4.3. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛИНДЕБЕРГА – ФЕЛЛЕРА

4.3.1. Основные определения и формулы

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ определена последовательность независимых в совокупности случайных величин $\{\xi_k\}$, имеющих функции распределения $\{F_k(x)\}$, конечные математические ожидания $\{a_k\}$ и конечные дисперсии $\{\sigma_k^2\}$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $A_n = \mathrm{E}\{S_n\} = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n^2 = \mathrm{D}\{S_n\} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 1. *Функцией Линдеберга* для суммы S_n вышеопределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называется функция двух переменных

$$L = L(n, \tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y - a_k| > \tau B_n} (y - a_k)^2 \, dF_k(y),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\tau \geq 0$.

Определение 2. Говорят, что случайная последовательность $\{\xi_k\}$ удовлетворяет *условию Линдеберга*, если для любого $\tau > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} L(n, \tau) = 0. \tag{4.5}$$

Центральная предельная теорема Линдеберга. Пусть на вероятностном пространстве определена последовательность независимых в совокупности случайных величин $\{\xi_k\}$, имеющих конечные математические ожидания $\{a_k\}$ и дисперсии $\{\sigma_k^2\}$. Тогда если выполняется условие Линдеберга (4.5), то при $n \to \infty$ выполняется *условие равномерной малости дисперсий*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \to 0, \tag{4.6}$$

и последовательность функций распределения нормированных сумм

$$S_n^0 = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

случайных величин сходится для любого $x \in \mathbb{R}$ к функции распределения стандартного нормального закона

$$F_{S_n^0}(x) = \mathrm{P}\{S_n^0 < x\} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz. \tag{4.7}$$

Центральная предельная теорема Феллера. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ определена последовательность независимых в совокупности случайных величин $\{\xi_k\}$, имеющих конечные математические ожидания $\{a_k\}$ и дисперсии $\{\sigma_k^2\}$. Тогда при $n \to \infty$, если выполнено условие равномерной малости дисперсий (4.6) и имеет место сходимость последовательности функций распределения нормированных сумм S_n^0 к стандартному нормальному закону (4.7), то выполняется условие Линдеберга (4.5).

Теорема Ляпунова. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ определена последовательность независимых в совокупности случайных величин $\{\xi_k\}$, имеющих конечные математические ожидания $\{a_k\}$ и дисперсии $\{\sigma_k^2\}$; для некоторого $\delta > 0$ существуют конечные абсолютные моменты порядка $(2+\delta)$ $c_k^{2+\delta} = \mathrm{E}\{|\xi_k - \alpha_k|^{2+\delta}\}$ и определены суммы моментов $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $C_n^{2+\delta} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{2+\delta}$. Тогда если при $n \to \infty$ выполнено *условие Ляпунова*

$$\frac{C_n}{B_n} \to 0,$$

то последовательность сумм $\{S_n\}$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием A_n и дисперсией B_n^2:

$$F_{S_n^0}(x) = \mathrm{P}\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right\} \to \Phi(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

4.3.2. Примеры решенных задач

Пример 1. Доказать, что для последовательности $\{\xi_k\}$ независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией выполняется условие Линдеберга ($F(x) = F_k(x)$ – функция распределения случайных величин).

Решение. Положим $a = \mathrm{E}\{\xi_k\}$, $\sigma^2 = \mathrm{D}\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = n\sigma^2$$

и

$$L = L(n, \tau) = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y - a_k| > \tau\sigma\sqrt{n}} (y-a)^2 dF(y) = \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_{|y - a_k| > \tau\sigma\sqrt{n}} (y-a)^2 dF(y) \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого $\tau > 0$.

Пример 2. Пусть для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, имеющих нулевое математическое ожидание, дисперсию σ_k^2 $(0 < \sigma_k^2 < \infty)$ и $\mathrm{E}\{|\xi_k|^3\} < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, выполняется условие Ляпунова при $\delta = 1$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\{|\xi_k|^3\} = 0.$$

Показать, что для $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется центральная предельная теорема.

Решение. Согласно неравенству Ляпунова, для математического ожидания

$$(\mathrm{E}\{|\xi_k|^s\})^{\frac{1}{s}} \le (\mathrm{E}\{|\xi_k|^q\})^{\frac{1}{q}},$$

$0 < s < q$, можно записать, что

$$\sigma_k^3 = (\mathrm{E}\{\xi_k^2\})^{\frac{3}{2}} \le \mathrm{E}\{|\xi_k|^3\}.$$

Значит, при $n \to \infty$ выполняется

$$\frac{1}{B_n^3} \max_{k \le n} \sigma_k^3 \le \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^3 \to 0.$$

Так как $\sigma_k < B_n$, $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \max_{k \le n} \sigma_k^2 = 0,$$

и, следовательно, выполняется условие Линдеберга, т. е. справедлива центральная предельная теорема.

4.3.3. Тестовые задания

1. Условие Линдеберга выполняется для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, если:

а) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы;

б) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ одинаково распределены;

в) $\mathrm{D}\{\xi_k\} \le c < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$;

г) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены, $\mathrm{E}\{\xi_k\} = a$ и имеют конечную отличную от нуля дисперсию $\mathrm{D}\{\xi_k\} = \sigma^2 < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$.

Укажите верное утверждение.

2. Пусть для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\{|\xi_k - \mathrm{E}\{\xi_k\}|^{2+\delta}\} = 0.$$

Тогда для $\{\xi_k\}$:

а) выполняется условие Линдеберга;

б) справедлива центральная предельная теорема;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln f_n(t) = -\frac{t^2}{2}$, где $f_n(t)$ – характеристическая функция суммы $\frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathrm{E}\{\xi_k\})$;

г) условие Линдеберга не выполняется.

Укажите неправильное утверждение.

3. Вероятность выхода из строя изделия за время испытания на надежность равна 0,05. Вероятность того, что за время испытаний 100 изделий выйдут из строя от 5 до 20 изделий, равна:

а) 0; б) 1; в) $\approx$ 0,33; г) $\approx$ 0,489.

Укажите правильный ответ.

4. Частными случаями центральной предельной теоремы является:

а) теорема Муавра – Лапласа;

б) законы больших чисел;

в) критерии сходимости случайных последовательностей.

Укажите правильный ответ.

4.3.4. Упражнения

1. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Доказать, что величины

$$\eta_n = \sqrt{n}\,\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

асимптотически нормально распределены при $n \to \infty$.

2. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Доказать, что величины

$$\eta_n = \sqrt{n}\,\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}}$$

асимптотически нормально распределены при $n \to \infty$.

3.* Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

называется *распределением* χ^2 *с n степенями свободы*. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\chi_n^2 - \mathrm{E}\{\chi_n^2\}}{\sqrt{\mathrm{D}\{\chi_n^2\}}} \le x\right\},\ x \in \mathbb{R}.$$

4.* Пусть случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)}}$$

называется *распределением Стьюдента с n степенями свободы*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\tau_n \le x\},\ x \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $\xi_{n,i}$ – число появления исхода A_i в n независимых испытаниях с $A_1, A_2, \ldots, A_N$ несовместными исходами, причем $\mathrm{P}\{A_i\} = p_i\ (i = 1, 2, \ldots, N)$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$; $a_1, a_2, \ldots, a_N$ – действительные числа. Найти предельное распределение случайной величины $\dfrac{\eta_n - \mathrm{E}\{\eta_n\}}{\sqrt{\mathrm{D}\{\eta_n\}}}$, где $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \xi_{n,i}$.

6. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона соответственно с параметрами $\{k\}$. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{P}\left\{\dfrac{\xi_k - k}{\sqrt{k}} \le x\right\} = \Phi(x)$.

7.* Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют характеристическую функцию $f(t)$, которая для некоторого $c > 0$ и $0 < \alpha \le 2$ может быть представлена в виде $f(t) = 1 - c|t|^{\alpha}(1 + o(1))$, $t \to 0$. Доказать, что при $n \to \infty$ существует предельное распределение случайных величин

$$\eta_n = \frac{1}{n^{1/\alpha}}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n).$$

Найти его характеристическую функцию.

8.* Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathrm{E}\{\xi_1\} = \mu$, $\mathrm{D}\{\xi_1\} = \sigma^2 < \infty$. Положим

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sigma},$$

$\sigma > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Показать, что не существует такой случайной величины η, имеющей стандартное нормальное распределение, чтобы случайная последовательность $\{\eta_n\}$ при $n \to \infty$ сходилась бы в среднем квадратичном к η.

9.* Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_k$, где $\nu_n, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые случайные величины, причем $|\xi_k| < c$, $\mathrm{E}\{\xi_k\} = a$, $\mathrm{D}\{\xi_k\} = \sigma^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а ν_n – целочисленная неотрицательная случайная величина с $\mathrm{E}\{\nu_n\} = n$, $\mathrm{D}\{\nu_n\} \le n^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. Доказать, что стандартное нормальное распределение является предельным распределением случайных величин $\dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

10. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathrm{E}\{\xi_1^2\} < \infty$. Показать, что при $k \to \infty$

$$\frac{\max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_k|\}}{\sqrt{k}} \xrightarrow{D} 0.$$

11. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathrm{E}\{\xi_1\} = 0$ и $\mathrm{E}\{\xi_1^2\} = 1$; $d_1, d_2, \ldots$ – неотрицательные константы такие, что $d_n = o(\mathrm{D}_n)$, где $\mathrm{D}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} d_k^2$; $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\eta_k\}$, где $\eta_k = d_k \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяет центральной предельной теореме.

12. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathrm{E}\{\xi_1\} = 0$ и $\mathrm{E}\{\xi_1^2\} = 1$. Положим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ и $\eta_n = \max_{1 \le m \le n} S_m$, $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что для $x > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\eta_n \le x\right\} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

13. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathrm{P}\{\omega : \xi_1(\omega) > x\} = \mathrm{P}\{\omega : \xi_1(\omega) < -x\}$, $x \in \mathbb{R}$, и $\mathrm{P}\{\omega : |\xi_1(\omega)| > x\} = x^{-2}$, $x \ge 1$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \le x\right\} \to \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с абсолютно интегрируемой характеристической функцией, $\mathrm{E}\{\xi_1\}=0$, $\mathrm{E}\{\xi_1^2\}=1$. Обозначим: $p_n(x)$ – плотность распределения случайной величины $\eta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. Доказать, что равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

15.* Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое равномерное распределение на отрезке $[-a, a]$, $F_n(x)$ – функция распределения нормированной суммы $S_n=\frac{1}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\{\xi_1\}}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $n=1, 2, \ldots$. Доказать, что

$$\sup_x\left|F_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right|\le\frac{1}{4\pi n}\left(1+\frac{4}{n-1}\right).$$

16.* Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathrm{P}\{\omega: 0\le\xi_k(\omega)<1\}=1$, $k=1, 2, \ldots$. Положим $\eta_n=S_n-[S_n]$, где $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, а $[x]$ – целая часть числа x. Доказать, что если при $t\ne 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\{\exp(2\pi i t\eta_n)\}=0,$$

то при любых α и β таких, что $0\le\alpha<\beta<1$, выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\omega:\alpha\le\eta_n(\omega)<\beta\}=\beta-\alpha.$$

4.3.5. Задачи

1. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых случайных величин, причем $\mathcal{L}\{\xi_k\}=N(0,\sigma_k^2)$, где $\sigma_1^2=1$, $\sigma_k^2=2^{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Показать, что условие Линдеберга не выполнено, но тем не менее центральная предельная теорема имеет место.

2.* Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathrm{E}\{\xi_1\}=0$ и $\mathrm{E}\{\xi_1^2\}=1$.

Положим $\eta_n = \max\left\{\frac{|\xi_1|}{\sqrt{n}}, \frac{|\xi_2|}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{|\xi_n|}{\sqrt{n}}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Показать, что при $n \to \infty$ $\eta_n \xrightarrow{D} 0$.

3. Суммируются 10^4 чисел, округленных с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $]-0{,}5 \cdot 10^{-m}, 0{,}5 \cdot 10^{-m}[$, найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка.

4. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathrm{E}\{\xi_k\} = a$, $\mathrm{D}\{\xi_k\} = b^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Положим $\eta_k = \xi_k + \xi_{k+1} + \xi_{k+2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Найти $\mathrm{E}\{\eta_k\}$, $\mathrm{Cov}\{\eta_k, \eta_l\}$ $(k \neq l)$, $\mathrm{D}\{\eta_k\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\omega : \frac{\eta_1(\omega) + \eta_2(\omega) + \ldots + \eta_n(\omega) - 3na}{b\sqrt{3n}} \leq x\right\}.$$

5. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = 1\} = \frac{1}{k}$, $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = 0\} = \frac{k-1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Найти предельное распределение при $n \to \infty$ случайных величин $\eta_n = \frac{S_n - \mathrm{E}\{S_n\}}{\sqrt{\mathrm{D}\{S_n\}}}$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Установить, будет ли выполняться центральная предельная теорема для случайных последовательностей, определенных в задачах 6–8.

6. $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$.

7. $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = \pm 2^k\} = 2^{(2k+1)}$, $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = 0\} = 1 - 2^{-2k}$.

8. $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = \pm k\} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

9.* В киоске продаются лотерейные билеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо киоска людей покупает билет с вероятностью $\frac{1}{3}$. Пусть ξ – число людей, прошедших мимо киоска за время, пока были проданы первые 100 билетов. Найти распределение ξ.

10. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\omega : a \leq \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \leq b\right\}, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}.$$

11. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathrm{E}\{\xi_1\} = \mu < \infty$, $\mathrm{D}\{\xi_1\} = \sigma^2$, $(0 < \sigma^2 < \infty)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) < x \right\}$ и указать условия, при которых этот предел равен 0, либо 1, либо $\frac{1}{2}$.

12. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{n^\alpha} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \right| \le x \right\}$, где $x > 0$, $\alpha \ne \frac{1}{2}$.

13. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин такая, что $\mathrm{E}\{\xi_1\} = 0$, $\mathrm{D}\{\xi_1\} = \sigma^2 < \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) > 1 \right\} = \frac{1}{3}$. Найти σ^2.

14. Пусть случайные величины ξ_k равномерно распределены на отрезках $[a_k - 1, a_k + 1]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ соответственно, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A < \infty$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) < 1 \right\}$.

15. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \right| < a \right\} = b$, $0 < b < 1$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \right| < 2a \right\}$.

16. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых случайных величин таких, что

$$\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = \pm k^\alpha\} = \frac{1}{2k^\beta},\ \mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = 0\} = -\frac{1}{k^\beta},$$

где $2\alpha > \beta - 1$; $k = 1, 2, \ldots$. При каком условии выполнено условие Линдеберга?

4.4. СХЕМА СЕРИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ

4.4.1. Основные определения и формулы

Принято говорить, что множество случайных величин $\Xi = \{\xi_{kn} : k = 1, ..., n;\ n = 1, 2, ...\}$ *задано в схеме серий*, если это множество построено следующим образом:

$$\begin{aligned}&\text{первая серия: } \xi_{11};\\ &\text{вторая серия: } \xi_{12}, \xi_{22};\\ &\quad\vdots\\ &n\text{-я серия: } \xi_{1n}, \xi_{2n}, ..., \xi_{nn},\end{aligned}$$

причем внутри каждой серии случайные величины независимы в совокупности и одинаково распределены.

Теорема Пуассона. Пусть $\Xi = \{\xi_{kn}\}$ – схема серий случайных величин Бернулли, определенная следующим образом: $\xi_{kn} \in \{0,1\}$,

$$P\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 1\} = p_n,\ P\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 0\} = 1 - p_n, \tag{4.8}$$

где вероятность успеха

$$p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$k = 1, 2, ..., n;\ n = 1, 2, ...;\ 0 < \lambda < \infty$. Тогда при $n \to \infty$ распределение вероятностей сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ сходится к распределению Пуассона $\Pi(\lambda)$ с параметром λ:

$$F_{S_n}(x) = P\{S_n < x\} \to F_{\Pi}(x; \lambda) = \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ x \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Говорят, что случайная величина ξ имеет *безгранично делимый закон распределения вероятностей*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется разложение такое, что «по распределению» справедливо разложение

$$\xi \overset{D}{=} \xi_{1n} + ... + \xi_{nn}, \tag{4.10}$$

причем все слагаемые независимы в совокупности и имеют общий закон распределения того же типа, что и ξ, отличающийся лишь значением параметра.

Центральная предельная теорема для случайных векторов. Пусть $X_1, X_2, ... \in \mathbb{R}^N$ – определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, независимые в совокупности N-векторы, одинаково распределенные и имеющие математическое ожидание $\mathrm{E}\{X_k\} = \mu \in \mathbb{R}^N$ и невырожденную ковариационную $(N \times N)$-матрицу Σ. Тогда случайный N-вектор

$$\frac{1}{n}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)$$

при $n \to \infty$ распределен асимптотически нормально по N-мерному стандартному нормальному закону $N_N(0, I_N)$.

4.4.2. Примеры решенных задач

Пример 1. Показать, что γ-распределение с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

является безгранично делимым распределением.

Решение. Пусть случайная величина ξ имеет γ-распределение с плотностью, определенной в (4.11). Тогда ее характеристическая функция равна

$$f_{\xi}(t) = \frac{1}{(1 - i\beta t)^{\alpha}}.$$

Покажем, что для любого $n \geq 1$ можно найти такие характеристические функции $f_n(t)$, что

$$f_{\xi}(t) = [f_n(t)]^n.$$

Действительно, пусть $f_n(t) = \dfrac{1}{(1 - i\beta t)^{\alpha/n}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Нетрудно доказать, что для любого n функция $f_n(t)$ является характеристической функцией некоторых случайных величин ξ_{kn}, где $k = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что $f_{\xi}(t) = [f_n(t)]^n$. Следовательно, для ξ можно записать разложение (4.10). А это значит, что γ-распределение безгранично делимо.

Пример 2. В урне находятся шары белого и черного цветов. Известно, что доля белых шаров равна либо 0,5, либо 0,4. Из урны извлечено с возвращением 100 шаров, среди которых белых шаров оказалось больше, чем черных. На основании этого был сделан вывод, что доля белых шаров в урне равна 0,5. Найти вероятность того, что этот вывод ошибочен.

Решение. Если в действительности доля белых шаров равна 0,4, то вероятность извлечения белого шара из урны в каждом из 100 извлечений по принятой схеме равна 0,4. Пусть S – число белых шаров в выборке из извлеченных 100 шаров. Так как решение о том, что доля белых шаров в урне равна 0,5, было принято на основании того, что в выборке оказалось белых шаров больше, чем черных, то вероятность ошибки равна вероятности того, что S превосходит 50, т. е.

$$\mathrm{P}\{\text{вывод ошибочен}\} = \mathrm{P}\{S \geq 50\}.$$

Согласно условию задачи и предположению, $n = 100$, $p = 0{,}4$. Значит,

$$\mathrm{P}\{\text{вывод ошибочен}\} = \mathrm{P}\left\{ \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{51 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{ \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 2{,}25 \right\} \approx 0{,}012.$$

4.4.3. Тестовые задания

1. Множество случайных величин $\Xi = \{\xi_{kn} : k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ задано в схеме серий, если: а) случайные величины одинаково распределены; б) случайные величины $\{\xi_{kn} : k = 1, \ldots, n\}$ одинаково распределены; в) случайные величины независимы в совокупности; г) внутри каждой серии случайные величины независимы в совокупности и одинаково распределены. Укажите правильный ответ.

2. Пусть $\{\xi_{kn} : k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – случайные величины Бернулли: $\xi_{kn} \in \{0,1\}$, $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 1\} = 1 - \mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 0\} = p = \mathrm{const}$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$. Тогда:

а) $\mathrm{P}\left\{ \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$;

б) $\mathrm{P}\{S_n < x\} \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{x-1} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ x \in \mathbb{N}$;

в) распределение вероятностей сумм S_n при $n \to \infty$ сходится к распределению Бернулли;

г) распределение вероятностей сумм S_n при $n \to \infty$ сходится к закону Пуассона.

Укажите правильный ответ.

3. Пусть $\{\xi_{kn} : k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – случайные величины Бернулли: $\xi_{kn} \in \{0,1\}$, $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 1\} = 1 - \mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 0\} = p_n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем $p_n = \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, где $0 < \lambda < \infty$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{nk}$. Тогда:

а) $\mathrm{P}\{S_n < x\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$;

б) $\mathrm{P}\{S_n < x\} \underset{n\to\infty}{\to} \sum\limits_{k=0}^{x-1} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ x \in \mathbb{N}$;

в) распределение вероятностей сумм S_n при $n \to \infty$ сходится к закону Гаусса;

г) распределение вероятностей сумм S_n при $n \to \infty$ сходится к распределению Бернулли.

Укажите правильный ответ.

4. Пусть множество случайных величин $\{\xi_{kn} : k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ задано в схеме серий. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{nk}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда: а) существует предельное распределение $\mathcal{L}\{S_n\}$, $n \to \infty$; б) предельным распределением $\mathcal{L}\{S_n\}$, $n \to \infty$, является закон Гаусса; в) предельным распределением $\mathcal{L}\{S_n\}$, $n \to \infty$, является закон Пуассона; г) если предельное распределение $\mathcal{L}\{S_n\}$, $n \to \infty$, существует, то оно относится к классу безгранично делимых законов распределения вероятностей. Укажите правильный ответ.

5. Пусть случайная величина ξ имеет безгранично делимый закон распределения. Тогда:

а) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется разложение случайной величины ξ в виде $\xi \overset{D}{=} \xi_{1n} + \ldots + \xi_{nn}$, где все слагаемые одинаково распределены;

б) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется разложение случайной величины ξ в виде $\xi \overset{D}{=} \xi_{1n} + \ldots + \xi_{nn}$, где все слагаемые независимы и имеют произвольные распределения;

в) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется разложение случайной величины ξ в виде $\xi \overset{D}{=} \xi_{1n} + \ldots + \xi_{nn}$, где все слагаемые независимы и имеют одинаковый закон распределения;

г) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется разложение случайной величины ξ в виде $\xi \overset{D}{=} \xi_{1n} + \ldots + \xi_{nn}$, где все слагаемые независимы и имеют одинаковый закон распределения того же типа, что и ξ, отличающийся лишь значением параметра.

Указать корректное утверждение.

4.4.4. Упражнения

1. Пусть случайные величины $\{\xi_{kn} : k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ таковы, что $\mathrm{E}\{\xi_{kn}\} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{E}\{|\xi_{kn}|^2\} = 0,$ где $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{D}\{\xi_{kn}\} < \infty,$ $n = 1, 2, \ldots .$ Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_{kn}$. Доказать, что распределения случайных величин $\frac{S_n}{B_n^2}$ при $n\to\infty$ сходятся к стандартному нормальному распределению.

2. Пусть для каждого $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины $\{\xi_{kn} : k = 1, 2, \ldots, n\}$ независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$ $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = \sqrt[3]{n}\} = \mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = -\sqrt[3]{n}\} = \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}$ при любом $k = 1, 2, \ldots, n.$ Доказать, что распределения случайных величин $\eta_n = \frac{\xi_{1n} + \xi_{2n} + \ldots + \xi_{nn}}{\sqrt{n\mathrm{D}\{\xi_{1n}\}}}$ при $n\to\infty$ сходятся к стандартному нормальному распределению.

3. Случайные величины $\{\xi_{kn} : k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ независимы и $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 1\} = 1 - \mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 0\} = p_{kn},\ k = 1, 2, \ldots, n.$ Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\le k\le n} p_{kn} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{kn} = \lambda,\ 0 < \lambda < \infty.$ Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}\left\{\omega : \sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}(\omega) = m\right\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

$m = 0, 1, \ldots .$

4. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, неотрицательны и одинаково распределены: $\mathrm{P}\{\omega : \xi_1(\omega) \ge 0\} = 1,\ \mathrm{E}\{\xi_1\} = \mu > 0,\ \mathrm{D}\{\xi_1\} = \sigma^2,$ $0 < \sigma^2 < \infty.$ Пусть

$$N_t = \begin{cases} \max\{n \ge 0 : \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \le t\}, & \text{если } \xi_1 \le t, \\ 0, & \text{если } \xi_1 \le t, \end{cases}$$

$t \ge 0.$

Показать, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\left\{N_t < \frac{t}{\mu} + \frac{x\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\mu}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

5.* Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α: $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) \le x\} = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le \ldots \le \xi_{(n)}$ – значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания. Показать, что если $n, m \to \infty$ и $n - m \to \infty$, то

$$\mathrm{E}\{\xi_{(m)}\} = \frac{1 + o(1)}{\alpha} \ln \frac{n}{n-m},$$

$$\mathrm{D}\{\xi_{(m)}\} = \frac{1 + o(1)}{\alpha} \ln \frac{n}{n(n-m)},$$

$$\mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{\xi_{(m)}(\omega) - \mathrm{E}\{\xi_{(m)}\}}{\sqrt{\mathrm{D}\{\xi_{(m)}\}}} \le x \right\} \to \Phi(x),$$

$x \in \mathbb{R}$.

6.* Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) \le x\} = F(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le \ldots \le \xi_{(n)}$ – значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания. Доказать, что если в некоторой окрестности точки $x = x_0$ существует непрерывная производная $F'(x) = p(x) > 0$, то при $\frac{m}{n} \to F(x_0)$, $n \to \infty$,

$$\mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{\xi_{(m)}(\omega) - x_0}{\sqrt{F(x_0)(1 - F(x_0))}} p(x_0) \le x \right\} \to \Phi(x).$$

7. Вероятность $\mathrm{P}\{C\} = \mathrm{P}\{A + B\}$, где $\mathrm{P}\{B \mid \overline{A}\}$ известна, определяется двумя способами: а) приближенное значение $\mathrm{P}\{C\}$ определяется как частота появления события C в ряду из n независимых опытов; б) определяется частота $\frac{m}{n}$ появления события A в ряду из n независимых опытов, а приближенное значение $\mathrm{P}\{C\}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{P}\{C\} \approx \mathrm{P}_n\{C\} = \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m}{n}\right) \mathrm{P}\{B \mid \overline{A}\}.$$

Доказать, что оба способа ведут к правильному результату.

8. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одно и то же распределение с характеристической функцией $f(t)$:

$$f(t) = 1 - C|t|^{\alpha}(1 + o(1)),$$

где $C > 0$, $0 < \alpha < 2$, $t \to \infty$. Доказать, что при $n \to \infty$ существует предельное распределение случайных величин $\eta_n = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Найти характеристическую функцию этого распределения.

9. Случайная величина подчиняется закону распределения $\chi^2(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что случайная величина $\eta_n = \dfrac{\xi_n - n}{\sqrt{2n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, асимптотически распределена по закону $N(0, 1)$.

10.* Случайная величина ξ имеет распределение Стьюдента с $n \in \mathbb{N}$ степенями свободы. Доказать, что при $n \to \infty$ плотность распределения вероятностей случайной величины ξ сходится при любом значении аргумента x к плотности распределения стандартного нормального закона при том же значении x.

11. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, имеют одно и то же невырожденное распределение и $\mathrm{D}\{\xi_k\} < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Доказать, что для любых a и b ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : a \le \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \le b \right\} = 0.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) < x \right\}$.

4.4.5. Задачи

1.* Пусть для каждого $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины $\{\xi_{kn} : k = 1, 2, \ldots, n\}$ независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = \sqrt{n}\} = \mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = -\sqrt{n}\} = \dfrac{1}{2n}$, $\mathrm{P}\{\omega : \xi_{kn}(\omega) = 0\} = \dfrac{n-1}{n}$ при любом $k = 1, 2, \ldots, n$. Найти предельное распределение случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_{1n} + \xi_{2n} + \ldots + \xi_{nn}}{\sqrt{n\mathrm{D}\{\xi_{1n}\}}}$$

при $n \to \infty$.

2. Случайная величина ξ_n равна сумме очков, выпавших при n независимых подбрасываниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$\mathrm{P}\left\{ \omega : \left| \frac{\xi_n(\omega)}{n} - 3{,}5 \right| \ge 0{,}1 \right\} \le 0{,}1.$$

3.* Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!} e^{-n}$.

4. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одинаковые плотности распределения вероятностей вида

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \text{ при } |x| \le a, \\ 0 \text{ при } |x| > a. \end{cases}$$

Найти предел при $n \to \infty$ характеристической функции $f_{\eta_n}(t)$ случайной величины

$$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathrm{E}\{\xi_k\})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\{\xi_k\}}}.$$

5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одинаковые распределения вида $\mathrm{P}\{\omega : \xi_k(\omega) = m\} = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Найти предел при $n \to \infty$ характеристической функции $f_{\eta_n}(t)$ случайной величины

$$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathrm{E}\{\xi_k\})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\{\xi_k\}}}.$$

6. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одинаковые плотности распределения вероятностей вида

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\beta x} \text{ при } x \ge 0. \end{cases}$$

Найти предел при $n \to \infty$ характеристической функции $f_{\eta_n}(t)$ случайной величины

$$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathrm{E}\{\xi_k\})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\{\xi_k\}}}.$$

7. Вычисление интеграла $J=\int\limits_0^1 x^2dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины J не превзойдет 0,01.

8. Сколько опытов необходимо произвести при вычислении интеграла

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было бы считать абсолютную погрешность вычисленного значения интеграла не превосходящей 0,1 % от J.

9. Вероятность $\mathrm{P}\{C\}=\mathrm{P}\{A+B\}$, где $\mathrm{P}\{B\mid\overline{A}\}=0{,}3$, определяется методом Монте-Карло двумя способами:

а) приближенное значение $\mathrm{P}\{C\}$ определяется как частота появления события C в ряде из n независимых опытов;

б) определяется частота $\frac{m}{n}$ появления события A в ряде из n независимых опытов, а приближенное значение $\mathrm{P}\{C\}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{P}\{C\}\approx\mathrm{P}_n\{C\}=\frac{m}{n}+\left(1-\frac{m}{n}\right)\mathrm{P}\{B\mid\overline{A}\}.$$

Определить необходимое число опытов в обоих случаях для получения ошибки в оценке $\mathrm{P}\{C\}$, не превосходящей 0,01, с вероятностью, не меньшей 0,95, если значение $\mathrm{P}\{A\}$ имеет порядок 0,4.

10. Вероятность некоторого события определяется методом Монте-Карло. Определить число независимых опытов, обеспечивающих с вероятностью не менее 0,99 получение искомой вероятности с ошибкой, не превосходящей 0,01. Оценку произвести по теореме Чебышева и теореме Муавра – Лапласа, положив $pq=0{,}25$, т. е. считая дисперсию числа появления события максимальной.

11.* При изготовлении отливок получается 20 % дефектных. Сколько нужно запланировать отливок к изготовлению, чтобы с вероятностью не менее 0,95 была обеспечена программа выпуска изделий, для выполнения которой необходимо 50 бездефектных отливок?

12. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с $\mathrm{E}\{\xi_k\} = 0$ и $\mathrm{D}\{\xi_k\} < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$.

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \dfrac{1}{n^{\alpha}} \,|\, \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega) \,|\, \le x \right\}$, где $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

13. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с $\mathrm{E}\{\xi_k\} = 0$ и $\mathrm{D}\{\xi_k\} < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Найти $\mathrm{D}\{\xi_k\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{\sqrt{n}} (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)) > 1 \right\} = \frac{1}{3}.$$

14. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с $\mathrm{D}\{\xi_k\} = 1$ и $\mathrm{E}\{[\xi_k]\} = 0$, где $[x]$ – целая часть числа x; $k = 1, 2, \ldots$. Найти $\mathrm{E}\{\xi_k - [\xi_k]\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{\sqrt{n}} (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)) > 1 \right\} = \frac{1}{2}.$$