МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра биомедицинской информатики

Лабораторная работа 3

Снежко Льва Владимировича
студента 3-го курса

Преподаватель:
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

Вариант 12

1 Задача 1

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + g \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=\ell} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = v \end{cases}$$

Обозначим: $u = P \cdot Q$

$$\begin{cases} P_{tt} = a^2 P_{xx} \\ P|_{x=0} = 0 \\ P|_{x=\ell} = 0 \\ P|_{t=0} = 0, \quad P_t|_{t=0} = v \end{cases}$$

Предположим: $P = T \cdot X$

$$T''X = a^2 T X'' \Rightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(\ell) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}$$

$$\boxed{X_k = \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)}$$

$$T_k = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t\right)\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Из начального условия:

$$P|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$P_t = \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \cdot a\sqrt{\lambda_k}\cos\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)\right)$$

$$P_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k a\sqrt{\lambda_k} \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = v$$

Разложим v в ряд Фурье:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k a\sqrt{\lambda_k} \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{v_k}{a\sqrt{\lambda_k}} = \frac{v_k}{a \cdot \frac{\pi+2k\pi}{2\ell}} = \frac{2\ell v_k}{a(\pi + 2k\pi)}$$

Из разложения v в ряд Фурье:

$$v_k = \frac{4v}{\pi + 2k\pi} \quad \Rightarrow \quad B_k = \frac{8v\ell}{(\pi + 2k\pi)^2 a}$$

Подставим в общее решение:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8v\ell}{(\pi + 2k\pi)^2 a} \sin\left(\frac{a(\pi + 2k\pi)}{2\ell}t\right) \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Будем искать Q в виде

$$Q = T(t) \cdot X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Исходное уравнение:

$$Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + g$$

С начальными условиями:

$$\begin{cases} Q|_{t=0} = 0 \\ Q_t|_{t=0} = 0 \\ Q|_{x=0} = 0 \\ Q|_{x=2\ell} = 0 \end{cases}$$

Подставим Q в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right) = g$$

Разложим g в ряд Фурье:

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4g}{\pi + 2k\pi} \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Подставим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)+a^2\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}\right)^2T_k(t)\right)\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4g}{\pi+2k\pi}\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}x\right)$$

Отсюда:

$$\begin{cases}T_k''(t)+a^2\left(\frac{\pi+2k\pi}{2\ell}\right)^2T_k(t)=\frac{4g}{\pi+2k\pi}\\ T_k(0)=0\\ T_k'(0)=0\end{cases}$$

Общее решение однородного:

$$T_k=C_1\cos a\sqrt{\lambda_k}t+C_2\sin a\sqrt{\lambda_k}t$$

Найдём общее решение неоднородного:

$$C_1'(t)\cos a\sqrt{\lambda_k}t+C_2'(t)\sin a\sqrt{\lambda_k}t=0$$

$$-C_1'(t)a\sqrt{\lambda_k}\sin a\sqrt{\lambda_k}t+C_2'(t)a\sqrt{\lambda_k}\cos a\sqrt{\lambda_k}t=\frac{4g}{\pi-2xk}$$

Выразим C_1, C_2

:

$$C_1(t)=\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\cos a\sqrt{\lambda_k}t$$

$$C_2(t)=\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\sin a\sqrt{\lambda_k}t$$

Подставим и найдём T_k :

$$T_k=\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}$$

$$Q(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\sin\frac{\pi-2xk}{2l}x$$

$$u=P+Q=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{16gl^2}{a^2(\pi+2xk)^3}\sin\frac{a\sqrt{(\pi+2xk)^2}}{2l}t\right)\sin\frac{\pi-2xk}{2l}x$$

Задание 2

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi t}{l}, \quad 0<x<l,\ t>0\\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=2x\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

Будем искать решение в виде $u = P + Q$

$$\begin{cases} P_{tt} = a^2 P_{xx} \\ P|_{x=0} = 0, \quad P|_{x=l} = 0 \\ P|_{t=0} = 2x \\ P_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi t}{l} \\ Q|_{x=0} = 0, \quad Q|_{x=l} = 0 \\ Q|_{t=0} = 0 \\ Q_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Найдём P в виде $P = T(t)X(x)$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \\ X|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ X|_{x=l} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi \end{cases}$$

$$X|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X|_{x=l} = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi k}{l}$$

$$X_k = \sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$P_{tt} - a^2 P_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'' - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2 T_k\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k|_{t=0} = 2x \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k'|_{t=0} = 0$$

$$T_k = A_k \cos\frac{a\pi k}{l}t + B_k \sin\frac{a\pi k}{l}t$$

Подставим в уравнение и упростим, получим:

$$\left(-B_k \cdot \frac{a\pi k}{l} + B_k \cdot \frac{a\pi k}{l}\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = 0 \Rightarrow B_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k X_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{a\pi k}{l}t \cdot \sin\frac{\pi k}{l}x = 2x$$

Разложим $2x$ в ряд Фурье:

$$2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2l\cos\pi k}{1 - \cos\pi k}\sin\frac{\pi k}{l}x$$

Подставим:

$$T_k = A_k \cos\frac{a\pi k}{l}t + \sin\frac{\pi k}{l}t \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} T_k X_k|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$A_k = \frac{-2l\cos\pi k}{1-\cos\pi k}$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2l\cos\pi k}{1-\cos\pi k}\cos\frac{a\pi k}{l}t \cdot \sin\frac{\pi k}{l}x$$

Составим задачу для Q:

$$\begin{cases} Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + \sin\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l} \\ Q|_{x=0} = 0, \quad Q|_{x=l} = 0 \\ Q|_{t=0} = 0, \quad Q_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Найдём решение в виде:

$$Q = T(t)X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

Подставим в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'' + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = \sin\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$$

Имеем:

$$\begin{cases} T_k'' + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k = \sin\frac{a\pi t}{l}, \quad k=1 \\ T_k'' + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k = 0, \quad k \neq 1 \\ T_k|_{t=0} = 0 \\ T_k'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение однородного:

$$T_k = C_1\cos\frac{a\pi t}{l} + C_2\sin\frac{a\pi t}{l}$$

Найдём решение неоднородного в виде:

$$T_k = C_1(t)\cos\frac{a\pi t}{l} + C_2(t)\sin\frac{a\pi t}{l}$$

Используем метод вариации произвольных постоянных

$$C_1(t)\cos\frac{a\pi x}{e} + C_2(t)\sin\frac{a\pi x}{e} - C_1(t)\frac{a\pi}{e}\sin\frac{a\pi x}{e} + C_2(t)\frac{a\pi}{e}\cos\frac{a\pi x}{e}\cdot\frac{dz}{dt} = \sin\frac{a\pi x}{e}$$

Выразим C_1, C_2, подставим:

$$T_1''^2 = \left(-\frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right)$$

Таким образом Q :

$$Q'' = \left(-\frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right)$$

Подставим и найдём u :

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{lt}{2at} + \left(\frac{l}{2at}\right)^2 \sin\frac{2a\pi t}{e}\cos\frac{a\pi t}{e} - \left(\frac{l}{at}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^3\frac{a\pi t}{e}\right) \cdot \sin\frac{\pi x}{e}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(-2 \cdot \frac{\cos kl}{k\cos kl}\cos\frac{ak\pi t}{e} + \sin\frac{kl}{e}x\right)$$