МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р. М. Ларин, А. В. Плясунов, А. В. Пяткин

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ.
Примеры и задачи

Учебное пособие

Новосибирск

2008

УДК 519.6

Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы оптимизации. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2008.

Учебное пособие представляет собой сборник примеров и задач по основной части семестрового курса "Методы оптимизации", читаемого на механико-математическом факультете и факультете информационных технологий Новосибирского университета и посвящённого методам решения оптимизационных задач в конечномерных пространствах. Пособие содержит также определения и формулировки основных теорем, что позволяет пользоваться им независимо от теоретического курса. Подробно рассмотрены классические методы решения задач математического программирования, а также выпуклое и линейное программирование.

Пособие предназначено для студентов механико-математического факультета, факультета информационных технологий, а также для всех, кто желает освоить рассматриваемые методы самостоятельно.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие содержит задачи и упражнения, предназначенные для практических занятий по курсу методов оптимизации в конечномерном пространстве. Рассматриваются задачи поиска минимума или максимума скалярной функции на множестве, расположенном в конечномерном евклидовом пространстве и определяемом конечной системой ограничений–равенств или ограничений–неравенств. За основу пособия взята программа курса "Методы оптимизации", который читается на механико-математическом факультете НГУ. Ему предшествуют курсы математического анализа и линейной алгебры. Предполагается, что студенты уже знакомы с указанными курсами.

Основную часть пособия составляют задачи оптимизации, которые принято также называть экстремальными задачами. Их решение позволяет освоить алгоритмы соответствующих методов и приобрести необходимые вычислительные навыки.

Число теоретических упражнений невелико. Обычно они формируются в процессе чтения лекций и, как очевидные и нетрудные части доказательства некоторых утверждений, обязательны для выполнения. Это особенно касается некоторых свойств выпуклых функций, используемых в методе штрафных функций и при регуляризации некорректных задач конечномерной оптимизации.

Основные определения и обозначения, которые являются общими для всех разделов пособия, рассматриваются в разд. 1. Это касается таких понятий, как общая постановка задачи оптимизации (вводится понятие задачи математического программирования), целевая функция, допустимое множество и допустимое решение, локальный и глобальный экстремумы, условный и безусловный экстремумы, некоторые общие утверждения о разрешимости задачи.

Каждая новая тема (в одном разделе их может быть несколько) начинается определениями и теоремами, используемыми далее, или ссылкой на литературу, где можно найти дополнительные сведения. Подобная структура пособия может оказаться полезной при самостоятельном изучении курса.

Разд. 2, где рассматриваются общие методы решения задач с непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями, представляет собой вводную часть и содержит классические методы решения задач математического программирования. Основной упор здесь сделан на методе неопределённых множителей Лагранжа, известном студентам по курсу математического анализа.

В связи с отсутствием единых учебных пособий по практическим занятиям, соответствующих читаемому курсу, а также в связи с небольшим количеством времени, выделяемым на них по учебному плану, в пособие включены примеры, иллюстрирующие методы, требующие большого объёма вычислений. Это прежде всего касается метода возможных направлений.

Естественно, что в пособии, предназначенном для первого знакомства с предметом, представлены только основные методы. Наша цель — познакомить студентов с некоторыми приёмами и методами решения задач конечномерной оптимизации, которые могут пригодиться при анализе возникшей перед ними реальной задачи оптимизации.

Кроме того, в пособии не рассматриваются численные методы решения задач безусловной оптимизации, такие как различные модификации градиентного метода, метода Ньютона, имеющие большое практическое значение и излагаемые в теоретическом курсе. Это связано с тем, что время, выделенное для семинарских занятий, позволяет ознакомиться только с самыми основными методами в форме, не требующей большого объёма вычислений и использования компьютерных программ.

Следует также учесть, что некоторые из методов оптимизации для специальных классов задач излагаются в курсе "Исследование операций".

1. Основные определения и обозначения

В дальнейшем ипользуются следующие обозначения:

Z — множество целых чисел;

E_n — n-мерное евклидово пространство;

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор–столбец, точка пространства E_n;

$x^\top = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$ — вектор–строка; символ $\top$ применяется для обозначения операции транспонирования;

$\{x \in X |\ Q\}$ — множество всех элементов из X, обладающих свойством Q. Если $X = E_n$, то используется запись $\{x \mid Q\}$;

$[x, y] = \{z \mid z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ 0 \le \alpha \le 1\}$ — отрезок с концевыми точками x и y;

$(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\} = \{z \mid z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ 0 < \alpha < 1\}$ — интервал, аналогично обозначаются полуинтервалы $(x, y]$ и $[x, y)$;

$\langle x, y\rangle = x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — скалярное произведение элементов x и y;

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — евклидова норма вектора x;

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ — евклидово расстояние между точками x и y;

$U_\varepsilon(x) = \{y \mid \rho(x, y) \le \varepsilon\}$ — ε*–окрестность* точки x, т. е. замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

Пусть $X \subset E_n$ и $x \in E_n$. Точка x называется *точкой прикосновения* множества X, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $X \cap U_\varepsilon(x)$ непусто. Множество $\overline{X}$ всех точек прикосновения множества X называется *замыканием* множества X. Точка x называется *предельной точкой* множества X, если любая ε–окрестность этой точки содержит бесконечно много точек множества X. Точка x называется *внутренней точкой* множества X, если найдётся $\varepsilon > 0$, для которого $U_\varepsilon(x) \subset X$.Через $\mathrm{Int}X$ обозначается множество всех внутренних точек множества X, называемое *внутренностью* множества X. Точка $x \in X$ называется *граничной точкой* множества X, если в любой её окрестности найдутся как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Множество $\mathrm{Fr}X = \overline{X} \setminus \mathrm{Int}X$ является множеством всех граничных точек множества X и называется *границей* этого множества. Точка x, принадлежащая множеству X, называется *крайней (угловой)* точкой этого множества, если не существует таких $x^1,\ x^2 \in X,\ x^1 \ne x^2$, что $x = (x^1 + x^2)/2$.

Кроме того, для точек x и y пространства E_n часто будут использоваться такие обозначения:

$x \ge y$ — частичный порядок в E_n, означающий, что $x_i \ge y_i,\ (i = \overline{1, n})$. Здесь и далее запись "$i = \overline{1, n}$" следует читать "для всех $i \in \{1, \dots, n\}$";

$x > y$ означает, что $x_i > y_i,\ (i = \overline{1, n})$;

$x \ne y$ означает, что $x_i \ne y_i$ хотя бы для одного индекса i;

$f'(x)$ — градиент скалярной функции $f(x)$ в точке x:

$$(f'(x))^\top = (\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots,\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}).$$

Для формулирования общей задачи оптимизации необходимо задать:

1) пространство $\mathcal{X}$;

2) множество (возможно, совпадающее со всем пространством) $X \subset \mathcal{X}$;

3) отображение $f:\ X \longrightarrow E_1$;

4) критерий (максимум или минимум).

Тогда задачу минимизации (максимизации) можно записать таким образом:

$$f(x) \longrightarrow \min_{x \in X \subset \mathcal{X}} \quad (f(x) \longrightarrow \max_{x \in X \subset \mathcal{X}}).$$

Обычно известно, о каком пространстве $\mathcal{X}$ идёт речь, и пишут просто

$$f(x) \longrightarrow \min_{x \in X} \quad (f(x) \longrightarrow \max_{x \in X}). \tag{1}$$

Решить задачу минимизации означает:

1) либо найти такую точку $x^* \in X$, что $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in X$; в этом случае пишем

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x);$$

2) либо, если такой точки x^* не существует, найти

$$f^* = \inf_{x \in X} f(x);$$

3) либо доказать, что функция $f(x)$ неограничена снизу на множестве X, т. е. $f^* = -\infty$;

4) либо установить, что $X = \emptyset$.

В силу очевидного равенства

$$\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}(-f(x)),$$

не теряя общности, можно рассматривать только множество задач на минимум. Заметим, что для обозначения максимума и минимума имеется объединяющий их термин — *экстремум.* Запись $f(x) \longrightarrow \mathrm{extr}_X$ означает, что ищется и максимум, и минимум функции $f(x)$. При этом точки, в которых достигается экстремум, называются *экстремальными точками.*

Множество X в задаче (1) называется *допустимым множеством*, а его элементы — *допустимыми точками.*

В конечномерном случае $\mathcal{X} = E_n$, а допустимое множество X обычно задаётся в таком виде:

$$X = \{x \mid \varphi_j(x) \leq 0,\ j = \overline{1,m}\}, \tag{2}$$

где $\varphi_j(x),\ j = \overline{1,m}$ — заданные скалярные функции. Задача (1)–(2) называется *основной задачей математического программирования.* Неравенства $\varphi_j(x) \leq 0$, определяющие допустимое множество, называются *ограничениями.* Функцию $f(x)$ называют *целевой функцией*, а точку x^* — *оптимальным решением* задачи (1)–(2), или *оптимальной точкой*, или *точкой глобального минимума* функции $f(x)$ на множестве X. При этом часто используют обозначение $x^* = \mathrm{argmin}\{f(x) \mid x \in X\}$. Множество всех оптимальных точек обозначим через $X^* = \mathrm{Argmin}\{f(x) \mid x \in X\}$. Очевидно, что

$$X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}.$$

Точка $x \in X$ называется *точкой локального минимума* функции f, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) \leq f(y)$ для всех $y \in X \cap U_\varepsilon(x)$. Очевидно, что всякая точка глобального минимума является точкой локального минимума. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Задача минимизации (1) называется задачей *безусловной* минимизации, если $X = E_n$. Если множество X имеет вид (2), то задача (1)–(2) называется задачей *условной* минимизации. При этом неважно, совпадает ли множество X с E_n или нет. Например, задача (1)–(2) с $X = \{x \mid -x^2 \leq 0\}$ считается задачей условной минимизации.

При решении конечномерных задач оптимизации в ряде случаев может оказаться полезной следующая теорема:

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве X, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней границ.*

Другими словами, при выполнении условий теоремы всегда существуют такие точки x' и x'' множества X, что $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ для всех $x \in X$. С помощью теоремы Вейерштрасса можно иногда определять, достигает ли функция своего глобального минимума и максимума или нет.

Пример. При каких значениях параметров a и b функция $f(x, y) = x + ay$ достигает своего минимума на множестве $X = \{(x, y) \mid bx^2 - 2xy + y^2 \leq 1\}$?

Решение. Ясно, что функция f непрерывна при любом a. Поскольку $X = \{(x, y) \mid (x - y)^2 + (b-1)x^2 \leq 1\}$, то при $b > 1$ множество X является эллипсом и по теореме Вейерштрасса f достигает своего минимума. При $a = -1$ и $b = 1$ получим, что $f(x, y) = x - y$, а $X = \{(x, y) \mid -1 \leq (x - y) \leq 1\}$. Ясно, что минимальное значение функции, равное -1, достигается. Покажем, что при всех остальных значениях параметров a и b минимум не достигается. Если $b \leq 1$ и $a \neq -1$, то точки вида $y = x$ будут допустимыми при любом x. При этом функция $f(x, x) = (a+1)x$ получается неограниченной снизу: если $a < -1$, то $f(x, x) \longrightarrow -\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$, а если $a > -1$, то $f(x, x) \longrightarrow -\infty$ при $x \longrightarrow -\infty$. Наконец, в случае $b < 1, a = -1$ положим $y = (1 - \sqrt{1-b})x$. Нетрудно заметить, что тогда $(x-y)^2 + (b-1)x^2 = (1-b)x^2 + (b-1)x^2 = 0$, т. е. такие точки являются допустимыми при любом x. Но $f(x, y) = x - y = \sqrt{1-b}x \longrightarrow -\infty$ при $x \longrightarrow -\infty$.

Таким образом, функция f достигает своего минимума на множестве X только при $b > 1$ и любом a или при $b = 1$ и $a = -1$.

Задачи

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ достигают глобального минимума на множестве X. Верно ли, что функция $h(x) = f(x) + g(x)$ также достигает глобального минимума на этом множестве?

2. При каких значениях параметра a функция $f(x) = (a+1)x + a\ln x - 2\sin x$ достигает глобального минимума на множестве положительных чисел?

3. При каких значениях параметра a функция $f(x, y) = (a-2)(a-3)e^x + |y+10|/(y^2+1)$ достигает глобального минимума на множестве $X = \{(x, y) \mid (a-4)x^2 + y^2 \leq 1\}$?

2. Задачи нелинейного программирования

В данной главе рассматриваются общие методы решения задач математического программирования, основанные на знаниях, полученных студентами в курсе математического анализа. При этом предполагается, что все функции непрерывны и имеют непрерывные производные соответствующего порядка.

2.1. Одномерный случай

Имеем задачу

$$f(x) \longrightarrow \mathrm{extr}_{x \in X},$$

где $X \subset E_1$ — совокупность отрезков, интервалов, полуинтервалов.

Теорема Ферма. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некотором промежутке X и во внутренней точке x^* этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда $f'(x^*) = 0$.*

Таким образом, экстремум дифференцируемой функции следует искать в *стационарных* точках, т. е. в тех точках, где производная функции равна нулю. Кроме того, "подозрительными"на экстремум являются точки, не подпадающие под действие теоремы Ферма, а именно: граничные точки, точки разрыва функции и точки разрыва производной.

Правило нахождения глобального экстремума. *Для нахождения глобального экстремума функции $f(x)$ на множестве $X \subset E_1$ нужно найти следующие множества точек:*

1) множество стационарных точек $X_1 = \{x \in X \mid f'(x) = 0\}$;

2) множество точек разрыва функции $X_2 = \{x \in X \mid f(x)$ — разрывна $\}$;

3) множество точек разрыва производной $X_3 = \{x \in X \mid f'(x)$ — разрывна $\}$;

4) множество граничных точек (в том числе и точки $\pm\infty$, если они принадлежат допустимому множеству) $X_4 = \mathrm{Fr}X = \overline{X} \setminus \mathrm{Int}X$.

После этого необходимо вычислить значения функции в этих точках и выбрать среди них наибольшее и наименьшее значения. Если соответствующие точки принадлежат множеству X, то минимум или максимум достигается на множестве X. В противном случае имеем точную нижнюю или верхнюю границы.

Сформулированное правило позволяет исследовать на экстремум достаточно широкий класс функций.

Пример 1. Найти экстремум функции $f(x) = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$.

Решение. Производная

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{2/3} - x^{4/3}}{x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}}$$

непрерывна везде, кроме точек $x = 0$ и $x = \pm 1$. Для нахождения стационарных точек приравниваем нулю числитель производной и получаем $x = \pm\sqrt{2}/2$. Таким образом, подозрительными на экстремум являются точки множеств $X_1 = \{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$ и $X_3 = \{-1, 0, 1\}$. При этом $X_2 = \emptyset$, а на границе множества $X = E_1$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Вычислим значение функции в найденных точках: $f(-1) = f(0) = f(1) = 1$, $f(-\sqrt{2}/2) = f(\sqrt{2}/2) = 2/\sqrt[3]{2}$. Таким образом, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается в точках $x = \pm\sqrt{2}/2$. Наименьшего значения функция не имеет, а $\inf f(x) = 0$.

Замечание. Поскольку функция $f(x)$ является чётной (т. е. $f(x) = f(-x)$), то достаточно было исследовать её на интервале $[0, \infty)$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}.$$

Решение. Производная функции $f(x)$ есть

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 10x - 5}{(x^2+1)^2}.$$

Очевидно, что $X_2 = X_3 = \emptyset$, а $X_1 = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$. При этом, $f(1 - \sqrt{2}) \approx 7.04$ и $f(1 + \sqrt{2}) \approx -0.03$. На границе имеем

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

Таким образом, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается в точке $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, а наименьшее — в точке $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Задачи

1. Найти экстремум функции:

1) $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$ при $x \in E_1$;

2) $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$ при $x \in E_1$;

3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x + 1)^2$ на отрезке $[-2, 2]$;

4) $f(x) = x - 2\sin x$ при $x \in [0, +\infty)$;

5) $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$ при $x \in [-1, +\infty)$;

6) $f(x) = |x|e^{-|x|}$ при $x \in [-2, 2]$;

7) $f(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$ при $x \in [-7, 2]$;

8) $f(x) = x\sqrt[3]{|x| - 1}$ при $x \in [-7, 2]$;

9) $f(x) = x(x - 2)^{2/3}$ при $x \in [-1, +\infty)$.

2. Доказать, что $|3x - x^3| \leq 2$ при $|x| \leq 2$.

2.2. Многомерная безусловная оптимизация

Рассмотрим задачу нахождения локального экстремума скалярной функции $f(x)$ при $x \in E_n$.

Необходимое условие локального экстремума. *Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x^*. Тогда, для того чтобы в точке x^* достигался экстремум, необходимо выполнение условия $f'(x^*) = 0$.*

Точки, удовлетворяющие этому условию, будем называть *стационарными*.

Квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j \tag{1}$$

от переменных $y_1, \ldots, y_n$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называется *строго положительно (отрицательно) определённой*, если она имеет положительные (отрицательные) значения при всех значениях аргументов кроме $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Если квадратичная форма (1) имеет неотрицательные (неположительные) значения при всех значениях аргументов, то она называется *положительно (отрицательно) определённой.*

Достаточное условие локального экстремума. *Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные производные первого и второго порядков в некоторой окрестности стационарной точки x^*. Положим $a_{ij} = f''_{x_ix_j}(x^*)$. Тогда, если квадратичная форма (1) оказывается строго положительно (отрицательно) определённой, то в точке x^* достигается локальный минимум (максимум).*

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы квадратичная форма (1) была строго положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ были положительными. Для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все миноры были неотрицательными.*

Так как строго отрицательно определённая форма с изменением знака всех её членов переходит в строго положительно определённую и обратно, то отсюда легко получить критерий строго отрицательной определённости: все главные миноры нечётного порядка должны быть отрицательны, а чётного — положительны.

В частности, диагональные элементы матрицы A для строго положительно (отрицательно) определённой формы должны быть положительны (отрицательны).

Если квадратичная форма может принимать значения противоположных знаков, то она называется *неопределённой*.

Достаточное условие отсутствия экстремума. *Если при выполнении сформулированных выше условий на функцию $f(x)$ квадратичная форма (1) в стационарной точке x^* является неопределённой, то в этой точке экстремума нет.*

Случай, когда квадратичная форма (1) положительно (отрицательно), но не строго положительно (отрицательно) определена, является "сомнительным". В этом случае в зависимости от поведения высших производных экстремум может как быть, так и не быть. Исследованием "сомнительных"случаев мы заниматься не будем.

Пример 1. Найти точки локального экстремума функции $f(x) = x_1x_2^2+x_1^2x_2-3x_1^2-3x_2^2$.

Решение. Для нахождения точек экстремума необходимо решить систему

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x) = x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 = 0, \\ f'_{x_2}(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, после несложных преобразований получим уравнение $(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 6) = 0$. Рассмотрим два случая:

а) $x_1 = x_2$. Подставляя в первое уравнение, получаем, что $3x_1^2 - 6x_1 = 0$, т. е. стационарными являются точки $x_1 = x_2 = 0$ и $x_1 = x_2 = 2$. Матрица вторых производных имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2x_2 - 6 & 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 - 6 \end{pmatrix}.$$

Так как при $x_1 = x_2 = 0$ соответствующая квадратичная форма строго отрицательно определена, то в точке $(0, 0)^\top$ достигается локальный максимум. В точке $x = (2, 2)^\top$ квадратичная форма является неопределённой (все главные миноры матрицы отрицательны), поэтому в ней экстремума нет.

б) $x_1 + x_2 + 6 = 0$. Выразив x_2 через x_1 и подставив в исходную систему, получим уравнение $x_1^2 + 6x_1 - 36 = 0$, корнями которого будут числа $\pm 3\sqrt{5} - 3$. Таким образом, находим ещё две стационарные точки $(3\sqrt{5} - 3, -3\sqrt{5} - 3)$ и $(-3\sqrt{5} - 3, 3\sqrt{5} - 3)$. В силу симметричности этих двух точек и функции $f(x)$ по переменным x_1 и x_2, достаточно исследовать на экстремум только первую из них. Матрица вторых производных в ней имеет вид

$$\begin{pmatrix} -6\sqrt{5} - 12 & -12 \\ -12 & 6\sqrt{5} - 12 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $-6\sqrt{5} - 12 < 0$, а $6\sqrt{5} - 12 > 0$, то экстремума нет.

Таким образом, единственным локальным экстремумом является точка $(0, 0)^\top$, где достигается локальный максимум.

Пример 2. Показать, что функция $f(x) = (1 + e^{x_2}) \cos x_1 - x_2 e^{x_2}$ имеет бесконечное множество локальных максимумов и ни одного локального минимума.

Решение. Приравнивая к нулю частные производные, получаем систему

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x) = -(1 + e^{x_2}) \sin x_1 = 0, \\ f'_{x_2}(x) = e^{x_2}(\cos x_1 - x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $x_1 \in \{k\pi \mid k \in Z\}$. Подставляя во второе уравнение, получаем, что $x_2 = 0$, если k чётное, и $x_2 = -2$ в противном случае. Следовательно, подозрительными на экстремум являются точки вида $(2k\pi, 0)$ и $((2k + 1)\pi, -2)$, где $k \in Z$. Выпишем матрицу вторых производных:

$$\begin{pmatrix} -(1+e^{x_2})\cos x_1 & -e^{x_2}\sin x_1 \\ -e^{x_2}\sin x_1 & e^{x_2}(\cos x_1 - x_2 - 2) \end{pmatrix}.$$

В точках вида $(2k\pi, 0)$ имеем $a_{11} = -2$, $a_{22} = -1$ и $a_{12} = a_{21} = 0$, т. е. соответствующая квадратичная форма строго отрицательно определена, и эти точки являются точками локального максимума.

В точках вида $((2k+1)\pi, -2)$ получим, что $a_{11} = 1 + e^{-2} > 0$, $a_{22} = -e^{-2} < 0$ и $a_{12} = a_{21} = 0$. Значит, соответствующая квадратичная форма неопределена, и в этих точках экстремума нет.

Пример 3. В численных методах оптимизации широко используется такой подход. Выбирается начальная точка x^0, а затем на каждом шаге выбираются так называемые *направление движения* — вектор $p^k \in E_n$ и *величина шага* $\alpha_k > 0$, и полагается $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. При этом в задаче минимизации выбирают p^k и α_k так, чтобы выполнялось неравенство $f(x^{k+1}) \le f(x^k)$. В связи с этим представляет интерес ответ на вопрос: "Является ли достаточным для локального минимума функции $f(x)$ в точке x^*, чтобы эта функция имела локальный минимум вдоль каждой прямой, проходящей через точку x^*?" В одномерном случае ответ, очевидно, будет положительным. Однако, как показывает следующий пример, при $n > 1$ это не так.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x_1 - x_2^2)(2x_1 - x_2^2)$ и точку $x^* = (0,0)^\top$. Возьмём произвольную прямую $x_1 = ax_2$, проходящую через точку x^* (вдоль прямой $x_2 = 0$ получим функцию $f(x_1, 0) = 2x_1^2$, которая очевидно имеет минимум при $x_1 = 0$). Подставляя $x_1 = ax_2$ в функцию $f(x)$, получаем функцию $\widetilde{f}(x_2) = f(ax_2, x_2) = (ax_2 - x_2^2)(2ax_2 - x_2^2)$. Если $a = 0$, то $\widetilde{f}(x_2) = x_2^4$, и в точке $x_2 = 0$ она имеет локальный минимум. В противном случае выпишем производные первого и второго порядка:

$$\widetilde{f}'(x_2) = (a - 2x_2)(2ax_2 - x_2^2) + (ax_2 - x_2^2)(2a - 2x_2),$$
$$\widetilde{f}''(x_2) = -2(2ax_2 - x_2^2) + 2(a - 2x_2)(2a - 2x_2) - 2(ax_2 - x_2^2).$$

Отсюда получаем, что при $a \ne 0$ выполняются соотношения $\widetilde{f}'(0) = 0$ и $\widetilde{f}''(0) = 4a^2 > 0$. Таким образом, вдоль каждой прямой, проходящей через точку x^*, функция $f(x)$ имеет локальный минимум.

Убедиться в отсутствии локального минимума функции $f(x)$ в точке x^* с помощью описанных выше критериев не удаётся, так как матрица вторых производных оказывается положительно, но не строго положительно определённой. Мы покажем отсутствие локального минимума "вручную". Рассмотрим три множества: $X_1 = \{x \mid x_1 > x_2^2\}$, $X_2 = \{x \mid 2x_1 < x_2^2\}$ и $X_3 = \{x \mid x_2^2 > x_1 > x_2^2/2\}$. Ясно, что на первых двух множествах функция положительна, а на третьем — отрицательна. Поскольку $f(0,0) = 0$ и в каждой окрестности точки x^* найдутся точки из всех трёх множеств, в этой точке экстремума нет.

Задачи

1. Найти точки локального экстремума функции $f(x)$:

1) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_3$;

2) $f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 4x_1x_2$;

3) $f(x) = x_1e^{x_1} - (1 + e^{x_1})\sin x_2$;

4) $x_1^2 + x_2^2 + f^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4f + 2 = 0$;

5) $x_1^2 + x_2^2 + f^2 - x_1f - x_2f + 2x_1 + 2x_2 + 2f = 2$.

2. Показать, что функция $f(x)$ имеет бесконечное множество локальных максимумов и ни одного локального минимума:

1) $f(x) = -(x_2^2 + 1)(\sin x_1 + 2)$;

2) $f(x) = \sin x_1 - x_2^2$.

2.3. Многомерная условная оптимизация

2.3.1. Метод линий равного уровня

В этом разделе предлагается графический метод решения задач оптимизации малой размерности, позволяющий наглядно представить себе поведение целевой функции. Этот метод достаточно общий и применим для решения как задач с ограничениями, так и без них. Метод иллюстрируется задачей с ограничениями–неравенствами.В разделах 2.3.2 и 2.3.3 описываются общие методы решения таких задач в случае дифференцируемости функций.

Нам потребуется следующее

Определение. Пусть c — действительное число. *Линией уровня* c функции f называется множество $\{x \in E_n \mid f(x) = c\}$ всех точек пространства E_n, в которых функция принимает значение c.

Идея метода заключается в графическом построении множества X допустимых значений переменных и поиске наибольшего и наименьшего значений c, при которых линия уровня c функции f имеет непустое пересечение с X. Проиллюстрируем этот метод на следующем примере.

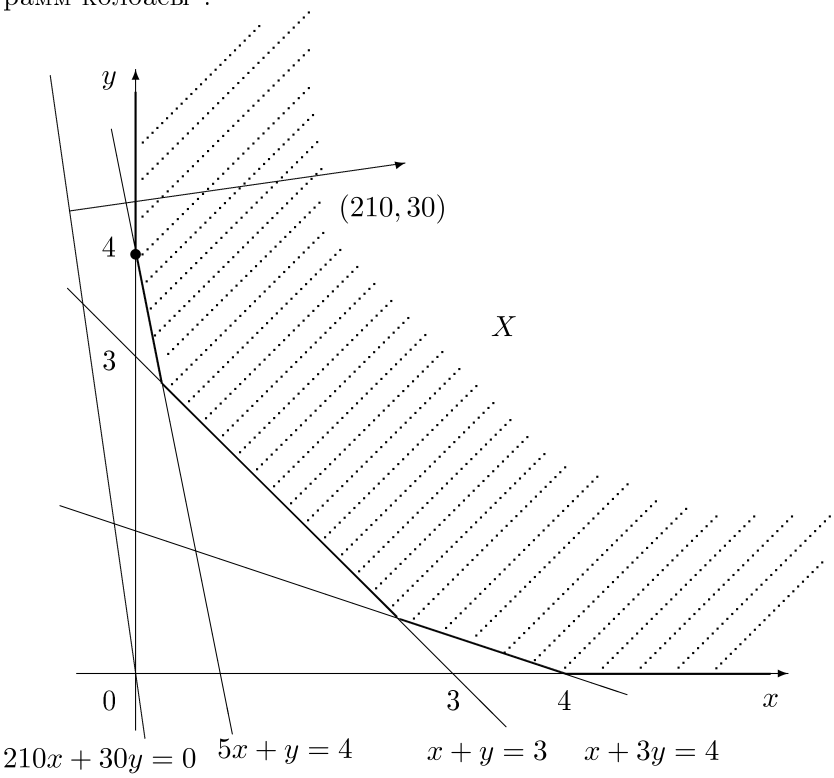
Пример (задача о рационе). Имеется два вида продуктов (условно говоря, колбаса и хлеб), с помощью которых необходимо удовлетворить дневной рацион. Один килограмм хлеба содержит 100 грамм жиров, 300 грамм белков и 600 грамм углеводов, тогда как один килограмм колбасы содержит 500 грамм жиров, 300 грамм белков и 200 грамм углеводов. В рационе человека должно быть не менее 400 грамм жиров, 900 грамм белков и 800 грамм углеводов. Требуется удовлетворить рацион за минимальную цену, если известно, что килограмм хлеба стоит 30 рублей, а килограмм колбасы — 210 рублей.

Для решения этой задачи сначала построим математическую модель. Обозначим количество колбасы в рационе через x_1, а количество хлеба — через x_2. Тогда получаем следующую задачу.

$$f(x) = 210x_1 + 30x_2 \longrightarrow \min_X,$$

$$X = \{x \mid 5x_1 + x_2 \geq 4, x_1 + x_2 \geq 3, x_1 + 3x_2 \geq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Последние два ограничения говорят о том, что запасов у нас нет, так что продукты можно только приобретать. Построим геометрически множество допустимых решений X (см. рис.) и проведём линию произвольного уровня функции $f(x)$, например, линию уровня 0. Она представляет из себя прямую $210x_1 + 30x_2 = 0$; видно, что эта прямая не пересекается с множеством X. Это говорит о том, что невозможно удовлетворить рацион затратив 0 рублей. При изменении значения уровня c получаются прямые, параллельные данной, причём градиент целевой функции $f'(x) = (210, 30)$ показывает направление увеличения целевой функции. Таким образом, следует "двигать"прямую $210x_1 + 30x_2 = 0$ в направлении, указанном градиентом, до тех пор пока она не пересечётся с множеством X. Точка пересечения и будет искомым минимумом. Из рисунка нетрудно видеть, что первой точкой пересечения будет $(0,4)$, т. е. оптимальный рацион состоит из 4 килограмм хлеба и 0 килограмм колбасы[1].



Задачи

Решить методом линий уровня:

1) $2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$;

2) $x_1 - x_2 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid 2x_1 + 3x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 2\}$;

3) $x_1 + x_2 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$;

4) $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 + x_2 \leq 9, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$;

5) $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$;.

2.3.2. Задачи с ограничениями–равенствами. Метод неопределённых множителей Лагранжа

[1]Поскольку приведённые в примере цифры взяты авторами произвольно, применение полученных результатов на практике не рекомендуется (прим. авт.)

Теперь перейдём к общему методу решения задач условной оптимизации в E_n и сначала рассмотрим случай ограничений–равенств, т. е. решается задача:

$$f(x) \longrightarrow \min_{x\in X} \; (f(x) \longrightarrow \max_{x\in X}), \tag{1}$$

где

$$X = \{x \in E_n \mid \varphi_j(x) = 0, \; j = \overline{1,m}\}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что $m \leq n$.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Теорема о неявных функциях. *Предположим, что:*

1) дана система из m уравнений с n неизвестными ($m \leq n$)

$$F_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \; (j = \overline{1,m}); \tag{3}$$

2) все функции $F_j(x)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x^0)$ точки x^0, в которой $F_j(x^0) = 0$ ($j = \overline{1,m}, \; \varepsilon > 0$);

3) якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x^0)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1(x^0)}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m(x^0)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_m(x^0)}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда:

а) в некоторой окрестности точки x^0, содержащейся в $U_\varepsilon(x^0)$, система уравнений (3) определяет $x_1, \ldots, x_m$ как однозначные функции от $x_{m+1}, \ldots, x_n$:

$$x_i = f_i(x_{m+1}, \ldots, x_n) \; (i = \overline{1,m});$$

б) при $x_i = x_i^0$ ($i = \overline{m+1,n}$) эти функции принимают значения x_i^0 ($i = \overline{1,m}$):

$$f_i(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0) = x_i^0 \; (i = \overline{1,m});$$

в) все функции $f_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ ($i = \overline{1,m}$) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.

Следует обратить внимание на локальный характер теоремы существования неявных функций: речь идёт всё время о некоторой окрестности рассматриваемой точки. Но и в таком виде эта теорема полезна.

Рассмотрим теперь задачу (1) о нахождении экстремума функции $f(x)$ на множестве X, определяемом условием (2). Предполагается, что функции $f(x), \; \varphi_j(x)$ ($j = \overline{1,m}$) непрерывны и непрерывно дифференцируемы в окрестности $U_\varepsilon(x^*)$ некоторой экстремальной точки x^*. Пусть в этой точке ранг матрицы частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x^*)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_m(x^*)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

равен m. Для определённости будем считать, что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x^*)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1(x^*)}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_m(x^*)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m(x^*)}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, в силу теоремы о неявных функциях, в некоторой окрестности точки x^* система уравнений

$$\varphi_j(x) = 0 \ (j = \overline{1, m}) \tag{3'}$$

равносильна системе

$$x_i = f_i(x_{m+1}, \ldots, x_n) \ (i = \overline{1, m}), \tag{5}$$

где f_i — неявные функции, определяемые системой (3′). Таким образом, вопрос об условном экстремуме сводится к вопросу о безусловном экстремуме для сложной функции

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv f(f_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)) \tag{6}$$

в точке x^*. Эти соображения приводят к методу нахождения точек, доставляющих экстремум функции при ограничениях-равенствах. Если каким-то образом удаётся разрешить систему уравнений (3′) относительно переменных x_i $(i = \overline{1, m})$ и найти явные выражения для функций (5), то дело сводится к нахождению безусловного экстремума для функции (6). Этот метод называется *методом исключения зависимых переменных.* Можно указать другой путь для нахождения экстремальных точек, не предполагая, что мы имеем явные выражения для функций (5), хотя существование этих функций использоваться будет. Лагранж предложил метод, в котором все переменные сохраняют одинаковую роль.

Метод неопределённых множителей Лагранжа. Введём в рассмотрение новые переменные y_j $(j = \overline{1, m})$ и функцию

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j \varphi_j(x).$$

Переменные y_j называются *неопределёнными множителями Лагранжа*, а функция $F(x, y)$ — *функцией Лагранжа.*

Пусть в точке x^*, удовлетворяющей системе (3′), выполнены условия теоремы о неявных функциях. Тогда, для того чтобы точка x^* была точкой экстремума задачи (1)–(2), необходимо существование таких чисел y_j^* $(j = \overline{1, m})$, что выполняются равенства

$$\frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x_i} = 0 \ (i = \overline{1, n}), \tag{7}$$

$$\frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y_j} = 0 \ (j = \overline{1, m}). \tag{8}$$

Условия (8), очевидно, эквивалентны условиям (3′). При решении задачи (1)–(2) данным методом существенную роль играет предположение о ранге матрицы (4). Чтобы быть уверенным в том, что не пропущена ни одна подозрительная точка, следует предварительно установить, что это предположение выполняется во всех точках множества X.

Пример 1. Найти экстремум функции $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ при ограничении–равенстве $\varphi(x) = x_1x_2x_3x_4 - a^4 = 0$ $(a > 0)$ в области $X = \{x_i > 0 \mid i = \overline{1, n}\}$.

Решение. Применим метод множителей Лагранжа (условие на ранг матрицы в области X очевидно выполнено). Введём множитель y и функцию $F(x, y) = f(x) + y\varphi(x)$. Система уравнений (7)–(8) принимает вид

$$\begin{cases} F'_{x_1}(x, y) = 1 + x_2x_3x_4y = 0, \\ F'_{x_2}(x, y) = 1 + x_1x_3x_4y = 0, \\ F'_{x_3}(x, y) = 1 + x_1x_2x_4y = 0, \\ F'_{x_4}(x, y) = 1 + x_1x_2x_3y = 0, \\ F'_y(x, y) = x_1x_2x_3x_4 - a^4 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $y \neq 0$, поэтому можно записать равенства $-1/y = x_1x_2x_3 = x_1x_2x_4 = x_1x_3x_4 = x_2x_3x_4$. Отсюда следует, что $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Подставляя в последнее уравнение, получаем, что $x_i = a$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, на множестве $X = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$.

Решение. Так как множество X ограничено и замкнуто, то существование в нём точек, где функция принимает наибольшее и наименьшее значения, вытекает из теоремы Вейерштрасса. Очевидно, что ранг матрицы $(2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n)$ равен нулю только в точке 0, которая не принадлежит множеству X. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x) + y(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2).$$

Уравнения (7) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - yx_i = 0 \ (i = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Из курса алгебры известно, что система из n линейных уравнений с n неизвестными с нулевой правой частью имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, т. е. в нашем случае имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} - y & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - y & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - y \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Если y — корень уравнения (10) (т. е. собственное число матрицы A), то существует и ненулевое $x \in X$, удовлетворяющее системе (9). Но определение этих значений для нас интереса не представляет, так как нам надо найти только наибольшее и наименьшее значения целевой функции.

Умножив i-е уравнение системы (9) на x_i и сложив все уравнения, получим равенство

$$f(x) - y\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,$$

что, в силу условия $x \in X$, приводит к равенству $f(x) = y$. Таким образом, искомые наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве X совпадают с наибольшим и наименьшим из собственных чисел матрицы A.

Пример 3. Пусть трёхосный эллипсоид $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1$, где $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, пересечён плоскостью $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ (где все $b_i \neq 0$), проходящей через его центр. Требуется определить полуоси получающегося в сечении эллипса.

Решение. Эта задача эквивалентна нахождению экстремума функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ на множестве $X = \{x \mid x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1 \text{ и } b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\}$

Метод исключения независимых переменных приводит к сложным выкладкам, поэтому лучше применить метод множителей Лагранжа. Сначала убедимся, что выполняется условие на ранг матрицы (4). Действительно, если

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 2x_1/a_1^2 & 2x_2/a_2^2 & 2x_3/a_3^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 1,$$

то $x_i = ca_i^2 b_i$ для $i = 1, 2, 3$ и некоторого $c \in E_1$. Но тогда

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = c^2 b_1^2 a_1^2 + c^2 b_2^2 a_2^2 + c^2 b_3^2 a_3^2 = c(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) = 0,$$

т. е. $x \notin X$. Функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1) + y_2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3).$$

Приравняем нулю её производные по x:

$$x_i + \frac{y_1 x_i}{a_i^2} + \frac{y_2 b_i}{2} = 0 \ (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Умножив эти уравнения на x_i и сложив (с учётом ограничений), получим, что $y_1 = -f(x)$.

Убедимся, что $(1 + y_1/a_i^2) \neq 0$ для всех i. Действительно, если, например, $(1 + y_1/a_1^2) = 0$, то $y_2 = 0$ и, следовательно, $x_2(1 + y_1/a_2^2) = 0$ и $x_3(1 + y_1/a_3^2) = 0$. Из условия $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ следует, что по крайней мере одно из чисел x_2, x_3 не равно нулю. Но тогда $(1 + y_1/a_2^2) = 0$ или $(1 + y_1/a_3^2) = 0$, что противоречит условию $a_1 > a_2 > a_3$.

Таким образом, из соотношений (11) вытекает, что

$$x_i = -\frac{y_2 b_i a_i^2}{2(a_i^2 + y_1)} \ (i = 1, 2, 3).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} b_i x_i = -y_2 \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i^2 a_i^2}{2(a_i^2 + y_1)} = 0.$$

Поскольку $y_2 \neq 0$ (так как не все x_i равны нулю), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{b_i^2 a_i^2}{a_i^2 + y_1} = 0.$$

Отсюда с учётом ранее доказанного равенства $f(x) = -y_1$ непосредственно определяются интересующие нас значения целевой функции.

Пример 4. Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

Решение. Прежде всего сформулируем оптимизационную задачу. Обозначим произвольную точку, принадлежащую параболе, через (x_1, y_1), а прямой — через (x_2, y_2). Тогда наша задача сводится к минимизации функции $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ при условиях $y_1 - x_1^2 = 0$ и $x_2 - y_2 - 2 = 0$. Матрица (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

и её ранг, очевидно, равен двум. Выпишем функцию Лагранжа $F(x, y, z) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z_1(y_1 - x_1^2) + z_2(x_2 - y_2 - 2)$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 2(x_1 - x_2) - 2x_1 z_1 = 0, \\ F'_{x_2} = -2(x_1 - x_2) + z_2 = 0, \\ F'_{y_1} = 2(y_1 - y_2) + z_1 = 0, \\ F'_{y_2} = -2(y_1 - y_2) - z_2 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Сложив почленно первое равенство со вторым, а третье с четвёртым, получим условия $z_2 = 2x_1z_1$ и $z_1 = z_2$. Если $z_1 = z_2 = 0$, то из системы (12) следует, что $y_1 = y_2$ и $x_1 = x_2$, т. е. прямая и парабола пересекаются. Однако в нашем случае это не так, поскольку система уравнений $y = x^2$, $x - y - 2 = 0$ несовместна. Значит, $z_1 \neq 0$, и $x_1 = 1/2$. Тогда $y_1 = 1/4$. Сложив в системе (12) второе и четвёртое уравнения и подставив найденные значения переменных, получим соотношение $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 = 3/4$. Так как $x_2 = y_2 + 2$, приходим к точке $x_2 = 11/8$, $y_2 = -5/8$. Таким образом, расстояние между данными прямой и параболой есть $\sqrt{f(1/2, 1/4, 11/8, -5/8)} = 7\sqrt{2}/8$.

Пример 5. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x_1$ при ограничении $x_1^3 - x_2^2 = 0$.

Решение. Так как $x_1 = (x_2)^{2/3} \geq 0$, то оптимальное решение задачи есть $x^* = (0, 0)$. Если ввести функцию Лагранжа $F(x, y) = x_1 + y(x_1^3 - x_2^2)$ и затем решать систему уравнений

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 1 + 3yx_1^2 = 0, \\ F'_{x_2} = -2yx_2 = 0, \\ F'_y = x_1^3 - x_2^2 = 0, \end{cases} \tag{13}$$

то нетрудно убедиться, что она несовместна. Причиной этого противоречия является то, что ранг матрицы $(3x_1^2,\ -2x_2)$ равен 0 в точке $x^* = (0, 0)$. Следовательно, метод Лагранжа в точке $(0, 0)$ неприменим, так как не выполнены условия теоремы о неявных функциях.

Задачи

1. Решить задачи условной оптимизации:

1) $f(x) = x_1x_2x_3 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;

2) $f(x) = x_1x_2x_3 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8\}$;

3) $f(x) = x_1x_2^2x_3^3 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\ x_3 > 0\}$ $(a > 0)$;

4) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;

5) $f(x) = x_2 \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0\}$;

6) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \longrightarrow \mathrm{extr}_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1\}$.

2. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до N данных точек $(x_i, y_i, z_i)^\top$, $i = \overline{1, N}$ была бы минимальна.

3. Данное положительное число a разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была бы наименьшей.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения каждой переменной, для которых выполняется равенство $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ $(a > 0)$.

5. Найти кратчайшее расстояние от точки $(x_{10}, x_{20}, x_{30})^\top$ до плоскости $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$.

2.3.3. Задачи с ограничениями–неравенствами

В этом разделе рассматривается задача $f(x) \longrightarrow \text{extr}_{x\in X}$, область допустимых значений которой определяется как $X = \{x \in E_n \mid \varphi_j(x) \le 0 \ (j = \overline{1,m})\}$.

Пусть функции $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1,m})$ определены, непрерывны и имеют непрерывные производные в E_n, а функция $f(x)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные производные на X. Если множество X ограничено (замкнутость следует из непрерывности функций φ_j), то по теореме Вейерштрасса в множестве X существуют точки, в которых целевая функция $f(x)$ достигает своих наименьшего и наибольшего значений. Если искомая точка является внутренней точкой множества X, то в ней функция имеет локальный максимум или минимум, так что интересующая нас точка содержится среди подозрительных точек, в которых производная равна нулю. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция $f(x)$ может достигать и на границе множества X. Поэтому, для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве X, нужно найти все подозрительные внутренние точки, вычислить значения целевой функции в них и сравнить со значениями функции в подозрительных граничных точках множества X. Заметим, что при поиске последних приходится рассматривать аналогичную задачу. Вообще говоря, необходимо решить $C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{\min(m,n)}$ задач с ограничениями–равенствами (используя метод исключения переменных или метод множителей Лагранжа). Каждая из них имеет вид $f(x) \longrightarrow \text{extr}_{x\in X_I}$ где $X_I = \{x \mid \varphi_j(x) = 0 \ (j \in I)\}$ для некоторого подмножества индексов $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. При $I = \emptyset$ имеем задачу безусловной оптимизации. Для поиска всех подозрительных точек нужно перебрать все подмножества I мощности не более n. Наибольшее и наименьшее из значений функции в найденных точках и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$.

К сожалению, число рассматриваемых подзадач может оказаться очень большим. Поэтому этот метод трудно применять в задачах большой размерности n с большим числом ограничений m. Однако для задач небольшой размерности такой подход применять целесообразно, поскольку не существует другого эффективного метода нахождения наименьших и наибольших значений целевой функции в задаче математического программирования.

Если область X не ограничена, то обязательно надо рассматривать поведение целевой функции при удалении точек множества в бесконечность. Эта задача в общем случае тоже сложная, но иногда её удаётся решить. При этом если удаётся обнаружить такую кривую $x_i = \psi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$, что $x(t) \in X$ при всех $t \ge 0$ и $f(x(t)) \to \pm\infty$ при $t \to +\infty$, то целевая функция неограничена сверху или снизу.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ на множестве $X = \{x \mid |x_1| + |x_2| \le 1\}$.

Решение. В данном примере множество X ограничено. Внутри множества X производные $f'_{x_1}(x) = 2x_1 - x_2$ и $f'_{x_2}(x) = -x_1 + 2x_2$ обращаются в нуль только в точке $(0,0)^\top$. Граница множества X определяется четырьмя ограничениями–равенствами: $x_1 + x_2 = 1$, $-x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 1$ и $-x_1 - x_2 = 1$. Так как функция $f(x)$ чётная, то достаточно рассмотреть только первые два из них. Применим метод исключения переменных. Вдоль прямой $x_1 + x_2 = 1$ имеем функцию одного переменного $\widetilde{f}(x_1) = f(x_1, 1 - x_1) = 3x_1^2 - 3x_1 + 1$, производная которой $\widetilde{f}'(x_1) = 6x_1 - 3$ обращается в нуль при $x_1 = 1/2$. Тогда $x_2 = 1/2$, и мы получили точку $(1/2, 1/2)^\top$. Аналогично, $f(x_1, 1 + x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$, и, приравняв нулю её производную, получим точку $(-1/2, 1/2)^\top$. Из чётности функции $f(x)$ следует, что точки $(-1/2, -1/2)^\top$ и $(1/2, -1/2)^\top$ также являются подозрительными.

Точками пересечения всех пар прямых, определяющих множество X, очевидно, будут точки $(0,1)^\top$, $(0,-1)^\top$, $(1,0)^\top$ и $(-1,0)^\top$. Все они принадлежат X.

Вычислим значения целевой функции в найденных точках. Имеем $f(0,0) = 0$, $f(1/2, 1/2) = f(-1/2, -1/2) = 1/4$, $f(-1/2, 1/2) = f(1/2, -1/2) = 3/4$, $f(1,0) = f(-1,0) = f(0,1) =$

$f(0,-1)=1$. Таким образом, наименьшее значение функция f достигает в начале координат, а наибольшее — в вершинах множества X.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x_1x_2^2+x_1^2x_2-3x_1^2-3x_2^2$ на множестве $X=\{x \mid -x_1-x_2+1\leq 0,\ x_1+x_2-16\leq 0\}$.

Решение. В данном примере множество X неограничено (можно записать ограничения задачи в виде $1\leq x_1+x_2\leq 16$ и убедиться, что X представляет собой полосу, заключённую между двумя прямыми).

Сначала рассмотрим задачу безусловной оптимизации функции $f(x)$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} f'_{x_1}=x_2^2+2x_1x_2-6x_1=0,\\ f'_{x_2}=2x_1x_2+x_1^2-6x_2=0. \end{cases} \tag{14}$$

Вычтя одно равенство из другого, получим, что $(x_2-x_1)(x_1+x_2+6)=0$, т. е. либо $x_1=x_2$, либо $x_1+x_2=-6$. Поскольку точки, удовлетворяющие второму равенству, множеству X не принадлежат, то $x_1=x_2$ и из системы (14) следует, что $3x_1^2-6x_1=0$. Получаем точки $x_1=x_2=0$ и $x_1=x_2=2$, из которых только вторая является допустимой.

Исследуем поведение функции на границе области X. Функция Лагранжа имеет вид $F(x,y)=f(x)+y(x_1+x_2-t)$, где $t=1$ или $t=16$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} F'_{x_1}=x_2^2+2x_1x_2-6x_1+y=0,\\ F'_{x_2}=2x_1x_2+x_1^2-6x_2+y=0. \end{cases}$$

Решая её аналогично системе (1), получаем, что $x_1=x_2$. Таким образом, при $t=1$ и $t=16$ имеем соответственно точки $(1/2,1/2)$ и $(8,8)$.

Поскольку прямые $x_1+x_2=1$ и $x_1+x_2=16$ не пересекаются, множество X не имеет вершин. Подставляя найденные значения в целевую функцию, получим $f(2,2)=-8$, $f(1/2,1/2)=-5/4$, $f(8,8)=640$.

Так как множество X неограничено, надо исследовать поведение функции $f(x)$ на бесконечности. Рассмотрим семейство прямых $x_1=t$, $x_2=s-t$, где $t\in E_1$ и $1\leq s\leq 16$. Ясно, что это семейство прямых покрывает всё множество X. Тогда $f(t,s-t)=-(s+6)t^2+(s^2+6s)t-3s^2$. Поскольку $-(s+6)<0$ при $1\leq s\leq 16$, то $f(t,s-t)\to-\infty$ при $t\to\infty$. Таким образом, целевая функция неограничена снизу на множестве X, а её максимум достигается в точке (8,8).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x_1x_2x_3$ на множестве $X=\{x\in E_3 \mid x_1+x_2+x_3\leq 6,\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\leq 8\}$.

Решение. Эта функция имеет много локальных экстремумов, которые можно найти после долгих и утомительных вычислений с помощью метода Лагранжа. Однако, если заметить, что множество X неограничено, и сразу проанализировать поведение целевой функции на бесконечности, можно существенно сократить свою работу.

Рассмотрим точки вида $x_1(t)=1$, $x_2(t)=1$, $x_3(t)=-t$. Тогда ограничения задачи примут вид $-t\leq 4$ и $-t\leq 7/2$. Следовательно, для любого $t\geq 0$ эти точки являются допустимыми. При этом $f(1,1,-t)=-t\to-\infty$ при $t\to+\infty$. Значит, целевая функция неограничена снизу на X.

Пусть теперь $x_1(t)=1$, $x_2(t)=-1$, $x_3(t)=-t$. Ограничения принимают вид $-t\leq 6$ и $-1\leq 8$, т. е. точки допустимы при $t\geq 0$. Но $f(1,-1,-t)=t\to+\infty$ при $t\to+\infty$.

Таким образом, целевая функция неограничена ни снизу, ни сверху на рассматриваемом множестве, и необходимости в поиске локальных экстремумов (подозрительных точек) нет.

Задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве X:

1) $f(x) = x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + x_1$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,1]\}$;

2) $f(x) = x_1^3 - 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$,
$X = \{x \mid |x_1| \leq 5,\ |x_2| \leq 1\}$;

3) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,2],\ x_2 \in [-1,2]\}$;

4) $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2$,
$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 \leq 12,\ x_1 + x_2 \leq 9,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$;

5) $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 10,\ 2x_1 + 2x_2 = 5\}$;

6) $f(x) = x_1(\pi - x_1)\sin x_2 + x_2 \cos x_1$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,\pi],\ x_2 \geq 0\}$;

7) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3,\ x_3 \leq 1\}$;

8) $f(x) = 2x_1x_2 + x_3$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq 2x_1 + 1\}$;

9) $f(x) = x_1^2 - x_2^2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 16\}$;

10) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 25\}$;

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x_1 - \ln x_2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 1\}$;

12) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$,
$X = \{x \mid x_1x_2x_3 \leq 1,\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0\}$;

13) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 2|$,
$X = E_2$;

14) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha|x_1 + x_2 - 1|,\ \alpha > 0$,
$X = E_2$;

15) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2\max\{x_1,\ x_2\}$,
$X = E_2$.

3. Выпуклое программирование

3.1. Выпуклые множества и функции; квазивыпуклые функции

Поиск наибольших и наименьших значений функции на допустимом множестве упрощается, если ограничиться задачей минимизации выпуклых функций на выпуклых множествах.

Множество $X \subset E_n$ называется *выпуклым* если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ имеем, что $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in X$, т. е. выпуклое множество вместе с любыми двумя своими точками должно содержать и отрезок, соединяющий эти две точки. *Выпуклой комбинацией* точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется точка $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$, где все $\alpha_i \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 1$.

Теорема 1. *Выпуклое множество X содержит выпуклые комбинации всех своих точек.*

При решении некоторых задач могут оказаться полезными так называемые *теоремы отделимости.*

Гиперплоскостью в E_n называется множество вида $P = \{x \mid \langle c, x\rangle = \lambda\}$, где c, λ — заданные величины, причём $c \neq 0$.

Теорема отделимости. *Для любого выпуклого и замкнутого множества X и любой точки x^0, не принадлежащей множеству X, существует такая гиперплоскость P, что $\langle c, x^0\rangle = \lambda$ и для всех $x \in X$ $\langle c, x\rangle < \lambda$.*

Теорема об опорной гиперплоскости. *В любой граничной точке x^0 выпуклого множества X существует опорная гиперплоскость, т.е. такая гиперплоскость P, что $\langle c, x^0\rangle = \lambda$ и для всех $x \in X$ $\langle c, x\rangle \leq \lambda$.*

Теорема о разделяющей гиперплоскости. *Если множество внутренних точек выпуклого множества X не пусто и не пересекается с выпуклым множеством Y, то для множеств X и Y существует разделяющая гиперплоскость, т.е. существует вектор $c \neq 0$ такой, что $\langle c, y\rangle \leq \langle c, x\rangle$ для всех $y \in Y$, $x \in X$.*

Функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. Если для любых различных x и y указанное неравенство является строгим, то функция называется *строго выпуклой*. Функция $f(x)$ называется (строго) *вогнутой*, если функция $-f(x)$ (строго) выпукла.

Выпуклые функции обладают следующими свойствами.

Теорема 2. *Выпуклая функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве X, непрерывна в каждой внутренней точке этого множества.*

Теорема 3. *Функция $f(x)$, дифференцируемая на выпуклом множестве X, выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ будет $\langle f'(x), y - x\rangle \leq f(y) - f(x)$.*

Теорема 4. *Функция $f(x)$, определённая и дважды непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве X, (строго) выпукла тогда и только тогда, когда матрица $B(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ (строго) положительно определена для любого $x \in X$.*

Теорема 5. *Для любой выпуклой функции $f(x)$, определённой на выпуклом множестве X, и любого числа λ множество $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ выпукло.*

Теорема 6 (неравенство Йенсена). *Если функция $f(x)$ выпукла на выпуклом множестве X, то*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i),$$

где $x_i \in X$, $\alpha_i \geq 0$ для $i = \overline{1,m}$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$.

Экстремальные свойства задачи минимизации выпуклой функции $f(x)$ на выпуклом множестве X содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 7. *Если выпуклы функция $f(x)$ и множество X, то любая точка локального минимума $x^* \in X$ будет оптимальной для задачи минимизации функции $f(x)$ на множестве X.*

Теорема 8. *Если выпуклы функция $f(x)$ и множество X, то множество X^* оптимальных точек задачи минимизации функции $f(x)$ на множестве X выпукло.*

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ строго выпукла на выпуклом множестве X и точка $x^* \in X$ оптимальна, то она единственна, т. е. для всех $x \in X$, $x \neq x^*$ справедливо неравенство $f(x) > f(x^*)$.*

Близкие экстремальные свойства имеет задача минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом множестве. Функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве X, называется *квазивыпуклой*, если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max(f(x), f(y))$. Если при любых $x \neq y$ указанное неравенство является строгим, то функция $f(x)$ называется *строго квазивыпуклой.*

Пример. Показать, что множество $X = \{x \in E_n \mid Ax \geq a,\ Bx = b\}$ выпукло. Здесь A и B — это вещественные матрицы размера $m \times n$ и $l \times n$ соответственно, $a \in E_m,\ b \in E_l$.

Решение. Возьмём две произвольные точки $x, y \in X$ и положим $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, где $\alpha \in [0,1]$. Тогда $Az = \alpha Ax + (1-\alpha)Ay \geq \alpha a + (1-\alpha)a = a$ и $Bz = \alpha Bx + (1-\alpha)By = \alpha b + (1-\alpha)b = b$. Значит точка z лежит в X, т. е. множество X выпукло.

Задачи

1. Показать, что следующие множества выпуклы:

1) $X = \{x \mid x = y - z,\ y \in Y, z \in Z\}$, где Y, Z — выпуклые множества;

2) $Y = \{y \mid y = Ax,\ x \geq 0\ \}$.

2. Пусть функции $f_j(x)$ $(j = \overline{1,m})$ выпуклы на E_n. Показать, что множество $X = \{x\ |f_j(x) \leq 0\ (i = \overline{1,m})\}$ выпукло.

3. Доказать, что любая выпуклая функция является квазивыпуклой. Привести пример, показывающий, что обратное, вообще говоря, не верно.

4. Пусть функции $f_j(x)$ $(j = \overline{1,m})$ выпуклы на выпуклом множестве X. Показать, что функция $f(x) = a_1 f_1(x) + \ldots + a_m f_m(x)$ выпукла на X если $a_j \geq 0$ $(j = \overline{1,m})$.

5. Пусть функции $f_i(x)$ $(i \in I)$ выпуклы на выпуклом множестве X. Показать, что функция $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ также выпукла на X.

6. Пусть B — симметрическая матрица размера $n \times n$, а $p \in E_n$. Показать, что функция $f(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle p, x\rangle$ (строго) выпукла тогда и только тогда, когда B (строго) положительно определена.

7. Пусть $f(t)$ выпуклая неубывающая функция на $[a,b]$ (возможно, $a = -\infty$ и/или $b = +\infty$). Пусть $g(x)$ выпукла на выпуклом множестве $X \subset E_n$, причём $g(x) \in [a,b]$ при всех $x \in X$. Доказать, что функция $h(x) = f(g(x))$ выпукла на X.

8. Пусть $f(x)$ выпукла и неотрицательна на некотором выпуклом множестве X. Доказать, что $g(x) = (f(x))^p$ выпукла для любого целого $p \geq 1$.

9. Пусть выпуклая дифференцируемая функция $f(x)$ в некоторой точке $x_1 \in E_n$ удовлетворяет соотношению $\langle f'(x_1), x - x_1\rangle \geq 0$ для любого $x \in E_n$. Доказать, что x_1 — точка глобального минимума функции $f(x)$.

10. Доказать, что выпуклая функция $f(x)$, определённая на выпуклом замкнутом множестве X и отличная от константы, достигает своего глобального максимума на границе множества X.

11. Показать, что для любой квазивыпуклой функции $f(x)$, определённой на выпуклом множестве X, и любого числа λ, множество $Z = \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ выпукло.

12. Показать, что если функции $f_j(x)$ $(j = \overline{1,m})$ квазивыпуклы, то множество $Z = \{x \in X \mid f_j(x) \leq 0\ (j = \overline{1,m})\}$ выпукло.

13. Доказать, что функция $f(x)$ квазивыпукла на выпуклом множестве X тогда и только тогда, когда множество $Z(x) = \{y \in X \mid f(y) \leq f(x)\}$ выпукло для каждого $x \in X$.

14. Доказать, что если $f(x)$ строго квазивыпукла на выпуклом множестве X и $x^* \in X$ является точкой её локального минимума, то x^* является единственной точкой глобального минимума функции $f(x)$ на множестве X.

15. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклая и вогнутая функции соответственно, определённые на выпуклом множестве X, причём для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$. Доказать, что существует линейная функция $h(x)$, такая что $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ для каждого $x \in X$.

16. При каких значениях параметра a множество X будет выпуклым:
а) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid a(x - y^2) = 0,\ x + y = 1\}$;
б) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid a(x - y^2) = 0,\ x + y = a\}$;
в) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid a(x - y^2) \leq 0,\ x + y = a\}$;
г) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid x^2(a^2 + 3a + 2) - y \geq 0\}$;
д) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid e^x(a^2 - 5a + 6) - y(a^2 + 2) \leq 0\}$;
е) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid y = e^{ax},\ y \leq x\}$;
ж) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid x^2/(a^2 + 1) + (y + a)^2 \leq 1,\ x^2 + (y - 1)^2 \leq a, \}$;
з) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid y \leq e^x,\ y \leq ax\}$;
и) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid x + y \geq 1,\ y \leq ax^2\}$;
к) $X = \{(x, y) \in E_2 \mid y \geq \ln x,\ y \geq ax,\ x > 0\}$?

17. Исследовать функцию $f(x)$ на выпуклость или вогнутость в области X:
а) $f(x) = x_1x_2,\ X = \{x \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$;
б) $f(x) = 1/x_1 + 1/x_2,\ X = \{x \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$;
в) $f(x) = x_2 - |x_1 - 2|,\ X = E_2$;
г) $f(x) = x_1^6 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 10x_1 + 5x_2 - 3x_4 - 20,\ X = E_4$;
д) $f(x) = e^{2x_1 + x_2},\ X = E_2$;
е) $f(x) = -x_2^5 + x_3^2/2 + 7x_1 - x_3 + 6,\ X = \{x \mid x_i \leq 0,\ i = 1, 2, 3\}$;
ж) $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_2 - 6,\ X = E_3$;
з) $f(x) = x_1^3 + 2x_3^2 + 10x_1 +_2 -5x_3 + 6,\ X = \{x \mid x_i \leq 0,\ i = 1, 2, 3\}$;
и) $f(x) = 5x_1^2 + x_2^2/2 + +4x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3 + 1,\ X = E_3$.

18. При каких значениях параметров $a,\ b,\ c$ функция $f(x)$ будет выпуклой:
а) $f(x) = ax^2 + bx + c$;
б) $f(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$;
в) $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$?

3.2. Критерий оптимальности; теорема Куна–Таккера

Данный раздел посвящён рассмотрению вопроса об оптимальности найденной точки в основной задаче выпуклого программирования.

Рассматривается задача

$$f(x) \longrightarrow \min_{x \in X}, \tag{1}$$

$$\text{где } X = \{x \mid \varphi_j(x) \leq 0\ (j = \overline{1, m})\}. \tag{2}$$

Если функции $f(x)$ и $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, m})$ выпуклы, то задача (1)–(2) называется *основной задачей выпуклого программирования.* Пусть задана некоторая точка $x^* \in X$. Ограничение $\varphi_j(x) \leq 0$ называется *активным* в этой точке, если $\varphi_j(x^*) = 0$. Множество индексов активных ограничений обозначим через

$$I(x^*) = \{j \in \{1, \ldots, m\} \mid \varphi_j(x^*) = 0\}.$$

Функция

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j \varphi_j(x),$$

определённая для всех $x \in E_n,\ y \geq 0$, называется *функцией Лагранжа* для задачи выпуклого программирования. Пара (x^*, y^*), где $x^* \in E_n,\ y^* \geq 0$, называется *седловой точкой* функции $F(x, y)$, если $F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*)$ для всех $x \in E_n,\ y \geq 0$. В дальнейшем будем считать, что функции $f(x)$ и $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, m})$ (и, следовательно, функция Лагранжа) непрерывно дифференцируемы.

Теорема 10. *Для того чтобы точка $x^* \in X$ была точкой глобального минимума основной задачи выпуклого программирования (1)–(2), достаточно существования таких чисел $y_j \geq 0$ $(j \in I(x^*))$, что выполняется равенство*

$$-f'(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j \varphi_j'(x^*).$$

Другими словами, если (x^*, y^*) — седловая точка функции Лагранжа, то x^* — это точка глобального минимума для задачи выпуклого программирования. Чтобы выполнялось обратное утверждение, необходимо наложить дополнительное условие на множество X. Если существует такая точка $x \in X$, что $\varphi_j(x) < 0$ для всех $j = \overline{1, m}$, то говорят, что это множество удовлетворяет *условию регулярности Слейтера.*

Теорема Куна–Таккера (дифференцируемый случай). *Если функции $f(x)$ и $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, m})$ выпуклы, а множество $X = \{x \mid \varphi_j(x) \leq 0\ (j = \overline{1, m})\}$ удовлетворяет условиям регулярности Слейтера, то для оптимальности точки $x^* \in X$ необходимо и достаточно существования таких чисел $y_j \geq 0$ $(j \in I(x^*))$, что*

$$-f'(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j \varphi_j'(x^*). \tag{3}$$

Как показывает следующая теорема, если все ограничения линейны, то условия регулярности Слейтера в теореме Куна–Таккера не обязательны.

Теорема 11. *Для того чтобы точка $x^* \in X$ была точкой глобального минимума выпуклой функции $f(x)$ на множестве $X = \{x \mid \langle a_j, x\rangle - b_j \leq 0\ (j = \overline{1, m})\}$, необходимо и достаточно существование таких чисел $y_j \geq 0$ $(j = \overline{1, m})$, что*

$$-f'(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j a_j.$$

В Приложении рассматривается метод возможных направлений, в котором используется следующая

Теорема 12. *Для того чтобы точка $x^* \in X$ была точкой глобального минимума задачи выпуклого программирования (1)–(2), достаточно, чтобы для всех векторов s, удовлетворяющих системе $\langle \varphi_j'(x^*), s\rangle \leq 0$ $(j \in I(x^*))$, выполнялось условие $\langle f'(x^*), s\rangle \geq 0$.*

Рассмотрим примеры применения приведённых выше теорем. Общая схема проверки оптимальности точки x^* для задачи (1)–(2) такова:

1. Убедиться, что решаемая задача действительно является задачей выпуклого программирования (т. е., что все функции выпуклы и задача на минимум).

2. Проверить, что X удовлетворяет условиям Слейтера (кроме случая линейных ограничений).

3. Проверить, что $x^* \in X$ и найти множество индексов активных ограничений $I(x^*)$.

4. Записать и решить систему (3). Точка x^* будет оптимальной в том и только в том случае, если система (3) имеет решение $y^* \geq 0$.

Пример 1. Проверить на оптимальность точки $x' = (0, 2)$ и $x'' = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ в задаче $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 - 4(\sqrt{5} - 2)x_1 - 5(2 - \sqrt{5})x_2 \longrightarrow \min$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\ x_1^2 - x_2 \leq 0,\ x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0$.

Решение. Функция $f(x)$ выпукла, поскольку матрица

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

строго положительно определена. Выпуклость функций $\varphi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4,\ \varphi_2(x) = x_1^2 - x_2,\ \varphi_3(x) = -x_1 - x_2 + 1$ и $\varphi_4(x) = -x_1$ также нетрудно проверить.

Поскольку в точке $x = (0.5, 1)$ выполняются неравенства $\varphi_j(x) < 0$ для всех $j = 1, 2, 3, 4$, то множество $X = \{x \mid \varphi_j(x) \le 0,\ j = 1, 2, 3, 4\}$ удовлетворяет условию Слейтера.

Подставляя точки x' и x'' последовательно в каждое из ограничений, убеждаемся, что обе эти точки лежат в X и находим множества индексов активных ограничений: $I(x') = \{1, 4\},\ I(x'') = \{2, 3\}$.

Система (3) для точки x' имеет вид $-f'(x') = y_1\varphi_1'(x') + y_4\varphi_4'(x')$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{5} - 4 \\ -5\sqrt{5} - 6 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, $y_1 = (-5\sqrt{5} - 6)/4,\ y_4 = 4 - 4\sqrt{5}$. Поскольку это решение не является неотрицательным, точка x' не оптимальна.

Система (3) для точки x'' имеет вид $-f'(x'') = y_2\varphi_2'(x'') + y_3\varphi_3'(x'')$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} - 3 \\ -3 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Единственным решением этой системы является $y_2 = 1,\ y_3 = 2$. Поскольку это решение неотрицательно, точка x'' является точкой глобального минимума функции $f(x)$ на множестве X.

Пример 2. Проверить точку $x = (-1/2, 1/4)$ на оптимальность в задаче $f(x) = e^{x_2} \longrightarrow \min$ при ограничениях $\varphi_1(x) \equiv (x_1 + 1)^2 - x_2 \le 0,\ \varphi_2(x) \equiv (x_1 - 1/2)^2 + (x_2 + 3/4)^2 - 2 \le 0$.

Решение. Нетрудно убедиться, что данная задача является задачей выпуклого программирования. Поскольку $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$, точка x является допустимой и $I(x) = \{1, 2\}$. Система (3) для этой точки имеет вид $-f'(x) = y_1\varphi_1'(x) + y_2\varphi_2'(x)$, т. е. $y_1 - 2y_2 = 0,\ -y_1 + 2y_2 = -e^{1/4}$. Очевидно, что эта система несовместна. Однако делать вывод о неоптимальности точки x мы не можем, поскольку не были проверены условия Слейтера. И действительно, с помощью геометрического построения области допустимых значений можно убедиться, что она состоит из единственной точки x. Следовательно, условие Слейтера не выполнено, а точка x является оптимальным решением (как единственная допустимая точка).

Пример 3. Проверить точки $x' = (-3, 1, 2)$ и $x'' = (-5, 3, 1)$ на оптимальность в задаче $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 30x_1 - 16x_3 \longrightarrow \min$ при ограничениях $5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -20,\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 \le 0,\ x_3 \ge 0$.

Решение. Целевая функция задачи выпукла, а ограничения линейны. Следовательно, имеем задачу выпуклого программирования, причём проверка условий регулярности Слейтера не требуется (заметим, кстати, что ввиду наличия ограничения–равенства условие Слейтера очевидно не выполняется).

Прежде всего, запишем ограничения задачи в стандартной форме, заменив ограничение–равенство на два неравенства. Имеем $\varphi_1(x) \equiv 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 20 \le 0,\ \varphi_2 = -\varphi_1(x) \equiv -5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 20 \le 0,\ \varphi_3 \equiv x_1 - 6x_2 + 3x_3 \le 0,\ \varphi_4(x) \equiv -x_3 \le 0$.

Легко проверить, что $I(x^1) = I(x^2) = \{1, 2\}$. Значит, система (3) для обеих точек имеет вид $-f'(x) = y_1\varphi_1'(x) + y_2\varphi_2'(x) = (y_1 - y_2)\varphi_1'(x)$. Мы использовали условие $\varphi_2(x) \equiv -\varphi_1(x)$, которое всегда выполняется при замене ограничений–равенств на два неравенства. Поскольку разность двух неотрицательных чисел может принимать значения любого знака, а любое число можно представить в виде разности двух неотрицательных чисел, то, осуществив замену $y = y_1 - y_2$, приходим к выводу, что для оптимальности точки $x^* \in X$ в случае линейных ограничений необходимо и достаточно существования таких чисел $y_j \geq 0$, соответствующих ограничениям–неравенствам, и произвольных чисел y_j, соответствующих ограничениям–равенствам, что

$$-f'(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j \varphi_j'(x^*).$$

Заметим, что ограничения–равенства всегда являются активными ограничениями.

В рассматриваемом примере для точки x' получим систему $-24 = 5y,\ -4 = 3y,\ 16 = -4y$, которая, очевидно, несовместна. Значит, точка x' не оптимальна.

Для точки x'' система принимает вид $-20 = 5y,\ -12 = 3y,\ 16 = -4y$, решением которой является $y = -4$. Поскольку множитель y соответствует ограничению–равенству, для него нет ограничения по знаку. Следовательно, точка x'' оптимальна.

Задачи

Проверить указанные точки на оптимальность в задачах выпуклого программирования:

1) $f(x) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 - 6 \longrightarrow \max_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_1 - 3 \leq 0,\ 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0,\ x_2 \geq 0\}$,
$x^1 = (1, 1),\ x^2 = (2, 1),\ x^3 = (1/4, 0),\ x^4 = (0, 0)$;

2) $f(x) = x_1^2 + 3x_1 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 + 16 \leq 0,\ x_1 - x_2 \leq 5\}$,
$x^1 = (1, -4),\ x^2 = (0, -4),\ x^3 = (2, -4)$;

3) $f(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - x_2 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 - 3x_2 \leq 4,\ -2x_1 + x_2 \leq -3\}$,
$x^1 = (5/2, -1/2),\ x^2 = (1, -1),\ x^3 = (2, 0)$;

4) $f(x) = x_1^2/2 + x_2^2 - 5x_1 + x_2 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3,\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -11,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$,
$x^1 = (1, 0, 2),\ x^2 = (0, 0, -1),\ x^3 = (1, 3, 0),\ x^4 = (2, 1, 1),\ x^5 = (5, 0, 1)$;

5) $f(x) = e^{x_1 + x_2} + x_1^2 - 2x_2 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_2 \leq \ln x_1,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0\}$,
$x^1 = (2, \ln 2),\ x^2 = (e, 0),\ x^3 = (1, 0)$;

6) $f(x) = e^{x_1 + x_2} + x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 18,\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \leq 0\}$,
$x^1 = (-3, 3, 0),\ x^2 = (1, -1, 4),\ x^3 = (-3, -3, 0),\ x^4 = (0, 0, 3)$;

7) $f(x) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + x_1 \longrightarrow \max_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 - x_2 + x_3 \leq 5,\ x_1 + 5x_2 \leq 8,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$,
$x^1 = (0, 0, 0),\ x^2 = (1, 0, 4),\ x^3 = (3/14, 1/7, 0),\ x^4 = (4, 0, -11)$;

8) $f(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 26 \longrightarrow \max_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 \leq 25,\ x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0,\ x_2 \geq 0\}$,
$x^1 = (0,0),\ x^2 = (-1,2),\ x^3 = (0,-6),\ x^4 = (3,0)$;

9) $f(x) = 10x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 + 2x_2 - 10 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid 2x_1^2 + x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \leq 8,\ x_1 \geq 0\}$,
$x^1 = (0,0),\ x^2 = (1,1),\ x^3 = (0,-1)$;

10) $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - x_1 + 6x_2 - 5 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid -x_1^2 - x_2^2 \geq -3,\ 3x_1^2 + x_2 \leq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$,
$x^1 = (0,0),\ x^2 = (5,0),\ x^3 = (1,-1),\ x^4 = (1,1)$;

11) $f(x) = x_1^2 + 5/2x_2^2 - x_1x_2 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 - 4x_1 - x_2 \leq -5,\ -x_1^2 + 6x_1 - x_2 \geq 7\}$,
$x^1 = (2,1),\ x^2 = (3,2)$;

12) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 = 5, x_1 + x_2 - x_3 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1\}$;
$x^1 = (1,2,0), x^2 = (1,2,1), x^3 = (3,1,1), x^4 = (0,0,1)$;

13) $e_1^x - 4x_2 + 2x_3^2 \longrightarrow \min_X$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_3^2 \leq 4, -x_1 + x_3^2/4 \leq -2, x_2 \leq 8\}$;
$x^1 = (0,0,1), x^2 = (2,0,0), x^3 = (2,8,0)$.

4. Линейное программирование

4.1. Различные формы задачи линейного программирования

Введём обозначения $I = \{1,\ldots,m\}$, $J = \{1,\ldots,n\}$, I_1, $I_2 \subset I$, $J_1 \subset J$, $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Пусть заданы вещественные числа c_j, b_i, a_{ij} $(i \in I,\ j \in J)$.

Требуется найти минимум по x функции

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$a_i x - b_i \geq 0,\ i \in I_1; \tag{2}$$

$$a_i x - b_i = 0,\ i \in I_2; \tag{3}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J_1. \tag{4}$$

Здесь $a_i = (a_{i1},\ldots,a_{in})$ — i-я строка матрицы ограничений A, $i \in I$ и $x = (x_1,\ldots,x_n)^\top$ — вектор переменных задачи.

Задача (1)–(4) называется *задачей линейного программирования, заданной в общей форме*.

Наряду с общей формой используются также *каноническая* и *стандартная* формы. Как в канонической, так и в стандартной форме все переменные в любом допустимом решении должны принимать неотрицательные значения, т. е. $J_1 = J$. Такие переменные называются *неотрицательными* в отличие от так называемых *свободных* переменных, на которые подобное ограничение не накладывается. При этом в канонической форме задачи $I_1 = \emptyset$, а в стандартной $I_2 = \emptyset$.

Используя матричную запись, задачу линейного программирования в канонической форме можно представить следующим образом:

$$w(x) = cx \to \min, \tag{5}$$

$$Ax = b, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор–строка, x и $b = (b_1, \ldots, b_m)^\top$ — вектор–столбцы, а $A = (a_{ij})$ — матрица размерности $m \times n$.

Задача линейного программирования в стандартной форме тогда запишется так:

$$w(x) = cx \to \min,$$

$$Ax \geq b,$$

$$x \geq 0.$$

Задача ЛП в общей форме сводится к задаче ЛП в канонической или стандартной форме. Под этим понимается существование общего способа построения по исходной задаче, заданной в общей форме, новой задачи ЛП в нужной нам форме, любое оптимальное решение которой преобразуется в оптимальное решение исходной задачи и наоборот. Тем самым, не теряя общности, можно заниматься изучением задачи ЛП, представленной, например, в канонической форме.

Рассмотрим на простых примерах несколько методов, позволяющих сделать такое преобразование задачи. Прежде всего, несколько общих замечаний:

1. Любая задача, в которой требуется найти максимум целевой функции, сводится к задаче на минимум умножением целевой функции на -1.

2. Любое ограничение–неравенство вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

умножением на -1 приводится к неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \geq b'_i,$$

где $a'_{ij} = -\,a_{ij}, b'_i = -\,b_i$.

3. Любое ограничение–неравенство вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

сводится к равенству введением новой неотрицательной переменной. Для этого достаточно положить

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \geq 0.$$

Тогда получаем ограничение–равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i,$$

при этом, очевидно, исходное неравенство принимает вид $y_i \geq 0$.

4. Любое ограничение–равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

можно представить в виде двух неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i.$$

5. Любая свободная переменная x_j может быть представлена разностью двух неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2, \text{ где } x_j^1 \geq 0, \, x_j^2 \geq 0.$$

Пример 1. Привести к канонической форме (5)–(7) задачу

$$x_1 + x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 - x_2 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0.$$

Решение. Сводим исходную задачу к задаче на минимум, умножив целевую функцию на -1. Получим

$$w(x) = -x_1 - x_2.$$

Запишем ограничения–неравенства в виде равенств, введя новые неотрицательные переменные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0:$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 0.$$

Заменим свободную переменную x_2 разностью двух неотрицательных переменных $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0:$

$$x_2 = x_5 - x_6.$$

После этих преобразований исходная задача запишется в канонической форме:

$$-x_1 - x_5 + x_6 \to \min,$$

$$2x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = 1,$$

$$x_1 + x_4 - x_5 + x_6 = 0,$$

$$x_i \geq 0 \, (i = 1, 3, 4, 5, 6).$$

Пример 2. Привести к стандартной форме записи задачу

$$w(x) = 2x_1 - x_2 \to \min,$$

$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$2x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Решение. Заменим свободную переменную x_1 разностью двух неотрицательных переменных $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$:
$$x_1 = x_3 - x_4.$$
Запишем ограничение–равенство в виде двух неравенств:
$$2x_1 + x_2 \le 2,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 2.$$
После этого исходная задача может быть записана в стандартной форме:
$$-x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min,$$
$$-x_2 + x_3 - x_4 \le 1,$$
$$x_2 + 2x_3 - 2x_4 \le 2,$$
$$-x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le -2,$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Задачи

1. Привести к канонической форме:

1) $x_1 - x_2 + x_3 \longrightarrow \max,$
$x_1 - x_2 = 0,\ x_2 \le 1,\ x_3 \ge 0;$

2) $x_1 + x_2 + 3x_3 \longrightarrow \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\ x_2 + x_3 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

3) $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow \min,$
$x_1 + x_2 - x_4 \le 1,\ -x_1 + x_2 + x_4 \le 1,\ x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

4) $x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \longrightarrow \min,$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ -x_1 - x_4 \le 5,\ x_2 + x_3 \ge 10,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

5) $x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_3 + x_4 = 1.$

2. Задача ЛП в стандартной форме
$$cx \to \min,$$
$$Ax \ge b,$$
$$x \ge 0$$

приводится к канонической форме путем введения неотрицательных переменных $y = (y_1, \dots, y_m)^\top$. Получается задача

$$cx \to \min,$$

$$Ax - Ey = b,$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

(здесь E — единичная матрица размера $m \times m$). Доказать, что если $(\overline{x}, \overline{y})$ — решение последней задачи, то $\overline{x}$ — решение исходной задачи.

3. Задача ЛП в общей форме

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i \in I_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in I_2,$$

$$x_j \geq 0, j \in J_1.$$

приводится к канонической форме путем добавления неотрицательных переменных $y_i (i \in I_1)$ и замены переменных $x_j (j \in J \setminus J_1)$ разностью двух неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2, j \in J \setminus J_1.$$

Полученную задачу можно записать в виде

$$\sum_{j \in J_1} c_j x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} c_j (x_j^1 - x_j^2) \to \min,$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} a_{ij} (x_j^1 - x_j^2) - y_i = b_i, i \in I_1,$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} a_{ij} (x_j^1 - x_j^2) = b_i, i \in I_2,$$

$$x_j \geq 0, j \in J_1, x_j^1 \geq 0, x_j^2 \geq 0, j \in J \setminus J_1,$$

$$y_i \geq 0, i \in I_1.$$

Доказать, что если $x_j (j \in J_1), x_j^1, x_j^2 (j \in J \setminus J_1)$, $y_i (i \in I_1)$ — решение последней задачи, то $x_j (j \in J_1), x_j = x_j^1 - x_j^2 (j \in J \setminus J_1)$ — решение исходной задачи.

4.2. Базис и базисное решение

Далее рассматривается только задача ЛП в канонической форме (5)–(7). Предположим, что матрица A имеет ранг m ($m \leq n$). Тогда в A имеется m линейно независимых столбцов. Система линейных уравнений (6) совместна и неизбыточна. Пусть $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top, j \in J$.

Определение. Любой набор $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов называется *базисом*, как и матрица $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$, составленная из этих столбцов.

Перестановкой столбцов матрицу A можно привести к виду $A = [B, N]$, где N–подматрица, составленная из остальных столбцов матрицы A. Поступив аналогичным образом с вектором x, получим представление $x = \binom{x_B}{x_N}$, где $x_B = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})^\top$.

Определение. Переменные x_j, являющиеся компонентами вектора x_B (соответственно x_N), называются *базисными* (соответственно *небазисными*).

Определение. Решение системы (6) $x = \binom{x_B}{x_N} = \binom{B^{-1}b}{0}$ называют *базисным* решением (соответствующим базису B).

Утверждение 1. Вектор x — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов $\{A_j \mid x_j \neq 0, j \in J\}$ матрицы A линейно независимо.

Число базисных решений конечно и не превосходит числа C_n^m. Каждому базису соответствует одно базисное решение, но базисному решению может соответствовать несколько базисов.

Определение. *Базисным допустимым решением* (б. д. р.) называется любой элемент множества $X = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, являющийся базисным решением системы $Ax = b$.

Ясно, что решение, соответствующее базису B, является б. д. р. тогда и только тогда, когда $B^{-1}b \geq 0$.

Утверждение 2. Вектор x является базисным допустимым решением тогда и только тогда, когда x есть крайняя точка множества X.

Утверждение 3. Если $X \neq \emptyset$, то существует базисное допустимое решение.

Теорема 1 (критерий разрешимости). *Задача* (5)–(7) *разрешима тогда и только тогда, когда $X \neq \emptyset$ и целевая функция $w(x)$ ограничена снизу на множестве X.*

Утверждение 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное допустимое решение.

Пример 1. Найти все базисы системы равенств и соответствующие им базисные решения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Рассмотрим множество столбцов $\{A_1, A_2\}$ (отметим, что здесь $m = 2$). Они линейно независимы. Значит, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — базис. Набор столбцов $\{A_1, A_3\}$ базисом не является, так как очевидно, что эти столбцы линейно зависимы. Аналогично устанавливаем, что $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{A_3, A_4\}$ — базисы, а $\{A_2, A_4\}$ — не базис. Так как в данном примере $C_4^2 = 6$, то рассмотрены все случаи.

Таким образом, $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{A_3, A_4\}$ — все базисы данной системы равенств.

Найдем теперь все базисные решения. Согласно введённым выше обозначениям система (6) при выбранном базисе B может быть записана в таком виде:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Откуда, в силу существования обратной матрицы B^{-1}, получаем, что

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Положив, что небазисные переменные x_N равны нулю, получим базисное решение $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$.

Очевидно, что базисное решение $\binom{x_B}{x_N}$ можно найти, положив в (6) $x_N = 0$, а затем разрешив получившуюся систему уравнений относительно x_B любым удобным способом. Если $B = (A_1, A_2)$, то $x_B = \binom{1}{0}$. Значит, $x = (1, 0, 0, 0)^\top$ — базисное решение.

Последовательно находим, что вектор $x = (1,0,0,0)^\top$ соответствует базису $\{A_1, A_4\}$, а вектор $x = (0,0,1,0)^\top$ — базисам $\{A_2, A_3\}$ и $\{A_3, A_4\}$.

Таким образом, рассматриваемая система имеет четыре базиса, но только два базисных решения, каждому из которых можно поставить в соответствие по два базиса. Отметим, что для всех базисных решений выполнено условие $x \geq 0$, т. е. это базисные допустимые решения.

Пример 2. Найти все базисы системы равенств и соответствующие им базисные допустимые решения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0 \ j = 1,2,3,4.$$

Решение. Нетрудно установить, что базисами являются $B^1 = (A_1, A_2)$, $B^2 = (A_1, A_4)$, $B^3 = (A_2, A_3)$, $B^4 = (A_2, A_4)$ и $B^5 = (A_3, A_4)$. Им соответствуют базисные решения $x^1 = (2,1,0,0)^\top$, $x^2 = (5,0,0,-2)^\top$, $x^3 = (0,1,2,0)^\top$ $x^4 = (0,5/3,0,4/3)^\top$, $x^5 = (0,0,5,-2)^\top$. Базисными допустимыми решениями являются x^1, x^3, x^4. Среди них и нужно искать оптимальное, если задать целевую функцию.

Пример 3. Какие базисы соответствуют базисному решению $\overline{x} = (a,b,0)^\top$ системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b,$$

$$x_1 - 2x_2 = a - 2b,$$

$$x_j \geq 0, j \in J = \{1,2,3\}, (a \geq 0, b \geq 0)?$$

Решение. Если $a > 0,\ b > 0$, то базисом может быть только матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Если $a > 0, b = 0$, то $\{A_j \mid \overline{x}_j > 0\} = \{A_1\}$ и первый столбец может быть дополнен до базиса двумя способами, приводящими к базисам, соответствующих решению $\overline{x} = (a,0,0)^\top$, где $a > 0:$

$$B^1 = (A_1, A_2) \text{ и } B^2 = (A_1, A_3).$$

Заметим, что все столбцы матрицы A попарно линейно независимы. В случае $a = 0, b > 0$ аналогично получаем, что если $\overline{x} = (0,b,0)^\top$, где $b > 0$, то

$$B^1 = (A_1, A_2) \text{ и } B^2 = (A_2, A_3).$$

И наконец, если $a = b = 0$, т. е. $\overline{x} = (0,0,0)^\top$, то имеем три базиса, которым соответствует это решение:

$$B^1 = (A_1, A_2),\ B^2 = (A_1, A_3) \text{ и } B^3 = (A_2, A_3).$$

Пример 4. Найти решение задачи

$$-3x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_j \geq 0 \, (j = 1,2,3).$$

Решение. Нетрудно заметить, что множество $\{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_j \geq 0, j = 1,2,3\}$ ограниченно и содержит в себе допустимое множество. Следовательно, рассматриваемая задача разрешима. При этом ранг матрицы A равен двум.

В силу существования оптимального базисного допустимого решения, найдем его, перебрав все базисные решения.

Имеем базисы $B^1 = (A_1, A_2)$ и $B^2 = (A_2, A_3)$, которым соответствуют базисные решения $x^1 = (1,0,0)^\top$ и $x^2 = (0,0,1)^\top$. Эти решения допустимы. Так как $w(x^1) = -3$, а $w(x^2) = -1$, то оптимальным является решение $x^* = x^1$.

Задачи

1. Найти все базисы заданного базисного допустимого решения $\overline{x}$ системы ограничений:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
   $\overline{x} = (0,0,0)^\top;$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
   $\overline{x} = (1,0,0,0)^\top.$

2. В данной системе ограничений выразить базисные переменные указанного базисного допустимого решения $\overline{x}$ через небазисные:

1) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3,\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
   $\overline{x} = (1,2,0)^\top;$

2) $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,\ 10x_1 + x_2 - 4x_3 = -3,$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
   $\overline{x} = (0,1,1)^\top;$

3) $x_1 - x_2 - 2x_4 = 1,\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2,$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
   $\overline{x} = (1,0,0,0)^\top;$

4) $x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 3,\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0,\ x_1 + 2x_4 = 1,$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
   $\overline{x} = (1,1,1,0)^\top.$

4.3. Симплекс–таблица и критерий оптимальности. Элементарное преобразование базиса

Пусть выбран базис $B = (A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)})$, по которому построена эквивалентная система ограничений–равенств

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b.$$

Представив вектор c в виде $c = (c_B, c_N)$, где $c_B = (c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(m)})$ соответствует базисным, а c_N — небазисным переменным, получим, что

$$w = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N)x_N.$$

Таким образом, получаем систему равенств

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00},$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0},\ i = 1, \ldots, m,$$

где

$$S' = J \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}, z_{00} = -c_B B^{-1} b,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Коэффициенты z_{ij} $(i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n})$ и составляют так называемую симплекс–таблицу, которая используется в рассматриваемом далее методе решения:

		x_1	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n
$-w$	z_{00}	z_{01}	$\ldots$	z_{0j}	$\ldots$	z_{0n}
$x_{\sigma(1)}$	z_{10}	z_{11}	$\ldots$	z_{1j}	$\ldots$	z_{1n}
.	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{\sigma(i)}$	z_{i0}	z_{i1}	$\ldots$	z_{ij}	$\ldots$	z_{in}
.	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{\sigma(m)}$	z_{m0}	z_{m1}	$\ldots$	z_{mj}	$\ldots$	z_{mn}

Особенностью таблицы является следующее свойство: при любом $i = 1, \ldots, m$ столбец с номером $\sigma(i)$ имеет 1 в i-й строке и 0 в остальных строках (единичный вектор). Кроме того, $z_{0\sigma(i)} = 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Перестановкой столбцов и строк и соответствующей перенумерацией переменных симплекс–таблицу можно привести к виду

		x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_n
$-w$	z_{00}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	z_{0m+1}	$\ldots$	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	z_{1m+1}	$\ldots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i0}	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	z_{im+1}	$\ldots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m0}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	z_{mm+1}	$\ldots$	z_{mn}

Здесь $\sigma(i) = i$ $(i = \overline{1, m})$. Базисное решение, соответствующее базису B, имеет вид $\overline{x}_B = (z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{m0})^\top$, $\overline{x}_N = 0$, а целевая функция w на данном решении принимает значение $w(\overline{x}) = -z_{00}$.

Определение. Симплекс–таблица называется *прямо допустимой*, если $z_{i0} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$,. Базис B, которому эта таблица соответствует, также называется прямо допустимым.

Определение. Симплекс–таблица называется *двойственно допустимой*, если $z_{0j} \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Базис B, которому эта таблица соответствует, также называется двойственно допустимым.

Утверждение 5. Если задача линейного программирования (5)–(7) разрешима, то у нее существует прямо и двойственно допустимый базис.

Утверждение 6 (достаточное условие оптимальности). Если симплекс–таблица прямо и двойственно допустима, то соответствующее базисное решение является оптимальным решением задачи (5)–(7).

Из прямой допустимости сиплекс–таблицы следует, что базисное решение $\overline{x}$ является допустимым решением.

Таким образом, при поиске оптимального решения задачи (5)–(7) можно ограничиться рассмотрением базисных допустимых решений. Достаточно найти базис, которому соответствует прямо и двойственно допустимая симплекс–таблица.

Определение. Преобразование симплекс–таблицы, при котором происходит замена одного из базисных столбцов на другой столбец матрицы A из числа небазисных, называется *элементарным преобразованием базиса.*

Пусть в базисе $B = [A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$ столбец $A_{\sigma(r)}$ заменяется на столбец A_s, $s \in J \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}$. Если элемент z_{rs} не равен 0, где $r \geq 1$, то в результате получим новый базис $[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(r-1)},\ A_s, A_{\sigma(r+1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$. Этому базису будет соответствовать симплекс–таблица, в которой вектор–строки $\alpha_i = (z_{i0}, z_{i1}, \ldots, z_{in})$ $(i = \overline{0,m})$ преобразуются в вектор–строки $\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})$ $(i = \overline{0,m})$ по следующему правилу:

$$\begin{cases} \alpha'_i &= \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r,\ i \neq r, \\ \alpha'_r &= \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r. \end{cases}$$

При этом r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются *ведущими.*

Элементы симплекс–таблицы при этом, очевидно, принимают вид

$$\begin{cases} z'_{ij} &= z_{ij} - \dfrac{z_{is}z_{rj}}{z_{rs}},\ i \neq r, \\ z'_{rj} &= \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Утверждение 7. Если в прямо допустимой симплекс–таблице существует $j = s$ $(s \in J)$, для которого $z_{0s} < 0$ и $z_{is} \leq 0$ $(i = \overline{1,m})$, то целевая функция $w(x)$ не ограничена снизу на X.

Определение. Базис B и соответствующее ему базисное решение $\overline{x}$ называются *вырожденными*, если существует $i \in I$ такое, что $z_{i0} = 0$.

Утверждение 8. Пусть базисное допустимое решение $\overline{x}$ не вырождено, $z_{0s} < 0$ $(s \in J)$ и существует $r \in I$ такое, что $z_{rs} > 0$. Тогда существует базисное допустимое решение $\overline{x}'$, для которого $w(\overline{x}') < w(\overline{x})$.

Пример 1. Исследовать на оптимальность решение $\overline{x} = (0, 0, 1, 1)^\top$ задачи

$$w(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Множество столбцов $\{A_j \mid x_j > 0\} = \{A_3, A_4\} = \{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \}$ матрицы A линейно независимо. Так как матрица B единичная, то для построения симплекс–таблицы, соответствующей этому базису, достаточно исключить базисные переменные x_3 и x_4 из целевой функции. Получим

$$w = x_1 + x_2 - 2(1 - 2x_1 + x_2) - 3(1 + x_1 - 2x_2) = -5 + 2x_1 + 5x_2.$$

Следовательно, равенства принимают вид

$$-w + 2x_1 + 5x_2 = 5,$$

$$x_3 + 2x_1 - x_2 = 1,$$

$$x_4 - x_1 + 2x_2 = 1.$$

И симплекс–таблица может быть представлена так:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	5	2	5	0	0
x_3	1	2	-1	1	0
x_4	1	-1	2	0	1

Так как таблица является прямо ($z_{10} = 1, z_{20} = 1$) и двойственно ($z_{01} = 2, z_{02} = 5, z_{03} = 0, z_{04} = 0$) допустимой, то базисное допустимое решение $\overline{x}$— оптимальное решение. Заметим, что здесь $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$.

Пример 2. Исследовать на оптимальность решение $\overline{x} = (0, 1, 0, 2, 1)^\top$ задачи

$$w(x) = -x_1 - x_2 \to \min,$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 0,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 3,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение. В этом примере столбцы $(A_2, A_4, A_5) = ((1, -2, 2)^\top, (0, 1, 0)^\top, (0, 0, 1)^\top)$ линейно независимы. Следовательно, $\overline{x}$ — базисное допустимое решение с базисными переменными $x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 1$. Построим соответствующую решению $\overline{x}$ симплекс–таблицу. Небазисные переменные здесь x_1 и x_3. Следовательно, из первого ограничения–равенства сразу получаем

$$x_2 = 1 + x_1 - x_3.$$

Подставив x_2, выраженное через небазисные переменные, во второе и третье ограничения–равенства, придем к соотношениям

$$-x_1 + x_3 + x_2 = 1,$$

$$-x_1 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_1 - 2x_3 + x_5 = 1.$$

Осталось исключить базисные переменные из целевой функции:

$$w(x) = -x_1 - x_2 = -x_1 - (1 + x_1 - x_3) = -1 - 2x_1 + x_3.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$-w - 2x_1 + x_3 = 1.$$

Симплекс–таблица принимает вид

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	1	-2	0	1	0	0
x_2	1	-1	1	1	0	0
x_4	2	-1	0	2	1	0
x_5	1	1	0	-2	0	1

Базис не является вырожденным, так как вектор $(z_{10}, z_{20}, z_{30})^\top = (1, 2, 1)^\top$ не содержит нулевых элементов. Таблица прямо допустима, но не является двойственно допустимой:

$z_{01} = -2 < 0$. И так как $z_{31} = 1 > 0$, то согласно утверждению 8 существует базисное допустимое решение, которое дает меньшее значение целевой функции, чем $w(\overline{x}) = -z_{00} = -1$. Действительно, так как $z_{31} \neq 0$, то можно преобразовать базис, выведя из него столбец A_5 и заменив его на столбец A_1, т. е. получить базис (A_1, A_2, A_4).

Согласно формулам элементарного преобразования базиса, получим таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	3	0	0	-3	0	2
x_2	2	0	1	-1	0	1
x_4	3	0	0	0	1	1
x_1	1	1	0	-2	0	1

с меньшим значением целевой функции $w(\overline{x}') = -z'_{00} = -3$, где $\overline{x}' = (1, 2, 0, 3, 0)^\top$. Так как $z'_{03} = -3 < 0$ и в третьем столбце $(j = 3)$ нет положительных элементов, то из утверждения 7 следует неограниченность снизу целевой функции $w(x)$ на рассматриваемом множестве X.

Задачи

1. Исследовать на оптимальность решение $\overline{x}$:

1) $x_1 - 2x_2 - 2x_3 \longrightarrow \min,$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$

$\overline{x} = (1, 1, 0)^\top;$

2) $x_1 - 2x_2 - 4x_3 \longrightarrow \min,$

$x_1 - x_2 - x_3 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$

$\overline{x} = (2, 1, 0)^\top.$

2. Найти базисное допустимое решение, с меньшим значением целевой функции чем на решении $\overline{x}$:

1) $-x_1 - x_2 - 2x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_3 + x_4 = 4,\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

$\overline{x} = (2, 0, 0, 2)^\top;$

2) $-x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7,\ x_2 + x_3 + x_4 = 5,\ x_3 - x_4 = 3,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

$\overline{x} = (2, 2, 3, 0)^\top;$

3) $-x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 - x_4 = 3,\ x_1 - x_2 + 3x_4 = -1,\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

$\overline{x} = (1, 2, 1, 0)^\top.$

4.4 Прямой симплекс–метод

Пусть $\overline{x}$ — некоторое базисное допустимое решение задачи (5)–(7), соответствующее базису B. В результате исследования симплекс–таблицы с базисом B выявляется:

1) либо оптимальность решения $\overline{x}$;

2) либо неразрешимость задачи;

3) либо возможность перехода к новому базису.

Последовательное продвижение по базисам допустимых базисных решений вплоть до получения оптимального базиса или установления неразрешимости задачи составляет идею симплекс–метода.

Описание алгоритма:

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1,m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{os} < 0,\ s \geq 1$.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\ \frac{z_{i0}}{z_{is}}\ \mid\ z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Под итерацией понимается однократное выполнение шагов с 1-го по 4-й.

Утверждение 9. На каждой итерации алгоритма симплекс – таблица остается прямо допустимой.

Определение. Задача линейного программирования называется *вырожденной*, если у нее существует вырожденное базисное допустимое решение x, т. е. такое решение x, что $|\{j \mid x_j \neq 0\}| < m$.

Утверждение 10. В случае невырожденной задачи линейного программирования алгоритм симплекс–метода конечен.

В случае вырожденной задачи возможно так называемое *зацикливание*, когда в результате реализации нескольких итераций алгоритма происходит возврат к базису, встречавшемуся ранее. Следовательно, алгоритм может неограничено выполнять один и тот же цикл преобразования базиса. Для избежания зацикливания используется лексикографический вариант симплекс–метода, описанный в следующем подразделе.

Пример 1. Решить задачу

$$w(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min,$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,$$

взяв в качестве исходного решения точку $\overline{x} = (0,1,1,0)^\top$.

Решение. Таблица, соответствующая нулевому шагу, может быть построена следующим образом. Так как столбцы $\{A_2, A_3\} = \{ \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \}$ линейно независимы, то имеем базис $B^0 = (A_2, A_3)$. Выразим базисные переменные x_2 и x_3 из ограничений равенств через небазисные переменные x_1 и x_4. Получим

$$x_2 - 1/2x_1 + 1/2x_4 = 1,$$

$$x_3 + 1/2x_1 + 1/2x_4 = 1.$$

Исключим базисные переменные из целевой функции, выразив её только через небазисные переменные:

$$w(x) = -x_1 - 2(1/2x_1 - 1/2x_4 + 1) - 3(-1/2x_1 - 1/2x_4 + 1) + x_4 = -5 - 1/2x_1 + 7/2x_4.$$

Представим это равенство в удобном виде:

$$-w - 1/2x_1 + 7/2x_4 = 5.$$

Симплекс–таблица имеет такой исходный вид:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	5	$-1/2$	0	0	$7/2$
x_2	1	$-1/2$	1	0	$1/2$
x_3	1	$1/2$	0	1	$1/2$

Базис не является двойственно допустимым, так как элемент $z_{01} = -1/2$ отрицателен. Рассматриваемый базис невырожден ($z_{10} = 1, z_{20} = 1$), и, следовательно, значение целевой функции можно улучшить. Взяв в качестве ведущего первый столбец ($s = 1$), находим ведущую строку: $r = 2$, так как только $z_{21} = 1/2 > 0$. Преобразовав исходную таблицу с ведущим элементом z_{21}, придём к новому базису $B^1 = (A_1, A_2)$ и таблице

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	6	0	0	1	4
x_2	2	0	1	1	1
x_1	2	1	0	2	1

Так как таблица является двойственно допустимой, то базис B^1 оптимален и в соответствии с таблицей получаем, что $x^* = (2, 2, 0, 0)^\top$ и $w(x^*) = -6$, так как $x^* = (z_{20}, z_{10}, 0, 0)^\top$, $w(x^*) = -z_{00}$.

Пример 2. Решить задачу

$$w(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4,$$

взяв в качестве исходного решения точку $\overline{x} = (0, 0, 1, 1)^\top$.

Решение. Так как столбцы $A_3 = \binom{-2}{-1}, A_4 = \binom{3}{3}$ линейно независимы, то имеем базис $B^0 = (A_3, A_4)$ и $\overline{x}$ — базисное допустимое решение. Строим симплекс–таблицу, соответствующую нулевому шагу алгоритма. В результате преобразований, аналогичных преобразованиям в примере 1, получим равенства

$$x_3 + x_1 - 2x_2 = 1,$$

$$x_4 + x_1 - x_2 = 1,$$

$$-w - x_1 - x_2 = 0,$$

которым соответствует таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	-1	-1	0	0
x_3	1	1	-2	1	0
x_4	1	1	-1	0	1

Так как базис не является двойственно допустимым (например, $z_{01} = -1 < 0$) и не вырожден, то значение целевой функции можно улучшить, выбрав в качестве ведущего первый столбец ($s = 1$). В качестве ведущей строки можно выбрать любую из строк ($r = 1$ или $r = 2$), поскольку

$$\frac{z_{10}}{z_{11}} = \frac{z_{20}}{z_{21}} = 1 = \min\Big\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0\Big\}.$$

Пусть выбрано $r = 1$, и $z_{11} = 1$ — ведущий элемент. Преобразовав базис B^0 в базис $B^1 = (A_1, A_4)$, получим таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	1	0	-3	1	0
x_1	1	1	-2	1	0
x_4	0	0	1	-1	1

Здесь однозначно в качестве ведущего элемента выбирается $z_{22} = 1$. Преобразовав базис B^1 в базис $B^2 = (A_1, A_2)$, придем к таблице

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	1	0	0	-2	3
x_1	1	1	0	-1	2
x_2	0	0	1	-1	1

Заметим, что произошло только изменение базиса. Решение осталось прежним $\overline{x} = (1, 0, 0, 0)^\top$. Это связано с тем, что это решение вырожденное ($z_{02} = 0$). В данной таблице выбрать ведущий элемент уже не удается. И на шаге 3 алгоритма вычисления прекращаются: $z_{03} = -2 < 0$ и $z_{13} = z_{23} = -1 < 0$. Целевая функция $w(x)$ не ограничена снизу на множестве допустимых решений.

Данный пример показывает, что более подробный анализ текущей симплекс–таблицы может привести к существенному сокращению вычислений. Если бы в исходной симплекс–таблице было бы замечено, что во втором столбце нет положительных элементов и $z_{02} = -1 < 0$, то не пришлось бы дважды менять базис.

Пример 3. Решить задачу

$$w(x) = -x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \to \min,$$

$$x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0,$$

$$x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0,$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Решение. Нетрудно заметить, что в качестве исходного можно выбрать базис $B^0 = (A_1, A_2, A_7)$, при этом имеем базисное допустимое решение $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top$. Данное решение, очевидно, вырожденное.

Так как базисные переменные x_1, x_2 и x_7 не содержатся в целевой функции и равенства имеют требуемый для построения симплекс–таблицы вид, то сразу получаем симплекс–таблицу:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	0	-1	1	-1	1	0
x_1	0	1	0	1	-2	-3	4	0
x_2	0	0	1	4	-3	-2	1	0
x_7	1	0	0	1	1	1	1	1

Выбираем $s = 3, r = 1$ и переходим к базису $B^1 = (A_2, A_3, A_7)$, при этом базисное решение не изменится, так как $z_{01} = 0$.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	1	0	0	-1	-4	5	0
x_3	0	1	0	1	-2	-3	4	0
x_2	0	-4	1	0	5	10	-15	0
x_7	1	-1	0	0	3	4	-3	1

Выбираем $s = 4, r = 2$ и переходим к базису $B^2 = (A_3, A_4, A_7)$. Базисное решение вновь не изменится:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	$1/5$	$1/5$	0	0	-2	2	0
x_3	0	$-3/5$	$2/5$	1	0	1	-2	0
x_4	0	$-4/5$	$1/5$	0	1	2	-3	0
x_7	1	$7/5$	$-3/5$	0	0	-2	6	1

Здесь можно взять $s = 5, r = 1$. Базису $B^3 = (A_4, A_5, A_7)$ соответствует таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	-1	1	2	0	0	-2	0
x_5	0	$-3/5$	$2/5$	1	0	1	-2	0
x_4	0	$2/5$	$-3/5$	-2	1	0	1	0
x_7	1	$1/5$	$1/5$	2	0	0	2	1

с тем же базисным решением.

Теперь возьмём $s = 6, r = 2$. Получим базис $B^4 = (A_5, A_6, A_7)$ и таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	$-1/5$	$-1/5$	-2	2	0	0	0
x_5	0	$1/5$	$-4/5$	-3	2	1	0	0
x_6	0	$2/5$	$-3/5$	-2	1	0	1	0
x_7	1	$-3/5$	$7/5$	6	-2	0	0	1

Базисное решение и здесь не изменилось.

Пусть теперь $s = 1, r = 1$. Новый базис $B^5 = (A_1, A_6, A_7)$ с соответствующей таблицей и тем же решением:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	-1	-5	4	1	0	0
x_1	0	1	-4	-15	10	5	0	0
x_6	0	0	1	4	-3	-2	1	0
x_7	1	0	-1	-3	4	3	0	1

Выбрав $s = 2, r = 2$, придём к базису $B^6 = (A_1, A_2, A_7) = B^0$, т. е. произошел возврат к исходному базису. В этом случае говорят, что цикл замкнулся и произошло зацикливание алгоритма. Решение получить не удалось.

Пример 4. Решить задачу

$$w(x) = -7x_1 - x_3 + x_4 - x_5 \to \min,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12,$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5,$$

взяв в качестве исходного базиса $B^0 = (A_3, A_4, A_5)$.

Решение. Подставим x_3 из первого равенства и x_5 из третьего во второе, получим

$$-3x_1 + x_2 + x_4 = 3.$$

Исключим базисные переменные x_3, x_4 и x_5 из целевой функции:

$$w(x) = -7x_1 - (1 - x_1 + x_2) + (3 + 3x_1 - x_2) - (4 - 2x_1 - x_2) = -2 - x_1 - x_2.$$

Перепешем все условия в виде, удобном для заполнения симплекс–таблицы:

$$x_3 + x_1 - x_2 = 1,$$

$$x_4 - 3x_1 + x_2 = 3,$$

$$x_5 + 2x_1 + x_2 = 4,$$

$$-w - x_1 - x_2 = 2.$$

Исходная симплекс–таблица, соответствующая базису B^0 и допустимому базисному решению $\overline{x} = (0, 0, 1, 3, 4)^\top$, имеет вид

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	2	-1	-1	0	0	0
x_3	1	1	-1	1	0	0
x_4	3	-3	1	0	1	0
x_5	4	2	1	0	0	1

Так как имеются отрицательные элементы в верхней строке: $z_{01} = z_{02} = -1$, то таблица не является двойственно допустимой. Поэтому выбираем ведущий столбец s. Пусть $s = 1$. После этого переходим на шаг 3. Так как множество $\{i \mid z_{i1} > 0\}$ не пусто, то находим ведущую строку:

$$\frac{z_{10}}{z_{11}} = 1 = \min\left\{\frac{z_{i0}}{z_{i1}} \mid z_{i1} > 0\right\} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{4}{2}\right\}.$$

Таким образом, $r = 1$ и ведущим является элемент z_{11}. Новый базис $B^1 = (A_1, A_4, A_5)$. Проведя элементарное преобразование базиса, получим таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	3	0	-2	1	0	0
x_1	1	1	-1	1	0	0
x_4	6	0	-2	3	1	0
x_5	2	0	3	-2	0	1

Она также не является двойственно допустимой. Однозначно получаем $s = 2$, $r = 3$. Переходим к новому базису $B^2 = (A_1, A_2, A_4)$, которому соответствует таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	$13/3$	0	0	$-1/3$	0	$2/3$
x_1	$5/3$	1	0	$1/3$	0	$1/3$
x_4	$22/3$	0	0	$5/3$	1	$2/3$
x_2	$2/3$	0	1	$-2/3$	0	$1/3$

В качестве ведущего теперь выбираем элемент $z_{23} = 5/3$, так как $z_{03} = -1/3 < 0$ и

$$\frac{z_{20}}{z_{23}} = \frac{22}{5} < \frac{z_{10}}{z_{13}} = 5.$$

В результате элементарного преобразования переходим к базису $B^3 = (A_1, A_2, A_3)$ и таблице

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	$29/5$	0	0	0	$1/5$	$4/5$
x_1	$1/5$	1	0	0		
x_3	$22/5$	0	0	1		
x_2	$18/5$	0	1	0		

При этом так как получилась двойственно допустимая таблица, то после вычисления нулевой строки (элементов $z_{0j}, j = \overline{1,n}$) достаточно вычислить элементы нулевого столбца z_{i0} $(i = \overline{0,m})$ и на этом завершить решение задачи.

Оптимальное решение получено, и оно легко определяется из вычисленной части таблицы: $\overline{x_{\sigma(i)}} = z_{i0}, i = \overline{1,m}$, а все небазисные переменные равны нулю, при этом $w(\overline{x}) = -z_{00}$, т. е. в рассматриваемом случае $\overline{x} = (1/5, 18/5, 22/5, 0, 0)$, $w(\overline{x}) = -29/5$.

Задачи

1. Привести задачу к каноническому виду, решить ее симплекс–методом и дать геометрическую интерпретацию каждого шага в пространстве переменных:

1) $-x_1 - x_2 \longrightarrow \min,$

$x_1 - x_2 \leq 1,\ 5x_1 + x_2 \leq 1,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$

2) $-x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 \leq 12,\ x_1 - x_2 \leq 8,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2. Решить задачу симплекс–методом, взяв в качестве исходного базисного допустимого решения точку $\overline{x}$:

1) $-6x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 \longrightarrow \min,$

$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

$\overline{x} = (1, 0, 0, 1)^\top;$

2) $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

$\overline{x} = (0, 1, 1, 0)^\top;$

3) $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3,\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

$\overline{x} = (0, 0, 0, 1)^\top;$

4) $-x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5,\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9,\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,$

$\overline{x} = (0, 0, 1, 2, 1)^\top;$

5) $-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3,\ x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0,\ x_1 + x_4 - x_5 = 0,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,$

$\overline{x} = (0, 2, 0, 1, 1)^\top;$

6) $-x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5 \longrightarrow \min,$

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18,\ x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13,\ x_3 + x_5 = 3,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,$

$\overline{x} = (0, 1, 2, 0, 1)^\top;$

7) $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,\ -2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6,\ x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 12,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,$

$\overline{x} = (1, 1, 2, 0, 0)^\top.$

4.5 Лексикографический вариант прямого симплекс–метода

Этот метод позволяет устранить зацикливание и за конечное число шагов получить решение.

Определение. Ненулевой вектор $\alpha = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ *лексикографически больше нуля* ($\alpha \succ 0$), если первая отличная от нуля компонента положительна: $z_p > 0$, где $p = \min\{i \mid z_i \neq 0\}$.

Если $\alpha', \alpha'' \in E_{n+1}$, то считается, что вектор α' лексикографически больше вектора α'' ($\alpha' \succ \alpha''$), если $\alpha' - \alpha'' \succ 0$.

Тем самым на E_{n+1} определено отношение линейного порядка, так что в любой конечной совокупности векторов $\{\alpha^i\}$ имеется лексикографически минимальный вектор, обозначаемый $\operatorname{lex}\min\{\alpha^i\}$.

Определение. Симплекс–таблица называется *нормальной*, если ее строки $\alpha_i = (z_{i0}, z_{i1}, \ldots, z_{in})$, $i = \overline{1, m}$, лексикографически положительны.

Утверждение 11. Любую прямо допустимую симплекс–таблицу можно преобразовать в нормальную путем перенумерации переменных (с соответствующей перестановкой столбцов).

При этом очевидно, что нормальная симплекс–таблица является прямо допустимой.

Отличия лексикографического варианта прямого симплекс–метода от обычного касаются только 0-го и 3-го шагов (остальные шаги остаются без изменений):

$0'$) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

$3'$) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = \operatorname{lex}\min\Big\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\Big\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Элементарное преобразование базиса при этом сохраняет нормальность симплекс–таблицы.

Утверждение 12. В результате одной итерации лексикографического симплекс–метода происходит лексикографическое возрастание нулевой строки $\alpha_0 = (z_{00}, z_{01}, \ldots, z_{0n})$.

Утверждение 13. В ходе работы лексикографического симплекс – метода базисы не повторяются, что гарантирует его конечность.

Пример. В качестве примера рассмотрим пример 3 из предыдущего подразд. 4.4, на котором была продемонстрирована возможность зацикливания обычного симплекс–метода. Выбрав базис $B^0 = (A_1, A_2, A_7)$, получим исходную таблицу, которая является нормальной:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	0	-1	1	-1	1	0
x_1	0	1	0	1	-2	-3	4	0
x_2	0	0	1	4	-3	-2	1	0
x_7	1	0	0	1	1	1	1	1

Пусть по-прежнему $s = 3$. Здесь $\alpha^1 = (0, 1, 0, 1, -2, -3, 4, 0)$, $\alpha^2 = (0, 0, 1, 4, -3, -2, 1, 0)$ и $\alpha^3 = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Так как $\alpha^3 - \alpha^1 = (1, -1, ...) \succ 0$ и $\alpha^3 - \alpha^2/z_{23} = (1, 0, ...) \succ 0$, то $\alpha^3 \succ \alpha^1$ и $\alpha^3 \succ 1/z_{23}\alpha^2$. Таким образом, нужно сравнить α^1 и $(1/z_{23})\alpha^2$. Имеем

$$\alpha^1 - \frac{1}{4}\,\alpha^2 = (0, 1, \ldots) \succ 0.$$

Значит, $\operatorname{lex}\min\{\alpha^i/z_{i3} \mid z_{i3} > 0\} = (1/z_{23})\alpha^2$ и $r = 2$.

Преобразовав симплекс–таблицу (перейдя к базису $B^1 = (A_1, A_3, A_7)$), получим

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	$1/4$	0	$1/4$	$-6/4$	$5/4$	0
x_1	0	1	$-1/4$	0	$-5/4$	$-10/4$	$15/4$	0
x_3	0	0	$1/4$	1	$-3/4$	$-2/4$	$1/4$	0
x_7	1	0	$-1/4$	0	$7/4$	$6/4$	$3/4$	1

Здесь ведущий элемент определяется однозначно: $s = 5, r = 3$. Переходя к базису $B^2 = (A_1, A_3, A_5)$, преобразуем симплекс – таблицу. В результате перейдем к таблице (ненужные элементы опущены):

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	1	0	0	0	2	0	2	1
x_1	$5/3$	1		0		0		
x_3	$1/3$	0		1		0		
x_5	$2/3$	0		0		1		

Таблица является прямо и двойственно допустимой. Оптимальное решение получено за две итерации. При этом $x^* = (5/3, 0, 1/3, 0, 2/3, 0, 0)^\top, w(x^*) = -1$.

Задачи

Решить с помощью лексикографического варианта прямого симплекс–метода задачу, выбрав базис B^0 в качестве исходного базиса:

1) $-x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \longrightarrow \min,$

   $x_1 - x_2 - 2x_5 = 0,\ x_2 + x_4 + 4x_5 = 0,\ x_2 + x_3 + x_5 = 1,$

   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$

   $B^0 = (A_1, A_2, A_3);$

2) $-4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 \longrightarrow \min,$

   $3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1,\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$

   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

   $B^0 = (A_4, A_5, A_6);$

3) $-x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 \longrightarrow \min,$

   $x_1 + x_2 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1,\ x_2 + x_3 + x_6 = 1,$

   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,$

   $B^0 = (A_4, A_5, A_6).$

4.6. Метод искусственного базиса

В примерах, рассмотренных ранее, предполагалось, что либо задан исходный допустимый базис, либо было известно базисное допустимое решение.

В этом подразделе рассматривается общий метод решения задачи ЛП в канонической форме, позволяющий на первом этапе найти базисное допустимое решение или установить, что $X = \emptyset$, а на втором — оптимальный базис и соответствующее ему решение либо установить неразрешимость задачи из-за неограниченности целевой функции. При этом не предполагается, что ранг матрицы A равен m.

Без ограничения общности можно считать, что система ограничений – равенств $Ax = b$ записана таким образом, что $b \ge 0$. Этого можно добиться, умножая нужные строки на -1.

Тогда метод искусственного базиса можно представить в виде следующих шагов.

0. Построить симплекс–таблицу для задачи

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min, \tag{8}$$

$$a_i x + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1, m}; \tag{9}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n+m}, \tag{10}$$

выбрав в качестве базиса $B = (A_{n+1}, \ldots, A_{n+m})$. Здесь a_i — это i-я строка матрицы A ($i = \overline{1, m}$). Так как матрица B единичная, то для построения таблицы достаточно в целевой функции ξ выразить базисные переменные (искусственный базис) x_{n+i} ($i = \overline{1, m}$) через небазисные переменные x_j ($j = \overline{1, n}$), используя ограничения (9). В результате получим, что

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i x).$$

Следовательно,

$$z_{00} = -\sum_{i=1}^{m} b_i, \text{ а } z_{0j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \ j = \overline{1,n}.$$

При этом симплекс–таблица прямо допустима, а базисное допустимое решение имеет вид $x_j = 0$ $(j = \overline{1,n})$, и $x_{n+i} = b_i$ $(i = \overline{1,m})$.

1. Проделать шаги 1–4 алгоритма симплекс–метода, описанного в подразд. 4.4.

Так как целевая функция задачи (8)–(10) ограничена снизу нулем и допустимое множество, задаваемое условиями (9)–(10), непусто, то задача (8)–(10) всегда разрешима и минимум неотрицателен. Поэтому на первом этапе вычисления могут завершиться только получением прямо и двойственно допустимого базиса. Как только такой базис будет получен, перейти к следующему пункту.

2. Если оптимальное решение $\xi^* > 0$, то КОНЕЦ (исходная задача не имеет допустимых решений: $X = \emptyset$), иначе удалить из симплекс–таблицы все столбцы, соответствующие искусственным переменным x_j $(j = \overline{n+1, n+m})$, и нулевую строку.

3. Если базисными переменными являются только переменные исходной задачи x_j $(j \leq n)$, то перейти на шаг 7.

4. Выбрать строку, соответствующую искусственной переменной x_r $(r > n)$.

5. Если существует $z_{rs} \neq 0\,(1 \leq s \leq n)$, то выполнить элементарное преобразование базиса с ведущим элементом z_{rs} и перейти на шаг 3.

6. Если $z_{rj} = 0$ для всех $j = \overline{1,n}$, то удалить r-ю строку из симплекс–таблицы и перейти на шаг 3.

7. Добавить нулевую строку в симплекс–таблицу, записав в неё коэффициенты целевой функции основной задачи $w(x)$, выраженной через небазисные переменные. Получена прямо допустимая симплекс–таблица исходной задачи.

8. Проделать шаги 1–4 алгоритма симплекс–метода, описанного в подразд. 4.4.

Шаги 0–7 описанного выше способа получения базисного допустимого решения обычно называют *первым этапом* симплекс–метода, а метод в целом — *двухэтапным* симплекс–методом.

Выполнение шага 6 свидетельствует о линейной зависимости уравнений $Ax = b$, что позволяет удалить часть уравнений. Подобная ситуация возникает, если ранг матрицы A меньше числа уравнений m.

После выполнения шага 7 имеем прямо допустимую симплекс–таблицу исходной задачи, т. е. завершён 0-й шаг алгоритма подразд. 4.4. и можно переходить к его шагам 1–4. В результате либо установим, что целевая функция $w(x)$ не ограничена снизу, либо получим оптимальное решение.

Пример 1. Решить задачу

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \min,$$

$$x_1 + x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1, \ldots, 5).$$

Решение. Будем искать начальное базисное допустимое решение методом искусственного базиса. Для этого добавим искусственные переменные x_6, x_7, x_8 и получим задачу

$$x_6 + x_7 + x_8 \to \min,$$

$$x_1 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1,$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_7 = 1,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_8 = 0,$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1, \ldots, 8),$$

с базисным допустимым решением $x = (0,0,0,0,0,1,1,0)^\top$. Исключим базисные переменные x_6, x_7 и x_8 из целевой функции этой задачи:

$$\xi = (1 - x_1 - x_4 - 2x_5) + (1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5) + (-2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4) = 2 - 3x_1 + 4x_2 - 3x_4 - 4x_5.$$

Данное равенство запишем в принятом виде

$$-\xi - 3x_1 + 4x_2 - 3x_4 - 4x_5 = -2.$$

Получаем исходную симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-2	-3	4	0	-3	-4	0	0	0
x_6	1	1	0	0	1	2	1	0	0
x_7	1	0	-1	-1	1	2	0	1	0
x_8	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

На этом нулевой шаг алгоритма метода искуственного базиса завершён. Переходим к первому шагу. Таблица не является двойственно допустимой. Выбираем ведущий столбец s. Пусть $s = 4$. Выбираем ведущую строку. Получаем $r = 3$ и, следовательно, ведущий элемент $z_{34} = 1$. Переходим к новому базису, которому соответствует следующая симплекс–таблица:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-2	3	-5	3	0	-4	0	0	3
x_6	1	-1	3	-1	0	2	1	0	-1
x_7	1	-2	2	-2	0	2	0	1	-1
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Таблица всё ещё не двойственно допустима. Выбираем в качестве ведущего элемент z_{15}. Преобразовав, получим симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	0	1	1	1	0	0	2	0	1
x_5	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$
x_7	0	-1	-1	-1	0	0	-1	1	0
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Таблица прямо и двойственно допустима, и $\xi^* = 0$. На шаге 2 метода искусственного базиса в таблице произойдет удаление нулевой строки и трёх последних столбцов, соответствующих искусственным переменным. Так как в базисе имеется искусственная переменная x_7 и $z_{21} = -1 \neq 0$, то можно выполнить элементарное преобразование базиса с ведущим элементом z_{21} (шаги 4 и 5), после чего в базисе останутся только переменные исходной задачи:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	$1/2$	0	2	0	0	1
x_1	0	1	1	1	0	0
x_4	0	0	-5	-1	1	0

На этом первый этап алгоритма симплекс–метода завершён. Переходим на шаг 7. Выразим через небазисные переменные x_2 и x_3 целевую функцию исходной задачи. Из последней симплекс–таблицы имеем равенства

$$2x_2 + x_5 = 1/2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$-5x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Следовательно,

$$w(x) = (-x_2 - x_3) - x_2 + x_3 - (5x_2 + x_3) + 3(1/2 - 2x_2) = 3/2 - 13x_2 - x_3.$$

Получим симплекс–таблицу исходной задачи с базисом $B = (A_1, A_4, A_5)$ и соответствующим базисным допустимым решением $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 1/2)$:

$$\begin{array}{c|c|ccccc|} & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \multicolumn{1}{c}{x_5} \\ \cline{2-7} -w & -3/2 & 0 & -13 & -1 & 0 & 0 \\ \cline{2-7} x_5 & 1/2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ \cline{2-7} \end{array}$$

Теперь переходим на шаг 8. Так как симплекс–таблица не является двойственно допустимой, то выбираем, согласно прямому алгоритму симплекс–метода, $s = 2, r = 2$. Преобразуем таблицу с ведущим элементом $z_{22} = 1$ и переходим к прямо и двойственно допустимой таблице

$$\begin{array}{c|c|ccccc|} & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \multicolumn{1}{c}{x_5} \\ \cline{2-7} -w & -3/2 & 13 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ \cline{2-7} x_5 & 1/2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 5 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ \cline{2-7} \end{array}$$

Таким образом, получено оптимальное решение $x^* = (0, 0, 0, 0, 1/2)$, при этом $w(x^*) = 3/2$.

Пример 2. Решить задачу

$$-2x_1 - 7x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3,$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1, \dots, 4).$$

Решение. Будем искать начальное базисное допустимое решение методом искусственного базиса. Для этого добавим искусственные переменные x_5, x_6 и получим задачу

$$x_5 + x_6 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 3,$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1, \dots, 6)$$

с базисным допустимым решением $x = (0,0,0,0,1,3)^\top$. Исключим базисные переменные x_5, x_6 из целевой функции этой задачи и получим исходную симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	-4	-3	-2	-1	3	0	0
x_5	1	1	1	0	-1	1	0
x_6	3	2	1	1	-2	0	1

Таблица не является двойственно допустимой. Выбираем в качестве ведущего элемент z_{11}. Преобразовав, получим симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	-1	0	1	-1	0	3	0
x_1	1	1	1	0	-1	1	0
x_6	1	0	-1	1	0	-2	1

Теперь в качестве ведущего элемента выбираем z_{32}. После преобразования получим симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	0	0	0	0	0	1	1
x_1	1	1	1	0	-1	1	0
x_3	1	0	-1	1	0	-2	1

Таблица прямо и двойственно допустима. Получено оптимальное решение вспомогательной задачи. При этом $\xi^* = -z_{00} = 0$. На шаге 2 в таблице произойдет удаление нулевой строки и двух последних столбцов, соответствующих искусственным переменным. В базисе присутствуют только переменные исходной задачи. На этом первый этап алгоритма симплекс–метода завершён. Переходим на шаг 7. Выразим через небазисные переменные целевую функцию $w(x)$. Из последней симплекс–таблицы имеем равенства

$$x_1 + x_2 - x_4 = 1,$$

$$-x_2 + x_3 = 1,$$

т. е.

$$w(x) = -2(1 - x_2 + x_4) - 7x_2 + (1 + x_2) + 4x_4 = -1 - 4x_1 + 2x_4.$$

Получим прямо допустимую симплекс–таблицу исходной задачи с базисом $B = (A_1, A_3)$ и соответствующим решением $\overline{x} = (1,0,1,0)$

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-1	0	-4	0	2
x_1	1	1	1	0	-1
x_3	1	0	-1	1	0

Теперь переходим на шаг 8. Так как симплекс–таблица не является двойственно допустимой, то выбираем $s = 2, r = 1$. Преобразуем таблицу с ведущим элементом $z_{12} = 1$ и окончательно приходим к прямо допустимой таблице с отрицательным последним столбцом

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	3	4	0	0	-2
x_2	1	1	1	0	-1
x_3	2	1	0	1	-1

Таким образом, целевая функция исходной задачи неограничена снизу. Следовательно, оптимального решения не существует.

Пример 3. Решить задачу

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \min,$$

$$x_1 + x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1, \ldots, 5).$$

Решение. Найдём начальное базисное допустимое решение с помощью метода искусственного базиса. Для этого добавим искусственные переменные x_6, x_7, x_8 и получим задачу

$$x_6 + x_7 + x_8 \to \min,$$

$$x_1 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1,$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_7 = 2,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_8 = 0,$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1, \ldots, 8),$$

с базисным допустимым решением $x = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0)^\top$. Исключим базисные переменные из целевой функции этой задачи и получим исходную симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-3	-3	4	0	-3	-4	0	0	0
x_6	1	1	0	0	1	2	1	0	0
x_7	2	0	-1	-1	1	2	0	1	0
x_8	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Таблица не является двойственно допустимой. Выбираем в качестве ведущего элемент $z_{34} = 1$. Преобразовав, получим симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-3	3	-5	3	0	-4	0	0	3
x_6	1	-1	3	-1	0	2	1	0	-1
x_7	2	-2	2	-2	0	2	0	1	-1
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Теперь в качестве ведущего элемента выбираем $z_{15} = 2$. После преобразования получим симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-1	1	1	1	0	0	2	0	1
x_5	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$
x_7	1	-1	-1	-1	0	0	-1	1	0
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Таблица прямо и двойственно допустима. Получено оптимальное решение вспомогательной задачи. Так как $\xi^* = -z_{00} = 1 > 0$, то исходная задача неразрешима из-за несовместности ограничений.

Пример 4. Решить задачу

$$-x_1 - 4x_2 - x_3 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 = -1,$$

$$3x_1 + 2x_3 = 3,$$

$$x_j \geq 0 \, (j = 1, 2, 3).$$

Решение. Будем искать начальное базисное допустимое решение методом искусственного базиса. Для этого домножим второе ограничение–равенство на -1 и добавим искусственные переменные x_4, x_5 и x_6. Получим вспомогательную задачу

$$x_4 + x_5 + x_6 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1,$$

$$3x_1 + 2x_3 + x_6 = 3,$$

$$x_j \geq 0 \, (j = \overline{1, 6})$$

с базисным допустимым решением $x = (0, 0, 0, 2, 1, 3)^\top$. Исключим базисные переменные x_4, x_5 и x_6 из целевой функции этой задачи:

$$\xi = (2 - x_1 - x_2 - x_3) + (1 - 2x_1 + x_2 - x_3) + (3 - 3x_1 - 2x_3) = 6 - 6x_1 - 4x_3.$$

Данное равенство запишем в принятом виде

$$-\xi - 6x_1 - 4x_3 = -6.$$

Получаем исходную (первую) симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	-6	-6	0	-4	0	0	0
x_4	2	1	1	1	1	0	0
x_5	1	2	-1	1	0	1	0
x_6	3	3	0	2	0	0	1

Таблица не является двойственно допустимой. Выбираем ведущий столбец s. Пусть $s = 3$. Выбираем ведущую строку. Получаем $r = 2$ и, следовательно, ведущий элемент $z_{23} = 1$. Переходим к новому базису, которому соответствует следующая (вторая) симплекс–таблица:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	-2	2	-4	0	0	4	0
x_4	1	-1	2	0	1	-1	0
x_3	1	2	-1	1	0	1	0
x_6	1	-1	2	0	0	-2	1

Таблица все ещё не двойственно допустима. Выбираем в качестве ведущего элемент z_{32}. Преобразовав, получим третью таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	0	0	0	0	0	0	2
x_4	0	0	0	0	1	1	-1
x_3	$3/2$	$3/2$	0	1	0	0	$1/2$
x_2	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	-1	$1/2$

Таблица прямо и двойственно допустима. Получено оптимальное решение вспомогательной задачи. При этом $\xi^* = -z_{00} = 0$. Поэтому на шаге 2 в таблице произойдет удаление нулевой строки и трёх последних столбцов, соответствующих искусственным переменным:

$$\begin{array}{c|c|ccc|}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & 3/2 & 3/2 & 0 & 1 \\
x_2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

В числе базисных осталась искусственная переменная x_4, при этом в строке, соответствующей ей, имеются только нулевые элементы. Значит, эту строку можно удалить. Исходная матрица имеет ранг, равный 2. Действительно, если вернуться к предпоследней симплекс–таблице и переписать строку, соответствующую базисной переменной x_4, в виде равенства $x_4 + x_5 = x_6$, то сразу обнаружим, что третье ограничение–равенство в исходной задаче является суммой первых двух, т. е. они линейно зависимы.

После удаления строки в базисе остались только переменные исходной задачи. Переходим на шаг 7. Выразим через небазисные переменные целевую функцию $w(x)$. Из последней симплекс–таблицы имеем равенства

$$3/2x_1 + x_3 = 3/2,$$

$$-1/2x_1 + x_2 = 1/2,$$

т. е.

$$w(x) = -x_1 - 4(1/2 + 1/2x_1) - (3/2 - 3/2x_1) = -7/2 - 3/2x_1.$$

Добавляем нулевую строку $-w - 3/2x_1 = 7/2$ к предыдущей таблице (учтите, что первая строка вычеркнута)

$$\begin{array}{c|c|ccc|}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
-w & 7/2 & -3/2 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 & 3/2 & 3/2 & 0 & 1 \\
x_2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Получим прямо допустимую симплекс–таблицу (пятую)исходной задачи с базисом $B = (A_2, A_3)$ и соответствующим решением $\overline{x} = (0, 1/2, 3/2)$. Теперь переходим на шаг 8 и ищем оптимальное решение. Так как симплекс–таблица не является двойственно допустимой, то выбираем $s = 1, r = 1$. Преобразуем таблицу с ведущим элементом $z_{11} = 3/2$ и окончательно приходим к прямо и двойственно допустимой таблице

$$\begin{array}{c|c|ccc|}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
-w & 5 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 0 & 2/3 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\
\hline
\end{array}$$

из которой следует, что $x^* = (1, 1, 0), w(x^*) = -5$.

Задачи

Решить задачу симплекс–методом, найдя начальное базисное допустимое решение методом икусственного базиса:

1) $-x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$

2) $-x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \longrightarrow \min$,

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$;

3) $-x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 \longrightarrow \min$,

$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2,\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$;

4) $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow \min$,

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5,\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5,\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$;

5) $-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \longrightarrow \min$,

$3x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5 = 10,\ 6x_1+x_2+2x_3+3x_4-4x_5 = 20,\ 10x_1+x_2+3x_3+6x_4-7x_5 = 30$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$;

6) $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 \longrightarrow \min$,

$x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2,\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2,\ x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$.

4.7. Геометрическая интерпретация симплекс–метода

Представляет интерес геометрическая интерпетация симплекс–метода и, в частности, метода искусственного базиса. Поскольку базисное допустимое решение — это крайняя точка допустимого множества X, а любая крайняя точка x — это базисное допустимое решение (см. утверждение 2), то симплекс–метод геометрически представляет собой направленное движение по вершинам многогранного множества.

Пусть выбран базис $B = (A_1, \ldots, A_m)$, тогда базисное допустимое решение задаётся равенствами

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, x_N = 0, \qquad (*)$$

где $B^{-1}b \geq 0$. Имеем $m + (n - m) = n$ условий, которые задают некоторую вершину многогранного множества X, а именно $\overline{x} = (B^{-1}b, 0)$. При этом если эту точку рассматривать в качестве начала координат, то, последовательно убирая по одной небазисной переменной из условий $x_k = 0$, получаем $n - m$ осей, проходящих через точку $\overline{x}$. Если убирается условие $x_s = 0$, где $s \in J \setminus \{1, \ldots, m\}$, то получаем ось x_s, вдоль которой меняется значение этой переменной. Положительное направление соответствует полупространству $x_s \geq 0$. Выбор ведущего столбца s означает, что в качестве оси, по которой произойдёт движение в новую вершину, выбрана ось x_s. Если $z_{0s} < 0$, то это говорит о том, что при движении в положительном направлении оси x_s значение целевой функции $w(x)$ убывает. Выбор ведущей строки $r (r \in \{1, \ldots, m\})$ геометрически означает, что движение произойдет до вершины, определяемой условиями $(*)$, где равенство $x_s = 0$ заменено на равенство $x_r = 0$, так как переменная x_s становится базисной, а x_r переходит в небазисные переменные. Если x_r было уже равно нулю ($z_{r0} = 0$ в базисе B), то вершина останется прежней, но произойдет изменение системы координат, при этом вместо оси x_s появится ось x_r. Шаг 3 в алгоритме симплекс–метода из подразд. 4.4 разрешает движение до ближайшей в выбранном направлении гиперплоскости $x_r = 0$, а величина z_{r0}/z_{rs} характеризует величину шага.

Рассмотрим все сказанное на примере 4 из подразд. 4.6, используя естественную нумерацию таблиц. Геометрическую интерпретацию проведём в пространстве исходных переменных x_1, x_2 и x_3. И, говоря о точке, будем иметь в виду точку $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, а x_4, x_5 и x_6 будем называть вспомогательными переменными. На рис. 1 указаны гиперплоскости, определяемые равенствами:

$$a_i x = b_i \ (i = \overline{1, m}),$$

где $x \in E_n$. В нашем случае $i = 1, 2, 3, m = n = 3$. Жирная линия, соединяющая точки $(1, 1, 0)^\top$ и $(0, 1/2, 3/2)^\top$, — это допустимое множество X. Указан ещё ряд вспомогательных точек для лучшего представления ситуации. При этом нужно учитывать, что равенство $x_{n+i} = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ соответствует гиперплоскости $a_i x = b_i$. Начальное базисное допустимое решение соответствует началу координат $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Эта точка не принадлежит множеству X, но является допустимой во вспомогательной задаче: $x_4 = 2, x_5 = 1, x_6 = 3$, причём значения этих координат характеризуют отклонения выбранной точки соответственно от первой, второй и третьей гиперплоскости, по отношению к которым исходная точка находится в положительных полупространствах $(x_j \geq 0 \ (j = 4, 5, 6))$. На первом этапе необходимо попасть на множество X.

Небазисными переменными являются x_1, x_2 и x_3 Имеем три оси, соответствующие им. Первая симплекс–таблица говорит о том, что нужно двигаться либо по оси x_1 $(z_{01} = -6 < 0)$, либо по оси x_3 $(z_{03} = -4 < 0)$. Выбираем движение по оси x_3 $(s = 3)$. До каких пор можно двигаться? Если выбрать $r = 1$, то, преобразовав эту таблицу с ведущим элементом z_{13}, получим точку $(0, 0, 2)$, в которой вспомогательные переменные таковы, что $x_5 = z_{20} = -1$, $x_4 = 0, x_6 = z_{30} = -1$. Иначе говоря, мы покинули допустимое множество вспомогательной задачи и получили недопустимый базис. Величина z_{i0}/z_{is} при $z_{is} > 0$ характеризует расстояние от вершины, которой соответствует симплекс–таблица, до гиперплоскости $x_{\sigma(i)} = 0$ в положительном направлении. Принято двигаться до ближайшей гиперплоскости, что гарантирует попадание в допустимую точку. Поэтому определяется такое r, для которого

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0 \right\}.$$

В нашем случае (при $s = 3$) это даёт $r = 2$. После преобразования упомянутой выше симплекс–таблицы, получаем вторую симплекс–таблицу, которой соответствует точка $(0, 0, 1)^\top$, при этом $x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1$, т. е. попали на гиперплоскость $2x_1 - x_2 + x_3 = 1 (x_5 = 0)$. Рассмотрим данную точку более подробно. В этой точке небазисные переменные x_1, x_2 и x_5. Они и определяют новую систему координат, вообще говоря, косоугольную. Ось x_1 задаётся условиями $x_2 = 0, x_5 = 0$, а её направление условием $x_1 \geq 0$. Аналогично определяются остальные оси. Поскольку они не совпадают со старыми осями, то обозначим их как x'_1, x'_2 и x'_5 (рис. 2). Эта симплекс–таблица показывает, что следует двигаться по оси x'_2 до гиперплоскости $x_6 = 0$ (или $x_4 = 0$, так как $z_{10}/z_{12} = z_{30}/z_{32} = 1/2$). В результате элементарного преобразования с ведущим элементом z_{32} приходим к третьей симплекс–таблице, в которой $z_{00} = 0$. Значит, точка $x = (0, 1/2, 3/2)^\top$ принадлежит допустимому множеству X. Одновременно устанавливаем, что ограничения–равенства $Ax = b$ линейно зависимы. Из рис. 1 видно, что удаление одного из них допустимого множества X не меняет. Из четвертой симплекс–таблицы видно, что удаляется гиперплоскость $x_4 = 0 : x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Рассмотрим пятую симплекс–таблицу и рис. 3

рис 1 (пустая страница)

рис 2 (пустая страница)

рис 3 (пустая страница)

Согласно этой таблице имеем две базисных переменных x_2 и x_3 и небазисную x_1, т. е. по допустимому множеству X можно двигаться только в одном направлении вдоль оси x_1''. Так как $z_{01} = -3/2 < 0$, то рассматриваемая точка не оптимальна. Продвинувшись по оси x_1'' до гиперплоскости $x_3 = 0$ (только $z_{11} > 0$), получаем последнюю симплекс–таблицу, из которой следует, что точка $x = (1, 1, 0)^\top$ оптимальная. Решение завершено.

Кстати, из рассмотренного примера видно, что он имеет только два допустимых базисных решения $x^1 = (0, 1/2, 3/2)^\top$ и $x^2 = (1, 1, 0)^\top$, так как допустимое множество — это отрезок, соединяющий эти точки.

5. Двойственные задачи линейного программирования

5.1. Построение двойственных задач

Задача линейного программирования обычно записывается в следующем общем виде (см. подразд. 4.1):

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$a_i x - b_i \geq 0,\ i \in I_1; \tag{2}$$

$$a_i x - b_i = 0,\ i \in I_2; \tag{3}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J_1. \tag{4}$$

При этом ограничения (2)–(3) будем называть *существенными*, а ограничения (4) — *ограничениями по знаку*. Напомним, что $I = I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, m\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $J_1 \subset J = \{1, \ldots, n\}$, а через J_2 обозначим множество $J \setminus J_1$. Переменные x_j, $j \in J_2$ называются *свободными*. С этой задачей, которую назовём *прямой задачей* ЛП, тесно связана задача, которая называется *двойственной* к ней или *двойственной задачей* ЛП.

Двойственная задача строится следующим образом:

1) каждому существенному ограничению (2)–(3) ставится в соответствие *двойственная переменная* $y_i (i \in I)$;

2) целевой функцией, которую необходимо максимизировать, является произведение вектор–строки $y = (y_1, \ldots, y_m)$ на вектор–столбец $b = (b_1, \ldots, b_m)^\top$;

3) каждому ограничению–неравенству (2) соответствует ограниченная по знаку переменная, т. е. $y_i \geq 0 (i \in I_1)$, а каждому ограничению–равенству (3) соответствует свободная переменная $y_i (i \in I_2)$;

4) каждой ограниченной по знаку переменной $x_j (j \in J_1)$ соответствует ограничение–неравенство двойственной задачи, которое имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j\ (j \in J_1)$$

и левая часть которого получается умножением вектор–строки y на j-й столбец A_j матрицы A, а в правой части находится соответствующий коэффициент целевой функции (1);

5) каждой свободной переменной x_j $(j \in J_2)$ соответствует ограничение–равенство, которое строится так же, как предыдущее неравенство, и имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\ (j \in J_2).$$

Таким образом, двойственной к задаче (1)–(4) является задача

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max, \tag{1'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, j \in J_1; \tag{2'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, j \in J_2; \tag{3'}$$

$$y_i \ge 0, i \in I_1. \tag{4'}$$

В векторном виде пару двойственных задач (1)–(4) и (1′)–(4′) можно представить так:

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \ge b_i$	$i \in I_1$	$y_i \ge 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	$y_i -$ своб.
$x_j \ge 0$	$j \in J_1$	$yA_j \le c_j$
$x_j -$ своб.	$j \in J_2$	$yA_j = c_j$.

Существенной особенностью отношения двойственности является тот факт, что задача, двойственная к задаче (1′)–(4′), совпадает с прямой задачей (1)–(4). Можно считать, что все задачи ЛП разбиваются на пары взаимно двойственных задач.

Пример 1. Построить задачу, двойственную к задаче

$$w(x) = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \to \min,$$

$$2x_1 - x_2 \le 1,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge 4,$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 - x_3 + 2x_5 \ge 3,$$

$$x_1, x_3 \ge 0.$$

Решение. Чтобы записать двойственную задачу, приведём её сначала к виду (1)–(4). При этом целевая функция $w(x)$ не изменится, а ограничения примут вид

$$\begin{array}{c|l} y_1 & -2x_1 + x_2 \ge -1, \\ y_2 & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge 4, \\ y_3 & x_1 - x_3 + 2x_5 \ge 3, \\ y_4 & x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ & x_1, x_3 \ge 0. \end{array}$$

Слева указаны двойственные переменные y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Теперь воспользуемся определением $(1')$–$(4')$ двойственной задачи:

$$\begin{array}{rl} z(y) = -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \to \max, & \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \leq 1, & \Big| \; x_1 \\ y_1 - y_2 + y_4 = -10, & \Big| \; x_2 \\ 2y_2 - y_3 + y_4 \leq 2, & \Big| \; x_3 \\ -y_2 - y_4 = -1, & \Big| \; x_4 \\ y_2 + 2y_3 = 7, & \Big| \; x_5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. & \end{array}$$

Справа для наглядности указаны соответствующие переменные прямой задачи. Отметим, что ограничениям–равенствам соответствуют свободные переменные, а ограничениям–неравенствам — неотрицательные переменные.

Пример 2. Построить задачу, двойственную к задаче

$$x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 2,$$

$$x_2 \leq 0.$$

Решение. Приведём данную задачу к виду (1)–(4):

$$\begin{array}{r|l} & -x_1 - 10x_2 + x_3 \to \min, \\ y_1 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ y_2 & -x_1 + x_2 + x_3 \geq -2, \\ y_3 & -x_2 \geq 0. \end{array}$$

Заметим, что все переменные прямой задачи свободные. Двойственная задача, согласно определению $(1')$–$(4')$, имеет вид

$$y_1 - 2y_2 \to \max,$$

$$y_1 - y_2 = -1,$$

$$y_1 + y_2 - y_3 = -10,$$

$$y_1 + y_2 = 1,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Если исходную задачу привести к виду $(1')$ – $(4')$

$$\begin{array}{r|l} & x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max, \\ u_1 & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1, \\ u_2 & x_1 - x_2 - x_3 \leq 2, \\ u_3 & x_2 \leq 0, \end{array}$$

то двойственная задача, примет вид

$$-u_1 + 2u_2 \to \min,$$

$$-u_1 + u_2 = 1,$$

$$-u_1 - u_2 + u_3 = 10,$$

$$-u_1 - u_2 = -1,$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0.$$

Видно, что мы получили ту же самую двойственную задачу, что и выше.

Таким образом, не существенно, к какому виду приводится исходная задача: к виду (1)–(4) или к виду (1′)–(4′) — в силу симметрии двойственной к ним будет одна и та же задача, возможно, по-другому записанная.

Более того, если в исходной задаче сделать замену $x_2' = -x_2$ и привести задачу к виду (1)–(4), то получится задача

$$\begin{array}{r|l} & -x_1 + 10x_2' + x_3 \to \min, \\ y_1 & x_1 - x_2' + x_3 \geq 1, \\ y_2 & -x_1 - x_2' + x_3 \geq -2, \\ & x_2' \geq 0. \end{array}$$

Двойственная к ней имеет вид

$$y_1 - 2y_2 \to \max,$$

$$y_1 - y_2 = -1,$$

$$-y_1 - y_2 \leq 10,$$

$$y_1 + y_2 = 1,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Можно проверить, что эта задача эквивалентна полученным ранее.

Задачи

Построить задачу, двойственную к данной задаче:

1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min,$

   $x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1,\ x_1 - x_2 = 2,$

   $x_1 \geq 0;$

2) $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow \min,$

   $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 2,\ x_1 - x_3 \leq 3,$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0;$

3) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \longrightarrow \min,$

   $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 0,\ x_1 + x_4 + x_5 \leq 0,\ x_1 - x_5 = 1,$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_5 \leq 0;$

4) $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 + 6x_6 \longrightarrow \min,$

   $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2,\ x_2 - x_3 - x_4 \leq 3,\ x_3 + x_4 - x_5 \geq 4,\ x_5 + x_6 = 7,$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 \leq 0,\ x_5 \leq 0;$

5) $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \longrightarrow \min,$

   $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m},$

   $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n},$

   $x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};$

6) $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \longrightarrow \min,$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,m},$

$\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij}x_{ij} = b_j,\ j=\overline{1,n},$

$x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

5.2. Теоремы двойственности

Отметим следующие важные свойства взаимно двойственных задач. Для определённости будем считать, что задача на минимум является прямой, а на максимум — двойственной.

Свойство 1. Если x и y — допустимые решения соответственно прямой и двойственной задачи, то $w(x) \geq z(y)$.

Свойство 2. Если x и y — допустимые решения соответственно прямой и двойственной задачи и $w(x) = z(y)$, то x и y — оптимальные решения.

Теорема 1 (первая теорема двойственности). *Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы. При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ограничений.*

Отметим, что существуют примеры взаимно двойственных задач с несовместными ограничениями. Такая пара взаимно двойственных задач приведена ниже:

Прямая задача	Двойственная задача
$x_1 - x_2 \to \min,$	$y_1 + 2y_2 \to \max,$
$x_1 + x_2 = 1,$	$y_1 + y_2 = 1,$
$x_1 + x_2 = 2;$	$y_1 + y_2 = -1.$

Теорема 2 (вторая теорема двойственности, или теорема о дополняющей нежёсткости). *Допустимые решения x и y соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда*

$$y_i(a_i x - b_i) = 0\ (i \in I),$$

$$(c_j - yA_j)x_j = 0\ (j \in J).$$

Пример 1. При каких значениях a система

$$-5y_1 + 8y_2 \leq a,$$

$$y_1 - y_2 \leq -3,$$

$$y_1 - 2y_2 \leq 3,$$

$$2y_1 - 3y_2 \leq 1$$

несовместна?

Решение. Дополним систему до задачи линейного программирования, добавив целевую функцию $0 \longrightarrow \max$, и построим двойственную к ней:

$$ax_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$$

$$-5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$8x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Решим её симплекс–методом. Поскольку правая часть нулевая, то любое базисное решение будет допустимым. Выберем в качестве начального базиса $B = (A_3, A_4)$ и построим симплекс–таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	$a+5$	-1	0	0
x_3	0	-1	-1	1	0
x_4	0	-2	1	0	1

Таблица не является двойственно допустимой, так как $z_{02} < 0$. Переходим к базису (A_3, A_2):

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	$a+3$	0	0	1
x_3	0	-3	0	1	1
x_2	0	-2	1	0	1

Если $a \geq -3$, то симплекс–таблица является прямо и двойственно допустимой. Если же $a < -3$, то задача неразрешима ввиду неограниченности целевой функции. Тогда по первой теореме двойственности при $a \geq -3$ исходная система имеет решение, а при $a < -3$ она несовместна.

Пример 2. Найти минимальное значение линейной формы

$$w(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

при ограничениях

$$x_j + x_{j+1} \geq \alpha_j, j = 1, \ldots, n-1,$$

$$x_1 + x_n \geq \alpha_n.$$

Решение. Воспользуемся для решения теоремами двойственности. Сначала построим двойственную задачу:

$$z(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \to \max$$

$$y_i + y_{i+1} = 1, i = 1, \ldots, n-1,$$

$$y_1 + y_n = 1,$$

$$y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $n = 2k+1$. Из системы ограничений–равенств при попарном вычитании можно установить, что $y_1 = y_3 = \cdots = y_{2k+1}$ и $y_2 = y_4 = \cdots = y_{2k}$. А из условий $y_1 + y_2 = 1, y_1 + y_{2k+1} = 1$ следует, что $y_2 = y_{2k+1}$. Таким образом, все y_i $(i = \overline{1, 2k+1})$ равны между собой, т. е. $y_i = 1/2$ $(i = \overline{1, 2k+1})$. При этом $z(y) = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. В силу единственности полученное решение является оптимальным решением двойственной задачи. Так как все y_i $(i = \overline{1, n})$ положительны, из второй теоремы двойственности получаем, что

$$x_j + x_{j+1} = \alpha_j, j = \overline{1, n-1},$$

$$x_1 + x_n = \alpha_n.$$

Сложив все эти равенства, получим, что $w(x) = 1/2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = z(y)$. Значит, любое решение данной системы оптимально. Поочередно складывая и вычитая эти равенства, начиная с $j = 1$, получаем, что $2x_1 = \sum_{s=0}^{k}\alpha_{2s+1} - \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}$, т. е.

$$x_1 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\alpha_s.$$

Теперь по индукции можно определить и остальные координаты вектора x :

$$x_j = (-1)^{j-1}\Big(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^s\alpha_s + x_1\Big), j = 2, \dots, 2k+1.$$

Таким образом, это решение тоже единственное. Понятно, что найти его и доказать оптимальность, не зная решения двойственной задачи, непросто.

Пусть теперь $n = 2k$. Как и выше, имеем равенства $y_1 = y_3 = \dots = y_{2k-1}$ и $y_2 = y_4 = \dots = y_{2k}$. Целевую функцию можно записать в таком виде:

$$z(y) = \Big(\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1}\Big)y_1 + \Big(\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}\Big)y_2,$$

где $y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$. Найти наибольшее значение $z(y)$ теперь нетрудно. Если $\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1} > \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}$, то $y_1 = 1, y_2 = 0$. Если $\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1} < \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}$, то $y_1 = 0, y_2 = 1$. При $\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1} = \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}$ любое решение, удовлетворяющее условиям, оптимально. Таким образом,

$$z(y) = \max\Big\{\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1},\ \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}\Big\}.$$

Пусть для определённости $\sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1} \geq \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s}$. Тогда $y_{2s-1} = 1,\ y_{2s} = 0\ (s = \overline{1,k})$.

Рассмотрим решение исходной задачи. В силу второй теоремы двойственности имеем равенства

$$x_{2s-1} + x_{2s} = \alpha_{2s-1},\ (s = \overline{1,k}). \qquad (*)$$

Сложив их, получим $w(x) = \sum_{j=1}^{n}x_j = \sum_{s=1}^{k}\alpha_{2s-1} = z(y)$. Таким образом, любое решение, удовлетворяющее равенствам $(*)$ и неравенствам

$$x_{2s} + x_{2s+1} \geq \alpha_{2s},\ (s = 1, \dots, k-1),$$

$$x_{2k} + x_1 \geq \alpha_{2k},$$

оптимально. Выписать решение в случае $n = 2k$ не удаётся, но это и не требовалось.

Задачи

1. Найти оптимальное решение задачи, исходя из геометрической интерпретации двойственной к ней:

1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min,$

$x_1 - x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \geq 1,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0;$

3) $x_1+5x_2+x_3+10x_4+x_5+3x_6 \longrightarrow \min,$

$-x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 1,\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5-x_6 \geq 1,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ \ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$

2. Найти оптимальное решение задачи, решая двойственную к ней задачу симплекс–методом:

1) $3x_1+5x_2+4x_3 \longrightarrow \min,$

$x_1+2x_2+3x_3 \geq 1,\ 2x_1+3x_2+x_3 \geq 1,\ 3x_1+x_2+2x_3 \geq 1,$

$6x_1+6x_2+6x_3 \geq 1,\ 2x_1+4x_3 \geq 1;$

2) $x_1-x_2+x_3 \longrightarrow \min,$

$x_1-x_2+2x_3 \geq 0,\ x_1+x_2-x_3 \geq 0,\ -x_1+2x_2+x_3 \geq 1,$

$x_1+x_3 \geq 2,\ -2x_1-2x_2-3x_3 \geq 3.$

3. Используя теорию двойственности, найти оптимальное решение задачи:

1) $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n \longrightarrow \min,$

$x_1+x_2+\cdots+x_i \geq i,\ i=\overline{1,n},$

$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,n};$

2) $x_1+x_2+x_3 \longrightarrow \min,$

$\lambda x_1+x_2+x_3 \geq \mu_1,\ \ x_1+\lambda x_2+x_3 \geq \mu_2,\ x_1+x_2+\lambda x_3 \geq \mu_3;$

3) $x_1+\lambda x_2+\lambda^2 x_3 \longrightarrow \min,$

$(1+\lambda)x_1+x_2+x_3 \geq \mu_1,\ \ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3 \geq \mu_2,\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3 \geq \mu_3.$

4. Используя теорию двойственности, доказать, что:

1) система линейных уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=\overline{1,m}$ не имеет неотрицательных решений тогда и только тогда, когда совместна система $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq 0, j=\overline{1,n},\ \sum\limits_{i=1}^{m} b_iy_i > 0;$

2)система линейных неравенств $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, j=\overline{1,n}$ совместна тогда и только тогда, когда для любого неотрицательного решения системы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, i=\overline{1,m}$ выполняется условие $\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j \geq 0;$

3)уравнение $\sum\limits_{i=1}^{m} b_iy_i = b$ является следствием совместной системы $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, j=\overline{1,n}$ тогда и только тогда, когда совместна система уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=\overline{1,m},\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j = b.$

5. При каких значениях a система несовместна:

$$
\begin{array}{lll}
1)\ -5y_1 - 2y_2 \le a & 2)\ 9y_1 + 16y_2 \ge a & 3)\ -3y_1 - y_2 \le a + 5 \\
\quad -4y_1 + y_2 \le 5, & \quad 7y_1 - 8y_2 \le 9, & \quad y_1 - 3y_2 - 4y_3 \le 1, \\
\quad 2y_1 + y_2 \le 2, & \quad y_1 + y_2 \le 1, & \quad y_1 + y_3 \le 1, \\
\quad 3y_1 + y_2 \le 4; & \quad y_1 + 2y_2 \le -1; & \quad -2y_1 + y_2 + y_3 \le 1, \\
 & & \quad y_2 + y_3 \le -2?
\end{array}
$$

5.3. Двойственный симплекс–метод

В силу теорем двойственности, решая прямую задачу (1)–(4), мы одновременно с её оптимальным решением получаем также и оптимальное решение двойственной задачи или устанавливаем неразрешимость обеих задач. При этом для задачи в канонической форме $x^*_B = B^{-1}b$, $x^*_N = 0$, а $y^* = c_B B^{-1}$, где x^* и y^* — оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задачи, а B — оптимальный базис. Данное свойство приводит к другому методу решения задачи линейного программирования, а именно к *двойственному симплекс–методу*.

Далее предполагается, что используется та же самая форма симплекс–таблицы и то же её элементарное преобразование.

Описание алгоритма:

0) Начать с двойственно допустимой симплекс–таблицы ($z_{0j} \ge 0,\ j \in J$).

1) Если симплекс–таблица прямо допустима, т. е. $z_{i0} \ge 0,\ i \in I$, то
КОНЕЦ (получено оптимальное решение).

2) Выбрать ведущую строку $r : z_{r0} < 0,\ r \ge 1$.

3) Если $\{j \mid z_{rj} < 0, j \ge 1\} \ne \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s:

$$
\frac{z_{0s}}{|z_{rs}|} = \min\{\ \frac{z_{0j}}{|z_{rj}|}\ \mid\ z_{rj} < 0, j \ge 1\},
$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима, так как $X = \emptyset$).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$
и перейти на шаг 1.

В случае невырожденной двойственной задачи в каждой двойственно допустимой симплекс–таблице элементы z_{0j}, для номеров j небазисных переменных, положительны ($|\{j \mid z_{0j} > 0, j \ge 1\}| = n - m$), что гарантирует сходимость двойственного симплекс–метода за конечное число шагов. В случае вырожденной двойственной задачи можно использовать те же способы, что и в случае прямого симплекс–метода.

Двойственный симплекс–метод удобно использовать для решения задач ЛП вида

$$
cx \to \min
$$

$$
Ax \le b,
$$

$$
x \ge 0,
$$

с неотрицательным вектором c. Тогда после приведения к канонической форме получается двойственно допустимая симплекс–таблица.

Пример. Решить задачу

$$
w(x) = x_1 + 3x_2 \to \min,
$$

$$
x_1 + x_2 + x_3 \le 4,
$$

$$
x_1 - x_2 + x_3 \le -1,
$$

$$
x_i \ge 0, i = 1, 2, 3.
$$

Решение. Так как вектор $c = (1, 3, 0)$ неотрицателен, то данную задачу целесообразно решать двойственным симплекс–методом.

Прежде всего сведем задачу к канонической форме, введя дополнительные неотрицательные переменные:

$$w(x) = x_1 + 3x_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = -1,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Возьмём в качестве базиса два новых столбца: $B = (A_4, A_5)$ и построим симплекс - таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	3	0	0	0
x_4	4	1	1	1	1	0
x_5	-1	1	-1	1	0	1

Таблица является двойственно допустимой, но не является прямо допустимой ($z_{20} = -1 < 0$). Ведущий элемент выбираем однозначно ($r = 2, s = 2$). После преобразования получим таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-3	4	0	3	0	3
x_4	3	2	0	2	1	1
x_2	1	-1	1	-1	0	-1

Получена прямо и двойственно допустимая таблица. Следовательно, базис $B = (A_2, A_4)$ оптимален, при этом $x^* = (0, 1, 0, 3, 0)^\top$ и $w(x^*) = 3$.

Задачи

Решить с помощью двойственного симплекс–метода задачу, выбрав базис B^0 в качестве исходного базиса:

1) $-x_1 - x_2 + 4x_3 \longrightarrow \min,$

   $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$

   $B^0 = (A_1, A_2);$

2) $-x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 35x_4 \longrightarrow \min,$

   $2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 30x_4 = 6,\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -5,$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$

   $B^0 = (A_1, A_2);$

3) $-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \longrightarrow \min,$

   $x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -2,\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -2,\ x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2,$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,$

   $B^0 = (A_1, A_2, A_3).$

Приложение 1

Элементы теории двойственности

В этом приложении содержится небольшой фрагмент общей теории двойственности для задач математического программирования. В настоящее время это богатая результатами теория, имеющая многочисленные приложения. Она является источником ряда методов оптимизации.

Рассмотрим задачу P:

$$f(x) \longrightarrow \inf$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Функции f и φ_i произвольны. Пусть

$$g(x) = \sup_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda), \text{ где}$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x) \text{ — функция Лагранжа.}$$

Тогда

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q, \\ +\infty, & x \notin Q. \end{cases}$$

Следовательно, задача P эквивалентна следующей задаче:

$$g(x) \longrightarrow \inf_{x \in R^n}.$$

По аналогии с функцией g введём функцию

$$h(\lambda) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda).$$

И рассмотрим задачу (D):

$$h(\lambda) \longrightarrow \sup_{\lambda \geq 0}.$$

Назовем ее двойственной задачей к прямой (или исходной) задаче P. Переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ назовем двойственными, а переменные $x_1, \ldots, x_n$ — прямыми.

Если $x \in Q, \lambda \geq 0$, то x — допустимое решение прямой задачи, а λ — допустимое решение двойственной задачи.

Замечание 1. Двойственная задача D эквивалентна задаче выпуклого программирования независимо от того, была ли прямая задача выпуклой или нет. Действительно, функция $L(x, \lambda)$ линейна по λ и, следовательно, функция $-h(\lambda) = \sup_{x \in R^n} -L(x, \lambda)$ выпукла на выпуклом множестве $\lambda \geq 0$. Поэтому задача D эквивалентна задаче выпуклого программирования

$$-h(\lambda) \longrightarrow \inf_{\lambda \geq 0}.$$

В частности, отсюда следует, что для невыпуклой задачи P задача, двойственная к двойственной задаче, не может совпадать с исходной. Следует отметить, что это возможно и в задачах выпуклого программирования.

Пример. Рассмотрим следующую задачу P:

$$\|x\|^2 \longrightarrow \inf_{x \in R^n}$$

$$\|x\|^2 - 1 \leq 0.$$

Оптимальное значение целевой функции данной задачи равно 0, а нулевой вектор пространства R^n является оптимальным решением. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = \|x\|^2 + \lambda(\|x\|^2 - 1).$$

Очевидно, что целевая функция двойственной задачи имеет следующий вид

$$h(\lambda) = \begin{cases} -\lambda, \ \lambda + 1 \geq 0, \\ -\infty, \ \lambda + 1 < 0. \end{cases}$$

Таким образом двойственная задача является задачей линейного программирования:

$$-\lambda \longrightarrow \inf_{\lambda \geq 0}$$

$$\lambda + 1 \geq 0.$$

Поэтому двойственная к ней задача не может совпасть с исходной задачей.

Замечание 2. Выпуклость функции $-h(\lambda)$ означает, что любой её локальный оптимум является глобальным оптимумом. Поэтому двойственную задачу решать, вообще говоря, проще, чем исходную задачу P. И это – один из доводов, в силу которых понятие двойственности стало чрезвычайно употребительным в математическом программировании.

Лемма 1 (Слабая теорема двойственности).

$$\forall x \in Q \ \forall \lambda \geq 0 \ (h(\lambda) \leq f(x)).$$

Неравенство леммы 1 всегда приводит к тому, что оптимальное значение двойственной задачи либо её хорошая оценка используется как нижняя граница в методах ветвей и границ и в разного рода метаэвристиках.

Лемма 2. *Если $\overline{x} \in Q$ и $\overline{\lambda} \geq 0$ и $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$, то $\overline{x}$ и $\overline{\lambda}$ — оптимальные решения задачи P и D, соответственно.*

Теорема 1. *Вектора $\overline{x}, \overline{\lambda}$ — оптимальные решения прямой и двойственной задачи и $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$ тогда и только тогда, когда пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа. При этом $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.*

Если функция Лагранжа пары двойственных задач не имеет седловой точки, то разность $f(x^*) - h(\lambda^*)$, где x^* и λ^* – оптимальные решения этих задач, называется скачком или разрывом двойственности.

Следствие 1. *Пусть $\overline{x} \in R^n$, $\overline{\lambda} \geq 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа.

2. $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.

3. $\min\limits_{x} \sup\limits_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max\limits_{\lambda \geq 0} \inf\limits_{x} L(x, \lambda)$.

Следствие 2. *Пусть* $x^*, \overline{x} \in Q$, $\lambda^*, \overline{\lambda} \geq 0$.

Если пары $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *и* (x^*, λ^*) *— седловые точки функции Лагранжа, то пары* $(\overline{x}, \lambda^*)$ *и* $(x^*, \overline{\lambda})$ *— также седловые точки функции Лагранжа, причем*

$$L(x^*, \overline{\lambda}) = L(\overline{x}, \lambda^*) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = L(x^*, \lambda^*).$$

Пусть задача P — задача выпуклого программирования и выполняется условие Слейтера. Тогда

Следствие 3. *Допустимое решение* $\overline{x}$ *прямой задачи является оптимальным тогда и только тогда, когда существует* $\overline{\lambda} \geq 0$ *такой, что* $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.

Экономическая интерпретация функции Лагранжа и теории двойственности

Приведём один из вариантов экономической интерпретации функции Лагранжа и теории двойственности. Для этого рассмотрим модель конкурентного взаимодействия производства и рынка. Промышленность стремится минимизировать свои издержки, возникающие при производстве продукции для рынка, а также при покупке сырья, недостающего для производства. Частично промышленность может уменьшить свои издержки за счёт продажи на рынке тех видов сырья, которые в избытке. Рынок стремится максимизировать свою прибыль, которая складывается из дохода, который он получает, при продаже ресурсов производству и затрат, которые он несёт при покупке произведённой продукции. Понятно, что эти затраты не могут быть меньше издержек производства. Промышленность может управлять уровнем производства продукции, а рынок – ценами на сырьё, которое промышленность приобретает или продаёт на рынке.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – издержки производства при заданном его уровне x, где x_j – уровень производства j-го вида продукции. Также известно, что в промышленности используется m видов продукции. Обозначим через b_i объём i-го ресурса. Пусть $\varphi_i^1(x)$ – расход ресурса i при уровне производства x. Кроме того, пусть $\varphi_i(x) = \varphi_i^1(x) - b_i$. Если $\varphi_i(x) \leq 0$, то после производства остаются излишки сырья, если же величина $\varphi_i(x)$ положительна, то первоначального количества сырья было недостаточно для достижения уровня производства, равного x. В рамках такой интерпретации производство описывается следующей моделью:

$$f(x) \longrightarrow \inf$$

$$\varphi_i^1(x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Пусть $\lambda_i \geq 0$ – цена, по которой единица сырья вида i покупается или продаётся на рынке. Если $\varphi_i(x) \leq 0$, то промышленность может продавать излишки сырья и уменьшить свои издержки на величину $\lambda_i \varphi_i(x)$. Аналогично, если величина $\varphi_i(x)$ положительна, то необходимо закупить $\varphi_i(x)$ единиц сырья, увеличив издержки производства на величину $\lambda_i \varphi_i(x)$. В этом случае промышленность обеспечит себя дополнительным сырьём, достаточным для уровня производства x.

Пусть фиксирован уровень производства и цены на сырьё. Тогда функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$$

представляет собой суммарные издержки производства. Они складываются из издержек на производство конечной продукции $f(x)$, затрат на покупку недостающего для производства сырья и дохода от продажи излишков сырья. С точки зрения рынка функция Лагранжа представляет собой прибыль рынка, которая складывается из доходов за продажу сырья производству и затрат на покупку промышленной продукции, которые не могут быть ниже издержек производства.

При фиксированных ценах λ_i, установленных рынком, промышленность стремится минимизировать свои издержки выбором уровня производства x. Другими словами при выборе своего решения промышленность ориентируется на величину $\min_x L(x, \lambda)$, которая является целевой функцией $h(\lambda)$ двойственной задачи. Так как рынок получает свои доходы от продажи сырья, то при заданном уровне производства он стремится достичь максимального уровня доходности $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$, устанавливая соответствующие цены на сырьё. Следовательно, при выборе своей стратегии рынок ориентируется на целевую функцию прямой задачи.

Если у функции Лагранжа имеется седловая точка (x^*, λ^*), то это означает, что в рассматриваемой модели существует экономическое конкурентное равновесие, при котором

$$\max_{\lambda} L(x^*, \lambda) = \min_{x} L(x, \lambda^*)$$

с уровнем производства x^* и ценами на сырьё λ^*. Это означает, что никакое изменение уровня производства x промышленностью не может уменьшить издержки производства. А с другой стороны это означает, что никакая игра с ценами на сырьё не может увеличить эти издержки. На эту ситуацию можно взглянуть и с позиций рынка. То есть, никакое изменение уровня производства x промышленностью не может уменьшить доходы рынка, а с другой стороны никакие манипуляции с ценами на сырьё не могут увеличить эти доходы. Таким образом, состояние равновесия приводит к устойчивому рынку.

Экономическая интерпретация необходимых условий оптимальности Куна – Таккера

Важной частью теории экстремальных задач являются классические условия оптимальности Куна – Таккера. Приведём их содержательную интерпретацию на основе предложенной выше экономической интерпретации функции Лагранжа и теории двойственности.

Далее будем предполагать, что функции $f(x), \varphi_i(x)$ – непрерывно дифференцируемы. Пусть x^* – локальный минимум задачи P. Ограничение φ_i называется **активным** в точке x^*, если $\varphi_i(x^*) = 0$. Обозначим через $I(x^*)$ множество номеров ограничений активных в данной точке. В предположении, что выполняются какие-нибудь условия регулярности в точке x^*, например, вектора $\varphi_i^{'}(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы, имеет место следующее утверждение

Теорема 2 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). *Пусть x^* — локальный экстремум задачи P. Тогда найдутся такие множители λ, что*

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

$$-f^{'}(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i^{'}(x^*), \tag{2}$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Приведём экономическую интерпретацию этих условий в рамках концепции устойчивого рынка рассмотренной выше, предполагающей наличие седловой точки (x^*, λ^*) у функции

Лагранжа. Условия (1) тривиальны, т.к. величины λ_i^* играют роль цен, а следовательно, неотрицательны. Проверим, что не может быть недостатка какого-нибудь ресурса. Допустим, что $\varphi_i(x^*) > 0$. Тогда неограничено повышая цену λ_i^*, рынок мог бы увеличивать издержки производства до бесконечности, что невозможно в условиях устойчивого рынка.

Условие дополняющей нежёсткости (3) также имеет экономическую интерпретацию. Предположим, что $\varphi_i(x^*) < 0$ и $\lambda_i^* > 0$. В этом случае рынок также может увеличить издержки производства уменьшая цену i-го ресурса и тем самым уменьшая прибыль производства за счёт продажи его избытка. Понятно, что такого не может быть в условиях равновесия. Поэтому $\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0$ и, следовательно, излишки сырья не приносят прибыли.

Остаётся понять условие (2) теоремы. Из определения седловой точки следует, что

$$L(x^*, \lambda^*) = \min_x L(x, \lambda^*).$$

Т.е. вектор x^* является экстремальной точкой функции $L(x, \lambda^*)$. И, следовательно, градиент этой функции равен 0 в точке x^*:

$$f^{'}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i^{'}(x^*) = 0.$$

С экономической точки зрения $-f^{'}(x^*)$ – маргинальные издержки от производства продукции, а $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i^{'}(x^*)$ – маргинальные затраты на сырьё. Т.е. в точке оптимума маргинальные издержки совпадают с маргинальными затратами, что совпадает с (2).

Приложение 2

Метод возможных направлений

Любая основная задача выпуклого программирования сводится к задаче с линейной целевой функцией введением дополнительной переменной x_{n+1}:

$$x_{n+1} \to \min_{\overline{x} \in \widetilde{X}},$$

$$\widetilde{X} = \{\overline{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in E_{n+1} |\ \varphi_j(x_1, ..., x_n) \le 0 \ (j = \overline{1, m}),\ f(x_1, ..., x_n) - x_{n+1} \le 0\}.$$

Здесь $f(x_1, ..., x_n)$ — целевая функция исходной задачи.

Поэтому, не теряя общности, можно рассматривать основную задачу выпуклого программирования в виде

$$f(x) =< c, x >\to \min_{x \in X}, \tag{1}$$

$$X = \{x = (x_1, ..., x_n) \in E_n |\ \varphi_j(x) \le 0 \ (j = \overline{1, m})\}, \tag{2}$$

где c — заданный вектор, а $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, m})\}$ — дифференцируемые выпуклые функции. В дальнейшем предполагается, что выполнено условие регулярности Слейтера.

Пусть задана точка $x \in X$. Через $I(x) = \{j \in \{1, ..., m\} |\ \varphi_j(x) = 0\ \}$, как и ранее, обозначим множество индексов активных ограничений, а для установления предела допускаемой погрешности при численном решении задачи (1)–(2) введём множество

$$J(x, \delta) = \{j \in \{1, ..., m\} |\ -\delta < \varphi_j(x) \le 0\ \},$$

где δ — заданный положительный параметр.

Пусть $\delta_0 > 0$ и $x^0 \in X$ — некоторые начальные условия и пусть уже известно k-е приближение $\delta_k > 0$ и $x^k \in X$ $(k \geq 0)$.

Рассмотрим следующие задачи линейного программирования.

Задача A

$$\sigma \to \min_{\sigma,p}, \tag{3}$$

$$< c, p > \leq \sigma, \tag{4}$$

$$< \varphi_j'(x^k), p > \leq \sigma \quad (j \in J(x^k, \delta_k)), \tag{5}$$

$$|p_i| \leq 1 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{6}$$

где последние условия — это условия нормировки вектора p, которые позволяют ограничить допустимую область рассматриваемой задачи.

Обозначим оптимальное решение этой задачи через (σ_k, p^k). Так как нулевая точка является допустимой, то $\sigma_k \leq 0$. Из этого факта и условий (4) и (6) следует существование оптимального решения.

Задача B

$$\begin{gathered} \sigma \to \min_{\sigma,p}, \\ < c, p > \leq \sigma, \\ < \varphi_j'(x^k), p > \leq \sigma \quad (j \in I(x^k)), \\ |p_i| \leq 1 \quad (i = \overline{1, n}). \end{gathered} \tag{7}$$

Так как $I(x^k) \subseteq J(x^k, \delta_k)$, то $\overline{\sigma}_k \leq \sigma_k$, где через $\overline{\sigma}_k$ обозначено оптимальное значение целевой функции задачи B. Заметим, что решение этой задачи также всегда существует.

Теорема 1 (критерий оптимальности). Пусть (σ^*, p^*) — оптимальное решение задачи B для $x^* \in X$. Тогда $\sigma^* = 0$ в том и только в том случае, когда x^* — оптимальное решение задачи (1)–(2).

Опишем одну k-ю итерацию метода возможных направлений. При этом уже имеем $\delta_k > 0$ и $x^k \in X$ $(k = 0, 1, ...)$.

Шаг 1. Решить задачу A (задачу (3)–(6)). Пусть (σ_k, p^k) — оптимальное решение.

Если $\sigma_k < -\delta_k$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k$ и переходим на шаг 2.

Если $-\delta_k \leq \sigma_k < 0$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k/2$ и переходим на шаг 2.

Если $\sigma_k = 0$, то решаем задачу B и находим решение $\overline{\sigma}_k, \overline{p}^k$.

Если $\overline{\sigma}_k = 0$, то вектор x^k согласно критерию оптимальности является оптимальным решением исходной задачи. КОНЕЦ.

Если $\overline{\sigma}_k < 0$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k/2,\ p^k = \overline{p}^k$.

Шаг 2. Определить величину шага α_k (в направлении p^k).

Пусть α_{kj} — наименьший положительный корень уравнения

$$\varphi_j(x^k + \alpha p^k) = 0.$$

Он может быть найден, например, методом дихотомии. Полагаем

$$\alpha_k = \min\{\alpha_{kj} |\ 1 \leq j \leq m\ \}.$$

Шаг 3. Определить

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k p^k, \\ J(x^{k+1}, \delta_{k+1}) &= \{j |\ -\delta_{k+1} < \varphi_j(x^{k+1}) \leq 0\ \}, \\ I(x^{k+1}) &= \{j |\ \varphi_j(x^{k+1}) = 0\ \}. \end{aligned}$$

Шаг 4. Если выполнены условия окончания процесса вычислений, то КОНЕЦ, иначе полагаем $k := k + 1$ и переходим на шаг 1.

В данном описании алгоритма не конкретизируются условия окончания вычислений, так как они могут существенно зависеть от рассматриваемой задачи.

Теорема 2. Пусть $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, m})$ – гладкие выпуклые функции, выполнено условие Слейтера и множество X ограничено. Тогда:

1) последовательность $\{f(x^k)\}$ сходится к величине $f^* = \min_{x \in X} f(x)$, т. е. $f(x^k) =< c, x^k > \to f^*$ при $k \to \infty$;

2) любая предельная точка x^* последовательности $\{x^k\}$ есть точка минимума функции $f(x)$ на множестве допустимых решений X.

К описанному методу решения можно сделать следующие замечания:

1. Если необходимо найти начальную точку $x^0 \in X$, то на первом этапе решается вспомогательная задача выпуклого программирования

$$\xi \to \min$$

при ограничениях

$$\varphi_j(x) \le \xi \quad (j = \overline{1, m}).$$

Эту задачу можно решать методом возможных направлений, взяв в качестве исходной любую точку (ξ', x') такую, что $x' \in E_n$, $\xi' \ge \max_{1 \le j \le m} \varphi_j(x')$. При выполнении условия Слейтера через конечное число шагов получим $\xi_k \le 0$, чему соответствует допустимая начальная точка $x^0 := x^k$ для задачи (1)–(2).

После этого переходим ко второму этапу: поиску оптимального решения основной задачи (1)–(2).

2. На шаге 4 итерации метода возможных направлений в качестве критерия остановки можно взять оценку отклонения по целевой функции

$$\left| \min_{x \in X} < c, x > - < c, x^k > \right| \le \left| \min_{x \in X_k} < c, x > - < c, x^k > \right|,$$

т. е. на k-й итерации необходимо решить задачу линейного программирования

$$< c, x > \to \min_{x \in X_k},$$

$$X_k = \{x | \; \varphi_j(x^k) + < \varphi_j'(x^k), x - x^k > \le 0 \quad (j = \overline{1, m}) \; \}.$$

Вычисления прекращаются, если правая часть верхнего неравенства станет меньше заданной величины.

3. Условия нормировки вектора направления p в задачах A и B необходимы для того, чтобы обеспечить существование конечного решения. Если существование такого решения следует в конкретной задаче из каких-то других соображений, то некоторые из ограничений

$$|p_i| \le 1 \quad (i = \overline{1, n})$$

можно убрать, что, естественно, упростит решаемую задачу.

Из приведённого ниже примера видно, что метод возможных направлений даже для сравнительно простых задач требует большого объёма вычислений. Поэтому этот метод не рассматривается на семинарских занятиях, хотя в теоретическом курсе он излагается полностью. Мы посчитали необходимым привести хотя бы один иллюстративный пример в данном учебном пособии, так как на нём хорошо видны общие особенности численных методов решения задач выпуклого программирования.

Пример. Решить методом возможных направлений задачу

$$z(x) = x_3 \to \min_{x_1, x_2, x_3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &\equiv x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 \le 0, \\
\varphi_2(x) &\equiv x_1^2 + x_2^2 - x_1 + x_2 - x_3 - 3 \le 0, \\
\varphi_3(x) &\equiv x_1^2 + x_1 - 4x_2 - x_3 + 3 \le 0,
\end{aligned}$$

взяв в качестве начальной точку $x^0 = (1, -1, 9)^\top$.

Решение. Возьмём $\delta_0 = 0.5$. Тогда $J(x^0, \delta_0) = I(x^0) = \{3\}$, так как $\varphi_1(x^0) = -11 < -\delta_0$, $\varphi_2(x^0) = -12 < -\delta_0$, $\varphi_3(x^0) = 0 > -\delta_0$.

Первая итерация. 1. Решаем задачу A:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \le 0,$$

$$< \varphi_3'(x^0), p > -\sigma \equiv 3p_1 - 4p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$

$$-p_1 - 1 \le 0,\ p_1 - 1 \le 0,\ -p_2 - 1 \le 0,\ p_2 - 1 \le 0.$$

Так как в задачах A и B на каждой итерации первое ограничение $< c, p > \le \sigma$ всегда будет иметь вид $p_3 \le \sigma$, а оптимальное решение таково, что $\sigma_k \le 0$, то в любой точке x^k имеем неравенство $p_3^k \le 0$. В силу второго ограничения $p_3 \ge -\sigma + 3p_1 - 4p_2$. Правая часть здесь, очевидно, ограничена снизу. Таким образом, компонента p_3 ограничена в силу имеющихся ограничений. Это справедливо для всех рассматриваемых далее задач A и B. Поэтому ограничение $|p_3| \le 1$ можно убрать.

Решив упрощённую задачу A, получим $p^0 = (-1, 1, -3.5)^\top$, $\sigma_0 = -3.5$. Так как $\sigma_0 < -\delta_0$, то полагаем $\delta_1 = \delta_0 = 0.5$.

2. Определение величины шага α_0.

Двигаться следует вдоль луча

$$x_1 = 1 - \alpha,\ x_2 = -1 + \alpha,\ x_3 = 9 - 3.5\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Наименьшим из положительных корней уравнений

$$\varphi_j(x^0 + \alpha p^0) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

является $\alpha_0 = 2.1$, при этом $\varphi_2(x^0 + \alpha_0 p^0) \approx 0$.

3. Определение новой точки и множеств индексов.

Новое приближение x^1 определяется по формуле

$$x^1 = x^0 + \alpha_0 p^0 = (-1.1, 1.1, 1.65)^\top,$$

при этом $\varphi_1(x^1) = -1.34 < -\delta_1$, $-\delta_1 < \varphi_2(x^1) = -0.03$, $\varphi_3(x^1) = -2.94 < -\delta_1$. Значит, $J(x^1, \delta_1) = \{2\}$.

Заметим, что здесь $\max_{1 \le j \le 3} \varphi_j(x^1) = -0.03 \ne 0$, но больше $-\delta_1$. Параметр δ введён именно для того, чтобы не требовалось находить точное значение корня α. При малых значениях δ_k достаточно найти такое $\alpha_{kj} > 0$, что $-\delta_k < \varphi_j(x^k + \alpha_{kj} p^k) \le 0$, и выбрать минимальное из них по j. Конечно, чем точнее будут находиться корни, тем, вообще говоря, лучше.

Вторая итерация. 1. Решаем задачу A:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \le 0,$$
$$< \varphi_2'(x^1), p > -\sigma \equiv -3.2p_1 + 3.2p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$
$$-p_1 - 1 \le 0,\ p_1 - 1 \le 0,\ -p_2 - 1 \le 0,\ p_2 - 1 \le 0.$$

Решив эту задачу линейного программирования, получим $p^1 = (1, -1, -3.2)^\top,\ \sigma_1 = -3.2$. Так как $\sigma_1 < -\delta_1$, то $\delta_2 = \delta_1 = 0.5$.

2. Определение величины шага α_1. Двигаемся вдоль луча

$$x_1 = -1.1 + \alpha,\ x_2 = -1.1 - \alpha,\ x_3 = 1.65 - 3.2\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Наименьшим из положительных корней уравнений

$$\varphi_j(x^1 + \alpha p^1) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

является $\alpha_1 = 0.45$, при этом $\varphi_3(x^1 + \alpha_1 p^1) \approx 0$.

3. Определение новой точки и множеств индексов.

Новое приближение x^2 определяется по формуле

$$x^2 = x^1 + \alpha_1 p^1 = (-0.65, 0.65, 0.21)^\top.$$

Так как $\varphi_1(x^2) = -1.14 < -\delta_2,\ \varphi_2(x^2) = -1.07 < -\delta_2,\ -\delta_2 < \varphi_3(x^2) = -0.04 < 0$, то $J(x^2, \delta_2) = \{3\}$.

Третья итерация. 1. Решаем задачу A:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \le 0,$$
$$< \varphi_3'(x^2), p > -\sigma \equiv -0.3p_1 - 4p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$
$$-p_1 - 1 \le 0,\ p_1 - 1 \le 0,\ -p_2 - 1 \le 0,\ p_2 - 1 \le 0.$$

Решив, получим $p^2 = (1, 1, -2.15)^\top,\ \sigma_2 = -2.15 < -\delta_2,\ \delta_3 = \delta_2 = 0.5$.

2. Как и выше, определим величину шага α_2: $\alpha_2 = 0.36$, при этом $\varphi_2(x^2 + \alpha_2 p^2) \approx 0$.

3. Определение новой точки и множеств индексов:

$$x^3 = x^2 + \alpha_2 p^2 = (-0.29, 1.01, -0.57)^\top,\ J(x^3, \delta_3) = \{1, 2\},$$

так как $\varphi_1(x^3) = -0.32 > -\delta_3,\ \varphi_2(x^3) = -0.03 > -\delta_3,\ \varphi_3(x^3) = -0.68 < -\delta_3$.

Четвёртая итерация. 1. Решаем задачу A:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \le 0,$$
$$< \varphi_1'(x^3), p > -\sigma \equiv -0.56p_1 + 2.46p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$
$$< \varphi_2'(x^3), p > -\sigma \equiv -1.58p_1 + 3.02p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$
$$-p_1 - 1 \le 0,\ p_1 - 1 \le 0,\ -p_2 - 1 \le 0,\ p_2 - 1 \le 0.$$

Решив, получим $p^3 = (1, -1, -1.51)^\top,\ \sigma_3 = -1.51 < -\delta_3$. Значит, опять $\delta_4 = \delta_3 = 0.5$.

2. Как и выше, определим величину шага α_3: $\alpha_3 = 0.12$, при этом $\varphi_3(x^3 + \alpha_3 p^3) = 0$ (вычисления проводим с точностью до 0.01).

3. Определение новой точки и множеств индексов:

$$x^4 = x^3 + \alpha_3 p^3 = (-0.17, 0.89, -0.75)^\top,\ J(x^4, \delta_4) = \{1, 2, 3\},$$

так как $\varphi_1(x^4) = -0.49 > -\delta_4,\ \varphi_2(x^4) = -0.37 > -\delta_4,\ \varphi_3(x^4) = 0$.

Пятая итерация. 1. Решаем задачу A:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_1'(x^4), p > -\sigma \equiv -0.56p_1 + 2.22p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_2'(x^4), p > -\sigma \equiv -1.34p_1 + 2.78p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_3'(x^4), p > -\sigma \equiv 0.66p_1 - 4p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$-p_1 - 1 \leq 0,\ p_1 - 1 \leq 0,\ -p_2 - 1 \leq 0,\ p_2 - 1 \leq 0.$$

Решив эту задачу, получим, что $\sigma_4 = 0$. Значит, необходимо решить задачу B. Так как $I(x^4) = \{3\}$, то решаем задачу линейного программирования:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_3'(x^4), p > -\sigma \equiv 0.66p_1 - 4p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$-p_1 - 1 \leq 0,\ p_1 - 1 \leq 0,\ -p_2 - 1 \leq 0,\ p_2 - 1 \leq 0.$$

Получим $\overline{p}^4 = (-1, 1, -2.33)^\top$, при этом $\overline{\sigma}_4 = -2.33 < 0$. Следовательно, $\delta_5 = \delta_4/2 = 0.25,\ p^4 = \overline{p}^4$.

2. Определение шага α_4. Двигаемся вдоль луча

$$x_1 = -0.17 - \alpha,\ x_2 = 0.89 + \alpha,\ x_3 = -0.75 - 2.33\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Наименьшим из положительных корней уравнений

$$\varphi_j(x^4 + \alpha p^4) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

является $\alpha_1 = 0.06$, при этом $\varphi_2(x^4 + \alpha_4 p^4) = 0$.

3. Определение новой точки и множеств индексов:

$$x^5 = x^4 + \alpha_4 p^4 = (-0.23, 0.95, -0.88)^\top,\ J(x^5, \delta_5) = \{1, 2, 3\},$$

так как $\varphi_1(x^5) = -0.19 > -\delta_5,\ \varphi_2(x^5) = 0 > -\delta_5,\ \varphi_3(x^5) = -0.1 > -\delta_5$.

Шестая итерация. 1. Решаем задачу A:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_1'(x^5), p > -\sigma \equiv -0.56p_1 + 2.34p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_2'(x^5), p > -\sigma \equiv -1.46p_1 + 2.90p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$
$$< \varphi_3'(x^5), p > -\sigma \equiv -0.54p_1 - 4p_2 - p_3 - \sigma \leq 0,$$

$$-p_1 - 1 \le 0,\ p_1 - 1 \le 0,\ -p_2 - 1 \le 0,\ p_2 - 1 \le 0.$$

Решив, получим $p^5 = (1, 0.18, -0.08)^\top$, $\sigma_5 = -0.08 > -\delta_5$. Значит, опять происходит уменьшение параметра δ: $\delta_6 = \delta_5/2 = 0.125$.

2. Определение величины шага α_5:

Двигаемся вдоль луча

$$x_1 = -0.23 + \alpha,\ x_2 = 0.95 + 0.18\alpha,\ x_3 = -0.88 - 0.08\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Наименьшим из положительных корней уравнений

$$\varphi_j(x^5 + \alpha p^5) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

является $\alpha_5 = 0.34$, при этом $\varphi_3(x^5 + \alpha_5 p^5) = 0$.

3. Определение новой точки и множеств индексов:

$$x^6 = x^5 + \alpha_5 p^5 = (0.11, 1.01, -0.91)^\top,\ J(x^6, \delta_6) = \{1, 3\},$$

так как $\varphi_1(x^6) = -0.05 > -\delta_5,\ \varphi_2(x^6) = -0.16 < -\delta_5,\ \varphi_3(x^6) = 0 > -\delta_5$.

Седьмая итерация. Последовательно, как и выше, находим $p^6 = (-1, -0.15, -0.26)^\top$, $\delta_7 = \delta_6 = 0.125$, $\alpha_6 = 0.2$, $x^7 = (-0.09, 0.98, -0.96)^\top$.

Восьмая итерация. Находим $p^7 = (0.3, -0.03, -0.18)^\top$, $\delta_8 = \delta_7 = 0.125$, $\alpha_7 = 0.09$, $x^8 = (-0.06, 0.98, -0.98)^\top$.

Применение критерия оптимальности решения. Рассмотрим точку $x^* = (0, 1, -1)^\top$, к которой, видимо, сходится последовательность точек $\{x^k\}$. Имеем равенства

$$\varphi_1(x^*) = 0, \quad \varphi_2(x^*) = 0, \quad \varphi_3(x^*) = 0,$$

т. е. точка x^* принадлежит всем поверхностям.

Решим в этой точке задачу B:

$$\sigma \to \min,$$

$$< c, p > -\sigma \equiv p_3 - \sigma \le 0,$$

$$< \varphi_1'(x^*), p > -\sigma \equiv 3p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$

$$< \varphi_2'(x^*), p > -\sigma \equiv -p_1 + 3p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$

$$< \varphi_3'(x^*), p > -\sigma \equiv p_1 - 4p_2 - p_3 - \sigma \le 0,$$

$$-p_1 - 1 \le 0,\ p_1 - 1 \le 0,\ -p_2 - 1 \le 0,\ p_2 - 1 \le 0.$$

Получим $\min_{\sigma,p} \sigma = \sigma^* = 0$. В силу критерия оптимальности точка x^* является решением задачи.

Библиографический список

Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.; Л.: Гос. изд–во физ.–мат. лит., 1958. Т. 1.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.

Капустин В. Ф. Практические занятие по курсу математического программирования. Л.: ЛГУ, 1976.

Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука, 1969.

Глебов Н. И. и др. Методы оптимизации. Учеб. пособие / Н. И. Глебов, Ю. А. Кочетов, А. В. Плясунов. Новосибирск: НГУ, 2000.

Ответы к заданиям

Раздел 1.

1) нет; 2) $(-1,0]$; 3) $\{2,3\}\cup(4,+\infty)$.

Раздел 2.1.

1) $f_{max}=1$ при $x\in\{2\pi n,\pi/2+2\pi n,\ n\in Z\}$; $f_{min}=-1$ при $x\in\{\pi+2\pi n,3\pi/2+2\pi n,\ n\in Z\}$;

2) $f_{max}=1$ при $x=0$; $\inf(f)=0$ при $x\longrightarrow\pm\infty$;

3) $\sup(f)=+\infty$ при $x\longrightarrow-1$; $f_{min}=-1/24$ при $x=7/5$;

4) $\sup(f)=+\infty$ при $x\longrightarrow+\infty$; $f_{min}=\pi/3-\sqrt{3}$ при $x=\pi/3$;

5) $f_{max}=e$ при $x=-1$; $f_{min}=0$ при $x=0$;

6) $f_{max}=1/e$ при $x=\pm1$; $f_{min}=0$ при $x=0$;

7) $f_{max}=14$ при $x=-7$; $f_{min}=-3/4\sqrt[3]{4}$ при $x=3/4$;

8) $f_{max}=2$ при $x=2$; $f_{min}=-7\sqrt[3]{6}$ при $x=-7$;

9) $\sup(f)=+\infty$ при $x\longrightarrow+\infty$; $f_{min}=-\sqrt[3]{9}$ при $x=-1$.

Раздел 2.2.

1.1) Экстремума нет.

1.2) Локальный минимум в точках $(\sqrt{2},2\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$, в точке $(0,0)$ экстремума нет.

1.3) Бесконечное число локальных минимумов.

1.4) Минимум и максимум неявно заданной функции $f(x)$ достигаются в одной и той же точке $(1,-1)$: $f_{max}=4$, $f_{min}=0$.

1.5) $f_{max}=-4+2\sqrt{6}$ при $x=(-3+\sqrt{6},-3+\sqrt{6})$; $f_{min}=-4-2\sqrt{6}$ при $x=(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6})$.

Раздел 2.3.1.

1) $f_{max}=3$ в точке $(0,1)$; $f_{min}=0$ в точке $(0,0)$;

2) $f_{max}=3$ в точке $(3,0)$; $f_{min}=-2$ в точке $(0,2)$;

3) $f_{max}=\sqrt{2}$ в точке $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$; $f_{min}=-1$ в точке $(0,-1)$;

4) $f_{max}=58$ в точке $(9,0)$; $f_{min}=0$ в точке $(2,3)$;

5) $f_{max}=3$ в точке $(0,0,0)$; $f_{min}=4/3$ в точке $(1/3,1/3,1/3)$.

Раздел 2.3.2.

1.1) $f_{max}=1/(3\sqrt{6}$ в точках вида $(-1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$; $f_{min}=-1/3\sqrt{6}$ в точках вида $(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$. Учитывая симметрию, легко определить и остальные точки.

1.2) С учётом симметрии исследуйте на экстремум точки вида $(2,2,1)$ и $(4/3,4/3,7/3)$.

1.4) $f_{max}=4/\sqrt{2}$ в точке $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},2/\sqrt{2})$; $f_{min}=-4/\sqrt{2}$ в точке $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-2/\sqrt{2})$.

1.5) Локальный максимум достигается в точке $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$. Покажите, что целевая функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

1.6) 3) $f_{max}=+\infty$; $f_{min}=-5/4$ в точках $(-1/2,-1/2,1/2)$ и $(3/2,3/2,-7/2)$.

2. В общем случае решение имеет вид: $x=R_x/R$, $y=R_y/R$, $z=R_z/R$, где $R_x=\sum_{i=1}^N x_i$, $R_y=\sum_{i=1}^N y_i$, $R_z=\sum_{i=1}^N z_i$, $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$.

3. $f_{min}=n/\sqrt[n]{a}$ при $x_i=\sqrt[n]{a}$, $(i=\overline{1,n})$.

4. $z_{max}=-z_{min}=a/(2\sqrt{2})$, $x_{max}=-x_{min}=y_{max}=-y_{min}=a$.

5. Кратчайшее расстояние определяется величиной $(a_1x_{10}+a_2x_{20}+a_3x_{30}+a_0)^2/(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$.

Раздел 2.3.3.

1) $f_{max}=2/7$ в точке $(4/7,1/7)$; $f_{min}=-2$ в точке $(0,1)$;

3) $f_{max}=13$ в точке $(2,-1)$; $f_{min}=-1$ в точках $(0,-1)$ и $(1,1)$;

4) f_{max} в точке $(0,0)$; f_{min} в точке $(4.4,3.8)$;

6) Целевая функция не ограничена ни снизу, ни сверху;

7) $f_{max}=1+\sqrt{2}$ в точке $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,1)$; $f_{min}=-1/2$ в точке $(-1/2,-1/2,1/2)$;

8) $f_{max} = 1 + 3\sqrt{3}/2$ в точке $(\sqrt{3}/2, 1/2, 1 + \sqrt{3})$; $f_{min} = -1$ в точке $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$;

9) $f_{max} = 16$ в точках $(4, 0)$ и $(-4, 0)$; $f_{min} = -16$ в точках $(0, 4)$ и $(0, -4)$;

11) f_{max} в точке $(\sqrt{3}, 1)$; f_{min} в точке $(0, 2)$;

12) $f(0, 0, t) \longrightarrow -\infty, f(t, 0, 0) \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$;

13) Функция не ограничена сверху; $f_{min} = 3$ в точке $(-1, -1)$;

15) Функция не ограничена сверху; $f_{min} = -1/2$ в точке $(-1/2, -1/2)$.

Раздел 3.1.

№16. а) $a = 0$; б) $a \in (-\infty, -1/4] \cup \{0\}$; в) $a \leq 0$; г) $a \in [-2, -1]$; д) $a \leq 2$ или $a \geq 3$; е)$a \in \{0\} \cup [1/e, +\infty)$; ж) a любое; з) $a \in [0, e]$ и) при $a \in [-1/4, 0]$ множество выпукло и не пусто; к) при $a \geq 1/e$ множество выпукло и не пусто.

№18. а) $a \geq 0$; б) $a \geq 0$ и $ac \geq b^2$; в) $a \geq 0, b \geq 0$.

Раздел 3.2.

1) $x^* = (1/4, 0)$; 2) $x^* = (0, -4)$; 3) $x^* = (1, -1)$; 4) $x^* = (5, 0, 1)$; 5) $x^* = (1, 0)$; 6) $x^* = (-3, -3, 0)$; 7) $x^* = (3/14, 1/7, 0)$; 8) $x^* = (0, 0)$; 9) $x^* = (0.05, -0.2)$; 10) $x^* = (0.125, 0)$; 11) $x^* = (2, 1)$; 12) $x^* = (1, 2, 1)$; 13) $x^* = (2, 8, 0)$.

Раздел 4.4.

1.1) $w^* = -1$; 1.2) $w^* = -8$;

2.1) $w^* = -4$; 2.2) $w^* = -6$; 2.3) $w^* = -3$; 2.4) $w^* = -11$; 2.5) неразрешима; 2.6) $w^* = -15$; 2.7) $w^* = -12$.

Раздел 4.5.

1) $w^* = -1$; 2) $w^* = -1$; 3) $w^* = -1$.

Раздел 4.6.

1) Целевая функция не ограничена снизу на множестве X; 2) $w^* = -3$; 3) $X = \emptyset$; 4) $w^* = -6$; 5) $w^* = 10$; 6) Целевая функция не ограничена снизу на множестве X.

Раздел 5.2.

1.1) $w^* = 1$; 1.2) $w^* = 1$; 1.3) $w^* = 11/3$.

2.1) $w^* = 2$; 2.2) $X = \emptyset$;

3.1) $w^* = n$;

3.2) a) $w^* = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)/(\lambda + 2)$, если $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$; b) $w^* = \max_{i=1,2,3} \mu_i$, если $\lambda = 1$; c) задача неразрешима, если $\lambda = -2$;

3.3) $w^* = \{(2-\lambda^2)\mu_1 + (2\lambda - 1)\mu_2 + (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1)\mu_3\}/\lambda(\lambda + 3)$, если: 1) $\lambda_1 \leq \lambda \leq -\sqrt{2}$, где λ_1 — корень уравнения $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ из интервала $(-3, -\sqrt{2})$; 2) $\lambda_2 \leq \lambda \leq \sqrt{2}$, где λ_2 — корень того же уравнения из интервала $(1/2, \sqrt{2})$. При всех других значениях λ задача неразрешима.

5.1) $a < -6$; 5.2) $a > -83/11$; 5.3) a — любое.

Раздел 5.3.

1) $w^* = 3/4$; 2) $w^* = 77$; 3) $X = \emptyset$.