Есть ли что-то общее?

Сколькими способами можно

- рассадить 5 из 25 человек на 5 занумерованных мест?
- отправить 4 из 12 групп
  в 4 достаточно большие аудитории?
- расположить в ряд 3 карточные масти из 4?

Есть ли что-то общее?

Сколькими способами можно

- собрать команду из 5 участников, если всего человек 25?
- отправить 4 из 12 групп
  в одну достаточно большую аудиторию?
- выбрать 3 участвующие в игре карточные масти из 4?

§2. Выборки

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — n-элементное множество, r — целое неотрицательное число.

Определение

Набор $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}]$
из r элементов n-элементного множества X
назовём выборкой объёма r из n элементов
или (n, r)-выборкой.

- Выборка, в которой задан (важен) порядок следования элементов, называется упорядоченной выборкой.
- Выборка, в которой не задан (не важен) порядок следования элементов, называется неупорядоченной выборкой.

Пример:

$X = \{1, 2\}$.

- $[1, 2]$ и $[2, 1]$ — две различные упорядоченные $(2, 2)$-выборки из X;
- $[1, 2]$ и $[2, 1]$ — одна и та же неупорядоченная $(2, 2)$-выборка из X.

Пусть $a = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$, $b = [b_1, b_2, \ldots, b_s]$
— две упорядоченные выборки из одного множества.
Они считаются равными, если и только если

- $r = s$
- $a_i = b_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$.

Пример:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$[1, 1, 2, 5]$, $[1, 1, 2, 4]$, $[5, 1, 2, 1]$

— упорядоченные $(5, 4)$-выборки из X.

- $[5, 1, 2, 1] \neq [1, 1, 2, 4]$;
- $[5, 1, 2, 1] \neq [1, 1, 2, 5]$;
- $[1, 1, 2, 5] = [1, 1, 2, 5]$.

Иными словами,

две упорядоченные выборки считаются одинаковыми,
если и только если
у них одинаковы

- и состав элементов
(с учётом количества вхождений каждого),
- и порядок следования этих элементов.

Замечание:

По сути, упорядоченная (n, r)-выборка $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ из X — это то же самое, что упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ длины r из элементов множества X.

Пусть $a = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$, $b = [b_1, b_2, \ldots, b_s]$
— две неупорядоченные выборки из одного множества.

Они считаются равными, если и только если

- $r = s$
- существует биекция $\varphi : \{1, 2, \ldots, r\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ такая, что $a_i = b_{\varphi(i)}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$.

Пример

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$[1, 1, 2, 5], \quad [1, 1, 2, 4], \quad [5, 1, 2, 1]$

— неупорядоченные $(5, 4)$-выборки из X.

- $[5, 1, 2, 1] \neq [1, 1, 2, 4]$;
- $[5, 1, 2, 1] = [1, 1, 2, 5]$.
  $(\varphi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$,
  $\varphi(1) = 4, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 3, \varphi(4) = 1)$.

Иными словами,

две неупорядоченные выборки считаются одинаковыми, если и только если у них одинаков

- состав элементов (с учётом количества вхождений каждого).

- Выборки, в которых допустимы повторения элементов, называются выборками с повторениями.
- Выборки, в каждой из которых элементы не повторяются, называются выборками без повторений.

Примеры

$X = \{1, 2\}$.

- $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 1]$, $[2, 2]$ — всевозможные упорядоченные $(2, 2)$-выборки из X с повторениями.
- $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 2]$ — всевозможные неупорядоченные $(2, 2)$-выборки из X с повторениями.
- $[1, 2]$, $[2, 1]$ — всевозможные упорядоченные $(2, 2)$-выборки из X без повторений.
- $[1, 2]$ — всевозможные неупорядоченные $(2, 2)$-выборки из X без повторений.

Замечание:

По сути, неупорядоченная (n, r)-выборка $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ из X без повторений
— это то же самое, что r-элементное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ множества X.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — n-элементное множество, r — целое неотрицательное число.

Замечание

Количество

- упорядоченных (n, r)-выборок из X с повторениями,
- упорядоченных (n, r)-выборок из X без повторений,
- неупорядоченных (n, r)-выборок из X с повторениями,
- неупорядоченных (n, r)-выборок из X без повторений

зависит от числа r и мощности n множества X,

но не зависит того, какие именно в X элементы.

§3. Размещения и перестановки

Пусть $n \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ — целые неотрицательные числа.

Определение

Упорядоченная (n, r)-выборка с повторениями называется (n, r)-размещением с повторениями.

Определение

Упорядоченная (n, r)-выборка без повторений называется (n, r)-размещением без повторений или просто (n, r)-размещением.

Nombre d'arrangements

Обозначения количеств

- $\overline{A}_n^r$ — количество всевозможных (n, r)-размещений с повторениями.
- A_n^r — количество всевозможных (n, r)-размещений без повторений.

Пусть $n \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ — целые неотрицательные числа.

Определение

Упорядоченная (n, n)-выборка без повторений (т. е. (n, n)-размещение без повторений) называется перестановкой (элементов соответствующего n-элементного множества).

Nombre de permutations

Обозначение количества

- P_n — количество всевозможных перестановок n элементов.

Утверждение 1

Пусть $n \geqslant 1$.

Тогда

- *при* $r \geqslant 1$:

$$\overline{A}_n^r = n^r;$$

- *при* $1 \leqslant r \leqslant n$:

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!};$$

-

$$P_n = n!.$$

Доказательство

Воспользуемся тем, что количество различных выборок равно количеству способов составить одну такую выборку.

Доказательство

Пусть $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ — упорядоченная (n, r)-выборка с повторениями, где $n \geqslant 1, r \geqslant 1$.

- Элемент x_1 в ней может быть выбран n различными способами.
- Элемент x_2 в ней может быть выбран n различными способами.

$\ldots$

- Элемент x_r в ней может быть выбран n различными способами.

При этом, поскольку выборка упорядоченная, различные способы выбора любого из элементов x_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ приводят к различным упорядоченным выборкам.

Доказательство

Тогда, по правилу произведения,
вся выборка может быть составлена

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ раз}} = n^r$$

различными способами,
откуда $\overline{A}_n^r = n^r$.

Доказательство

Пусть $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ — упорядоченная (n, r)-выборка без повторений, где $n \geqslant 1, r \geqslant 1$.

- Элемент x_1 в ней может быть выбран n различными способами.
- Элемент x_2 в ней может быть выбран $n - 1$ различными способами.

$\ldots$

- Элемент x_r в ней может быть выбран $n - r + 1$ различными способами.

При этом, поскольку выборка упорядоченная, различные способы выбора любого из элементов x_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ приводят к различным упорядоченным выборкам.

Доказательство

Тогда, по правилу произведения,
вся выборка может быть составлена

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

различными способами,
откуда $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Доказательство

Пусть $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ — перестановка,
т. е. упорядоченная (n, r)-выборка
без повторений, где $n \geqslant 1, r = n$.

- Элемент x_1 в ней может быть выбран
n различными способами.
- Элемент x_2 в ней может быть выбран
$n - 1$ различными способами.

$\ldots$

- Элемент $x_r = x_n$ в ней может быть выбран
1 различным способом.

При этом, поскольку выборка упорядоченная,
различные способы выбора
любого из элементов x_i, $1 \leqslant i \leqslant r$
приводят к различным упорядоченным выборкам.

Доказательство

Тогда, по правилу произведения,
вся выборка может быть составлена

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

различными способами,
откуда $P_n = A_n^n = n!$.

Утверждение

Пусть $n \geqslant 1$.

Тогда

- *при* $r \geqslant 1$:
$$\overline{A}_n^r = n^r;$$
- *при* $1 \leqslant r \leqslant n$:
$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!};$$
- $$P_n = n!.$$

А что при $r > n$?

При $r > n$:

- $\overline{A}_n^r = n^r$,
- $A_n^r = 0$ (по определению числа A_n^r).

А что при $r = 0$?

При $r = 0$ и $n \geqslant 1$:

- $\overline{A}_n^0 = 1$,
- $A_n^0 = 1$,

  поскольку имеется только одна выборка, содержащая 0 элементов множества (пустая выборка).

  Тогда формулы

- $\overline{A}_n^r = n^r$
- и $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

  возвращают верное значение и при $r = 0$.

А что при $n = 0$?

Может иметь смысл считать, что при $n = 0$ и $r = 0$:

- $\overline{A}_0^0 = 1$,
- $A_0^0 = 1$,
- $P_0 = 1$.

Тогда формулы

- $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- и $P_n = n!$

возвращают верное значение и при $n = r = 0$.

Некоторые рекуррентные выражения

При $n \geqslant 1, r \geqslant 1$:

- $A_n^r = n \cdot A_{n-1}^{r-1}$,
- $A_n^r = A_n^{r-1} \cdot (n - r + 1)$,
- $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Не лучшее доказательство 1

$n \geqslant 1, r \geqslant 1,$

- $A_n^r = n \cdot A_{n-1}^{r-1}$:

$$\begin{aligned}
A_n^r &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \\
&= n \cdot \Big((n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)\Big) = \\
&= n \cdot \Big((n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot ((n-1)-(r-1)+1)\Big) \\
&= n \cdot A_{n-1}^{r-1}
\end{aligned}$$

Не лучшее доказательство 2

$n \geqslant 1, r \geqslant 1,$

- $A_n^r = A_n^{r-1} \cdot (n-r+1)$:

$$
\begin{aligned}
A_n^r &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+1) = \\
&= \Big(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+2)\Big) \cdot (n-r+1) = \\
&= \Big(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(r-1)+1)\Big) \cdot (n-r+1) = \\
&= A_n^{r-1} \cdot (n-r+1).
\end{aligned}
$$

Примеры задач

Замечание

Вместо «(n, r)-размещение (с повторениями или без)» часто будем говорить «размещение (с повторениями или без) из n по r».

(Так просто удобнее.)

Пример 1

Задача

Сколько различных 7-буквенных паролей
можно составить из строчных букв латинского алфавита
(их 26)?

Пример 1

Задача

Сколько различных 7-буквенных паролей можно составить из строчных букв латинского алфавита (их 26)?

Ответ

Каждый такой пароль — это размещение с повторениями из 26 по 7, поэтому ответ:

$$\overline{A}_{26}^{7} = 26^7 = 8\,031\,810\,176.$$

Пример 2

Задача

Сколько различных 7-буквенных паролей,
в каждом из которых буквы не повторяются,
можно составить из строчных букв латинского алфавита
(их 26)?

Пример 2

Задача

Сколько различных 7-буквенных паролей, в каждом из которых буквы не повторяются, можно составить из строчных букв латинского алфавита (их 26)?

Ответ

Каждый такой пароль — это размещение без повторений из 26 по 7, поэтому ответ:

$$A_{26}^{7} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = 3\,315\,312\,000.$$

Пример 3

Задача

Сколько различных 6-значных натуральных чисел, цифры в каждом из которых не повторяются, можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5?

Пример 3

Задача

Сколько различных 6-значных натуральных чисел, цифры в каждом из которых не повторяются, можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5?

Ответ

$P_6 - P_5$.

Очень краткое решение

- Куда биекция: в перестановки этих шести цифр, в которых первая цифра не 0.
- Сколько их: $|A| - |B|$, где

  A — множество всех перестановок этих 6 цифр (несложно понять, что $|A| = P_6$),

  B — множество тех перестановок этих 6 цифр, в которых первая цифра 0.
- Куда биекция из B: во множество перестановок оставшихся пяти цифр.
  (Тогда несложно понять, что $|B| = P_5$.)
- Таким образом, ответ: $P_6 - P_5$.

Важный пример 4

Задача

Пусть X и Y — два непустых конечных множества, $|X| = n$, $|Y| = k$.

Сколько существует различных

- отображений $f : X \to Y$,
- инъекций $f : X \to Y$,
- биекций $f : X \to Y$?

Важный пример 4

Задача

Пусть X и Y — два непустых конечных множества, $|X| = n$, $|Y| = k$.

Сколько существует различных

- отображений $f : X \to Y$,
- инъекций $f : X \to Y$,
- биекций $f : X \to Y$?

Ответы

- $\overline{A}_k^n$,
- A_k^n,
- $\begin{cases} P_n, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Ключевая идея

- Каждое отображение $f : X \to Y$
  может быть описано в виде
  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$,
  где $y_i = f(x_i) \in Y$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$,
  причём такое описание уникально
  для каждого отображения,
- и наоборот, по любому упорядоченному набору
  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$,
  где $y_i \in Y$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$,
  можно построить уникальное отображение $f : X \to Y$,
  такое что $f(x_i) = y_i$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$.
- Отсюда все нужные биекции:

Ключевая идея

Отсюда все нужные биекции:

- отображений — в размещения из k по n,
- инъекций — в размещения без повторений из k по n,
- биекций — в перестановки n элементов.

§4. Сочетания с повторениями и без повторений

Пусть $n \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ — целые неотрицательные числа.

Определение

Неупорядоченная (n, r)-выборка с повторениями называется (n, r)-сочетанием с повторениями.

Определение

Неупорядоченная (n, r)-выборка без повторений называется (n, r)-сочетанием без повторений или просто (n, r)-сочетанием.

Nombre de combinaisons

Обозначения количеств

- $\overline{C}_n^r$ — количество всевозможных (n, r)-сочетаний с повторениями.
- C_n^r — количество всевозможных (n, r)-сочетаний без повторений.

Утверждение 2

Пусть $n \geqslant 1$.

Тогда

- *при* $1 \leqslant r \leqslant n$:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

- *при* $r \geqslant 1$:

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r.$$

Доказательство

1) Рассмотрим отображение f, действующее из множества всех упорядоченных (n, r)-выборок без повторений (т. е. из множества всех (n, r)-размещений) во множество всех неупорядоченных (n, r)-выборок без повторений (т. е. во множество всех (n, r)-сочетаний) следующим образом: $f\Big((x_1, x_2, \ldots, x_r)\Big) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

- Отметим, что при таком отображении в каждое сочетание $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ переходят ровно $P_r = r!$ различных размещений,

  а потому f — это $r!$-функция.

  Отсюда по правилу деления получаем $C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Доказательство

2) Рассмотрим множества

$Z = \{1, 2, \dots, n + r - 1\}$

и $Y = \{1, 2, \dots, n\}$.

Отметим, что $|Z| = n + r - 1$, $|Y| = n$.

- Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ — произвольная неупорядоченная $(n + r - 1, r)$-выборка из Z без повторений (т. е. $(n + r - 1, r)$-сочетание).

  Не ограничивая общности, будем считать, что $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$.

  (Тогда $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leqslant n + r - 1$.)

Доказательство

$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leqslant n + r - 1$

- Преобразуем выборку $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ по следующему правилу, которое обозначим φ:

  каждое число a_i $(i = 1, 2, \ldots, i)$ в выборке заменим на число $a_i - (i - 1)$.
- Таким образом будет получена выборка $[a_1 - 0, a_2 - 1, \ldots, a_r - (r - 1)]$.

Доказательство

- Заметим, что в силу $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leqslant n + r - 1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$1 \leqslant a_1 - 0 \leqslant a_2 - 1 \leqslant \cdots \leqslant a_r - (r-1) \leqslant n.$$

  Действительно, для любой пары натуральных чисел a и b неравенство $a < b$ эквивалентно неравенству $a + 1 \leqslant b$. Последнее эквивалентно $a \leqslant b - 1$,
  что при любом k эквивалентно неравенству
  $a - k \leqslant b - (k+1)$.

Доказательство

$$1 \leqslant a_1 - 0 \leqslant a_2 - 1 \leqslant \dots \leqslant a_r - (r-1) \leqslant n.$$

- Таким образом, для любого $(n+r-1, r)$-сочетания $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ из Z выборка $[a_1 - 0, a_2 - 1, \dots, a_r - (r-1)]$, полученная из него правилом φ, является неупорядоченной* (n, r)-выборкой с повторениями из Y.

* Потому что выборка,
в которой порядок элементов произвольный,
и выборка с теми же элементами,
упорядоченными по неубыванию,
— это одна и та же неупорядоченная выборка.

Доказательство

- Следовательно, φ — это отображение множества всех $(n+r-1, r)$-сочетаний из Z во множество всех (n, r)-сочетаний с повторениями из Y.
- Покажем, что φ — биекция, для чего докажем инъективность и сюръективность φ.

Доказательство

- Покажем инъективность φ.
- Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, где $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$,
  и $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$, где $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$,
  — два различных $(n + r - 1, r)$-сочетания из Z.
- Поскольку они различны, существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant r$, что $a_k \neq b_k$.
- Тогда $a_k - (k - 1) \neq b_k - (k - 1)$,

  а потому различны и выборки
  $[a_1 - 0, a_2 - 1, \ldots, a_r - (r - 1)]$
  и $[b_1 - 0, b_2 - 1, \ldots, b_r - (r - 1)]$,
  являющиеся образами исходных $(n + r - 1, r)$-сочетаний при отображении φ.
- Таким образом, φ — инъекция.

Доказательство

- Покажем сюръективность φ.
- Пусть $[c_1, c_2, \ldots, c_r]$, где $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_r$, — произвольное (n, r)-сочетание с повторениями из Y.
- Рассмотрим следующую выборку:
  $[c_1 + 0, c_2 + 1, \ldots, c_r + (r - 1)]$.

  Нетрудно убедиться в том, что
  $[c_1 + 0, c_2 + 1, \ldots, c_r + (r - 1)]$ — это
  $(n + r - 1, r)$-сочетание из Z,
  поскольку
  $1 \leqslant c_1 + 0 < c_2 + 1 < \cdots < c_r + (r - 1) \leqslant n + r - 1$.

Доказательство

- Заметим, что образом $(n+r-1, r)$-сочетания $[c_1+0, c_2+1, \ldots, c_r+(r-1)]$ из Z при отображении φ является выборка $[c_1+0-0, c_2+1-1, \ldots, c_r+(r-1)-(r-1)]$, т. е. выборка $[c_1, c_2, \ldots, c_r]$, являющаяся (n, r)-сочетанием с повторениями из Y.
- В силу произвола в выборе (n, r)-сочетания с повторениями $[c_1, c_2, \ldots, c_r]$ из Y, заключаем, что отображение φ, действующее во множество всех (n, r)-сочетаний с повторениями из Y, является сюръективным.

Доказательство

- Учитывая ранее доказанную инъективность отображения φ, делаем вывод, что φ — биекция.
- Тогда по биективному правилу получаем, что различных $(n+r-1, r)$-сочетаний из Z столько же, сколько и (n, r)-сочетаний с повторениями из Y, т. е.

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r.$$

Утверждение

Пусть $n \geqslant 1$.

Тогда

- *при $1 \leqslant r \leqslant n$:*

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

- *при $r \geqslant 1$:*

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r.$$

А что при $r > n$?

При $r > n$:

- $C_n^r = 0$ (по определению числа C_n^r),
- $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$.

А что при $r = 0$?

При $r = 0$ и $n \geqslant 1$:

- $C_n^0 = 1$,
- $\overline{C}_n^0 = 1$,

  поскольку имеется только одна выборка, содержащая 0 элементов множества (пустая выборка).

Таким образом, формулы

- $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- и $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$

  возвращают верное значение и при $r = 0$ (на вторую в этом случае нужно дополнительное ограничение $n \geqslant 2$.)

А что при $n = 0$?

Может иметь смысл считать, что при $n = 0$ и $r = 0$:

- $C_0^0 = 1$,
- $\overline{C}_0^0 = 1$.

Тогда формула

- $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

возвращает верное значение и при $n = r = 0$.

Важные примеры задач на сочетания без повторений

Замечание

Вместо «(n, r)-сочетание (с повторениями или без)» часто будем говорить «сочетание (с повторениями или без) из n по r».

(Так просто удобнее.)

Пример 1

Задача

Сколько различных k-элементных подмножеств у произвольного n-элементного множества?

Пример 1

Задача

Сколько различных k-элементных подмножеств у произвольного n-элементного множества?

Ответ

Каждое такое подмножество — это сочетание без повторений из n по k, поэтому ответ: C_n^k.

Пример 2

Задача

Сколько существует различных бинарных векторов длины n, в каждом из которых ровно k единиц?

Пример 2

Задача

Сколько существует различных бинарных векторов длины n, в каждом из которых ровно k единиц?

Ответ

C_n^k.

Ключевая идея

- Каждому вектору из нулей и единиц с ровно k единицами поставим в соответствие подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ по следующему принципу: $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — это номера компонент вектора, в которых стоят единицы.
- Это соответствие между векторами и подмножествами биективно.

Пример 3

Задача

Дана решётка $(m-1)\times(n-1)$ квадратиков.

Узлы решётки — углы квадратов.

Ходить можно только по сторонам квадратов,

одна сторона $=1$ ход.

Сколько существует различных кратчайших путей из левого нижнего узла в правый верхний?

Пример 3

Задача

Дана решётка $(m-1)\times(n-1)$ квадратиков.

Узлы решётки — углы квадратов.

Ходить можно только по сторонам квадратов,

одна сторона $=1$ ход.

Сколько существует различных кратчайших путей из левого нижнего узла в правый верхний?

Ответ

C_{m+n}^{m} или C_{m+n}^{n} .

Ключевая идея

Любой кратчайший путь
из левого нижнего узла в правый верхний

- представляет собой
упорядоченную последовательность $m + n$ ходов,
- из которых m ходов — ходы вправо,
и n ходов — ходы вверх.
- Сколько существует упорядоченных наборов длины $m + n$,
каждая компонента которых
имеет одно из двух возможных значений,
причём количество компонент с одним из этих значений фиксировано?
- См. предыдущий пример.

Просто важный пример

Пример 4

Задача

В группе из 23 человек 5 отличников.

Требуется сформировать команду из 3 участников так, чтобы в неё входили как минимум 2 отличника.

Сколькими способами можно это сделать?

Решение 1

- Способов составить команду (выбираем двух отличников, добираем к ним третьего): $C_5^2 \cdot C_{23-2}^1$.
- Тогда, по правилу произведения, ответ:

$$C_5^2 \cdot C_{21}^1 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 21 = 10 \cdot 21 = 210.$$

Решение 2

- Разделим все команды на те, в которых 2 отличника, и те, в которых 3 отличника.
- Способов составить команду из трёх отличников: C_5^3.
- Способов составить команду из двух отличников (выбираем двух отличников, добираем к ним не отличника):
  $C_5^2 \cdot C_{23-5}^1$.
- Тогда, по правилу суммы, ответ:

$$C_5^3 + C_5^2 \cdot C_{18}^1 = \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} \cdot 18 = 10 + 10 \cdot 18 = 190.$$

Важные примеры задач на сочетания с повторениями

Пример 1

Задача

В магазине имеется мороженое 5 видов
(порции одного вида считаются неразличимыми).

Сколькими способами можно купить 12 порций?

Пример 1

Задача

В магазине имеется мороженое 5 видов
(порции одного вида считаются неразличимыми).

Сколькими способами можно купить 12 порций?

Ответ

$\overline{C}_5^{12}$.

Пояснение

Каждый способ — это последовательность длины 12, каждый член которой выбран из 5-элементного множества. Порядок членов в последовательности не важен, повторяться в последовательности они могут.

Таким образом, каждый способ — это сочетание с повторениями из 5 по 12.

Пример 2

Задача

В ряд стоят n неокрашенных одинаковых шаров.

Сколькими способами можно раскрасить их в k различных цветов?
(Шары одного цвета неотличимы друг от друга.)

Пример 2

Задача

В ряд стоят n неокрашенных одинаковых шаров.

Сколькими способами можно раскрасить их в k различных цветов?
(Шары одного цвета неотличимы друг от друга.)

Ответ

$\overline{C}_k^n$.

Пояснение

Каждый способ покраски
описывается последовательность длины n,
каждый член которой выбран из k-элементного множества.
Порядок членов в последовательности не важен,
повторяться в последовательности они могут.

Таким образом, каждый способ — это сочетание с
повторениями из k по n.

Пример 3

Задача

Сколько решений имеет уравнение

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$

в неотрицательных целых числах?

Пример 3

Задача

Сколько решений имеет уравнение

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$

в неотрицательных целых числах?

Ответ

$\overline{C}_5^{12}$.

Идея решения 1

Вспомним задачу про мороженое и заметим, что способы покупки мороженого биективно соответствуют решениям этого уравнения.

Соответствие можно описать, например, правилом «x_i — число купленных порций мороженого вида i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$».

Идея решения 2

Чтобы распределить 12 единиц по 5 переменным, будем красить каждую в один из 5 цветов.

Тогда различных решений столько же, сколько раскрасок. (Единицы одинаковы, цвета различны.)