Вопрос:

в каком алфавите больше букв:
в греческом или в английском?

Вопрос

Пусть S — множество квадратов натуральных чисел,

т. е. $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$.

Где больше чисел: в S или в $\mathbb{N}$?

Greek:	α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ
English:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Greek:	λ	μ	ν	ξ	o	π	ρ	σ	τ	υ
English:	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t

Greek:	φ	χ	ψ	ω		
English:	u	v	w	x	y	z

Вопрос:

в каком алфавите больше букв:
в греческом или в английском?

S	1	4	9	16	25	36	49	$\dots$	n^2	$\dots$
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$	n	$\dots$

Вопрос

Пусть S — множество квадратов натуральных чисел,

т. е. $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$.

Где больше чисел: в S или в $\mathbb{N}$?

§12. Понятие о равномощных и счётных множествах

Определение

Множества A и B называются равномощными, если существует биекция вида $f : A \to B$.

Важные свойства:

- любые два конечных множества с одинаковым числом элементов равномощны;
- любое множество равномощно самому себе;
- для любых A и B:
  если A равномощно B, то B равномощно A;
- для любых A, B, C:
  если A равномощно B, а B равномощно C, то A равномощно C.

Пример 1:

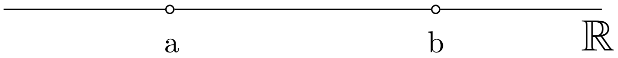
Множество S квадратов натуральных чисел равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. (Биекция — $\sqrt{n^2}$.)

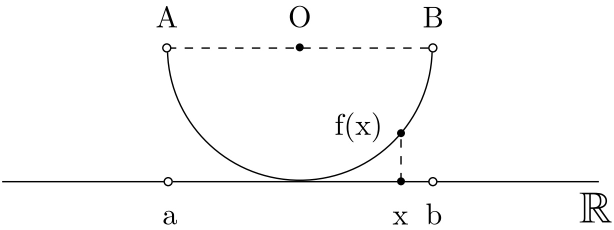
S	1	4	9	16	25	36	49	...	n^2	...
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	...	n	...

Пример 2:

Пусть a, b — действительные числа, $a < b$.

Множество чисел интервала (a, b)
равномощно множеству $\mathbb{R}$,
т. е. множеству всех действительных чисел.

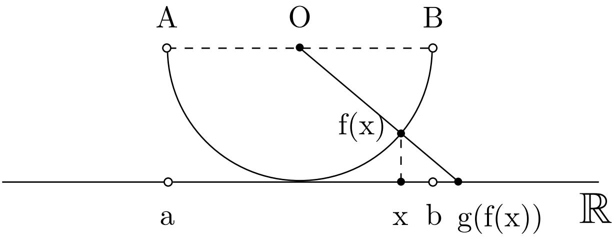




Отобразим параллельным переносом каждое число интервала (a, b) в точку на дуге AB.

Это отображение обозначим f.

Отметим, что f — биекция.



Каждую точку на дуге AB отобразим в точку на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Это отображение обозначим g. Оно тоже биективно.

Композиция $g \circ f$ и есть искомая биекция между интервалом (a, b) и множеством $\mathbb{R}$.

Определение

Множество A называется счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Таким образом, множество A называется счётным, если существует биекция вида $f : A \to \mathbb{N}$.

Эта биекция часто называется нумерацией элементов множества A.

Примеры счётных множеств

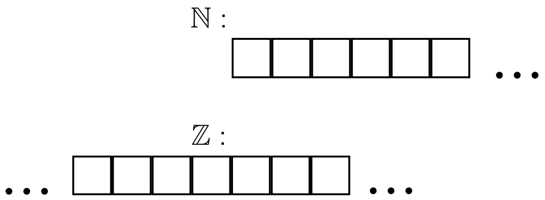
- множество натуральных чисел счётно;
- множество чётных натуральных чисел счётно;
- множество нечётных натуральных чисел счётно;
- да и вообще, любое бесконечное подмножество счётного множества счётно;
- множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ — расширенное множество натуральных чисел — счётно;
- множество целых чисел счётно.

- Множество $\mathbb{Z}$ равномощно множеству $\mathbb{N}$.

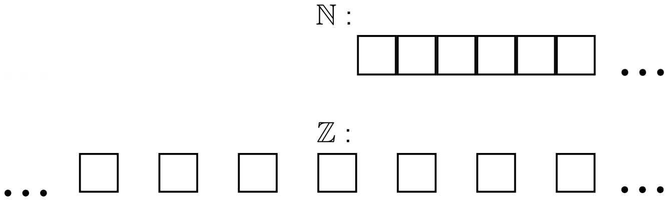
Одна из возможных нумераций:

$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	-3	3	$\dots$	$-n$	n	$\dots$
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$	$2n$	$2n+1$	$\dots$

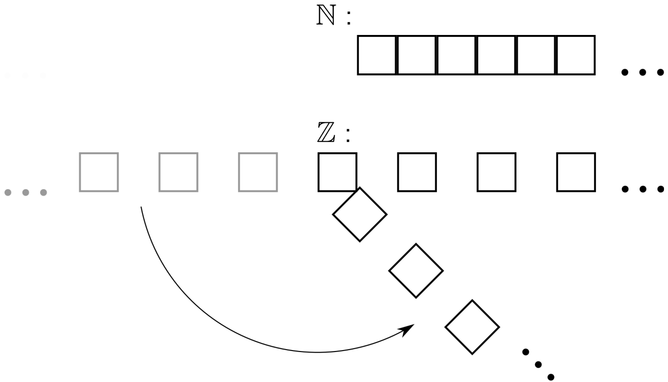
Визуализация этой нумерации



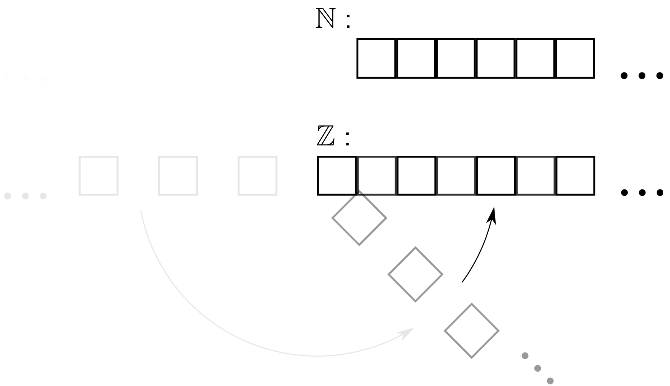
Визуализация этой нумерации



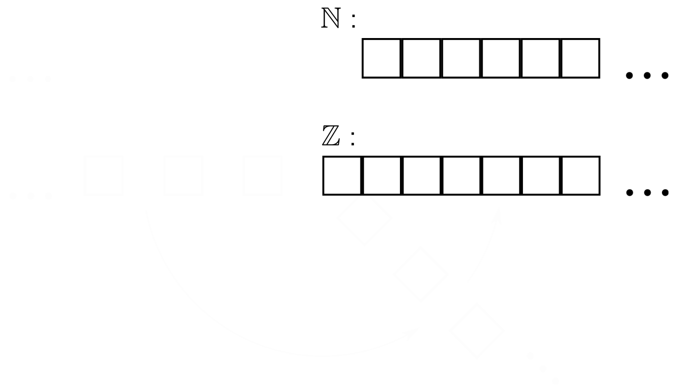
Визуализация этой нумерации



Визуализация этой нумерации



Визуализация этой нумерации



Пример несчётного множества

- Двоичным или бинарным упорядоченным набором длины n называется упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_i \in \{0, 1\}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Рассмотрим множество всех бесконечных бинарных наборов:

$$A = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\,) \mid \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ для каждого } i \in \mathbb{N}\}$$

Пример несчётного множества

$$A = \{\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)\mid \alpha_i \in \{0,1\} \text{ для каждого } i \in \mathbb{N}\}$$

Утверждение

Множество A не является счётным.

Доказательство

От противного.

- Предположим, что A счётно, т. е. что все последовательности во множестве A можно занумеровать:
  $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$.
- Выпишем их компоненты в таблицу:
  $$\begin{array}{c|ccccc} a_1 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,k} & \ldots \\ a_2 & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,k} & \ldots \\ \ldots & & & & & \\ a_k & \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \ldots & \alpha_{k,k} & \ldots \\ \ldots & & & & & \end{array}$$
- Рассмотрим бесконечную бинарную последовательность $a' = (\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{k,k}, \ldots)$.

Доказательство

$a' = (\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{k,k}, \dots)$

- На самом деле, рассмотрим бесконечную бинарную последовательность $b = (1 - \alpha_{1,1}, 1 - \alpha_{2,2}, \dots, 1 - \alpha_{k,k}, \dots)$.
- Заметим, что $b \in A$.
- По предположению все элементы A занумерованы, в том числе b.
- Пусть b имеет номер $m \in \mathbb{N}$. Тогда $b = a_m$.
- Это означает, что m-я компонента последовательности b равна $\alpha_{m,m}$.
- В то же время по построению m-я компонента последовательности b равна $1 - \alpha_{m,m}$, т. е. отлична от $\alpha_{m,m}$.

Доказательство

- Противоречие.
- Следовательно, наше предположение неверно,
- а значит, множество A не является счётным.

Утверждение

Множество A *всех бесконечных бинарных наборов, т е.*

$$A = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ для каждого } i \in \mathbb{N}\}$$

равномощно множеству $2^{\mathbb{N}}$ *— множеству всех подмножеств множества натуральных чисел.*

Ключевая идея доказательства

- Пусть $a \in A$, то есть $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $a_i \in \{0, 1\}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$.
- По последовательности a построим множество $S(a) \subseteq \mathbb{N}$ следующим образом: $S(a) = \{k \mid \alpha_k = 1\}$.
- Это правило задаёт отображение, более того — биективное.

Определение

Множество A называется континуальным,
если оно равномощно множеству действительных чисел $\mathbb{R}$.

Примеры:

- открытый интервал $(0, 1)$ — континуальное множество;
- отрезок $[0, 1]$ — континуальное множество;
- множество $2^{\mathbb{N}}$ — континуальное
(но это доказывать мы не будем).

Утверждение

Множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ равномощно множеству действительных чисел отрезка $(0, 1)$.

- Способ доказательства 1:
  построить биекцию
  (можно спрятать конечное в счётном!)
- Способ доказательства 2: в следующем подразделе!

Теорема Кантора – Бернштейна (– Шрёдера (– Дедекинда))

Пусть A, B — два множества.

Если

A равномощно некоторому подмножеству множества B,

а B равномощно некоторому подмножеству множества A,

то A и B равномощны.

Пример:

- $(0, 1)$ равномощно $(0, 1)$, но $(0, 1) \subseteq [0, 1]$
- $[0, 1]$ равномощно $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, но $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subseteq (0, 1)$
- По теореме Кантора – Бернштейна, $[0, 1]$ и $(0, 1)$ равномощны.