МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра биомедицинской информатики

Лабораторная работа 3

Снежко Льва Владимировича
студента 3-го курса

Преподаватель:
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

Вариант 12

1 Задача 1

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + g \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=\ell} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = v \end{cases}$$

Обозначим: $u = P \cdot Q$

$$\begin{cases} P_{tt} = a^2 P_{xx} \\ P|_{x=0} = 0 \\ P|_{x=\ell} = 0 \\ P|_{t=0} = 0, \quad P_t|_{t=0} = v \end{cases}$$

Предположим: $P = T \cdot X$

$$T''X = a^2 T X'' \Rightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(\ell) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}$$

$$\boxed{X_k = \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)}$$

$$T_k = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t\right)\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Из начального условия:

$$P|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$P_t = \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \cdot a\sqrt{\lambda_k}\cos\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)\right)$$

$$P_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k a\sqrt{\lambda_k} \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = v$$

Разложим v в ряд Фурье:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k a\sqrt{\lambda_k} \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{v_k}{a\sqrt{\lambda_k}} = \frac{v_k}{a \cdot \frac{\pi+2k\pi}{2\ell}} = \frac{2\ell v_k}{a(\pi + 2k\pi)}$$

Из разложения v в ряд Фурье:

$$v_k = \frac{4v}{\pi + 2k\pi} \quad \Rightarrow \quad B_k = \frac{8v\ell}{(\pi + 2k\pi)^2 a}$$

Подставим в общее решение:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8v\ell}{(\pi + 2k\pi)^2 a} \sin\left(\frac{a(\pi + 2k\pi)}{2\ell}t\right) \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Будем искать Q в виде

$$Q = T(t) \cdot X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Исходное уравнение:

$$Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + g$$

С начальными условиями:

$$\begin{cases} Q|_{t=0} = 0 \\ Q_t|_{t=0} = 0 \\ Q|_{x=0} = 0 \\ Q|_{x=2\ell} = 0 \end{cases}$$

Подставим Q в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = g$$

Разложим g в ряд Фурье:

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4g}{\pi + 2k\pi} \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Подставим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)+a^2\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}\right)^2 T_k(t)\right)\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4g}{\pi+2k\pi}\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} T_k''(t)+a^2\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}\right)^2 T_k(t)=\frac{4g}{\pi+2k\pi} \\ T_k(0)=0 \\ T_k'(0)=0 \end{cases}$$

Общее решение однородного:

$$T_k=C_1\cos a\sqrt{\lambda_k}t+C_2\sin a\sqrt{\lambda_k}t$$

Найдём общее решение неоднородного:

$$C_1'(t)\cos a\sqrt{\lambda_k}t+C_2'(t)\sin a\sqrt{\lambda_k}t=0$$

$$-C_1'(t)a\sqrt{\lambda_k}\sin a\sqrt{\lambda_k}t+C_2'(t)a\sqrt{\lambda_k}\cos a\sqrt{\lambda_k}t=\frac{4g}{\pi-2xk}$$

Выразим C_1, C_2

:

$$C_1(t)=\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\cos a\sqrt{\lambda_k}t$$

$$C_2(t)=\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\sin a\sqrt{\lambda_k}t$$

Подставим и найдём T_k :

$$T_k=\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}$$

$$Q(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\sin\frac{\pi-2xk}{2l}x$$

$$u=P+Q=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\sin\frac{a\sqrt{(\pi+2xk)^2}}{2l}t\right)\sin\frac{\pi-2k}{2l}x$$

2 Задание 2

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi t}{l}, \quad 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=2x \\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $u = P + Q$

$$\begin{cases} P_{tt} = a^2 P_{xx} \\ P|_{x=0} = 0, \quad P|_{x=l} = 0 \\ P|_{t=0} = 2x \\ P_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi t}{l} \\ Q|_{x=0} = 0, \quad Q|_{x=l} = 0 \\ Q|_{t=0} = 0 \\ Q_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Найдём P в виде $P = T(t)X(x)$

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x \\ X|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ X|_{x=l} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi \end{cases}$$

$$X|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X|_{x=l} = C_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi k}{l}$$

$$X_k = \sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$P_{tt} - a^2P_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'' - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2T_k\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_kT_k|_{t=0} = 2x \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} X_kT_k'|_{t=0} = 0$$

$$T_k = A_k\cos\frac{a\pi k}{l}t + B_k\sin\frac{a\pi k}{l}t$$

Подставим в уравнение и упростим, получим:

$$\left(-B_k\cdot\frac{a\pi k}{l} + B_k\cdot\frac{a\pi k}{l}\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = 0 \Rightarrow B_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_kX_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{a\pi k}{l}t\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x = 2x$$

Разложим $2x$ в ряд Фурье:

$$2x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2l\cos\pi k}{1-\cos\pi k}\sin\frac{\pi k}{l}x$$

Подставим:

$$T_k = A_k \cos\frac{a\pi k}{l}t + \sin\frac{\pi k}{l}t \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} T_k X_k|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$A_k = \frac{-2l\cos\pi k}{1-\cos\pi k}$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2l\cos\pi k}{1-\cos\pi k}\cos\frac{a\pi k}{l}t \cdot \sin\frac{\pi k}{l}x$$

Составим задачу для Q:

$$\begin{cases} Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + \sin\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l} \\ Q|_{x=0} = 0, \quad Q|_{x=l} = 0 \\ Q|_{t=0} = 0, \quad Q_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Найдём решение в виде:

$$Q = T(t)X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

Подставим в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'' + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = \sin\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$$

Имеем:

$$\begin{cases} T_k'' + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k = \sin\frac{a\pi t}{l}, \quad k=1 \\ T_k'' + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k = 0, \quad k \neq 1 \\ T_k|_{t=0} = 0 \\ T_k'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение однородного:

$$T_k = C_1\cos\frac{a\pi t}{l} + C_2\sin\frac{a\pi t}{l}$$

Найдём решение неоднородного в виде:

$$T_k = C_1(t)\cos\frac{a\pi t}{l} + C_2(t)\sin\frac{a\pi t}{l}$$

Используем метод вариации произвольных постоянных

$$C_1(t)\cos\frac{a\pi x}{e} + C_2(t)\sin\frac{a\pi x}{e} - C_1(t)\frac{a\pi}{e}\sin\frac{a\pi x}{e} + C_2(t)\frac{a\pi}{e}\cos\frac{a\pi x}{e}\cdot\frac{dz}{dt} = \sin\frac{a\pi x}{e}$$

Выразим C_1, C_2, подставим:

$$T_1''^2 = \left(-\frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right)$$

Таким образом Q :

$$Q'' = \left(-\frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right)$$

Подставим и найдём u :

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right) \cdot \sin\frac{\pi x}{e}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-2 \cdot \frac{\cos kl}{k\cos kl}\cos\frac{ak\pi t}{e} + \sin\frac{kl}{e}x\right)$$

3 Задание 3

$$\begin{cases} u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,1) \\ u|_{t=0} = 2, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_x|_{x=0} = t, \\ u_x|_{x=l} = -1 \end{cases}$$

$$u = v + \omega$$

$$\omega = \frac{-t-1}{l}x^2 + tx$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = t^2 - \frac{t+1}{l} - x \\ v|_{t=0} = 2 + \frac{x^2}{l}, \\ v_t|_{t=0} = 0, \\ v_x|_{x=0} = 0, \\ v_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде: $v = TX$

$$T''X = a^2TX''$$
$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X_k = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X_k'|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X_k'|_{x=\ell} = C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi k}{\ell}$$

$$X_k = \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)$$

Подставим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'' + \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 T_k\right)\cos\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right) = t^2 - \frac{t+1}{l} - x$$

Разложим в ряд Фурье:

$$t^2 - \frac{t+1}{l} - x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k X_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos k\ell)}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)$$

Имеем:

$$T_k'' + \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 T_k = \frac{2(1-\cos(k\ell))}{\pi k}$$

Разложим $\phi = 2 + \frac{x^2}{l}$ в ряд Фурье

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} cos(\frac{\pi k}{l}x)$$

Подставим в начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k cos(\frac{\pi k}{l}x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} cos(\frac{\pi k}{l}x)$$

Отсюда имеем:

$$T_k|_{t=0} = \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2}$$

$$\begin{cases} T_k'' + \frac{\pi k}{l} T_k = \frac{2(1-\cos(k\ell))}{\pi k} \\ T_k|_{t=0} = \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} \\ T_k'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$T_k = A_k cos(\frac{\pi k t}{l}) + B_k sin(\frac{\pi k t}{l})$$

$$T_k|_{t=0} = \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} \Rightarrow A_k = \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2}$$

$$T_k'|_{t=0} = \frac{\pi k}{l} B_k = 0 \Rightarrow B_k = 0$$

Таким образом:

$$T_k = \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} cos(\frac{\pi k t}{l})$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} cos(\frac{\pi k t}{l}) cos(\frac{\pi k x}{l})$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} cos(\frac{\pi kt}{l}) cos(\frac{\pi kx}{l}) - \frac{t+1}{l} x^2 + tx$$

4 Визуализация 1

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{16gl^2}{a^2(\pi + 2xk)^3} \sin \frac{a\sqrt{(\pi + 2xk)^2}}{2l} t \right) \sin \frac{\pi - 2k}{2l} x$$

Ниже приведен код на языке Python, который изображает график данной функции

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

g = 9.8
l = 1
a = 1

x = np.linspace(0, 2 * l, 200)
t = np.linspace(0, 5, 200)
X, T = np.meshgrid(x, t)

U = np.zeros_like(X)
for k in range(1, 101):
    coef = (16 * g * l**2) / (a**2 * (np.pi + 2*k)**3)
    omega_k = a * (np.pi + 2*k) / (2 * l)
    U += coef * np.sin(omega_k * T) * np.sin((np.pi - 2*k) * X / (2 * l))

fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, T, U, cmap='viridis')

ax.set_title('u(x, t)')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('t')
ax.set_zlabel('u(x, t)')

plt.savefig("graph1.png", dpi=300)
plt.show()
```

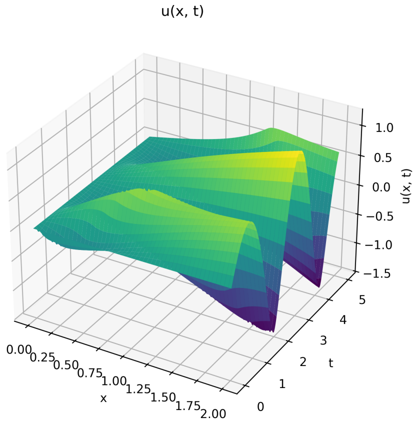

Рис. 1: График функции $u(x,t)$, построенный по приближённой сумме ряда

5 Визуализация 2

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right) \cdot \sin\frac{\pi x}{e}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-2 \cdot \frac{\cos kl}{k\cos kl}\cos\frac{ak\pi t}{e} + \sin\frac{kl}{e}x\right)$$

Ниже приведен код на языке Python, который изображает график данной функции

```
  import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

a = 1
l = 1
e = 1
N = 100
x = np.linspace(0, e, 200)
t = np.linspace(0.1, 5, 200)
X, T = np.meshgrid(x, t)

term1 = (1 - l / (2 * a) + ((l / (2 * a * T))**2) * np.sin(2 * a * np.pi * T
         0.5 * (l / (a * T))**2 * np.sin(a * np.pi * T / e)**3) * np.sin(np.p

term2 = np.zeros_like(X)

for k in range(1, N + 1):
    denom = k * np.cos(k * l)
    if np.any(np.isclose(denom, 0)):
        continue
    term2 += (-2 * np.cos(k * l) / denom) * np.cos(a * k * np.pi * T / e) + n
```

```
U = term1 + term2

fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, T, U, cmap='plasma')

ax.set_title("u(x, t)")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("t")
ax.set_zlabel("u(x, t)")

plt.tight_layout()
plt.savefig("graph2.png", dpi=300)
plt.show()
```

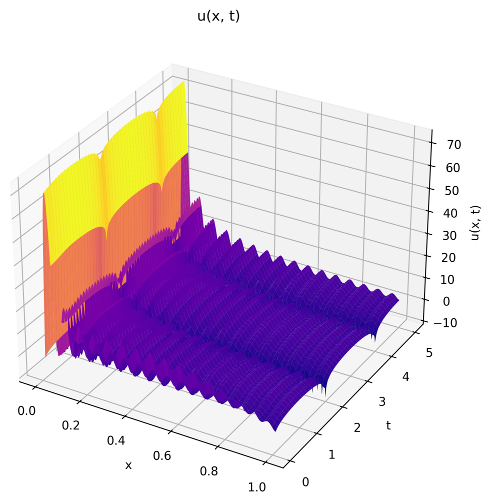

Рис. 2: График функции $u(x,t)$, построенный по приближённой сумме ряда

6 Визуализация 3

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2lcos(\pi k)}{(\pi k)^2} cos(\frac{\pi kt}{l}) cos(\frac{\pi kx}{l}) - \frac{t+1}{l} x^2 + tx$$

Ниже приведен код на языке Python, который изображает график данной функции

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

l = 1
N = 100
x = np.linspace(0, l, 200)
t = np.linspace(0, 5, 200)
X, T = np.meshgrid(x, t)
```

```
U = np.zeros_like(X)

for k in range(1, N + 1):
    coef = (2 * l * np.cos(np.pi * k)) / ((np.pi * k)**2)
    U += coef * np.cos(np.pi * k * T / l) * np.cos(np.pi * k * X / l)

U += -((T + 1) / l) * X**2 + T * X

fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, T, U, cmap='inferno')

ax.set_title("u(x, t)")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("t")
ax.set_zlabel("u(x, t)")

plt.tight_layout()
plt.savefig("graph3.png", dpi=300)
plt.show()
```

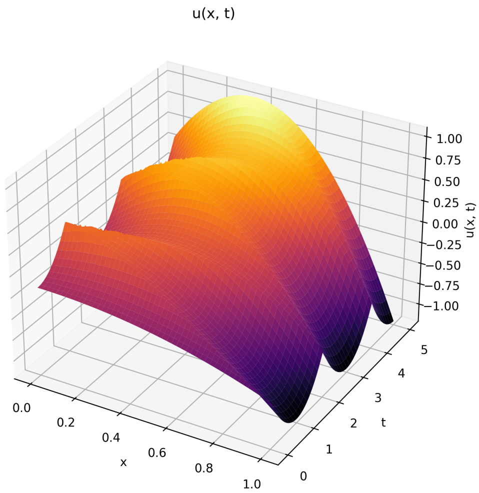

Рис. 3: График функции $u(x, t)$, построенный по приближённой сумме ряда