G — ациклический граф с $m = n - 1$.

От противного.

Рассмотрим произвольный связный (n, m)-граф G, где $m = n - 1$.

- Предположим, что G содержит цикл.

  Пусть e — ребро этого цикла.
- Рассмотрим граф $G - e$.

  Обозначим $m' = |E(G - e)|$, $n' = |G - e|$.

Доказательство

[G — связный граф с $m = n - 1$]

- Поскольку G связен, а e — ребро цикла, то граф $G - e$ тоже связен, т. е. имеет одну компоненту связности,
- откуда $m' \geqslant n' - 1 = n - 1$.
- С другой стороны, $m' = m - 1 = n - 1 - 1 = n - 2$.
- Таким образом, $n - 2 \geqslant n - 1$.
- Противоречие.
- Следовательно, исходное предположение неверно, а значит G — ациклический граф с $m = n - 1$.
- Что и требовалось доказать.

Доказательство

3) $\Rightarrow$ 4).

3) G — ациклический граф с $m = n - 1$;
4) для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется единственная простая (u, v)-цепь.

Сперва покажем, что
для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$
в G имеется простая (u, v)-цепь,
т. е. G связен.

- Пусть G имеет k компонент связности, $k \geqslant 1$.
- Поскольку G — ациклический граф, каждая его компонента связности — связный ациклический граф.
- Пусть i-я компонента связности — это (n_i, m_i)-граф, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство

[Каждая компонента связности графа G является связным ациклическим графом.]

- По уже доказанному (1) $\Rightarrow$ 2)), для каждой компоненты связности выполнено $m_i = n_i - 1$.
- Тогда, поскольку $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ и $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, выполнено $m = n - k$.
- Но по условию $m = n - 1$, откуда получаем $k = 1$.
- Следовательно, G связен, т. е. для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется простая (u, v)-цепь.

Доказательство

[Для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется простая (u, v)-цепь.]

- Пусть для некоторой пары вершин u, v такая цепь не единственная.
- Тогда из объединения этих двух цепей можно выделить цикл.
- Противоречие с тем, что G — ациклический граф.
- Следовательно, для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется единственная простая (u, v)-цепь.
- Что и требовалось доказать.

Схема доказательства

4) $\Rightarrow$ 5).

4) для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется единственная простая (u, v)-цепь;
5) G — ациклический граф,
   но для любой пары
   различных не смежных вершин $u, v \in V(G)$
   граф $G + uv$ содержит единственный цикл.

- Очевидно, G связен.
- Несложно заметить, что G — ациклический (иначе была бы пара вершин, между которыми две различные простые цепи).

Схема доказательства

[G — связный ациклический, единственная (u, v)-цепь.]

- Кроме того, несложно убедиться, что $G + uv$ содержит цикл.
- Отметим, что любой цикл в $G + uv$ обязательно содержит ребро uv (иначе он был и в G).
- Если два различных цикла содержат одно ребро, то есть и третий, который не содержит этого ребра.
- Противоречие.

Схема доказательства

5) $\Rightarrow$ 1).

5) G — ациклический граф, но для любой пары различных не смежных вершин $u, v \in V(G)$ граф $G + uv$ содержит единственный цикл;

1) G — связный ациклический граф.

- Очевидно, G ациклический.
- Если он не связен, возьмём вершины u и v из разных компонент.
- Получим цикл в $G + uv$.
- Он проходит через ребро uv.
- Удалим это ребро. Поскольку оно лежит на цикле, u и v в одной компоненте связности графа G.
- Противоречие.

Теорема (об эквивалентных определениях дерева)

Для любого (n, m)-графа G эквивалентны следующие утверждения:

0) *G — дерево;*
1) *G — связный ациклический граф;*
2) *G — связный граф с $m = n - 1$;*
3) *G — ациклический граф с $m = n - 1$;*
4) *для любой пары несовпадающих вершин $u, v \in V(G)$ в G имеется единственная простая (u, v)-цепь;*
5) *G — ациклический граф, но для любой пары различных не смежных вершин $u, v \in V(G)$ граф $G + uv$ содержит единственный цикл.*

- Висячие вершины в дереве T часто называют листьями, а их количество обозначают $\ell(T)$.

Следствие (из теоремы 1)

В каждом дереве порядка $n \geqslant 2$ есть хотя бы два листа.

Доказательство

- Рассмотрим произвольное дерево T порядка n с числом рёбер m. По теореме 1 $m = n - 1$, откуда $2m = 2n - 2$.
- С другой стороны, $2m$ по лемме о рукопожатиях равно $\sum\limits_{v \in V(T)} \deg v$.
- Но

$$2m = \sum_{v \in V(T)} \deg v = \sum_{\substack{v \in V(T) \\ \deg v > 1}} \deg v + \sum_{\substack{v \in V(T) \\ \deg v = 1}} \deg v =$$

$$= \sum_{\substack{v \in V(T) \\ \deg v \geqslant 2}} \deg v + \ell(T) \geqslant 2 \cdot (n - \ell(T)) + \ell(T) = 2 \cdot n - \ell(T),$$

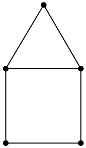
- т. е. $2m \geqslant 2n - \ell(T)$, откуда $2n - 2 \geqslant 2n - \ell(T)$.
- Из последнего и получаем требуемое $\ell(T) \geqslant 2$.

§11. Остовы.
Цикломатическое число графа

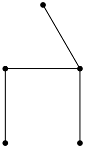
Определение

Остовом связного графа называется любой его остовный подграф, являющийся деревом.

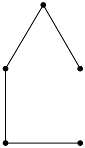
Пример:



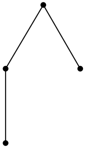
Граф G



Остов графа G



Остов графа G



Не остов графа G

Определение

Остовом несвязного графа называется любой его остовный подграф, у которого каждая компонента связности является деревом.

- Таким образом, на каждой компоненте связности исходного графа его остов образует дерево.

- Граф, каждая компонента связности которого является деревом, называют лесом.
- Нетрудно заметить, что леса — это все ациклические графы и только они.

- Пусть G — (n, m)-граф с k компонентами связности.

Вопрос:

Какое наименьшее число рёбер надо удалить из G, чтобы получить его остов?

- Это число называется цикломатическим числом графа G и обозначается $\nu(G)$.

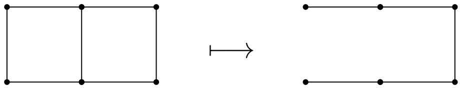
Решение:

- Пусть i-я компонента связности графа G является (n_i, m_i)-графом, $i = 1, 2, \ldots$.
- Тогда в остове этой компоненты, с одной стороны, $n_i - 1$ рёбер,
- а с другой — $m_i - x_i$ рёбер, где x_i — число удалённых из компоненты рёбер.
- Таким образом, $n_i - 1 = m_i - x_i$, откуда
- $x_i = m_i - n_i + 1$.
- Просуммировав по всем компонентам, получим $\nu(G) = \sum_{i=1}^{k} (m_i - n_i + 1) = m - n + k$.

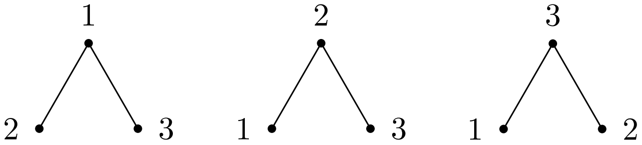
Утверждение 1

1) $\nu(G) = 0$ *тогда и только тогда, когда* G *— лес.*
2) $\nu(G) = 1$ *тогда и только тогда, когда* G *содержит только один цикл.*

- А с $\nu(G) = 2$ число циклов уже больше:



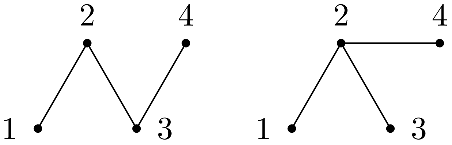
Предпараграфные примеры



Для помеченного графа порядка n множество вершин считается равным $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Вопрос

Какое наименьшее количество чисел достаточно знать, чтобы однозначно опознать помеченное дерево порядка 3?



Для помеченного графа порядка n множество вершин считается равным $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Вопрос

Какое наименьшее количество чисел достаточно знать, чтобы однозначно опознать помеченное дерево порядка 4?

§12. Код Прюфера. Теорема Кэли

Версия Юрия Леонидовича

Пусть T — помеченное дерево порядка $n \geqslant 3$.
$(V(T) = \{1, 2, \ldots, n\}.)$

Кодом Прюфера дерева T называется упорядоченная последовательность $P(T) = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$, где $b_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, которая строится по следующему алгоритму:

Алгоритм построения (версия Юрия Леонидовича)

1) $P(T) := \varnothing$
2) $T_1 := T$
- for $i = 1, n-2$ do

3a) найти в T_i лист a_i с наименьшей меткой
3b) и смежную с ним вершину b_i
3c) $P(T) \hookleftarrow b_i$
3d) $T_{i+1} = T_i - a_i$

- end for

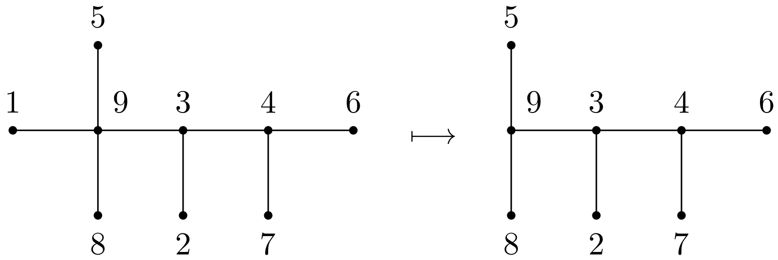
4) return $P(T)$.

Код Прюфера — $P(T) = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$.

Алгоритм построения (альтернативное нехорошее описание)

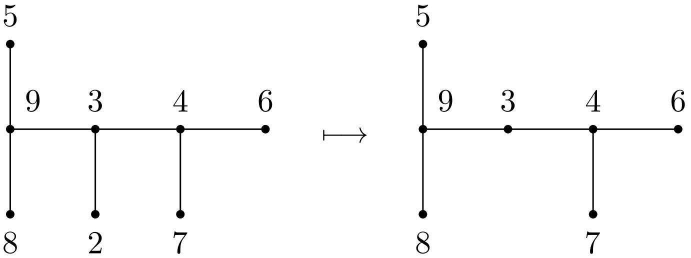
1) если $|T| = 3$,
то $P(T) = (b_1)$, где b_1 — метка вершины степени 2;
2) иначе $P(T) = (b_1, P(T'))$,
где b_1 — сосед листа a_1 с наименьшей меткой,
$T' = T - a_1$.

Пример:



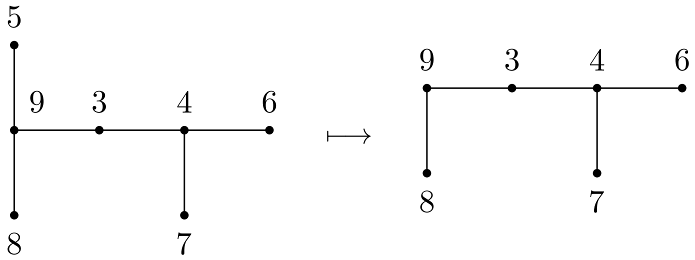
$$P(T) = (9, \dots)$$

Пример:



$P(T) = (9, \ldots)$ $\qquad$ $P(T) = (9, 3, \ldots)$

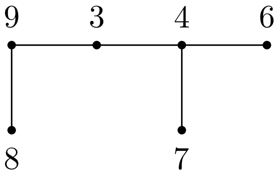
Пример:



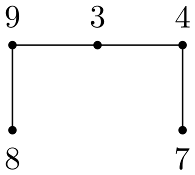
$$P(T) = (9, 3, \dots)$$

$$P(T) = (9, 3, 9, \dots)$$

Пример:



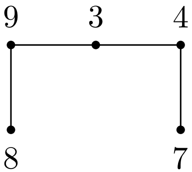
$$\longmapsto$$



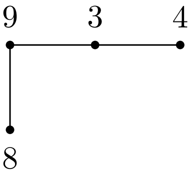
$P(T) = (9, 3, 9, \dots)$

$P(T) = (9, 3, 9, 4, \dots)$

Пример:



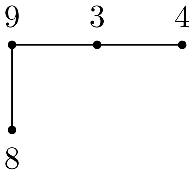
$\longmapsto$



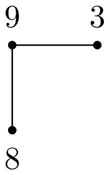
$$P(T) = (9, 3, 9, 4, \dots)$$

$$P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, \dots)$$

Пример:



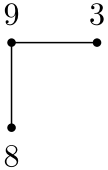
$\longmapsto$



$P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, \dots)$

$P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, \dots)$

Пример:



$\longmapsto$

$P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, \dots)$ $\qquad$ $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

Алгоритм восстановления

Вход: число $n \geqslant 3$,
множество $S = \{1, 2, \ldots, n\}$,
последовательность $\pi = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$,
где $b_i \in S$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Выход: множество $E(G)$ рёбер графа G.

Алгоритм восстановления: (инициализация)

1) $E(G) := \varnothing$
2) $S_1 := S$
3) $\pi_1 := \pi = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$

Алгоритм восстановления

Алгоритм восстановления: (продолжение)

- for $i = 1, n-2$ do

4a) найти в S_i наименьший элемент k_i, который отсутствует в π_i,

4b) и положить $e_i = k_i b_i$

4c) $E(G) := E(G) \cup \{e_i\}$

4d) $S_{i+1} = S_i \setminus \{k_i\}$

4e) if $i \leqslant n-3$
then $\pi_{i+1} = (b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_{n-2})$

- end for

5) $e_{n-1} = xy$, где $x \neq y$, $x, y \in S_{n-1}$

6) $E(G) := E(G) \cup \{e_{n-1}\}$

7) return $E(G)$.

Попытка описать по-другому:

Вход: число $n \geqslant 3$,
множество $S = \{1, 2, \ldots, n\}$,
последовательность $\pi = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$,
где $b_i \in S$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Альтернативное нехорошее описание:

- Если длина последовательности π равна 1,
- то восстановить дерево на трёх вершинах с множеством меток S,

Альтернативное нехорошее описание (продолжение):

Иначе (длина последовательности π больше 1):

- найти в S наименьший элемент k, которого нет в π,
- вычеркнуть из последовательности π первый элемент b_1 — получается последовательность π'
- выкинуть из множества меток S число k — получается множество меток S'
- восстановить граф по последовательности π' с метками S'
- добавить вершину b_1 и ребро kb_1.

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

9 3 9 4 4 3 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		•	•					•
		•	•					•
								•

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

9	3	9	4	4	3	9
1						

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9
		•	•					•
		•	•					•

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

9	3	9	4	4	3	9
1	2					

$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	3	4	5	6	7	8	9
		•	•					•
			•					•

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

9	3	9	4	4	3	9
1	2	5				

$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	3	4	$\cancel{5}$	6	7	8	9
		●	●					●
			●					

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & 3 & 9 & 4 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cancel{1} & \cancel{2} & 3 & 4 & \cancel{5} & \cancel{6} & 7 & 8 & 9 \\ & & \bullet & \bullet & & & & & \bullet \end{array}$$

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & 3 & 9 & 4 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cancel{1} & \cancel{2} & 3 & 4 & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & 8 & 9 \\ & & \bullet & & & & & & \bullet \end{array}$$

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

9	3	9	4	4	3	9
1	2	5	6	7	4	

~~1~~	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8	9
								●

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & 3 & 9 & 4 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\cancel{1} \quad \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad \cancel{4} \quad \cancel{5} \quad \cancel{6} \quad \cancel{7} \quad 8 \quad 9$$

Пример:

- $P(T) = (9, 3, 9, 4, 4, 3, 9)$

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & 3 & 9 & 4 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 \end{array} \qquad \cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ \cancel{7}\ 8\ 9$$

- $E(T) =$
  $= \{\{1, 9\}, \{2, 3\}, \{5, 9\}, \{6, 4\}, \{7, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 9\}, \{8, 9\}\}$

Теорема Кэли (*)

Для любого $n \geqslant 1$ *существует ровно* n^{n-2} *различных помеченных деревьев (с множеством вершин* $\{1, 2, \ldots, n\}$*).*

* Дж. Дж. Сильвестр, 1857;
* К. Борхард, 1860;
* А. Кэли, 1889.

Схема доказательства

При $n \leqslant 2$ проверяется вручную.

Для $n \geqslant 3$ устанавливается биекция:

- доказывается однозначность кодирования;
- доказывается однозначность декодирования
  и тот факт, что восстанавливается именно дерево;
- (это всё можно по индукции по числу n.
  Удаляемое / восстанавливаемое ребро
  определяется однозначно,
  по предположению индукции
  всё остальное уже тоже однозначно).
- получается две инъекции;
- лемма.

Лемма

Пусть X и Y — непустые конечные множества,
$f_1 : X \to Y$ и $f_2 : Y \to X$ — инъективные отображения.
Тогда f_1, f_2 — биекции.