Решение смешанных задач для волнового уравнения с однородными и неоднородными граничными условиями

1. Первая смешанная задача.

Рассмотрим первую смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\, \mathbb{D} = \{t > 0,\, 0 < x < l\} \tag{1.1}$$

$$u|_{x=0} = 0,\, t \geq 0 \tag{1.2}$$

$$u|_{x=l} = 0,\, t \geq 0 \tag{1.3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\, 0 \leq x \leq l \tag{1.4}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x),\, 0 \leq x \leq l \tag{1.5}$$

Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{1.6}$$

Подставим это представление в исходное уравнение (1.1), принимая $f(x,t) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(t)X(x)) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)) = 0$$
$$T''(t)X(x) - a^2T(t)X''(x) = 0$$
$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

Разделим полученное уравнение на $a^2X(x)T(t)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Так как слева функция, которая зависит только от t, а справа функция, которая зависит только от x, то это может быть только константа. Обозначим её за $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Тогда получим уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

В данном случае λ – это собственные значения. В курсе лекций было показано, что $\lambda \geq 0$. Тогда мы можем переобозначить λ за λ^2. Тогда уравнение примет вид:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Подставляя представление (1.6) в граничные условия (1.2)-(1.3), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2X(x) = 0 \\ X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Так как функция $T(t)$ тождественно не равна 0, т.е. $T(t) \not\equiv 0$, то мы можем разделить второе и третье условие в задаче на $T(t)$. Таким образом получим следующую задачу – задачу Штурма-Лиувилля или задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\nu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\nu = \pm\lambda i$$

$$X(x) = Acos(\lambda x) + Bsin(\lambda x)$$

Тогда:

$$X(0) = A = 0$$

и

$$X(l) = Bsin(\lambda l) = 0$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то можем положить, без нормировки, $B = 1$. Тогда:

$$sin(\lambda l) = 0$$

$$\lambda_k l = \pi k,\ k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \dots$$

Так как, очевидно, в данном случае $\lambda_0 = 0$ не является собственным значением, потому что тогда собственная функция была бы равна 0, то $k = 1, 2, \dots$.
Тогда собственные функции примут вид:

$$X_k(x) = sin(\lambda_k x) = sin(\frac{\pi k}{l} x)$$

Тогда решение задачи Штурма-Лиувилля для смешанной задачи первого рода для волнового уравнения примет вид:

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \dots \\ X_k(x) = sin(\lambda_k x) = sin(\frac{\pi k}{l} x),\ k = 1, 2, \dots \end{gathered}}$$

Тогда решение исходной задачи можно представить в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \tag{1.8}$$

Подставим представление (1.8) в исходное уравнение (1.1):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 T_k(t)}{\partial t^2}X_k(t) - a^2 T_k(t)\frac{\partial^2 X_k(x)}{\partial x^2}\right) =$$

$$= [X_k(x) = sin(\lambda_k x)] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)sin(\lambda_k x) - a^2 T_k(t)\frac{\partial^2 sin(\lambda_k x)}{\partial x^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)sin(\lambda_k x) + a^2\lambda_k T_k(t)sin(\lambda_k x)\right) = [sin(\lambda_k x) = X_k(x)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)X_k(x) + a^2\lambda_k^2 T_k(t)X_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t)\right)X_k(x) = f(x,t)$$

Функцию $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x)$$

Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ находятся по формуле:

$$f_k(t) = \frac{(f(x,t), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l f(x,t)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l f(x,t)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l f(x,t)sin(\lambda_k x)dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l f(x,t)dcos(\lambda_k x) = \\ = -\frac{1}{\lambda_k}\left(f(x,t)cos(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx\right) = \dots = I(t)\end{gathered} \tag{1.9}$$

Для получения значения верхнего и нижнего интегралов стоит помнить, что:

$$\begin{gathered}sin(\pi k) = 0 \\ sin(2\pi k) = 0 \\ sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^k \\ sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1 \\ cos(\pi k) = (-1)^k \\ cos(2\pi k) = 1 \\ cos(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0 \\ cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 0\end{gathered}$$

Для подсчёта нижнего интеграла воспользуемся формулой квадрата тригонометрической функции и вычислим полученный интеграл:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx = \int\limits_0^l \frac{1-cos(2\lambda_k x)}{2}dx = \frac{1}{2}x|_0^l - \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\lambda_k x)|_0^l = \\
&= \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}0 - \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\lambda_k l) + \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\lambda_k 0) = \left[\lambda_k = \frac{\pi k}{l}\right] = \\
&= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\frac{\pi k}{l}l) = \frac{l}{2} - sin(2\pi k) = [sin(2\pi k) = 0] = \frac{l}{2}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Подставляя полученные интегралы (1.9) и (1.10), получаем, что:

$$f_k(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx} = \frac{I(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}I(t) \tag{1.11}$$

Теперь подставим представление (1.8) в начальное условие (1.4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \varphi(x)$$

Функцию $\varphi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения φ_k найдём тем же самым способом:

$$\varphi_k = \frac{(\varphi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\lambda_k x)dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \varphi(x)dcos(\lambda_k x) = \\
&= -\frac{1}{\lambda_k}\left(\varphi(t)cos(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = I_1
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{1.13}$$

Подставляя полученные интегралы (1.12) и (1.13), получаем, что:

$$\varphi_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx} = \frac{I_1(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}I_1 \tag{1.14}$$

Теперь подставим представление (1.8) в начальное условие (1.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x)\right)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial T_k(t)}{\partial t}X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \psi(x)$$

Функцию $\psi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения ψ_k найдём тем же самым способом:

$$\psi_k = \frac{(\psi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \psi(x)sin(\lambda_k x)dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \psi(x)dcos(\lambda_k x) = \\ = -\frac{1}{\lambda_k}\left(\psi(t)cos(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = I_2\end{gathered} \tag{1.15}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{1.16}$$

Подставляя полученные интегралы (1.15) и (1.16), получаем, что:

$$\psi_k = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx} = \frac{I_1(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}I_2 \tag{1.17}$$

Таким образом, используя все полученные выше результаты, можно записать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t)\right)X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x) \end{cases}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в рядах и подставляя полученные коэффициенты ряда Фурье $f_k(t)$, φ_k и ψ_k, соответственно, (1.11), (1.14), (1.17), получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t) = \frac{2}{l}I(t) \\ T_k(0) = \frac{2}{l}I_1 \\ T_k'(0) = \frac{2}{l}I_2 \end{cases} \tag{1.18}$$

Ищем решение уравнения в виде:

$$T_k(t) = T_{k_{\text{оо}}}(t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда находим, что:

$$T_{k_{\text{оо}}}(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t)$$

Также находим $T_{k_{\text{чн}}}(t)$, используя знания, полученные в курсе дифференциальных уравнений.
Тогда решение запишется в виде:

$$T_k(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда найдём:

$$T_k'(t) = -a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k t) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}'(t)$$

Таким образом, подставляя во второе и третье условие задачи Коши (1.18), получим систему:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k cos(a\lambda_k 0) + B_k sin(a\lambda_k 0) + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T_k'(0) = a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k 0) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k 0) + T_{k_{\text{чн}}}'(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T_k'(0) = a\lambda_k B_k + T_{k_{\text{чн}}}'(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда, выражая, получим:

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \\ B_k = \frac{\frac{2}{l} I_2 - T_{k_{\text{чн}}}'(0)}{a\lambda_k} \end{cases}$$

Тогда, подставляя все, что мы нашли выше в представление (1.8), получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)\right) sin(\lambda_k x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T_{k_{\text{чн}}}'(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) sin(\lambda_k x)$$

Итого получаем решение, при условии, что интегралы I_1 и I_2 были ранее получены по формулам (1.12) и (1.15):

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T_{k_{\text{чн}}}'(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) sin(\lambda_k x) \\ \lambda_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

2. Третья смешанная задача с граничными условиями первого и второго рода соответственно.

Рассмотрим третью смешанную задачу с граничными условиями первого и второго рода соответственно для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\} \tag{2.1}$$

$$u|_{x=0} = 0,\ t \geq 0 \tag{2.2}$$

$$u_x|_{x=l} = 0,\ t \geq 0 \tag{2.3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l \tag{2.4}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l \tag{2.5}$$

Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{2.6}$$

Подставим это представление в исходное уравнение (2.1), принимая $f(x,t) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(t)X(x)) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)) = 0$$
$$T''(t)X(x) - a^2 T(t)X''(x) = 0$$
$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

Разделим полученное уравнение на $a^2X(x)T(t)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Так как слева функция, которая зависит только от t, а справа функция, которая зависит только от x, то это может быть только константа. Обозначим её за $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Тогда получим уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

В данном случае λ – это собственные значения. В курсе лекций было показано, что $\lambda \geq 0$. Тогда мы можем переобозначить λ за λ^2. Тогда уравнение примет вид:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Подставляя представление (2.6) в граничные условия (2.2)-(2.3), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0)T(t) = 0 \\ X'(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Так как функция $T(t)$ тождественно не равна 0, т.е. $T(t) \not\equiv 0$, то мы можем разделить второе и третье условие в задаче на $T(t)$. Таким образом получим следующую задачу – задачу Штурма-Лиувилля или задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\nu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\nu = \pm \lambda i$$

$$X(x) = Acos(\lambda x) + Bsin(\lambda x)$$

При этом:

$$X'(x) = -A\lambda sin(\lambda x) + B\lambda cos(\lambda x)$$

Тогда:

$$X(0) = A = 0$$

и

$$X'(l) = B\lambda cos(\lambda l) = 0$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то можем положить, без нормировки, $B = 1$. Тогда, так как $\lambda \neq 0$:

$$cos(\lambda l) = 0$$

$$\lambda_k l = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда собственные функции примут вид:

$$X_k(x) = sin(\lambda_k x) = sin(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x)$$

Тогда решение задачи Штурма-Лиувилля для смешанной задачи первого рода для волнового уравнения примет вид:

$$\boxed{\begin{gathered}\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \dots \\ X_k(x) = sin(\lambda_k x) = sin(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x),\ k = 0, 1, 2, \dots\end{gathered}}$$

Тогда решение исходной задачи можно представить в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \tag{2.8}$$

Подставим представление (2.8) в исходное уравнение (2.1):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 T_k(t)}{\partial t^2} X_k(t) - a^2 T_k(t) \frac{\partial^2 X_k(x)}{\partial x^2} \right) =$$

$$= [X_k(x) = sin(\lambda_k x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) sin(\lambda_k x) - a^2 T_k(t) \frac{\partial^2 sin(\lambda_k x)}{\partial x^2} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) sin(\lambda_k x) + a^2 \lambda_k T_k(t) sin(\lambda_k x) \right) = [sin(\lambda_k x) = X_k(x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) X_k(x) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) X_k(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) \right) X_k(x) = f(x,t)$$

Функцию $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x)$$

Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ находятся по формуле:

$$f_k(t) = \frac{(f(x,t), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) X_k(x) dx}{\int\limits_0^l X_k(x) X_k(x) dx} = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) sin(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) sin(\lambda_k x) dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l f(x,t) sin(\lambda_k x) dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^l f(x,t) dcos(\lambda_k x) = \\ = -\frac{1}{\lambda_k} \left(f(x,t) cos(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx \right) = \dots = I(t)\end{gathered} \tag{2.9}$$

Для получения значения верхнего и нижнего интегралов стоит помнить, что:

$$\begin{gathered} sin(\pi k) = 0 \\ sin(2\pi k) = 0 \\ sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^k \\ sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1 \\ cos(\pi k) = (-1)^k \\ cos(2\pi k) = 1 \\ cos(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0 \\ cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 0 \end{gathered}$$

Для подсчёта нижнего интеграла воспользуемся формулой квадрата тригонометрической функции и вычислим полученный интеграл:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) sin(\lambda_k x) dx = \int\limits_0^l \frac{1 - cos(2\lambda_k x)}{2} dx = \frac{1}{2} x|_0^l - \frac{1}{2\lambda_k} sin(2\lambda_k x)|_0^l = \\ = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2\lambda_k} sin(2\lambda_k l) + \frac{1}{2\lambda_k} sin(2\lambda_k 0) = \left[\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l} \right] = \\ = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\lambda_k} sin(2 \frac{\pi + 2\pi k}{2l} l) = \frac{l}{2} - sin(\pi + 2\pi k) = [sin(\pi + 2\pi k) = 0] = \frac{l}{2}\end{gathered} \tag{2.10}$$

Подставляя полученные интегралы (2.9) и (2.10), получаем, что:

$$f_k(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) sin(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) sin(\lambda_k x) dx} = \frac{I(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l} I(t) \tag{2.11}$$

Теперь подставим представление (2.8) в начальное условие (2.4):

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \varphi(x)$$

Функцию $\varphi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения φ_k найдём тем же самым способом:

$$\varphi_k = \frac{(\varphi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\lambda_k x)dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \varphi(x)dcos(\lambda_k x) = \\ = -\frac{1}{\lambda_k}\left(\varphi(t)cos(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = I_1\end{gathered} \tag{2.12}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{2.13}$$

Подставляя полученные интегралы (2.12) и (2.13), получаем, что:

$$\varphi_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx} = \frac{I_1(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}I_1 \tag{2.14}$$

Теперь подставим представление (2.8) в начальное условие (2.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x)\right)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial T_k(t)}{\partial t}X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T'_k(t)X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T'_k(0)X_k(x) = \psi(x)$$

Функцию $\psi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения ψ_k найдём тем же самым способом:

$$\psi_k = \frac{(\psi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)sin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \psi(x) sin(\lambda_k x) dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \psi(x) dcos(\lambda_k x) = \\ = -\frac{1}{\lambda_k}\left(\psi(t) cos(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x)\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} dx\right) = \dots = I_2\end{gathered} \tag{2.15}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) sin(\lambda_k x) dx = \frac{l}{2} \tag{2.16}$$

Подставляя полученные интегралы (2.15) и (2.16), получаем, что:

$$\psi_k = \frac{\int\limits_0^l \psi(x) sin(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) sin(\lambda_k x) dx} = \frac{I_1(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l} I_2 \tag{2.17}$$

Таким образом, используя все полученные выше результаты, можно записать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t)\right) X_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k X_k(x) \end{cases}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в рядах и подставляя полученные коэффициенты ряда Фурье $f_k(t)$, φ_k и ψ_k, соответственно, (2.11), (2.14), (2.17), получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t) = \frac{2}{l} I(t) \\ T_k(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T_k'(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Ищем решение уравнения в виде:

$$T_k(t) = T_{k_{\text{оо}}}(t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда находим, что:

$$T_{k_{\text{оо}}}(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t)$$

Также находим $T_{k_{\text{чн}}}(t)$, используя знания, полученные в курсе дифференциальных уравнений.

Тогда решение запишется в виде:

$$T_k(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда найдём:

$$T_k'(t) = -a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k t) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}'(t)$$

Таким образом, подставляя во второе и третье условие задачи Коши (2.18), получим систему:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k cos(a\lambda_k 0) + B_k sin(a\lambda_k 0) + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T_k'(0) = a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k 0) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k 0) + T_{k_{\text{чн}}}'(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T_k'(0) = a\lambda_k B_k + T_{k_{\text{чн}}}'(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда, выражая, получим:

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \\ B_k = \frac{\frac{2}{l} I_2 - T_{k_{\text{чн}}}'(0)}{a\lambda_k} \end{cases}$$

Тогда, подставляя все, что мы нашли выше в представление (2.8), получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)\right) sin(\lambda_k x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T_{k_{\text{чн}}}'(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) sin(\lambda_k x)$$

Итого получаем решение, при условии, что интегралы I_1 и I_2 были ранее получены по формулам (2.12) и (2.15):

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T_{k_{\text{чн}}}'(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) sin(\lambda_k x) \\ \lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

3. Третья смешанная задача с граничными условиями второго и первого рода соответственно.

Рассмотрим третью смешанную задачу с граничными условиями второго и первого рода соответственно для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\} \tag{3.1}$$

$$u_x|_{x=0} = 0,\ t \geq 0 \tag{3.2}$$

$$u|_{x=l} = 0,\ t \geq 0 \tag{3.3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l \tag{3.4}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l \tag{3.5}$$

Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{3.6}$$

Подставим это представление в исходное уравнение (3.1), принимая $f(x,t) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(t)X(x)) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)) = 0$$
$$T''(t)X(x) - a^2 T(t)X''(x) = 0$$
$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

Разделим полученное уравнение на $a^2 X(x)T(t)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Так как слева функция, которая зависит только от t, а справа функция, которая зависит только от x, то это может быть только константа. Обозначим её за $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Тогда получим уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

В данном случае λ – это собственные значения. В курсе лекций было показано, что $\lambda \geq 0$. Тогда мы можем переобозначить λ за λ^2. Тогда уравнение примет вид:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Подставляя представление (3.6) в граничные условия (3.2)-(3.3), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X'(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Так как функция $T(t)$ тождественно не равна 0, т.е. $T(t) \not\equiv 0$, то мы можем разделить второе и третье условие в задаче на $T(t)$. Таким образом получим следующую задачу – задачу Штурма-Лиувилля или задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\nu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\nu = \pm\lambda i$$

$$X(x) = Acos(\lambda x) + Bsin(\lambda x)$$

При этом:

$$X'(x) = -A\lambda sin(\lambda x) + B\lambda cos(\lambda x)$$

Тогда:

$$X'(0) = B = 0$$

и

$$X(l) = Acos(\lambda l) = 0$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то можем положить, без нормировки, $A = 1$. Тогда:

$$cos(\lambda l) = 0$$

$$\lambda_k l = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда собственные функции примут вид:

$$X_k(x) = cos(\lambda_k x) = cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x)$$

Тогда решение задачи Штурма-Лиувилля для смешанной задачи первого рода для волнового уравнения примет вид:

$$\boxed{\begin{gathered}\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \dots \\ X_k(x) = cos(\lambda_k x) = cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x),\ k = 0, 1, 2, \dots\end{gathered}}$$

Тогда решение исходной задачи можно представить в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \tag{3.8}$$

Подставим представление (3.8) в исходное уравнение (3.1):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 T_k(t)}{\partial t^2} X_k(t) - a^2 T_k(t) \frac{\partial^2 X_k(x)}{\partial x^2} \right) =$$

$$= [X_k(x) = cos(\lambda_k x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) cos(\lambda_k x) - a^2 T_k(t) \frac{\partial^2 cos(\lambda_k x)}{\partial x^2} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) sin(\lambda_k x) + a^2 \lambda_k T_k(t) cos(\lambda_k x) \right) = [cos(\lambda_k x) = X_k(x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) X_k(x) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) X_k(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) \right) X_k(x) = f(x,t)$$

Функцию $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x)$$

Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ находятся по формуле:

$$f_k(t) = \frac{(f(x,t), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) X_k(x) dx}{\int\limits_0^l X_k(x) X_k(x) dx} = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) cos(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l cos(\lambda_k x) cos(\lambda_k x) dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^l f(x,t) cos(\lambda_k x) dx = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^l f(x.t) dsin(\lambda_k x) = \\ = \frac{1}{\lambda_k} \left(f(x,t) sin(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l sin(\lambda_k x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx \right) = \dots = I(t) \end{gathered} \tag{3.9}$$

Для получения значения верхнего и нижнего интегралов стоит помнить, что:

$$\begin{gathered} sin(\pi k) = 0 \\ sin(2\pi k) = 0 \\ sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^k \\ sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1 \\ cos(\pi k) = (-1)^k \\ cos(2\pi k) = 1 \\ cos(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0 \\ cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 0 \end{gathered}$$

Для подсчёта нижнего интеграла воспользуемся формулой квадрата тригонометрической функции и вычислим полученный интеграл:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^l cos(\lambda_k x) cos(\lambda_k x) dx = \int\limits_0^l \frac{1 + cos(2\lambda_k x)}{2} dx = \frac{1}{2} x|_0^l + \frac{1}{2\lambda_k} sin(2\lambda_k x)|_0^l = \\ = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2\lambda_k} sin(2\lambda_k l) - \frac{1}{2\lambda_k} sin(2\lambda_k 0) = \left[\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l} \right] = \\ = \frac{l}{2} + \frac{1}{2\lambda_k} sin(2 \frac{\pi + 2\pi k}{2l} l) = \frac{l}{2} + sin(\pi + 2\pi k) = [sin(\pi + 2\pi k) = 0] = \frac{l}{2} \end{gathered} \tag{3.10}$$

Подставляя полученные интегралы (3.9) и (3.10), получаем, что:

$$f_k(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) cos(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) cos(\lambda_k x) dx} = \frac{I(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l} I(t) \tag{3.11}$$

Теперь подставим представление (3.8) в начальное условие (3.4):

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \varphi(x)$$

Функцию $\varphi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения φ_k найдём тем же самым способом:

$$\varphi_k = \frac{(\varphi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \varphi(x)cos(\lambda_k x)dx = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \varphi(x)dsin(\lambda_k x) = \\ = \frac{1}{\lambda_k}\left(\varphi(t)sin(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l sin(\lambda_k x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = I_1\end{gathered} \tag{3.12}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{3.13}$$

Подставляя полученные интегралы (3.12) и (3.13), получаем, что:

$$\varphi_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx} = \frac{I_1(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}I_1 \tag{3.14}$$

Теперь подставим представление (3.8) в начальное условие (3.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x)\right)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial T_k(t)}{\partial t}X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \psi(x)$$

Функцию $\psi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения ψ_k найдём тем же самым способом:

$$\psi_k = \frac{(\psi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \psi(x) cos(\lambda_k x) dx = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \psi(x) dsin(\lambda_k x) = \\ = \frac{1}{\lambda_k}\left(\psi(t) sin(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l sin(\lambda_k x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = I_2\end{gathered} \tag{3.15}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l cos(\lambda_k x) cos(\lambda_k x) dx = \frac{l}{2} \tag{3.16}$$

Подставляя полученные интегралы (3.15) и (3.16), получаем, что:

$$\psi_k = \frac{\int\limits_0^l \psi(x) cos(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l cos(\lambda_k x) cos(\lambda_k x) dx} = \frac{I_1(t)}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l} I_2 \tag{3.17}$$

Таким образом, используя все полученные выше результаты, можно записать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t)\right) X_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k X_k(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k X_k(x)\end{cases}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в рядах и подставляя полученные коэффициенты ряда Фурье $f_k(t)$, φ_k и ψ_k, соответственно, (3.11), (3.14), (3.17), получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t) = \frac{2}{l} I(t) \\ T_k(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T_k'(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases} \tag{3.18}$$

Ищем решение уравнения в виде:

$$T_k(t) = T_{k_{\text{оо}}}(t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда находим, что:

$$T_{k_{\text{оо}}}(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t)$$

Также находим $T_{k_{\text{чн}}}(t)$, используя знания, полученные в курсе дифференциальных уравнений.

Тогда решение запишется в виде:

$$T_k(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда найдём:

$$T_k'(t) = -a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k t) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}'(t)$$

Таким образом, подставляя во второе и третье условие задачи Коши (3.18), получим систему:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k cos(a\lambda_k 0) + B_k sin(a\lambda_k 0) + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T'_k(0) = a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k 0) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k 0) + T'_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T'_k(0) = a\lambda_k B_k + T'_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда, выражая, получим:

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \\ B_k = \frac{\frac{2}{l} I_2 - T'_{k_{\text{чн}}}(0)}{a\lambda_k} \end{cases}$$

Тогда, подставляя все, что мы нашли выше в представление (3.8), получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) cos(\lambda_k x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T'_{k_{\text{чн}}}(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) cos(\lambda_k x)$$

Итого получаем решение, при условии, что интегралы I_1 и I_2 были ранее получены по формулам (3.12) и (3.15):

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T'_{k_{\text{чн}}}(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) cos(\lambda_k x) \\ \lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

4. Вторая смешанная задача.

Рассмотрим вторую смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\, \mathbb{D} = \{t > 0,\, 0 < x < l\} \tag{4.1}$$

$$u_x|_{x=0} = 0,\, t \geq 0 \tag{4.2}$$

$$u_x|_{x=l} = 0,\, t \geq 0 \tag{4.3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\, 0 \leq x \leq l \tag{4.4}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x),\, 0 \leq x \leq l \tag{4.5}$$

Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{4.6}$$

Подставим это представление в исходное уравнение (4.1), принимая $f(x,t) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(t)X(x)) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)) = 0$$
$$T''(t)X(x) - a^2T(t)X''(x) = 0$$
$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

Разделим полученное уравнение на $a^2X(x)T(t)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Так как слева функция, которая зависит только от t, а справа функция, которая зависит только от x, то это может быть только константа. Обозначим её за $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Тогда получим уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

В данном случае λ – это собственные значения. В курсе лекций было показано, что $\lambda \geq 0$. Тогда мы можем переобозначить λ за λ^2. Тогда уравнение примет вид:

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0$$

Подставляя представление (4.6) в граничные условия (4.2)-(4.3), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2X(x) = 0 \\ X'(0)T(t) = 0 \\ X'(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Так как функция $T(t)$ тождественно не равна 0, т.е. $T(t) \not\equiv 0$, то мы можем разделить второе и третье условие в задаче на $T(t)$. Таким образом получим следующую задачу – задачу Штурма-Лиувилля или задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\nu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\nu = \pm\lambda i$$

$$X(x) = Acos(\lambda x) + Bsin(\lambda x)$$

При этом:

$$X'(x) = -A\lambda sin(\lambda x) + B\lambda cos(\lambda x)$$

Тогда:

$$X'(0) = B = 0$$

и

$$X'(l) = -A\lambda sin(\lambda l) = 0$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то можем положить, без нормировки, $A = 1$. Тогда, так как $\lambda \neq 0$:

$$sin(\lambda l) = 0$$

$$\lambda_k l = \pi k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда собственные функции примут вид:

$$X_k(x) = cos(\lambda_k x) = cos(\frac{\pi k}{l} x)$$

Только в данной задаче из рассматриваемых, $\lambda_0 = 0$ является собственным значением!

Тогда решение задачи Штурма-Лиувилля для смешанной задачи первого рода для волнового уравнения примет вид:

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \ldots \\ X_0(x) = 1 \\ X_k(x) = cos(\lambda_k x) = cos(\frac{\pi k}{l} x),\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

Тогда решение исходной задачи можно представить в виде:

$$u(x,t) = T_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) \tag{4.8}$$

Подставим представление (4.8) в исходное уравнение (4.1):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(T_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)\right)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 T_0(t)}{\partial t^2}X_0(x)-a^2T_0(t)\frac{\partial^2 X_0(x)}{\partial x^2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 T_k(t)}{\partial t^2}X_k(t)-a^2T_k(t)\frac{\partial^2 X_k(x)}{\partial x^2}\right)=$$

$$=[X_0(x)=1,\ X_k(x)=cos(\lambda_k x)]=T_0''(t)\cdot 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)cos(\lambda_k x)-a^2T_k(t)\frac{\partial^2 cos(\lambda_k x)}{\partial x^2}\right)=$$

$$=T_0''(t)\cdot 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)sin(\lambda_k x)+a^2\lambda_k T_k(t)cos(\lambda_k x)\right)=[1=X_0(x),\ cos(\lambda_k x)=X_k(x)]=$$

$$=T_0''(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)X_k(x)+a^2\lambda_k^2T_k(t)X_k(x)\right)=$$

$$=T_0''(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)+a^2\lambda_k^2T_k(t)\right)X_k(x)=f(x,t)$$

Функцию $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x)$$

В дальнейшем предполагаем, при нахождении коэффициентов ряда Фурье, что $k=0,1,2,\ldots$. Итоговое разложение разобьём на две суммы, одна из которых соответствует коэффициенту при собственной функции $X_0(x)$, а другая при собственной функции $X_k(x)$. Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ находятся по формуле:

$$f_k(t)=\frac{(f(x,t),X_k(x))}{(X_k(x),X_k(x))}=\frac{\int\limits_0^l f(x,t)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx}=\frac{\int\limits_0^l f(x,t)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l f(x,t)cos(\lambda_k x)dx=\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l f(x,t)dsin(\lambda_k x)=\\ =\frac{1}{\lambda_k}\left(f(x,t)sin(\lambda_k x)|_0^l-\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx\right)=\cdots=\begin{cases}f_0(t),\ k=0\\ I(t),\ k=1,2,\ldots\end{cases}\end{gathered}\tag{4.9}$$

Для получения значения верхнего и нижнего интегралов стоит помнить, что:

$$sin(\pi k) = 0$$
$$sin(2\pi k) = 0$$
$$sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^k$$
$$sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$$
$$cos(\pi k) = (-1)^k$$
$$cos(2\pi k) = 1$$
$$cos(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0$$
$$cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 0$$

Для подсчёта нижнего интеграла воспользуемся формулой квадрата тригонометрической функции и вычислим полученный интеграл:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx = \int\limits_0^l \frac{1+cos(2\lambda_k x)}{2}dx = \frac{1}{2}x|_0^l + \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\lambda_k x)|_0^l = \\ = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\lambda_k l) - \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\lambda_k 0) = \left[\lambda_k = \frac{\pi k}{l}\right] = \\ = \frac{l}{2} + \frac{1}{2\lambda_k}sin(2\frac{\pi k}{l}l) = \frac{l}{2} + sin(\pi k) = [sin(\pi k) = 0] = \frac{l}{2}\end{aligned} \tag{4.10}$$

Подставляя полученные интегралы (4.9) и (4.10), получаем, что:

$$f_k(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx} = \begin{cases} \frac{2}{l}f_0(t), \ k = 0 \\ \frac{2}{l}I(t), \ k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{4.11}$$

Теперь подставим представление (4.8) в начальное условие (4.4):

$$T_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \varphi(x)$$

Функцию $\varphi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения φ_k найдём тем же самым способом:

$$\varphi_k = \frac{(\varphi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \varphi(x)cos(\lambda_k x)dx = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \varphi(x)dsin(\lambda_k x) = \\ = \frac{1}{\lambda_k}\left(\varphi(t)sin(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l sin(\lambda_k x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = \begin{cases}\varphi_0, \ k=0\\ I_1, \ k=1,2,\dots\end{cases}\end{gathered} \tag{4.12}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{4.13}$$

Подставляя полученные интегралы (4.12) и (4.13), получаем, что:

$$\varphi_k = \frac{\int_0^l \varphi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx} = \begin{cases}\frac{2}{l}\varphi_0, \ k=0\\ \frac{2}{l}I_1, \ k=1,2,\dots\end{cases} \tag{4.14}$$

Теперь подставим представление (4.8) в начальное условие (4.5):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(T_0(t)+X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)X_k(x)\right)|_{t=0} = \frac{\partial T_0(t)}{\partial t}X(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial T_k(t)}{\partial t}X_k(x)|_{t=0} = \\ = T_0'(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(t)X_k(x)|_{t=0} = T_0'(0)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)X_k(x) = \psi(x)\end{gathered}$$

Функцию $\psi(x)$ разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения ψ_k найдём тем же самым способом:

$$\psi_k = \frac{(\psi(x), X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int_0^l \psi(x)X_k(x)dx}{\int_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int_0^l \psi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \psi(x)cos(\lambda_k x)dx = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \psi(x)dsin(\lambda_k x) = \\ = \frac{1}{\lambda_k}\left(\psi(t)sin(\lambda_k x)|_0^l - \int\limits_0^l sin(\lambda_k x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}dx\right) = \dots = \begin{cases}\psi_0, \ k=0\\ I_2, \ k=1,2,\dots\end{cases}\end{gathered} \tag{4.15}$$

Нижний интеграл уже был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{4.16}$$

Подставляя полученные интегралы (4.15) и (4.16), получаем, что:

$$\psi_k = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)cos(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l cos(\lambda_k x)cos(\lambda_k x)dx} = \begin{cases} \frac{2}{l}\psi_0, \ k=0 \\ \frac{2}{l}I_2, \ k=1,2,\dots \end{cases} \tag{4.17}$$

Таким образом, используя все полученные выше результаты, можно записать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} T_0''(t)X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t)\right)X_k(x) = \frac{2}{l}f_0(t)X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x) \\ T_0(0)X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \frac{2}{l}\varphi_0 X_0(x)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x) \\ T_0'(0)X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \frac{2}{l}\psi_0 X_0(0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x) \end{cases}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в рядах и подставляя полученные коэффициенты ряда Фурье $f_k(t)$, φ_k и ψ_k, соответственно, (4.11), (4.14), (4.17), получаем две задачи Коши:

$$\begin{cases} T_0''(t) = \frac{2}{l}f_0(t) \\ T_0(0) = \frac{2}{l}\varphi_0 \\ T_0'(0) = \frac{2}{l}\psi_0 \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} T_k''(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t) = \frac{2}{l}I(t) \\ T_k(0) = \frac{2}{l}I_1 \\ T_k'(0) = \frac{2}{l}I_2 \end{cases} \tag{4.19}$$

Первую задачу можно решить простейшим интегрированием, и подставкой в условия задачи, однако, для формальности, выпишем формулу, полученную в курсе лекций:

$$T_0(t) = \psi_0 t + \varphi_0 + \int\limits_0^t f_0(\tau)(t-\tau)d\tau \tag{4.20}$$

Для второй задачи ищем решение уравнения в виде:

$$T_k(t) = T_{k_{\text{оо}}}(t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда находим, что:

$$T_{k_{\text{оо}}}(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t)$$

Также находим $T_{k_{\text{чн}}}(t)$, используя знания, полученные в курсе дифференциальных уравнений.
Тогда решение запишется в виде:

$$T_k(t) = A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Откуда найдём:

$$T'_k(t) = -a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k t) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k t) + T'_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Таким образом, подставляя во второе и третье условие задачи Коши (4.19), получим систему:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k cos(a\lambda_k 0) + B_k sin(a\lambda_k 0) + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T'_k(0) = a\lambda_k A_k sin(a\lambda_k 0) + a\lambda_k B_k cos(a\lambda_k 0) + T'_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k + T_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_1 \\ T'_k(0) = a\lambda_k B_k + T'_{k_{\text{чн}}}(0) = \frac{2}{l} I_2 \end{cases}$$

Откуда, выражая, получим:

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \\ B_k = \frac{\frac{2}{l} I_2 - T'_{k_{\text{чн}}}(0)}{a\lambda_k} \end{cases}$$

Тогда, подставляя все, что мы нашли выше, в представление (4.8), получаем:

$$u(x,t) = T_0(t)X_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \psi_0 t + \varphi_0 + \int\limits_0^t f_0(\tau)(t-\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k cos(a\lambda_k t) + B_k sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)\right) cos(\lambda_k x) = \psi_0 t + \varphi_0 + \int\limits_0^t f_0(\tau)(t-\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T'_{k_{\text{чн}}}(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) cos(\lambda_k x)$$

Итого получаем решение, при условии, что интегралы I_1 и I_2 были ранее получены по формулам (4.12) и (4.15):

$$u(x,t) = \psi_0 t + \varphi_0 + \int\limits_0^t f_0(\tau)(t-\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} I_1 - T_{k_{\text{чн}}}(0) \right) cos(a\lambda_k t) + \left(\frac{\frac{2}{l} I_2 - T'_{k_{\text{чн}}}(0)}{a\lambda_k} \right) sin(a\lambda_k t) + T_{k_{\text{чн}}}(t) \right) cos(\lambda_k x)$$

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$

5. Задачи Штурма-Лиувилля.

Как видно по решённым ранее задачам, принципиальная различие в решение заключается лишь в собственных значениях и собственных функциях каждой из задач. Поэтому отдельно выпишем каждую из задач Штурма-Лиувилля, их решения, и общий вид решения смешанной задачи отдельно:

1.
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$
$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \dots$$
$$X_k(x) = sin(\frac{\pi k}{l} x),\ k = 1, 2, \dots$$
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) sin(\frac{\pi k}{l} x)$$

2.
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$
$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \dots$$
$$X_k(x) = sin(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x),\ k = 0, 1, 2, \dots$$
$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) sin(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x)$$

3.
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$
$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ k = 0, 1, 2, \dots$$
$$X_k(x) = cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x),\ k = 0, 1, 2, \dots$$
$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) cos(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x)$$

4. $$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$
$$\lambda_0 = 0$$
$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$
$$X_0(x) = 1$$
$$X_k(x) = cos(\frac{\pi k}{l} x),\ k = 1, 2, \ldots$$
$$u(x,t) = T_0(t) \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) cos(\frac{\pi k}{l} x)$$

Стоит отметить, что в процессе рассмотрения задачи происходила замена λ на λ^2. Если этого не делать, тогда при вычислении собственных функций, в общем решении возникнет $\sqrt{\lambda}$, а при вычисления собственных значения λ будет равным квадратам рассмотренных выше собственных значений. Следовательно, при подстановке в собственные функции собственных значений, в случае, если мы рассматриваем λ они будут равны тем, что мы получали, когда рассматривали λ^2. На процесс решения, влияют именно собственные функции, а, так как они совпадают в обоих случаях рассмотрения собственных значений, то решение остаётся одним и тем же.

6. Особый способ решения смешанных задач для волнового уравнения с неоднородностью в уравнении.

Выше мы рассматривали одну задачу, и решали её. Однако существует особый подход, который, возможно, в некоторых случая может упростить процесс решения. Он состоит в том, что в случае неоднородности уравнения, разбить задачу на две. Одна из которых будет содержать однородное уравнение и неоднородные начальные условия, а вторая будет содержать неоднородное уравнение и однородные начальные условия. Само решение происходит по тому же алгоритму, который был приложен выше.
Рассмотрим данный подход на примере первой смешанной задачи для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\}$$
$$u|_{x=0} = 0,\ t \geq 0$$
$$u|_{x=l} = 0,\ t \geq 0$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l$$

Тогда решение ищем в виде суммы двух функций:

$$u(x,t) = P(x,t) + Q(x,t)$$

Тогда для функции $P(x,t)$ следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0,\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\}$$
$$P|_{x=0} = 0,\ t \geq 0$$
$$P|_{x=l} = 0,\ t \geq 0$$
$$P|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l$$
$$P_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l$$

И, соответственно, для функции $Q(x,t)$ получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = f(x,t),\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\}$$
$$Q|_{x=0} = 0,\ t \geq 0$$
$$Q|_{x=l} = 0,\ t \geq 0$$
$$Q|_{t=0} = 0,\ 0 \leq x \leq l$$
$$Q_t|_{t=0} = 0,\ 0 \leq x \leq l$$

Дальнейшее разрешение каждой из этих задач происходит по тому же алгоритму, который мы применяли ранее.
Для остальных случаев все записывается аналогично.

7. Пример решения смешанной задачи для волнового уравнения с однородными граничными условиями.

Найти решение следующей смешанной задачи для волнового уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} = tx,\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\} \tag{7.1}$$

$$u|_{x=0} = 0,\ t \geq 0 \tag{7.2}$$

$$u|_{x=l} = 0,\ t \geq 0 \tag{7.3}$$

$$u|_{t=0} = x,\ 0 \leq x \leq l \tag{7.4}$$

$$u_t|_{t=0} = sin(\frac{2\pi}{l}x),\ 0 \leq x \leq l \tag{7.5}$$

Решение:
Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{7.6}$$

Подставим это представление в исходное уравнение (7.1), принимая $f(x,t) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(t)X(x)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)X(x)) = 0$$
$$T''(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0$$
$$T''(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

Разделим полученное уравнение на $a^2X(x)T(t)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Так как слева функция, которая зависит только от t, а справа функция, которая зависит только от x, то это может быть только константа. Обозначим её за $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Тогда получим уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

В данном случае λ – это собственные значения. В курсе лекций было показано, что $\lambda \geq 0$. Тогда мы можем переобозначить λ за λ^2. Тогда уравнение примет вид:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Подставляя представление (7.6) в граничные условия (7.2)-(7.3), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Так как функция $T(t)$ тождественно не равна 0, т.е. $T(t) \not\equiv 0$, то мы можем разделить второе и третье условие в задаче на $T(t)$. Таким образом получим следующую задачу – задачу Штурма-Лиувилля или задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{7.7}$$

Её решение, как уже было показано ранее, имеет вид:

$$\boxed{\begin{gathered}\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \ldots \\ X_k(x) = sin(\lambda_k x) = sin(\frac{\pi k}{l} x),\ k = 1, 2, \ldots\end{gathered}}$$

Тогда решение исходной задачи можно представить в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \tag{7.8}$$

Подставим представление (7.8) в исходное уравнение (7.1):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 T_k(t)}{\partial t^2} X_k(t) - a^2 T_k(t) \frac{\partial^2 X_k(x)}{\partial x^2} \right) =$$

$$= [X_k(x) = sin(\lambda_k x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) sin(\lambda_k x) - a^2 T_k(t) \frac{\partial^2 sin(\lambda_k x)}{\partial x^2} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big(T_k''(t) sin(\lambda_k x) + a^2 \lambda_k T_k(t) sin(\lambda_k x) \big) = [sin(\lambda_k x) = X_k(x)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big(T_k''(t) X_k(x) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) X_k(x) \big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(T_k''(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) \big) X_k(x) = xt$$

Функцию xt разложим в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$xt = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x)$$

Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ находятся по формуле:

$$f_k(t) = \frac{(xt, X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l xt X_k(x) dx}{\int\limits_0^l X_k(x) X_k(x) dx} = \frac{\int\limits_0^l xt sin(\lambda_k x) dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x) sin(\lambda_k x) dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится к применению интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l xt sin(\lambda_k x) dx = t \int\limits_0^l x sin(\lambda_k x) dx = -t \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^l x d cos(\lambda_k x) = \\ = -t \frac{1}{\lambda_k} \left(x cos(\lambda_k x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l cos(\lambda_k x) dx \right) = -t \frac{1}{\lambda_k} (l cos(\lambda_k l) - \\ -0 cos(\lambda_k 0) - \frac{1}{\lambda_k} sin(\lambda_k)\Big|_0^l) = \left[\lambda_k = \frac{\pi k}{l} \right] = \\ = -t \frac{1}{\lambda_k} \left(l cos(\frac{\pi k}{l} l) - sin(\frac{\pi k}{l} l) + sin(\frac{\pi k}{l} 0) \right) = \\ = \big[\cos(\pi k) = (-1)^k,\ sin(\pi k) = 0 \big] = -t \frac{1}{\lambda_k} l (-1)^k = \frac{tl(-1)^{k+1}}{\lambda_k}\end{gathered} \tag{7.9}$$

Ранее было показано во всех случаях, что нижний интеграл равен:

$$\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{7.10}$$

Подставляя полученные интегралы (7.9) и (7.10), получаем, что:

$$f_k(t) = \frac{\int\limits_0^l xtsin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx} = \frac{\frac{tl(-1)^{k+1}}{\lambda_k}}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}\frac{tl(-1)^{k+1}}{\lambda_k} = \frac{2t(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \tag{7.11}$$

Теперь подставим представление (7.8) в начальное условие (7.4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = x$$

Функцию x разложим аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$$

Коэффициенты разложения φ_k найдём тем же самым способом:

$$\varphi_k = \frac{(x, X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^l xX_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k(x)X_k(x)dx} = \frac{\int\limits_0^l xsin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx}$$

Подсчёт верхнего интеграла сводится, в общем случае, к применению интегрирования по частям. Однако, можно заметить, что этот интеграл уже был посчитан нами ранее:

$$\int\limits_0^l xsin(\lambda_k x)dx = \frac{l(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \tag{7.12}$$

Нижний интеграл, опять же, был получен ранее и имеет вид:

$$\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx = \frac{l}{2} \tag{7.13}$$

Подставляя полученные интегралы (7.12) и (7.13), получаем, что:

$$\varphi_k = \frac{\int\limits_0^l xsin(\lambda_k x)dx}{\int\limits_0^l sin(\lambda_k x)sin(\lambda_k x)dx} = \frac{\frac{tl(-1)^{k+1}}{\lambda_k}}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}\frac{tl(-1)^{k+1}}{\lambda_k} = \frac{2t(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \tag{7.14}$$

Теперь подставим представление (7.8) в начальное условие (7.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x)\right)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial T_k(t)}{\partial t}X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = sin(\frac{2\pi}{l}x)$$

Функцию $sin(\frac{2\pi}{l}x)$, в общем случае, раскладываем аналогичным образом в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$$

Однако в данном случае, можно заметить, что функция $sin(\frac{2\pi}{l}x)$ уже разложена в ряд Фурье.
Тогда коэффициенты примут вид:

$$\psi_k = \begin{cases} 1, \ k = 2 \\ 0, \ k \neq 2 \end{cases} \tag{7.15}$$

Таким образом, используя все полученные выше результаты, можно записать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t)\right) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x) \end{cases}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в рядах и подставляя полученные коэффициенты ряда Фурье $f_k(t)$, φ_k и ψ_k, соответственно, (7.11), (7.14), (7.15), получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = \frac{2t(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \\ T_k(0) = \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \\ T_k'(0) = \begin{cases} 1, \ k = 2 \\ 0, \ k \neq 2 \end{cases} \end{cases} \tag{7.16}$$

Ищем решение уравнения в виде:

$$T_k(t) = T_{k_{oo}}(t) + T_{k_{чн}}(t)$$

Откуда находим, что:

$$T_{k_{oo}}(t) = A_k cos(\lambda_k t) + B_k sin(\lambda_k t)$$

Находим $T_{k_{чн}}(t)$, в виде:

$$T_{k_{чн}} = C_0 + C_1 t$$

Подставляем это представление в уравнение задачи (7.16):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(C_0 + C_1 t) + \lambda_k^2 (C_0 + C_1 t) = \frac{2t(-1)^{k+1}}{\lambda_k}$$

Откуда сравнивая соответствующие коэффициенты, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} \end{cases}$$

Тогда решение запишется в виде:

$$T_k(t) = A_k cos(\lambda_k t) + B_k sin(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} t$$

Откуда найдём:

$$T'_k(t) = -\lambda_k A_k sin(\lambda_k t) + \lambda_k B_k cos(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3}$$

Таким образом, подставляя во второе и третье условие задачи Коши (7.16), получим систему:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k cos(\lambda_k 0) + B_k sin(\lambda_k 0) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} 0 = \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \\ T'_k(0) = \lambda_k A_k sin(\lambda_k 0) + \lambda_k B_k cos(\lambda_k 0) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} = \begin{cases} 1, \ k = 2 \\ 0, \ k \neq 2 \end{cases} \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} T_k(0) = A_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \\ T'_k(0) = \lambda_k B_k + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} = \begin{cases} 1, \ k = 2 \\ 0, \ k \neq 2 \end{cases} \end{cases}$$

Откуда, выражая, получим:

$$\begin{cases} A_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \\ B_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k} - \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4}, \ k = 2 \\ -\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4}, \ k \neq 2 \end{cases} \end{cases}$$

Тогда, подставляя все, что мы нашли выше в представление (7.8), получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k cos(\lambda_k t) + B_k sin(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} t \right) sin(\lambda_k x) =$$

$$= \left(\frac{2(-1)^3}{\lambda_2} cos(\lambda_2 t) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^4} t \right) sin(\lambda_2 t) + \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^3} t \right) sin(\lambda_2 x) +$$

$$+ \sum_{k=1,\, k\neq 2}^{\infty} \left(\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \right) cos(\lambda_k t) + \left(-\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} t \right) sin(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} t \right) sin(\lambda_k x)$$

Итого получаем решение:

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \left(\frac{2(-1)^3}{\lambda_2} cos(\lambda_2 t) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^4} t \right) sin(\lambda_2 t) + \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^3} t \right) sin(\lambda_2 x) + \\ + \sum_{k=1,\, k\neq 2}^{\infty} \left(\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \right) cos(\lambda_k t) + \left(-\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4} t \right) sin(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3} t \right) sin(\lambda_k x) \\ \lambda_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

8. Смешанные задачи с неоднородными граничными условиями.

Ранее мы рассматривали задачи с однородными граничными условиями. Возникает вопрос, что необходимо делать, в случае, если у нас граничные условия неоднородны. В этом случае решение представляется в сумме двух функций, одна из которых удовлетворяет граничным условиям, а другая самой задаче. После осуществляется подстановка, и в дальнейшем задача решается точно так же, как и ранее.
Рассмотрим этот алгоритм на примере первой смешанной задачи с неоднородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\}$$
$$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ t \geq 0$$
$$u|_{x=l} = \mu_2(t),\ t \geq 0$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l$$

Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $w(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, а функция $v(x,t)$ – самой задаче.
Функцию $w(x,t)$ в общем виде можно искать с помощью следующей задачи:

$$\begin{cases} w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t) \\ w(0,t) = C(t) = \mu_1(t) \\ w(l,t) = A(t)l^2 + B(t)l + C(t) = \mu_2 \end{cases}$$

Данная задача получается подстановкой функции $w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$ в общем виде в граничные условия, и производится такой подбор функций $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$, чтобы получилось удовлетворение граничных условий.
Затем представление функции $u(x,t)$ подставляется в изначальную задачу, и в ней выражается функция $v(x,t)$. Таким образом получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \mathbb{D} = \{t > 0,\ 0 < x < l\}$$
$$v|_{x=0} = 0,\ t \geq 0$$
$$v|_{x=l} = 0,\ t \geq 0$$
$$v|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0),\ 0 \leq x \leq l$$
$$v_t|_{t=0} = \psi(x) - w_t(x,0),\ 0 \leq x \leq l$$

Решение этой задачи аналогично способам предложенным выше. В случае других задач, способы преобразования задач аналогичны.

Однако, для того, чтобы не осуществлять подбор функции $w(x,t)$, уже существуют выведенные формулы для каждой из задач в зависимости от видов граничных условий, которыми можно воспользоваться:

1. $$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t)$$
$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

2. $$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u_x|_{x=l} = \mu_2(t)$$
$$w(x,t) = \mu_1(t) + x\mu_2(t)$$

3. $$u_x|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t)$$
$$w(x,t) = \mu_2(t) + (x-l)\mu_1(t)$$

4. $$u_x|_{x=0} = \mu_1(t),\ u_x|_{x=l} = \mu_2(t)$$
$$w(x,t) = x\mu_1(t) + \frac{x^2}{2l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

5. $$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ (u_x + hu)|_{x=l} = \mu_2(t)$$
$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - h\mu_1(t)}{1+lh}x$$

6. $$(u_x - hu)|_{x=0} = \mu_1(t),\ (u_x + hu)|_{x=l} = \mu_2(t)$$
$$w(x,t) = \frac{\mu_2(t) - (1+lh)\mu_1(t)}{(2+lh)h} + \frac{\mu_1(t) + \mu_2(t)}{2+lh}x$$

Очевидно здесь, и ранее мы рассматривали простейшие варианты смешанных задач для волнового уравнения. В случае более сложных задач, алгоритм остаётся тем же самым. В случае необходимости избавления от неоднородности в граничных условиях и отсутствия выведенной формулы, её всегда можно подобрать с помощью способа предложенного выше.

9. Пример решения смешанной задачи для волнового уравнения с неоднородными граничными условиями.

Найти решение следующей смешанной задачи для волнового уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \, \mathbb{D} = \{t > 0, \, 0 < x < l\} \tag{9.1}$$

$$u|_{x=0} = 0, \, t \geq 0 \tag{9.2}$$

$$u|_{x=l} = -\frac{1}{6}lt^3, \, t \geq 0 \tag{9.3}$$

$$u|_{t=0} = x, \, 0 \leq x \leq l \tag{9.4}$$

$$u_t|_{t=0} = sin(\frac{2\pi}{l}x), \, 0 \leq x \leq l \tag{9.5}$$

Решение:
Как видно, в данной задаче присутствует неоднородность в граничных условиях.
Решение тогда ищем в виде суммы двух функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ первая из которых удовлетворяет самой задаче, а вторая граничным условиям.
Тогда решение ищем в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Функцию $w(x,t)$ найдём по формуле, выписанной в предыдущем пункте.
Тогда получаем:

$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = 0 + \frac{x}{l}(-\frac{1}{6}t^3 l - 0) = -\frac{1}{6}xt^3$$

Тогда наше представление имеет вид:

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{1}{6}xt^3$$

Подставим это представление в исходную задачу (9.1)-(9.5):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(v(x,t) - \frac{1}{6}xt^3) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v(x,t) - \frac{1}{6}xt^3) = 0, \, \mathbb{D} = \{t > 0, \, 0 < x < l\}$$
$$v|_{x=0} = 0, \; t \geq 0$$
$$v|_{x=l} = 0, \; t \geq 0$$
$$v|_{t=0} = x + \frac{1}{6}x0^3, \; 0 \leq x \leq l$$
$$v_t|_{t=0} = sin(\frac{2\pi}{l}x) + \frac{1}{6}3x0^2, \; 0 \leq x \leq l$$

Таким образом производя преобразования, получаем смешанную задачу с однородными граничными условиями для $v(x,t)$:

$$v_{tt} - v_{xx} = xt, \, \mathbb{D} = \{t > 0, \, 0 < x < l\}$$
$$v|_{x=0} = 0, \; t \geq 0$$
$$v|_{x=l} = 0, \; t \geq 0$$
$$v|_{t=0} = x, \; 0 \leq x \leq l$$
$$v_t|_{t=0} = sin(\frac{2\pi}{l}x), \; 0 \leq x \leq l$$

Дальнейшие решение проводится аналогично смешанной задаче с однородными граничными условиями.
Решение конкретно данной задачи рассматривалось для задачи (7.1)-(7.5) и имеет вид:

$$v(x,t) = \left(\frac{2(-1)^3}{\lambda_2}cos(\lambda_2 t) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^4}t\right) sin(\lambda_2 t) + \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^3}t\right) sin(\lambda_2 x) +$$

$$+ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^{\infty} \left(\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k}\right) cos(\lambda_k t) + \left(-\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4}t\right) sin(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3}t\right) sin(\lambda_k x)$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$

Тогда итоговое решение получаем используя наше представление $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$:

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \left(\frac{2(-1)^3}{\lambda_2}cos(\lambda_2 t) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^4}t\right) sin(\lambda_2 t) + \frac{2(-1)^3}{\lambda_2^3}t\right) sin(\lambda_2 x) + \\ + \sum_{k=1,\ k\neq 2}^{\infty} \left(\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k}\right) cos(\lambda_k t) + \left(-\frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^4}t\right) sin(\lambda_k t) + \frac{2(-1)^{k+1}}{\lambda_k^3}t\right) sin(\lambda_k x) - \frac{1}{6}xt^3 \\ \lambda_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

10. Алгоритм решения смешанных задач для волнового уравнения.

Приведём общий алгоритм для решения смешанной задачи любой сложности для уравнения гиперболического типа:

1. В первую очередь смотрим, однородны или нет граничные условия. Если однородны, идём дальше, если нет, то разбиваем решение на две функции одна из которых удовлетворяет этой задаче с однородными граничными условиями, а другая неоднородным граничным условиям, с помощью способа предложенного выше. Затем идём дальше.

2. Затем составляем задачу Штурма-Лиувилля или задачу на собственные значения и собственные функции, а затем разрешаем её.

3. Составляем задачу Коши, раскладывая неоднородность в уравнении и функции в начальных условиях в ряды Фурье по собственным функциям и сравнивая соответствующие коэффициенты.

4. Разрешаем задачу Коши. Находим соответствующие коэффициенты ряда Фурье и выписываем итоговые решения, собирая все функции в одну.