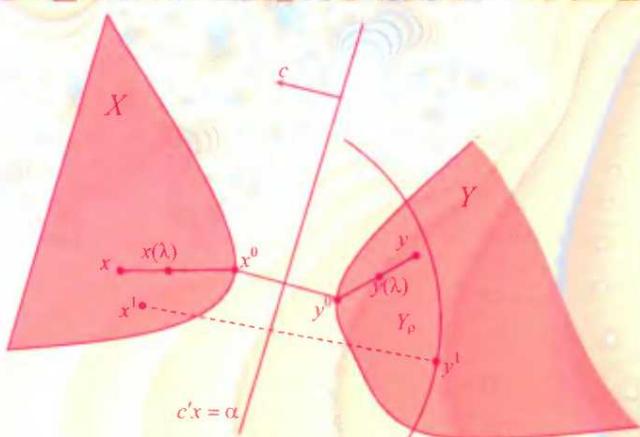




МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ



ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

$$\begin{aligned} t^* &\rightarrow \\ \dot{x} &= f(x, u), \\ x(t^*) &\in X(\delta) = \{x \\ u(t) &\in U, t \in \mathbb{R} \} \\ \psi &= -\frac{\partial \mathcal{J}'(x^0(t))}{\partial x} \\ \psi^0(t^0) &= -\frac{\partial \phi(x^0)}{\partial x} \end{aligned}$$

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

*Рекомендовано
советом учебно-методического объединения Республики Беларусь
по естественнонаучному образованию
в качестве пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям
1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»,
1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика»,
1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика» (по направлениям),
1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность»
(математические методы и программные системы)*

Минск
Издательство «Четыре четверти»
2011

УДК 517.977(075.8)
ББК 22.161.8я73
М54

Авторы:

Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич,
А. И. Калинин, В. В. Крахотко, Н. С. Павленок

Рецензенты:

кафедра высшей математики

Белорусского государственного технологического университета

(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В. М. Марченко),

зав. кафедрой информатики Белорусского государственного университета

информатики и радиоэлектроники

д-р физ.-мат. наук, проф. Л. И. Минченко

Методы оптимизации : пособие / Р. Габасов [и др.]. – Минск :
M54 Издательство «Четыре четверти», 2011. – 472 с. : ил.

ISBN 978-985-6981-52-7.

Данное пособие является третьим изданием (первые два выпусти в 1975 и 1981 гг.) аналогичного пособия. По сравнению с предыдущими здесь переработаны все темы. В частности, глава «Линейное программирование» полностью ориентирована на симплекс-метод для задач с двухсторонними прямыми ограничениями. В главе, посвященной выпуклому программированию, помимо задач оптимизации приводятся основы выпуклого анализа, в том числе негладкого. Расширена тематика задач оптимального управления, в которой рассматриваются задачи в различных классах управляющих воздействий, в том числе синтез оптимальных систем. Все утверждения снабжены подробными доказательствами, а каждая тема – набором модельных примеров, иллюстрирующих доказанные результаты.

Рассчитано на студентов математического и экономического профиля. Рекомендуется также преподавателям, аспирантам, специалистам, работающим в области приложений математики.

УДК 517.977(075.8)
ББК 22.161.8я73

ISBN 978-985-6981-52-7

© Коллектив авторов, 2011
© Оформление. ОДО «Издательство
«Четыре четверти», 2011



*90-летию
Белорусского
государственного университета
посвящается*

В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Л. Эйлер

Решающим критерием при оценке той или иной теории является ее способность решать те проблемы, которые послужили исходным толчком для ее развития.

Дж. Данциг

Предисловие

Методы оптимизации – раздел математики, в котором анализируются и решаются экстремальные задачи (задачи минимизации и максимизации функционалов на множествах конечномерных или бесконечномерных пространств).

Экстремальные задачи встречаются в различных сферах человеческой деятельности. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, ибо оно, как правило, выбирается после сравнения с другими вариантами. Интерес к задачам наилучшего выбора был высоким всегда, но особенно возрос в последние годы в связи интенсивным развитием науки и техники. С одной стороны, людям все чаще и чаще приходится заниматься процессами, для осуществления которых требуется максимально эффективное использование имеющихся средств и ресурсов, с другой стороны, с развитием вычислительной техники резко увеличились возможности воздействия человека на изучаемые процессы. Из-за сложности современных прикладных задач их решение все в меньшей мере основывается лишь на «здравом смысле», интуиции и опыте человека. Стал неизбежным научный подход, базирующийся на математическом моделировании исследуемых задач.

В данном учебном пособии излагаются основные методы, используемые в настоящее время в теоретических и прикладных работах по оптимизации. Оно является третьим изданием (первые два вышли в 1975 и 1981 гг.) аналогичного пособия и отличается от предыдущих объемом приведенного материала и формой изложения. Использован опыт преподавания общего курса «Методы оптимизации» для студентов третьего курса факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета по специальностям «Информатика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика», «Актуарная математика», «Компьютерная безопасность».

Помощь при подготовке рукописи к изданию оказали Я. О. Грудо и О. А. Кравец. Ценные замечания и предложения высказали И. К. Асмолович и Л. И. Лавринович. Всем им авторы выражают глубокую признательность и искреннюю благодарность.

Все замечания по данному пособию просим присыпать на кафедру методов оптимального управления Белгосуниверситета: 220050, г. Минск, пр. Независимости, 4.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизационными задачами в математике называют задачи на максимум или минимум (оптимум) функций по переменным со значениями из заданных множеств. С простейшими оптимизационными задачами знакомят в школе, в общем виде теория и методы оптимизации изучаются в университетах. Для того чтобы понять значение методов оптимизации для современной науки и приложений, целесообразно проследить историю их развития.

Задачами оптимизации человек интересуется с античных времен. В Древней Греции уже давно (во всяком случае до VI века до н. э.) знали об *оптимальных свойствах круга и шара*: среди плоских фигур с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет круг; шар имеет максимальный объем среди пространственных фигур с одинаковой площадью поверхности. История сохранила легенду о следующей самой древней оптимизационной задаче, известной как задача Диодона. Финикийская царица Диодона (IX век до н. э.) решила организовать поселение на берегу понравившегося ей залива в Северной Африке. Она уговорила вождя местного племени отдать ей клочок земли, который можно охватить воловьей шкурой. Воины Диодона разрезали шкуру на узкие полоски, и Диодона охватила ремнем, составленным из этих полосок, участок земли на берегу залива. Так возник город Карфаген. *Задача Диодона состоит в определении формы границы участка, имеющей заданную длину, при которой площадь участка максимальна.* Если знать оптимальное свойство круга, то решение получается немедленно: граница участка представляет часть окружности, имеющей заданную длину (рис. 1).

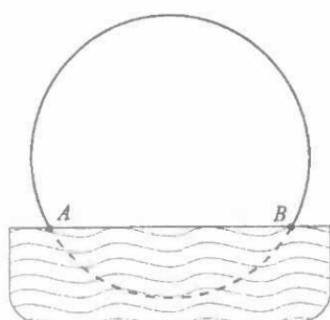


Рис. 1

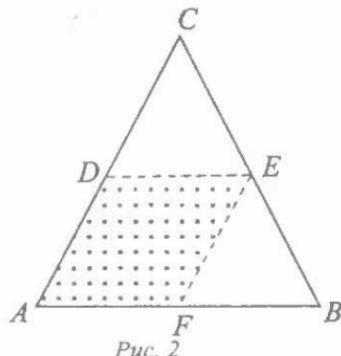


Рис. 2

Оптимизационными задачами занимались многие античные учёные (Евклид, Архимед, Аристотель и др.). Известна следующая *задача Евклида* (IV век до н. э.): в заданный треугольник ABC (рис. 2) вписать параллелограмм $ADEF$ наибольшей площади. Нетрудно доказать, что решением этой задачи является параллелограмм, вершины D, E, F которого делят соответствующие стороны треугольника пополам.

После гибели античной цивилизации научная жизнь в Европе стала возрождаться только в XV веке. Задачи оптимизации оказались среди тех, которыми интересовались лучшие умы того времени.

Если в античные времена оптимизационные задачи исследовались только геометрическими методами и каждая задача для своего решения требовала специфического приема, то в XVII веке появились общие методы изучения оптимизационных задач, которые привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений. Первые элементы математического анализа были созданы И. Кеплером (1615 год), который так описывает появление своего открытия: «Мне как хорошему хозяину следовало запастись вином. Я купил его несколько бочонков. Через некоторое время пришел продавец – измерить вместимость бочонков, чтоб назначить цену на вино. Для этого он опускал в каждый бочонок железный прут (рис. 3) и, не прибегая ни к какому вычислению, немедленно объявлял, сколько в бочке вина». После размышлений Кеплер открыл

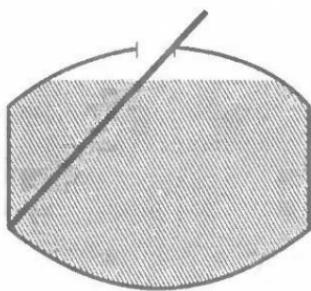


Рис. 3

секрет такого простого способа измерения объема бочек. Оказалось, что бочары за долгую историю научились изготавливать бочки такой формы, при которой они имели наибольший объем при заданной длине мокрой части прута. А поскольку в окрестности максимума значения функции изменяются мало (в этом суть открытия И. Кеплера), то торговец вина почти не ошибался при объявлении объема бочки по одному измерению.

Открытое И. Кеплером основное свойство экстремумов было затем оформлено в виде теоремы сначала П. Ферма (для многочленов), потом И. Ньютона и Г. В. Лейбницем для произвольных функций и носит теперь название *теоремы Ферма*, согласно которой в точке экстремума x^0 гладкой функции $f(x)$ производная функции равна нулю: $df(x)/dx = 0$.

С тех пор исследование функций с помощью анализа бесконечно малых величин стало одним из мощнейших математических методов и привело к созданию современного математического анализа, в котором

доказана и обобщена теорема Ферма на задачу *условной минимизации*: найти точку минимума гладкой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, при условии выполнения равенств $h_i(x) = 0$, $i = \overline{1, k}$ ($k < n$), заданных с помощью гладких функций $h_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Справедливо следующее *правило множителей Лагранжа*: если x^0 – решение этой задачи и на нем векторы $\partial h_i(x^0)/\partial x$, $i = \overline{1, k}$, линейно независимы, тогда существуют не все одновременно равные нулю числа λ_i , $i = \overline{1, k}$, что $\partial F(x^0, \lambda)/\partial x = 0$, где $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(x)$.

С задачами оптимизации связано и зарождение основ другого раздела современной математики – *функционального анализа*. В 1696 году И. Бернулли опубликовал статью с приглашением ко всем математикам решить следующую задачу. В вертикальной плоскости заданы две точки, не лежащие на одной вертикали. Нужно соединить эти точки такой не-прерывной линией, чтобы тяжелый шарик, скатываясь по ней без сопротивления, проходил путь от верхней точки до нижней за наименьшее время. Через год эту задачу, называемую теперь *задачей о брахистохроне*, решили И. Ньютона, Я. Бернулли, Г. В. Лейбница и сам И. Бернулли.

Принципиальное отличие задачи И. Бернулли от задач на оптимум функций конечного числа переменных, для которых до этого была доказана теорема Ферма, состояло в том, что время движения шарика было функцией от линии, т. е. функцией от бесконечного числа переменных. Такие функции называются теперь функционалами. К такому же классу оптимизационных задач относится и задача Диодона.

При решении задачи о брахистохроне упомянутые выше ученые и Ж. Л. Лагранж перенесли метод анализа бесконечно малых величин на исследование функционалов. Ж. Л. Лагранж назвал его методом вариаций, а Л. Эйлер предложил называть вариационным исчислением весь раздел математики, в котором исследуются оптимумы. *Вариационное исчисление* — первый раздел функционального анализа.

Теория оптимизационных задач в XVIII–XIX веках играла большую роль и в других разделах науки, особенно в механике и физике.

Всем очевидно, что тяжелый шарик, помещенный в сосуд, занимает в состоянии равновесия самое нижнее положение. Это свойство в терминах механики означает, что потенциальная энергия шарика принимает наименьшее значение. Сформулированный экстремальный принцип широко используется в механике и физике для поиска состояний равновесия сложных систем. Для этого для систем с конечным числом степеней свободы

достаточно по известным правилам составить функцию потенциальной энергии и решить задачу на минимум этой функции с учетом ограничений, наложенных на исследуемую систему (задачу условной минимизации).

С помощью теории экстремальных задач можно эффективно искать не только состояния равновесия, но и составлять математические модели и исследовать их поведение для различных сложных механических, физических процессов, протекающих во времени. В основе такого подхода лежит принцип Ферма, открытый в геометрической теории света. Физик В. Снеллиус экспериментально обнаружил известный теперь и школьникам закон преломления света

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

где α_1, α_2 – углы между перпендикуляром к поверхности раздела и линиями лучей в первой и второй средах, v_1, v_2 – скорости света в указанных средах. П. Ферма вывел этот закон из следующего принципа: при движении из одной точки в другую свет выбирает кратчайший путь, т.е.

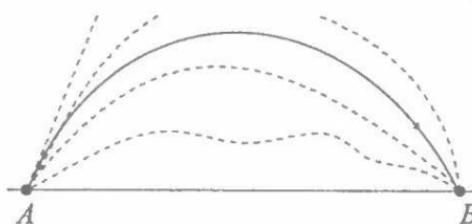


Рис. 4

путь, который он может пройти за наименьшее время. Ученые, анализируя другие движения и процессы в механике и физике, обнаружили, что все они подчиняются следующему *обобщению принципа Ферма*, который называется *вариационным принципом*: всякое реальное (наблюдаемое в действительности) движение (или процесс) развивается (происходит) так, что при этом определенным образом составленный функционал (интеграл действия) достигает стационарного (чаще всего минимального) значения. Другими словами, реальные процессы среди множества всех возможных законов развития выбирают тот, на котором значение интеграла действия минимально. Например (рис. 4), если выброшенный в точке A камень достигает точки B по траектории, показанной сплошной линией, то эта траектория отличается от других (штриховых) траекторий, которые также удовлетворяют всем геометрическим ограничениям, тем, что на сплошной траектории интеграл действия достигает наименьшего значения. Пользуясь вариационным принципом, можно достаточно просто составить уравнения движения (математические модели) для очень сложных процессов. При этом нужно для интеграла действия этого процесса найти точку минимума методами вариационного исчисления.

С конца XVII до середины XX века теория оптимизационных задач прошла огромный путь. В ее развитии приняли участие почти все великие математики прошлого. Кроме упомянутых выше оптимизационными задачами занимались Х. Гюгенс, К. Ф. Гаусс, А. М. Лежандр, П. Г. Дирихле, Б. Риман, У. Р. Гамильтон, К. Г. Якоби, К. Т. Вейерштрасс, Д. Гильберт и др. К середине XX века создалось впечатление, что теория оптимизационных задач достигла такого уровня, который позволяет решить любую оптимизационную задачу, возникающую в науке и практике. Последнее утверждение больше относится к науке, чем к практическим приложениям, ибо до середины XX века математика мало использовалась для решения прикладных задач, а в основном находила разнообразные применения в других разделах естествознания. Ситуация стала заметно меняться накануне Второй мировой войны. В экономике и технике стали возникать задачи, для решения которых практический опыт и здравый смысл оказывались уже недостаточными. Это было связано с увеличением возможных вариантов выбора, ужесточением требований к точности решения, с ограничениями на доступные ресурсы. Человечество стало все энергичнее переходить от использования только природных к созданию искусственных материалов, систем, процессов. Резко повысилось влияние его деятельности на окружающую среду. Все эти и другие обстоятельства постепенно заставляли более научно подходить к решению практических задач. Научный подход предполагает составление математической модели изучаемого практического явления или процесса, исследование модели соответствующими математическими методами, составление алгоритмов решения и реализацию этих алгоритмов в виде программ для электронных вычислительных машин.

В теории оптимизационных задач новые явления XX века впервые были замечены советским математиком Л. В. Канторовичем. В 30-е годы он консультировал экономистов некоторых ленинградских заводов и столкнулся с задачей о раскрое материалов. Экономистов интересовало, как наилучшим образом разрезать листы фанеры, чтобы отходы были минимальными. Л. В. Канторович показал, что эта задача и многие другие практические задачи могут быть сформулированы в виде следующей задачи оптимизации:

$$\begin{aligned}
 & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max, \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\
 & \dots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Главная особенность этой задачи состоит в том, что в ее условиях присутствуют нестрогие неравенства. Конечно, с неравенствами учёные встречались и раньше и находили для каждого случая специальные приемы их учета. Л. В. Канторович первым отчетливо заявил, что нестрогие неравенства типичны для большинства практических задач и для их учета в математике нет общих эффективных методов. Он же предложил несколько приемов решения нового класса оптимизационных задач, но завершению работы помешала Вторая мировая война. Заслуги Л. В. Канторовича по исследованию нового класса оптимизационных задач были отмечены Нобелевской премией по экономике, в которой задачи вида (1) играют огромную роль.

После Второй мировой войны независимо от Л. В. Канторовича задачи вида (1) обнаружил (1947 год) американский математик Д. Данциг и предложил эффективный метод их решения, известный теперь как *симплекс-метод*. С начала 50-х годов новый раздел экстремальных задач вида (1) стал называться *линейным программированием* и явился первым разделом современной теории оптимизационных задач, которая отличается от классической теории таких задач наличием в ней методов решения задач с нестрогими неравенствами и порождаемыми последними замкнутыми множествами.

Становлению линейного программирования, его обобщениям и приложениям огромную помощь оказало создание в середине 40-х годов XX века электронных вычислительных машин (ЭВМ). Дело в том, что оптимизационные задачи, включающие в свои условия нестрогие неравенства, редко допускают решения в форме, которая до XX века была широко распространена в математике и широко используется теперь и в школьной математике. Речь идет о записи решений в виде формул, выраждающих искомые переменные через параметры задачи.

Простейшие примеры – формулы для площадей треугольника, круга, для корней квадратного уравнения, для точек минимума и максимума квадратного трехчлена и т. п. Такой «формульный тип решения» математических задач часто удобен для использования, а в простейших ситуациях его знание для математика обязательно, как таблица умножения. Его достоинство состоит в глобальности: получив формулу один раз, ее можно использовать для получения численного ответа в любой конкретной ситуации.

Формульное решение обладает и существенным недостатком: чрезвычайно узок класс математических задач, для решения которых удается построить удобные формулы. В последние годы с помощью персональных ЭВМ (ПЭВМ) учёные существенно продвинулись в этой области и стали

ненужными многочисленные таблицы формул. Теперь ПЭВМ сама получает формулу для решения математической задачи, если задача допускает формульное решение. Однако уже давно известно, что проблема построения формул для решения большинства математических задач принципиально неразрешима. В связи с этим с появлением ЭВМ на первый план стал выходить другой тип решения математических задач. Этот тип решения был известен еще И. Ньютона, но использовался в математике не очень часто. В отличие от формульного нового тип решения предназначался для получения численного ответа с любой наперед заданной точностью для конкретных задач с заданными численными значениями параметров. Решение получалось путем последовательных уточнений по определенным правилам начального приближения (начальной догадки) к решению. Правила уточнения последовательных приближений называются *алгоритмом*, а сами приближения – *итерациями*. Теперь при решении задач целью математиков стало построение эффективных алгоритмов, которые за небольшое число итераций приводят к решению (к точному или приближенному с заданной точностью).

Итеративные методы решения сложных математических задач получили повсеместное распространение в силу того, что рутинную работу по их реализации (по уточнению приближений) могут с успехом выполнять ПЭВМ. Использование итеративных методов может оказаться полезным и при решении не очень сложных задач на калькуляторах. В качестве примера решения на калькуляторах математической задачи итеративными методами приведем задачу вычисления корней кубического многочлена. Существует простой, легко реализуемый на калькуляторе итеративный метод Ньютона вычисления упомянутых корней. Многие предпочитают такой метод известной формуле. Подобная ситуация сейчас не является исключительной при решении математических задач. Достигнутый в последние годы фантастический прогресс в области ЭВМ позволяет получать решения таких задач, которые еще недавно казались недоступными. Симплекс-метод Д. Данцига решения задач вида (1) связан с новым понятием решения. Он позволяет с помощью ПЭВМ за конечное число итераций найти точное решение задачи.

Вслед за линейным программированием, в котором изучается задача на экстремум линейной функции конечного числа переменных при учете конечного числа линейных неравенств и равенств, возник новый раздел и в теории задач вариационного типа. Снова источником послужили практические задачи, но теперь уже не в экономике, а в технике, связанной с управлением реактивным движением. Реактивные

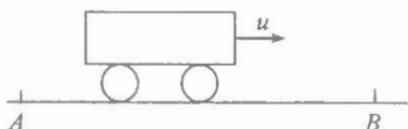


Рис. 5

механическим движением. На горизонтальном прямолинейном участке дороги заданы два пункта A и B (рис. 5). Нужно составить программу $u(t)$, $t \geq 0$, изменения во времени ограниченного управления (силы)

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

при которой тележка перемещается из точки A в точку B за кратчайшее время. Эта задача похожа на упомянутую выше задачу о брахистохроне, но отличается принципиальным элементом – наличием ограничения (2) в виде нестрогого неравенства. По этой причине сформулированная на рубеже 40–50-х годов XX века задача не могла быть решена методами классического вариационного исчисления. Только после открытия в 1956 году группой советских ученых во главе с Л. С. Понtryагиным метода решения нового типа экстремальных задач, известного сейчас во всем мире под названием **принципа максимума Понtryагина**, начался современный этап развития вариационного исчисления, именуемый **теорией оптимального управления**. Большую роль в теории оптимального управления играет и второй фундаментальный метод – **динамическое программирование Беллмана**.

Как линейное программирование, так и теория оптимального управления привлекли внимание многих ученых, усилиями которых современная теория оптимизационных задач получила мощное развитие. В конечномерном разделе были созданы квадратичное программирование, дискретное программирование, нелинейное программирование и много других специальных частей, в названия которых входит слово «программирование». Все эти части объединяют одним термином **математическое программирование**, который пришел на смену классическому термину «задачи на максимум и минимум». В **квадратичном программировании** линейная целевая функция задачи вида (1) заменяется на квадратичную функцию

$$\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \dots + d_{1n}x_1x_n + \\ & + d_{22}x_2^2 + d_{23}x_2x_3 + \dots + d_{2n}x_2x_n + \dots + \\ & + d_{n-1, n-1}x_{n-1}^2 + d_{n-1, n}x_{n-1}x_n + d_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

самолеты, ракеты в отличие от винтовых самолетов должны всегда снабжаться системой управления. Математические проблемы, возникшие при решении нового типа экстремальных задач, проиллюстрируем на примере управления простейшим

В *дискретном программировании* переменные (все или часть) задачи вида (1) могут принимать лишь конечное число значений, могут быть, например, лишь целыми числами. В *нелинейном программировании* вместо линейных функций задачи вида (1) используются произвольные нелинейные функции переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Выделение из теории оптимизационных задач специальных частей позволяет создавать для них эффективные методы, учитывающие специфику этих задач.

На базе теории оптимального управления в 60-е годы была создана теория *дифференциальных игр*. Задачи оптимизации называют игровыми, если в них учитываются несовпадающие интересы нескольких участников (игроков). *Конечномерные игровые задачи* появились еще в 20-е годы XX века, затем для них Дж. фон Нейманом была создана красивая теория с приложениями в экономике. Игры называют дифференциальными, если поведение объектов исследования описывается дифференциальными уравнениями. Яркий пример дифференциальной игры представляет задача защиты истребителем объекта от бомбардировщика. Здесь рассматривается система из двух игроков (истребитель, бомбардировщик), интересы которых противоположны. Теория дифференциальных игр занимается исследованием оптимального поведения игроков.

Теория экстремальных задач продолжает развиваться и в наши дни. В последние годы возникли и сейчас находятся в центре внимания многих математиков три направления: 1) большие оптимизационные задачи, 2) негладкие экстремальные задачи, 3) задачи оптимизации в условиях неопределенности.

Каждая конечномерная экстремальная задача имеет два размера: количество ограничений и количество переменных. Если эти размеры большие, то задача называется большой. Это условное (не очень четкое) определение меняется со временем, по мере развития средств для решения экстремальных задач. Для решения больших экстремальных задач используются два подхода: а) совершенствование общих методов решения, б) разработка реализаций общих методов для специальных подклассов задач, имеющих ярко выраженную особую структуру математических моделей. Подход а в последние годы обогатился новыми методами, основанными как на идеях симплекс-метода, так и на других идеях. Типичным примером реализации подхода б являются методы решения широко распространенных в приложениях *транспортных задач*. В неформальной постановке они представляют собой задачи о составлении планов перевозок грузов с минимальными транс-

портными расходами по заданной сети дорог от заданных поставщиков к заданным потребителям. Математические модели этих задач являются частным случаем задачи вида (1), и поэтому их можно решить симплекс-методом. Однако если реализовать симплекс-метод с учетом специфики новой модели, то получается метод, который намного эффективнее симплекс-метода. Успехи, достигнутые в решении больших задач, позволяют с помощью современных ПЭВМ решать специальные задачи линейного программирования, имеющие миллионы переменных и сотни тысяч основных ограничений. Однако проблема решения больших экстремальных задач не может считаться закрытой, ибо практика постоянно поставляет все новые и новые задачи, которые пока не под силу современным методам и ПЭВМ.

Математический анализ на протяжении веков занимается, по определению, исследованием *гладких функций* (*непрерывных функций с непрерывными производными*). Поэтому его можно назвать *гладким анализом*. С появлением современной теории экстремальных задач математикам приходится все чаще и чаще иметь дело с функциями, которые не обладают классическими производными или даже разрывные. В связи с этим возник *выпуклый анализ*, в котором специальный класс функций, называемых выпуклыми (пример: $f(x) = |x|$), исследуется без использования классических производных. Поскольку выпуклый анализ не удовлетворяет всех потребностей теории экстремальных задач, то в последние годы прилагаются большие усилия к созданию общего (невыпуклого) *негладкого анализа*.

Третье направление современной теории экстремальных задач, к которому приковано внимание многих математиков, называется *проблемой оптимизации систем в условиях неопределенности*. Это направление связано с теорией дифференциальных игр. Поэтому при постановке задач этого направления неявно предполагается, что наряду с основным участником оптимизации присутствуют еще другие участники, которые мешают (сознательно или неосознанно) основному участнику. В 40–70-е годы неопределенность в основном моделировалась (описывалась) в терминах теории вероятностей. С конца 70-х годов для описания неопределенностей стали использовать невероятностные модели, ибо во многих прикладных задачах получение вероятностных характеристик или затруднено, или невозможно. Теперь при оптимизации систем стали говорить о получении гарантированного результата, т. е. о построении таких управлений, которые для самых неблагоприятных ситуаций гарантируют получение результата (например, прибы-

ли) не ниже некоторой величины. Последние задачи часто встречаются в экономике, где неопределенность порождается многими причинами.

В связи с задачами оптимизации в условиях неопределенности на первый план вышел новый тип решения динамических экстремальных задач. В теории оптимального управления различают программные управление и управления типа обратной связи. *Программные управление представляют функции времени $u(t)$, $t \geq 0$, которые составляются до начала процесса управления на весь период управления, и их вид не изменяется в процессе управления. Управления типа обратной связи имеют вид функций от состояний системы $u(x)$ и изменяются в зависимости от изменения состояния.* Программные управления часто невозможна использовать в условиях неопределенности (при действии на систему неизвестных возмущений). Управления типа обратной связи успешно парируют действие многих возмущений и поэтому предпочтительнее в задачах оптимизации в условиях неопределенности.

На этом закончим краткое введение в теорию оптимационных задач. Основные ее результаты будут изложены в последующих главах пособия.

Литература

1. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967.
2. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М.: Физматлит, 1961.
5. Данциг, Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг. – М.: Прогресс, 1966.
6. Нейман, Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970.
7. Понtryagin, L. S. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понtryагин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Физматлит, 1983.
8. Эльсгольц, Л. Э. Вариационное исчисление. Изд. 7-е, стереот. / Л. Э. Эльсгольц. – М.: УРСС, 2008.

Глава 1

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейным программированием (ЛП) называют раздел теории экстремальных задач, в котором исследуются задачи оптимизации (максимизации или минимизации) линейных функций на множествах конечномерного пространства, описываемых конечной системой линейных уравнений и неравенств. Первые задачи ЛП были поставлены и изучены в 30-е годы XX века советским математиком Л. В. Канторовичем. Интенсивное развитие теории и широкое внедрение ее результатов в приложения началось после создания в 1947 году американским математиком Дж. Данцигом симплекс-метода, появления и бурного развития вычислительной техники.

Линейное программирование положило начало современной теории экстремальных задач. В классической теории экстремальных задач исследовались задачи оптимизации гладких функций на открытых множествах. В современной теории экстремальных задач функции оптимизируются и на замкнутых множествах.

§ 1. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод – классический метод численного решения задач ЛП. Это первый метод решения общих задач ЛП. Он до сих пор остается одним из эффективных конечных методов современной теории экстремальных задач. Знакомство с ЛП и симплекс-методом начнем с одной из прикладных задач, исследование которых привело к зарождению ЛП и открытию симплекс-метода.

1.1. Производственная задача

Предприятие выпускает продукцию m типов, используя при этом n видов производственных факторов. Пусть a_{ij} – количество i -го производственного фактора, необходимое для производства единицы j -го типа продукции; $d_{\cdot j}$, d_j^* – нижняя и верхняя границы выпуска этой продукции; b_i – ресурс i -го производственного фактора, имеющийся у предприятия; c_j – стоимость единицы продукции j -го типа или прибыль на единицу этой продукции (все величины заданы в соответствующих единицах измерения). Требуется составить план выпуска продукции всех типов

пов, при котором суммарный доход (суммарная прибыль) от ее реализации будет максимальным.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество продукции j -го типа, планируемое к выпуску. Тогда $a_{ij}x_j$ – затраты i -го производственного фактора, необходимые для производства продукции j -го типа; $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ – затраты на производство всей продукции. Поскольку на предприятии ресурс i -го фактора составляет b_i , то нужно обеспечить неравенство $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$. Это ограничение должно выполняться для ресурсов всех факторов: $i = 1, 2, \dots, m$. Из условий задачи следуют ограничения $d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*$, $j = 1, 2, \dots, n$, на выпуск продукции всех типов.

Стоимость всей планируемой к выпуску продукции равна $\sum_{j=1}^n c_jx_j$. Ее требуется максимизировать: $\sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max$. В результате получаем задачу максимизации

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1.1)$$

линейной функции n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих $m + 2n$ линейным неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$d_{*1} \leq x_1 \leq d_1^*, \dots, d_{*n} \leq x_n \leq d_n^*. \quad (1.3)$$

Таким образом, математическая модель производственной задачи представляет задачу линейного программирования.

1.2. Графический метод решения задач ЛП

Симплекс-метод возник из геометрической интерпретации задач ЛП. На ней основан и графический метод решения задач ЛП с двумя переменными.

Рассмотрим задачу (1.1) – (1.3). В n -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n каждое i -е ограничение $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ (1.2) определяет полупространство, а каждое j -е ограничение $d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*$ (1.3) – пересечение двух полупространств. Обозначим через X мно-

множество всех наборов (x_1, \dots, x_n) , удовлетворяющих ограничениям (1.2), (1.3). Если неравенства совместны, то множество X непустое и представляет пересечение $m + 2n$ полупространств. Такие **множества** называют **многогранными**, а если они ограничены — **многогранниками**. В случае $n=2$ множество X нетрудно изобразить на плоскости \mathbf{R}^2 .

Пример 1.1. Рассмотрим производственную задачу из разд. 1.1 с конкретными данными: $n = 2$, $m = 3$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 26, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 94, \\ x_1 + 4x_2 \leq 57, \\ 5 \leq x_1 \leq 20, 3 \leq x_2 \leq 12. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

На рис. 1.1 изображено множество X переменных x_1, x_2 , удовлетворяющих ограничениям задачи (1.4).

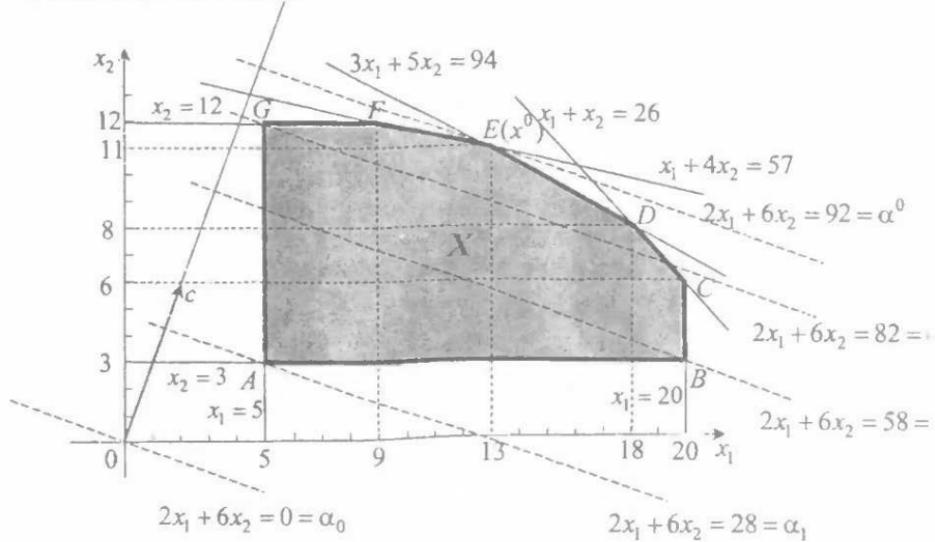


Рис. 1.1

Точки A, B, C, D, E, F, G — **угловые (крайние)** точки многогранника (**вершины**), отрезки $[AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FG], [GA]$ — **ребра** многогранника.

Как известно из математического анализа, любая гладкая функция $\phi(x)$ векторного аргумента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ возрастает в направлении своего градиента $\text{grad}\phi(x) = (\partial\phi/\partial x_1, \dots, \partial\phi/\partial x_n)$. Для функции

$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ из задачи (1.1) – (1.3) имеем $\text{grad}\varphi(x) = (c_1, \dots, c_n)$. Множество $X_\alpha = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \alpha\}$ называют **множеством уровня** функции $\varphi(x)$ со значением α . Известно также, что градиент функции в точке является нормалью к гиперплоскости, касательной в этой точке к множеству ее уровня (рис. 1.2, а). В случае линейной функции $\varphi(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ касательная гиперплоскость совпадает с множеством уровня, а вектор c ортогонален этой гиперплоскости (рис. 1.2, б).

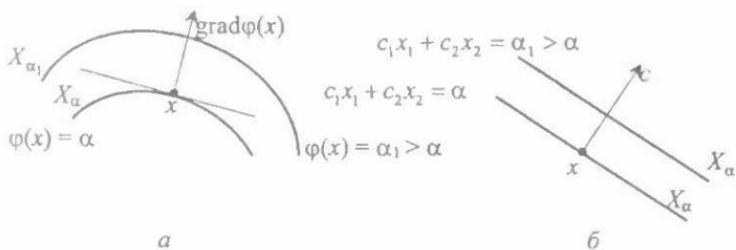


Рис. 1.2

В задаче (1.4) имеем $c = (2; 6)$. Изобразим на рис. 1.1 линии уровня – прямые $2x_1 + 6x_2 = \alpha$. При увеличении значения α множество уровня X_α будет передвигаться в направлении вектора градиента $c = (2; 6)$. Будем увеличивать α до тех пор, пока X_α не коснется множества X в последний раз. Как видно из рис. 1.1, последней точкой касания является точка E . Ее координаты (вектор $x^0 = (13; 11)$) и составят решение задачи с максимальным значением функции $\varphi(x)$, равным $\alpha^0 = \varphi(x^0) = 2x_1^0 + 6x_2^0 = 2 \cdot 13 + 6 \cdot 11 = 92$.

В этом состоит *графический метод* решения задач ЛП вида (1.1)–(1.3).

Заметим, что при увеличении α множество уровня X_α в последний раз может коснуться множества X не в одной точке (вершине), а по ребру. В таком случае каждая точка этого ребра – решение задачи.

Если в задаче (1.4) положить $\varphi(x) = 3x_1 + 5x_2$, то решением задачи будут все точки отрезка ED (рис. 1.1).

Может случиться, что точка последнего касания множества уровня X_α с множеством X не существует. В таком случае функция $\varphi(x)$

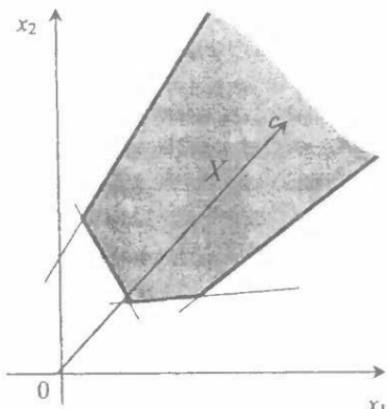


Рис. 1.3

не ограничена сверху на множестве X (рис. 1.3), т. е. задача не имеет решения.

Графический метод решения задач ЛП удобен только при $n \leq 2$.

При $n \geq 3$ его реализация затруднительна.

Эффективным методом решения задач ЛП с большим числом переменных и ограничений является симплекс-метод, в основу которого положена представленная выше геометрическая интерпретация задачи ЛП. Как видно из графического метода, среди решений задачи всегда присутствует хотя бы одна из вершин множества X . Количество вершин многогранного множества конечно. Если взять в качестве начальной любую из них и двигаться по ребрам множества X из текущей вершины в соседнюю, увеличивая значения функции $\phi(x)$, то через конечное число шагов или придем к вершине, являющейся решением задачи, или убедимся, что задача не имеет решения из-за неограниченности сверху функции $\phi(x)$ на множестве X .

Дж. Данциг первым аналитически реализовал эту простую геометрическую идею и обнаружил, что полученный метод эффективно решает прикладные задачи. Он назвал его симплекс-методом решения задач ЛП по структуре множеств X , которые в первых решенных задачах представляли так называемые *симплексы*.

Пример 1.2. Возьмем в примере 1.1 в качестве начальной вершину G . Соседними для нее являются вершины A, F (рис. 1.4).

При движении из G по ребрам множества X к увеличению функции $\phi(x)$ ведет только движение по ребру GF . Поэтому, следуя основной идеи симплекс-метода, переходим в вершину F . Далее переходим в вершину E . Здесь движение останавливается, поскольку движение в соседние вершины F и D ведет к уменьшению значения функции $\phi(x)$. Значит, координаты точки E – решение задачи.

Если в качестве начальной взять вершину A , то переход как в G , так и в B ведет к увеличению функции $\phi(x)$. Для решения задачи можно двигаться по каждому направлению. При переходе в точку G значение функции $\phi(x)$ увеличивается со скоростью 6, а в точку B – со скоростью 2. Дж. Данциг рекомендовал двигаться по ребру с наибольшей скоростью возрастания функции $\phi(x)$. Таким образом, в классическом симплекс-методе движение из A происходит по ребру AG . На рис. 1.4

стрелки указывают направление движения к вершине E , координаты которой составляют решение задачи (1.4).

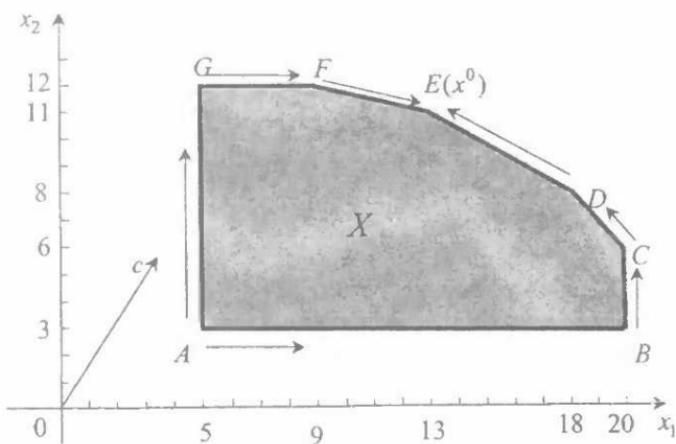


Рис. 1.4

1.3. Каноническая задача ЛП

Симплекс-метод разработан для **канонической задачи ЛП**, под которой понимают задачу максимизации

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1.5)$$

линейной функции n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих m линейным уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

и $2n$ линейным неравенствам

$$d_{*1} \leq x_1 \leq d_1^*, \dots, d_{*n} \leq x_n \leq d_n^*. \quad (1.7)$$

Пара чисел (m, n) составляет *размер* $m \times n$ задачи. Задачу ЛП называют большой, если $m >> 1, n >> 1$.

Функция (1.5) называется *целевой функцией* задачи, уравнения (1.6) – *основными ограничениями*, неравенства (1.7) – *прямыми ограничениями* задачи.

В дальнейшем удобна векторно-матричная запись. Введем множества индексов $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Совокупность переменных x_1, x_2, \dots, x_n запишем в виде вектора $x = x(J) = (x_j, j \in J)$, причем в операциях все векторы будем трактовать как векторы столбцы. Для получения вектор-строки используем оператор транспонирования, обозначаемый символом штрих ('). Совокупность параметров $a_{ij}, i \in I, j \in J$, задачи запишем в виде матрицы

$$A = A(I, J) = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j \in J \\ & i \in I \end{pmatrix}. \text{Действия над векторами и матрицами будем осуществлять по правилам векторно-матричного исчисления.}$$

Для двух векторов d, f одинаковой размерности запись $d \leq f$ ($d \geq f$, $d = f$) означает совокупность покоординатных соотношений $d_j \leq f_j$ ($d_j \geq f_j$, $d_j = f_j$), $j \in J$.

В новых обозначениях каноническая задача (1.5) – (1.7) примет компактную форму

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*. \quad (1.8)$$

В ЛП, исходя из физического смысла элементов рассмотренной выше производственной задачи, экономисты называют: $c = c(J)$ – *вектором стоимости* (координаты c_j – *коэффициентами стоимости*), вектор $b = b(I)$ – *вектором основных ограничений (вектором ресурсов)*, матрицу $A = A(I, J)$ – *матрицей условий (матрицей затрат)*, столбцы $a_j, j \in J$, матрицы A – *векторами условий*.

Предположим, что ограничения задачи (1.8) совместны.

Определение 1.1. Каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, называется *планом*. Тогда $X = \{x: Ax = b, d_* \leq x \leq d^*\}$ – *множество планов*.

Определение 1.2. План x^0 , являющийся решением задачи, т. е. $c'x^0 = \max c'x, x \in X$, называют *оптимальным планом*.

При решении практических задач могут появиться математические модели, отличные от (1.8). Однако любую задачу ЛП с помощью элементарных преобразований можно свести к канонической.

1) Если в исследуемой (исходной¹⁾) задаче целевая функция минимизируется, т. е. $c'x \rightarrow \min$, то заменяем ее следующей: $-c'x \rightarrow \max$.

2) Если на переменную x_j наложено только одностороннее ограничение $x_j \geq d_{*j}$ ($x_j \leq d_j^*$), то вводим *искусственную границу* $d_j^* = M_j$ ($d_{*j} = -M_j$), $M_j > 0$. В случае, когда на переменную x_j не наложены прямые ограничения, полагаем²⁾ $d_{*j} = -M_j$, $d_j^* = M_j$.

3) Пусть ограничение имеет вид $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$. Введением *свободной переменной* $x_{n+i} \geq 0$ заменяем его соотношениями $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$, $x_{n+i} \geq 0$. Найдем верхнюю границу новой (свободной) переменной. Для этого подсчитаем числа

$$\gamma_{*i} = \min_{d_* \leq x \leq d^*} (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) = b_i - \sum_{j=1}^n \begin{cases} a_{ij}d_j^*, & \text{если } a_{ij} \geq 0, \\ a_{ij}d_{*j}, & \text{если } a_{ij} < 0; \end{cases}$$

$$\gamma_i^* = \max_{d_* \leq x \leq d^*} (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) = b_i - \sum_{j=1}^n \begin{cases} a_{ij}d_{*j}, & \text{если } a_{ij} \geq 0, \\ a_{ij}d_j^*, & \text{если } a_{ij} < 0; \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Если $\gamma_{*i} > 0$, то i -е основное ограничение несущественно и его можно отбросить. Если $\gamma_i^* < 0$, то исходная задача не имеет планов. В остальных случаях положим $d_{*n+i} = 0$, $d_{n+i}^* = \gamma_i^*$.

Физический смысл свободных переменных в производственной задаче (разд. 1.1) – неиспользованные (свободные) ресурсы.

4) Ограничение вида $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ сводится к предыдущему случаю после умножения обеих частей неравенства на -1 .

Таким образом, каждую задачу ЛП можно свести к канонической форме (1.8), при этом у некоторых переменных могут оказаться искусственные прямые границы.

В ЛП наряду с канонической формой широко используется *нормальная задача ЛП*

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad d_* \leq x \leq d^*, \quad (1.9)$$

¹⁾ Задача называется *исходной*, если она получена непосредственно из прикладной задачи.

²⁾ Не ограничивая общности, можно брать одинаковое значение M для всех переменных.

которая, как и задача (1.8), является общей, т. е. к ней можно свести любую задачу ЛП. Задача (1.9) с помощью *вектора свободных переменных* $x_{\text{CB}} = (x_{n+i}, i \in I) \geq 0$ сводится к канонической (1.8):

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{\text{CB}} = b, d_* \leq x \leq d^*, 0 \leq x_{\text{CB}} \leq d_{\text{CB}}^*.$$

Пример 1.3. Задача (1.4) примера 1.1 имеет нормальную форму с параметрами

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 26 \\ 94 \\ 57 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, d_* = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, d^* = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Ее каноническая форма

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 26, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 &= 94, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 &= 57, \end{cases} \\ 5 \leq x_1 &\leq 20, 3 \leq x_2 \leq 12, \\ 0 \leq x_3 &\leq 18, 0 \leq x_4 \leq 64, 0 \leq x_5 \leq 40, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где x_3, x_4, x_5 – свободные переменные.

Замечание 1.1. Дж. Данциг разработал симплекс-метод для канонической задачи с односторонними прямыми ограничениями

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0, \tag{1.11}$$

которая, как и задача (1.8), является общей – к ней можно свести каждую задачу ЛП. Впоследствии симплекс-метод был обобщен на каноническую задачу (1.8) (с двухсторонними прямыми ограничениями). В данном пособии за базовую взята задача (1.8), поскольку во многих приложениях легко указать двухсторонние прямые ограничения. Сведение задачи (1.8) к задаче (1.11) значительно увеличивает ее размеры.

1.4. Базисный план

Основным понятием симплекс-метода является *базисный план*.

Рассмотрим каноническую задачу ЛП (1.8):

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, d_* \leq x \leq d^*.$$

Временно предположим, что $m < n$, $\text{rank } A = m$, $X \neq \emptyset$.

Везде в дальнейшем будет рассматриваться каноническая задача (1.8) с фиксированными параметрами, если не оговорено противное.

Разобьем множество J на два непересекающихся подмножества $J_B, J_H : J = J_B \cup J_H, J_B \cap J_H = \emptyset, |J_B| = m, |J_H| = n - m$.

Определение 1.3. План x называется *базисным*, если $n - m$ его компонент принимают граничные значения: $x_j = d_{*j} \vee d_j^*$, $j \in J_B$, а остальным m компонентам x_j , $j \in J_H$, соответствуют линейно независимые векторы условий

$$a_j, j \in J_B, \quad (1.12)$$

т. е. не вырождена матрица $A_B = (a_j, j \in J_B)$.

Назовем совокупность векторов (1.12) *базисом базисного плана* x , J_B – *множеством базисных индексов*, J_H – *множеством небазисных индексов*, x_j , $j \in J_B$, – *базисными компонентами* базисного плана, x_j , $j \in J_H$, – *небазисными*, матрицу A_B – *базисной матрицей*. Введем обозначения: $x_B = (x_j, j \in J_B)$, $x_H = (x_j, j \in J_H)$, $c_B = (c_j, j \in J_B)$, $c_H = (c_j, j \in J_H)$, $A_H = (a_j, j \in J_H)$.

Определение 1.4. Базисный план x называется *невырожденным*, если $d_{*B} < x_B < d_B^*$, где $d_{*B} = (d_{*j}, j \in J_B)$, $d_B^* = (d_j^*, j \in J_B)$.

Определение 1.5. Задача ЛП называется *невырожденной*, если все ее базисные планы не вырождены.

Можно показать, что вершины множества планов X задачи (1.8) – базисные планы. В невырожденных задачах это соответствие взаимно однозначное.

Пример 1.4. Рассмотрим задачу (1.10). Вектор $x^1 = (5; 3; 18; 64; 40)$ является планом, поскольку удовлетворяет всем ограничениям задачи. Проекция x^1 на плоскость переменных x_1, x_2 (см. рис. 1.1) совпадает с вершиной A . Непосредственным счетом можно убедиться, что этот план будет базисным с каждой из следующих базисных матриц: $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5) = E$ (E – единичная матрица), $A_B^2 = (a_2, a_4, a_5)$, $A_B^3 = (a_1, a_4, a_5)$, $A_B^4 = (a_2, a_3, a_5)$, $A_B^5 = (a_2, a_3, a_4)$, $A_B^6 = (a_1, a_3, a_5)$, $A_B^7 = (a_1, a_3, a_4)$, $A_B^8 = (a_1, a_2, a_5)$, $A_B^9 = (a_1, a_2, a_4)$, $A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$. Все перечисленные базисные планы вырожденные, поскольку их базисные компоненты лежат на границах прямых ограничений.

Остальным вершинам соответствуют по одному базисному плану: $x^2 = (20; 3; 3; 19; 25)$, $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$ (B); $x^3 = (20; 6; 0; 4; 13)$, $A_B^2 = (a_2, a_4, a_5)$ (C); $x^4 = (18; 8; 0; 0; 7)$, $A_B^8 = (a_1, a_2, a_5)$ (D); $x^5 = (13; 11; 2; 0; 0)$, $A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$ (E); $x^6 = (9; 12; 5; 7; 0)$, $A_B^7 = (a_1, a_3, a_4)$ (F); $x^7 = (5; 12; 9; 19; 4)$, $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$ (G). Все указанные базисные планы невырожденные, поскольку их базисные компоненты не лежат на границах прямых ограничений.

Замечание 1.2. Если дополнительные верхние границы свободных переменных увеличить на любое число $\varepsilon > 0$ (что не изменит множества планов, например, при $\varepsilon = 1$ будем иметь $d_3^* = 19$, $d_4^* = 65$, $d_5^* = 41$), то вершина A будет соответ-

ствовать единственный базисный план x^1 с базисной матрицей $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$ и этот план будет невырожденным.

1.5. Потенциалы и оценки

Потенциалы и оценки – элементы симплекс-метода, с помощью которых идентифицируются оптимальные планы и осуществляются итерации.

Пусть x – базисный план задачи ЛП (1.8), A_B – его базисная матрица, \bar{x} – другой план, $\Delta x = \bar{x} - x$ – приращение плана x . Подсчитаем приращение целевой функции

$$\Delta \varphi = c' \bar{x} - c' x = c' \Delta x. \quad (1.13)$$

Поскольку x, \bar{x} – планы, то $A \Delta x = A \bar{x} - A x = b - b = 0$. В компонентной записи это равенство примет вид $A_B \Delta x_B + A_H \Delta x_H = 0$. Найдем отсюда вектор

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H \quad (1.14)$$

и результат подставим в (1.13):

$$c' \Delta x = c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H = (c'_H - c'_B A_B^{-1} A_H) \Delta x_H.$$

Обозначив

$$u' = c'_B A_B^{-1}, \quad (1.15)$$

$$\Delta'_H = c'_H - c'_B A_B^{-1} A_H = c'_H - u' A_H, \quad (1.16)$$

получим формулу приращения целевой функции

$$c' \Delta x = \Delta'_H \Delta x_H = \sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j. \quad (1.17)$$

Назовем компоненту u_i вектора (1.15) *потенциалом* i -го основного ограничения¹⁾, вектор $u = (u_1, \dots, u_m)$ – *вектором потенциалов*, компоненту Δ_j ($j \in J_H$) вектора (1.16) – *оценкой* j -й небазисной координаты плана x , вектор Δ_H – *вектором небазисных оценок*. Дополнив вектор Δ_H вектором $\Delta'_B = c'_B - c'_B A_B^{-1} A_B = 0$, получим $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_B, \Delta_H) = (0, \Delta_H)$ – *вектор оценок задачи* (1.8).

Выясним физический смысл оценок. Из математического анализа известно, что если приращение функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, допускает разложение $f(\bar{x}) - f(x) = a' \Delta x + o(\|\Delta x\|)$, то $a = \text{grad} f(x)$ или, в механической интерпретации, вектор скорости изменения функции в точке x . Поэтому из (1.17) заключаем, что Δ_j ($j \in J_H$) – скорость изменения целевой функции при увеличении j -й небазисной компоненты плана.

¹⁾ В ЛП число u_i называют также *симплекс-множителем, множителем Лагранжа, оценкой* i -го основного ограничения.

Поскольку при изменении Δx_H компонента Δx_B изменялась по правилу (1.14), то Δ_j – скорость не в классическом понимании. Точнее, Δ_j – скорость изменения целевой функции при увеличении j -й небазисной переменной плана x , если при этом остальные небазисные переменные не изменяются, а базисные изменяются так, что сохраняются основные ограничения задачи. В ЛП вектор Δ называют также *условным градиентом, приведенным градиентом*, Δ_j – *объективно обусловленной (приведенной) оценкой (производной), относительной оценкой*.

Физический смысл потенциалов выясним позже.

1.6. Критерий оптимальности

В теории экстремальных задач ключевой является проблема идентификации оптимального плана. В симплекс-методе ее решение содержится в следующем утверждении.

Теорема 1.1 (критерий оптимальности базисного плана). Для оптимальности базисного плана x с базисной матрицей A_B достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$\Delta_j \leq 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \quad \Delta_j \geq 0 \text{ при } x_j = d_j^*, \quad j \in J_H. \quad (1.18)$$

Доказательство. Пусть x – базисный план, A_B – базисная матрица, u – вектор потенциалов, $\Delta_j, j \in J_H$, – оценки.

Достаточность. Предположим, что соотношения (1.18) выполняются. Рассмотрим другой план $\bar{x} = x + \Delta x$. Если $x_j = d_{*j}$, то, по предположению, $\Delta_j \leq 0$ и, очевидно, $\Delta x_j \geq 0$ (рис. 1.5, а). Поэтому

$$\Delta_j \Delta x_j \leq 0. \quad (1.19)$$

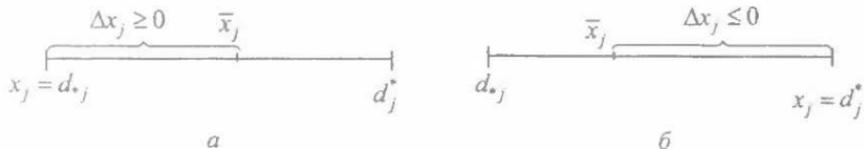


Рис. 1.5

Если $x_j = d_j^*$, то $\Delta_j \geq 0$, $\Delta x_j \leq 0$ (рис. 1.5, б), и опять выполняется неравенство (1.19). Таким образом, неравенства (1.19) справедливы для всех $j \in J_H$. Подставив их в формулу приращения целевой функции (1.17), получим $c' \bar{x} \leq c' x$, т. е. x – оптимальный план.

Необходимость. Пусть x – оптимальный невырожденный базисный план, т. е.

$$d_j < x_j < d_j^*, j \in J_B. \quad (1.20)$$

Предположим, что соотношения (1.18) не выполняются, т. е. существует такой индекс $j_0 \in J_H$, что

$$a) \Delta_{j_0} > 0 \text{ при } x_{j_0} = d_{j_0}, \quad b) \Delta_{j_0} < 0 \text{ при } x_{j_0} = d_{j_0}^*. \quad (1.21)$$

Построим вектор $\bar{x} = x + \Delta x$, где $\Delta x = (\Delta x_B, \Delta x_H)$. Компоненту Δx_B подсчитаем по правилу (1.14), а компоненту Δx_H возьмем в виде (рис. 1.6)

$$\Delta x_H = (\Delta x_{j_0} = \theta \operatorname{sign} \Delta_{j_0}, \Delta x_j = 0, j \in J_H \setminus j_0), \theta \geq 0. \quad (1.22)$$

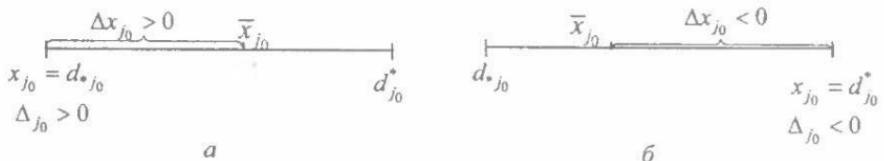


Рис. 1.6

Подставив (1.22) в (1.14), получим

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H = -\theta A_B^{-1} a_{j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0}. \quad (1.23)$$

Таким образом, построен вектор \bar{x} с компонентами

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j_0} &= x_{j_0} + \theta \operatorname{sign} \Delta_{j_0}, \quad \bar{x}_j = x_j, \quad j \in J_H \setminus j_0; \\ \bar{x}_B &= x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Поскольку приращение Δx удовлетворяет (1.23), то на векторе $\bar{x} = x + \Delta x$ основные ограничения задачи (1.8) выполняются при любых $\theta \geq 0$. Из (1.20), (1.24) следует, что при достаточно малых $\theta > 0$ на векторе \bar{x} будут выполняться и прямые ограничения, т. е. \bar{x} – план задачи. С учетом (1.22) из формулы приращения (1.17) получим

$$c' \Delta x = \Delta_{j_0} \Delta x_{j_0} = \theta \Delta_{j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0} = \theta |\Delta_{j_0}| > 0. \quad (1.25)$$

Это противоречит предположению об оптимальности плана x . ■

Замечание 1.3. Если оптимальный базисный план x вырожденный, то соотношения (1.18) могут не выполняться, т. е. невыполнение этих соотношений для вырожденного базисного плана не означает, что он не оптimalен.

Пример 1.5. Рассмотрим задачу (1.10) на минимум. Возьмем в качестве базисного плана вектор $x^2 = (20; 3; 3; 19; 25)$ с базисной матрицей $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5) = E$. Для нее $u = 0$; $\Delta_1 = -2 < 0$ при $x_1 = 20 = d_1^*$ – условие оптимальности не выполняется. План не оптimalен.

Рассмотрим другой базисный план $x^1 = (5; 3; 18; 64; 40)$ с той же базисной матрицей $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$. Как и в предыдущем случае, имеем $u = 0$. Однако теперь $\Delta_1 = -2 < 0$ при $x_1 = 5 = d_{*1}$, $\Delta_2 = -6 < 0$ при $x_2 = 3 = d_{*2}$, т. е. условия оптимальности выполняются, значит, план оптimalен.

Возьмем тот же план $x^1 = (5; 3; 18; 64; 40)$, но с базисной матрицей

$$A_B^2 = (a_2, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда уравнения для потенциалов } u_1 + 5u_2 + 4u_3 = -6,$$

$u_2 = 0$, $u_3 = 0$, откуда получим $u_1 = -6$. Имеем $\Delta_1 = -2 + 6 = 4 > 0$ при $x_1 = 5 = d_{*1}$, т. е. условия оптимальности не выполняются, хотя, как видно из предыдущего случая, план оптimalен.

Заметим, что в обоих случаях базисные планы вырожденные. Приведенный пример показывает, что оптимальный вырожденный план в одном случае удовлетворяет условию оптимальности, в другом – нет.

Нетрудно доказать следующий симметричный критерий оптимальности.

Теорема 1.2. Для оптимальности базисного плана x необходимо и достаточно существования такой базисной матрицы A_B^0 , с которой выполняются соотношения (1.18).

Матрицу A_B^0 назовем *оптимальной базисной матрицей*.

Пример 1.6. Продолжим исследование задачи (1.10) на минимум. Возьмем план $x^1 = (5; 3; 18; 64; 40)$. Как следует из примера 1.4, этот план является базисным с любой из указанных там базисных матриц A_B^i , $i = \overline{1, 10}$. Из примера 1.5 видно, что x^1 – оптимальный план. Из этого же примера следует, что с базисной матрицей $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5) = E$ условия оптимальности выполняются, значит, базисная матрица A_B^1 оптимальная. В то же время базисная матрица $A_B^2 = (a_2, a_4, a_5)$ не является оптимальной, поскольку с ней оптимальный план x^1 не удовлетворяет условиям оптимальности. Можно проверить, что оптимальными являются также базисные матрицы A_B^i , $i = 3, 5, 6, 7, 9, 10$, и неоптимальными A_B^i , $i = 4, 8$.

Замечание 1.4. Введем следующее понятие. Вектор x с базисной матрицей A_B называется *обобщенным базисным планом*, если небазисные компоненты с нулевыми оценками некритические: $d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*$, $j \in J_{H0} = \{j \in J_H : \Delta_j = 0\}$. Теоремы 1.1 и 1.2 остаются справедливыми и для обобщенного базисного плана. Доказательство проводится по той же схеме.

Замечание 1.5. Критерий оптимальности можно переформулировать в другой форме. Заметим, что условия (1:18) допускают следующую запись:

$$\Delta_j x_j = \max_{d_{*j} \leq \omega \leq d_j^*} \Delta_j \omega, \quad j \in J_H. \quad (1.26)$$

Условия (1.26) называются *условиями максимума*.

Теорема 1.3 (принцип максимума). Для оптимальности базисного плана x необходимо и достаточно существования такой базисной матрицы A_B^0 , с которой выполняются условия максимума (1.26).

1.7. Итерация симплекс-метода

Симплекс-метод – итеративный метод решения задач ЛП. Каждый такой метод характеризуется своей итерацией. Цель данного раздела – описать в аналитической форме итерацию симплекс-метода, геометрическая интерпретация которой была дана в разд. 1.2.

Напомним, симплекс-метод обладает тремя свойствами: 1) оптимальный план ищется только среди вершин множества планов; 2) при этом осуществляется движение от текущей вершины в соседнюю по ребру, соединяющему эти вершины; 3) движение сопровождается ростом целевой функции.

Для обеспечения первого свойства достаточно вспомнить соответствие между вершинами и базисными планами. Из него следует, что в симплекс-методе строится последовательность базисных планов

$$x^1 \rightarrow x^2 \rightarrow \dots \rightarrow x^k \rightarrow x^{k+1} \rightarrow \dots$$

Элементы указанной последовательности называются *приближениями* (к оптимальному плану). Переход $x^k \rightarrow x^{k+1}$ – *итерация симплекс-метода*. Построение первого приближения x^1 называется *первой фазой симплекс-метода*, построение остальных приближений – *второй фазой*.

На первой фазе: 1) обнаруживается неразрешимость исходной задачи из-за несовместности ее ограничений; 2) из основных ограничений исходной задачи удаляются линейно зависимые уравнения; 3) строится начальный базисный план задачи (1.8). На второй фазе: 1) обнаруживается неразрешимость исходной задачи из-за неограниченности (сверху при максимизации, снизу при минимизации) ее целевой функции на множестве планов; 2) строится оптимальный план исходной задачи, которая была сведена к задаче (1.8).

Первую фазу рассмотрим позже (разд. 1.9). В данном разделе остановимся на второй фазе.

Общую итерацию представим в виде $x \rightarrow \bar{x}$, где x – «старый» базисный план, на котором не выполняется критерий оптимальности, \bar{x} – «новый» базисный план.

Новый базисный план \bar{x} будем строить следующим образом:

$$\bar{x} = x + \Delta x, \quad (1.27)$$

где приращение Δx имеет вид

$$\Delta x = \theta^0 l. \quad (1.28)$$

Вектор $l \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением* изменения плана x , $\theta^0 \geq 0$ – *шаг* вдоль этого направления (рис. 1.7).

Из свойства $A\Delta x = 0$ приращения Δx следует $Al = 0$ или, в компонентной форме, $A_B l_B + A_H l_H = 0$. Отсюда получаем:

$$l_B = -A_B^{-1} A_H l_H. \quad (1.29)$$

Из (1.28), (1.29) видно, что для любого выбора l_H при движении вдоль направления $l = (l_B, l_H)$ с l_B , подсчитанным по правилу (1.29), основные ограничения задачи для \bar{x} выполняются.

Чтобы обеспечить второе свойство симплекс-метода, вектор l_H построим только с одной ненулевой компонентой l_{j_0} :

$$l_H = (0, \dots, 0, l_{j_0}, 0, \dots, 0). \quad (1.30)$$

Без ограничения общности можно считать, что $|l_{j_0}| = 1$. В этом случае вектор l_B (1.29) примет вид

$$l_B = -A_B^{-1} a_{j_0} l_{j_0}. \quad (1.31)$$

Для обеспечения третьего свойства вспомним физический смысл оценок и доказательство необходимости критерия оптимальности. Третье свойство будет обеспечено, если индекс $j_0 \in J_H$ выбрать таким, что для него не выполняется критерий оптимальности, т. е.

$$l_{j_0} = \text{sign} \Delta_{j_0}. \quad (1.32)$$

В этом случае при движении вдоль l целевая функция возрастает со скоростью $|\Delta_{j_0}|$. Обозначим через J_H^- множество небазисных индексов плана x , для которых не выполняются условия оптимальности (1.18). Используются различные правила выбора индекса $j_0 \in J_H^-$. Дж. Данциг рекомендует индекс j_0 выбирать из условия

$$|\Delta_{j_0}| = \max_{j \in J_H^-} |\Delta_j|. \quad (1.33)$$

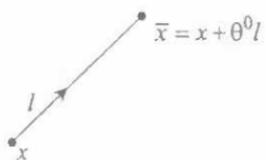


Рис. 1.7

В этом случае целевая функция возрастает вдоль соответствующего ребра с максимальной скоростью. На этом построение направления в (1.28) завершим.

Перейдем к вычислению шага θ^0 . Поскольку при движении вдоль построенного направления целевая функция возрастает, то разумно двигаться до тех пор, пока не достигнем границы множества планов.

Согласно (1.27), (1.28), (1.30) имеем

$$\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta^0 l_{j_0}, \quad \bar{x}_j = x_j, \quad j \in J_H \setminus j_0; \quad (1.34)$$

$$\bar{x}_j = x_j + \theta^0 l_j, \quad j \in J_B.$$

Поэтому в качестве шага θ^0 возьмем максимальное число θ , при котором выполняются неравенства

$$d_{*j_0} \leq x_{j_0} + \theta l_{j_0} \leq d_{*j_0}^*, \quad (1.35)$$

$$d_{*j} \leq x_j + \theta l_j \leq d_j^*, \quad j \in J_B. \quad (1.36)$$

Вычислим θ^0 . Рассмотрим сначала неравенство (1.35). Если $l_{j_0} > 0$, то при увеличении θ число $x_{j_0} + \theta l_{j_0}$ растет и достигает верхней границы $d_{*j_0}^*$ при

$$\theta_{j_0} = d_{*j_0}^* - d_{*j_0}. \quad (1.37)$$

Если $l_{j_0} < 0$, то с увеличением θ число $x_{j_0} + \theta l_{j_0}$ уменьшается и достигает нижней границы d_{*j_0} при том же значении θ_{j_0} (1.37).

Рассмотрим далее j -е неравенство (1.36). Если $l_j > 0$, то при росте θ растет и $x_j + \theta l_j$ (рис. 1.8 а), достигая верхней границы при

$$\theta_j = (d_j^* - x_j) / l_j, \quad l_j > 0. \quad (1.38)$$

Если $l_j < 0$, то с ростом θ будет уменьшаться $x_j + \theta l_j$ (рис. 1.8, б) и выйдет на нижнюю границу при

$$\theta_j = (d_{*j} - x_j) / l_j, \quad l_j < 0. \quad (1.39)$$

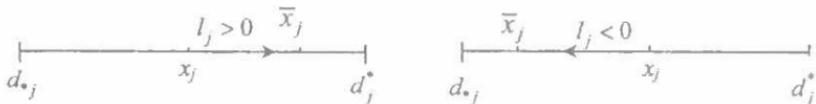


Рис. 1.8

При $l_j = 0$ значение $x_j + \theta l_j$ не меняется при росте θ . Поэтому можно считать, что

$$\theta_j = \infty, l_j = 0. \quad (1.40)$$

Максимальное значение θ , при котором будут выполняться все неравенства (1.36), равно

$$\theta_{j_*} = \min_{j \in J_B} \theta_j. \quad (1.41)$$

Таким образом, максимальное θ , при котором на векторе $x + \theta l$ будут выполняться все прямые ограничения, равно

$$\theta^0 = \min \{ \theta_{j_0}, \theta_{j_*} \}, \quad (1.42)$$

и $\bar{x} = x + \theta^0 l$ – план задачи.

Отметим, что если x – невырожденный базисный план, то $\theta^0 > 0$ и целевая функция на итерации $x \rightarrow \bar{x}$ возрастает на величину $\Delta\varphi = c'(x + \theta^0 l) - c'x = \theta^0 |\Delta_{j_0}| > 0$.

Покажем, что план \bar{x} базисный.

Пусть $\theta^0 = \theta_{j_0}$. Тогда \bar{x} – базисный план со старой базисной матрицей $\bar{A}_B = A_B$: для него $\bar{J}_H = J_H$, компонента \bar{x}_{j_0} лежит на противоположной границе по сравнению с компонентой x_{j_0} и удовлетворяет условию оптимальности (1.18). Поэтому $\bar{J}_H^- = J_H^- \setminus j_0$. Новый план \bar{x} оптимален, если $|J_H^-| = 1$.

Рассмотрим второй случай: $\theta^0 = \theta_{j_*}$. Положим $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_*) \cup j_0$, $\bar{J}_H = (J_H \setminus j_0) \cup j_*$. Понятно, что $|\bar{J}_H| = n - m$, $\bar{x}_j = d_{j_*} \vee d_j^*, j \in \bar{J}_H$. Покажем, что матрица $\bar{A}_B = (a_j, j \in \bar{J}_B)$ не вырождена. Для этого достаточно доказать, что любой орт $e_i, i \in I$, допускает разложение

$$e_i = \bar{u}_{j_0 i} a_{j_0} + \sum_{j \in J_B \setminus j_*} \bar{u}_{ji} a_j, i \in I. \quad (1.43)$$

Для старого базиса такое разложение имеет место

$$e_i = u_{j_* i} a_{j_*} + \sum_{j \in J_B \setminus j_*} u_{ji} a_j, i \in I. \quad (1.44)$$

Разложим вектор a_{j_0} по столбцам матрицы A_B :

$$a_{j_0} = x_{j_* j_0} a_{j_*} + \sum_{j \in J_B \setminus j_*} x_{jj_0} a_j. \quad (1.45)$$

Число x_{j_0} равно j -й координате вектора $A_B^{-1}a_{j_0}$. В терминах этой координаты равенство (1.31) примет вид

$$l_{j_*} = -x_{j_* j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0}. \quad (1.46)$$

Поскольку $\theta^0 = \theta_{j_*} = \begin{cases} (d_{j_*} - x_{j_*}) / l_{j_*}, & l_{j_*} < 0, \\ (d_{j_*}^* - x_{j_*}) / l_{j_*}, & l_{j_*} > 0, \end{cases} < \infty$, то $l_{j_*} \neq 0$ и в силу

(1.46) имеем $x_{j_* j_0} \neq 0$. Из равенства (1.45) найдем

$$a_{j_*} = \frac{1}{x_{j_* j_0}} a_{j_0} - \sum_{j \in J_B \setminus j_*} \frac{x_{j j_0}}{x_{j_* j_0}} a_j$$

и подставим в (1.44):

$$e_i = \frac{u_{j_* i}}{x_{j_* j_0}} a_{j_0} + \sum_{j \in J_B \setminus j_*} \left(u_{j i} - \frac{u_{j_* i} x_{j j_0}}{x_{j_* j_0}} \right) a_j, \quad i \in I. \quad (1.47)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j_0 i} &= \frac{u_{i j_0}}{x_{j_* j_0}}, \quad i \in I, \\ \bar{u}_{j i} &= u_{j i} - \frac{x_{j j_0} u_{j_* i}}{x_{j_* j_0}}, \quad j \neq j_0, \quad j \in J_B, \quad i \in I, \end{aligned} \quad (1.48)$$

из (1.47) получим (1.43), т. е. $\det \bar{A}_B \neq 0$. Сравнивая (1.44) с тождеством $A_B A_B^{-1} = E$, замечаем, что числа $u_{j i}$, $i \in I$, $j \in J_B$, представляют элементы обратной матрицы A_B^{-1} . Формулы (1.48) выражают связь между элементами старой A_B^{-1} и новой \bar{A}_B^{-1} обратных матриц.

1.8. Алгоритм

Пусть задан базисный план x с базисным множеством индексов J_B (с базисной матрицей A_B). *Алгоритм решения канонической задачи* (1.8) состоит из следующих шагов.

1. Вычисляем вектор потенциалов u по формуле (1.15) или (что то же самое) решаем систему уравнений $a'_j u = c_j$, $j \in J_B$, относительно потенциалов u_i , $i \in I$.
2. Вычисляем небазисные оценки по формулам $\Delta_j = c_j - a'_j u$, $j \in J_H$.

3. Проверяем условия оптимальности (1.18). Если они выполняются, то решение заканчиваем: план x оптимален. В противном случае переходим к шагу 4.

4. Выбираем индекс $j_0 \in J_H^-$, для которого не выполняются условия оптимальности (1.18).

5. Строим направление $l = (l_B, l_H)$ по правилам (1.30) – (1.32).

Замечание 1.6. Вместо формулы (1.31) для нахождения l_B можно использовать эквивалентные уравнения $A_B l_B = -a_{j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0}$.

6. Находим величины θ_j , $j \in J_B$, по формулам (1.38) – (1.40), θ_{j_0} – по формуле (1.37), θ_{j_*} – по формуле (1.41).

7. Определяем число θ^0 по формуле (1.42).

а) В случае $\theta^0 = \theta_{j_0}$ новый базисный план \bar{x} строим по правилам (1.34).

Если $\bar{J}_H^- = J_H^- \setminus j_0 = \emptyset$, решение заканчиваем: \bar{x} – оптимальный план.

Если $\bar{J}_H^- \neq \emptyset$, переходим к шагу 4, где индекс j_0 выбираем из \bar{J}_H^- .

б) В случае $\theta^0 = \theta_{j_*}$ новый базисный план \bar{x} строим по правилам (1.34), заменяя базисное множество J_B на новое $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_*) \cup j_0$ (или матрицу A_B на $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$) и переходим к шагу 1.

Пример 1.7. Рассмотрим задачу (1.10). В качестве начального базисного плана для этой задачи возьмем $x^1 = (5; 3; 18; 64; 40)$ с $J_B = \{3, 4, 5\}$, $J_H = \{1, 2\}$ (на рис. 1.1 – точка A), причем, согласно замечанию 1.2, верхние границы свободных переменных можно увеличить на $\varepsilon = 1$, чтобы базисный план x^1 был невырожденным. Следуя описанному алгоритму, найдем оптимальный план.

Итерация 1

1. Составим уравнения для потенциалов: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.

2. Подсчитаем небазисные оценки: $\Delta_1 = 2$; $\Delta_2 = 6$.

3. Проверим условия оптимальности: $\Delta_1 > 0$ при $x_1 = d_{11}$; $\Delta_2 > 0$ при $x_1 = d_{22}$, т. е. условия оптимальности не выполняются.

4. Выбираем индекс j_0 . Возьмем $j_0 = 2$. Это означает, что будем двигаться вдоль ребра AG (см. рис. 1.1).

5. Поскольку $\Delta_{j_0} = \Delta_2 > 0$, то $l_2 = \operatorname{sign} \Delta_2 = 1$, $l_1 = 0$. Вектор l_B находим из системы $Al = 0$: $1 + l_3 = 0$, $5 + l_4 = 0$, $4 + l_5 = 0$, т. е. $l_3 = -1$, $l_4 = -5$, $l_5 = -4$.

6. Подсчитаем шаги: $\theta_{j_0} = \theta_2 = 12 - 3 = 9$; $\theta_3 = (0 - 18) / (-1) = 18$, $\theta_4 = (0 - 64) / (-5) = 64 / 5$, $\theta_5 = (0 - 40) / (-4) = 10$. Отсюда получаем: $\theta^0 = \theta_{j_0} = \theta_2 = 9$.

7. Новый план строим по правилам (1.34) при $\theta^0 = 9$. Получим: $x^2 = (5; 12; 9; 19; 4)$. Базис остается прежним, т. е. $J_B = \{3, 4, 5\}$, $J_H = \{1, 2\}$. Как видим, получили точку G (см. рис. 1.1).

Вторая итерация начинается с четвертого шага.

Итерация 2

1. $j_0 = 1$.
2. $l_1 = 1, l_2 = 0$. Тогда $1 + l_3 = 0, 3 + l_4 = 0, 1 + l_5 = 0$, откуда получаем: $l_3 = -1, l_4 = -3, l_5 = -1$.
3. $\theta_{j_0} = \theta_1 = 20 - 5 = 15; \theta_3 = 9, \theta_4 = 19/3, \theta_5 = 4$. Отсюда имеем: $\theta^0 = \theta_{j_*} = \theta_5 = 4$, т. е. $j_* = 5$.

4. Новый базисный план: $x^3 = (9; 12; 5; 7; 0)$, $J_B = \{1, 3, 4\}$, $J_H = \{2, 5\}$. Это точка F (см. рис. 1.1).

Итерация 3

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2, u_1 = 0, u_2 = 0$. Отсюда получаем: $u_3 = 2$.
2. $\Delta_2 = 6 - 4 \cdot 2 = -2 < 0$ при $x_2 = d_2^* = 12$. Условие оптимальности не выполняется.
3. $j_0 = 2; l_2 = -1, l_5 = 0$.
4. Система уравнений для J_B : $l_1 - 1 + l_3 = 0, 3l_1 - 5 + l_4 = 0, l_1 - 4 = 0$. Отсюда находим: $l_1 = 4, l_3 = -3, l_4 = -7$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 9; \theta_1 = (20 - 9)/4 = 11/4, \theta_3 = 5/3, \theta_4 = 1$. Следовательно, $\theta^0 = \theta_{j_*} = \theta_4 = 1$, т. е. $j_* = 4$.
6. Новый базисный план: $x^4 = (13; 11; 2; 0; 0)$, $J_B = \{1, 2, 3\}$, $J_H = \{4, 5\}$. Это точка E (см. рис. 1.1).

Итерация 4

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2, u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6, u_1 = 0$. Отсюда находим: $u_1 = 0, u_2 = 2/7, u_3 = 8/7$.

2. $\Delta_4 = -2/7 < 0$ при $x_4 = 0 = d_{*4}, \Delta_5 = -8/7 < 0$ при $x_5 = 0 = d_{*5}$. Условия оптимальности выполняются: план $x^0 = (13; 11)$ для исходной задачи оптимальный. Максимальный доход (максимальная прибыль) при этом равен $\varphi_{\max} = 92$.

Как видно из описания алгоритма симплекс-метода, в его основе лежит обратная матрица A_B^{-1} . Поэтому алгоритму симплекс-метода можно придать другую форму (*метод обратной матрицы*). Обозначим через $(A_B^{-1})_k$ и $(A_B^{-1})_{k+1}$ матрицы, обратные к базисным на k -й и $(k+1)$ -й итерациях соответственно. Пусть J_B^k, J_B^{k+1} – множества базисных индексов соответственно на k -й и $(k+1)$ -й итерациях, причем в

множестве J_B^{k+1} индекс j_0 занимает то же место, что и индекс j_* в J_B^k .

Тогда матрицы $(A_B^{-1})_k$, $(A_B^{-1})_{k+1}$ связаны соотношением

$$(A_B^{-1})_{k+1} = D_k (A_B^{-1})_k, \quad (1.49)$$

где

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_1 j_0} / x_{j_* j_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -x_{i_2 j_0} / x_{j_* j_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/x_{j_* j_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_m j_0} / x_{j_* j_0} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{j_0}. \quad (1.50)$$

Поскольку, как будет следовать из дальнейшего, начальная матрица A_B^{-1} , как правило, единичная, то из (1.49) получаем

$$(A_B^{-1})_{k+1} = D_k D_{k-1} \dots D_1. \quad (1.51)$$

Запись обратной матрицы в виде (1.51) называют *мультипликативным представлением*. Оно позволяет не пересчитывать $m \times m$ -матрицы $(A_B^{-1})_k$, а добавлять к прежней информации совокупность только из $m + 1$ числа (номер и элементы j_0 -го столбца). Во избежание накопления ошибок округления через определенное число итераций обратная матрица обновляется, после чего вновь вычисляются множители (1.50).

1.9. Первая фаза

Напомним, первой фазой симплекс-метода называется метод построения начального базисного плана, если множество планов не пусто. Опишем ее отдельно для двух основных форм задач ЛП. Метод легко обобщается на задачи ЛП в произвольной форме.

Рассмотрим каноническую задачу ЛП

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{CB} = b, d_* \leq x \leq d^*, 0 \leq x_{CB} \leq d_{CB}^*, \quad (1.52)$$

которая получена из задачи в нормальной форме (1.9)

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, d_* \leq x \leq d^*. \quad (1.53)$$

Цель первой фазы – построить начальный базисный план задачи (1.52) или доказать, что ограничения задачи несовместны. Разобьем

множество индексов J столбцов матрицы A на подмножества J^* , J_* : $J^* \cap J_* = \emptyset$, $J^* \cup J_* = J$ и положим $\tilde{x} = (\tilde{x}_j = d_j^*, j \in J^*$, $j \in J^*; \tilde{x}_j = d_{*j}, j \in J_*)$. При этом разбиении можно учесть рекомендации специалистов по физическому прототипу задачи. Если, согласно их опыту и интуиции, j -я компонента оптимального плана принимает значение, близкое к верхней (нижней) границе d_j^* (d_{*j}), то полагаем $j \in J^* (J_*)$.

Вычислим вектор невязок $\omega = b - A\tilde{x}$. Обозначим $I^+ = \{i \in I : \omega_i \geq 0\}$, $I^- = \{i \in I : \omega_i < 0\}$. Если $I^- = \emptyset$ ($\omega_i \geq 0, i \in I$), то задача первой фазы решена, а вектор $(\tilde{x}, \tilde{x}_{CB} = b - A\tilde{x})$ – базисный план задачи (1.52) с базисной матрицей $A_B = (a_{n+i}, i \in I) = E$.

Предположим, что $I^- \neq \emptyset$. Введем вспомогательную задачу (*задачу первой фазы для задачи в нормальной форме* (1.53)):

$$\begin{aligned} - \sum_{i \in I^-} x_{n+i} &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} A(i, J)x + x_{n+i} = b_i, & i \in I^+, \\ A(i, J)x - x_{n+i} = b_i, & i \in I^-, \end{cases} \\ d_* \leq x \leq d^*, \quad 0 \leq x_{n+i} \leq d_{n+i}^*, & i \in I^+, \\ 0 \leq x_{n+i} \leq |\omega_i|, & i \in I^-, \end{aligned} \tag{1.54}$$

где $x_{n+i}, i \in I^+$, – свободные переменные, $x_{n+i}, i \in I^-$, – искусственные переменные.

Вектор $(\tilde{x}, x_{n+i} = \omega_i, i \in I^+, x_{n+i} = |\omega_i|, i \in I^-)$ является базисным планом задачи (1.54) с базисной матрицей $\tilde{A}_B = (a_{n+i} = e_i, i \in I^+, a_{n+i} = -e_i, i \in I^-)$. Взяв его в качестве начального, построим simplex-методом оптимальный базисный план $(x^*, x_{n+i}^*, i \in I)$ задачи (1.54) с оптимальной базисной матрицей $\hat{A}_B^* = (a_j, j \in J_B^*)$ (задача (1.54) имеет решение, поскольку ее целевая функция ограничена сверху нулем и множество планов не пусто – выше указан начальный базисный план).

Возможны две ситуации: 1) $x_{n+i}^* \equiv 0, i \in I^-$; 2) $x_{n+i}^* \neq 0, i \in I^-$. В первой ситуации вектор $(x^*, x_{n+i}^*, i \in I)$ – базисный план задачи (1.52). Переменные $x_{n+i}, i \in I^-$, переводим в разряд свободных, заменив векторы $a_{n+i}, i \in I^-$, на $-a_{n+i}, i \in I^+$.

Рассмотрим вторую ситуацию. Множество I^- разобьем на два подмножества $I^{-0}, I^{--}: I^{-0} = \{i \in I^- : x_{n+i}^* = 0\}, I^{--} = \{i \in I^- : x_{n+i}^* \neq 0\}$. Если $I^{-0} = \emptyset$, то задача (1.52), а вместе с ней и исходная задача (1.53) не имеет планов. Действительно, если ограничения задачи (1.53) совместны, то существует такой вектор \bar{x} , что $A\bar{x} \leq b, d_* \leq \bar{x} \leq d^*$. В этом случае $\omega = b - A\bar{x} \geq 0$, т. е. $I^- = \emptyset$, и поэтому целевая функция задачи (1.54) принимает нулевое значение, что противоречит предположению $\sum_{i \in I^-} x_{n+i} > 0$. При $I^{-0} \neq \emptyset$ в задаче (1.54) заменим множества I^+, I^- на следующие: $\bar{I}^+ = I^+ \cup I^{-0}$, $\bar{I}^- = I^{--}$, векторы $a_{n+i}, i \in I^{-0}$, на $-a_{n+i}$ и решаем новую задачу первой фазы. Через конечное число итераций либо придем к первой ситуации, либо обнаружим несовместность ограничений исходной задачи (1.53).

Замечание 1.6. Можно после каждой итерации решения задачи первой фазы, в результате которой искусственная переменная $x_{n+i}, i \in I^-$, становится нулевой, переводить ее из числа искусственных в свободные (с заменой a_{n+i} на $-a_{n+i}$) и решать задачу (1.54) с новыми множествами I^+, I^- .

Пример 1.8. Рассмотрим задачу (1.4) примера 1.1. Возьмем в качестве \tilde{x} вектор $\tilde{x} = (5; 3)$ (вершина A на рис. 1.1). Тогда $\omega = (18; 64; 40)$ и задача в канонической форме примет вид (1.10). В этом случае $I^- = \emptyset$, $I^+ = \{1, 2, 3\}$ и вектор $(\tilde{x}, x_{CB} = b - A\tilde{x}) = (5; 3; 18; 64; 40)$ – базисный план задачи (1.10) с базисной матрицей $A_5 = (a_3, a_4, a_5) = E$. Вторая фаза симплекс-метода с этим начальным базисным планом описана в примере 1.5.

Аналогичная ситуация имеет место и в случаях: 1) $\tilde{x}^1 = (20; 3)$ (вершина B), 2) $\tilde{x}^2 = (20; 6)$ (вершина C), 3) $\tilde{x}^3 = (5; 12)$ (вершина G). В первом случае $\omega^1 = (3; 19; 25)$, во втором – $\omega^2 = (0; 4; 13)$, в третьем – $\omega^3 = (9; 19; 4)$. Вторая фаза симплекс-метода начинается с начального базисного плана: 1) $x^1 = (20; 3; 3; 19; 25)$, 2) $x^2 = (20; 6; 0; 4; 13)$, 3) $x^3 = (5; 12; 9; 19; 4)$. Во всех случаях $J_5 = \{3, 4, 5\}$, т. е. $A_5 = E$.

Пусть теперь $\tilde{x} = (20; 12)$. Тогда $\omega = (-6; -26; -11)$. Имеем $I^- = \{1, 2, 3\}$, $I^+ = \emptyset$. Решаем задачу первой фазы

$$\begin{aligned} & -x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 26, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_4 & = 94, \\ x_1 + 4x_2 - x_5 & = 57, \end{cases} \\ & 5 \leq x_1 \leq 20, \quad 3 \leq x_2 \leq 12, \\ & 0 \leq x_3 \leq 6, \quad 0 \leq x_4 \leq 26, \quad 0 \leq x_5 \leq 11. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Итерация 1

Начальный базисный план задачи (1.55) $x = (20; 12; 6; 26; 11)$, $J_B = \{3, 4, 5\}$, $J_H = \{1, 2\}$.

1. $u_1 = u_2 = u_3 = 1$.

2. $\Delta_1 = 0 - (1 + 3 + 1) = -5 < 0$ при $x_1 = d_1^* = 20$ (условие оптимальности не выполняется (-)), $\Delta_2 = 0 - (1 + 5 + 4) = -10 < 0$ при $x_2 = d_2^*$ (-).

3. $j_0 = 2$; $l_2 = -1$, $l_1 = 0$. Тогда $-1 - l_3 = 0$, $-5 - l_4 = 0$, $-4 - l_5 = 0$. Отсюда имеем: $l_3 = -1$, $l_4 = -5$, $l_5 = -4$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 12 - 3 = 9$; $\theta_3 = 6$, $\theta_4 = 26/5$, $\theta_5 = 11/4$. Тогда $\theta^0 = 11/4 = \theta_5$, следовательно, $j_* = 5$.

5. Новый базисный план для задачи (1.55) $x = \left(20; 9\frac{1}{4}; 3\frac{1}{4}; 12\frac{1}{4}; 0\right)$,

$J_B = \{2, 3, 4\}$, $J_H = \{1, 5\}$.

Итерация 2

Поскольку искусственная переменная $x_5 = 0$, то, следуя замечанию 1.6, делаем ее свободной переменной, вычисляем $d_5^* = 40$ и решаем новую задачу первой фазы

$$\begin{aligned} & -x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 26, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_4 & = 94, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 & = 57, \end{cases} \\ & 5 \leq x_1 \leq 20, \quad 3 \leq x_2 \leq 12, \\ & 0 \leq x_3 \leq 6, \quad 0 \leq x_4 \leq 26, \quad 0 \leq x_5 \leq 40. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Начальный базисный план для этой задачи указан в п. 5 итерации 1.

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$. Отсюда получаем $u_3 = -3/2$.

2. $\Delta_1 = 0 - (1 + 3 - 3/2) < 0$ при $x_1 = d_1^*$ (-).

3. $j_0 = l; l_1 = -1, l_5 = 0$. Тогда $-1 + l_2 - l_3 = 0, -3 + 5l_2 - l_4 = 0, -1 + 4l_2 = 0$. Отсюда получаем: $l_2 = 1/4, l_3 = -3/4, l_4 = -7/4$.

$$4. \theta_{j_0} = \theta_1 = 15; \quad \theta_2 = \left(12 - 9\frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4} = 11, \quad \theta_3 = \left(0 - 3\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) = 4\frac{1}{3},$$

$$\theta_4 = \left(0 - 12\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{7}{4}\right) = 7. \text{ Таким образом, } \theta^0 = 13/3 = \theta_3, \text{ следовательно, } j_* = 3.$$

5. Новый базисный план для задачи (1.56) $x = \left(15\frac{2}{3}; 10\frac{1}{3}; 0; 4\frac{2}{3}; 0\right)$,

$$J_B = \{1, 2, 4\}, J_H = \{3, 5\}.$$

Итерация 3

Поскольку искусственная переменная $x_3 = 0$, то делаем ее свободной и задача первой фазы примет вид

$$\begin{aligned} & -x_4 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_4 = 94, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 57, \end{cases} \\ & 5 \leq x_1 \leq 20, 3 \leq x_2 \leq 12, \\ & 0 \leq x_3 \leq 18, 0 \leq x_4 \leq 26, 0 \leq x_5 \leq 40. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Начальный базисный план для этой задачи указан в п. 5 итерации 2.

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 3u_2 + u_3 = 0, u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 0, -u_2 = -1$. Отсюда получаем: $u_1 = -7/3, u_2 = 1, u_3 = -2/3$.

2. $\Delta_3 = 0 - (-7/3) = 7/3 > 0$ при $x_3 = d_{*3} (-), \Delta_5 = 0 - (-2/3) = 2/3 > 0$ при $x_5 = d_{*5} (-)$.

3. $j_0 = 3; l_3 = 1, l_5 = 0$. Тогда $l_1 + l_2 + 1 = 0, 3l_1 + 5l_2 - l_4 = 0, l_1 + 4l_2 = 0$. Отсюда получаем: $l_1 = -4/3, l_2 = 1/3, l_4 = -7/3$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_3 = 18; \theta_1 = 8, \theta_2 = 5, \theta_4 = 2$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_4 = 2$, следовательно, $j_* = 4$.

5. Новый базисный план для задачи (1.57) $x = (13; 11; 2; 0; 0)$, $J_B = \{1, 2, 3\}, J_H = \{4, 5\}$. Он соответствует вершине E (рис. 1.1).

Поскольку все искусственные переменные равны нулю, то переходим ко второй фазе симплекс-метода (к решению задачи (1.10)), переведя переменную x_4 из разряда искусственных в разряд свободных переменных. Задачу (1.10) решаем симплекс-методом, взяв в качестве начального базисного плана вектор $x = (13; 11; 2; 0; 0)$ с $J_B = \{1, 2, 3\}$. Как следует из решения этой задачи (см. итерацию 4 примера 1.7), построенный базисный план оптимальен.

Пример 1.9. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq -4 \frac{1}{2}, \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Пусть $\bar{x} = (0; 5)$. Тогда $\omega_1 = 4 - 5 = -1 < 0$; $\omega_2 = -4 \frac{1}{2} + 5 = \frac{1}{2} > 0$. Таким образом, $I^- = \{1\}$, $I^+ = \{2\}$. Задача первой фазы для задачи (1.58) имеет вид

$$\begin{aligned} & -x_3 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 = -4 \frac{1}{2}, \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Здесь x_3 – искусственная переменная, x_4 – свободная переменная. Начальный базисный план задачи (1.59) $x = (0; 5; 1; 1/2)$, $J_B = \{3, 4\}$, $J_H = \{1, 2\}$.

Итерация 1

1. $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.

2. $\Delta_1 = 0 - 1 = -1 < 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (условие оптимальности выполняется (+)), $\Delta_2 = 0 - 1 = -1 < 0$ при $x_2 = d_2^*$ (-).

3. $j_0 = 2$; $l_2 = -1$, $l_1 = 0$. Тогда $-1 - l_3 = 0$, $1 + l_4 = 0$, откуда получим: $l_3 = -1$, $l_4 = -1$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 5$; $\theta_3 = 1$, $\theta_4 = 1/2$. Тогда $\theta^0 = \theta_4 = 1/2$, следовательно, $j_* = 4$.

5. Новый базисный план $x = \left(0; 4 \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $J_B = \{2, 3\}$, $J_H = \{1, 4\}$.

Итерация 2

1. $u_1 - u_2 = 0$, $u_1 = 1$. Отсюда $u_2 = 1$.

2. $\Delta_1 = 0 - 2 = -2 < 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (+), $\Delta_4 = 0 - 1 = -1 < 0$ при $x_4 = d_{*4}$ (+).

Условия оптимальности выполняются для задачи первой фазы. Но искусственная переменная $x_3 \neq 0$ и $I^- = \emptyset$, поэтому ограничения исходной задачи (1.58) несовместны: $X = \emptyset$.

Опишем теперь первую фазу симплекс-метода для задачи ЛП в канонической форме (1.8)

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, d_* \leq x \leq d^*, \quad (1.60)$$

не делая никаких предположений относительно ее параметров.

Разобьем множество J на два подмножества J_* , J^* и построим вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_j = d_{*,j}, j \in J_*, \tilde{x}_j = d_j^*, j \in J^*)$, принимая во внимание рекомендации специалистов. Подсчитаем вектор невязок основных ограничений $\omega = b - A\tilde{x}$. Возможны две ситуации: 1) $\omega = 0$, 2) $\omega \neq 0$.

Исследуем первую ситуацию. В этом случае \tilde{x} – план задачи (1.60). Построим для него базисную матрицу A_B . С этой целью введем вспомогательную («буферную») задачу

$$c'x \rightarrow \max,$$

$$A(i, J)x + x_{n+i} = b_i, \quad i \in I, \quad (1.61)$$

$$d_* \leq x \leq d^*, \quad 0 \leq x_{n+i} \leq 0, \quad i \in I,$$

в которой x_{n+i} , $i \in I$, – фиктивные переменные. В силу специфики ограничений на фиктивные переменные задача (1.61) эквивалентна исходной задаче (1.60). Пара $(\tilde{x}, x_\phi = (x_{n+i}, i \in I)) = 0$ является базисным планом задачи (1.61) с базисной матрицей $A_\phi = (a_{n+i} = e_i, i \in I) = E$. Начиная с этого базисного плана, решаем задачу (1.61) симплекс-методом. Предположим, что в процессе решения на некоторой итерации шаг θ^0 достигается на фиктивной переменной с номером $j_* = n + i_* \in J_B$ и он равен нулю: $\theta^0 = \theta_{j_*} = \theta_{n+i_*} = 0$. На следующей итерации вектор a_{j_*} заменяется на a_{j_0} ($j_0 \in J$ – индекс, для которого на данной итерации условие оптимальности не выполняется) и из задачи (1.61) удаляем фиктивную переменную x_{j_*} вместе с вектором a_{j_*} .

Пример 1.10. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 26, \end{cases} \\ & 13 \leq x_1 \leq 17, \quad -22 \leq x_2 \leq -4, \\ & 1 \leq x_3 \leq 5, \quad 0 \leq x_4 \leq 10. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Пусть $\tilde{x} = (13; -4; 1; 0)$. Тогда $\omega = 0$. Таким образом, \tilde{x} – план задачи (1.62). Решаем «буферную» задачу

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 + x_6 = 26, \end{cases} \\ & 13 \leq x_1 \leq 17, \quad -22 \leq x_2 \leq -4, \quad 1 \leq x_3 \leq 5, \\ & 0 \leq x_4 \leq 10, \quad 0 \leq x_5 \leq 0, \quad 0 \leq x_6 \leq 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Начальный базисный план для нее $x = (13; -4; 1; 0; 0; 0)$, $J_B = \{5, 6\}$.

Итерация 1

1. $u_1 = u_2 = 0$.
2. $\Delta_1 = 1 > 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (-), $\Delta_2 = 1 > 0$ при $x_2 = d_2^*$ (+), $\Delta_3 = -1 < 0$ при $x_3 = d_{*3}$ (+), $\Delta_4 = -1 < 0$ при $x_4 = d_{*4}$ (+).
3. $j_0 = 1$; $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = l_4 = 0$. Тогда $l_5 = -1$, $l_6 = -2$.
4. $\theta_{j_0} = \theta_1 = 4$; $\theta_5 = 0$, $\theta_6 = 0$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_5 = 0$, $j_* = 5$.
5. План остается прежним, меняется только базис: $J_B = \{1, 6\}$.

На следующей итерации удаляем из задачи (1.63) переменную x_5 . Тогда $J_H = \{2, 3, 4\}$.

Итерация 2

1. $u_1 + 2u_2 = 1$, $u_2 = 0$. Отсюда $u_1 = 1$.
2. $\Delta_2 = 1 - 1 = 0$ (+), $\Delta_3 = -1 - 1 = -2 < 0$ при $x_3 = d_{*3}$ (+), $\Delta_4 = -1 - 1 = -2 < 0$ при $x_4 = d_{*4}$ (+).

Условия оптимальности выполнены. План $x = (13; -4; 1; 0)$ оптимальный.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\omega \neq 0$. Введем вспомогательную задачу (*задачу первой фазы для канонической задачи* (1.60))

$$\begin{aligned} & - \sum_{i \in I^+ \cup I^-} x_{n+i} \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} A(i, J)x + x_{n+i} = b_i, & i \in I^+ \cup I^0, \\ A(i, J)x - x_{n+i} = b_i, & i \in I^-, \end{cases} \\ & d_* \leq x \leq d^*, \quad 0 \leq x_{n+i} \leq |\omega_i|, \quad i \in I, \end{aligned} \tag{1.64}$$

где $I^+ = \{i \in I : \omega_i > 0\}$, $I^- = \{i \in I : \omega_i < 0\}$, $I^0 = \{i \in I : \omega_i = 0\}$. Задачу (1.64) решаем симплекс-методом по алгоритму, описанному в предыдущем разделе. В качестве начального базисного плана этой задачи возьмем вектор $(\tilde{x}, x_{n+i} = |\omega_i|, i \in I)$ с базисной матрицей $A_B = (a_{n+i} = e_i, i \in I^+ \cup I^0, a_{n+i} = -e_i, i \in I^-)$. Задача имеет решение, поскольку целевая функция ограничена сверху нулем и множество планов задачи не пусто (выше указан начальный базисный план).

Между решениями задач (1.60) и (1.64) существует связь. Обозначим через $x_H = (x_{n+i}, i \in I)$ вектор искусственных переменных. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Для совместности ограничений задачи (1.60) ($X \neq \emptyset$) необходимо и достаточно, чтобы в решении $(x^*, x_{\text{И}}^*)$ задачи (1.64) все искусственные переменные были нулевыми: $x_{\text{И}}^* = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $X \neq \emptyset$, т. е. существует вектор $x^* \in X$. Тогда вектор

$$(x^*, x_{\text{И}}^* = 0) \quad (1.65)$$

является оптимальным планом задачи (1.64). Действительно, совокупность (1.65) – план задачи (1.64) и на нем целевая функция этой задачи равна нулю. При любом другом плане, в котором $x_{\text{И}} \neq 0$, значение целевой функции меньше нуля.

Достаточность. Пусть оптимальный план задачи (1.64) имеет вид (1.65). Тогда, очевидно, вектор x^* – план задачи (1.60), т. е. $X \neq \emptyset$. ■

Решение задачи (1.64) симплекс-методом называется *первой фазой симплекс-метода*.

После первой фазы будут построены оптимальный план $(x^*, x_{\text{И}}^*)$ и базисное множество индексов $J_{\text{Б}}^*$ задачи (1.64), обладающие одним из трех свойств:

- 1) $x_{\text{И}}^* \neq 0$;
- 2) $x_{\text{И}}^* = 0$ и в базисе нет искусственных векторов, т. е. $J_{\text{Б}}^* \cap J_{\text{И}} = \emptyset$, где $J_{\text{И}} = \{n+i, i \in I\}$;
- 3) $x_{\text{И}}^* = 0$, а в базисе есть искусственные векторы, т. е. $J_{\text{Б}}^* \cap J_{\text{И}} \neq \emptyset$.

Проанализируем каждое из указанных свойств.

В первом случае, согласно лемме 1.1, $X = \emptyset$, и решение прекращаем.

Во втором случае получаем начальный базисный план x^* с базисным множеством $J_{\text{Б}} = J_{\text{Б}}^*$ для задачи (1.60). С него и начинаем решать задачу (1.60).

В третьем случае полагаем $I_{\Phi} = \{i \in I : n+i \in J_{\text{Б}}^*\}$ и решаем симплекс-методом «буферную» задачу

$$\begin{aligned} c'x &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} A(i, J)x + x_{n+i} = b_i, & i \in I_{\Phi}, \\ A(i, J)x &= b_i, & i \in I \setminus I_{\Phi}, \end{cases} \\ d_* \leq x \leq d^*, \quad 0 \leq x_{n+i} \leq 0, \quad i \in I_{\Phi}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

взяв в качестве начального базисного плана пару $(x^*, x_{n+i}^* = 0, i \in I_\phi)$ с базисным множеством J_B^* .

Замечание 1.7. Можно после каждой итерации, в результате которой искусственная переменная обращается в ноль, удалять эту переменную из задачи вместе с соответствующим вектором условий, если они не являются базисными. Если же они базисные, то переводим их в разряд фиктивных, а на переменную накладываем нулевые ограничения.

Пример 1.11. Решим следующую задачу:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \end{cases} \\ 1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4, 1 \leq x_3 \leq 2. \end{aligned}$$

Возьмем вектор $\tilde{x} = (1; 0; 1)$. Подсчитаем невязки: $\omega_1 = 5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$; $\omega_2 = 7 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2$. Задача первой фазы имеет вид

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 7, \end{cases} \\ 1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4, 1 \leq x_3 \leq 2, 0 \leq x_4 \leq 3, 0 \leq x_5 \leq 2. \end{aligned}$$

Начальный базисный план для нее $x = (1; 0; 1; 3; 2)$, $J_B = \{4, 5\}$, $J_H = \{1, 2, 3\}$.

Итерация 1

1. $u_1 = 1; u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -5 + 1 = -4 < 0$ при $x_1 = d_{*1} = 1$ (+); $\Delta_2 = -1 + 2 = 1 > 0$ при $x_2 = d_{*2} = 0$ (-); $\Delta_3 = -3 + 4 = 1 > 0$ при $x_3 = d_{*3} = 1$ (-).
3. $j_0 = 2, l_2 = 1, l_1 = l_3 = 0$.
4. $l_4 = 1; l_5 = -2$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 4 - 0 = 4; \theta_4 = (3 - 3) \cdot 1 = 0; \theta_5 = (0 - 2) \cdot (-2) = 1; \theta^0 = \theta_4 = 0 = \theta_{j_0}; j_* = 4$.
6. План остается прежним, поскольку $\theta^0 = 0$: $x = (1; 0; 1; 3; 2)$. Меняется J_B : $J_B = \{2, 5\}$. Тогда $J_H = \{1, 3, 4\}$.

Итерация 2

1. $u_1 + 2u_2 = 0, u_2 = -1$. Отсюда получаем $u_1 = 2, u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -9 < 0$ при $x_1 = d_{*1} = 1$ (+); $\Delta_3 = -2 < 0$ при $x_3 = d_{*3} = 1$ (+); $\Delta_4 = -1 - (-1) \cdot 2 = 1 > 0$ при $x_4 = d_4^* = 3$ (+).

План оптимальный. Но искусственные переменные несущие ненулевые ($x_4 = 3, x_5 = 2$), поэтому ограничения исходной задачи несовместны.

Пример 1.12. Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) = -5x_1 + 7x_2 - 11x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases}$$

$$3 \leq x_1 \leq 4, \quad -17 \leq x_2 \leq 3, \quad -8 \leq x_3 \leq 3.$$

Пусть $\tilde{x} = (4; 3; 3)$. Тогда $\omega_1 = 15 - 20 - 3 + 3 = -5 < 0$, $\omega_2 = 6 - 4 + 6 - 9 = -1 < 0$, $\omega_3 = 21 - 24 + 3 - 6 = -6 < 0$. Задача первой фазы имеет вид

$$-x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 21, \end{cases}$$

$$3 \leq x_1 \leq 4, \quad -17 \leq x_2 \leq 3, \quad -8 \leq x_3 \leq 3,$$

$$0 \leq x_4 \leq 5, \quad 0 \leq x_5 \leq 1, \quad 0 \leq x_6 \leq 6.$$

В качестве начального базисного плана возьмем $x^1 = (4; 3; 3; 5; 1; 6)$, $J_B = \{4, 5, 6\}$, $J_{II} = \{1, 2, 3\}$.

Итерация 1

$$1. \ u_1 = u_2 = u_3 = 1.$$

$$2. \Delta_1 = -5 - 1 - 6 = -12 < 0 \text{ при } x_1 = d_1^* (-), \Delta_2 = -1 + 2 + 1 = 2 > 0 \text{ при } x_2 = d_2^* (+), \\ \Delta_3 = 1 - 3 - 2 = -4 < 0 \text{ при } x_3 = d_3^* (-).$$

$$3. j_0 = 1; l_1 = -1, l_2 = l_3 = 0. \text{ Тогда: } l_4 = -5, l_5 = -1, l_6 = -6.$$

$$4. \theta_{j_0} = \theta_1 = 1; \theta_4 = 1, \theta_5 = 1, \theta_6 = 1. \text{ Таким образом, } \theta^0 = 1.$$

$$5. \text{Новый план } x^2 = (3; 3; 3; 0; 0; 0).$$

Поскольку на данном шаге все искусственные переменные нулевые, то можно поступить двояко: либо продолжить решение задачи первой фазы (условия оптимальности не выполняются), в частности, взяв $\theta^0 = \theta_{j_0} = \theta_1$ или, например, $\theta^0 = \theta_{j_0} = \theta_4$, либо перейти к решению «буферной» задачи. В последнем случае достаточно сделать две искусственные переменные фиктивными и базисными, а третью удалить и в качестве базисной переменной взять x_1 . Итак, получим «буферную» задачу

$$-5x_1 + 7x_2 - 11x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases}$$

$$3 \leq x_1 \leq 4, \quad -17 \leq x_2 \leq 3, \quad -8 \leq x_3 \leq 3,$$

$$0 \leq x_4 \leq 0, \quad 0 \leq x_5 \leq 0.$$

В качестве начального базисного плана берем вектор $x = (3; 3; 3; 0; 0)$ и $J_B = \{1, 4, 5\}$.

Итерация 1

1. $u_1 = 0, u_2 = 0, 6u_3 = -5$, откуда получим $u_3 = -5/6$.

2. $\Delta_2 = 7 - 5/6 > 0$ при $x_2 = d_2^*$ (+), $\Delta_3 = -11 - 2 \cdot (-5/6) < 0$ при $x_3 = d_3^*$ (-).

3. $j_0 = 3; l_3 = -1, l_2 = 0$. Тогда уравнения для l_B : $5l_1 + 1 + l_4 = 0, l_1 - 3 + l_5 = 0, 6l_1 - 2 = 0$, откуда получим $l_1 = 1/3, l_4 = -(5/3 + 1) = -8/3, l_5 = -(1/3 - 3) = -8/3$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_3 = 11; \theta_1 = 3, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_5 = 0$, т. е. $j_* = 5$.

5. Удаляем фиктивную переменную x_5 из задачи. План остался прежним: $x = (3; 3; 3; 0)$ с $J_B = \{1, 3, 4\}, J_H = \{2\}$.

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов: $5u_1 + u_2 + 6u_3 = -5, -u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -11, u_1 = 0$.

Отсюда получаем $u_1 = 0, u_2 = -7/2, u_3 = -1/4$.

2. $\Delta_2 = 7 - 2 \cdot 7/2 - 1/4 = -1/4 < 0$ при $x_2 = d_2^*$ (-).

3. $j_0 = 2; l_2 = -1$. Тогда уравнения для l_B : $5l_1 - 1 - l_3 + l_4 = 0, l_1 + 2 + 3l_3 = 0, 6l_1 + 1 + 2l_3 = 0$, откуда получим $l_1 = 1/16, l_3 = -11/16, l_4 = 0$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 20; \theta_1 = 16, \theta_3 = 16, \theta_4 = \infty$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_1 = 16$, т. е. $j_* = 1$.

5. Новый план $x = (4; -13; -8; 0)$ с $J_B = \{2, 3, 4\}, J_H = \{1\}$.

Итерация 3

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 - 2u_2 - u_3 = 7, -u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -11, u_1 = 0$.

Отсюда получаем $u_1 = 0, u_2 = -3, u_3 = -1$.

2. $\Delta_1 = -5 + 3 + 6 > 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (+).

Условия оптимальности выполняются — получен оптимальный план $x^0 = (4; -13; -8)$, $\Phi_{\max} = -23$.

Замечание 1.8. До начала решения «буферной» задачи можно избавиться от линейно зависимых строк $i \in I$ матрицы A и соответствующих столбцов $n+i, i \in I_\Phi$, задачи (1.66). Для этого по-

строим матрицу $(A_B^*)^{-1} A = \begin{pmatrix} x_{ij}, j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}$. Обозначим через I_L множество индексов нулевых строк полученной матрицы: $I_L = \{i \in I : x_{ij} = 0, j \in J\}$. Стока i матрицы $(A_B^*)^{-1} A$ равна $e'_i (A_B^*)^{-1} A = q'_{(i)} A = 0$, где $q'_{(i)} \neq 0$ — i -я строка матрицы $(A_B^*)^{-1}$. Отсюда следует, что строки $i \in I_L$ матрицы A линейно зависимы. Поскольку $q'_{(i)} a_{n+i} = q'_{(i)} e_i = x_{i,n+i} = 1$, то i -я строка матрицы A линейно выражается через остальные строки, т. е. i -е основное ограничение задачи (1.60)

несущественно. Из «буферной» задачи (1.66) удалим строки с номерами $i \in I_{\text{л}}$ и соответствующие столбцы a_{n+i} с фиктивными переменными. Полученную матрицу основных ограничений обозначим

через $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{ij}, & j \in J \cup \{n+i, i \in I_{\Phi} \setminus I_{\text{л}}\} \\ & i \in I \setminus I_{\text{л}} \end{pmatrix}$. Начнем решение «буферной»

задачи с базисного плана $(x^*, x_{n+i}^*, i \in \tilde{I} = I_{\Phi} \setminus I_{\text{л}})$ и базисной матрицы $\tilde{A}_B^* = (\tilde{a}_{ij}, j \in J_B^* \setminus \{n+i, i \in I_{\text{л}}\})$. Через конечное число итераций будет построен оптимальный базисный план или из задачи (1.66) будут удалены все фиктивные переменные и можно приступить ко второй фазе симплекс-метода с построенным базисным планом и соответствующей ему базисной матрицей \tilde{A}_B^* . Если $I_{\text{л}} = \emptyset$, то $\text{rank } A = m$.

Пример 1.13. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases} \\ 3 \leq x_1 \leq 4, \quad -13 \leq x_2 \leq 3, \\ -8 \leq x_3 \leq 3, \quad 0 \leq x_4 \leq 10. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Возьмем $\bar{x} = (4; -13; -8; 10)$. Тогда $\omega_1 = -10$, $\omega_2 = 10$, $\omega_3 = 0$. Задача первой фазы

$$\begin{aligned} -x_5 - x_6 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 21, \end{cases} \\ 3 \leq x_1 \leq 4, \quad -13 \leq x_2 \leq 3, \quad -8 \leq x_3 \leq 3, \\ 0 \leq x_4 \leq 10, \quad 0 \leq x_5 \leq 10, \quad 0 \leq x_6 \leq 10, \\ 0 \leq x_7 \leq 0. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Здесь x_5 , x_6 – искусственные переменные, x_7 – фиктивная переменная. Начальный базисный план для задачи (1.68): $x = (4; -13; -8; 10; 10; 10; 0)$, $J_B = \{5, 6, 7\}$, $J_H = \{1, 2, 3, 4\}$.

Итерация 1

1. $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$.

2. $\Delta_1 = -5 + 1 = -4 < 0$ при $x_1 = d_1^* (-)$, $\Delta_2 = -1 - 2 = -3 < 0$ при $x_2 = d_{*2}^* (+)$, $\Delta_3 = 1 + 3 = 4 > 0$ при $x_3 = d_{*3}^* (-)$, $\Delta_4 = -1 - 1 = -2 < 0$ при $x_4 = d_4^* (-)$.

3. $j_0 = 1; l_1 = -1, l_2 = l_3 = l_4 = 0$. Тогда компоненты l_B : $l_5 = -5, l_6 = 1, l_7 = 6$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_1 = 1; \theta_5 = 2, \theta_6 = 0, \theta_7 = 0$. Таким образом, $0^0 = \theta_6 = \theta_7 = 0$. Возьмем $j_* = 7$.

5. План остался прежним $x = (4; -13; -8; 10; 10; 10)$ с $J_B = \{1, 5, 6\}$, $J_H = \{2, 3, 4\}$.

Фиктивную переменную $x_7 = 0$ удаляем из задачи вместе с вектором a_7 .

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов: $5u_1 + u_2 + 6u_3 = 0, u_1 = 1, u_2 = -1$. Отсюда получим $u_3 = -2/3$.

2. $\Delta_2 = -1 - 2 - 2/3 < 0$ при $x_2 = d_{*2}$ (+), $\Delta_3 = 1 + 3 + 4/3 > 0$ при $x_3 = d_{*3}$ (-), $\Delta_4 = -1 - 1 < 0$ при $x_4 = d_4^*$ (-).

3. $j_0 = 3$. Тогда $l_3 = 1, l_2 = l_4 = 0$. Уравнения для l_B : $5l_1 - 1 - l_5 = 0, l_1 + 3 + l_6 = 0, 6l_1 + 2 = 0$. Отсюда будем иметь: $l_1 = -1/3, l_5 = -8/3, l_6 = -8/3$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_3 = 11; \theta_1 = 3, \theta_5 = \theta_6 = 15/4$. Таким образом, $0^0 = \theta_1 = 3$, следовательно, $j_* = 1$.

5. Новый базисный план $x = (3; -13; -5; 10; 2; 2)$ с $J_B = \{3, 5, 6\}$, $J_H = \{1, 2, 4\}$.

Итерация 3

1. Уравнения для потенциалов: $-u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0, u_1 = 1, u_2 = -1$. Отсюда следует $u_3 = 2$.

2. $\Delta_1 = -5 + 1 - 12 = -16 < 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (+), $\Delta_2 = -1 - 2 + 2 = -1 < 0$ при $x_2 = d_{*2}$ (+), $\Delta_4 = -1 - 1 = -2 < 0$ при $x_4 = d_4^*$ (-).

3. $j_0 = 4$. Тогда $l_4 = -1, l_1 = l_2 = 0$. Уравнения для l_B : $-l_3 - 1 - l_5 = 0, 3l_3 + 1 + l_6 = 0, 2l_3 = 0$. Отсюда будем иметь: $l_3 = 0, l_5 = -1, l_6 = -1$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_4 = 10; \theta_3 = \infty, \theta_5 = \theta_6 = 2$. Таким образом, $0^0 = \theta_5 = \theta_6 = 2$. Возьмем $j_* = 6$.

5. Новый базисный план $x = (3; -13; -5; 8; 0; 0)$ с $J_B = \{3, 4, 5\}, J_H = \{1, 2\}$.

Искусственную переменную $x_6 = 0$ удаляем из задачи вместе с вектором a_6 .

Итерация 4

1. Уравнения для потенциалов: $-u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0, u_1 - u_2 = 0, u_1 = 1$. Отсюда получим $u_2 = 1, u_3 = -1$.

2. $\Delta_1 = -5 - 1 + 6 = 0$ (+), $\Delta_2 = -1 + 2 - 1 = 0$ (+).

План первой фазы оптимальен.

Поскольку искусственные переменные нулевые, то переходим ко второй фазе. В базисе остался искусственный вектор a_5 . Решаем «буферную» задачу

$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases} \\ 3 \leq x_1 \leq 4, \quad -13 \leq x_2 \leq 3, \\ -8 \leq x_3 \leq 3, \quad 0 \leq x_4 \leq 10, \quad 0 \leq x_5 \leq 0. \end{aligned}$$

Начальный базисный план для этой задачи $x = (3; -13; -5; 8; 0)$ с $J_B = \{3, 4, 5\}$, $J_H = \{1, 2\}$.

Итерация 1

1. Уравнения для потенциалов: $-u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 8$, $u_1 - u_2 = 1$, $-u_1 = 0$. Отсюда получим $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 11/2$.

2. $\Delta_2 = -5 - (-1 + 33) < 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (+), $\Delta_2 = 7 - (2 - 11/2) > 0$ при $x_2 = d_{*2}$ (-).

3. $j_0 = 2$. Тогда $l_2 = 1$, $l_1 = 0$. Уравнения для J_B : $1 - l_3 + l_4 + l_5 = 0$, $-2 + 3l_3 - l_4 = 0$, $-1 + 2l_3 = 0$. Отсюда будем иметь: $l_3 = 1/2$, $l_4 = -1/2$, $l_5 = 0$.

4. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 16$; $\theta_3 = 16$, $\theta_4 = 16$, $\theta_5 = \infty$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 16$.

Возьмем $j_* = 4$.

5. Новый базисный план $x = (3; 3; 3; 0; 0)$ с $J_B = \{2, 3, 5\}$, $J_H = \{1, 4\}$.

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 - 2u_2 - u_3 = 7$, $-u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 8$, $u_1 = 0$. Отсюда получим $u_2 = -22$, $u_3 = 37$.

2. $\Delta_1 = -5 - (-22 + 6 \cdot 37) < 0$ при $x_1 = d_{*1}$ (+), $\Delta_4 = 1 - 22 < 0$ при $x_4 = d_{*4}$ (+).

План $x = (3; 3; 3; 0)$ оптимален.

После первой фазы $A_B = (a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Подсчитаем $A_B^{-1} A$:

$$A_B^{-1} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 1 & 0 \\ 8 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, третья строка основных ограничений задачи (1.67) является линейной комбинацией первых двух. Удалим это ограничение из задачи. Из базиса после первой фазы удалим вектор a_5 вместе с переменной $x_5 = 0$. Получим задачу

$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \end{cases} \\ 3 \leq x_1 \leq 4, \quad -13 \leq x_2 \leq 3, \\ -8 \leq x_3 \leq 3, \quad 0 \leq x_4 \leq 10. \end{aligned}$$

Для нее начальный базисный план $x = (3; -13; -5; 8)$ с $J_B = \{3, 4\}$, $J_H = \{1, 2\}$. Вторую фазу не приводим, оставляя ее реализацию для читателя в качестве упражнения.

1.10. Конечность симплекс-метода

Алгоритм решения задачи оптимизации называется *конечным*, если он за конечное число итераций строит оптимальный план.

Теорема 1.4. Для каждой невырожденной канонической задачи ЛП симплекс-метод конечен.

Доказательство. Напомним, что каноническая задача ЛП (1.8) называется невырожденной, если все ее базисные планы невырожденные. Покажем, что количество итераций конечно. В самом деле, для невырожденной задачи на каждой итерации целевая функция строго возрастает на величину $\theta^0 |\Delta_{j_0}| > 0$, следовательно, возврата к старому базисному плану быть не может. Количество базисных планов конечно. В самом деле, базисных матриц не больше C_n^m (C_n^m – число сочетаний из n элементов по m). А с одной и той же базисной матрицей может быть не больше $1 + C_{n-m}^1 + C_{n-m}^2 + \dots + C_{n-m}^{n-m}$ базисных планов, у которых меняются небазисные координаты, переходя с одной границы на другую. Следовательно, через конечноес число $k_0 < \infty$ итераций будет либо построен базисный план, для которого выполняется критерий оптимальности, если такой план существует, либо, согласно задаче первой фазы, указана несовместность ограничений задачи. ■

Если задача вырожденная, то в этом случае возможны итерации с $\theta^0 = 0$, в силу чего может произойти зацикливание, т. е. через некоторое число итераций происходит возврат к уже встречавшемуся базисному плану. Однако практика показывает, что случаи зацикливания очень редки, поскольку при решении задачи на ЭВМ неизбежны ошибки округления, которые эквивалентны малым изменениям параметров задачи.

чи, а эти изменения, как правило, вырожденную задачу делают невырожденной. Имеются специальные методы борьбы с зацикливанием, которые в данном пособии не приводятся.

1.11. Три свойства канонической задачи

Из алгоритма симплекс-метода следуют три важных свойства канонической задачи, которые в свое время сыграли большую роль при создании симплекс-метода, а теперь часто используются при его обосновании.

- 1) Каноническая задача ЛП имеет решение, если она имеет планы.
- 2) Если каноническая задача имеет планы ($X \neq \emptyset$), то среди них есть базисные.
- 3) Среди оптимальных планов канонической задачи есть базисные.

Доказательство второго и третьего свойств непосредственно следует из двух фаз симплекс-метода. Первая фаза строит базисный план задачи, если $X \neq \emptyset$. А вторая фаза строит оптимальный базисный план. Первое свойство следует из теоремы Вейерштрасса, поскольку множество планов X является замкнутым и ограниченным (компактным). ■

1.12. Задача произвольной формы

Выше был изложен симплекс-метод решения канонической задачи с фиксированными границами прямых ограничений всех переменных. Если исходная задача ЛП отлична от указанной канонической задачи только целевой функцией и основными ограничениями, то ее решение просто получается из решения канонической задачи. Опишем изменения, которые необходимо внести в описанную выше стандартную процедуру симплекс-метода в случае, когда среди границ прямых ограничений канонической задачи имеются искусственные.

Как указывалось в разд. 1.3, искусственные прямые ограничения задаются с помощью параметров M_j . Их начальные значения могут быть произвольными, например, являться числами, превосходящими модули всех параметров математической модели.

Рассмотрим первую фазу. После решения задачи первой фазы (1.64) с начальными значениями M_j возможны следующие ситуации: 1) $x_i^* \neq 0$ и все переменные с искусственными границами некритические (не лежат на границе); 2) $x_i^* \neq 0$ и среди переменных с искусственными границами есть критические (то есть лежат на границе).

венными границами имеются критические; 3) $x_i^* = 0$ и все переменные с искусственными границами некритические; 4) $x_i^* = 0$ и среди переменных с искусственными границами имеются критические.

В первой ситуации процесс решения останавливаем, поскольку исходная задача не имеет решения из-за противоречивости ее ограничений.

Во второй ситуации увеличиваем M_j (например, удваиваем) и решаем новую задачу. Через конечное число увеличений M_j приходим или к ситуации 1, или к 3, 4.

В третьей ситуации либо продолжим стандартную процедуру первой фазы симплекс-метода (удалим из основных ограничений линейно зависимые и искусственные переменные из множества базисных), либо перейдем к решению «буферной» задачи, либо ко второй фазе.

В четвертой ситуации увеличиваем соответствующие значения M_j и получаем предыдущую ситуацию.

Рассмотрим вторую фазу. Построив по базисному плану \bar{x} новый базисный план \bar{x} , проверим, нет ли среди его небазисных компонент критических с искусственными границами. Если таковых нет, то продолжим стандартную процедуру симплекс-метода. В противном случае увеличиваем соответствующие M_j и вновь строим \bar{x} . Через конечное число увеличений параметров M_j придем к предыдущей ситуации или получим такие значения переменных исходной задачи, которые: а) противоречат здравому смыслу или б) выходят за границы, в пределах которых адекватна рассматриваемая линейная модель. Процесс решения исходной задачи прекращаем из-за неограниченности ее целевой функции на множестве ее планов.

Пример 1.14. Рассмотрим следующую задачу:

$$\phi(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0.$$

Сведем ее к канонической форме

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \end{cases} \\ & 0 \leq x_1 \leq M_1, \quad -M_2 \leq x_2 \leq M_2, \\ & 0 \leq x_3 \leq 2 + 2M_1 + M_2, \quad 0 \leq x_4 \leq 1 + M_2. \end{aligned} \tag{1.69}$$

В качестве начального базисного плана возьмем $x^1 = (0; -1; 3; 0)$ с $J_B = \{2, 3\}$, $J_H = \{1, 4\}$.

Итерация 1

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 - u_2 = 1$, $u_1 = 0$. Отсюда получим: $u_1 = 0$, $u_2 = -1$.

2. Оценки: $\Delta_1 = 2 - (-1) = 3 > 0$ при $x_1 = d_{*1}$; $\Delta_4 = 0 - (-1) = 1 > 0$ при $x_4 = d_{*4}$.

Условия оптимальности не выполняются.

3. Возьмем $j_0 = 1$. Тогда $l_1 = 1$, $l_4 = 0$ и уравнения для J_B : $-2 + l_2 + l_3 = 0$, $1 - l_2 = 0$. Отсюда получим $l_2 = 1$, $l_3 = 1$.

4. Находим шаг: $\theta_{j_0} = \theta_1 = M_1$; $\theta_2 = M_2 + 1$, $\theta_3 = 2M_1 + M_2 - 1$. Таким образом, $\theta^0 = M_1$ и задача не имеет решения, поскольку целевая функция не ограничена сверху на множестве планов.

Рассмотрим эту же задачу, только на минимум. Тогда целевая функция примет вид $-\varphi(x) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \max$. Начальный базисный план возьмем тот же: $x^1 = (0; -1; 3; 0)$, $J_B = \{2, 3\}$, $J_H = \{1, 4\}$. Уравнения для потенциалов примут вид: $u_1 - u_2 = -1$, $u_1 = 0$. Отсюда получим $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. Оценки: $\Delta_1 = -2 - 1 = -3 < 0$ при $x_1 = d_{*1}$; $\Delta_4 = 0 - 1 = -1 < 0$ при $x_4 = d_{*4}$. Условия оптимальности выполняются – рассматриваемый план оптимальный. Для исходной задачи: $x^0 = (0; -1)$, $\varphi_{\min} = -1$.

§ 2. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Двойственным называется *метод* построения оптимальных планов экстремальных задач по результатам решения вспомогательной (двойственной) задачи.

Двойственный симплекс-метод решения канонической задачи с односторонними прямыми ограничениями – первый конечный метод нового типа для решения задач линейного программирования, основанный на глубокой теории двойственности, которая была создана Дж. фон Нейманом и Дж. Данцигом в результате анализа симплекс-метода. Его построил в 1954 году С. Лемке (аспирант Дж. Данцига), реализуя симплекс-метод для двойственной задачи. В данном параграфе изложим двойственный симплекс-метод решения канонической задачи с двухсторонними прямыми ограничениями, который является некоторым обобщением метода С. Лемке.

2.1. Двойственная каноническая задача

Двойственными задачами называются задачи ЛП, которые получаются не как модели физических задач, а по определенным правилам

строится из исходной (прямой) задачи. В силу этого их можно считать искусственными в отличие от прямых, которые представляют математические модели физических задач.

Построим двойственную задачу для канонической задачи

$$\varphi(x) = c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d^* \leq x \leq d^*, \quad (2.1)$$

которую впредь будем называть *прямой канонической задачей ЛП¹⁾*.

Пусть x^0 – оптимальный базисный план задачи (2.1), $A_B^0 = A(I, J_B^0)$ – базисная матрица, с которой выполняются соотношения оптимальности

$$\begin{aligned} \Delta_j^0 &\leq 0, \text{ если } x_j^0 = d_{*j} \quad (j \in J_H^{0-}), \\ \Delta_j^0 &\geq 0, \text{ если } x_j^0 = d_j^* \quad (j \in J_H^{0+}), \\ \Delta_j^0 &= 0, \text{ если } j \in J_B^0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\Delta_j^0 = c_j - u^{0'} a_j, \quad j \in J, \quad (2.3)$$

– оценки,

$$u^{0'} = c'_B (A_B^0)^{-1}$$

– вектор потенциалов.

Положим

$$\begin{aligned} v_j^0 &= -\Delta_j^0, \quad w_j^0 = 0, \quad j \in J_H^{0-}, \\ v_j^0 &= 0, \quad w_j^0 = \Delta_j^0, \quad j \in J_H^{0+}, \\ v_j^0 &= w_j^0 = 0, \quad j \in J_B^0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.2), (2.4) следует, что

$$v_j^0 \geq 0, \quad w_j^0 \geq 0, \quad j \in J. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.4) с учетом (2.2), (2.3), (2.5) можно записать в виде $u^{0'} a_j - v_j^0 + w_j^0 = c_j$, $v_j^0 \geq 0$, $w_j^0 \geq 0$, $j \in J$, или в векторно-матричной форме

$$A' u^0 - v^0 + w^0 = c, \quad v^0 \geq 0, \quad w^0 \geq 0. \quad (2.6)$$

На тройке векторов $\lambda^0 = (u^0, v^0, w^0)$ подсчитаем значение функции

$$\psi(\lambda) = \psi(y, v, w) = b'y - d'_* v + d^{**} w. \quad (2.7)$$

¹⁾ В связи со сказанным симплекс-метод, описанный в § 1, можно в случае необходимости называть *прямым симплекс-методом*.

Имеем

$$\begin{aligned}
 \psi(\lambda^0) &= b'u^0 - d_*'v^0 + d^{**}w^0 = c'_B(A_B^0)^{-1}b - \sum_{j \in J} d_{*j}v_j^0 + \sum_{j \in J} d_j^*w_j^0 = \\
 &= c'_B(A_B^0)^{-1}b + \sum_{j \in J_H^{0-}} x_j^0 \Delta_j^0 + \sum_{j \in J_H^{0+}} x_j^0 \Delta_j^0 = \\
 &= c'_B(A_B^0)^{-1}b + \sum_{j \in J_H} x_j^0 (c_j - u^{0'}a_j) = \\
 &= c'_B(A_B^0)^{-1}b + (c'_H - u^{0'}A_H)x_H^0 = c'_B(A_B^0)^{-1}b - c'_B(A_B^0)^{-1}A_Hx_H^0 + c'_Hx_H^0 = \\
 &= c'_B(A_B^0)^{-1}(b - A_Hx_H^0) + c'_Hx_H^0 = c'_Bx_B^0 + c'_Hx_H^0 = c'x^0 = \varphi(x^0),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\psi(\lambda^0) = \varphi(x^0). \quad (2.8)$$

Пусть x – произвольный план задачи (2.1), $\lambda = (y, v, w)$, $y \in \mathbf{R}^m$, $v, w \in \mathbf{R}^n$, – произвольная тройка векторов, удовлетворяющая соотношениям

$$A'y - v + w = c, \quad (2.9)$$

$$v \geq 0, w \geq 0. \quad (2.10)$$

На них значение функции (2.7) равно

$$\begin{aligned}
 \psi(\lambda) &= b'y - d_*'v + d^{**}w \geq \\
 &\geq y'Ax - x'v + x'w = x'(A'y - v + w) = c'x = \varphi(x),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\psi(\lambda) \geq \varphi(x) \quad (2.11)$$

и, в частности,

$$\psi(\lambda^0) \geq \varphi(x^0). \quad (2.12)$$

Сравнивая соотношение (2.6) с соотношениями (2.9), (2.10), неравенство (2.12) с равенством (2.8), заключаем, что $\lambda^0 = (u^0, v^0, w^0)$ является решением задачи ЛП

$$\begin{aligned}
 \psi(\lambda) &= \psi(y, v, w) = b'y - d_*'v + d^{**}w \rightarrow \min, \\
 A'y - v + w &= c, \\
 v &\geq 0, w \geq 0.
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Задача (2.13) называется *задачей, двойственной к канонической задаче* (2.1) (или просто *двойственной задачей ЛП*); переменные y_i , $i \in I$, v_j , w_j , $j \in J$, двойственной задачи (2.13) – *двойственными переменными*, ограничения (2.9) – *основными ограничениями*.

ми, ограничения (2.10) – *прямыми ограничениями* двойственной задачи (2.13).

Совокупность $\lambda = (y, v, w)$ двойственных переменных назовем *планом* задачи (2.13) (*двойственным планом*), если она удовлетворяет как прямым (2.10), так и основным (2.9) ограничениям. Множество двойственных планов обозначим через Λ . Двойственный план $\lambda^0 = (y^0, v^0, w^0)$ называется *оптимальным*, если на нем двойственная целевая функция достигает минимума:

$$\psi(\lambda^0) = \min \psi(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Существует весьма простое, легко запоминаемое (*мнемоническое*) *правило* построения двойственных задач.

Запишем прямую задачу (2.1) в следующем виде:

$$c'x \rightarrow \max, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} Ax = & b, & y \in \mathbf{R}^m \\ -x \leq & -d_*, & v \in \mathbf{R}^n \\ x \leq & d^*. & w \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (2.15)$$

Скалярно умножим правые части ограничений (2.15) на соответствующие векторы, стоящие за вертикальной чертой, и результаты сложим. В итоге получим целевую функцию задачи (2.13). Умножим те же векторы слева на матрицы, стоящие при x в левых частях ограничений (2.15), результаты сложим и приравняем к коэффициенту при x в целевой функции (2.14). В итоге получим основное ограничение (2.9) двойственной задачи.

Итак, каждому i -му основному ограничению прямой задачи соответствует двойственная переменная y_i , каждому j -му левому прямому ограничению прямой задачи соответствует двойственная переменная v_j , правому – w_j .

Упражнение 2.1. Показать, что для прямых задач, указанных в левой части табл. 2.1, двойственные задачи имеют вид, указанный в правой части табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ п/п	Прямая задача	Двойственная задача
1	$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad 0 \leq x \leq d^*$	$b'y + d^*w \rightarrow \min, \quad A'y + w \geq c, \quad w \geq 0$
2	$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \leq d^*$	$b'y + d^*w \rightarrow \min, \quad A'y + w = c, \quad w \geq 0$
3	$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq d_*$	$b'y - d_*v \rightarrow \min, \quad A'y - v = c, \quad v \geq 0$
4	$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b$	$b'y \rightarrow \min, \quad A'y = c$

5	$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0$	$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c$
6	$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0$	$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c, y \geq 0$
7	$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, d^* \leq x \leq d^*$	$b'y - d^*_v + d^{**}w \rightarrow \min, A'y - v + w = c,$ $y \geq 0, v \geq 0, w \geq 0,$ или $b'y - d^*_v + d^{**}w + d_{CB}^{**}w_{CB} \rightarrow \min,$ $A'y - v + w = c,$ $y + w_{CB} \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, w_{CB} \geq 0$

Замечание 2.1. Существуют и другие способы построения двойственных задач, в частности с помощью функции Лагранжа, которая для задачи (2.1) имеет вид $F(x, y) = c'x + y'(b - Ax)$, $d^* \leq x \leq d^*$, $y \in \mathbf{R}^m$. Введем функцию $\bar{\Psi}(y) = \sup_{d^* \leq x \leq d^*} F(x, y)$. Подробный подсчет дает:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}(y) &= b'y + \sup_{d^* \leq x \leq d^*} x'(c - A'y) = b'y + \sup_{d^* \leq x \leq d^*} \sum_{j=1}^n x_j(c_j - a'_j y) = \\
 &= b'y + \sum_{j=1}^n \sup_{d^*_j \leq x \leq d^*_j} x_j(c_j - a'_j y) = b'y + \sum_{j=1}^n \begin{cases} d^*_j(c_j - a'_j y), & c_j - a'_j y < 0, \\ d^*(c_j - a'_j y), & c_j - a'_j y > 0, \\ 0, & c_j - a'_j y = 0, \end{cases} = \\
 &= b'y + \sum_{j=1}^n \begin{cases} -d^*_j v_j, & c_j - a'_j y + v_j = 0, v_j > 0, \\ d^*_j w_j, & c_j - a'_j y - w_j = 0, w_j > 0, \\ 0, & c_j - a'_j y = 0, \end{cases} = \\
 &= b'y - d^*_v + d^{**}w, \quad A'y - v + w = c, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\bar{\Psi}(y) = \psi(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda = \{(y, v, w) : A'y - v + w = c, y \in \mathbf{R}^m, v \geq 0, w \geq 0\}.$$

Более детально введение двойственных задач с помощью функции Лагранжа будет приведено в разд. 8.1.

2.2. Базисные двойственный план и псевдоплан

Базисные двойственный план и псевдоплан – основные понятия двойственного симплекс-метода.

Рассмотрим каноническую задачу (2.1) в предположении, что $\text{rank } A = m$.

В двойственной задаче (2.13) целевая функция минимизируется по трем векторным компонентам y, v, w двойственного плана $\lambda = (y, v, w)$. Введем n -вектор $\delta_y = c - A'y$ с компонентами $\delta_j, j \in J$, который называется *копланом*. При фиксированном $y \in \mathbf{R}^m$ минимум по v, w достигается на двойственном плане $\lambda_y = (y, v_y, w_y)$ с компонентами

$$\begin{aligned} v_{yj} &= 0, & w_{yj} &= \delta_j, \text{ если } \delta_j \geq 0, \\ v_{yj} &= -\delta_j, & w_{yj} &= 0, \text{ если } \delta_j < 0, j \in J. \end{aligned}$$

Действительно, пусть $\lambda = (y, v, w) \in \Lambda$ – произвольный двойственный план, $\lambda_y = (y, v_y, w_y)$. Обоим этим планам соответствует один и тот же коплан δ_y . Следовательно, $A'y - v + w = c$, $A'y - v_y + w_y = c$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \psi(y, v_y, w_y) &= b'y - d'_*v_y + d^{**}w_y = \\ &= b'y + \sum_{\substack{j \in J \\ \delta_j < 0}} d_*\delta_j + \sum_{\substack{j \in J \\ \delta_j \geq 0}} d_j^*\delta_j = b'y + \sum_{\substack{j \in J \\ \delta_j < 0}} d_j(w_j - v_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ \delta_j \geq 0}} d_j^*(w_j - v_j) \leq \\ &\leq b'y + \sum_{\substack{j \in J \\ \delta_j < 0}} (d_j^*w_j - d_*v_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ \delta_j \geq 0}} (d_j^*w_j - d_j^*v_j) = b'y - d'_*v + d^{**}w = \psi(y, v, w). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi(y, v_y, w_y) = \min_{\substack{v \geq 0, w \geq 0, \\ (y, v, w) \in \Lambda}} \psi(y, v, w).$$

Двойственный план $\lambda_y = (y, v_y, w_y)$ назовем *улучшенным двойственным планом*, соответствующим вектору $y \in \mathbf{R}^m$.

Определение 2.1. Улучшенный двойственный план $\lambda_u = (u, v_u, w_u)$, соответствующий вектору потенциалов u ($u' = c'_B A_B^{-1}$), называется *базисным двойственным планом* с базисной матрицей A_B .

Базисный двойственный план однозначно строится по базисной матрице. Это позволяет ранжировать базисные матрицы. Будем говорить, что A_B лучше \bar{A}_B , если $\psi(\lambda_u) < \psi(\lambda_{\bar{u}})$, где $\lambda_u, \lambda_{\bar{u}}$ построены по матрицам A_B, \bar{A}_B соответственно.

Базисную матрицу A_B^0 назовем *оптимальной*, если для соответствующего базисного двойственного плана λ_u^0 имеем $\psi(\lambda_u^0) = \min_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda)$.

Это понятие оптимальной базисной матрицы эквивалентно аналогичному понятию, введенному в разд. 1.6 (следует из теории двойственности – см. следующий раздел).

Определение 2.2. Коплан $\delta_u = c - A'u$ называется *базисным копланом* с базисной матрицей A_B .

Базисный коплан обладает свойством

$$\delta'_{uB} = \delta'_u(J_B) = c'_B - u'A_B = c'_B - c'_B A_B^{-1} A_B = 0.$$

Определение 2.3. Базисный двойственный план λ_u назовем *невырожденным*, если $\delta_{uj} \neq 0, j \in J_H$. Соответствующую базисную матрицу A_B в этом случае назовем *регулярной*.

Каноническая задача ЛП (2.1) называется *двойственно невырожденной* (а двойственная задача (2.13) *невырожденной*), если все ее базисные двойственные планы невырожденные. Каноническую задачу (2.1) в смысле определения 1.5 будем называть просто *невырожденной*.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу примера 1.1. В примере 1.3 приведена каноническая форма (1.10) этой задачи. Двойственная для нее задача будет иметь вид:

$$\psi(y, v, w) = 26y_1 + 94y_2 + 57y_3 - 5v_1 - 3v_2 + 20w_1 + 12w_2 + 18w_3 + 64w_4 + 40w_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 - v_1 & + w_1 \\ y_1 + 5y_2 + 4y_3 - v_2 & + w_2 \\ y_1 & - v_3 & + w_3 \\ y_2 & - v_4 & + w_4 \\ y_3 & - v_5 & + w_5 \end{cases} = \begin{cases} 2, \\ 6, \\ 0, \\ 0, \\ 0, \end{cases}$$

$$v_j \geq 0, w_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Отсюда для любого $y \in \mathbb{R}^3$ коплан имеет вид:

$$\delta' = c' - y'A = (2 - y_1 - 3y_2 - y_3; 6 - y_1 - 5y_2 - 4y_3; -y_1; -y_2; -y_3).$$

Заметим, что в последних трех основных ограничениях двойственной задачи можно убрать переменные v_3, v_4, v_5 , заменив знаки равенств $=$ на знаки неравенств \geq .

В примере 1.4 вектор $x^1 = (5; 3; 18; 64; 40)$ является базисным прямым планом с любой из указанных там базисных матриц A_B^i , $i = \overline{1, 10}$, причем во всех случаях вырожденным.

Рассмотрим каждую из этих базисных матриц и подсчитаем двойственные базисные планы и значение двойственной целевой функции на них.

1) $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$. Получаем: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $\delta_{uH} = (\delta_1, \delta_2) = (2; 6) \neq 0$; $v_u = 0$; $w_u = (2; 6; 0; 0; 0)$, $\psi(\lambda_u^1) = 112$.

2) $A_B^2 = (a_2, a_4, a_5)$. Система уравнений для потенциалов: $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Тогда $u = (6; 0; 0)$, $\delta_{uH} = (\delta_1, \delta_3) = (-4; -6) \neq 0$; $v_u = (4; 0; 6; 0; 0)$, $w_u = 0$, $\psi(\lambda_u^2) = 136$.

3) $A_B^3 = (a_1, a_4, a_5)$. Тогда $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, откуда получаем $u = (2; 0; 0)$, $\delta_{uH} = (\delta_2, \delta_3) = (4; -2) \neq 0$; $v_u = (0; 0; 2; 0; 0)$, $w_u = (0; 4; 0; 0; 0)$, $\psi(\lambda_u^3) = 100$.

4) $A_B^4 = (a_2, a_3, a_5)$. Тогда $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, откуда следует $u = (0; 6/5; 0)$, $\delta_{uH} = (\delta_1, \delta_4) = (-8/5; -6/5) \neq 0$; $v_u = (8/5; 0; 0; 6/5; 0)$, $w_u = 0$; $\psi(\lambda_u^4) = 104 \frac{4}{5}$.

5) $A_B^5 = (a_2, a_3, a_4)$. Тогда $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, откуда $u = (0; 0; 3/2)$, $\delta_{uH} = (\delta_1, \delta_5) = (1/2; -3/2) \neq 0$; $v_u = (0; 0; 0; 0; 3/2)$, $w_u = (1/2; 0; 0; 0; 0)$, $\psi(\lambda_u^5) = 95 \frac{1}{2}$.

6) $A_B^6 = (a_1, a_3, a_5)$. Тогда $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, откуда $u = (0; 2/3; 0)$, $\delta_{uH} = (\delta_2, \delta_4) = (8/3; -2/3) \neq 0$; $v_u = (0; 0; 0; 2/3; 0)$, $w_u = (0; 8/3; 0; 0; 0)$, $\psi(\lambda_u^6) = -94 \frac{2}{3}$.

7) $A_B^7 = (a_1, a_3, a_4)$. Тогда $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, откуда имеем $u = (0; 0; 2)$, $\delta_{uH} = (\delta_2, \delta_5) = (-2; -2) \neq 0$; $v_u = (0; 2; 0; 0; 2)$, $w_u = 0$, $\psi(\lambda_u^7) = 108$.

8) $A_B^8 = (a_1, a_2, a_5)$. Тогда $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_3 = 0$, откуда будем иметь $u = (-4; 2; 0)$, $\delta_{uH} = (\delta_3, \delta_4) = (4; -2) \neq 0$; $v_u = (0; 0; 0; 2; 0)$, $w_u = (0; 0; 4; 0; 0)$, $\psi(\lambda_u^8) = 156$.

9) $A_B^9 = (a_1, a_2, a_4)$. Тогда $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_2 = 0$, откуда следует $u = (2/3; 0; 4/3)$, $\delta_{uH} = (\delta_3, \delta_5) = (-2/3; -4/3) \neq 0$; $v_u = (0; 0; 2/3; 0; 4/3)$, $w_u = 0$, $\psi(\lambda_u^9) = 93 \frac{1}{3}$.

10) $A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$. Тогда $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_1 = 0$, откуда $u = (0; 2/7; 8/7)$, $\delta_{uH} = (\delta_4, \delta_5) = (-2/7; -8/7) \neq 0$; $v_u = (0; 0; 0; 2/7; 8/7)$, $w_u = 0$, $\psi(\lambda_u^{10}) = 92$.

Во всех десяти случаях базисные двойственные планы $\lambda_u^i = (u^i, v_{u^i}, w_{u^i})$ невырожденные: $\delta_{uH} \neq 0$.

Поскольку рассмотрены все базисные двойственные планы и они оказались невырожденными, то задача (1.10) двойственно невырожденная, а все базисные матрицы регулярные. Матрица $A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$ является оптимальной, ибо на плане λ_u^{10} значение двойственной целевой функции наименьшее: $\psi(\lambda_u^{10}) = 92$.

Заменим в задаче (1.10) вектор $c = (2; 6; 0; 0; 0)$ на вектор $\bar{c} = (6; 10; 0; 0; 0)$. Для базисной матрицы $A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$ подсчитаем вектор потенциалов из уравнений $u_1 + 3u_2 + u_3 = 6$, $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 10$, $u_1 = 0$: $\bar{u} = (0; 2; 0)$. Тогда $\delta_{\bar{u}} = (0; 0; 0; -2; 0)$. Поскольку $\delta_{uS} = 0$, то двойственный базисный план $\lambda_{\bar{u}} = (\bar{u}, v_{\bar{u}}, w_{\bar{u}})$, где $v_{\bar{u}} = (0; 0; 0; 2; 0)$, $w_{\bar{u}} = 0$, вырожденный.

С помощью базисной матрицы введем новое понятие, которое связано с прямой задачей.

Вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *псевдопланом*, если он удовлетворяет основным ограничениям прямой задачи $A\boldsymbol{x} = b$.

Определение 2.4. Псевдоплан \boldsymbol{x}_u с компонентами $\boldsymbol{x}_{uB} = \boldsymbol{x}_u(J_B)$, $\boldsymbol{x}_{uH} = \boldsymbol{x}_u(J_H)$, где

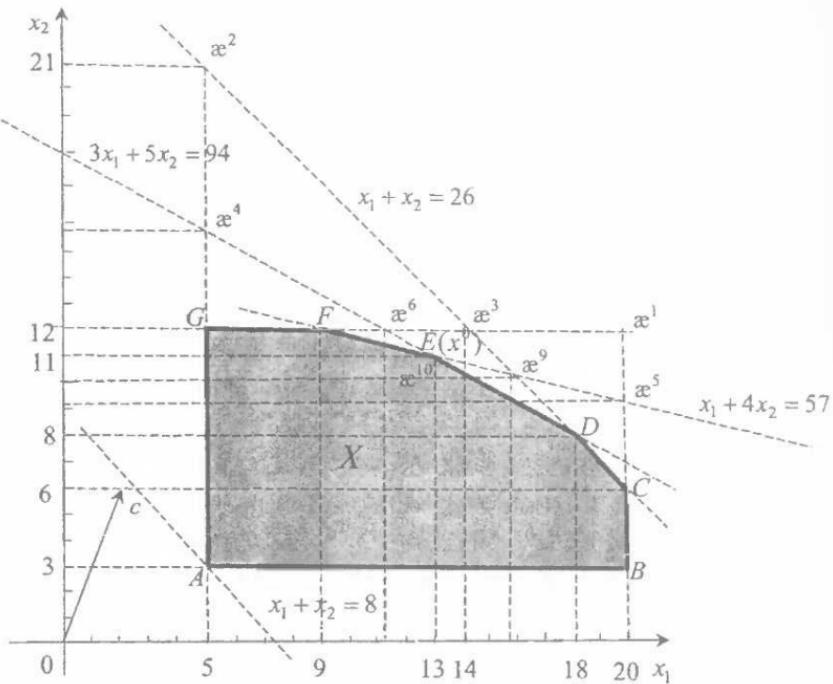
$$\boldsymbol{x}_{uj} = \begin{cases} d_j^*, & \text{если } \delta_{uj} > 0, \\ d_{*j}, & \text{если } \delta_{uj} < 0, \\ d_j^* \vee d_{*j}, & \text{если } \delta_{uj} = 0, j \in J_H; \end{cases} \quad \boldsymbol{x}_{uB} = A_B^{-1}(b - A_H \boldsymbol{x}_H),$$

называется *базисным псевдопланом* с базисной матрицей A_B .

Заметим, что для регулярных базисных матриц базисный псевдоплан единственный.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу (1.10). В примере 2.1 с различными базисными матрицами A_B^i , $i = 1, 10$, подсчитаны базисные копланы. Используем их для подсчета соответствующих базисных псевдопланов и на рис. 2.1 укажем, каким точкам они соответствуют.

1. $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$: $\boldsymbol{x}_H^1 = (\boldsymbol{x}_1^1, \boldsymbol{x}_2^1) = (20; 12)$, $\boldsymbol{x}_B^1 = (\boldsymbol{x}_3^1, \boldsymbol{x}_4^1, \boldsymbol{x}_5^1) = (-6; -26; -11)$ (точка \boldsymbol{x}^1).



Puc. 2.1

2. $A_B^2 = (a_2, a_4, a_5)$: $\bar{x}_H^2 = (\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) = (5; 0)$, $\bar{x}_B^2 = (\bar{x}_2^2, \bar{x}_4^2, \bar{x}_5^2) = (21; -16; -32)$ (точка \bar{x}^2).

3. $A_B^3 = (a_1, a_4, a_5)$: $\bar{x}_H^3 = (\bar{x}_2^3, \bar{x}_3^3) = (12; 0)$, $\bar{x}_B^3 = (\bar{x}_1^3, \bar{x}_4^3, \bar{x}_5^3) = (14; -8; -5)$ (точка \bar{x}^3).

4. $A_B^4 = (a_2, a_3, a_5)$: $\bar{x}_H^4 = (\bar{x}_1^4, \bar{x}_4^4) = (5; 0)$, $\bar{x}_B^4 = (\bar{x}_2^4, \bar{x}_3^4, \bar{x}_5^4) = \left(15\frac{4}{5}; 5\frac{1}{5}; -11\frac{1}{5}\right)$ (точка \bar{x}^4).

5. $A_B^5 = (a_2, a_3, a_4)$: $\bar{x}_H^5 = (\bar{x}_1^5, \bar{x}_4^5) = (20; 0)$, $\bar{x}_B^5 = (\bar{x}_2^5, \bar{x}_3^5, \bar{x}_4^5) = \left(9\frac{1}{4}; -3\frac{1}{4}; -12\frac{1}{4}\right)$ (точка \bar{x}^5).

6. $A_B^6 = (a_1, a_3, a_5)$: $\bar{x}_H^6 = (\bar{x}_2^6, \bar{x}_4^6) = (12; 0)$, $\bar{x}_B^6 = (\bar{x}_1^6, \bar{x}_3^6, \bar{x}_5^6) = \left(11\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$ (точка \bar{x}^6).

$$7. A_5^7 = (a_1, a_3, a_4) : \mathbf{x}_H^7 = (\mathbf{x}_2^7, \mathbf{x}_3^7) = (3; 0), \mathbf{x}_5^7 = (\mathbf{x}_1^7, \mathbf{x}_3^7, \mathbf{x}_4^7) = (45; -22; -56)$$

(точка $\mathbf{x}^7 = (45; 3)$ находится за пределами рисунка. Эта точка получается как пересечение прямых $x_1 + 4x_2 = 57$ и $x_2 = 3$).

$$8. A_5^8 = (a_1, a_2, a_5) : \mathbf{x}_H^8 = (\mathbf{x}_3^8, \mathbf{x}_4^8) = (18; 0), \mathbf{x}_5^8 = (\mathbf{x}_1^8, \mathbf{x}_2^8, \mathbf{x}_5^8) = (-27; 35; -51)$$

(точка $\mathbf{x}^8 = (-27; 35)$ находится за пределами рисунка. Эта точка получается как пересечение прямой $x_1 + x_2 = 8$, проходящей через точку A и параллельной прямой $x_1 + x_2 = 26$, и прямой $3x_1 + 5x_2 = 94$).

$$9. A_5^9 = (a_1, a_2, a_4) : \mathbf{x}_H^9 = (\mathbf{x}_3^9, \mathbf{x}_5^9) = (0; 0), \mathbf{x}_5^9 = (\mathbf{x}_1^9, \mathbf{x}_2^9, \mathbf{x}_4^9) = \left(15\frac{2}{3}; 10\frac{1}{3}; -4\frac{2}{3}\right) \text{ (точка } \mathbf{x}^9\text{)}.$$

$$10. A_5^{10} = (a_1, a_2, a_3) : \mathbf{x}_H^{10} = (\mathbf{x}_4^{10}, \mathbf{x}_5^{10}) = (0; 0), \mathbf{x}_5^{10} = (\mathbf{x}_1^{10}, \mathbf{x}_2^{10}, \mathbf{x}_3^{10}) = (13; 11; 2) \\ \text{(точка } \mathbf{x}^{10} = x^0\text{).}$$

Поскольку задача невырожденная, то всем базисным матрицам соответствует по одному базисному псевдоплану.

Как и в примере 2.1, заменим вектор $c = (2; 6; 0; 0; 0)$ на вектор $\bar{c} = (6; 10; 0; 0; 0)$ и возьмем базисную матрицу $A_5^{10} = (a_1, a_2, a_3)$. Получим вырожденный двойственный план. Поскольку $\delta_{45} = 0$, то \mathbf{x}_5 можно взять равным либо 0, либо 40. Поэтому базисный псевдоплан не единственный. В частности, если взять $\mathbf{x}_H = (\mathbf{x}_4 = 0; \mathbf{x}_5 = 0)$, то $\mathbf{x}_5 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (13; 11; 2)$. Если же взять $\mathbf{x}_H = (\mathbf{x}_4 = 0; \mathbf{x}_5 = 40)$, то $\mathbf{x}_5 = \left(41\frac{4}{7}; -6\frac{1}{7}; -9\frac{3}{7}\right)$.

2.3. Теория двойственности

Теория двойственности – раздел ЛП, в котором исследуются связи между прямой и двойственной задачами.

Теория двойственности играет важную роль при решении и анализа задач ЛП.

В данном разделе приводятся некоторые факты и основные утверждения теории двойственности для канонической задачи ЛП с двухсторонними прямыми ограничениями при фиксированных значениях всех ее параметров. Некоторые из этих утверждений отличаются от аналогичных для других задач ЛП.

1. Прямая и двойственная задачи формируются с помощью одних и тех же параметров c, A, b, d_s, d^* .

2. Прямая задача содержит m основных ограничений и n переменных; двойственная задача содержит n основных ограничений и m

переменных y_i , $i = \overline{1, m}$, – компонент вектора y , определяющего улучшенный двойственный план.

3. Задача, двойственная к двойственной задаче, эквивалентна прямой задаче, т. е. эти задачи взаимодвойственны (утверждение проверяется непосредственным счетом).

4. Множество планов X прямой задачи может оказаться пустым, множество двойственных планов Λ всегда не пусто. В самом деле, для построения двойственного плана $\lambda = (y, v, w)$ достаточно взять любой вектор $y \in \mathbb{R}^m$, подсчитать коплан $\delta = c - A'y$ и подобрать такие неотрицательные числа v_j, w_j , $j \in J$, чтобы выполнялись равенства $\delta_j = w_j - v_j$, $j \in J$. Последнее легко сделать, например, следующим образом. Берем произвольное $v_j \geq |\delta_j|$ ($w_j \geq |\delta_j|$) и подсчитываем $w_j = \delta_j + v_j \geq 0$ ($v_j = w_j - \delta_j \geq 0$).

5. Прямая задача может не иметь решения только из-за пустоты множества планов ($X = \emptyset$). Двойственная задача может не иметь решения только из-за неограниченности снизу двойственной целевой функции ($\inf_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda) = -\infty$), т. е. если существует такая последовательность двойственных планов $\{\lambda^{(k)}\} \in \Lambda$, что $\psi(\lambda^{(k)}) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

6. Для любых элементов $x \in X, \lambda \in \Lambda$ выполняется неравенство $\varphi(x) \leq \psi(\lambda)$.

Неравенство доказано в разд. 2.1 (см. (2.11)).

7. На базисных двойственном плане λ_u и псевдоплане α_u , соответствующих одной и той же базисной матрице A_B , выполняется равенство

$$\psi(\lambda_u) = \varphi(\alpha_u). \quad (2.16)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_u) &= b'u - d'_*v_u + d''w_u = c'_B A_B^{-1}b + \sum_{j \in J_H^-} d_{*j} \delta_{uj} + \sum_{j \in J_H^+} d'_j \delta_{uj} = \\ &= c'_B A_B^{-1}b + \sum_{j \in J_H^-} \alpha_{uj} (c_j - u'a_j) = c'_B A_B^{-1}b + c'_H \alpha_{uH} - c'_B A_B^{-1} A_H \alpha_{uH} = \\ &= c'_B A_B^{-1}(b - A_H \alpha_{uH}) + c'_H \alpha_{uH} = c'_B \alpha_{uB} + c'_H \alpha_{uH} = c' \alpha_u = \varphi(\alpha_u). \end{aligned}$$

8. **Теорема существования.** Для существования решений прямой и двойственной задач необходимо и достаточно, чтобы $X \neq \emptyset$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность следует из построения двойственной задачи (разд. 2.1). ■

9. Теорема единственности. Для существования решения x^0 прямой задачи (2.1) необходимо и достаточно существования решения λ^0 двойственной задачи, при этом выполняется равенство

$$\phi(x^0) = \psi(\lambda^0). \quad (2.17)$$

Доказательство следует из построения двойственной задачи (разд. 2.1) и взаимной единственности задач.

10. Критерий несовместности ограничений. Для несовместности ограничений прямой задачи необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных планов $\{\lambda^{(k)}\} \in \Lambda$ такая, что двойственная целевая функция не ограничена снизу на этой последовательности:

$$\psi(\lambda^{(k)}) \rightarrow -\infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Доказательство. Достаточность. От противного, пусть $X \neq \emptyset$. Тогда выполняется неравенство (2.11), в частности,

$$\phi(x) \leq \psi(\lambda^{(k)}) \quad \forall x \in X \text{ и } \forall k,$$

что невозможно в силу условия (2.18).

Необходимость. Пусть $X = \emptyset$, но не существует $\{\lambda^{(k)}\} \in \Lambda$, что $\psi(\lambda^{(k)}) \rightarrow -\infty$, т. е. существует число K , что $\psi(\lambda) \geq K \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Это означает, что двойственная задача имеет решение λ^0 . Тогда согласно теореме единственности существует и решение x^0 прямой задачи, что противоречит несовместности ограничений прямой задачи. ■

11. Прямая задача не имеет решения из-за несовместности ограничений тогда и только тогда, когда двойственная задача не имеет решения из-за неограниченности снизу двойственной целевой функции.

Утверждение следует из критерия несовместности ограничений.

12. Достаточное условие оптимальности. Если на каких-то планах $x^* \in X, \lambda^* \in \Lambda$ выполняется равенство

$$\phi(x^*) = \psi(\lambda^*), \quad (2.19)$$

то x^*, λ^* – оптимальные планы соответственно прямой и двойственной задач.

Доказательство. Поскольку выполняется неравенство (2.11), то оно, в частности, выполняется и для λ^* , т. е.

$$\phi(x) \leq \psi(\lambda^*) \quad \forall x \in X. \quad (2.20)$$

Из сравнения соотношений (2.19) и (2.20) следует, что x^* – оптимальный план прямой задачи.

Аналогично получаем для λ^* . ■

13. Условия дополняющей нежесткости. Рассмотрим каноническую задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{\text{CB}} = b, d_* \leq x \leq d^*, 0 \leq x_{\text{CB}} \leq d_{\text{CB}}^*, \quad (2.21)$$

полученную из нормальной задачи

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, d_* \leq x \leq d^*,$$

и двойственную к ней

$$\begin{aligned} b'y - d'_*v + d^{**}w &\rightarrow \min, \\ A'y - v + w &= c, v \geq 0, w \geq 0. \end{aligned}$$

На оптимальных планах (x^0, x_{CB}^0) и $\lambda^0 = (y^0, v^0, w^0)$ этих задач выполняются соотношения

$$y_i^0(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^0) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.23)$$

$$v_j^0(x_j^0 - d_{*j}) = 0, \quad w_j^0(d_j^* - x_j^0) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.24)$$

другими словами,

$$y_i^{0'}x_{\text{CB}, i}^0 = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad v_j^{0'}x_{\text{CB}, j}^0 = 0, \quad w_j^{0'}\bar{x}_{\text{CB}, j}^0 = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.24)$$

Доказательство. Ограничения задачи (2.21) на оптимальном плане можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{array}{l} Ax^0 + x_{\text{CB}}^0 = b, \\ -x^0 + \underline{x}_{\text{CB}}^0 = -d_*, \\ x^0 + \bar{x}_{\text{CB}}^0 = d^*. \end{array} \left| \begin{array}{l} y^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

причем $x_{\text{CB}}^0 \geq 0$, $\underline{x}_{\text{CB}}^0 \geq 0$, $\bar{x}_{\text{CB}}^0 \geq 0$. Умножим скалярно левые и правые части равенств (2.25) на соответствующие векторы оптимальных двойственных переменных, стоящие справа от вертикальной черты:

$$\begin{aligned} y^{0'}Ax^0 + y^{0'}x_{\text{CB}}^0 &= b'y^0, \\ -v^{0'}x^0 + v^{0'}\underline{x}_{\text{CB}}^0 &= -d'_*v^0, \\ w^{0'}x^0 + w^{0'}\bar{x}_{\text{CB}}^0 &= d^{**}w^0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Складывая равенства (2.26) почленно, получим

$$\begin{aligned} y^{0'} \underline{x}_{\text{CB}}^0 + v^{0'} \underline{x}_{\text{CB}}^0 + w^{0'} \bar{x}_{\text{CB}}^0 &= (b'y^0 - d_*'v^0 + d''w^0) - (y^{0'}A - v^{0'} + w^{0'})x^0 = \\ &= \psi(\lambda^0) - \phi(x^0) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Поскольку $y^0 \geq 0, v^0 \geq 0, w^0 \geq 0, x_{\text{CB}}^0 \geq 0, \underline{x}_{\text{CB}}^0 \geq 0, \bar{x}_{\text{CB}}^0 \geq 0$, то из (2.27) следуют равенства (2.24), из которых с учетом (2.25) получим соотношения (2.23), (2.24). ■

14. Двойственный план $\lambda = (u, v, w)$ с $u' = c'_B A_B^{-1}$ назовем *двойственным планом, соответствующим невырожденной* ($m \times m$)-*матрице* A_B . Коплан, построенный по этому двойственному плану, обладает тем же свойством, что и базисный коплан, т. е. $\delta'_B = c'_B - u'A_B = 0$.

Псевдоплан α с компонентами α_B, α_H назовем *псевдопланом, соответствующим неособой* ($m \times m$)-*матрице* A_B , если $\alpha_j = d_{*j} \vee d_j^*$, $j \in J_H$, $\alpha_B = A_B^{-1}(b - A_H \alpha_H)$.

При определении базисного двойственного плана можно брать любую неособую ($m \times m$)-матрицу A_B . При определении же прямого базисного плана можно использовать только такие неособые матрицы A_B , что среди псевдопланов, соответствующих этой матрице, есть прямые планы.

Пример 2.3. Рассмотрим задачу (1.10) при верхних границах свободных переменных $d_3^* = 19, d_4^* = 65, d_5^* = 41$. В примере 1.4 приведены все невырожденные подматрицы $A_B^i, i = \overline{1, 10}$, матрицы A . По каждой из них можно построить базисный двойственный план (см. пример 2.1). В то же время прямой базисный план можно построить только с матрицами $A_B^i, i = 1, 2, 7, 8, 10$ (см. пример 1.4). С матрицами $A_B^i, i = 3, \dots, 6, 9$ это сделать нельзя. Возьмем, например, $A_B^3 = (a_1, a_4, a_5)$ и построим все псевдопланы, соответствующие этой базисной матрице. Получим: $\alpha^1 = (23; 3; 0; 10; 22), \alpha^2 = (4; 3; 19; 67; 41), \alpha^3 = (-5; 12; 19; 49; 14), \alpha^4 = (14; 12; 0; -8; -5)$. Как видим, среди них нет ни одного прямого плана. Аналогично получим для остальных указанных подматриц.

15. Две матрицы A_B^1, A_B^2 называются *эквивалентными*, если построенные по ним векторы потенциалов совпадают.

16. Пусть x^0 – оптимальный план прямой задачи, x – базисный план с базисной матрицей A_B , α_u, λ_u – соответствующие базисные

псевдоплан и двойственный план. Число $\beta(x, A_B) = c' \mathbf{x}_u - c' x$ называется *оценкой субоптимальности плана x*.

Справедливо неравенство

$$c' x^0 - c' x \leq \beta(x, A_B). \quad (2.28)$$

В самом деле, неравенство (2.28) следует из цепочки неравенств, доказанных выше:

$$c' x^0 - c' x \leq \psi(\lambda_u) - c' x = c' \mathbf{x}_u - c' x = \beta(x, A_B).$$

Согласно (2.28) качество базисного плана с точки зрения целевой функции можно оценить до решения задачи.

17. Пусть x – базисный план с базисной матрицей A_B , λ_u – соответствующий базисный двойственный план. Назовем число $\mu(x) = c' x^0 - c' x$ *мерой неоптимальности плана x*, число $\mu(A_B) = \psi(\lambda_u) - \psi(\lambda^0)$ – *мерой неоптимальности базисной матрицы A_B* .

Оценка субоптимальности допускает разложение

$$\beta(x, A_B) = \mu(x) + \mu(A_B).$$

В самом деле, в силу $\psi(\lambda^0) = \phi(x^0)$ получим

$$\beta(x, A_B) = c' \mathbf{x}_u - c' x = (\psi(\lambda_u) - \psi(\lambda^0)) + (c' x^0 - c' x) = \mu(A_B) + \mu(x).$$

18. На итерациях симплекс-метода уменьшается мера неоптимальности плана, но мера неоптимальности базисной матрицы может даже увеличиваться (см. пример 2.4). Как будет показано в разд. 2.5, на итерациях двойственного симплекс-метода уменьшается мера неоптимальности базисной матрицы.

19. План x^ε ($\varepsilon \geq 0$) называется *ε -оптимальным (субоптимальным)*, если $c' x^0 - c' x^\varepsilon \leq \varepsilon$.

При любом $\varepsilon \geq 0$ для ε -оптимальности базисного плана x с базисной матрицей A_B достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\beta(x, A_B) \leq \varepsilon$.

В самом деле, пусть x^0 – оптимальный план, u – вектор потенциалов, подсчитанный по базисной матрице A_B . Оценим $c' x^0 - c' x$:

$$c' x^0 - c' x \leq \psi(\lambda_u) - c' x = c' \mathbf{x}_u - c' x = \beta(x, A_B) \leq \varepsilon.$$

Замечание 2.2. Как показано в разд. 1.4, одному базисному плану может соответствовать несколько базисных матриц. Поэтому

оценка отклонения x от x^0 по значению целевой функции зависит от выбора A_B .

Пример 2.4. В примере 2.2 подсчитаны базисные псевдопланы для различных базисных матриц задачи (1.10). Возьмем план $x = (5; 3; 18; 64; 40)$. Имеем $c'x = 28$. Для базисной матрицы $A_B^1 = (a_3, a_4, a_5)$ псевдоплан равен $\bar{x}^1 = (20; 12; -6; -26; -11)$. Тогда $\beta(x, A_B^1) = 84$. С базисной матрицей $A_B^2 = (a_2, a_4, a_5)$ имеем $\beta(x, A_B^2) = 108$. Подсчитав $\beta(x, A_B^i)$ для остальных матриц, получим, что наилучшей является $A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$, для которой $\beta(x, A_B^{10}) = 64$.

20. Пусть x – базисный план с базисной матрицей A_B ; u , \bar{x}_u , δ_u – соответствующие вектор потенциалов, базисные псевдоплан и коплан.

Справедливо следующее *достаточное условие субоптимальности*: при любом $\varepsilon \geq 0$ для ε -оптимальности базисного плана x с базисной матрицей A_B достаточно существования таких $\varepsilon_j \geq 0$, при которых выполняются условия квазимаксимума

$$\delta_{uj} x_j = \max_{d_j \leq \omega \leq d_j^*} \delta_{uj} \omega - \varepsilon_j, \quad j \in J_H, \quad (2.29)$$

и условие ε -точности

$$\sum_{j \in J_H} \varepsilon_j \leq \varepsilon. \quad (2.30)$$

Действительно, возьмем числа

$$\varepsilon_j = \delta_{uj} (\bar{x}_u - x_j), \quad j \in J_H. \quad (2.31)$$

По определению величин \bar{x}_{uj} , $j \in J_H$, и согласно (2.31) они обладают экстремальным свойством

$$\delta_{uj} \bar{x}_{uj} = \max_{d_j \leq \omega \leq d_j^*} \delta_{uj} \omega, \quad j \in J_H.$$

Поэтому соотношения (2.31) можно записать в виде (2.29), а неравенство $\beta(x, A_B) \leq \varepsilon$ с учетом (2.29), (2.31) примет вид (2.30). ■

2.4. Критерий оптимальности базисного двойственного плана

В теории двойственного симплекс-метода критерий оптимальности базисного двойственного плана, как и критерий оптимальности базисного плана (§ 1) в теории симплекс-метода, используется для идентификации оптимальных базисных двойственных планов.

Пусть $\text{rank} A = m$; $\lambda_u, \boldsymbol{\alpha}_u$ – базисные двойственный план и псевдоплан, соответствующие базисной матрице A_B ,

$$\rho_j = \rho(\boldsymbol{\alpha}_j, [d_{*j}, d_j^*]) = \min_{x_j \in [d_{*j}, d_j^*]} |\boldsymbol{\alpha}_j - x_j| = |\boldsymbol{\alpha}_j - \bar{x}_j|$$

– расстояние от $\boldsymbol{\alpha}_j$ до отрезка $[d_{*j}, d_j^*]$, \bar{x}_j – ближайшая к $\boldsymbol{\alpha}_j$ точка отрезка $[d_{*j}, d_j^*]$ (рис. 2.2).

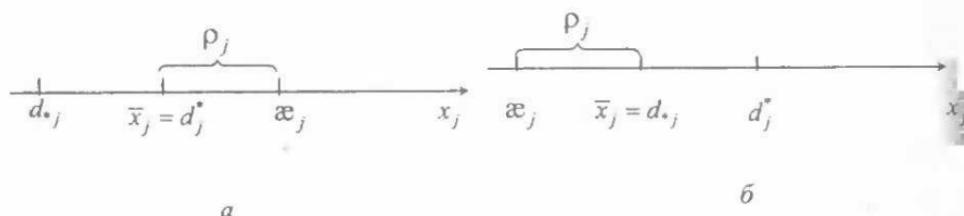


Рис. 2.2

Теорема 2.1. Для оптимальности базисного двойственного плана λ_u с базисной матрицей A_B достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы для той же базисной матрицы существовал базисный псевдоплан $\boldsymbol{\alpha}_u$, удовлетворяющий неравенствам

$$d_{*B} \leq \boldsymbol{\alpha}_B \leq d_B^*, \quad (2.32)$$

т. е. выполнялось тождество

$$\rho_j \equiv 0, \quad j \in J_B. \quad (2.33)$$

При этом $\boldsymbol{\alpha}_u = x^0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\lambda_u, \boldsymbol{\alpha}_u$ – базисные двойственный план и псевдоплан с базисной матрицей A_B , на которых выполняются неравенства (2.32). Тогда вектор $\boldsymbol{\alpha}_u$ является планом прямой задачи (следует из определения $\boldsymbol{\alpha}_u$ и неравенств (2.32)). Поскольку на планах $\lambda_u, \boldsymbol{\alpha}_u$ выполняется равенство (2.16), то согласно достаточному условию оптимальности (см. разд. 2.3) имеем $\boldsymbol{\alpha}_u = x^0, \lambda_u = \lambda^0$.

Необходимость. Будем доказывать от противного. Пусть $\lambda_u = (u, v_u, w_u)$ – оптимальный невырожденный базисный двойственный план с базисной матрицей A_B , но какое-то из неравенств (2.32) не выполняется, т. е. существует такой индекс $j \in J_B$, что

$$\psi(\lambda_u) = \min_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda), \quad (2.34)$$

$$\delta_{uj} \neq 0, \quad j \in J_H, \quad (2.35)$$

$$\rho_{j_*} = |\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}| > 0. \quad (2.36)$$

Покажем, что в этом случае можно построить улучшенный двойственный план $\lambda_y = (y, v_y, w_y)$, для которого

$$\psi(\lambda_y) < \psi(\lambda_u), \quad (2.37)$$

что противоречит (2.34).

Вектор λ_y будем строить в виде $\lambda_y = \lambda_u + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda = (\Delta u, \Delta v, \Delta w)$. Начнем с построения Δu . Выберем число $\Delta\delta_{j_*} \neq 0$:

$$\text{sign}\Delta\delta_{j_*} = \text{sign}(\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}). \quad (2.38)$$

Положим

$$\Delta\delta_j = 0, \quad j \in J_B \setminus j_*, \quad \Delta\delta'_B = (\Delta\delta_j, \quad j \in J_B) = e'_{j_*} \Delta\delta_{j_*}, \quad (2.39)$$

где $e_{j_*} \in \mathbf{R}^m$ – орт с единицей на j_* -м месте.

Вектор $\Delta u \in \mathbf{R}^m$ найдем из условия, что выполняется связь между $y = u + \Delta u$ и базисными компонентами коплана $(\delta_{uB} + \Delta\delta_B)' = c'_B - (u + \Delta u)' A_B$. Отсюда имеем: $\Delta\delta'_B = -\Delta u' A_B$, т. е.

$$\Delta u' = -\Delta\delta'_B A_B^{-1} = -e'_{j_*} A_B^{-1} \Delta\delta_{j_*}. \quad (2.40)$$

Для построения $\Delta v, \Delta w$ найдем сначала $\Delta\delta_H$ из равенства $(\delta_{uH} + \Delta\delta_H)' = c'_H - (u + \Delta u)' A_H$:

$$\Delta\delta'_H = -\Delta u' A_H = e'_{j_*} A_B^{-1} A_H \Delta\delta_{j_*}. \quad (2.41)$$

Векторы $\Delta v, \Delta w$ построим так, чтобы двойственный план $\lambda_y = (u + \Delta u, v_u + \Delta v, w_u + \Delta w)$ был улучшенным двойственным планом:

$$v_{uj} + \Delta v_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{uj} + \Delta\delta_j > 0, \\ -(\delta_{uj} + \Delta\delta_j), & \text{если } \delta_{uj} + \Delta\delta_j \leq 0, \quad j \in J; \end{cases} \quad (2.42)$$

$$w_{uj} + \Delta w_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{uj} + \Delta\delta_j \leq 0, \\ \delta_{uj} + \Delta\delta_j, & \text{если } \delta_{uj} + \Delta\delta_j > 0, \quad j \in J. \end{cases}$$

Поскольку

$$v_{uj} = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{uj} > 0, \\ -\delta_{uj}, & \text{если } \delta_{uj} \leq 0, \quad j \in J; \end{cases} \quad w_{uj} = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{uj} \leq 0, \\ \delta_{uj}, & \text{если } \delta_{uj} > 0, \quad j \in J, \end{cases} \quad (2.43)$$

и в силу двойственной невырожденности (2.35) имеем $\operatorname{sign}(\delta_{uj} + \Delta\delta_j) = \operatorname{sign}\delta_{uj}$, $j \in J_H$, при достаточно малом $|\Delta\delta_{j_*}|$, то из (2.42), (2.43) получим

$$\Delta v_j = \begin{cases} 0 & \text{при } \delta_{uj} > 0, \\ -\Delta\delta_j & \text{при } \delta_{uj} < 0, \quad j \in J_H; \\ -\Delta\delta_{j_*} & \text{при } \Delta\delta_{j_*} < 0, \quad j = j_*, \quad \Delta w_j = \\ 0 & \text{при } \Delta\delta_{j_*} > 0, \quad j = j_*, \\ 0, & \quad j \in (J_B \setminus j_*); \end{cases} \quad \begin{cases} 0 & \text{при } \delta_{uj} < 0, \\ \Delta\delta_j & \text{при } \delta_{uj} > 0, \quad j \in J_H; \\ \Delta\delta_{j_*} & \text{при } \Delta\delta_{j_*} > 0, \quad j = j_*, \\ 0 & \text{при } \Delta\delta_{j_*} < 0, \quad j = j_*, \\ 0, & \quad j \in (J_B \setminus j_*). \end{cases} \quad (2.44)$$

Таким образом, вектор $\Delta\lambda = (\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ построен полностью. Подсчитаем $\Delta\psi(\lambda_u)$. В силу (2.38) – (2.41), (2.44) имеем

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\lambda_u) &= \psi(\lambda_u + \Delta\lambda) - \psi(\lambda_u) = b'\Delta u - d'_*\Delta v + d''\Delta w = \\ &= -e'_{j_*} A_B^{-1} b \Delta\delta_{j_*} + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \delta_{uj} < 0}} d'_* \Delta\delta_j + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \delta_{uj} > 0}} d'' \Delta\delta_j - d'_{j_*} \Delta v_{j_*} + d''_{j_*} \Delta w_{j_*} = \\ &= -e'_{j_*} A_B^{-1} b \Delta\delta_{j_*} + \Delta\delta'_H \mathbf{x}_H + \bar{x}_{j_*} \Delta\delta_{j_*} = \\ &= -e'_{j_*} A_B^{-1} b \Delta\delta_{j_*} + e'_{j_*} A_B^{-1} A_H \mathbf{x}_H \Delta\delta_{j_*} + \bar{x}_{j_*} \Delta\delta_{j_*} = \\ &= -(\mathbf{x}_{j_*} - \bar{x}_{j_*}) \Delta\delta_{j_*} = -\|\mathbf{x}_{j_*} - \bar{x}_{j_*}\| |\Delta\delta_{j_*}| < 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

т. е. на векторе $\lambda_u + \Delta\lambda$ выполняется неравенство (2.37). ■

Из формулы (2.45) следует, что $\alpha^1 = -\|\mathbf{x}_{j_*} - \bar{x}_{j_*}\|$ – скорость изменения двойственной целевой функции при движении вдоль направления Δu .

Замечание 2.3. Как и в прямом симплекс-методе, в вырожденном случае условие оптимальности (2.32) может не выполняться.

Справедлив и симметричный критерий оптимальности.

Теорема 2.2. Для оптимальности базисного двойственного плана λ_u необходимо и достаточно, чтобы существовала базисная матрица A_B^0 и соответствующий базисный псевдоплан \mathbf{x}_u , что выполняется соотношение (2.32).

Пример 2.5. Рассмотрим задачу (1.10). Для нее в примере 2.2 при различных базисных матрицах A_B^i построены базисные псевдопланы. Как видно из рис. 2.1, для всех матриц A_B^i , $i = \overline{1, 9}$, условие (2.32) не выполняется. Оно выполняется лишь с матрицей $A_B = A_B^{10} = (a_1, a_2, a_3)$. Значит, $\lambda^0 = \lambda_u = (u, v_u, w_u)$

где $u = (0; 2/7; 8/7)$, $v_u = (0; 0; 0; 2/7; 8/7)$, $w_u = 0$, – оптимальный двойственный план, а $\alpha_u = (13; 11; 2; 0; 0)$ – оптимальный прямой план, причем $\psi(\lambda_u) = \phi(\alpha_u) = 92$.

В этом же примере с измененным вектором стоимости $\bar{c} = (6; 10; 0; 0; 0)$ с той же матрицей $A_B = (a_1, a_2, a_3)$ базисный двойственный план $\lambda_{\bar{u}} = (\bar{u}, v_{\bar{u}}, w_{\bar{u}})$, где $\bar{u} = (0; 2; 0)$, $v_{\bar{u}} = (0; 0; 0; 2; 0)$, $w_{\bar{u}} = 0$, является вырожденным (матрица A_B нерегулярная). Для базисного псевдоплана $\bar{x}_{\bar{u}}^1 = \left(41 \frac{4}{7}; -6 \frac{1}{7}; -9 \frac{3}{7}; 0; 40\right)$ условия оптимальности не выполняются, хотя указанный двойственный план оптимален. Однако базисный псевдоплан $\bar{x}_{\bar{u}}^2 = (13; 11; 2; 0; 0)$, соответствующий той же базисной матрице, удовлетворяет этому условию.

2.5. Итерация

Двойственный симплекс-метод – итеративный метод построения последовательности базисных двойственных планов

$$\lambda_{u^1} \rightarrow \lambda_{u^2} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_{u^k} \rightarrow \dots, \quad (2.46)$$

которая начинается с произвольного базисного двойственного плана λ_{u^1} и заканчивается или обнаружением неразрешимости прямой задачи (2.1), или построением ее оптимального плана x^0 . Элементы λ_{u^k} , $k = 1, 2, \dots$, последовательности (2.46) – *приближения* (к оптимальному двойственному плану). Построение начального приближения λ_{u^1} называется *первой фазой двойственного симплекс-метода*, построение остальных приближений (2.46) – *второй фазой*. На первой фазе удаляются линейно-зависимые уравнения основных ограничений и строится начальный базисный двойственный план. На второй фазе или обнаруживается неразрешимость прямой задачи, или строится оптимальный план x^0 .

Поскольку каждый элемент последовательности базисных двойственных планов определяется своим вектором потенциалов, то двойственный симплекс-метод можно трактовать как метод построения последовательности векторов

$$u^1 \rightarrow u^2 \rightarrow \dots \rightarrow u^k \rightarrow \dots,$$

подсчитанных с помощью базисных матриц A_B^1, A_B^2, \dots

Опишем сначала вторую фазу двойственного симплекс-метода в предположении, что $\text{rank } A = m$, $X \neq \emptyset$ и задача двойственна невырожденная.

Общую итерацию двойственного симплекс-метода представим в виде $u \rightarrow \bar{u}$, где u – «старый» вектор потенциалов, подсчитанный по «старой» матрице A_B , \bar{u} – «новый» вектор потенциалов, подсчитанный по «новой» матрице \bar{A}_B .

Пусть $J_B^1 = \{j \in J_B : p_j > 0\}$ – множество базисных индексов, на которых нарушаются соотношения (2.33). Выберем индекс $j_* \in J_B^1$. Его можно выбрать, например, по правилу $p_{j_*} = \max_{j \in J_B^1} p_j$.

Вектор \bar{u} будем строить в виде

$$\bar{u} = u + \sigma^* p_u,$$

где $p_u \in \mathbb{R}^m$ – направление изменения вектора потенциалов u , $\sigma^* \geq 0$ – шаг вдоль этого направления. Направление p_u построим с помощью вектора Δu , использованного в разд. 2.4 при доказательстве необходимости критерия оптимальности:

$$p'_u = \Delta u' / |\Delta \delta_{j_*}| = -e'_{j_*} A_B^{-1} \text{sign}(\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}). \quad (2.47)$$

В разд. 2.4 (см. формулу (2.45)) показано, что вдоль направления p_u двойственная целевая функция убывает со скоростью $\alpha^1 = -|\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}|$. Поэтому будем двигаться вдоль p_u до тех пор, пока это возможно. Поскольку при этом движении будем строить только улучшенные двойственные планы, то нет опасности выхода за пределы Λ . Движение вдоль p_u может остановиться только из-за смены направлений P_v, P_w изменения векторов v_u, w_u , вызванных сменой знака у компонент коплана (рис. 2.3).

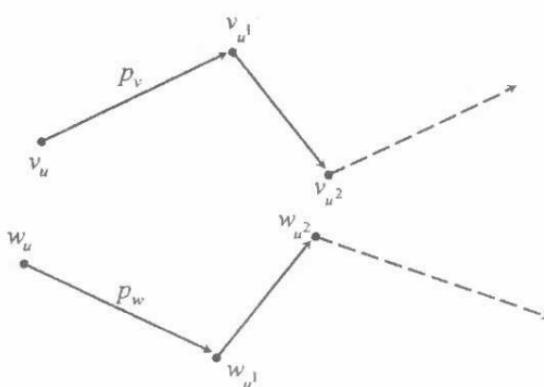


Рис. 2.3

Вычислим максимально возможный шаг σ^1 , при котором на отрезке $[0, \sigma^1]$ все компоненты $\delta_j(\sigma)$, $j \in J_H$, имеют те же знаки, что и δ_{uj} , $j \in J_H$.

Согласно (2.41) направление p_u порождает направление $p_{\delta_H} \in \mathbb{R}^{n-m}$ изменения небазисной компоненты базисного коплана:

$$p'_{\delta_H} = e'_{j_*} A_B^{-1} A_H \operatorname{sign}(\mathbf{x}_{j_*} - \bar{\mathbf{x}}_{j_*}). \quad (2.48)$$

При движении $u(\sigma) = u + \sigma p_u$, $\sigma \geq 0$, вдоль p_u небазисные компоненты коплана $\delta_H(\sigma) = \delta_{uH} + \sigma p_{\delta_H}$ в силу (2.48) изменяются по правилу

$$\delta_j(\sigma) = \delta_{uj} + \sigma e'_{j_*} A_B^{-1} A(I, j) \operatorname{sign}(\mathbf{x}_{j_*} - \bar{\mathbf{x}}_{j_*}), \quad j \in J_H, \quad \sigma \geq 0. \quad (2.49)$$

Максимальное значение σ^1 , при котором все компоненты (2.49) сохраняют знак на отрезке $[0, \sigma^1]$, называется *коротким двойственным шагом*.

Возможны два случая: 1) $\sigma^1 = \infty$ (рис. 2.4); 2) $\sigma^1 < \infty$ (рис. 2.5).

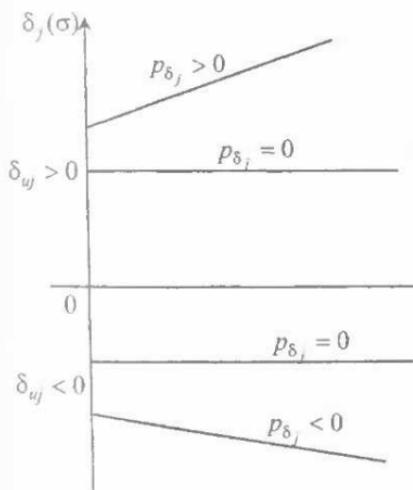


Рис. 2.4

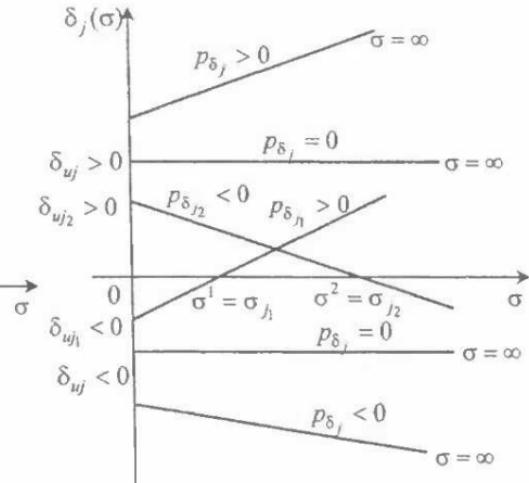


Рис. 2.5

В первом случае $\psi(\lambda(\sigma)) \rightarrow -\infty$, $\sigma \rightarrow \infty$, и в силу теории двойственности ограничения прямой задачи противоречивы.

Во втором случае, как следует из рис. 2.5,

$$\sigma^1 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} \sigma_j, \quad (2.50)$$

где

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{\delta_{uj}}{p_{\delta_j}}, & \text{если } p_{\delta_j} \delta_{uj} < 0, \\ \infty, & \text{если } p_{\delta_j} \delta_{uj} \geq 0, \quad j \in J_H. \end{cases} \quad (2.51)$$

Покажем, что $\lambda_u = \lambda_u + \sigma^1 p_\lambda$, где $p_\lambda = (p_u, p_v, p_w)$, – базисный двойственный план с базисной матрицей $A_B^1 = A(I, J_B^1)$, $J_B^1 = (J_B \setminus j_*) \cup j_1$. Действительно, поскольку λ_u – невырожденный базисный двойственный план, то $\sigma_j > 0$, $j \in J_H$, и $\sigma^1 \neq 0$ ($\sigma^1 > 0$), $p_{\delta_{j_1}} \neq 0$. Таким образом, имеем $\delta_{j_1}(\sigma^1) = \delta_{j_1}(\sigma_{j_1}) = 0$. Из (2.51) следует $p_{\delta_{j_1}} \neq 0$. Поскольку

$$p_{\delta_{j_1}} = e'_{j_*} A_B^{-1} A(I, j_1) \operatorname{sign}(\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}) = x_{j_* j_1} \operatorname{sign}(\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}) \neq 0,$$

($x_{j_* j_1}$ – j_* -я координата вектора $A_B^{-1} A(I, j_1)$), то $x_{j_* j_1} \neq 0$. Как показано в разд. 1.7, при выполнении этого соотношения матрица A_B^1 невырожденная.

При переходе $\lambda_u \rightarrow \lambda_{u^1}$ значение двойственной целевой функции уменьшается на величину $\sigma^1 |\alpha_{j_*} - \bar{x}_{j_*}| > 0$.

Построение нового базисного двойственного плана $\lambda_{u^1} = \lambda(\sigma^*)$ с $\sigma^* = \sigma^1$ называется *итерацией двойственного симплекс-метода с коротким двойственным шагом*.

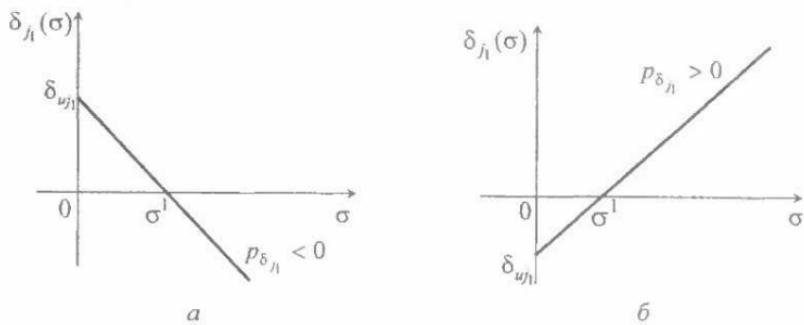


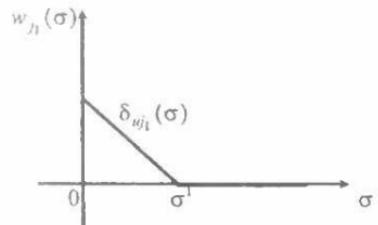
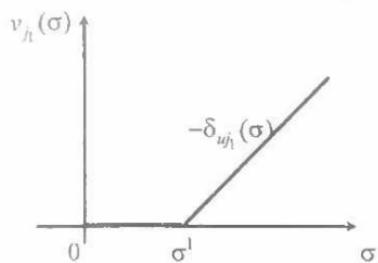
Рис. 2.6

Продолжим движение вдоль p_u за точку σ^1 . Покажем, что при этом движении происходит скачок скорости изменения двойственной

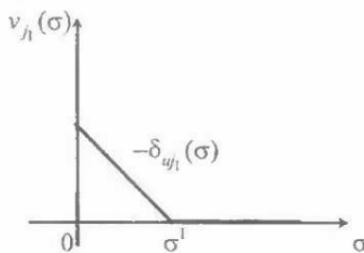
целевой функции в точке $\sigma^1 < \infty$ из-за того, что в этой точке изменяется знак у функции $\delta_{j_1}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$. Возможны две ситуации:
 а) $\delta_{uj_1} > 0$, $p_{\delta_{j_1}} < 0$ и б) $\delta_{uj_1} < 0$, $p_{\delta_{j_1}} > 0$ (рис. 2.6).

У двойственной целевой функции в окрестности точки σ^1 меняется характер поведения только выражения $\zeta_{j_1}(\sigma) = -d_{*j_1}v_{j_1}(\sigma) + d_{j_1}^* w_{j_1}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$. В ситуации а имеем (рис. 2.7, а)

$$\zeta_{j_1}(\sigma) = \begin{cases} d_{j_1}^*(\delta_{uj_1} + \sigma p_{\delta_{j_1}}), & \sigma \leq \sigma^1, \\ -d_{*j_1}(-\delta_{uj_1} - \sigma p_{\delta_{j_1}}), & \sigma > \sigma^1. \end{cases}$$



а



б

Рис. 2.7

Отсюда видно, что в точке $\sigma = \sigma^1$ скорость изменения функции $\zeta_{j_1}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$, а значит, и скорость изменения двойственной целевой функции совершают скачок

$$\Delta \alpha^1 = (d_{j_1}^* - d_{*j_1})(-p_{\delta_{j_1}}) = (d_{j_1}^* - d_{*j_1}) | p_{\delta_{j_1}} | > 0. \quad (2.52)$$

Аналогичный результат (2.52) получим и в ситуации б.

Таким образом, скорость изменения двойственной целевой функции в правосторонней окрестности точки $\sigma = \sigma^1$ будет равна $\alpha^2 = \alpha^1 + \Delta \alpha^1$. Поскольку $\Delta \alpha^1 > 0$, то $\alpha^2 > \alpha^1$. Поведение двойственной целевой функции в окрестности точки σ^1 изображено на рис. 2.8.

Продолжим движение вдоль p_u за точку σ^1 .

Обозначим через $\sigma^1 = \sigma_{j_1} < \sigma^2 = \sigma_{j_2} < \dots < \sigma^{k_*} = \sigma_{j_{k_*}}$ ($k_* \leq n - m$) нули всех компонент коплана $\delta_{\nu_j}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$, $j \in J_H$.

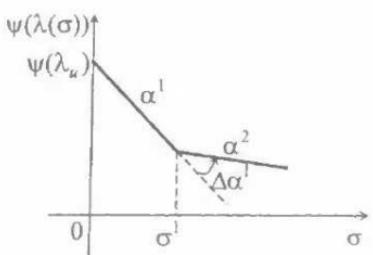


Рис. 2.8

Возможны два случая:
1) $\alpha^{k_*+1} < 0$; 2) $\alpha^1 < 0$ и найдется такой номер k_0 , $1 \leq k_0 \leq k_*$, что $\alpha^{k_0+1} \geq 0$.

В первом случае $\alpha^{k_*+1} < 0$ для $\sigma \in [\sigma^{k_*}, \infty)$, т. е. двойственная целевая функция неограниченно убывает $\psi(\lambda(\sigma)) \rightarrow -\infty$, $\sigma \rightarrow \infty$ (рис. 2.9). Согласно теории двойственности задача (2.1) в этом случае не имеет планов.

Во втором случае (рис. 2.10) двойственная целевая функция в точке $\sigma = \sigma^{k_0}$ достигает абсолютного минимума.

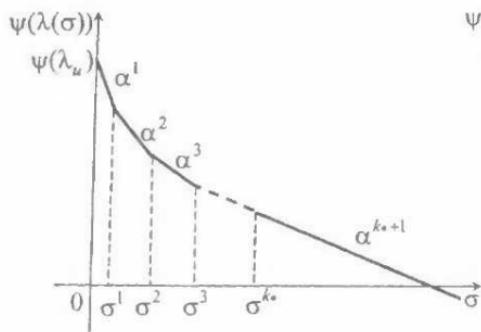


Рис. 2.9

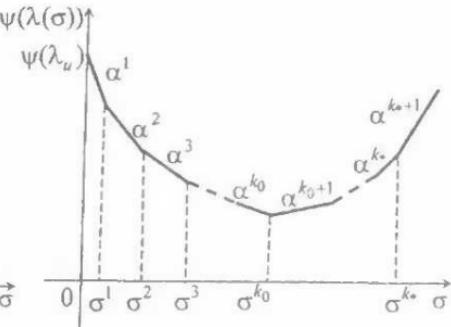


Рис. 2.10

Таким образом, $\psi(\lambda(\sigma^{k_0})) = \min_{\sigma \geq 0} \psi(\lambda(\sigma))$.

Число $\sigma^{k_0} = \sigma_{j_{k_0}}$ называется **длинным двойственным шагом**. Ему соответствует матрица $A_B^{k_0} = A(I, J_B^{k_0})$, где $J_B^{k_0} = (J_B \setminus j_*) \cup j_{k_0}$.

Как и выше, показывается, что $A_B^{k_0}$ – невырожденная матрица.

Построение нового улучшенного двойственного плана $\lambda_{\bar{u}} = \lambda_{u^{k_0}} = \lambda(\sigma^*)$ с $\sigma^* = \sigma^{k_0}$ назовем *итерацией двойственного симплекс-метода с длинным двойственным шагом*.

Нетрудно подсчитать, что значение двойственной целевой функции на такой итерации уменьшается на величину $\sum_{k=1}^{k_0} |\alpha^k| (\sigma^k - \sigma^{k-1})$, где $\sigma^0 = 0$.

2.6. Алгоритмы двойственного симплекс-метода

Сначала опишем алгоритм двойственного симплекс-метода с коротким двойственным шагом.

Пусть $\text{rank } A = m$ и задана базисная $m \times m$ -матрица A_B (или, что то же самое, множество $J_B \subset J$, $|J_B| = m$).

1. Решаем систему уравнений относительно потенциалов: $a'_j u = c_j$, $j \in J_B$.

2. Подсчитываем небазисные компоненты коплана $\delta_{uj} = c_j - a'_j u$, $j \in J_H$.

3. Определяем базисный псевдоплан $\boldsymbol{\alpha}_u = (\boldsymbol{\alpha}_{uB}, \boldsymbol{\alpha}_{uH})$ из системы

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{cases} d_{*j}, & \text{если } \delta_{uj} < 0, \\ d_j^*, & \text{если } \delta_{uj} > 0, \quad j \in J_H; \end{cases}$$

$$A_B \boldsymbol{\alpha}_{uB} = b - A_H \boldsymbol{\alpha}_{uH} \quad (\boldsymbol{\alpha}_{uB} = A_B^{-1}(b - A_H \boldsymbol{\alpha}_{uH})).$$

4. Проверяем условия оптимальности: $d_{*B} \leq \boldsymbol{\alpha}_{uB} \leq d_B^*$. Если они выполняются, то $\boldsymbol{\alpha}_u = x^0$. Решение завершаем. Если не выполняются, переходим к следующему шагу.

5. Определяем индекс j_* , для которого $\rho_{j_*} > 0$. Его можно взять произвольным из $J_B^1 = \{j \in J_B : \rho_j > 0\}$, либо из условия $\rho_{j_*} = \max_{j \in J_B^1} \rho_j$.

6. Решаем линейную систему уравнений относительно p_u :

$$\begin{aligned} a'_{j_*} p_u &= -\text{sign}(\boldsymbol{\alpha}_{j_*} - \bar{x}_{j_*}), \\ a'_j p_u &= 0, \quad j \in J_B \setminus j_*. \end{aligned}$$

7. Подсчитываем компоненты вектора p_{δ_H} : $p_{\delta_j} = -a'_j p_u$, $j \in J_H$.

8. Определяем шаги

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{\delta_{uj}}{P_{\delta_j}}, & \text{если } P_{\delta_j} \delta_{uj} < 0, \\ \infty, & \text{если } P_{\delta_j} \delta_{uj} \geq 0 \ (\delta_{uj} \neq 0), \ j \in J_H. \end{cases}$$

9. Находим $\sigma^1 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} \sigma_j$.

Если $\sigma^1 = \infty$, решение задачи прекращаем, поскольку у прямой задачи ограничения несовместны. В противном случае переходим к следующему шагу.

10. Формируем множество $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_*) \cup j_1$ и переходим к шагу 1.

Пример 2.6. Рассмотрим задачу (1.10). В качестве базисной матрицы возьмем $A_B = (a_3, a_4, a_5)$.

Итерация 1

1. Потенциалы: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 2, \delta_{u2} = 6$.
3. Псевдоплан: $\alpha_1 = 20, \alpha_2 = 12$. Тогда $\alpha_3 = 26 - 20 - 12 = -6$ (-), $\alpha_4 = 94 - 3 \cdot 20 - 5 \cdot 12 = -26$ (-), $\alpha_5 = 57 - 20 - 4 \cdot 12 = -11$ (-).
4. $p_3 = 6, p_4 = 26, p_5 = 11$. Тогда $j_* = 4$.
5. Направление p_u : $p_{u1} = 0, p_{u2} = 1, p_{u3} = 0$.
6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -3, p_{\delta_2} = -5$.
7. Шаги: $\sigma_1 = -12 : (-3) = 2/3, \sigma_2 = -6 : (-5) = 6/5$. Следовательно, $\sigma^1 = \sigma_1 = 2/3$, т. е. $j_1 = 1$.
8. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_1, a_3, a_5)$.

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2, u_1 = 0, u_3 = 0$. Отсюда $u_2 = 2/3$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u2} = 6 - 5 \cdot 2/3 = 8/3, \delta_{u4} = 0 - 2/3 = -2/3$.
3. Псевдоплан. Имеем $\alpha_2 = 12, \alpha_4 = 0$. Тогда $\alpha_1 + \alpha_3 = 14, 3\alpha_1 = 34, \alpha_1 + \alpha_5 = 9$. Отсюда получим $\alpha_1 = 34/3$ (+), $\alpha_3 = 8/3$ (+), $\alpha_5 = -7/3$ (-).
4. Таким образом, $j_* = 5$.
5. Уравнения для p_u : $p_{u1} + 3p_{u2} + p_{u3} = 0, p_{u1} = 0, p_{u3} = 1$. Отсюда $p_{u2} = -1/3$.
6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_2} = -(-5/3 + 4) = -7/3, p_{\delta_4} = -(-1/3) = 1/3$.
7. Шаги. $\sigma_2 = -(8/3) : (-7/3) = 8/7, \sigma_4 = -(-2/3) : (1/3) = 2$. Следовательно, $\sigma^1 = \sigma_2 = 8/7$, т. е. $j_1 = 2$.
8. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_1, a_2, a_3)$.

Итерация 3

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 3u_2 + u_3 = 2$, $u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 6$, $u_1 = 0$. Отсюда $u_2 = 2/7$, $u_3 = 8/7$.

2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u4} = -2/7$, $\delta_{u5} = -8/7$.

3. Псевдоплан. Имеем $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 26$, $3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 94$, $\alpha_1 + 4\alpha_2 = 57$. Отсюда получим $\alpha_1 = 13$ (+), $\alpha_2 = 11$ (+), $\alpha_3 = 2$ (+).

Условия оптимальности выполняются. Следовательно, получен оптимальный план $\alpha = x^0 = (13; 11; 2; 0; 0)$.

Пример 2.7. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \\ &0 \leq x_1 \leq 3, \quad 2 \leq x_2 \leq 3, \\ &-1 \leq x_3 \leq 0, \quad 1 \leq x_4 \leq 2. \end{aligned} \tag{2.53}$$

В качестве базисной возьмем матрицу $A_B = (a_1, a_2)$.

Итерация 1

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 2u_2 = 1$, $2u_1 + 3u_2 = 1$. Отсюда $u_1 = -1$, $u_2 = 1$.

2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u3} = 1 + 1 - 5 = -3$, $\delta_{u4} = -1 + 3 - 1 = 1$.

3. Псевдоплан. Имеем $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2$. Тогда $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$, $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 13$. Отсюда получим $\alpha_1 = 26$ (-), $\alpha_2 = -13$ (-).

4. $p_1 = 23$, $p_2 = 15$. Тогда $j_* = 1$.

5. Уравнения для p_u : $p_{u1} + 2p_{u2} = -1$, $2p_{u1} + 3p_{u2} = 0$. Отсюда $p_{u1} = 3$, $p_{u2} = -2$.

6. Направление $p_{\text{ен}}$: $p_{\delta_3} = -3 + 10 = 7$, $p_{\delta_4} = -9 + 2 = -7$.

7. Шаги: $\sigma_3 = 3/7$, $\sigma_4 = 1/7$. Следовательно, $\sigma^1 = \sigma_4 = \sigma_{j_1} = 1/7$, т. е. $j_1 = 4$.

8. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_2, a_4)$.

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов: $2u_1 + 3u_2 = 1$, $3u_1 + u_2 = -1$. Отсюда $u_1 = -4/7$, $u_2 = 5/7$.

2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 1 + 4/7 - 10/7 = 1/7$, $\delta_{u3} = 1 + 4/7 - 25/7 = -2$.

3. Псевдоплан. Имеем $\alpha_1 = 3$, $\alpha_3 = -1$. Тогда $2\alpha_2 + 3\alpha_4 = 3$, $3\alpha_2 + \alpha_4 = 9$. Отсюда получим $\alpha_2 = 24/7$ (-), $\alpha_4 = -9/7$ (-).

4. $p_2 = |24/7 - 3| = 3/7$, $p_4 = |-9/7 - 1| = 16/7$. Тогда $j_* = 4$.

5. Уравнения для p_u : $2p_{u1} + 3p_{u2} = 0$, $3p_{u1} + p_{u2} = 1$. Отсюда $p_{u1} = 3/7$, $p_{u2} = -2/7$.

6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -(3/7 - 4/7) = 1/7$, $p_{\delta_3} = -(3/7 - 10/7) = 1$.

7. Шаги: $\sigma_1 = \infty$, $\sigma_3 = 2$. Следовательно, $\sigma^1 = \sigma_3 = \sigma_{j_1} = 2$, т. е. $j_1 = 3$.

8. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_2, a_3)$.

Итерация 3

1. Уравнения для потенциалов: $2u_1 + 3u_2 = 1$, $u_1 + 5u_2 = 1$. Отсюда $u_1 = 2/7$, $u_2 = 1/7$.

2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 1 - 2/7 - 2/7 = 3/7$, $\delta_{u4} = -1 - 6/7 - 1/7 = -2$.

3. Псевдоплан. Имеем $\alpha_1 = 3$, $\alpha_4 = 1$. Тогда $2\alpha_2 + \alpha_3 = -1$, $3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 3$. Отсюда получим $\alpha_2 = -8/7$ (-), $\alpha_3 = 9/7$ (-).

4. $\rho_2 = |-8/7 - 2| = 22/7$, $\rho_3 = 9/7 - 0 = 9/7$. Тогда $j_* = 2$.

5. Уравнения для p_u : $2p_{u1} + 3p_{u2} = 1$, $p_{u1} + 5p_{u2} = 0$. Отсюда $p_{u1} = 5/7$, $p_{u2} = -1/7$.

6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -(5/7 - 2/7) = -3/7$, $p_{\delta_4} = -(15/7 - 1/7) = -2$.

7. Шаги: $\sigma_1 = 1$, $\sigma_4 = \infty$. Следовательно, $\sigma^1 = \sigma_1 = \sigma_{j_1} = 1$, т. е. $j_1 = 1$.

8. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_1, a_3)$.

Итерация 4

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 + 2u_2 = 1$, $u_1 + 5u_2 = 1$. Отсюда $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.

2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u2} = 1 - 2 = -1$, $\delta_{u4} = -1 - 3 = -4$.

3. Псевдоплан. Имеем $\alpha_2 = 2$, $\alpha_4 = 1$. Тогда $\alpha_1 + \alpha_3 = -2$, $2\alpha_1 + 5\alpha_3 = 3$. Отсюда получим $\alpha_1 = -13/3$ (-), $\alpha_3 = 7/3$ (-).

4. $\rho_1 = |-13/3 - 0| = 13/3$, $\rho_3 = 7/3 - 0 = 7/3$. Тогда $j_* = 1$.

5. Уравнения для p_u : $p_{u1} + 2p_{u2} = 1$, $p_{u1} + 5p_{u2} = 0$. Отсюда $p_{u1} = 5/3$, $p_{u2} = -1/3$.

6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_2} = -(2 \cdot 5/3 + 3 \cdot (-1/3)) = -7/3$, $p_{\delta_4} = -(3 \cdot 5/3 - 1/3) = -14/3$.

7. Шаги: $\sigma_2 = \infty$, $\sigma_4 = \infty$. Следовательно, $\sigma^1 = \infty$. Таким образом, $\psi(\lambda(\sigma)) \rightarrow -\infty$, т. е. $X = \emptyset$.

Алгоритм двойственного симплекс-метода с длинным двойственным шагом повторяет первые восемь шагов алгоритма с коротким шагом. Далее добавляются следующие шаги.

9. Упорядочим числа σ_j (2.51) по возрастанию

$$\sigma^1 = \sigma_{j_1} < \sigma^2 = \sigma_{j_2} < \dots < \sigma^{k_*} = \sigma_{j_{k_*}}.$$

10. Определим k_0 . Для этого последовательно подсчитаем $\Delta \alpha^k = (d_{j_k}^* - d_{*j_k}) | p_{\delta j_k} |$ и $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta \alpha^k$, $k = 1, 2, \dots, k_0$, до тех пор, пока не

получим или $\alpha^{k_0+1} < 0$, или $\alpha^{k_0} < 0$, $\alpha^{k_0+1} \geq 0$. В первом случае решение задачи прекращаем (задача (2.1) не имеет решения из-за несовместности ограничений). Во втором случае решение продолжим. Число $\sigma^{k_0} = \sigma_{J_{k_0}}$ – длинный двойственный шаг.

11. Сформируем множество $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_*) \cup j_{k_0}$ и перейдем к шагу 1.

Пример 2.8. Рассмотрим задачу (2.53). Решая эту задачу в примере 2.7, на первой итерации получили $\sigma_3 = 3/7$, $\sigma_4 = 1/7$. Таким образом, имеем: $\sigma^1 = \sigma_4 < \sigma^2 = \sigma_3$. Подсчитаем длинный шаг. Как следует из итерации 1 примера 2.7, $\alpha^1 = -|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1| = -23$. Подсчитаем $\Delta\alpha^1 = \Delta\alpha_4 : \Delta\alpha^1 = (d_4^* - d_{*4}) | p_{84} | = 1 \cdot |-7| = 7$. Таким образом, $\alpha^2 = \alpha^1 + \Delta\alpha^1 = -23 + 7 = -16 < 0$. Подсчитаем $\Delta\alpha^2 = \Delta\alpha_3 : \Delta\alpha^2 = (d_3^* - d_{*3}) | p_{83} | = 1 \cdot 7 = 7$. Получаем $\alpha^3 = \alpha^2 + \Delta\alpha^2 = -16 + 7 = -9 < 0$. Таким образом, скорость изменения двойственной целевой функции отрицательна для всех $\sigma > \sigma_3 = 3/7$. Следовательно, $\psi(\lambda(\sigma)) \rightarrow -\infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$ и, согласно теории двойственности, $X = \emptyset$.

Как видим из примера 2.8, при использовании длинного двойственного шага для решения задачи понадобилась лишь одна итерация, вместо четырех с использованием короткого шага.

2.7. Вырожденный базисный двойственный план

В предыдущих разделах рассматривался случай, когда базисный двойственный план был невырожденным: $\delta_{uj} \neq 0$, $j \in J_H$. Это позволило доказать, что $\alpha^1 < 0$, $\sigma^1 > 0$. Предположим, что для базисной матрицы A_B подсчитаны вектор потенциалов $u' = c'_B A_B^{-1}$, компоненты коплана $\delta_{uj} = c_j - a'_j u$, $j \in J_H$, и есть нулевые небазисные компоненты коплана, т. е. $J_{H0} = \{j \in J_H : \delta_{uj} = 0\} \neq \emptyset$. Разобьем множество J_{H0} произвольным образом на два подмножества: $J_{H0}^+ = J_{H0} \setminus J_{H0}^-$, $J_{H0}^+ \cap J_{H0}^- = \emptyset$. Введем множества $J^+ = \{j \in J_H : \delta_{uj} > 0\}$, $J^- = \{j \in J_H : \delta_{uj} < 0\}$.

Небазисную компоненту псевдоплана построим следующим образом:

$$\mathbf{x}_j = \begin{cases} d_{*j}, & j \in J^- \cup J_{H0}^-, \\ d_j^*, & j \in J^+ \cup J_{H0}^+. \end{cases}$$

Подсчитаем $\mathbf{x}_B = A_B^{-1} (b - A_H \mathbf{x}_H)$. Если выполняются неравенства $d_{*B} \leq \mathbf{x}_B \leq d_B^*$, то построенный вектор \mathbf{x} является оптимальным пла-

ном задачи. В противном случае поступим следующим образом. По исходной задаче

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*,$$

сформируем вспомогательную возмущенную задачу

$$\tilde{c}'x \rightarrow \max, \quad b_* \leq Ax \leq b^*, \quad d_* \leq x \leq d^*,$$

с измененным вектором стоимости.

Можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой вектор \tilde{c} , что: 1) $\tilde{\delta}_{\tilde{u}j} = \varepsilon, j \in J_{H0}^+$; $\tilde{\delta}_{\tilde{u}j} = -\varepsilon, j \in J_{H0}^-$; 2) для остальных компонент коплана и вектора потенциалов справедливы равенства: $\tilde{u}_i = u_i + O(\varepsilon)$, $i = \overline{1, m}$; $\tilde{\delta}_{\tilde{u}j} = \delta_{uj} + O(\varepsilon), j \in J^+ \cup J^-$ (т. е. при достаточно малом ε зна-

ки этих компонент не изменяются). В силу сказанного двойственный план будет невырожденным для возмущенной задачи. Каждому шагу $\sigma^1, \dots, \sigma^{k_*}$

Рис. 2.11

невозмущенной задачи будет соответствовать ближайший к нему шаг $\tilde{\sigma}^1(\varepsilon) = \sigma^1 + O(\varepsilon), \dots, \tilde{\sigma}^{k_*}(\varepsilon) = \sigma^{k_*} + O(\varepsilon)$ возмущенной задачи. Кроме того, в возмущенной задаче появятся новые шаги (рис. 2.11):

$$\tilde{\sigma}_j = -\frac{\tilde{\delta}_{\tilde{u}j}}{p_{\delta_j}}, \quad j \in J^0 = \{j \in J_{H0}^+ : p_{\delta_j} < 0\} \cup \{j \in J_{H0}^- : p_{\delta_j} > 0\},$$

величина которых имеет порядок ε . Суммарный скачок скорости двойственной целевой функции в новых точках равен

$$\Delta\alpha^0 = \sum_{j \in J^0} (d_j^* - d_{*j}) |p_{\delta_j}|.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ новые шаги устремятся к нулю, $\tilde{\sigma}^1 \rightarrow \sigma^1, \dots, \tilde{\sigma}^{k_*} \rightarrow \sigma^{k_*}$, а скачок не изменится. В результате возмущенная задача совпадает с невозмущенной, а скорость изменения двойственной целевой функции на промежутке $[0, \sigma^1]$ станет равной

$$\bar{\alpha}^1 = \alpha^1 + \Delta\alpha^0 = \alpha^1 + \sum_{j \in J^0} (d_j^* - d_{*j}) |p_{\delta_j}|.$$

Остальные числа $\alpha^2, \dots, \alpha^{k_0}$ подсчитываются по прежним правилам.

Возможны две ситуации: $\bar{\alpha}^1 < 0$ (рис. 2.12, а) и $\bar{\alpha}^1 \geq 0$ (рис. 2.12, б).

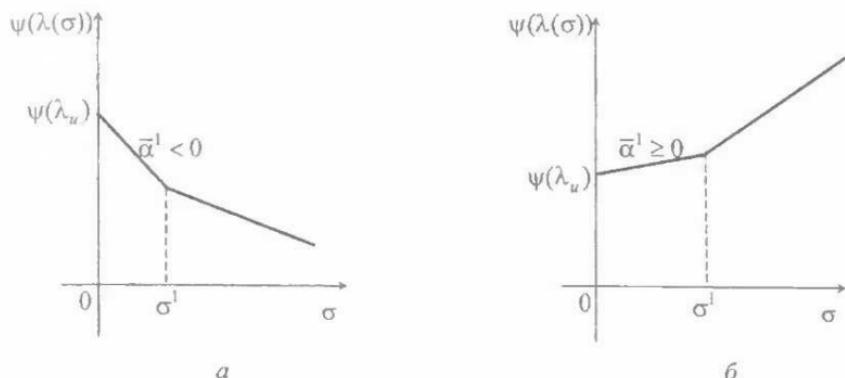


Рис. 2.12

В первой ситуации двойственный короткий шаг (расстояние до точки минимума функции $\psi(\lambda(\sigma))$, $\sigma \geq 0$) равен $\sigma^1 > 0$, во второй – нулю (движение вдоль кривой $\lambda(\sigma)$, $\sigma \geq 0$, не осуществляется). В первой ситуации поступаем, как в невырожденном случае. Во второй ситуации базисную матрицу заменяем по правилам невырожденного случая, взяв любой индекс j_1 из множества J^0 . Заметим, что в последнем случае качество базисной матрицы не улучшается, так как двойственный шаг равен нулю.

Пример 2.9. Рассмотрим следующую задачу:

$$3x_1 + 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 15, \\ -5x_1 - 10x_2 + 5x_3 \leq 10, \end{cases}$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad -5 \leq x_2 \leq 5,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5.$$

Перейдем к канонической форме:

$$3x_1 + 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 15, \\ -5x_1 - 10x_2 + 5x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad -5 \leq x_2 \leq 5,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 0 \leq x_4 \leq 85.$$

Очевидно, в качестве начальной базисной матрицы можно взять $A_B = (a_1, a_4)$.

Итерация 1

1. Уравнения для потенциалов: $-2u_1 - 5u_2 = 3$, $u_2 = 0$. Отсюда $u_1 = -3/2$, $u_2 = 0$.

2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u2} = 5 - 15/2 = -5/2$, $\delta_{u3} = -3 + 3 = 0$.

3. Таким образом, имеем: $J_{H0} = \{3\} \neq \emptyset$, $J^- = \{2\}$. Тогда $\alpha_2 = -5$, а α_3 можно взять равным либо 0, либо 5. Возьмем $\alpha_3 = 0$. Подсчитаем α_5 . Имеем: $-2\alpha_1 + 25 = 15$, $-5\alpha_1 + 50 + \alpha_4 = 10$. Отсюда получим: $\alpha_1 = 5$ (+), $\alpha_4 = -15$ (-). Подсчитаем скачок скорости двойственной целевой функции $\Delta\alpha^0 = \Delta\alpha_3 = (d_3^* - d_{*3})|p_{\delta_3}|$.

4. $j_* = 4$.

5. Уравнения для p_u : $-2p_{u1} - 5p_{u2} = 0$, $p_{u2} = 1$. Отсюда $p_{u1} = -5/2$, $p_{u2} = 1$.

6. Направление p_{δ_H} : $p_{\delta_2} = -(25/2 - 10) = -5/2$, $p_{\delta_3} = -(-5 + 5) = 0$. Отсюда следует $\Delta\alpha^0 = 0$ и $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1 = -15$.

7. Шаг $\sigma_2 = \infty$.

Следовательно, $\sigma^1 = \infty$. Таким образом, $\psi(\lambda(\sigma)) \rightarrow -\infty$, т. е. $X = \emptyset$.

2.8. Первая фаза

Как и для прямого симплекс-метода, процедуру построения начального базисного двойственного плана опишем для двух типов задач.

Пусть каноническая задача получена из нормальной, т. е. имеем

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{CB} = b,$$

$$d_* \leq x \leq d^*, 0 \leq x_{CB} \leq d_{CB}^*.$$

Для нее начальный базисный двойственный план строится легко. Возьмем $A_B = (a_{n+i} = e_i, i \in I) = E$. Тогда $u = 0$, $\delta_{uj} = c_j$, $j \in J_H = J$, v_j , w_j , $j \in J \cup J_{CB}$, строятся по обычным правилам улучшенного базисного двойственного плана.

Пример 2.10. Рассмотрим задачу (1.10). В примере 2.4 эта задача решена двойственным симплекс-методом с начальной базисной матрицей $A_B = (a_3, a_4, a_5) = E$, как и указано выше.

Рассмотрим теперь каноническую задачу (2.1):

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, d_* \leq x \leq d^*.$$

Никаких предположений относительно параметров этой задачи не делаем.

Введем вспомогательную («буферную») задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax + A_\phi x_\phi = b,$$

$$d_* \leq x \leq d^*, 0 \leq x_\phi \leq 0,$$

(2.57)

где $\bar{A} = (A, A_\Phi)$, $A_\Phi = (a_{n+i} = e_i, i \in I)$. Начальный базисный двойственный план для нее строим с базисной матрицей $A_\Phi = E$. Тогда $u = 0$, $\delta_{uj} = c_j$, $j \in J$, v_j , w_j , $j \in J$, строятся по тем же правилам, что и при построении улучшенного двойственного плана. Задачу (2.57) решаем двойственным симплекс-методом, последовательно заменяя столбцы матрицы A_Φ на столбцы матрицы A и удаляя из задачи (2.57) соответствующие фиктивные переменные.

Если на некоторой итерации $x_{j_*} = 0$, $j \in J$, $j_* = n + i_* \in J_\Phi$, то удаляем i_* -ю строку, уменьшая размеры задачи.

Пример 2.11. Рассмотрим задачу (1.62) примера 1.10. Буферная для нее имеет вид (1.63). Начальная базисная матрица $A_B = (a_5, a_6) = A_\Phi = E$. Используем длинный двойственный шаг.

Итерация 1

1. Потенциалы: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 1$, $\delta_{u2} = 1$, $\delta_{u3} = -1$, $\delta_{u4} = -1$.
3. Псевдоплан. Имеем: $\alpha_1 = 17$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0$. Тогда $\alpha_5 = 10 - 17 + 4 - 1 = -4$ (-), $\alpha_6 = 26 - 34 - 4 + 4 = -8$ (-).
4. $p_5 = 4$, $p_6 = 8$. Возьмем $j_* = 6$.
5. Таким образом, будем иметь $p_{u1} = 0$, $p_{u2} = 1$.
6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -2$, $p_{\delta_2} = 1$, $p_{\delta_3} = 4$, $p_{\delta_4} = 1$.
7. Шаги: $\sigma_1 = 1/2$, $\sigma_2 = \infty$, $\sigma_3 = 1/4$, $\sigma_4 = 1$. Следовательно, $j_1 = 3$, $j_2 = 1$, $j_3 = 4$.
8. Имеем $\alpha^1 = -8$; $\Delta\alpha^1 = \Delta\alpha_3 = 4 \cdot 4 = 16$. Таким образом, $\alpha^2 = \alpha^1 + \Delta\alpha^1 = -8 + 16 > 0$, следовательно, $\sigma^1 = \sigma_3 = 1/4$ (длинный шаг совпадает с коротким).
9. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_3, a_5)$. Из задачи удаляем переменную x_6 и вектор $a_6 = e_2$.

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов $u_1 - 4u_2 = -1$, $u_1 = 0$, откуда получим $u_2 = 1/4$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 1 - 1/2 = 1/2$, $\delta_{u2} = 1 + 1/4 = 5/4$, $\delta_{u4} = -1 + 1/4 = -3/4$.
3. Псевдоплан. Имеем: $\alpha_1 = 17$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_4 = 0$. Тогда $\alpha_3 = 3$ (+), $\alpha_5 = -6$ (-).
4. $j_* = 5$.
5. Таким образом, будем иметь: $p_{u1} = 1$, $p_{u2} = 1/4$.
6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -3/2$, $p_{\delta_2} = -3/4$, $p_{\delta_4} = -3/4$.
7. Шаги: $\sigma_1 = 1/3$, $\sigma_2 = 5/3$, $\sigma_4 = \infty$. Следовательно, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$.

8. Имеем $\alpha^1 = -6$; $\Delta\alpha^1 = \Delta\alpha_1 = (17 - 13) \cdot (3/2) = 6$. Таким образом, $\alpha^2 = \alpha^1 + \Delta\alpha^1 = 0$, следовательно, $\sigma^{k_0} = \sigma_2 = 5/3$.

9. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_1, a_2)$.

Итак, из базиса удалены фиктивные векторы. Далее решаем исходную задачу (1.62) с начальной базисной матрицей $A_B = (a_1, a_2)$.

2.9. Задача ЛП в произвольной форме

Приведем изменения, которые необходимо внести в описанную выше стандартную процедуру двойственного симплекс-метода для случая, когда исходная задача отлична от канонической. Как и в прямом симплекс-методе, достаточно рассмотреть лишь исходные задачи, в которых не все прямые ограничения двухсторонние.

Первая фаза двойственного симплекс-метода не зависит от параметров M_j , которыми задаются искусственные прямые границы. Поэтому никаких изменений в стандартную процедуру не вносим.

Рассмотрим вторую фазу, на которой по «старому» базисному двойственному плану λ_u с базисной матрицей A_B строится новый базисный двойственный план $\lambda_{\bar{u}}$ с базисной матрицей \bar{A}_B .

Построим базисный псевдоплан $\bar{\alpha}_{\bar{u}}$. Возможны следующие случаи: 1) среди небазисных компонент псевдоплана нет компонент с искусственными границами, а базисные компоненты с естественными границами удовлетворяют критерию оптимальности; 2) среди небазисных компонент нет компонент с искусственными границами, а некоторые базисные компоненты с естественными границами не удовлетворяют критерию оптимальности; 3) среди небазисных компонент псевдоплана есть компоненты с искусственными границами, а базисные компоненты удовлетворяют критерию оптимальности; 4) среди небазисных компонент имеются компоненты с искусственными границами, а среди базисных компонент критерию оптимальности не удовлетворяют только с искусственными границами.

В случае 1) увеличиваем искусственные границы базисных переменных и останавливаем процесс решения, ибо построен оптимальный план λ_u .

В случае 2) осуществляем итерацию по стандартной процедуре двойственного симплекс-метода.

В случае 3) увеличиваем соответствующие M_j . Через конечное число увеличений M_j придем к случаям 1), 2) или убедимся, что пря-

мая задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции на множестве планов.

Если реализовался случай 4), то увеличиваем соответствующие значения M_j , и продолжаем итерацию. Через конечное число увеличений M_j придем к одному из предыдущих случаев (удалим из небазисных компонент компоненты с искусственными границами (получим оптимальный план) или убедимся, что задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции на множестве планов).

Пример 2.12. Рассмотрим задачу примера 1.14. Ее каноническая форма имеет вид (1.69). Не ограничивая общности, можно считать, что $M_1 = M_2 = M > 0$. Тогда каноническая задача примет вид:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 1, \end{cases} \\ 0 \leq x_1 &\leq M, \quad -M \leq x_2 \leq M, \\ 0 \leq x_3 &\leq 2 + 3M, \quad 0 \leq x_4 \leq 1 + M. \end{aligned}$$

Начальная базисная матрица $A_B = (a_3, a_4) = E$.

Итерация 1

1. Потенциалы: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 2$, $\delta_{u2} = 1$.
3. Псевдоплан. Небазисные компоненты: $\alpha_1 = M$, $\alpha_2 = M$. Тогда для базисных компонент получим: $\alpha_3 = 2 + M$ (+), $\alpha_4 = 1$ (+).

Получен оптимальный план. Поскольку некоторые компоненты псевдоплана зависят от M , то целевая функция исходной задачи не ограничена на множестве планов.

Пример 2.13. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6, \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Сведем ее к канонической форме, а затем рассмотрим «буферную» задачу:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \end{cases} \\ 0 \leq x_1 &\leq M, \quad -M \leq x_2 \leq M, \\ 0 \leq x_3 &\leq M, \quad 0 \leq x_4 \leq 0, \quad 0 \leq x_5 \leq 0. \end{aligned}$$

В качестве начальной базисной матрицы возьмем $A_b = A_{б\text{у}\Phi} = (a_4, a_5) = E$.

Итерация 1

1. Потенциалы: $u_1 = 0, u_2 = 0$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 5, \delta_{u2} = 1, \delta_{u3} = 1$.
3. Псевдоплан. Небазисные компоненты: $\alpha_1 = M, \alpha_2 = M, \alpha_3 = M$. Тогда базисные компоненты равны $\alpha_4 = 6 - M$ (-), $\alpha_5 = 6 + M$ (-).
4. $j_* = 5$.
5. Таким образом, будем иметь $p_{u1} = 0, p_{u2} = -1$.
6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -1, p_{\delta_2} = 3, p_{\delta_3} = -1$.
7. Шаги: $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = +\infty, \sigma_3 = 1$. Следовательно, $j_1 = 3, j_2 = 1$.
8. Имеем $\alpha^1 = -(6 + M)$. Тогда получим: $\Delta\alpha^1 = (d_3^* - d_{*3})|p_{\delta_3}| = M$. Таким образом, $\alpha^2 = \alpha^1 + \Delta\alpha^1 = -6 < 0, \Delta\alpha^2 = (d_1^* - d_{*1})|p_{\delta_1}| = M, \alpha^3 = \alpha^2 + \Delta\alpha^2 = -6 + M > 0$, следовательно, $\sigma^1 = \sigma_3 = 1, j_0 = 3$.
9. Новая базисная матрица $\bar{A}_b = (a_3, a_4)$. Из задачи удаляем фиктивную переменную x_5 и вектор $a_5 = e_2$.

Итерация 2

1. Уравнения для потенциалов $2u_1 + u_2 = 1, u_1 = 0$, откуда получим $u_2 = 1$.
2. Небазисные компоненты коплана: $\delta_{u1} = 5 - 1 = 4, \delta_{u2} = 1 + 3 = 4$.
3. Псевдоплан. Небазисные компоненты: $\alpha_1 = M, \alpha_2 = M$. Тогда базисные определяются из системы уравнений: $2\alpha_3 + \alpha_4 = 6 + M, \alpha_3 = 6 + M$. Получаем: $\alpha_3 = 6 + M$ (-), $\alpha_4 = -(6 + M)$ (-).
4. Положим $j_* = 4$.
5. Для направления p_u имеем систему уравнений: $2p_{u1} + p_{u2} = 0, p_{u1} = 1$. Отсюда получим $p_{u1} = 1, p_{u2} = -2$.

6. Направление $p_{\delta H}$: $p_{\delta_1} = -(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 0, p_{\delta_2} = -(-3 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = -3$.
7. Шаги: $\sigma_1 = \infty, \sigma_2 = 4/3$. Тогда $j_0 = 2$.
8. Новая базисная матрица $\bar{A}_b = (a_2, a_3)$. Из задачи удаляем фиктивную переменную x_4 и вектор $a_4 = e_1$.

Итерация 3

1. Уравнения для потенциалов $-3u_1 - 3u_2 = 1, 2u_1 + u_2 = 1$. Решая эту систему, получим $u_1 = 4/3, u_2 = -5/3$.
2. Небазисная компонента коплана равна $\delta_{u1} = 5 - (2 \cdot 4/3 - 5/3) = 4$.
3. Псевдоплан. Небазисная компонента $\alpha_1 = M$. Тогда базисные определяются из системы уравнений: $2M - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 6, M - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 6$. Решая ее, получим: $\alpha_2 = -2$ (+), $\alpha_3 = -M$ (-).
4. $j_* = 3$.

5. Для направления p_u имеем систему уравнений: $-3p_{u1} - 3p_{u2} = 0$, $2p_{u1} + p_{u2} = 1$. Отсюда получим $p_{u1} = 1$, $p_{u2} = -1$.
6. Направление p_{δ_1} : $p_{\delta_1} = -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$.
7. Шаг $\sigma_1 = 4$. Тогда $j_0 = 1$.
8. Новая базисная матрица $\bar{A}_B = (a_1, a_2)$.

Итерация 4

1. Уравнения для потенциалов $2u_1 + u_2 = 5$, $-3u_1 - 3u_2 = 1$. Решая эту систему, получим $u_1 = 16/3$, $u_2 = -17/3$.
2. Небазисная компонента коплана равна $\delta_{u3} = 1 - (2 \cdot 16/3 - 17/3) = -4$.
3. Псевдоплан. Небазисная компонента $\alpha_3 = 0$. Тогда базисные определяются из системы уравнений: $2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 - 3\alpha_2 = 6$. Решая ее, получим: $\alpha_1 = 0$ (+), $\alpha_2 = -2$ (+). Получили оптимальный план $x^0 = \alpha = (0; -2; 0)$.

2.10. Конечность двойственного симплекс-метода

Для двойственно невырожденных задач двойственный симплекс-метод конечен. Действительно, как следует из итерации двойственного симплекс-метода, для двойственных задач на каждой итерации двойственная целевая функция строго убывает. Базисные двойственные планы определяются базисной матрицей A_B . Количество базисных матриц не более C_n^m . Следовательно, на итерациях одна и та же матрица не может повториться.

§ 3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Решение задачи ЛП не заканчивается построением оптимального плана. Для приложений важную роль играют вопросы единственности решения и зависимости его от изменений параметров задачи A, b, c, d_s, d^* .

3.1. Единственность оптимального прямого плана

Лемма 3.1. *Если каноническая задача (2.1) двойственно невырожденная, то ее оптимальный план x^0 единственный.*

Доказательство. Предположим, что существует другой оптимальный план \bar{x}^0 :

$$\bar{x}^0 \neq x^0. \quad (3.1)$$

Поскольку базисная компонента x_B плана однозначно строится по вектору x_H , то из (3.1) следует, что не может выполняться равенство

$$\bar{x}_H^0 = x_H^0. \quad (3.2)$$

В самом деле, если бы $\bar{x}_H^0 = x_H^0$, то из $x_B = A_B^{-1}(b - A_H x_H)$ следовало бы

$$\bar{x}_B^0 = x_B^0. \quad (3.3)$$

Равенства (3.2), (3.3) противоречат соотношению (3.1). Заметим, что для оптимальной матрицы A_B^0 имеем $\delta_{u^0} = \Delta^0$. Подсчитаем приращение целевой функции прямой задачи (2.1) на планах x^0 , \bar{x}^0 :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= c'\bar{x}^0 - c'x^0 = \sum_{j \in J_H^0} \Delta_j^0 (\bar{x}_j^0 - x_j^0) = \\ &= \sum_{\substack{j \in J_H^0 \\ \Delta_j^0 < 0}} \Delta_j^0 (\bar{x}_j^0 - d_{*j}) + \sum_{\substack{j \in J_H^0 \\ \Delta_j^0 > 0}} \Delta_j^0 (\bar{x}_j^0 - d_j^*). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку равенства (3.2) невозможны, то среди $\bar{x}_j^0 - d_{*j}$, $\bar{x}_j^0 - d_j^*$, $j \in J_H^0$, найдутся ненулевые. В силу двойственной невырожденности ($\Delta_j^0 \neq 0$, $j \in J_H^0$) коэффициенты при этих разностях отличны от нуля и по знаку противоположны им. Следовательно, среди слагаемых в правой части равенства (3.4) есть отрицательные. Тогда из (3.4) получим $c'\bar{x}^0 - c'x^0 < 0$, что противоречит оптимальности плана \bar{x}^0 . ■

3.2. Единственность оптимального двойственного плана

Как следует из разд. 2.3, п. 15, две базисные матрицы эквивалентны, если построенные по ним векторы потенциалов совпадают.

Лемма 3.2. *Если оптимальный базисный план x^0 с базисной матрицей A_B^0 прямо невырожденный, т. е.*

$$d_{*j} < x_j^0 < d_j^*, \quad j \in J_B^0, \quad (3.5)$$

то оптимальный двойственный план задачи единственный и с точностью до эквивалентности A_B^0 – единственная оптимальная базисная матрица.

Доказательство. Пусть $\lambda^0 = (u^0, v^0, w^0)$ – оптимальный базисный двойственный план, A_B^0 – соответствующая оптимальная базисная матрица. Тогда $u^{0r} = c'_B(A_B^0)^{-1}$, $\delta_{u^0} = \Delta^0 = c - A'u^0$. Предположим, что существует другой оптимальный двойственный план $\lambda = (y, w, v)$. Тогда, согласно условиям дополняющей нежесткости (см. (2.24)), будем иметь:

$$w_j(d_j^* - x_j^0) = 0, \quad v_j(x_j^0 - d_{*j}) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

Но в силу равенств (2.2) $x_j^0 = d_{*j}$, $j \in J_H^{0-} = \{j \in J_H : \Delta_j^0 \leq 0\}$; $x_j^0 = d_j^*$, $j \in J_H^{0+} = \{j \in J_H : \Delta_j^0 \geq 0\}$. Тогда из (3.6) следует

$$w_j = 0, \quad j \in J_H^{0-}; \quad v_j = 0, \quad j \in J_H^{0+}. \quad (3.7)$$

Кроме того, из соотношений (3.5), (3.6) получим

$$w_j = v_j = 0, \quad j \in J_B^0. \quad (3.8)$$

Тогда из основных условий двойственной задачи будем иметь: $y'A_B^0 - c'_B = v'_B - w'_B = 0$, откуда следует

$$y' = c'_B(A_B^0)^{-1} = u^{0r}. \quad (3.9)$$

Кроме того, из основных условий двойственной задачи в силу (3.7), (3.9) будем иметь

$$\begin{aligned} w_j &= c_j - u^{0r} a_j = \Delta_j^0, & j \in J_H^{0+}, \\ v_j &= -(c_j - u^{0r} a_j) = -\Delta_j^0, & j \in J_H^{0-}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Сравнение соотношений (3.7) – (3.10) с (2.2), (2.5) показывает, что $\lambda = \lambda^0$, т. е. оптимальный двойственный план единственный. ■

Замечание 3.1. Прямая вырожденность оптимального базисного плана – исключительное явление. Поэтому оптимальная базисная матрица задачи (2.1), как правило, единственная.

3.3. Анализ чувствительности решения задачи

Значением канонической задачи (2.1) называется число

$$\gamma = \gamma(A, b, c, d_*, d^*) = \max c'x, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, d_* \leq x \leq d^*\},$$

где матрица A и векторы b, c, d_*, d^* – параметры задачи.

Под *анализом чувствительности* задачи будем понимать исследование влияния на ее значение изменения (вариации) ее параметров.

Коэффициентом чувствительности задачи относительно скалярного параметра задачи называется начальная скорость изменения значения задачи при увеличении этого параметра. Ради краткости в обозначении значения задачи будем опускать аргументы с фиксированными значениями параметров.

Введем следующие коэффициенты чувствительности задачи:

$$\begin{aligned} k_j(c) &= \frac{\partial \gamma(c)}{\partial c_j}, \quad j \in J; \quad k_i(b) = \frac{\partial \gamma(b)}{\partial b_i}, \quad i \in I; \\ k_j(d_*) &= \frac{\partial \gamma(d_*)}{\partial d_{*j}}, \quad k_j(d^*) = \frac{\partial \gamma(d^*)}{\partial d_j^*}, \quad j \in J; \\ k_{ij}(A) &= \frac{\partial \gamma(A)}{\partial a_{ij}}, \quad i \in I, \quad j \in J. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Пусть x^0 – оптимальный невырожденный базисный план, $\lambda^0 = (u^0, v^0, w^0)$ – оптимальный невырожденный базисный двойственный план с базисной матрицей A_B^0 . Тогда для коэффициентов чувствительности задачи имеют место формулы:

$$k_j(c) = x_j^0, \quad j \in J; \quad (3.11)$$

$$k_i(b) = u_i^0, \quad i \in I; \quad (3.12)$$

$$k_j(d_*) = -v_j^0, \quad k_j(d^*) = w_j^0, \quad j \in J; \quad (3.13)$$

$$k_{ij}(A) = -u_i^0 x_j^0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (3.14)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\gamma(c)$, $c \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\tilde{c} = c + e_j \Delta c_j$, $\Delta c_j > 0$. Введем возмущенную задачу

$$\tilde{c}'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*. \quad (3.15)$$

Для достаточно малых Δc_j вектор x^0 будет базисным планом с базисной матрицей A_B^0 и для задачи (3.15). В самом деле, используя A_B^0 , подсчитаем для задачи (3.15) вектор потенциалов \tilde{u} и оценки $\tilde{\Delta}_k$, $k \in J_H^0$. Возможны два случая: 1) $j \notin J_B^0$, 2) $j \in J_B^0$.

Рассмотрим случай 1). Поскольку $\tilde{c}_B = c_B$, то $\tilde{u}' = u^0 = \tilde{c}'_B (A_B^0)^{-1}$. Далее, $\tilde{\Delta}_k = \tilde{c}_k - u^0 a_k$, $k \in J_H^0$. По предположению, $\tilde{c}_k = c_k$, $k \in J_H^0 \setminus j$; $\tilde{c}_j = c_j + \Delta c_j$. Тогда $\tilde{\Delta}_k = \Delta_k^0$, $k \in J_H^0 \setminus j$; $\tilde{\Delta}_j = \Delta_j^0 + \Delta c_j$. В силу невырожденности двойственного плана λ^0 имеем $\Delta_k^0 \neq 0$, $k \in J_H^0$. При достаточно малых $\Delta c_j > 0$ будем иметь $\operatorname{sign} \tilde{\Delta}_j = \operatorname{sign} \Delta_j^0$, и на плане x^0 выполняются условия оптимальности в задаче (3.15). Следовательно, при достаточно малых Δc_j план x^0 оптимальен и в задаче (3.15). Подсчитаем $\gamma(\tilde{c}) - \gamma(c) = \tilde{c}' x^0 - c' x^0 = x_j^0 \Delta c_j$. Значит, функция $\gamma(c)$, $c \in \mathbb{R}^n$, дифференцируема по c_j в точке c и ее производная равна (3.11).

Рассмотрим второй случай: $j \in J_B^0$. Подсчитаем $\tilde{u}' = \tilde{c}'_B (A_B^0)^{-1} = c'_B (A_B^0)^{-1} + \Delta c'_B (A_B^0)^{-1} = u^0 + e'_j (A_B^0)^{-1} \Delta c_j$, откуда $\Delta u' = e'_j (A_B^0)^{-1} \Delta c_j$.

Для оценок имеем:

$$\tilde{\Delta}_k = c_k - \tilde{u}' a_k = c_k - (u^0 + \Delta u)' a_k = \Delta_k^0 - (e'_j (A_B^0)^{-1} a_k) \Delta c_j.$$

В силу невырожденности базисного двойственного плана имеем $\Delta_k \neq 0$, $k \in J_H^0$. Тогда при достаточно малых Δc_j получим $\operatorname{sign} \tilde{\Delta}_k = \operatorname{sign} \Delta_k^0$, $k \in J_H^0$. Следовательно, на x^0 и A_B^0 выполняются условия оптимальности для задачи (3.15).

Таким образом, x^0 – оптимальный базисный план с базисной матрицей A_B^0 и для задачи (3.15) при достаточно малых $\Delta c_j \geq 0$. Далее, как и в случае 1, доказывается формула (3.11).

Рассмотрим функцию $\gamma = \gamma(b, d_*, d^*)$, $b, d_*, d^* \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $x^0 = x^0(b, d_*, d^*)$ – оптимальный невырожденный базисный план, то согласно лемме 3.2 $\lambda^0 = (u^0, v^0, w^0)$ – единственный оптимальный базисный двойственный план с базисной матрицей A_B^0 . В силу невырожденности плана x^0 выполняются неравенства

$$d_* B < x_B^0 = (A_B^0)^{-1} (b - A_H x_H^0) < d^* B. \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что при достаточно малых $\|\Delta b\|$, $\|\Delta d_*\|$, $\|\Delta d^*\|$ неравенства (3.16) сохраняются:

$$\begin{aligned} d_* B + \Delta d_* B &\leq (A_B^0)^{-1} (b + \Delta b - A_H^- (d_{*H}^- + \Delta d_{*H}^-) - A_H^+ (d_{*H}^+ + \Delta d_{*H}^+)) \leq \\ &\leq d^* B + \Delta d^* B, \end{aligned}$$

где

$$A_{\mathbb{H}}^+ = (a_j, j \in J_{\mathbb{H}}^{0+}), A_{\mathbb{H}}^- = (a_j, j \in J_{\mathbb{H}}^{0-}), d_{*_{\mathbb{H}}}^- = (d_{*j}, j \in J_{\mathbb{H}}^{0-}), d_{*_{\mathbb{H}}}^+ = (d_j^*, j \in J_{\mathbb{H}}^{0+}),$$

$$J_{\mathbb{H}}^{0-} = \{j \in J_{\mathbb{H}}^0 : x_j^0 = d_{*j}\}, J_{\mathbb{H}}^{0+} = \{j \in J_{\mathbb{H}}^0 : x_j^0 = d_j^*\}.$$

Это значит, что план $\tilde{x} = x^0 + \Delta x^0$, где $\Delta x_j^0 = \Delta d_{*j}^-, j \in J_{\mathbb{H}}^{0-}$, $\Delta x_j^0 = \Delta d_j^*, j \in J_{\mathbb{H}}^{0+}$, $\Delta x_{\mathbb{B}}^0 = (A_{\mathbb{B}}^0)^{-1}(\Delta b - A_{\mathbb{H}}^- \Delta d_{*_{\mathbb{H}}}^- - A_{\mathbb{H}}^+ \Delta d_{*_{\mathbb{H}}}^+)$, остается базисным с той же базисной матрицей $A_{\mathbb{B}}^0$. В этом случае не меняются вектор потенциалов u^0 и оценки $\Delta_j^0, j \in J_{\mathbb{H}}^0$. Отсюда следует, что при вариации параметров b, d_*, d^* оптимальный двойственный план λ^0 остается тем же. Тогда в соответствии с теорией двойственности получим:

$$\gamma(\tilde{b}, \tilde{d}_*, \tilde{d}^*) - \gamma(b, d_*, d^*) = u^0 \Delta b - v^0 \Delta d_* + w^0 \Delta d^*. \quad (3.17)$$

Пусть меняется только i -я координата вектора b , а остальные его координаты и границы прямых ограничений фиксированы. Тогда из (3.14) получим $\Delta y = u_i^0 \Delta b_i$, откуда следует дифференцируемость функции $\gamma(b)$ по b_i в точке b и выполняется равенство (3.12).

Аналогично из (3.17) следуют равенства (3.13).

Рассмотрим, наконец, функцию $\gamma(A)$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Пусть у матрицы A варьируется только один элемент a_{ij} . Обозначим через E_{ij} $m \times n$ -матрицу, у которой $e_{ij} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Тогда $\tilde{A} = A + E_{ij} \Delta a_{ij}$. Возмущенная задача имеет вид

$$c'x \rightarrow \max, \quad \tilde{A}x = b, \quad d_* \leq x \leq d^*. \quad (3.18)$$

Рассмотрим основные ограничения задачи (3.18) на плане x^0 : $(A + E_{ij} \Delta a_{ij})x^0 = b$. Отсюда следует: $Ax^0 = b + \Delta b$, где $\Delta b = -E_{ij}x^0 \Delta a_{ij}$, т. е.

$$\Delta b_k = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ -x_j^0 \Delta a_{ij}, & k = i, \quad k \in I. \end{cases} \quad (3.19)$$

Таким образом, у вектора b меняется только i -я компонента, причем из доказанного выше (см. (3.12)) следует, что значение задачи дифференцируемо по компонентам вектора b ($\partial \gamma(A)/\partial b_i = u_i^0$), а сами

компоненты согласно (3.19) дифференцируемы по a_{ij} ($\partial b_i / \partial a_{ij} = -x_j^0$), следовательно, функция $\gamma(A)$ дифференцируема по a_{ij} :

$$k_{ij}(A) = \frac{\partial \gamma(A)}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial \gamma(b)}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial a_{ij}} = -u_i^0 x_j^0$$

и верна формула (3.14). ■

Из теоремы 3.1 следует *физический смысл компонент двойственного плана* λ^0 : каждая из них равна начальной скорости изменения максимального значения целевой функции при увеличении соответствующего параметра задачи.

Существует *мнемоническое правило вычисления коэффициентов чувствительности*. Используя теорию двойственности, запишем значение задачи следующим образом:

$$\gamma(A, b, c, d_*, d^*) = c'x^0 + u^0(b - Ax^0) = b'u^0 - d_*v^0 + d^*w^0. \quad (3.20)$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты чувствительности (3.11) – (3.14) задачи получаются непосредственным дифференцированием функции (3.20) по соответствующим параметрам.

Замечание 3.2. Отметим, что зависимость приращения максимального значения целевой функции от приращения элементов матрицы A нелинейная, в то время как от остальных параметров эта зависимость линейная, т. е.

$$\Delta \gamma(A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_{ij}(A) \Delta a_{ij} + o\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\Delta a_{ij}|\right), \quad \Delta \gamma(p) = \sum_{j=1}^q k_j(p) \Delta p_j,$$

где $p = (p_j, j = \overline{1, q})$ – вектор параметров (b, c, d_*, d^*), $k_j, j = \overline{1, q}$, – коэффициенты чувствительности.

3.4. Коррекция оптимальных планов при возмущении задач ЛП

При решении прикладных задач иногда необходимо знать оптимальный план не только исходной задачи,

$$\varphi(x) = c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*, \quad (3.21)$$

но и задач, близких к ней по значениям параметров

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{c}x \rightarrow \max, \quad \tilde{A}x = \tilde{b}, \quad \tilde{d}_* \leq x \leq \tilde{d}^*. \quad (3.22)$$

Если параметры задачи (3.22) достаточно мало отличаются от параметров задачи (3.21), то для оценки значения задачи (3.22) в первом приближении можно воспользоваться результатами анализа чувствительности, приведенного в разд. 3.3.

Пусть $\gamma = \gamma(A, b, c, d_*, d^*)$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}_*, \tilde{d}^*)$ – значения задач (3.21), (3.22) соответственно, x^0 – оптимальный базисный план задачи (3.21) с базисной матрицей A_b^0 .

Тогда в случае прямой и двойственной невырожденности плана x^0 по формуле Тейлора получим:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \gamma + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial c_j} \Delta c_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \gamma}{\partial b_i} \Delta b_i + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \gamma}{\partial d_{*j}} \Delta d_{*j} + \frac{\partial \gamma}{\partial d_j^*} \Delta d_j^* \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial a_{ij}} \Delta a_{ij} + o(\|\Delta A\|, \|\Delta b\|, \|\Delta c\|, \|\Delta d_*\|, \|\Delta d^*\|) = \\ &= \gamma + \sum_{j=1}^n x_j^0 \Delta c_j + \sum_{i=1}^m u_i^0 \Delta b_i + \sum_{j=1}^n (-v_j^0 \Delta d_{*j} + w_j^0 \Delta d_j^*) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-u_i^0 x_j^0) \Delta a_{ij} + o(\|\Delta A\|, \|\Delta b\|, \|\Delta c\|, \|\Delta d_*\|, \|\Delta d^*\|). \quad (3.23)\end{aligned}$$

Формула (3.23) позволяет приближенно найти значение задачи (3.22). Однако оно при заметных отклонениях параметров задачи может оказаться весьма грубым и приходится строить точное решение задачи (3.22).

Численные эксперименты показывают, что при решении задачи (3.22) нерационально рассматривать ее как самостоятельную. Гораздо более эффективным оказывается метод построения ее решения путем коррекции оптимального плана задачи (3.21) с помощью двойственного симплекс-метода. При этом в качестве начальной базисной матрицы задачи (3.19) следует взять оптимальную базисную матрицу задачи (3.21).

Цель следующего раздела – описать методы коррекции для случаев, когда у задач (3.21), (3.22) разные размеры.

3.5. Изменение размеров задачи

Размер $m \times n$ задачи ЛП характеризуется числом переменных n и числом основных ограничений m . Приведем методы вычисления оптимального плана при изменении этих параметров.

1. Увеличение числа переменных. Пусть x^0 – оптимальный базисный план с базисной матрицей A_B^0 задачи (3.18), в которой $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Используем результаты вычисления плана x^0 для решения задачи

$$\begin{aligned} c'x + c_{n+1}x_{n+1} &\rightarrow \max, \\ Ax + a_{n+1}x_{n+1} &= b, \\ d_* \leq x \leq d^*, \quad d_{n+1} \leq x_{n+1} &\leq d_{n+1}^*, \end{aligned} \tag{3.24}$$

у которой число переменных увеличилось на единицу по сравнению с задачей (3.21). Понятно, что для любого значения \bar{x}_{n+1} , $d_{n+1} \leq \bar{x}_{n+1} \leq d_{n+1}^*$ (кроме $\bar{x}_{n+1} = 0$), $(n+1)$ -вектор (x^0, \bar{x}_{n+1}) не будет планом задачи (3.24), поскольку не будут выполняться основные ограничения на этом векторе.

Поэтому для решения задачи (3.24) используем двойственный симплекс-метод, в котором в качестве начальной базисной матрицы возьмем A_B^0 . При этом первая итерация начинается с подсчета $\delta_{n+1} = c_{n+1} - u'a_{n+1}$, определения знака δ_{n+1} и подсчета α_{n+1} , поскольку $u'^0 = c'_B(A_B^0)^{-1}$, $\alpha_H = x_H^0 = (x_j^0, j \in J_H^0)$ уже подсчитаны на последней итерации решения задачи (3.18).

Замечание 3.3. Если $d_{n+1} = 0$ или $d_{n+1}^* = 0$, то взяв $\bar{x}_{n+1} = 0$, получим, что

$$(x^0, \bar{x}_{n+1} = 0) \tag{3.25}$$

является базисным планом задачи (3.24) с базисной матрицей A_B^0 . Очевидно, необходимыми и достаточными условиями оптимальности этого плана являются условия (здесь $\Delta = \delta$):

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &\leq 0, \text{ если } \bar{x}_{n+1} = d_{n+1} = 0, \\ \Delta_{n+1} &\geq 0, \text{ если } \bar{x}_{n+1} = d_{n+1}^* = 0. \end{aligned}$$

Если эти условия не выполняются, то для вычисления оптимального плана задачи (3.24) используем либо прямой симплекс-метод с начальным базисным планом (3.25) и базисной матрицей A_B^0 , либо двойственный симплекс-метод с этой же начальной базисной матрицей.

Замечание 3.4. Если $0 \in (d_{n+1}, d_{n+1}^*)$, то вектор (3.25) будет планом задачи (3.24), причем если $\Delta_{n+1} = 0$, то обобщенным базисным планом,

более того, оптимальным в задаче (3.24). Если же $\Delta_{n+1} \neq 0$, то для получения оптимального плана применяем двойственный симплекс-метод.

2. Уменьшение числа переменных. Рассмотрим теперь задачу, у которой число переменных меньше, чем в задаче (3.21):

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j \rightarrow \max, \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j x_j = b, \\ & d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq k. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Для определения плана \tilde{x}^0 задачи (3.26) достаточно в задаче (3.21) положить $d_{*k} = d_k^* = 0$ и решать задачу (3.21) с этим ограничением и начальной базисной матрицей A_B^0 , применяя двойственный симплекс-метод.

3. Увеличение числа ограничений. Пусть к основным ограничениям задачи (3.21) добавляется одно из следующих соотношений

$$g'x \leq \alpha, \tag{3.27}$$

$$g'x \geq \alpha, \tag{3.28}$$

$$g'x = \alpha. \tag{3.29}$$

Ясно, что если план x^0 задачи (3.21) удовлетворяет дополнительному ограничению, то он остается оптимальным в задаче (3.21) с этим дополнительным ограничением. Поэтому будем считать, что на векторе x^0 не выполняется дополнительное ограничение.

Рассмотрим задачу (3.21) с дополнительным ограничением (3.27). Введя свободную переменную x_{n+1} , запишем (3.27) в виде

$$g'x + x_{n+1} = \alpha, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq d_{n+1}^*. \tag{3.30}$$

Если эти соотношения добавить к задаче (3.21), то получим новую задачу

$$\begin{aligned} & c'x \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} Ax = b, \\ g'x + x_{n+1} = \alpha, \end{cases} \\ & d_* \leq x \leq d^*, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq d_{n+1}^*. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Поскольку на x^0 неравенство (3.27) не выполняется, то для задачи (3.31) вектор $(x^0, x_{n+1} = \alpha - g'x^0)$ будет базисным псевдопланом, соответствующим базисной матрице

$$\tilde{A}_B = \begin{pmatrix} A_B^0 & 0 \\ g'_B & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

где $g'_B = (g_j, j \in J_B^0)$. Отметим, что условия оптимальности не будут выполняться лишь для компоненты $\alpha_{n+1} = \alpha - g'x^0$.

Далее для решения задачи (3.31) применяем двойственный симплекс-метод с начальной базисной матрицей (3.32).

Рассмотрим дополнительное ограничение (3.28). Его можно переписать в виде $g'x - x_{n+1} = \alpha$, $0 \leq x_{n+1} \leq d_{n+1}^*$, и добавить к основным ограничениям задачи (3.21).

Теперь вектор $(x^0, x_{n+1} = g'x^0 - \alpha)$ будет базисным псевдопланом для новой задачи, соответствующим базисной матрице $\tilde{A}_B = \begin{pmatrix} A_B^0 & 0 \\ g'_B & -1 \end{pmatrix}$.

Наконец, дополнительное ограничение (3.29) перепишем в виде (3.30), где $d_{n+1}^* = 0$, добавим к задаче (3.21) и применим двойственный симплекс-метод с начальной базисной матрицей (3.32).

4. Уменьшение числа ограничений. Пусть после получения оптимального базисного плана x^0 задачи (3.21) с базисной матрицей A_B^0 удаляется k -е основное ограничение. Требуется найти новый оптимальный план \tilde{x}^0 . Пусть $A_B^0 = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$. Тогда в качестве начальной базисной матрицы новой задачи возьмем матрицу $\tilde{A}_B = (\tilde{a}_{j_s}, s = \overline{1, m}, s \neq k)$, где $\tilde{a}_{j_s} = (a_{ij_s}, i = \overline{1, m}, i \neq k)$, т. е. $\tilde{J}_B = J_B \setminus j_k$ и во всех векторах a_j , $j \in \tilde{J}_B$, удаляем k -ю координату. Для решения новой задачи применяем прямой или двойственный симплекс-метод. Начальный базисный план для нее будет x^0 .

Заметим, что для новой задачи

$$\tilde{\Delta}_j = c_j - \tilde{u}'\tilde{a}_j = c_j - u'a_j - u_k a_{kj} = \Delta_j - u_k a_{kj}, \quad j = \overline{1, n}.$$

3.6. Нестационарные задачи

На практике параметры объектов оптимизации могут меняться с течением времени. Поэтому приходится решать задачи вида

$$c'(t)x \rightarrow \max, A(t)x = b(t), d_*(t) \leq x \leq d^*(t), t \in T, \quad (3.33)$$

где t – время, которое рассматривается на дискретном промежутке $T = \{0, h, 2h, \dots, t^* = Nh\}$. Задача (3.33) называется *нестационарной задачей ЛП*. Будем считать, что все функции, описывающие модель (3.33), непрерывны по t .

Планом задачи (3.33) назовем n -вектор-функцию $x(t)$, $t \in T$, которая в каждый момент времени t удовлетворяет ограничениям задачи (3.33). *Решением (оптимальным планом)* этой задачи называется план $x^0(t)$, $t \in T$, значения которого в каждый момент времени доставляют максимум целевой функции задачи (3.33):

$$c'(t)x^0(t) = \max_{x \in X(t)} c'(t)x, \quad t \in T,$$

где $X(t)$ – множество планов задачи (3.30) в момент $t \in T$.

Если параметры задачи (3.33) известны, то можно заранее для каждого $t \in T$ построить решение задачи как стационарной. Однако такой подход неэффективен и нереален, если значения параметров не известны, а становятся доступными только в текущий момент времени. Поэтому разумнее поступать следующим образом.

Полагаем $t=0$. Решаем задачу

$$c'(0)x \rightarrow \max, A(0)x = b(0), d_*(0) \leq x \leq d^*(0). \quad (3.34)$$

Параметры задачи (3.33) при $t=0$, как правило, предварительно известны. Это исходные данные. Поэтому задачу (3.34) можно решать заранее. При этом нет ограничений на время построения оптимального базисного плана. Обозначим его через $x^0(0)$, а соответствующую оптимальную базисную матрицу – через $A_B^0(0)$. Предположим, что решение задачи (3.33) уже построено в моменты $0, h, 2h, \dots, \tau = kh$. Обозначим его для последнего момента через $x^0(\tau)$, а базисную матрицу – через $A_B^0(\tau)$. Найдем оптимальный базисный план для следующего момента $\tau + h$ времени, когда становятся известными значения параметров $c(\tau+h)$, $b(\tau+h)$, $d_*(\tau+h)$, $d^*(\tau+h)$, $A(\tau+h)$, т. е. решим задачу

$$c'(\tau+h)x \rightarrow \max, A(\tau+h)x = b(\tau+h), d_*(\tau+h) \leq x \leq d^*(\tau+h). \quad (3.35)$$

В качестве начальной базисной матрицы для задачи (3.35) возьмем матрицу $A_b^0(\tau)$ и решим задачу (3.35) двойственным симплекс-методом. Поскольку, по предположению, параметры задачи (3.34) непрерывны, то при малых периодах квантования h элементы задачи (3.35) мало отличаются от элементов задачи, которая была решена в предыдущий момент времени τ . В такой ситуации двойственный симплекс-метод решит задачу (3.35) за малое число итераций. Это намного эффективнее, чем решать эту задачу как исходную, не используя никакой информации о предыдущей работе.

Если время, затраченное на промежутке $[\tau + h, \tau + 2h]$ на осуществление итераций при решении задачи (3.35) двойственным симплекс-методом, не превышает h , то говорят, что задача (3.34) решается в *режиме реального времени*.

Замечание 3.5. В задаче (3.34) от времени могут зависеть не только указанные параметры, но и размеры задачи, т. е. числа m и n . Понятно, что функции $m = m(t)$, $n = n(t)$, $t \in T$, не являются непрерывными. Однако и в этом случае для решения задачи (3.34) разумно применять изложенный выше метод решения, используя для решения задачи (3.35) двойственный симплекс-метод.

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Общие задачи ЛП, исследованные в предыдущих параграфах, не обладают специальными структурами матриц условий, и элементами этих матриц могут быть любые числа. В приложениях часто встречаются специальные задачи ЛП, у которых матрицы условий обладают хотя бы одним из следующих свойств: 1) сильно разрежены (имеют небольшое количество ненулевых элементов); 2) имеют специальную структуру (блочную, ленточную и т. п.); 3) их элементы генерированы по специальным правилам. Каждую из таких задач можно свести к общей задаче ЛП, решать общими прямым и двойственным симплекс-методами. Однако значительно более эффективным оказывается другой подход, в котором общие методы адаптируются к специальным задачам, в результате чего получаем очень эффективные специальные методы, учитывающие специфику задач.

Выделение специальных задач и разработка для них специальных методов – одно из основных направлений развития современной теории экстремальных задач.

В данном пособии рассмотрим только один класс специальных задач, называемых транспортными, и, адаптируя для них симплекс-метод, построим эффективный метод потенциалов их решения.

4.1. Сетевая транспортная задача

Пусть имеется m населенных пунктов A_1, \dots, A_m . В некоторых из них производится однородная продукция, в других она потребляется, в остальных продукция не производится и не потребляется. Населенные пункты соединены дорогами с односторонним движением с определенными пропускными способностями. Известна стоимость перевозки единицы продукции по каждой дороге. Требуется с минимальными издержками доставить продукцию от производителей к потребителям, обеспечив полностью потребности потребителей и вывоз всей продукции производителей.

Составим математическую модель сформулированной задачи. Пусть $I = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество номеров населенных пунктов (*узлов*). Каждому узлу $i \in I$ припишем число a_i (*интенсивность узла*). Если $a_i > 0$, то узел назовем *источником* (пунктом производства с объемом производства a_i). Узел i с $a_i < 0$ назовем *стоком* (пунктом потребления с объемом потребления $|a_i|$). Если $a_i = 0$, то узел назовем *нейтральным* (*промежуточным*, *транзитным*). Каждой имеющейся дороге от пункта A_i к пункту A_j поставим в соответствие упорядоченную пару чисел (i, j) , $i, j \in I$, которую назовем *дугой* с началом в узле i и концом в узле j . Множество всех дуг обозначим через U . Пару $S = \{I, U\}$ из множества узлов I и множества дуг U назовем (*ориентированной*) *сетью*. Каждой дуге $(i, j) \in U$ припишем два числа: x_{ij} – *дуговой поток* (*поток по дуге* (i, j) – количество перевозимой продукции из пункта A_i в пункт A_j); c_{ij} – *стоимость* единичного дугового потока ($x_{ij} = 1$) (стоимость перевозки единицы продукции из A_i в A_j , издержки по перевозке единицы продукции). Из ограниченности пропускной способности дорог следуют ограничения на дуговые потоки

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \quad (4.1)$$

где d_{ij} – пропускная способность дуги (i, j) . Для каждого узла $i \in I$ введем два множества

$$I_i^+ = \{j \in I : (i, j) \in U\}, \quad I_i^- = \{j \in I : (j, i) \in U\},$$

первое из которых представляет множество узлов, в которых заканчиваются дуги, начинающиеся в узле i , второе – множество узлов, в которых начинаются дуги, заканчивающиеся в узле i .

Тогда требование о полном удовлетворении спроса каждого потребителя и полной реализации продукции каждым производителем принимает вид

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) называются *условиями баланса* в узлах (для каждого пункта суммарное количество привезенной в этот пункт продукции и произведенной в ней равно суммарному количеству вывезенной из этого пункта продукции и потребленной в нем).

Подсчитаем суммарные транспортные издержки на перевозку продукции $\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}$, которые согласно требованиям задачи должны быть минимальными.

Таким образом, математическая модель сформулированной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\ & \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i,j) \in U. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Совокупность $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ дуговых потоков называется *потоком на сети* (или *сетевым потоком*), если она удовлетворяет ограничениям (4.1), (4.2). Задача (4.3) называется *сетевой транспортной задачей* (другие названия: *транспортная задача в сетевой форме*, *задача о потоке минимальной стоимости*).

К задачам вида (4.3) сводятся многочисленные задачи, имеющие другую физическую природу, отличную от оптимизации перевозок.

Ясно, что задача (4.3) – задача ЛП. Если ее свести к канонической задаче, то получим матрицу условий, элементы которой равны $-1, 0, 1$ (см. следующий пример).

Пример 4.1. Рассмотрим сеть, представленную на рис. 4.1. Номера узлов указаны в овалах, дуги (i, j) изображены линиями со стрелкой из i в j , источники и стоки – стрелками, входящими в узел-источник и выходящими из узла-стока (возле стрелок записываются абсолютные значения интенсивностей). Стоимость перевозок и пропускную способность записываем над дугами или слева от них, дуговые потоки – под дугами или справа от них.

Запишем условия баланса последовательно для каждого узла $i = 1, 2, \dots, 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{12} + x_{16} - x_{31} - x_{51} = a_1 = 0, \\ -x_{12} + x_{24} = a_2, \\ x_{31} + x_{35} = a_3, \\ -x_{24} - x_{64} = a_4, \\ x_{51} - x_{35} + x_{56} = a_5, \\ -x_{16} + x_{64} - x_{56} = a_6. \end{array} \right.$$

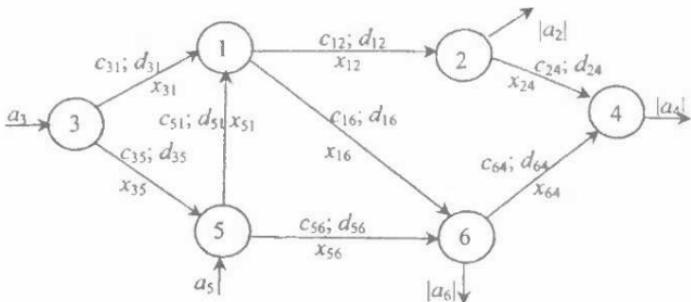


Рис. 4.1

Как видим, матрица условий баланса имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Столбцы этой матрицы соответствуют дугам. Так, например, первый столбец соответствует дуге $(1, 2)$, второй – дуге $(1, 6)$, седьмой – дуге $(6, 4)$ и т. д. Обозначив эти столбцы через $a_{(i,j)}$ (с двойным индексом, соответствующим дуге (i, j)), получим, что в столбце $a_{(i,j)}$ на i -м месте стоит 1, на j -м –1, остальные нули.

Из приведенного примера видно, что матрица условий баланса задачи (4.3) имеет специальную структуру. Отметим три свойства задачи, которые будут полезны при адаптации симплекс-метода к задачам вида (4.3). Первые два свойства следуют непосредственно из вида матрицы условий.

Предположим, что в задаче (4.3) существует поток $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$. Из уравнений баланса видно, что каждая переменная x_{ij} входит только в два уравнения (для узла i и для узла j), причем в одно из них с коэффициентом 1 (для узла i), в другое с коэффициентом

-1 (для узла j). Поэтому если просуммируем все уравнения (4.2), то получим слева нуль. Таким образом, необходимым условием существования потока является равенство

$$\sum_{i \in I} a_i = 0. \quad (4.5)$$

Запишем уравнения баланса в матричной форме и обозначим через A матрицу условий, $a_{(i,j)} \in \mathbb{R}^m$ – столбцы матрицы условий A , соответствующие переменным x_{ij} , $a_{(i)}$ – ее i -ю строку. Равенство (4.5) означает, что ранг матрицы условий A меньше m :

$$\text{rank } A < m. \quad (4.6)$$

Поскольку m -вектор $a_{(i,j)}$ содержит только два ненулевых элемента, один из которых 1 , второй -1 , то после суммирования всех уравнений баланса имеем

$$\sum_{i \in I} a_{(i)} = 0,$$

что усиливает условие (4.6) и показывает, что любая строка $a_{(i)}$ выражается через остальные и равна

$$a_{(i)} = -\sum_{\substack{s \in I \\ s \neq i}} a_{(s)}, \quad i \in I.$$

Можно усилить свойство (4.6). Докажем, что

$$\text{rank } A = m - 1.$$

С этой целью с помощью перестановки строк и столбцов матрицы A получим новую матрицу \bar{A} ($\text{rank } \bar{A} = \text{rank } A$). Матрица \bar{A} получается следующим образом.

Составим таблицу из m строк и $|U|^1$ столбцов. Строкам последовательно припишем номера i_1, i_2, \dots, i_m . Первым столбцам припишем номера i_2, \dots, i_m . В качестве узла i_1 возьмем любой узел из I . Упорядочим остальные узлы согласно приведенной нумерации (например, двигаясь по часовой стрелке вокруг узла i_1 и присваивая номера $i_2, \dots, i_m = |I_{i_1}^+| + |I_{i_1}^-|$ узлам, входящим в $I_{i_1}^+ \cup I_{i_1}^-$). Таким образом, в первой строке таблицы в первых m_1 столбцах появится 1 (если соот-

¹⁾ Для множества M обозначение $|M|$ означает его мощность. Для множества M , состоящего из конечного числа элементов, $|M|$ означает количество элементов в нем.

всему столбцу присвоен номер узла из $I_{i_1}^+$ или -1 (в противном случае), в остальных столбцах — нули. Столбец с номером i_s соответствует дуге (i_1, i_s) , если стоит 1, и дуге (i_s, i_1) — если -1 .

Вторая строка соответствует узлу i_2 . Поскольку $i_2 \in I_{i_1}^+ \cup I_{i_1}^-$, то в клетке (i_2, i_2) таблицы появится 1, если $i_2 \in I_{i_1}^-$, и -1 , если $i_2 \in I_{i_1}^+$. В остальных $m_1 - 1$ столбцах второй строки стоят нули. С узлом i_2 поступаем аналогичным образом, как и с узлом i_1 : двигаясь по часовой стрелке вокруг него, приписываем номера $i_{m_1+1}, i_{m_1+2}, \dots, i_{m_2}$ узлам, входящим в $I_{i_2}^+ \cup I_{i_2}^-$, и столбцам правее столбца i_{m_1} , а соответствующие клетки второй строки (i_2, i_s) , $s = m_1 + 1, \dots, m_2$, заносим 1 или -1 , как и выше для первой строки. Однако теперь, если встретится узел i_k , имеющийся среди узлов i_3, \dots, i_{m_1} , то его номер присваиваем столбцу правее $m - 1$ столбцов и не имеющих еще номера. В соответствующую клетку заносим 1 или -1 по тем же правилам, которые указаны выше для узла i_1 .

Аналогичным образом поступаем с остальными строками таблицы. В результате получим таблицу, соответствующую матрице условий баланса, в которой в первой строке первый элемент ненулевой (1 или -1), а под диагональю подматрицы, состоящей из m строк и первых $m - 1$ столбцов, т. е. в клетках (i_s, i_s) , стоят 1 или -1 , а в остальных клетках — нули. Отсюда следует, что $\text{rank } A = m - 1$.

Пример 4.2. Рассмотрим сеть, представленную на рис. 4.1. В качестве начального узла i_1 возьмем узел 3, т. е. $i_1 = 3$. Тогда $I_{i_1}^+ = I_3^+ = \{1, 5\}$, $I_{i_1}^- = \emptyset$. Таким образом, $i_2 = 1$, $i_3 = 5$. Заполняем клетки (i_1, i_2) и (i_1, i_3) единицами (табл. 4.1). Далее берем узел $i_2 = 1$. Для него имеем $I_{i_2}^+ = I_1^+ = \{2, 6\}$, $I_{i_2}^- = \{3, 5\}$. Таким образом, $i_4 = 2$, $i_5 = 6$.

Таблица 4.1

	$i_2 = 1$	$i_3 = 5$	$i_4 = 2$	$i_5 = 6$	$i_6 = 4$	$i_3 = 5$	$i_5 = 6$	$i_6 = 4$
$i_1 = 3$	1	1						
$i_2 = 1$	-1		1	1		-1		
$i_3 = 5$		-1				1	1	
$i_4 = 2$			-1		1			
$i_5 = 6$				-1			-1	1
$i_6 = 4$					-1			-1

В клетку (i_2, i_2) заносим -1 ($i_2 \in I_{i_2}^+$). В клетки (i_2, i_4) , (i_2, i_5) заносим 1 , поскольку $i_4, i_5 \in I_{i_2}^+$. Узел $5 \in I_{i_2}^+$ и ему присвоен номер i_3 . Поэтому столбцу правее столбца i_6 присвоим этот номер: $i_3 = 5$ и заносим в соответствующую клетку -1 ($5 \in I_{i_2}^-$).

Далее рассмотрим узел $i_3 = 5$. Для него $I_{i_3}^+ = \{1, 6\}$, $I_{i_3}^- = \{3\}$. Поскольку $i_3 \in I_{i_3}^+$, то в клетку (i_3, i_3) , стоящую в основной части таблицы (в первых пяти столбцах), заносим -1 . Узлу 6 присвоен номер $i_5 = 6$. Поэтому дополним таблицу еще одним столбцом, соответствующим дуге $(i_3, i_5) = (5, 6)$ с номером i_5 и занесем 1 в соответствующую клетку (i_3, i_5) . Наконец, $i_3 = 5 \in I_{i_2}^-$ ($i_2 = 1$), поэтому заносим 1 в клетку (i_3, i_3) в столбце, соответствующем множеству $I_{i_2}^-$.

Следующий узел $i_4 = 2$. Для него $I_{i_4}^+ = \{4\}$, $I_{i_4}^- = \{1\}$. Поэтому $i_6 = 4$. В клетку (i_4, i_6) заносим 1 . Поскольку $i_4 = 2 \in I_{i_2}^+$ ($i_2 = 1$), то в клетку (i_4, i_4) заносим -1 .

Рассмотрим узел $i_5 = 6$. Для него $I_{i_5}^+ = \{4\}$, $I_{i_5}^- = \{1, 5\}$. Все узлы уже встречались и имеют свои номера. Поскольку $i_5 = 6 \in I_{i_3}^+$ ($i_3 = 5$), $i_5 \in I_{i_2}^+$ ($i_2 = 1$), то в клетки (i_5, i_5) заносим -1 . Узел 4 имеет номер $i_6 = 4$. Добавим столбец с этим номером и занесем 1 в клетку (i_5, i_6) .

Наконец, рассматриваем узел $i_6 = 4$. Для него $I_{i_6}^+ = \emptyset$, $I_{i_6}^- = \{2, 6\}$. Поскольку $i_6 = 4 \in I_{i_4}^+$ ($i_4 = 2$) и $i_6 \in I_{i_5}^-$ ($i_5 = 6$), то в клетки (i_6, i_6) заносим -1 .

Остальные элементы таблицы нулевые. Таким образом, таблица заполнена полностью. Она соответствует матрице (4.4), но с переставленными строками и столбцами. Из табл. 4.1 видно (выделены границы подматрицы), что $\text{rank } A = m - 1 = 5$.

Задачу (4.3) можно решать симплекс-методом. Однако, учитывая специальную структуру матрицы условий, удобнее все операции симплекс-метода реализовать на сети (сетевая реализация симплекс-метода, которая называется *методом потенциалов*). Для ее реализации потребуются некоторые дополнительные сетевые понятия и факты.

Дугу (i, j) без ориентации назовем *ребром* с граничными узлами i , j и обозначим $\{i, j\}$. Узел сети *висячий*, если он граничен для единственного (висячего) ребра. Последовательность различных ребер $\{i_1, i_2\}$, $\{i_2, i_3\}$, ..., $\{i_{k-1}, i_k\}$, в которой соседние ребра имеют общие граничные узлы, называется (*простой*) *цепью*, соединяющей узлы i_1 и i_k . Если в последовательности узлов $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ этой цепи нет одинаковых, то цепь называется *элементарной*. Выберем направление движения

вдоль цепи. Если это направление совпадает с направлением $i \rightarrow j$ дуги (i, j) , соответствующей ребру $\{i, j\}$ цепи, то (i, j) – *прямая дуга*. Дуга с противоположным направлением – *обратная*.

Сеть назовем *связной*, если любые ее два узла можно соединить цепью. В дальнейшем будем рассматривать только простые элементарные цепи и связные сети.

Цепь $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ с совпадающими узлами i_1, i_k назовем *циклом*.

Лемма 4.1. Сеть без циклов содержит висячее ребро.

Доказательство. Пусть i_1 – произвольный узел сети. Если он не висячий, то из связности сети следует существование ребра $\{i_1, i_2\}$. Если и узел i_2 не висячий, то найдется ребро $\{i_2, i_3\}$, причем $i_3 \neq i_1$, поскольку в сети нет циклов. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов обнаружим висячий узел и соответствующее ему висячее ребро. ■

Лемма 4.2. Удаление висячего ребра (вместе с висячим узлом) или ребра из цикла не нарушает связности сети.

Сеть $S = \{I, U\}$ называется *деревом*, если $|I| = |U| + 1$.

Лемма 4.3. Сеть является деревом тогда и только тогда, когда она не содержит циклов.

Доказательство. Достаточность. По лемме 4.1 в сети найдется висячее ребро. Удалим его вместе с соответствующим висячим узлом. Согласно лемме 4.2 оставшаяся сеть будет связной и без циклов. У нее удалили висячее ребро и висячий узел. Через $|I| - 2$ шагов останутся два узла, граничных для единственного ребра. Таким образом, $|I| = |U| + 1$.

Необходимость. Предположим, что у дерева есть цикл. Этот цикл не может составить все дерево, поскольку у него число ребер равно числу узлов. Среди узлов и ребер, не входящих в рассматриваемый цикл, удалим все висячие узлы и соответствующие им висячие ребра. Если оставшиеся ребра образуют еще один цикл, то удалим в нем ребро, не входящее в рассматриваемый цикл. При этом число узлов не изменится, а число ребер сократится на одно. Продолжив этот процесс, через конечное число шагов из исходной сети выделим рассматриваемый цикл. В нем число узлов равно числу ребер. Следовательно, в исходной сети-дереве число ребер было не меньше числа узлов: $U \geq I$. Получили противоречие. ■

Лемма 4.4. Каждая пара узлов дерева связана единственной цепью.

Доказательство. Если бы существовала другая цепь, соединяющая два узла, то получился бы цикл, что противоречит лемме 4.3. ■

Для сети $S = \{I, U\}$ сеть $S^* = \{I, U^*\}$, где $U^* \subset U$, называется *частичной сетью*. Частичная сеть, являющаяся деревом, называется *деревом сети S*.

Лемма 4.5. Пусть S^* – дерево сети S . При любой дуге $(i, j) \in U$, $(i, j) \notin U^*$, частичная сеть $S_1 = \{I, U_1\}$, где $U_1 = U^* \cup (i, j)$, содержит ровно один цикл.

Доказательство. Существование циклов в S_1 следует из леммы 4.3. Если их больше одного, то удалим в одном, фиксированном, цикле ребро, не входящее хотя бы в один из других циклов. Для оставшейся частичной сети $S_2 = \{I, U_2\}$ имеем $|I| = |U_2| + 1$, т. е. S_2 – дерево с циклами. Получили противоречие. ■

Чтобы обосновать метод потенциалов, введем еще одно понятие.

Пусть задана линейная система $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$. Векторы a_j , $j \in J_B \subset J = \{1, \dots, n\}$ (столбцы матрицы A), образуют полную (линейно независимую) систему векторов, если уравнение $\sum_{j \in J_B} a_j x_j = 0$ имеет только нулевое решение $x_j = 0$, $j \in J_B$, но при любом $j_* \in J$, $j_* \notin J_B$, имеет ненулевое решение $x_j \neq 0$, $j \in J_B \cup j_*$, уравнение $\sum_{j \in J_B} a_j x_j + a_{j_*} x_{j_*} = 0$.

Следуя этому, введем для задачи (4.3) аналогичное определение, поскольку условия баланса тоже образуют линейную систему, столбцы матрицы которой соответствуют дугам $(i, j) \in U$.

Определение 4.1. Множество дуг $U_B \subset U$ сети $S = \{I, U\}$ называется *полным*, если система

$$\sum_{j \in I_i^+(U_B)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_B)} x_{ji} = 0, \quad i \in I,$$

имеет только нулевое решение $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_B$, но для любой дуги $(i_*, j_*) \in U$, $(i_*, j_*) \notin U_B$, имеет ненулевое решение $x_{ij} \neq 0$, $(i, j) \in U_B \cup (i_*, j_*)$, система

$$\sum_{j \in I_i^+(U_B \cup (i_*, j_*))} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_B \cup (i_*, j_*))} x_{ji} = 0, \quad i \in I.$$

Определение 4.2. Совокупность $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij}, (i, j) \in U)$, для которой в каждом узле выполняется условие баланса (4.2), называется *псевдопотоком*.

Лемма 4.6. Сеть с нулевыми интенсивностями узлов ($a_i = 0$, $i \in I$) допускает бесконечное число псевдопотоков, если в ней имеется цикл.

Доказательство. Положим $\alpha_{ij} = 0$ для всех ребер $\{i, j\}$, не входящих в цикл. Выберем направление обхода вдоль цикла по направлению $i_0 \rightarrow j_0$ (или $j_0 \rightarrow i_0$) дуги (i_0, j_0) , соответствующей ребру $\{i_0, j_0\}$ цикла. Для ребра $\{i, j\}$ цикла положим $\alpha_{ij} = \theta$, если (i, j) – прямая дуга, $\alpha_{ij} = -\theta$, если (i, j) – обратная дуга. При любом θ построенная совокупность $\alpha = (\alpha_{ij}, (i, j) \in U)$ удовлетворяет равенствам (4.2). ■

Псевдопоток, полученный в доказательстве леммы, называется (i_0, j_0) -циркуляцией со значением θ .

Теорема 4.1 (критерий полноты множества дуг). В сети $S = \{I, U\}$ множество $U_B \subset U$ является полным тогда и только тогда, когда $S_B = \{I, U_B\}$ – дерево сети.

Доказательство. Необходимость. В S_B найдем висячий узел. Из условия баланса в этом узле (с нулевой интенсивностью) следует, что псевдопоток вдоль соответствующего ему висячего ребра равен нулю. Удалим висячие ребро и узел и повторим операции. Через $|I|-1$ шаг получим нулевой псевдопоток на S_B . Если к S_B добавить любую дугу $(i, j) \in U, (i, j) \notin U_B$, то в силу леммы 4.5 получится цикл, вследствие чего (лемма 4.6) возникнет (i_0, j_0) -циркуляция со значением $\theta > 0$. Таким образом, U_B – полное множество дуг.

Достаточность. Пусть U_B – полное множество дуг. Совокупность $S_B = \{I, U_B\}$ не может содержать циклов, иначе согласно лемме 4.6 на каждом цикле существует ненулевой псевдопоток. Сеть S_B связная, иначе добавление к U_B дуги (i_0, j_0) без образования циклов (что в несвязной сети всегда возможно) ведет к равенству $x_{i_0j_0} = 0$, которое следует из условия баланса в узле i_0 . Таким образом, согласно лемме 4.3 S_B – дерево сети. ■

Согласно введенному понятию и лемме 4.6 дуги $(i, j) \in U_B$ соответствуют линейно независимым столбцам матрицы A в условиях баланса. Их количество $|U_B| = m - 1$. В симплекс-методе в основу была положена базисная матрица $A_B = A(I, J_B)$, которая определяется базисным множеством J_B . В основу решения сетевой транспортной задачи положено полное множество дуг $U_B \subset U$ – аналог базиса

$a_j, j \in J_B$. Тогда по аналогии с базисным планом в § 1 введем понятие базисного потока.

Определение 4.3. Поток $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$ называется *базисным*, если $x_{ij} = 0 \vee d_{ij}$, $(i, j) \in U_H$, $U_H \subset U \setminus U_B$, U_B – полное множество дуг.

Дуговые потоки x_{ij} , $(i, j) \in U_B$, – *базисные*, x_{ij} , $(i, j) \in U_H$, – *небазисные*.

Определение 4.4. Базисный поток называется *невырожденным*, если все его базисные дуговые потоки некритические: $0 < x_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U_B$.

Множество дуг U_B , удовлетворяющее условиям определения 4.3, назовем *базисным*.

Заметим, что частичная сеть $S_B = \{I, U_B\}$ является деревом сети, а множество U_B можно построить, как показано выше при доказательстве свойства $\text{rank}A = m - 1$.

Как и в симплекс-методе, определим потенциалы и оценки сетевого потока. Для этого каждому узлу i припишем потенциал u_i , $i \in I$ (т. е. условию баланса для i -го узла соответствует потенциал u_i). Тогда по аналогии с симплекс-методом уравнения для потенциалов примут вид $a'_{(i,j)}u = -c_{ij}$, $(i, j) \in U_B$. Поскольку, как было сказано выше, у столбца $a_{(i,j)}$ матрицы A на i -м месте стоит 1, на j -м месте –1, то уравнения для потенциалов принимают вид:

$$u_i - u_j = -c_{ij}, \quad (i, j) \in U_B. \quad (4.7)$$

Оценки небазисных дуг тогда равны

$$\Delta_{ij} = (u_j - u_i) - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_H. \quad (4.8)$$

Заметим, что в системе (4.7) $|U_B| = m - 1$, а количество потенциалов m . Поэтому один из них можно положить равным любому числу, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. В самом деле, выберем произвольный узел $i_1 \in I$ и положим $u_{i_1} = 0$. Согласно лемме 4.4 каждый узел $i \in I$ можно соединить с i_1 единственной цепью $\{i_1, i_2, \dots, i_k, i\}$ дерева $S_B = \{I, U_B\}$. Рассматривая уравнения (4.7) вдоль дуг (от i_1 к i) этой цепи, определим потенциал u_i узла i . Выбираем направление $i_1 \rightarrow i_2$. Тогда

$$u_{i_2} = \begin{cases} u_{i_1} + c_{i_1 i_2}, & \text{если } (i_1, i_2) \text{ – прямая дуга,} \\ u_{i_1} - c_{i_2 i_1}, & \text{если } (i_2, i_1) \text{ – обратная дуга.} \end{cases}$$

Аналогично по i_2 вычисляется i_3 и т. д.

Теперь можем сформулировать критерий оптимальности базисного сетевого потока (по аналогии с критерием оптимальности базисного плана).

Теорема 4.2. Для оптимальности базисного потока $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$ с базисным множеством дуг U_B достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &\leq 0 \text{ при } x_{ij} = 0, \\ \Delta_{ij} &\geq 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij}, (i, j) \in U_H.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Приведем алгоритм прямого метода потенциалов для решения сетевой транспортной задачи.

Пусть задан начальный базисный поток x с базисным множеством дуг U_B .

1. Решаем систему уравнений (4.7) относительно потенциалов (на рисунках потенциалы записываем рядом с узлами).

2. По формулам (4.8) подсчитываем оценки небазисных дуговых потоков (оценки записываем под дугами или справа от них).

3. Проверяем условия оптимальности (4.9). Если они выполняются – сетевой поток x оптимален: решение прекращаем. В противном случае переходим к следующему шагу.

4. Выбираем дугу $(i_0, j_0) \in U_H^1$, где U_H^1 – множество небазисных дуг, для которых не выполняются условия (4.9). Выбор (i_0, j_0) осуществляется, как и в симплекс-методе: либо произвольно, либо из условия $|\Delta_{i_0 j_0}| = \max_{(i, j) \in U_H^1} |\Delta_{ij}|$. Добавим эту дугу к базисному множеству дуг

U_B . Согласно лемме 4.5 частичная сеть $S_1 = \{I, U_1\}$, $U_1 = U_B \cup (i_0, j_0)$, содержит ровно один цикл. Выберем направление обхода вдоль цикла: $i_0 \rightarrow j_0$, если $x_{i_0 j_0} = 0$; $j_0 \rightarrow i_0$, если $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$.

5. Подсчитаем числа

$$\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & \text{если } (i, j) - \text{прямая дуга цикла,} \\ x_{ij}, & \text{если } (i, j) - \text{обратная дуга цикла,} \end{cases}$$

$$\theta^0 = \min_{(i, j) \in \text{циклу}} \theta_{ij}.$$

6. Наложим (i_0, j_0) -циркуляцию со значением θ^0 на базисный поток, другими словами, положим

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & \text{если } (i, j) - \text{прямая дуга цикла,} \\ x_{ij} - \theta^0, & \text{если } (i, j) - \text{обратная дуга цикла,} \\ x_{ij}, & \text{если } (i, j) \notin \text{циклу, } (i, j) \in U. \end{cases}$$

Очевидно, полученная совокупность $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}, (i, j) \in U)$ будет новым базисным сетевым потоком, причем если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, то $\bar{U}_B = U_B$; если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, $(i_*, j_*) \in U_B$, то

$$\bar{U}_B = (U_B \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0). \quad (4.10)$$

В самом деле, удаление дуги (i_*, j_*) из цикла разрушает единственный цикл в частичной сети S_1 . Следовательно, частичная сеть $\bar{S}_B = \{I, \bar{U}_B\}$ – дерево сети, а \bar{U}_B – базисное множество дуг.

7. Если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$ и $\bar{U}_H^1 = U_H^1 \setminus (i_0, j_0) = \emptyset$, то решение заканчиваем – построенный сетевой поток \bar{x} оптимален. Если $\bar{U}_H^1 \neq \emptyset$, то переходим к шагу 4, заменив U_H^1 на \bar{U}_H^1 . Если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, то переходим к шагу 1 с новым базисным сетевым потоком \bar{x} и базисным множеством (4.10).

Переход $x \rightarrow \bar{x}$ по описанным правилам называется *итерацией прямого метода потенциалов*.

Если базисный поток x не вырожден, то $\theta^0 > 0$ и стоимость потока уменьшится на величину $\theta^0 |\Delta_{i_0 j_0}| > 0$.

Метод потенциалов для невырожденных задач (все базисные потоки которых не вырождены) конечен. Это следует из того, что в этом случае в процессе итераций стоимость потока строго убывает, следовательно, возврата к старому базисному потоку быть не может. Количество же базисных потоков конечно.

Для построения начального базисного сетевого потока используеться *первая фаза метода потенциалов*, которая состоит в следующем.

К сети $S = \{I, U\}$ добавляем *искусственный узел* $m+1$ с интенсивностью $a_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i = 0$ и множество U_m из m искусственных дуг вида $(i, m+1)$, если i – источник или нейтральный узел, $(m+1, i)$, если i – сток.

В расширенной сети множество искусственных дуг является базисным и потоки вдоль базисных искусственных дуг равны абсолютным значениям интенсивностей тех узлов $i \in I$ исходной сети, которым эти дуги инцидентны, а $x_{ij} = 0, (i, j) \in U$. Задача первой фазы имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in U_B} x_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} &= a_i, \quad i \in I \cup \{m+1\}, \\ 0 \leq x_{ij} &\leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U \cup U_B, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $d_{i,m+1} = a_i$, если i – источник, $d_{m+1,i} = |a_i|$, если i – сток.

Следуя схеме первой фазы симплекс-метода, проведем анализ решения $(x^*, x_B^*) = (x_{ij}^*, (i, j) \in U \cup U_B)$ задачи (4.11).

1) Если $x_B^* \neq 0$, то исходная сеть не допускает потока.

2) Если $x_B^* = 0$ и базисное множество дуг U_B^* содержит единственную искусственную дугу, то, удалив ее из U_B^* , получим базисное множество дуг исходной задачи и начальный базисный поток x^* для решения исходной задачи.

3) Пусть $x_B^* = 0$ и базисное множество дуг U_B^* содержит более одной искусственной дуги. Тогда среди небазисных дуг $(i, j) \in U \setminus (U_B^* \cap U)$ всегда найдется такая дуга (i_*, j_*) , что цикл, построенный из базисных дуг U_B^* и дуги (i_*, j_*) , содержит две искусственные дуги. Одну из них выведем из базисного множества, заменив ее дугой (i_*, j_*) . Через конечное число шагов придет ко второй ситуации. Процесс решения исходной задачи методом потенциалов, начинающийся с построенного базисного потока, называется *второй фазой метода потенциалов*.

Замечание 4.1. Решая задачу первой фазы, после вывода искусственной дуги из числа базисных и при ее нулевом дутовом потоке эту дугу можно удалить из сети.

Пример 4.3. Рассмотрим сеть из примера 4.1 с конкретными данными (рис. 4.2). В качестве U_B возьмем дуги, определенные в примере 4.2 и соответствующие первым пятью столбцам табл. 4.1 (на рис. 4.2 они выделены более толстыми линиями). В отличие от рис. 4.1 на рис. 4.2 и в дальнейшем под базисными дугами или справа от них в овале стоят значения дутовых потоков, а под небазисными –

оценки. Кроме того, в прямоугольнике над небазисными дугами или слева от них стоят значения небазисных потоков (они же – пропускные способности этих дуг). Нулевые небазисные потоки на рисунках не отмечаются. Стрелки вдоль дуг цикла указывают направление обхода вдоль цикла. Рядом со значениями базисных дуговых потоков цикла стоят значения шагов (звездочкой отмечен минимальный шаг). Небазисная дуга, входящая в цикл, отмечена двойной стрелкой. Рядом с узлами стоят значения их потенциалов.

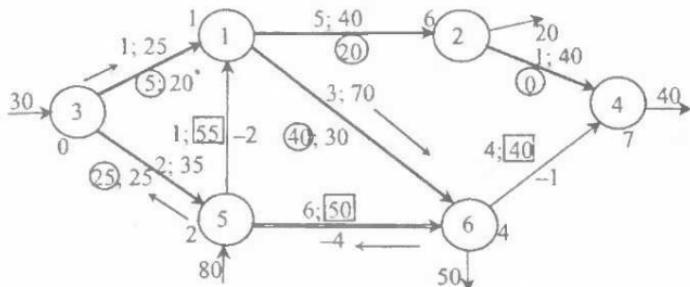


Рис. 4.2

Таким образом, как видно из рис. 4.2, базисный поток не оптимальен ($\Delta_{56} = -4 < 0$ при $x_{56} = 50 = d_{56}$, $\Delta_{51} = -2 < 0$ при $x_{51} = 55 = d_{51}$, $\Delta_{64} = -1 < 0$ при $x_{64} = 40 = d_{64}$). В качестве дуги (i_0, j_0) взята дуга $(5, 6)$. Добавление этой дуги к базисному множеству дуг привело к образованию цикла $\{6, 5, 3, 1, 6\}$. Подсчет шагов вдоль этого цикла и минимального шага дает $\theta^0 = \theta_{31} = 20$. Следовательно, $(i_*, j_*) = (3, 1)$, и эту дугу вводим в базисное множество дуг вместо дуги $(5, 6)$. Произведя пересчет сетевого потока, переходим ко второй итерации (рис. 4.3).

Как видно из рис. 4.3, сетевой поток не оптимальен ($\Delta_{64} = -1 < 0$ при $x_{64} = 40 = d_{64}$). Переходим к третьей итерации (рис. 4.4).

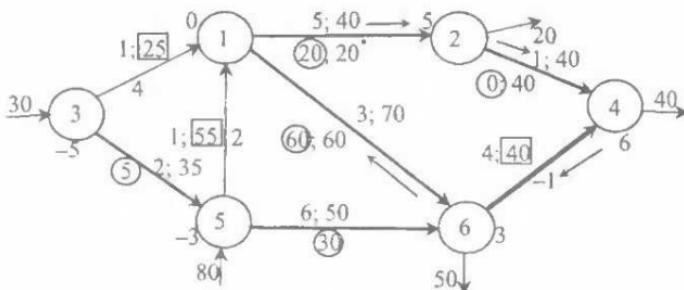


Рис. 4.3

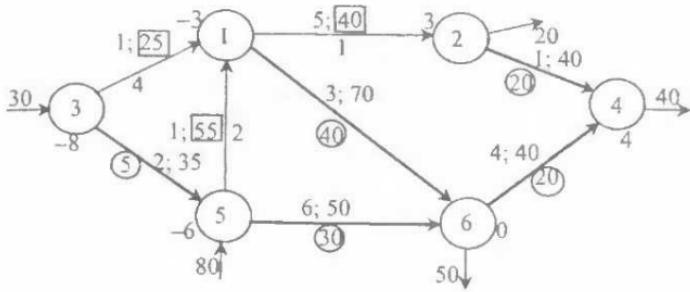


Рис. 4.4

Условия оптимальности выполняются: сетевой поток $x^0 = (x_{12}^0 = 40; x_{16}^0 = 40; x_{24}^0 = 20; x_{31}^0 = 25; x_{35}^0 = 5; x_{51}^0 = 55; x_{56}^0 = 30; x_{64}^0 = 20)$ оптимален, $\Phi_{\min} = 5 \cdot 40 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 55 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 690$.

Адаптируем двойственный симплекс-метод к сетевым транспортным задачам.

Пусть U_B – базисное множество дуг. Его можно построить, как при доказательстве свойства $\text{rank } A = m - 1$.

По множеству базисных дуг U_B подсчитаем потенциалы узлов $u_i, i \in I$, а также числа $\delta_{ij} = (u_j - u_i) - c_{ij}$, $(i, j) \in U_H$. Пусть **задача двойственно невырожденная**, т. е. $\delta_{ij} \neq 0$, $(i, j) \in U_H$. Тогда базисный псевдопоток $\alpha = (\alpha_{ij}, (i, j) \in U)$ подсчитываем по следующим правилам:

$$\alpha_{ij} = 0, \text{ если } \delta_{ij} < 0,$$

$$\alpha_{ij} = d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij} > 0, (i, j) \in U_H.$$

Базисные дуговые псевдопотоки находим, решая систему уравнений

$$\sum_{j \in I_i^+(U_B)} \alpha_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_B)} \alpha_{ji} = a_i - \left(\sum_{j \in I_i^+(U_H)} \alpha_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_H)} \alpha_{ji} \right), i \in I.$$

Если при решении данной системы окажется, что $\alpha_B = (\alpha_{ij}, (i, j) \in U_B)$ удовлетворяет пропускным способностям дуг $0 \leq \alpha_{ij} \leq d_{ij}$, $(i, j) \in U_B$, то полученный псевдопоток является оптимальным потоком исходной задачи. В противном случае выбираем дугу $(i_*, j_*) \in U_B^1$, для которой псевдопоток не удовлетворяет пропускным способностям. В качестве (i_*, j_*) можно взять дугу, для которой $\rho_{i_* j_*} = \max_{(i, j) \in U_B^1} \rho_{ij}$, где

$$\rho_{ij} = \min_{x \in [0; d_{ij}]} |\alpha_{ij} - x|.$$

Решаем систему уравнений

$$l_{i_*} - l_{j_*} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_{i_* j_*} < 0, \\ -1, & \text{если } \alpha_{i_* j_*} > d_{i_* j_*}, \end{cases}$$

$$l_i - l_j = 0, (i, j) \in U_B \setminus (i_*, j_*).$$

Решение этой системы подобно решению системы для потенциалов, т. е. число l_i соответствует узлу i .

Далее определяем числа

$$p_{ij} = -(l_i - l_j), (i, j) \in U_H,$$

шаги

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -(\delta_{ij} / p_{ij}), & \text{если } \delta_{ij} p_{ij} < 0, \\ +\infty, & \text{если } \delta_{ij} p_{ij} \geq 0, (i, j) \in U_H, \end{cases}$$

и число $\sigma^0 = \min_{(i, j) \in U_H} \sigma_{ij} = \sigma_{i_0 j_0}$.

Заменяем базисное множество дуг U_B на $\bar{U}_B = (U_B \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0)$.

Описанная последовательность шагов представляет собой *итерацию двойственного метода потенциалов* для решения двойственно невырожденной сетевой транспортной задачи.

Пример 4.4. Рассмотрим задачу примера 4.3. Применим для ее решения двойственный метод потенциалов. В качестве начального базисного множества дуг возьмем то же множество, что и в примере 4.3.

Потенциалы будут теми же, а числа δ_{ij} , $(i, j) \in U_H$, совпадают с оценками на первой итерации в примере 4.3 (см. рис. 4.2 и 4.5), поскольку подсчитываются по одинаковым формулам. Поэтому на рисунках помещаем их на одинаковых местах. Компоненты дуговых псевдопотоков тоже помещаем на тех же местах, что и дуговые потоки в прямом методе потенциалов (см. рис. 4.5, на котором базисные псевдопотоки помещены в овалах, а ненулевые небазисные – в прямоугольниках).

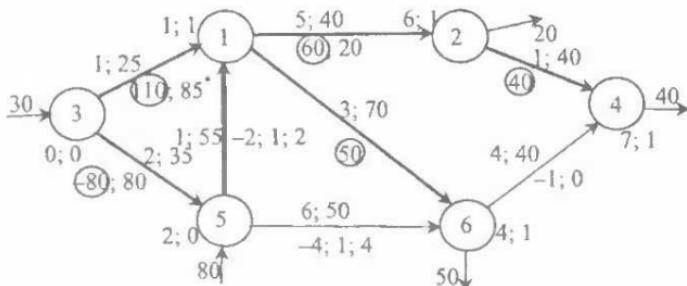


Рис. 4.5

Как видим из рис. 4.5, условия оптимальности не выполняются: $\alpha_{35} = -80 \notin [0; 35]$, $\alpha_{31} = 110 \notin [0; 25]$, $\alpha_{12} = 60 \notin [0; 40]$. Имеем $p_{35} = 80$, $p_{31} = 85$,

$\rho_{12} = 20$ (эти значения, если они ненулевые, помещаем на рисунке справа от дуговых псевдопотоков). В качестве дуги (i_*, j_*) возьмем $(3, 1)$ (соответствующее значение $\rho_{31} = 85$ помечено звездочкой). Поскольку $\alpha_{31} > d_{31}$, то получаем уравнения $I_3 - I_1 = -1$, $I_i - I_j = 0$ для остальных базисных дуг (i, j) . Значения I_i , $i \in I$, помещаем возле узлов, справа от потенциалов. Значения p_{ij} будем помещать справа от компонент коплана, за ними – значения $\sigma_{ij} < \infty$. Дуга с минимальным шагом отмечена двойной стрелкой. Из рис. 4.5 видно, что это $(i_0, j_0) = (5, 1)$. Ее на следующей итерации вводим в базисное множество дуг вместо дуги $(i_*, j_*) = (3, 1)$.

Последующие итерации представлены на рис. 4.6–4.8.

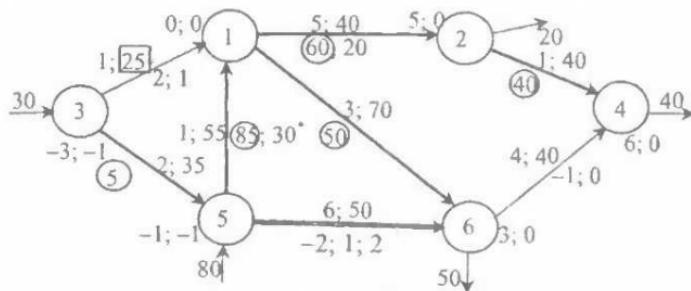


Рис. 4.6

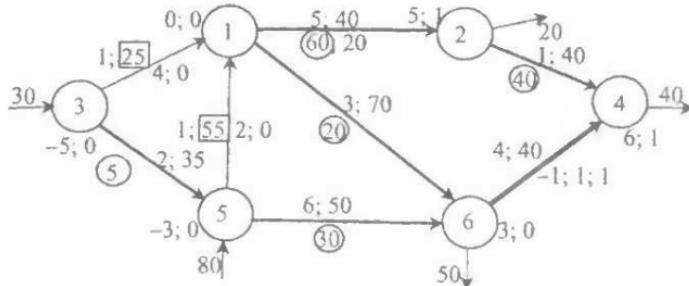


Рис. 4.7

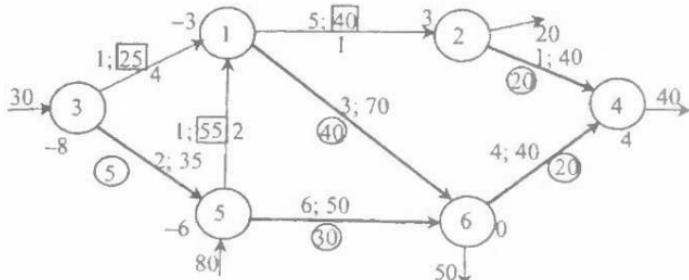


Рис. 4.8

Как следует из рис. 4.8, все базисные компоненты псевдопотока удовлетворяют условиям оптимальности. Следовательно, этот псевдопоток является оптимальным потоком.

Предположим, что в задаче изменились параметры. Пусть пропускная способность дуги $(5, 6)$ уменьшилась до 20. Тогда на рис. 4.8 (или, что то же самое, на рис. 4.4) условия оптимальности не будут выполняться. Применим двойственный метод потенциалов к последнему результату (рис. 4.9).

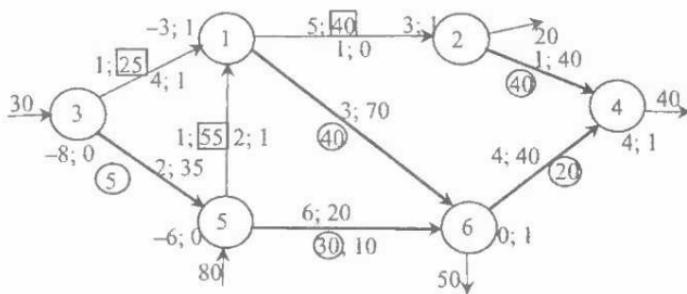


Рис. 4.9

Из рис. 4.9 видно, что $\sigma^0 = \infty$, следовательно, задача не имеет решения из-за отсутствия сетевых потоков: $X = \emptyset$.

Для *двойственно вырожденных задач*, когда существует подмножество $U_H^0 \subset U_H$, для которого $\delta_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_H^0$, поступаем аналогично, как в вырожденном случае двойственного симплекс-метода (разд. 2.7), а именно: полагаем $\alpha_{ij} = 0$ либо $\alpha_{ij} = d_{ij}$, $(i, j) \in U_H^0$ (произвольным образом), остальные небазисные псевдопотоки подсчитываем, как в невырожденном случае. Если условия оптимальности выполняются, решение заканчиваем: $\alpha = x^0$. В противном случае решение продолжаем, заменяя величину $\alpha^1 = -\rho_{i_0 j_0}$ на $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1 + \Delta\alpha^0$, где $\Delta\alpha^0 = \sum_{(i, j) \in \bar{U}_H^0} d_{ij} |p_{ij}|$, $\bar{U}_H^0 = \{(i, j) \in U_H^0 : p_{ij} < 0\}$, если $\alpha_{ij} = d_{ij}$; $p_{ij} > 0$, если $\alpha_{ij} = 0\}$. Если $\bar{\alpha}^1 < 0$, то поступаем, как в невырожденном случае, т. е. дугу (i_0, j_0) выбираем из множества $U_H^1 = U_H \setminus U_H^0$ такую, что $\sigma_{i_0 j_0} = \min_{(i, j) \in U_H^1} \sigma_{ij}$. Если $\bar{\alpha}^1 \geq 0$, тогда в качестве дуги (i_0, j_0) берем любую из множества дуг \bar{U}_H^0 .

Сетевая транспортная задача называется *закрытой*, если выполняется условие (4.5), и *открытой* – в противном случае. Открытая задача

сводится к закрытой. Обозначим $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i$. Введем дополнительный (**фиктивный**) узел-сток $m+1$ с интенсивностью $a_{m+1} = -\alpha$, если $\alpha > 0$, или узел-источник с интенсивностью $a_{m+1} = |\alpha|$, если $\alpha < 0$. Если узел $m+1$ является источником, то соединяем его дугами $(m+1, i)$ с узлами-стоками i , приписав этим дугам нулевые стоимости дуговых потоков ($c_{m+1,i} = 0$) и пропускные способности $d_{m+1,i} = |\alpha|$. Если $(m+1)$ -й узел-сток, тогда его соединяем дугами $(i, m+1)$ с узлами-источниками и припишем этим дугам характеристики $c_{i,m+1} = 0$, $d_{i,m+1} = \alpha$.

Пусть x^0 – решение полученной задачи. Тогда $x_{m+1,i}^0$ – количество продукции, недопоставленной i -му потребителю, $x_{i,m+1}^0$ – количество продукции, нереализованной i -м производителем.

4.2. Матричные транспортные задачи

Рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости на **простой сети**

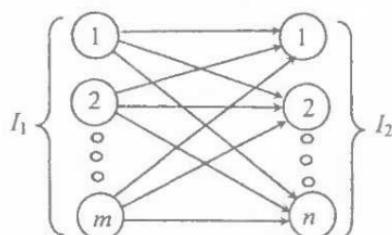


Рис. 4.10

(рис. 4.10) $S = \{I, U\}$, в которой множество узлов I состоит из двух непересекающихся подмножеств I_1 (источников), I_2 (стоков) ($I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = I$), а множество дуг U – из всевозможных дуг вида (i, j) , $i \in I_1$, $j \in I_2$.

Таблица 4.2

	B_1	B_2	\dots	B_n	
A_1					a_1
A_2					a_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
A_m					a_m
	b_1	b_2	\dots	b_n	

При больших $|I_1|$, $|I_2|$ количество $|I_1| \cdot |I_2|$ дуг сети становится огромным, что затрудняет сетевые операции метода потенциалов. В этих условиях более удобна другая, **матричная (табличная)**, модель транспортных задач.

Введем **транспортную $m \times n$ -таблицу** (табл. 4.2). Строку $i \in I_1 = \{1, 2, \dots, m\}$ припишем пункту производства A_i , столбец j – пункту потребления B_j .

Клетка (i, j) таблицы соответствует дороге из A_i в B_j (дуге (i, j) в сетевой транспортной задаче). Объем производства $a_i \geq 0$ в A_i поместим справа от строки i , объем потребления $b_j = -a_j$ в B_j – снизу столбца j . Клетку (i, j) разделим на 6 частей (см. рис. 4.11) и поместим в них следующие параметры: $c_{ij} \geq 0$ – стоимость перевозки единицы продукции из A_i в B_j , x_{ij} – величину перевозки, d_{ij} – пропускную способность дороги, Δ_{ij} – оценку перевозки, θ_{ij} – шаг, $l_{ij} = \pm 1$ – величину направления (будем записывать только + или –).

θ_{ij}	d_{ij}	c_{ij}
l_{ij}	x_{ij}	Δ_{ij}

Рис. 4.11

Условия баланса в узлах I сводятся к равенствам

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.12)$$

которые получаются из элементов строки i и столбца j (соответственно) и выражают требование, чтобы весь продукт из пунктов производства был вывезен, а запросы всех потребителей были удовлетворены.

Определение 4.5. Совокупность $x = (x_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ чисел x_{ij} (перевозок), удовлетворяющих равенствам (4.12) и неравенствам

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.13)$$

называется *планом перевозок*.

Транспортные расходы на плане перевозок x равны

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (4.14)$$

Задача минимизации функции (4.14) при ограничениях (4.12), (4.13) называется *матричной транспортной задачей*.

Цель настоящего раздела – перенести сетевые операции метода потенциалов на транспортные таблицы.

Заметим, что условие общего баланса $\sum_{i \in I} a_i = 0$ для сетевой транспортной задачи превращается теперь в условие

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.15)$$

которое является *необходимым условием существования плана перевозок*. Кроме того, очевидны еще *необходимые условия существования плана перевозок*

$$a_i \leq \sum_{j=1}^n d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad b_j \leq \sum_{i=1}^m d_{ij}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.16)$$

Невыполнение хотя бы одного из условий (4.15), (4.16) является *достаточным условием отсутствия плана перевозок*.

Если записать условия баланса последовательно (сначала для $i = \overline{1, m}$, затем для $j = \overline{1, n}$), то они примут вид $Ax = \bar{b}$, где $x = (x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, $\bar{b} = (a_i, i = \overline{1, m}; b_j, j = \overline{1, n})$,

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccc|c|c|c|c} \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^n & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^n & \dots & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^n & u_1 \\ \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^n & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^n & \dots & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^n & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^n & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^n & \dots & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^n & u_m \\ \overbrace{1 & 0 & \dots & 0}^n & \overbrace{1 & 0 & \dots & 0}^n & \dots & \overbrace{1 & 0 & \dots & 0}^n & v_1 \\ \overbrace{0 & 1 & \dots & 0}^n & \overbrace{0 & 1 & \dots & 0}^n & \dots & \overbrace{0 & 1 & \dots & 0}^n & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overbrace{0 & 0 & \dots & 1}^n & \overbrace{0 & 0 & \dots & 1}^n & \dots & \overbrace{0 & 0 & \dots & 1}^n & v_n \end{array} \right) \quad (4.17)$$

$$a_{(1,1)} a_{(1,2)} \dots a_{(1,n)} a_{(2,1)} a_{(2,2)} \dots a_{(2,n)} \dots a_{(m,1)} a_{(m,2)} \dots a_{(m,n)}$$

Столбцы матрицы A соответствуют клеткам (i, j) транспортной таблицы и, как видно из (4.17), на i -м и $(m+j)$ -м местах стоит 1, остальные нули. В дальнейшем будем использовать этот факт.

Для реализации метода потенциалов для матричной транспортной задачи введем некоторые понятия (аналог использованных в разд. 4.1 сетевых понятий) и сформулируем некоторые утверждения, которые непосредственно следуют из соответствующих лемм, доказанных в разд. 4.1.

Цепью (простой, элементарной), соединяющей клетку (i_1, j_1) с клеткой (i_k, j_k) , назовем последовательность клеток $\{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$ или $\{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$, в которых каждые соседние две клетки лежат в одной строке или в одном столбце, но ни в одной строке и ни в одном столбце нет трех последо-

вательных клеток. **Цикл** – это цепь, крайние клетки которой лежат в одной строке или в одном столбце.

Определение 4.6. Множество клеток $U_B \subset U$ назовем **базисным**, если $|U_B| = m + n - 1$ и из его элементов невозможно составить ни одного цикла. Остальные клетки $(i, j) \in U_H = U \setminus U_B$ назовем **небазисными**.

Определение 4.7. План перевозок $x = (x_{ij}, \dots)$ называется **базисным** с базисным множеством клеток U_B , если $x_{ij} = 0 \vee d_{ij}$, $(i, j) \in U_H$.

Перевозки x_{ij} , $(i, j) \in U_B$, назовем **базисными**, x_{ij} , $(i, j) \in U_H$, – **небазисными**.

Определение 4.8. Базисный план перевозок называется **невырожденным**, если $0 < x_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U_B$.

Из разд. 4.1 следуют *свойства базисного множества клеток*:

- 1) в каждой строке и в каждом столбце найдется базисная клетка;
- 2) существует строка или столбец, в которых лежит одна базисная клетка;

3) удаление базисной клетки, единственной в строке (столбце) вместе со строкой (столбцом), приводит к уменьшенной транспортной таблице, для которой уменьшенное базисное множество клеток является базисным;

4) любую пару из строк и столбцов можно соединить единственной цепью из элементов базисного множества клеток U_B ;

5) добавление небазисной клетки к базисному множеству U_B создает единственный цикл.

Перейдем к описанию метода потенциалов для решения матричной транспортной задачи, который представляет метод из разд. 4.1, сформулированный на языке транспортных таблиц.

Пусть x – базисный план перевозок с базисным множеством клеток U_B .

Припишем каждой строке i потенциал u_i , а каждому столбцу j – потенциал v_j . Тогда, исходя из вида матрицы A (4.17), уравнения для потенциалов примут вид

$$u_i + v_j = -c_{ij}, \quad (i, j) \in U_B. \quad (4.18)$$

Поскольку $|U_B| = m + n - 1$, а количество потенциалов равно $m + n$, то один из них можно положить равным любому числу (обычно полагают равным нулю потенциал той строки или того столбца, в которых больше всего базисных клеток). Остальные потенциалы определяются однозначно, поскольку $\text{rank } A = m + n - 1$.

Далее подсчитаем оценки небазисных перевозок:

$$\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i + v_j), \quad (i, j) \in U_H. \quad (4.19)$$

Критерий оптимальности базисного плана перевозок. Неравенства

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &\leq 0 \text{ при } x_{ij} = 0, \\ \Delta_{ij} &\geq 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij}, \quad (i, j) \in U_H, \end{aligned} \quad (4.20)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности базисного плана перевозок x с базисным множеством клеток U_B .

Если условия оптимальности (4.20) не выполняются для клеток $U_H^1 \subseteq U_H$, тогда выберем клетку $(i_0, j_0) \in U_H^1$, например, из условия

$$|\Delta_{i_0 j_0}| = \max_{(i, j) \in U_H^1} |\Delta_{ij}|.$$

С помощью этой клетки и клеток из U_B построим цикл (единственный согласно свойству 5 базисного множества клеток). Припишем клетке (i_0, j_0) знак «+», если $x_{i_0 j_0} = 0$, и знак «-», если $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$. Начиная с клетки (i_0, j_0) , обойдем цикл, чередуя знаки «+» и «-» (аналоги прямых и обратных дуг). Обозначим множество клеток цикла со знаком «+» через U_{Π}^+ , со знаком «-» через U_{Π}^- . Подсчитаем шаги

$$\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & (i, j) \in U_{\Pi}^+, \\ x_{ij}, & (i, j) \in U_{\Pi}^-, \end{cases}$$

и число $\theta^0 = \min_{(i, j) \in U_{\Pi}} \theta_{ij}$, где U_{Π} – множество клеток цикла.

Для невырожденного базисного плана перевозок $\theta^0 > 0$.

Подсчитаем новый базисный план перевозок:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i, j) \in U_{\Pi}^+, \\ x_{ij} - \theta^0, & (i, j) \in U_{\Pi}^-, \\ x_{ij}, & (i, j) \in U \setminus U_{\Pi}. \end{cases}$$

Если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, то базисное множество клеток остается прежним, а новый план перевозок \bar{x} будет оптимальным, когда $\bar{U}_H^1 = U_H^1 \setminus (i_0, j_0) = \emptyset$. Решение заканчиваем. В случае $\bar{U}_H^1 \neq \emptyset$ переходим к выбору (i_0, j_0) из \bar{U}_H^1 и продолжаем решение.

Если $\theta^0 = \theta_{i_*, j_*}$, $(i_*, j_*) \in U_B$, заменим U_B на $\bar{U}_B = (U_B \setminus (i_*, j_*)) \cup \{(i_0, j_0)\}$ и начинаем новую итерацию с новым базисным планом перевозок \bar{x} и базисным множеством клеток \bar{U}_B .

На текущей итерации транспортные расходы сократятся на величину $\theta^0 |\Delta_{i_0, j_0}| > 0$.

Для построения начального базисного плана перевозок используем *первую фазу метода потенциалов*, для чего введем дополнительный (искусственный) пункт производства A_{m+1} с объемом производства $a_{n+1} = \sum_{j=1}^n b_j$ и стоимостями перевозок $c_{m+1, j} = 1$, $j = \overline{1, n}$, а также искусственный пункт потребления B_{n+1} с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i$ и стоимостями перевозок $c_{i, n+1} = 1$, $i = \overline{1, m}$.

Задача первой фазы имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m x_{i, n+1} + \sum_{j=1}^n x_{m+1, j} \rightarrow \min, \\ & \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad 0 \leq x_{i, n+1} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ & 0 \leq x_{m+1, j} \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad 0 \leq x_{m+1, n+1} \leq \alpha, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. В задаче (4.21) существует план перевозок $(x = 0; x_{i, n+1} = a_i, i = \overline{1, m}; x_{m+1, j} = b_j, j = \overline{1, n}; x_{m+1, n+1} = 0)$, который возьмем в качестве начального базисного плана перевозок с базисным множеством клеток $U_B = U_H \cup (m+1, n+1)$, где $U_H = \{(m+1, j), j = \overline{1, n}; (i, n+1), i = \overline{1, m}\}$.

Решим задачу (4.21) описанным выше методом. Пусть $(x^*, x_H^*, x_{m+1, n+1}^*)$ – оптимальный план перевозок для задачи (4.21) с базисным множеством клеток U_B^* , где $x_H = (x_{ij}, (i, j) \in U_H)$.

Необходимым и достаточным условием существования плана перевозок в задаче (4.12) – (4.14) является условие $x_H^ = 0$.*

При условии, что на последней итерации клетка $(m+1, n+1)$ остается базисной (на всех предыдущих итерациях она всегда базисная), после решения задачи (4.21) будем иметь одну из возможных ситуаций:

- 1) $x_{ii}^* \neq 0$;
- 2) $x_{ii}^* = 0$ и множество $U_B^* \cap U_{ii}$ содержит одну клетку;
- 3) $x_{ii}^* = 0$ и множество $U_B^* \cap U_{ii}$ содержит более одной клетки.

В первой ситуации исходная задача (4.12) – (4.14) не имеет планов перевозок. Во второй ситуации отбрасываем строку A_{m+1} и столбец B_{n+1} и переходим к решению задачи (4.12) – (4.14) с полученным после первой фазы базисным планом перевозок x^* и базисным множеством клеток $\bar{U}_B^* = U_B^* \setminus ((i_*, j_*) \cup (m+1, n+1))$, где $(i_*, j_*) \in U_B^* \cap U_{ii}$. В третьей ситуации из основной транспортной таблицы добавим к базисному множеству клеток какую-либо небазисную клетку (i_0, j_0) , чтобы образовался цикл, содержащий искусственную клетку (i_*, j_*) . Заменим в базисном множестве клеток (i_*, j_*) на (i_0, j_0) . Проводим такую замену до тех пор, пока в $U_B^* \cap U_{ii}$ не останется только одна клетка, после чего поступаем, как во второй ситуации.

Замечание 4.2. Если искусственная клетка выводится из числа базисных, а соответствующая перевозка нулевая, то в дальнейшем эту клетку можно не рассматривать, другими словами, ее блокировать.

Пример 4.5. Рассмотрим задачу с данными, приведенными в табл. 4.3.

Таблица 4.3

	B_1		B_2		a_i
A_1	3	1	15	3	12
A_2	9	4	7	5	11
A_3	11	2	17	1	23
b_j	10		36		

Проверим необходимые условия существования плана перевозок (4.15), (4.16). Они выполняются. Для построения начального базисного плана перевозок используем первую фазу, для чего введем искусственные пункты производства A_4 с $a_4 = a = 46$ и потребления B_3 с $b_3 = a = 46$. Все данные для задачи первой фазы приведены в табл. 4.4. Базисные перевозки будем помещать в овалах, небазисные максимальные –

в прямоугольниках, небазисные нулевые в таблице не отмечаем, как не отмечаем и базисные оценки. Последовательные клетки цикла соединяем отрезками прямых. Минимальное значение $\theta_{i,j_*} = \theta^0$ помечаем звездочкой (*). Решение задачи первой фазы приведено в табл. 4.4 – 4.9.

Таблица 4.4

v_j	-1	-1	0	a_i
u_i	3 0	15 15 0	12* 12 1	
-1	2 +	2 -	(12)	12
-1	9 0	7 0	11 1	11
-1	2	2	(11)	
-1	11 0	17 0	23 1	23
-1	2	2	(23)	
0	10 1	36 36 1	46 46 0	46
b _j	10	36	46	

Таблица 4.5

v_j	-1	-1	0	a_i
u_i	3 0	15 0		
1	0	(12)		12
-1	9 0	7 0	11 1	11
-1	2	2	(11)	
-1	11 11 0	17 0	23 23 1	23
-1	+ 2	2	(23)	
0	10* 10 1	36 1	34 46 0	46
b _j	10	36	46	

Таблица 4.6

v_j	1	-1	0	a_i
u_i	3 0	15 0		
1	-2	(12)		12
-1	9 0	7 0	11 1	11
-1	0	2	(11)	
-1	11 0	17 17 0	13* 23 1	23
-1	(10)	+ 2	(13)	
0	24	36 1	24 46 0	46
b _j	10	36	46	

Таблица 4.7

v_j	-1	-1	0	a_i
u_i	3 0	15 0		
1	0	(12)		12
-1	9 0	7 7 0	11 11 1	11
1	2 +	2 -	(11)	
1	11 0	17 0		23
0	(10)	(13)		
	11 36 1	11 46 0		46
b_j	10	36	46	

Таблица 4.8

v_j	-1	-1	0	a_i
u_i	3 0	15 0		
1	0	(12)		12
-1	9 9 0	7 0 4	11 1 1	11
1	+ 2	2 - (4)		
1	10 11 0	4 17 0		23
0	-1 (10)	+ (13)		
	4 36 1	4 46 0		46
b_j	10	36	46	

Таблица 4.9

v_j	-1	-1	0	a_i
u_i	3 0	15 0		
1	0	(12)		12
1	9 0	7 0		11
1	(4)	0		
1	11 0	17 0		23
0	(6)	(17)		
	36 1	46 0		46
b_j	10	36	46	

В табл. 4.9 получен оптимальный план перевозок задачи первой фазы, при чем выполняется условие $x_{ij}^* = 0$. Переходим к решению исходной задачи, удалив в табл. 4.9 третий столбец и четвертую строку и заменив нулевые стоимости перевозок на стоимости исходной задачи (см. табл. 4.3). Решение задачи второй фазы представлено в табл. 4.10, 4.11.

Получен оптимальный план перевозок

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 7 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.10

v_j	-1	0	a_i
u_i	3 3 1 12 15 3	(12)	12
-3	+	3	-
	9 4 7 5		
-3	(4)		-2
	11 2 17 1		
-1	6 0 + (17)		23
	6		
b_j	10	36	

Таблица 4.11

v_j	0	-2	a_i
u_i	3 1 15 3	(12)	12
-1	0		
-4	9 4 7 5		11
	(4)		
-4	11 2 17 1		
-2	(6)		23
	10	36	

Заметим, что в табл. 4.10 имеем тот же оптимальный план перевозок, что и в табл. 4.11, но с другим базисным множеством U_B клеток, которое не является оптимальным (базисный план перевозок вырожденный: базисная перевозка $x_{32} = 17 = d_{32}$ лежит на границе).

Опишем применение *двойственного метода потенциалов* решения матричной транспортной задачи. В ней не используется первая фаза, что упрощает решение. Для его применения достаточно иметь лишь какое-либо базисное множество клеток U_B , которое легко строится (например, можно взять в качестве U_B клетки $(i, 1)$, $i = \overline{1, m}; (1, j)$, $j = \overline{1, n}$), т. е. клетки первых строк и столбца.

Итерация двойственного метода потенциалов для двойственно невырожденных задач состоит из следующих шагов:

1. Используя базисное множество клеток U_B , решаем систему уравнений (4.18) относительно потенциалов u_i , $i = \overline{1, m}$; v_j , $j = \overline{1, n}$.
2. По формулам

$$\delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i + v_j), \quad (i, j) \in U_H,$$

подсчитываем числа δ_{ij} , $(i, j) \in U_H$.

3. Поскольку *задача двойственно невырожденная*, т. е. $\delta_{ij} \neq 0$, $(i, j) \in U_H$, небазисные псевдоперевозки определяем по формулам

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{ij} < 0, \\ d_{ij}, & \text{если } \delta_{ij} > 0, \quad (i, j) \in U_H. \end{cases}$$

4. Решаем систему уравнений относительно α_{ij} , $(i, j) \in U_B$:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (i,j) \in U_B}}^n \alpha_{ij} = a_i - \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j) \in U_H}}^n \alpha_{ij}, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i,j) \in U_B}}^m \alpha_{ij} = b_j - \sum_{\substack{i=1 \\ (i,j) \in U_H}}^m \alpha_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

5. Если $0 \leq \alpha_{ij} \leq d_{ij}$, $(i, j) \in U_B$, то построенный псевдоплан перевозок является оптимальным планом. В противном случае переходим к следующему шагу.

6. Выбираем клетку $(i_*, j_*) \in U_B$, для которой $\rho_{i_* j_*} \neq 0$, например, из условия $\rho_{i_* j_*} = \max_{(i, j) \in U_B} \rho_{ij}$, где $\rho_{ij} = \min_{x \in [0, d_{ij}]} |\alpha_{ij} - x|$.

7. Решаем систему уравнений

$$q_{i_*} + r_{j_*} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_{i_* j_*} < 0, \\ -1, & \text{если } \alpha_{i_* j_*} > d_{i_* j_*}, \end{cases}$$

$$q_i + r_j = 0, \quad (i, j) \in U_B \setminus (i_*, j_*),$$

относительно q_i , $i = \overline{1, m}$; r_j , $j = \overline{1, n}$. Решение последней системы аналогично решению системы для потенциалов, т. е. q_i соответствует i -й строке транспортной таблицы, r_j — j -му столбцу.

8. Определяем числа

$$p_{ij} = -(q_i + r_j), \quad (i, j) \in U_H,$$

шаги

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -\delta_{ij} / p_{ij}, & \text{если } \delta_{ij} p_{ij} < 0, \\ \infty, & \text{если } \delta_{ij} p_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U_H, \end{cases}$$

и число

$$\sigma^0 = \min_{(i, j) \in U_H} \sigma_{ij} = \sigma_{i_0 j_0}.$$

Если $\sigma^0 = \infty$, то решение прекращаем: исходная задача не имеет планов перевозок. В противном случае переходим к следующему шагу.

9. Заменяем базисное множество клеток U_B на $\bar{U}_B = (U_B \setminus (i_*, j_*)) \cup \{(i_0, j_0)\}$ и переходим к шагу 1.

При решении задачи двойственным методом потенциалов α_{ij} будем помещать в те места, где в прямом методе находились x_{ij} , δ_{ij} – на место Δ_{ij} , $(i, j) \in U_H$, ρ_{ij} – на место Δ_{ij} , $(i, j) \in U_B$, σ_{ij} – на место θ_{ij} , p_{ij} – на место l_{ij} (рис. 4.12). Однако, чтобы не загромождать таблицу лишними, но очевидными числами, если $\alpha_{ij} = 0$, эти значения не вносим в таблицу, а $\rho_{i=j}$ помечаем звездочкой (*), σ^0 – нулем (^).

Рис. 4.12

σ_{ij}	d_{ij}	c_{ij}
p_{ij}	α_{ij}^*	δ_{ij}

Как и для сетевой транспортной задачи, в случае *двойственной вырожденности задачи*, т. е. когда существует подмножество клеток $U_H^0 \subset U_H$, для которых $\delta_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_H^0$, в двойственный метод потенциалов вносятся следующие изменения. Небазисные псевдоперевозки полагаем равными $\alpha_{ij} = 0$ либо $\alpha_{ij} = d_{ij}$, $(i, j) \in U_H^0$ (произвольным образом), остальные небазисные псевдоперевозки подсчитываем, как в невырожденном случае. Если условия оптимальности выполняются, решение заканчиваем: $\alpha = x^0$. В противном случае решение продолжаем, заменяя величину $\alpha^1 = -\rho_{i=j}$ на $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1 + \Delta\alpha^0$, где $\Delta\alpha^0 = \sum_{(i,j) \in \bar{U}_H^0} d_{ij} |p_{ij}|$. Если $\bar{\alpha}^1 < 0$, то поступаем, как в невырожденном случае, т. е. клетку (i_0, j_0) выбираем из множества $U_H^1 = U_H \setminus U_H^0$ такую, что $\sigma_{i_0 j_0} = \min_{(i, j) \in U_H^1} \sigma_{ij}$. Если $\bar{\alpha}^1 \geq 0$, тогда в качестве клетки (i_0, j_0) берем любую из множества \bar{U}_H^0 .

Пример 4.6. Рассмотрим задачу примера 4.5 и для ее решения применим двойственный метод потенциалов. В качестве начального базисного множества клеток U_B возьмем клетки первой строки и первого столбца. В итоге получим ту же таблицу, что и табл. 4.11, т. е. на первой же итерации получен оптимальный план.

Пример 4.7. Заменим в примере 4.5 $d_{21} = 9$ на $d_{21} = 3$ и применим двойственный метод потенциалов (табл. 4.12).

Аналогично примеру 4.6 в качестве начального базисного множества клеток U_B возьмем клетки первой строки и первого столбца. Подсчитав потенциалы и числа δ_{ij} , $(i, j) \in U_H$, определяем базисный псевдоплан перевозок. Как следует из табл. 4.12, $\alpha_{21} = 4 > d_{21} = 3$, т. е. условие оптимальности не выполняется. Подсчитав r_i , $i = 1, 2, 3$, q_j , $j = 1, 2$, и p_{ij} , $(i, j) \in U_H$, определяем шаги σ_{ij} . Из табл. 4.12 видим, что $\sigma^0 = \infty$. Это означает, что в исходной задаче не существует планов перевозок.

Таблица 4.12

$r_i \backslash q_j$	0	0	-2	a_i
v_j	0	0	-2	a_i
u_i	3	1	15	3
0	-1	0	12	12
-1	-4	4	7	11
0	-2	6	17	3
	b_j	10	36	

Замечание 4.3. В данном примере не выполняются необходимые условия существования плана перевозок (4.16): $\sum_{j=1}^2 d_{2j} = 10 < a_2 = 11$. Поэтому первую фазу или двойственный метод можно не применять.

Пример 4.8. Рассмотрим задачу, данные которой представлены в табл. 4.13.

Таблица 4.13

	B_1		B_2		B_3		B_4		a_i
A_1	4	2	4	5	9	1	5	4	13
A_2	8	8	5	3	3	2	4	7	11
A_3	5	9	5	4	4	5	5	3	14
	b_j	10	14	12	2				

Для решения используем двойственный метод потенциалов. Начальное базисное множество клеток U_B возьмем, как в предыдущих примерах: клетки первой строки и первого столбца. Первая итерация представлена в табл. 4.14.

Таблица 4.14

$r_i \backslash q_j$	-1	0	0	-3	0	1	0	-2	a_i
v_j	0	0	-3	0	1	0	-2	a_i	
u_i	4	2	4	5	9	1	5	4	
0	-2	11	7	4	5	5	7	7	13
1	-8	1	-1	8	-1	5	-1	3	11
1	-9	0	-1	8	-1	3	-1	8	14
	b_j	10	14	12	2				

Из табл. 4.14 видно, что условия оптимальности не выполняются для клеток $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$: для них $\rho_{ij} \neq 0$. Имеем $\max_{(i,j) \in U_B} \rho_{ij} = 7 = \rho_{11} = \rho_{14}$. Возьмем $(i_*, j_*) = (1, 1)$. Поскольку $\alpha_{11} > d_{11}$, то $r_i + q_j = -1$, $r_i + q_j = 0$, $(i, j) \in U_B \setminus (1, 1)$. Дальнейшие подсчеты приведены в табл. 4.14. Подсчет σ_{ij} и σ^0 дает:

$\sigma^0 = \sigma_{24} = \sigma_{33} = 3$. Возьмем в качестве (i_0, j_0) клетку $(3, 3)$, которая соответствует меньшим издержкам на перевозку.

Вторая итерация представлена в табл. 4.15. Условия оптимальности не выполняются: $\rho_{14} = 3 \neq 0$, следовательно, $(i_*, j_*) = (1, 4)$. Здесь $\delta_{24} = 0$, т. е. имеем вырожденный случай. Однако $\bar{U}_H^0 = \emptyset$, поэтому $\Delta\alpha^0 = 0$, $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1 = -3 < 0$ и в качестве (i_0, j_0) возьмем клетку $(3, 4)$.

Таблица 4.15

		q_i	0	0	-5	-5	0	-1	1	-4	a_i
		v_j									
r_i	u_i	0	[4]	2	4	5	9	1	5	4	
		0	0	3	(4)		(8)	1	(-3)	3*	13
0	-3	8	8	(5)	3		(3)	2	4	7	
		(3)	0	5	0		2	-1	0	0	11
0	-4	5	9	(5)	4		4	5	5*	(5)	
		(3)	0	5			(1)	-1	2	5	14
		b_j	10	14			12				

Третья итерация представлена в табл. 4.16.

Таблица 4.16

		v_j	-9	-9	-5	-3	a_i	
		u_i						
4	4	[4]	2	4	5	9	4	-5
			3	(4)		(5)		13
1	1	8	8	(5)	3	(3)	2	4
		(3)		5		2		-5
0	0	5	9	(5)	4	4	5	3
		(3)		5		(9)	2	
		b_j	10	14		12		

В табл. 4.16 условия оптимальности выполнены – план перевозок оптимален:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матричная транспортная задача называется *закрытой*, если выполняются условия общего баланса (4.15), т. е. когда совокупный спрос равен совокупному предложению. В противном случае задача называется *открытой*. Открытую модель сводят к закрытой. Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то это означает, что спрос превышает предложение. Введем дополнительного (*фиктивного*) поставщика A_{m+1} с объемом поставок $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ и стоимостью перевозок $c_{m+1,j} = 0$,

$j = \overline{1, n}$. Величина $x_{m+1, j}^0$ в оптимальном плане перевозок означает объем недопоставки потребителю B_j . В случае $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ (предложение превышает спрос) вводим дополнительного (*фиктивного*) *потребителя* B_{n+1} с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ и стоимостью перевозок $c_{i, n+1} = 0$, $i = \overline{1, m}$. Величина $x_{i, n+1}^0$ в оптимальном плане перевозок означает объем продукции, оставшейся нереализованной (на складе) у поставщика A_i .

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЛП

Теория ЛП, и в особенности теория двойственности ЛП, имеет многочисленные приложения в различных разделах математики. Например, многие математические задачи сводятся к задачам ЛП. ЛП широко применяется к исследованию задач нелинейного программирования. Линеаризация – один из основных приемов математики. С ней связано зарождение математического анализа и методов решения экстремальных задач. Математические теории начинаются, как правило, с линейных моделей, и используют последние при исследовании более сложных ситуаций.

В данном параграфе приведены лишь некоторые приложения ЛП. Приведенное в данном пособии компактное и элементарное построение симплекс-метода ниже применено к теории линейных неравенств и уравнений. Другие (многочисленные) приложения можно найти в учебной и научной литературе.

5.1. Задачи на минимакс

Среди задач, сводящихся к задачам ЛП, заметное место занимает *задача на минимакс*¹⁾

$$\max_{s=1, k} \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - d_s \right) \rightarrow \min, \quad (5.1)$$

$$Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*,$$

¹⁾ Задачи, исследованные в первых работах Л. В. Канторовича, относились к этому классу.

которая отличается от канонической задачи (1.8) специальной нелинейностью целевой функции. Докажем, что задача (5.1) эквивалентна линейной задаче

$$x_{n+1} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - x_{n+1} \leq d_s, \quad s = \overline{1, k}, \quad (5.2)$$

$$Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*.$$

Действительно, если x^0 – решение задачи (5.1), то

$$\left(x^0, x_{n+1}^0 = \max_{s=1,k} \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) \right) \quad (5.3)$$

является решением задачи (5.2). Если допустить, что в задаче (5.2) имеется такой план (x^*, x_{n+1}^*) , что $x_{n+1}^* < x_{n+1}^0$, то для целевой функции задачи (5.1) получится неравенство

$$\max_{s=1,k} \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) = x_{n+1}^0 > x_{n+1}^* \geq \max_{s=1,k} \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right),$$

которое противоречит тому, что x^0 – решение задачи (5.1).

Пусть теперь (x^*, x_{n+1}^*) – решение задачи (5.2). Тогда x^* – решение задачи (5.1). В самом деле, если решением задачи (5.1) является другой план x^0 , т. е.

$$\max_{s=1,k} \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) < \max_{s=1,k} \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right), \quad (5.4)$$

то пара (5.3), очевидно, удовлетворяет ограничениям задачи (5.2) и для компоненты x_{n+1}^0 в силу (5.4) выполняется неравенство $x_{n+1}^0 < x_{n+1}^*$, противоречащее предположению об оптимальности плана (x^*, x_{n+1}^*) .

5.2. Кусочно-линейная экстремальная задача

Задача

$$\sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - d_s \right| \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^* \quad (5.5)$$

имеет кусочно-линейную целевую функцию. Она эквивалентна линейной задаче

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k (v_s + z_s) &\rightarrow \min_{x, v, z}, \\ \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j + v_s - z_s &= d_s, \quad s = \overline{1, k}, \\ Ax = b, \quad d_s \leq x \leq d^*, \quad v \geq 0, \quad z \geq 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

в которой $v = (v_1, \dots, v_k)$, $z = (z_1, \dots, z_k)$.

Пусть x^0 – решение задачи (5.5). Тогда тройка векторов (x^0, v^0, z^0) с компонентами

$$\begin{aligned} v_s^0 &= 0, \quad z_s^0 = \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s, \quad \text{если } \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \geq 0, \\ v_s^0 &= -\sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 + d_s, \quad z_s^0 = 0, \quad \text{если } \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s < 0, \\ s &= \overline{1, k}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

является решением задачи (5.6). Допустим, что это не так, т. е. найдется план (x^*, v^*, z^*) задачи (5.6), на котором выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^k (v_s^* + z_s^*) < \sum_{s=1}^k (v_s^0 + z_s^0). \tag{5.8}$$

Тогда, обозначив через $\sum_{s=1}^k {}^+ \alpha_s$, $\sum_{s=1}^k {}^- \alpha_s$ сумму неотрицательных и (соответственно) отрицательных компонент α_s , $s = \overline{1, k}$, с учетом (5.6) – (5.8) получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^* - d_s \right| &= \sum_{s=1}^k {}^+ \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^* - d_s \right) - \sum_{s=1}^k {}^- \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^* - d_s \right) = \\ &= \sum_{s=1}^k {}^+ (z_s^* - v_s^*) - \sum_{s=1}^k {}^- (z_s^* - v_s^*) \leq \sum_{s=1}^k v_s^* + \sum_{s=1}^k z_s^* < \sum_{s=1}^k (v_s^0 + z_s^0) = \\ &= \sum_{s=1}^k {}^+ \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^0 - d_s \right) - \sum_{s=1}^k {}^- \left(\sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^0 - d_s \right) = \\ &= \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^0 - d_s \right|, \end{aligned} \tag{5.9}$$

т. е. первое выражение в (5.9) строго меньше последнего, что невозможно, когда x^0 – решение задачи (5.5).

Если (x^*, v^*, z^*) – решение задачи (5.6), то x^* – решение задачи (5.5). Рассуждаем от противного: решением задачи (5.5) является вектор x^0 и

$$\sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^0 - d_s \right| < \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^* - d_s \right|. \quad (5.10)$$

По вектору x^0 построим векторы v^0 , z^0 с компонентами (5.7). Тогда тройка (x^0, v^0, z^0) станет планом задачи (5.6), который в силу соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k (v_s^0 + z_s^0) &= \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^0 - d_s \right| < \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_s^* - d_s \right| = \\ &= \sum_{s=1}^k ^+(z_s^* - v_s^*) - \sum_{s=1}^k ^-(z_s^* - v_s^*) \leq \sum_{s=1}^k (v_s^* + z_s^*), \end{aligned}$$

следующих из (5.6), (5.10), лучше оптимального плана (x^*, v^*, z^*) . Полученное противоречие заканчивает доказательство эквивалентности задач (5.5), (5.6).

5.3. Приложение к исследованию линейных соотношений

Получим некоторые результаты по теории линейных неравенств, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 5.1 (Фаркаша о неравенствах-следствиях). Для того чтобы на каждом n -векторе x , удовлетворяющем неравенствам

$$a_i' x \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.11)$$

выполнялось неравенство

$$a_0' x \leq 0, \quad (5.12)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные числа $\mu_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, что

$$a_0 = \sum_{i=1}^m \mu_i a_i. \quad (5.13)$$

Доказательство. Необходимость. Если из неравенств (5.11) следует неравенство (5.12), то вектор $x = 0$ является решением задачи

$$a_0' x \rightarrow \max, \quad a_i' x \leq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.14)$$

По теореме двойственности двойственная к (5.14) задача

$$0'y \rightarrow \min, \sum_{i=1}^m a_i y_i = a_0, \quad y \geq 0 \quad (y = (y_1, \dots, y_m)), \quad (5.15)$$

также имеет решение $y^0 \geq 0$. (Здесь и далее в этом разделе $0'$ означает транспонированный вектор, соответствующей размерности с нулевыми координатами.) Совместность ограничений задачи (5.15) доказывает равенство (5.13).

Достаточность. Если для параметров неравенств (5.11), (5.12) выполняется равенство (5.13) с $\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, то после умножения (5.13) на любой вектор x , удовлетворяющий системе (5.11), получим неравенство (5.12). ■

Аналогично доказывается и следующее утверждение.

Теорема 5.2 (о неравенстве-следствии равенств). *Неравенство $a'_0 x \leq 0$ является следствием равенств*

$$a'_i x = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

тогда и только тогда, когда для некоторых $\mu_i, i = \overline{1, m}$, выполняется равенство (5.13).

Замечание 5.1. Теорема Фаркаша не изменится, если неравенства (5.11) заменить на строгие $a'_i x < 0, i = \overline{1, m}$. Для доказательства этого результата достаточно заметить, что соответствующая задача $a'_0 x \rightarrow \max, a'_i x \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, m}$, при любых $\varepsilon_i, i = \overline{1, m}$, имеет решение, поскольку согласно (5.12) ее целевая функция ограничена сверху на множестве планов.

Замечание 5.2. Нетрудно показать, что неравенство $a'_0 x \leq 0$ является следствием соотношений $a'_i x \leq 0, i = \overline{1, m_1}, a'_i x = 0, i = \overline{m_1 + 1, m}$, тогда и только тогда, когда для некоторых $\mu_i, i = \overline{1, m}$, $\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m_1}$, выполняется равенство (5.13).

Теорема 5.3 (совместность системы неравенств). *Для совместности системы неравенств*

$$a'_i x \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.16)$$

необходимо и достаточно, чтобы на каждом решении системы

$$\sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.17)$$

выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^m \mu_i b_i \geq 0. \quad (5.18)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор x^* – решение системы (5.16). Тогда он является и решением задачи

$$0' \cdot x \rightarrow \max, \quad a_i' x \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.19)$$

По теореме двойственности существует и решение $y^* = (y_i^*, i = \overline{1, m})$ задачи, двойственной к (5.19)

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m y_i a_i = 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.20)$$

причем $\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = 0' \cdot x^* = 0$. Поэтому на любом плане $y = (y_i, i = \overline{1, m})$ задачи (5.20) выполняется неравенство $\sum_{i=1}^m b_i y_i \geq 0$.

Достаточность. Если на любом решении системы (5.17) выполняется неравенство (5.18), то вектор $\mu = (\mu_i, i = \overline{1, m}) = 0$ является решением задачи

$$\sum_{i=1}^m b_i \mu_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m a_i \mu_i = 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.21)$$

По теореме двойственности существует и решение задачи (5.19), двойственной к (5.21), т. е. система неравенств (5.16) совместна. ■

Теорема 5.4 (несовместность неравенств). *Система*

$$a_i' x < 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.22)$$

несовместна в том и только том случае, когда существуют такие числа $\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \mu_i \neq 0$, что

$$\sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0. \quad (5.23)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть для некоторой совокупности $(\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m \mu_i \neq 0$, выполняется равенство (5.23), но существует n -вектор x^* , удовлетворяющий системе (5.22), т. е.

$$a_i' x^* = \alpha_i, \quad \alpha_i < 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.24)$$

Умножим i -е равенство (5.24) на $\mu_i \geq 0$ и результаты сложим. Слева в силу (5.23) получим нуль, а справа, поскольку $\sum_{i=1}^m \mu_i > 0$, – отрицательное число $\sum_{i=1}^m \mu_i \alpha_i < 0$. Противоречие доказывает несовместность системы (5.22).

Необходимость. Несовместность системы (5.22) означает, что для каждого n -вектора x среди чисел $a'_i x$, $i = \overline{1, m}$, найдется неотрицательное, т. е. $\max_{i=1, m} a'_i x \geq 0$. Следовательно, вектор $x = 0$ есть решение задачи

$$\max_{i=1, m} a'_i x \rightarrow \min_x. \quad (5.25)$$

Согласно разд. 5.1 задача (5.25) эквивалентна задаче

$$x_{n+1} \rightarrow \min, a'_i x - x_{n+1} \leq 0, i = \overline{1, m}, \quad (5.26)$$

решением которой является вектор $(x = 0, x_{n+1} = 0)$. По теореме двойственности и двойственная к (5.26) задача, в которой заменим $x_{n+1} \rightarrow \min$ на $-x_{n+1} \rightarrow \max$,

$$0' \cdot y \rightarrow \min, \sum_{i=1}^m y_i a_i = 0, \sum_{i=1}^m y_i = 1, y \geq 0, \quad (5.27)$$

имеет решение $y^0 = (y_i^0, i = \overline{1, m})$. Совместность ограничений задачи (5.27) означает, что выполняется равенство (5.23). ■

5.4. Линейное программирование и матричные игры. Теорема о минимаксе

Одним из результатов, который привел Дж. фон Неймана к созданию основ теории двойственности, была его *теорема о минимаксе* из теории матричных игр.

Матричной игрой (в нормальной форме) называется тройка $\{I, J, A\}$, где $I = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество чистых стратегий первого игрока, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество чистых стратегий второго игрока, $A = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$ – платежная $m \times n$ -матрица. Игроки одновременно выбирают чистые стратегии $i \in I, j \in J$ (номера строк и столбцов платежной матрицы A) и по значению элемента a_{ij} производят расчет: если $a_{ij} > 0$, то первый игрок получает от второго плату a_{ij} ; при $a_{ij} < 0$ второй игрок получает от первого плату $|a_{ij}|$.

Задача состоит в указании оптимальных стратегий $i_0 \in I, j_0 \in J$, обеспечивающих игрокам максимальные выигрыши.

Если матрица A имеет *седловую точку* (i_0, j_0) , т. е. для всех $i \in I, j \in J$ выполняются неравенства

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j},$$

то i_0, j_0 – оптимальные стратегии игроков в следующем смысле. Выбор первым игроком чистой стратегии i_0 гарантирует ему выигрыш $a_{i_0 j_0}$ (какую бы стратегию $j \in J$ ни выбрал второй игрок, он не сможет помешать первому выиграть $a_{i_0 j_0}$). Но если первый игрок откажется от i_0 , то второй игрок может выиграть больше, чем $-a_{i_0 j_0}$. Аналогичным свойством для второго игрока обладает j_0 .

В общем случае матрица не имеет седловой точки, и поэтому само определение оптимальных стратегий становится проблемой. Поскольку в реальной игре приведенного типа большую роль играет информированность участников и выигрыш обычно подсчитывается как результат многих партий (актов выбора участниками своих стратегий), то естественным представляется переход (он впервые сделан Э. Борелем и является кардинальным шагом по расширению стратегий в задачах оптимизации) к *смешанным стратегиям (рандомизации чистых стратегий)*. Участники теперь указывают не конкретную чистую стратегию, а выбирают распределения вероятностей на множествах чистых стратегий I, J . Совокупность $x = (x_i \geq 0, i \in I; \sum_{i \in I} x_i = 1)$ называется смешанной стратегией первого игрока. Аналогично $y = (y_j \geq 0, j \in J; \sum_{j \in J} y_j = 1)$ – смешанная стратегия второго игрока.

Таким образом, на игру, состоящую из многих партий, участники указывают вероятности, с которыми они намерены выбирать каждую из своих чистых стратегий, но сам выбор в каждой партии игры осуществляется случайными механизмами, один из которых генерирует случайные числа со значениями в I и с распределением x , другой – со значениями в J и с распределением y . Для реализации смешанных стратегий можно использовать датчики случайных (псевдослучайных) чисел, составленных по заданным распределениям. При новом способе игры участникам невозможно угадать выбор противника, что снимает вопрос о сохранении в тайне чистых стратегий, важный для старого способа игры.

Если в партии реализовались стратегии $i \in I, j \in J$, то a_{ij} – выигрыш первого игрока с вероятностью $x_i y_j$.

Средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) первого игрока равен

$$f(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} x_i y_j = x' A y. \quad (5.33)$$

Первый игрок выбором x стремится максимизировать функцию (5.33), второй – выбором y минимизировать ее.

Оказывается (этот основной результат раздела будет доказан ниже), что функция (5.33) имеет седловую точку (x^0, y^0) , т. е. для всех смешанных стратегий x, y выполняются неравенства

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y). \quad (5.34)$$

По причинам, объясненным выше, смешанные стратегии x^0, y^0 можно принять за *оптимальные смешанные стратегии* игроков (решение матричной игры).

Для построения оптимальных стратегий введем задачи:

$$\min_{\substack{y \geq 0, \\ e'y=1}} x' A y \rightarrow \max, \quad x \geq 0, \quad e' x = 1, \quad (5.35)$$

$$\max_{\substack{x \geq 0, \\ e'x=1}} x' A y \rightarrow \min, \quad y \geq 0, \quad e'y = 1. \quad (5.36)$$

Поскольку

$$\min_{\substack{y \geq 0, \\ e'y=1}} x' A y = \min_{1 \leq j \leq n} x' A e_j,$$

$$\max_{\substack{x \geq 0, \\ e'x=1}} x' A y = \max_{1 \leq i \leq m} e'_i A y,$$

то с учетом разд. 5.1 заключаем, что задачи (5.35), (5.36) эквивалентны паре двойственных задач

$$x_{m+1} \rightarrow \max, \quad x' A e_j - x_{m+1} \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad e' x = 1, \quad x \geq 0, \quad (5.37)$$

$$y_{n+1} \rightarrow \min, \quad e_i A y - y_{n+1} \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad e'y = 1, \quad y \geq 0. \quad (5.38)$$

Из теоремы двойственности $x_{m+1}^0 = y_{n+1}^0$, откуда имеем

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x \geq 0, \\ e'x=1}} \min_{\substack{y \geq 0, \\ e'y=1}} x' A y &= \max_{\substack{x \geq 0, \\ e'x=1}} \min_{1 \leq j \leq n} x' A e_j = \max_{(x, x_{m+1})} x_{m+1} = x_{m+1}^0 = \\ &= y_{n+1}^0 = \min_{(y, y_{n+1})} x_{m+1} = \min_{\substack{y \geq 0, \\ e'y=1}} \max_{1 \leq i \leq m} e'_i A y = \min_{\substack{y \geq 0, \\ e'y=1}} \max_{e'x=1} x' A y. \end{aligned} \quad (5.39)$$

С другой стороны, из того что x^0, y^0 – компоненты решений задач (5.37), (5.38), следует

$$x_{m+1}^0 = \min_{\substack{y \geq 0, \\ e'y=1}} x^0' A y, \quad y_{n+1}^0 = \max_{\substack{x \geq 0, \\ e'x=1}} x' A y^0, \quad x_{m+1}^0 = y_{n+1}^0 = x^0' A y^0,$$

т. е. векторы x^0, y^0 удовлетворяют неравенствам

$$x^{0'} A y \geq x^0 A y^0 \geq x' A y^0. \quad (5.40)$$

Сравнивая (5.40) с (5.34) и крайние выражения в (5.39), заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.5 (о минимаксе в теории матричных игр). *Каждая матричная игра имеет решения (x^0, y^0) в классе смешанных стратегий, которые совпадают с компонентами оптимальных планов задач ЛП (5.37), (5.38). Значения*

$$\max_{\substack{x \geq 0 \\ e'x=1}} \min_{\substack{y \geq 0 \\ e'y=1}} x' A y, \quad \min_{\substack{y \geq 0 \\ e'y=1}} \max_{\substack{x \geq 0 \\ e'x=1}} x' A y$$

всегда существуют и равны цене игры

$$\max_{\substack{x \geq 0 \\ e'x=1}} \min_{\substack{y \geq 0 \\ e'y=1}} x' A y = x^0 A y^0 = \min_{\substack{y \geq 0 \\ e'y=1}} \max_{\substack{x \geq 0 \\ e'x=1}} x' A y.$$

Замечание 5.3. Число $x^0 A y^0$ называют ценой игры.

Таким образом, решение матричной игры можно найти по решению определенной задачи ЛП. Справедливо и обратное: задаче ЛП соответствует матричная игра, решение которой дает оптимальный план исходной задачи.

5.5. Задача о максимальном потоке

На сети $S = \{I, U\}$, $I = I^0 \cup s \cup t$ с источником s и стоком t рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} v^0 &= \max_{x, v}, \\ \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} &= \begin{cases} v, & \text{если } i = s, \\ -v, & \text{если } i = t, \\ 0, & \text{если } i \in I^0, \end{cases} \\ 0 \leq x_{ij} &\leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \end{aligned} \quad (5.41)$$

которую называют задачей о максимальном потоке. Решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U)$ задачи (5.41) называется максимальным потоком, v^0 – величиной максимального потока.

Функция Лагранжа для задачи (5.41) (см. разд. 2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} F(x, v, y) &= v + \sum_{i \in I} y_i \left(\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} \right) + y_s v - y_t v = \\ &= v(y_s - y_t + 1) - \sum_{(i, j) \in U} (y_i - y_j) x_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь вектор множителей Лагранжа $y = (y_i, i \in I)$ является вектором двойственных переменных. Вычислим двойственную функцию (разд. 2.1)

$$\psi(y) = \sup_{0 \leq x \leq d, v} F(x, v, y) = \begin{cases} \sum_{\substack{y_j - y_i > 0 \\ (i, j) \in U}} (y_j - y_i) d_{ij}, & \text{если } y_t - y_s = 1, \\ \infty, & \text{если } y_t - y_s \neq 1. \end{cases}$$

Таким образом, двойственная задача к задаче (5.41) имеет вид

$$\sum_{\substack{y_j - y_i > 0 \\ (i, j) \in U}} (y_j - y_i) d_{ij} \rightarrow \min_y, \quad y_t - y_s = 1. \quad (5.42)$$

Согласно теории двойственности ЛП (разд. 2.3) на решениях (x^0, v^0) и y^0 задач (5.41) и (5.42) выполняется равенство

$$v^0 = \sum_{\substack{y_j^0 - y_i^0 > 0 \\ (i, j) \in U}} (y_j^0 - y_i^0) d_{ij}. \quad (5.43)$$

Если к сети S добавить дугу (s, t) и положить $c_{st} = 1$, $c_{ij} = 0$, $(i, j) \in U$, то задача (5.41) становится задачей о потоке минимальной стоимости (разд. 4.1). Пусть ее решение $(x_{ij}^0, (i, j) \in U, x_{st}^0 = v^0)$ получено методом потенциалов. Как показано в разд. 2.1, оптимальные потенциалы узлов $u_i^0, i \in I$, составляют решение двойственной задачи (5.42), т. е.

$$y_i^0 = u_i^0, \quad i \in I. \quad (5.44)$$

Согласно методу потенциалов (разд. 4.1) потенциал одного из узлов можно выбрать произвольно. Положим $u_s^0 = 0$. Тогда $u_t^0 = 1$ и потенциалы $u_i^0, i \in I^0$, принимают одно из двух значений: 0 или 1. Построим множество

$$I^1 = \{i \in I : u_i^0 = 1\}. \quad (5.45)$$

Ясно, что $s \in I^1, t \notin I^1$.

Для произвольного множества узлов $I^* \subset I, s \in I^*, t \notin I^*$, множество дуг $U^* = U(I^*) = \{(i, j) \in U : i \in I^*, j \notin I^*\}$ называется *разрезом (сетью)*, соответствующим множеству I^* , число $\sum_{(i, j) \in U^*} d_{ij}$ – *значением разреза*, разрез с минимальным значением – *минимальным разрезом*.

Теорема 5.6 (Форда – Фалкерсона). *Величина максимального потока равна значению минимального разреза.*

Доказательство. Из (5.43) с учетом (5.44), (5.45) имеем

$$v^0 = \sum_{(i,j) \in U(I^1)} d_{ij},$$

т. е. величина максимального потока равна значению разреза $U(I^1)$.

Покажем, что разрез $U(I^1)$ минимальный.

Рассмотрим произвольное множество $I^* \subset I$, $s \in I^*$, $t \notin I^*$, и построим по нему следующий план задачи (5.42):

$$y_i = 0, \text{ если } i \in I^*; \quad y_i = 1, \text{ если } i \notin I^*.$$

Значение целевой функции задачи (5.42) на этом плане равно $\sum_{(i,j) \in U(I^*)} d_{ij}$. Из оптимальности плана (5.44) в задаче (5.42) следует неравенство $\sum_{(i,j) \in U(I^1)} d_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in U(I^*)} d_{ij}$, которое означает, что разрез $U(I^1)$ минимальный. ■

Литература

1. Ашманов С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. – М.: Наука, 1981.
2. Васильев, Ф. П. Линейное программирование / Ф. П. Васильев, А. Ю. Иваницкий. – М.: Факториал, 1998.
3. Габасов, Р. Методы линейного программирования / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ. Ч. 1, 1977; ч. 2, 1978; ч. 3, 1980.
4. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, А. И. Тятушкин. – Минск: Изд-во БГУ, 1983.
5. Гольштейн, Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М.: Наука, 1969.
6. Данциг, Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг. – М.: Прогресс, 1966.
7. Канторович, Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов / Л. В. Канторович. – М.: Изд-во АН СССР, 1960.
8. Форд, Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966.
9. Юдин, Д. Б. Линейное программирование. Теория, методы и приложения / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1969.

Глава 2

ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Выпуклое программирование (ВП) – раздел теории экстремальных задач, в котором исследуются задачи минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X,$$

выпуклых функций $f(x), x \in \mathbf{R}^n$, на выпуклых множествах $X \subset \mathbf{R}^n$. Выпуклое программирование – непосредственное обобщение ЛП (гл. 1).

В ЛП в качестве типичной прикладной задачи была рассмотрена задача о составлении плана производства x^0 , обеспечивающего максимальную прибыль:

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, d_* \leq x \leq d^*.$$

В ряде ситуаций вектор стоимости c естественно считать случайным, принимающим значения $c(\omega), \omega \in \Omega$, с вероятностями $p(\omega), \omega \in \Omega$, где Ω – некоторое конечное множество. В этой ситуации каждому плану x будет соответствовать набор прибылей $c'(\omega)x, \omega \in \Omega$. При определении оптимального плана первой возникает мысль о поиске такого вектора x^0 , на котором средняя прибыль

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)c'(\omega)x = c'_M x, c_M = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)c(\omega),$$

максимальна. Средняя прибыль (или математическое ожидание прибыли), безусловно, важная характеристика плана, однако эта характеристика случайных величин не полностью учитывает степень их разбросанности. В связи с этим в теории вероятностей вводится вторая характеристика – дисперсия. С практической точки зрения часто план с максимальной средней прибылью менее предпочтителен, чем план с минимальной дисперсией прибыли. Компромиссным является план, обеспечивающий заданное отклонение от максимальной средней прибыли и минимальную дисперсию.

Дисперсия прибыли равна

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)(c'(\omega)x - c'_M x)^2 &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)(c'(\omega)x)^2 - \\ - 2 \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)(c'(\omega)x)c'_M x + \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)(c'_M x)^2 &= \\ &= x' \left(\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)c(\omega)c'(\omega) \right) x - x' c_M c'_M x. \end{aligned}$$

Задачей оптимального планирования производства в условиях неопределенности назовем задачу

$$x'Dx \rightarrow \min, Ax = b, c'_M x \geq \alpha^0 - \gamma, d_* \leq x \leq d^*,$$

где $D = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)c(\omega)c'(\omega) - c'_M c'_M$, $\alpha^0 = \max c'_M x$, $x \in X$, γ – заданное отклонение от максимальной средней прибыли. Сформулированная задача относится к ВП.

§ 6. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

Исследование задач ВП привело к созданию выпуклого анализа, в котором изучаются свойства специального класса недифференцируемых функций. В данном параграфе приводятся начальные сведения из выпуклого анализа.

6.1. Выпуклые множества

Определение 6.1. Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется

а) выпуклым, если оно наряду с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок, т. е. для любых $x^1, x^2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ точка

$$x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \quad (6.1)$$

принадлежит множеству X (рис. 6.1);

б) строго выпуклым, если для любых $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$; $\lambda \in]0, 1[$ точка (6.1) внутренняя для множества X .

Пустое множество выпукло по определению. Плоскость $\{x \in \mathbf{R}^n : c'x = \alpha\}$, полупространство $\{x \in \mathbf{R}^n : c'x \leq \alpha\}$, все пространство \mathbf{R}^n – выпуклые множества. Примером выпуклых (но не строго) множеств являются точка, квадрат. Отрезок, круг – строго выпуклые множества (рис. 6.2). Множества, изображенные на рис. 6.3, не выпуклы.

Приведем некоторые свойства выпуклых множеств.

1. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество с непустой внутренностью. Тогда замыкание \bar{X} множества X выпукло.

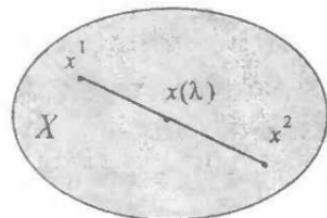


Рис. 6.1

Доказательство предоставляется читателю.

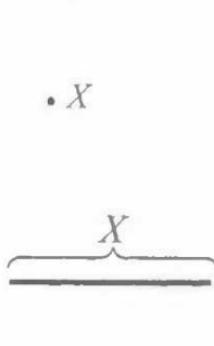


Рис. 6.2

2. Линейная комбинация

$$X = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i, x^i \in X_i, \alpha_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, k} \right\}$$

выпуклых множеств X_i , $i = \overline{1, k}$, – выпуклое множество.

Доказательство очевидно.

3. Пересечение

$$X = \bigcap_{i=1}^k X_i = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : x \in X_i, i = \overline{1, k} \right\}$$

любого числа выпуклых множеств X_i , $i = \overline{1, k}$, – множество выпуклое.

Действительно, пусть x^1, x^2 – любые точки из X . Тогда согласно (6.1) для любых $\lambda \in [0, 1]$ имеет место включение $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X_i$, $i = \overline{1, k}$, т. е. $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$ и X – выпуклое множество.

Отсюда следует, что множество планов $X = \{x \in R^n : Ax = b, d_* \leq x \leq d^*\}$ канонической задачи ЛП, как пересечение полупространств и плоскостей, выпуклое множество.

Определение 6.2. Выпуклой комбинацией точек $x^i \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{1, k}$, называется точка

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \quad (6.2)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

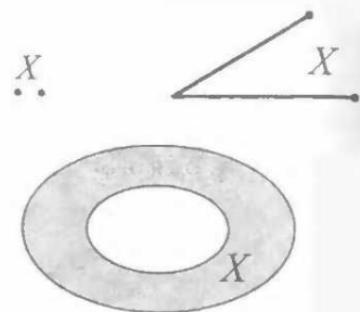


Рис. 6.3

Механическая интерпретация: точка (6.2) – центр масс $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, сосредоточенных в точках x^1, \dots, x^k .

4. Любая выпуклая комбинация любого конечного числа точек выпуклого множества принадлежит этому множеству.

Доказательство. При $k=2$ утверждение следует из определения 6.1, а. Предположим, что утверждение верно для $k=p$. Докажем, что оно будет верно и для $k=p+1$. По предположению, $x(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^p \bar{\lambda}_i x^i \in X \quad \forall \bar{\lambda}_i \geq 0, i=\overline{1,p}, \sum_{i=1}^p \bar{\lambda}_i = 1$. Тогда в силу выпуклости множества X для любых точек $x(\bar{\lambda}), x^{p+1} \in X$ имеем $\mu_1 x(\bar{\lambda}) + \mu_2 x^{p+1} \in X \quad \forall \mu_1, \mu_2 \geq 0, \mu_1 + \mu_2 = 1$. Из равенств $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \dots + \bar{\lambda}_p = 1, \mu_1 + \mu_2 = 1$ следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1} = 1$, где $\lambda_1 = \mu_1 \bar{\lambda}_1 \geq 0, \dots, \lambda_p = \mu_1 \bar{\lambda}_p \geq 0, \lambda_{p+1} = \mu_2 \geq 0$, т. е. $x(\lambda) = \mu_1 x(\bar{\lambda}) + \mu_2 x^{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} \bar{\lambda}_i x^i \in X$. ■

Определение 6.3. Выпуклой оболочкой (овыпуклением) $\text{conv } X$ непустого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих это множество.

На рис. 6.4 приведены примеры выпуклых оболочек.

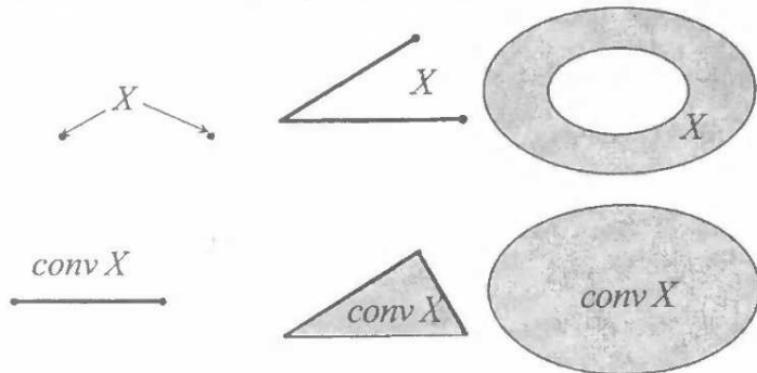


Рис. 6.4

Выпуклая оболочка конечного числа точек $x^i \in \mathbf{R}^n, i=\overline{1,k+1}$, называется **многогранником** (в ЛП многогранник определялся с помощью линейных равенств и неравенств).

Если векторы $x^2 - x^1, \dots, x^{k+1} - x^1$ линейно независимы, то такой многогранник называется **k -мерным симплексом**.

5. Для выпуклых оболочек справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1 (Каратеодори). Любая точка $x \in \text{conv } X$ представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек из непустого множества X .

6.2. Отделимость выпуклых множеств

Говорят, что множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$

a) *отделимы* (рис. 6.5), если существуют такие вектор $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, и число $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$c'x \geq \alpha \geq c'y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y; \quad (6.3)$$

b) *строго отделимы* (рис. 6.6), если неравенства (6.3) выполняются как строгие.

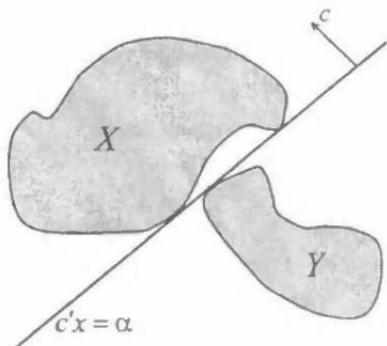


Рис. 6.5

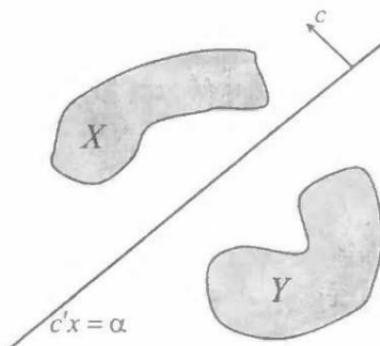


Рис. 6.6

Плоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : c'x = \alpha\}$ называется *разделяющей плоскостью*.

Проблема отделимости множеств просто решается в вырожденном случае, когда множества X и Y лежат в одной плоскости (рис. 6.7), т. е. когда при некоторых $c_0 \in \mathbb{R}^n$, $c_0 \neq 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ выполняется тождество

$$c'_0x \equiv \alpha_0 \equiv c'_0y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \quad (6.4)$$

В этом случае неравенства (6.3) выполняются для произвольных x, y при $c = c_0$, $\alpha = \alpha_0$. Плоскость $\{x \in \mathbf{R}^n : c'_0 x = \alpha_0\}$ называется *несобственно разделяющей*.

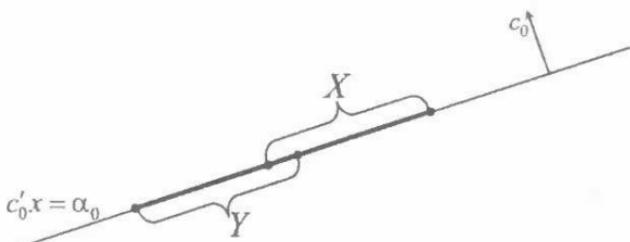


Рис. 6.7

В общем случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 6.2 (об отделимости выпуклых множеств). *Множества $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ отделимы, если они выпуклы и не имеют общих внутренних точек.*

Теорема 6.3 (о строгой отделимости выпуклых множеств). *Множества $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ строго отделимы, если они выпуклы, замкнуты, не имеют общих точек и хотя бы одно из них ограничено.*

Доказательство. Сначала докажем теорему 6.3. Теорема 6.2 будет доказана после теоремы 6.4.

Предположим для определенности, что ограничено множество X . Во множествах X, Y возьмем по одной произвольной точке $x^1 \in X, y^1 \in Y$. Расстояние между ними обозначим через $\rho = \|x^1 - y^1\|$.

Пусть Y_ρ – пересечение замкнутой ρ -окрестности точки x^1 с множеством Y . Множества X, Y_ρ ограничены, замкнуты. В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная функция $f(x, y) = \|x - y\|^2 = (x - y)'(x - y)$, $x \in X, y \in Y_\rho$ достигает на них минимума:

$$\rho_0^2 = (x^0 - y^0)'(x^0 - y^0) = \min_{x \in X, y \in Y_\rho} (x - y)'(x - y). \quad (6.5)$$

При этом $\rho_0 > 0$, ибо множества X и Y не имеют общих точек (рис. 6.8).

В силу выпуклости множества X для любых $x \in X, \lambda \in [0, 1]$, имеем $x(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)x^0 \in X$. Из (6.5) следует, что функция $\varphi(\lambda) = (x(\lambda) - y^0)'(x(\lambda) - y^0)$, $\lambda \in [0, 1]$, достигает минимального значения

при $\lambda = 0$ (на левом конце отрезка $\lambda \in [0, 1]$). Поэтому в точке $\lambda = 0$ выполняется необходимое условие минимума (разд. 6.3)

$$\left. \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 2(x^0 - y^0)'(x - x^0) \geq 0.$$

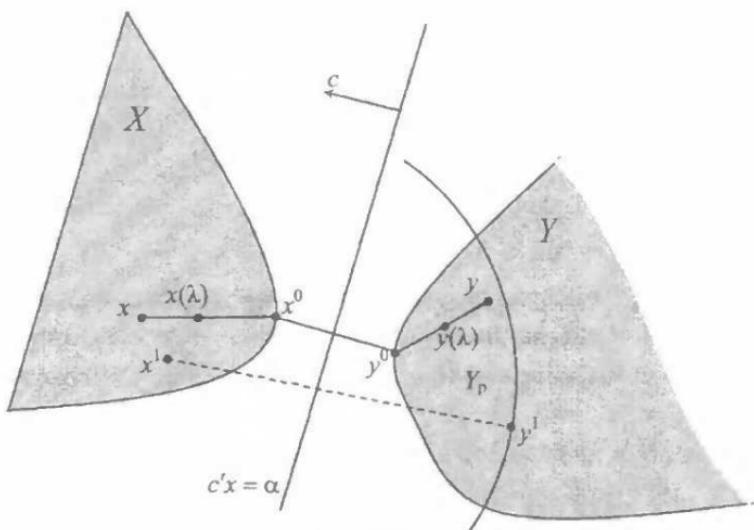


Рис. 6.8

Отсюда получаем неравенство

$$c'x \geq c'x^0, \quad x \in X, \quad (6.6)$$

где

$$c = (x^0 - y^0)/\rho_0. \quad (6.7)$$

Аналогично для любых $y \in Y, \lambda \in [0, 1]$ имеет место включение $y(\lambda) = \lambda y + (1 - \lambda)y^0 \in Y$. Функция $\psi(\lambda) = (y(\lambda) - x^0)'(y(\lambda) - x^0)$, $\lambda \in [0, 1]$, достигает минимума в граничной точке $\lambda = 0$ отрезка $[0, 1]$. Следовательно, в этой точке выполняется необходимое условие минимума

$$\left. \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 2(y^0 - x^0)'(y - y^0) \geq 0.$$

С учетом (6.7) приходим к неравенству

$$c'y \leq c'y^0, \quad y \in Y. \quad (6.8)$$

Положим $\alpha = c'(x^0 + y^0)/2$. Тогда из (6.6), (6.8) и равенства $\rho_0 = c'(x^0 - y^0)$ получим, что $c'x > \alpha$, $x \in X$, $c'y < \alpha$, $y \in Y$. Таким обра-

зом, плоскость $c'x = \alpha$, проведенная через середину отрезка, соединяющего точки x^0, y^0 , строго разделяет («собственно» разделяет) множества X, Y .

Замечание 6.1. В вырожденном случае (6.4) при выполнении условий теоремы кроме несобственно разделяющей плоскости может существовать и «собственно» разделяющая плоскость (рис. 6.9).

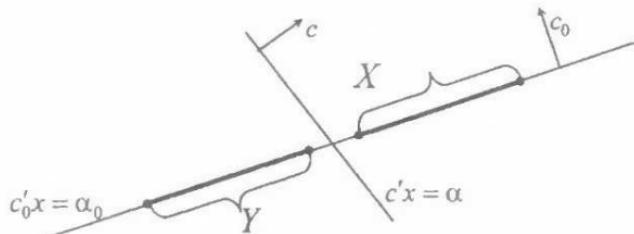


Рис. 6.9

Определение 6.4. Плоскость $c'x = \alpha$, $\alpha = c'x^*$, называется *опорной* к множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ в его граничной точке x^* , если выполняется одно из неравенств: а) $c'x \geq \alpha \quad \forall x \in X$; б) $c'x \leq \alpha \quad \forall x \in X$.

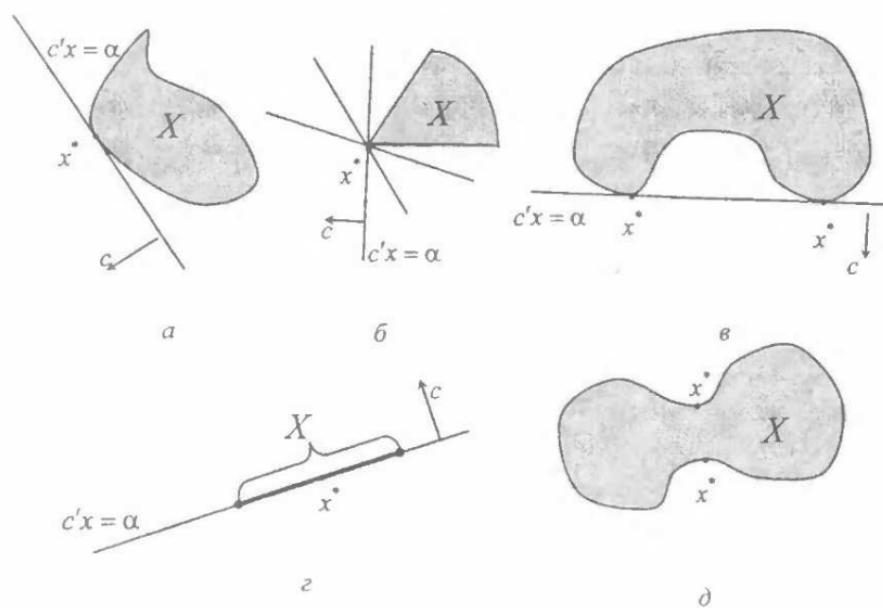


Рис. 6.10

На рис. 6.10 приведены примеры опорных плоскостей. В частности, рассмотрены случаи, когда

- в граничной точке существует единственная («собственно») опорная плоскость;
- («собственно») опорных плоскостей бесконечное число;
- плоскость является («собственно») опорной более чем в одной точке;
- несобственная опорная плоскость опорная в любой точке множества X ;
- в отмеченных точках не существует опорных плоскостей.

Теорема 6.4 (о существовании опорной плоскости). *Непустое выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет опорную плоскость в каждой своей граничной точке.*

Доказательство. Пусть x^* – граничная точка множества X . Построим последовательность точек x^k , $k=1, 2, \dots$, сходящихся к x^* и не принадлежащих замыканию \overline{X} множества X . Каждая точка x^k представляет ограниченное замкнутое выпуклое множество, не имеющее общих точек с замкнутым выпуклым множеством \overline{X} . Согласно теореме о строгой отделимости найдутся такие векторы c^k , $\|c^k\|=1$, и число α_k , что $c^{k'}x^k < \alpha_k$, $c^{k'}x > \alpha_k \quad \forall x \in \overline{X}$, т. е.

$$c^{k'}x^k < c^{k'}x \quad \forall x \in \overline{X}. \quad (6.8)$$

Из последовательности точек c^k , $k=1, 2, \dots$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к c^* . Не ограничивая общности, будем считать, что сама исходная последовательность сходится: $c^k \rightarrow c^*$, $k \rightarrow \infty$, $\|c^*\|=1$.

Перейдя к пределу в (6.8) при $k \rightarrow \infty$, получим неравенство

$$c^{*'}x^* \leq c^{*'}x \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, плоскость $c^{*'}x = \alpha$ ($\alpha = c^{*'}x^*$) опорная к множеству X в точке x^* . ■

Замечание 6.2. В вырожденном случае при выполнении условий теоремы кроме несобственно опорной плоскости существует и «собственно» опорная плоскость (рис. 6.11).

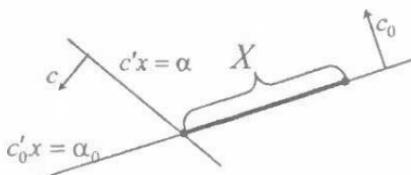


Рис. 6.11

Доказательство теоремы 6.2. По предположению множества X, Y не имеют общих внутренних точек. Это означает, что точка $z=0$ не является внутренней для выпуклого множества $Z = X - Y$. Во взаимном расположении $z=0$ и множества Z возможны два случая:

- точка $z=0$ не принадлежит замыканию \bar{Z} ;
- точка $z=0$ – граничная точка множества Z ($0 \in \partial Z$).

В случае *a*, согласно теореме 6.3 о строгой отделимости, точка $z=0$ и множество Z строго отделимы. Значит, отделимы и множества X и Y .

В случае *b* по теореме 6.4 о существовании опорной плоскости существует плоскость, опорная к Z в точке $z=0$, т. е. $c'z \geq 0 \quad \forall z \in Z$ или

$$c'(x-y) \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y. \quad \blacksquare$$

Используя теорему об отделимости выпуклых множеств, докажем следующее утверждение.

Лемма 6.1 (о несовместности системы линейных соотношений). Пусть $a_i, i = \overline{1, p}$, $b_j, j = \overline{1, k}$, – некоторые n -векторы, для которых несовместна система

$$a_i' l < 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad b_j' l = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (6.9)$$

Тогда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, p}$, $\mu_j, j = \overline{1, k}$, что

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i + \sum_{j=1}^k |\mu_j| \neq 0 \text{ и}$$

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^k \mu_j b_j = 0. \quad (6.10)$$

Доказательство. Рассмотрим два множества:

$$Y = \{y = (y_1, \dots, y_{p+k}) : y_i = a_i' l, i = \overline{1, p}, y_{p+j} = b_j' l, j = \overline{1, k}, l \in \mathbf{R}^n\},$$

$$Z = \{z = (z_1, \dots, z_{p+k}) : z_i < 0, i = \overline{1, p}, z_{p+j} = 0, j = \overline{1, k}\}.$$

Множество Y является линейным подпространством и, следовательно, выпукло. Очевидно, выпукло и множество Z . Поскольку система (6.9) несовместна, то $Y \cap Z = \emptyset$. Тогда по теореме 6.2 существует ненулевой $(p+k)$ -вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_k)$, что

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^k \mu_j y_{p+j} \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i \quad \forall y \in Y, z \in Z. \quad (6.11)$$

Из неравенства (6.11) и определения множества Z следует, что $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, p}$. Действительно, если предположить, что существует отрицательная координата $\lambda_s < 0$, то для вектора $z = (z_i = -\varepsilon, i = \overline{1, p}, i \neq s, z_s = -\beta^2 \varepsilon, z_i = 0, i = \overline{p+1, p+k})$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $|\beta|$ получим справа в соотношении (6.11) сколь угодно большое число, что противоречит неравенству (6.11).

Поскольку неравенство (6.11) справедливо $\forall z_i < 0, i = \overline{1, p}$, то оно справедливо и для $z_i = 0, i = \overline{1, p}$, т. е.

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^k \mu_j y_{p+j} \geq 0 \quad \forall y \in Y.$$

Заменим в последнем неравенстве $y_i, i = \overline{1, p+k}$, их выражениями из определения множества Y . Получим

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^k \mu_j b_j \right)' l \geq 0 \quad \forall l \in \mathbf{R}^n.$$

Возьмем в последнем неравенстве

$$l = - \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^k \mu_j b_j \right).$$

Будем иметь

$$-\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^k \mu_j b_j \right\| \geq 0,$$

что влечет за собой равенство (6.10). ■

6.3. Выпуклые функции

В выпуклом анализе основное внимание уделяется таким (собственным) функциям $f(x), x \in \mathbf{R}^n$, для которых существует точка $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ с $f(\bar{x}) < +\infty$ и не существует точек $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ с $f(\underline{x}) = -\infty$.

Определение 6.5. Функция $f(x), x \in X$, определенная на непустом выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, называется

a) *выпуклой*, если для любых $x^1, x^2 \in X, \lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство (рис. 6.12)

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2); \quad (6.12)$$

б) *строго выпуклой*, если соотношение (6.12) выполняется как строгое неравенство для любых $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, $\lambda \in]0, 1[$;

в) *сильно выпуклой* (с константой $\mu > 0$), если при любых $x^1, x^2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &\leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) - \\ &- \lambda(1-\lambda)\mu(x^1 - x^2)'(x^1 - x^2). \end{aligned} \quad (6.13)$$

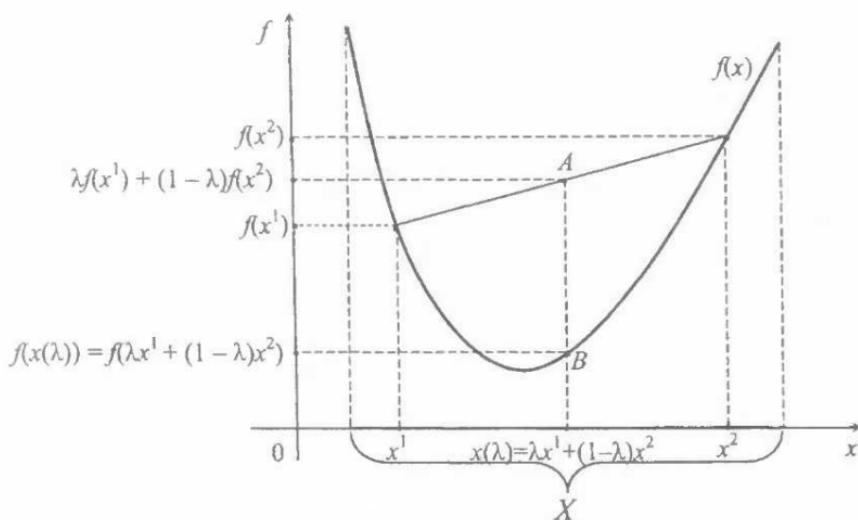


Рис. 6.12

Сильно выпуклые функции являются строго выпуклыми; строго выпуклые функции – выпуклые.

Аффинная функция $f(x) = a'x + b$, $x \in \mathbb{R}^n$, выпукла (но не строго). На ней соотношение (6.12) выполняется как равенство. У строго выпуклой функции точки A и B не совпадают (рис. 6.12).

Любая норма $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, – выпуклая функция, поскольку из определения нормы следует неравенство

$$\|\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\| \leq \lambda \|x^1\| + (1-\lambda)\|x^2\| \quad \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1].$$

Норма $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$, $x \in \mathbf{R}^n$, при $1 < p < +\infty$ строго (но не сильно) выпукла. Нормы $\|x\| = \max_{j=1,n} |x_j|$, $\|x\| = \sum_{j=1}^n |x_j|$, $x \in \mathbf{R}^n$, — выпуклы, но не строго выпуклы.

Приведем некоторые свойства выпуклых функций.

1. Сильно выпуклая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, бесконечно большая:

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ при } \|x\| \rightarrow \infty. \quad (6.14)$$

Действительно, если допустить противное $f(x) < \infty$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, то при фиксированном $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ с $f(\bar{x}) < \infty$ и $\|x - \bar{x}\| \rightarrow \infty$ нарушается свойство (6.13):

$$\lambda(1-\lambda)\mu(\bar{x}-x)'(\bar{x}-x) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(x) - f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)x),$$

ибо левая часть неравенства неограниченно возрастает, а правая — ограничена.

Бесконечно большие функции Ляпунова играют важную роль при исследовании асимптотической устойчивости в целом динамических систем.

Свойство (6.14) широко используется в вариационном исчислении и теории оптимального управления при доказательстве теорем существования (условия роста Тонелли).

2. Пусть A — симметричная $n \times n$ -матрица, $v_1 > 0$ — ее минимальное собственное число. *Квадратичная форма* $f(x) = x'Ax$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно выпукла с константой $\mu = v_1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} (\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)'A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \lambda^2(x^1)'Ax^1 + 2\lambda(x^1)'Ax^2 - \\ &\quad - 2\lambda^2(x^1)'Ax^2 + (x^2)'Ax^2 - 2\lambda(x^2)'Ax^2 + \lambda^2(x^2)'Ax^2 = \\ &= \lambda^2(x^1 - x^2)'A(x^1 - x^2) - \lambda(x^1 - x^2)'A(x^1 - x^2) + \lambda(x^1)'Ax^1 + \\ &\quad + \lambda(x^2)'Ax^2 + (x^2)'Ax^2 - 2\lambda(x^2)'Ax^2 = \lambda(x^1)'Ax^1 + \\ &\quad + (1-\lambda)(x^2)'Ax^2 - \lambda(1-\lambda)(x^1 - x^2)'A(x^1 - x^2) \\ &\quad \forall x^1, x^2 \in \mathbf{R}^n, \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Поскольку $x'Ax \geq v_1 x'x \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$, то из последнего равенства получаем

$$(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)' A (\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda(x^1)' A x^1 + \\ + (1-\lambda)(x^2)' A x^2 - \lambda(1-\lambda)v_1(x^1 - x^2)'(x^1 - x^2),$$

т. е. функция $x'Ax$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно выпуклая с константой $\mu = v_1$.

Из этого утверждения следует, что квадрат евклидовой нормы $f(x) = \|x\|^2 = x'x$, $x \in \mathbf{R}^n$, – сильно выпуклая функция. На этой функции соотношение (6.10) выполняется как равенство с $\mu = 1$.

3. Если функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно выпуклая с константой $\mu > 0$, то функция $g(x) = \xi f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi > 0$, сильно выпуклая с константой $\xi\mu$.

4. Сумма двух сильно выпуклых функций с константами μ_1, μ_2 сильно выпукла с константой $\mu_1 + \mu_2$.

Отсюда следует, что функция $f(x) = g(x) \pm \mu x'x$, $x \in \mathbf{R}^n$ ($\mu > 0$), сильно выпукла с константой μ , если функция $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпукла. Справедливо и обратное утверждение.

5. Если A – симметричная $n \times n$ -матрица, $v_1 > 0$ – ее минимальное собственное число, то функция, представляющая сумму определенно положительной квадратичной формы и аффинной функции $f(x) = x'Ax + a'x + b$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно выпукла с константой v_1 .

В выпуклом программировании замена выпуклой функции $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, на сильно выпуклую $f(x) \subset g(x) \pm \mu x'x$, $x \in \mathbf{R}^n$, часто используется для регуляризации задачи.

Определение 6.6. Функцию $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ назовем *слабо нелинейной* с константой v , если

$$g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2) - \\ - \lambda(1-\lambda)v(x^1, x^2, \lambda)(x^1 - x^2)'(x^1 - x^2) \\ \forall x^1, x^2 \in \mathbf{R}^n, \lambda \in [0, 1], |v(x^1, x^2, \lambda)| \leq v.$$

6. Сумма сильно выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, с константой μ и слабо нелинейной функции $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, с константой $v < \mu$ является сильно выпуклой функцией с константой $\mu - v > 0$.

Это свойство характеризует робастность сильно выпуклых функций.

7. Справедливы следующие критерии выпуклости функций.

Теорема 6.5. Непрерывно-дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$,

а) выпукла тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} (x - x^*) \quad \forall x, x^* \in \mathbf{R}^n; \quad (6.15)$$

б) строго выпукла в том и только том случае, если неравенство (6.15) выполняется как строгое для любых $\forall x, x^* \in \mathbf{R}^n$, $x \neq x^*$;

в) сильно выпукла тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $\mu > 0$, что

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} (x - x^*) + \mu (x - x^*)'(x - x^*) \quad \forall x, x^* \in \mathbf{R}^n. \quad (6.16)$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпукла. Перепишем неравенство (6.12) в виде

$$f(x^* + \lambda(x - x^*)) - f(x^*) \leq \lambda(f(x) - f(x^*)), \quad \lambda \in [0, 1], \quad x, x^* \in \mathbf{R}^n.$$

Применение к левой части этого неравенства формулы конечных приращений дает

$$\lambda \frac{\partial f'(x^* + \theta \lambda(x - x^*))}{\partial x} (x - x^*) \leq \lambda(f(x) - f(x^*)), \quad \theta \in [0, 1].$$

Разделив обе части неравенства на $\lambda > 0$ и устремив $\lambda \rightarrow +0$, с учетом гладкости функции получим требуемое неравенство (6.15).

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (6.15). Покажем, что функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпукла. Согласно (6.15) для любых $x, x^* \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$ выполняются неравенства

$$f(x) - f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \geq \frac{\partial f'(\lambda x + (1 - \lambda)x^*)}{\partial x} (x - x^*)(1 - \lambda),$$

$$f(x^*) - f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \geq \frac{\partial f'(\lambda x + (1 - \lambda)x^*)}{\partial x} (x - x^*)(-\lambda).$$

Умножим первое неравенство на λ , второе на $(1 - \lambda)$ и сложим. В результате получим $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x^*) - f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \geq 0$, что равносильно неравенству (6.12).

Утверждение б доказывается аналогично.

в) Для сильно выпуклой функции $x'x$, $x \in \mathbf{R}^n$, неравенство (6.16) превращается в равенство с константой $\mu = 1$:

$$x'x = x''x^* + 2x''(x - x^*) + (x - x^*)(x - x^*) \quad \forall x, x^* \in \mathbf{R}^n. \quad (6.17)$$

Покажем, что условие (6.13) равносильно неравенству

$$g(x) \geq g(x^*) + \frac{\partial g'(x^*)}{\partial x}(x - x^*) \quad \forall x, x^* \in \mathbf{R}^n, \quad (6.18)$$

где $g(x) = f(x) - \mu x'x$, $\partial g'(x^*)/\partial x = \partial f'(x^*)/\partial x - 2\mu x^*$. В самом деле, если умножить равенство (6.17) на μ и сложить с (6.18), то получим неравенство (6.16). И обратно: вычтя из (6.16) равенство (6.17), умноженное на μ , придем к (6.18). Из равносильности неравенств (6.16) и (6.18) и выпуклости функции $g(x) = f(x) - \mu x'x$, $x \in \mathbf{R}^n$, следует утверждение в. ■

Определение 6.7. Симметричная $n \times n$ -матрица $A = (a_{ij}, i, j = \overline{1, n})$ называется *неотрицательной (положительной)* и обозначается $A \geq 0$ ($A > 0$), если знакоположительна (определенна положительна) квадратичная форма $l'Al$, т. е.

$$l'Al \geq 0 \quad \forall l \in \mathbf{R}^n \quad (l'Al > 0 \quad \forall l \in \mathbf{R}^n, l \neq 0).$$

Известны следующие *критерии Сильвестра*:

1) $A \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_s \\ i_1, \dots, i_s \end{pmatrix} \geq 0$,

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n$, где $\det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_s \\ i_1, \dots, i_s \end{pmatrix}$ – *главные миноры матрицы A*;

2) $A > 0$ в том и только том случае, если $D_s = \det(a_{ij}, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}) > 0$, $s = \overline{1, n}$, где D_s – *последовательные главные миноры матрицы A*.

8. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 6.6. Для того чтобы дважды непрерывно-дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, была

а) выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы матрица вторых производных была неотрицательной

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^n; \quad (6.19)$$

б) строго выпуклой, достаточно, чтобы матрица вторых производных была положительна, т. е. неравенство (6.19) выполнялось как строгое;

в) сильно выпуклой, необходимо и достаточно существования такой постоянной $\mu > 0$, что

$$l' \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} l \geq 2\mu \|l\|^2, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad l \in \mathbf{R}^n. \quad (6.20)$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, — выпуклая функция. Тогда

$$f(x + tl) - f(x) \geq t \frac{\partial f'(x)}{\partial x} l,$$

$$f(x + tl) - f(x) = t \frac{\partial f'(x)}{\partial x} l + \frac{1}{2} t^2 l' \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} l + o(t^2), \quad l \in \mathbf{R}^n.$$

Вычтя второе соотношение из первого, получим

$$\frac{1}{2} t^2 l' \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} l + o(t^2) \geq 0, \quad l \in \mathbf{R}^n.$$

Разделим последнее неравенство на t^2 и устремим t к нулю. В результате получим

$$l' \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} l \geq 0 \quad \forall l \in \mathbf{R}^n, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

т. е. выполняется неравенство (6.19).

Достаточность. Пусть неравенство (6.20) выполняется. Рассмотрим любые точки $x, x^* \in \mathbf{R}^n$. По теореме о среднем значении имеем

$$f(x) = f(x^*) + \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{1}{2} (x - x^*)' \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x^2} (x - x^*),$$

где $\bar{x} = \lambda x^* + (1 - \lambda)x$ при некотором $\lambda \in]0, 1[$.

Поскольку $(x - x^*)' \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x^2} (x - x^*) \geq 0$, то из последнего разложения следует неравенство (6.15), т. е. согласно теореме 6.5 функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпукла.

В случае б обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = x^4$, $x \in \mathbf{R}$, строго выпукла, но $\partial^2 f(0)/\partial x^2 = 0$.

Докажем утверждение в. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \mu x'x$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Как было показано выше, функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно выпукла тогда и только тогда, когда функция $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпукла. Для функции $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, имеем $\partial^2 g(x)/\partial x^2 = \partial^2 f(x)/\partial x^2 - 2\mu E_n$. Поэтому неравенство (6.20) равносильно неравенству $l' \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} l \geq 0 \quad \forall x, l \in \mathbf{R}^n$.

Это означает, что функция $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпуклая, а функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно выпуклая. ■

9. Если функции $f_i(x)$, $x \in X$, $i = \overline{1, k}$, выпуклы, то выпуклы и функции

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x), \quad x \in X, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}; \\ g(x) &= \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Доказательство. Для функции $\varphi(x)$, $x \in X$, имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda f_i(x^1) + (1-\lambda)f_i(x^2)) = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x^1) + \\ &+ (1-\lambda) \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x^2) = \lambda \varphi(x^1) + (1-\lambda)\varphi(x^2)\end{aligned}$$

для любых $x^1, x^2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$, т. е. функция $\varphi(x)$, $x \in X$, выпукла.

Аналогично для функции $g(x)$, $x \in X$:

$$\begin{aligned}g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \max_{1 \leq i \leq k} f_i(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \lambda f_i(x^1) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\lambda)f_i(x^2) \right\} = \lambda \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x^1) + (1-\lambda) \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x^2) = \lambda g(x^1) + \\ &\quad + (1-\lambda)g(x^2) \quad \forall x^1, x^2 \in X, \quad \lambda \in [0, 1].\end{aligned}$$

Следовательно, функция $g(x)$, $x \in X$, выпукла. ■

10. *Определение 6.8. Множество*

$$X_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

называется **множеством уровня** (множеством Лебега) функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Множества Лебега X_1 норм: 1) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$; 2) $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$; 3) $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, изображены на рис. 6.13.

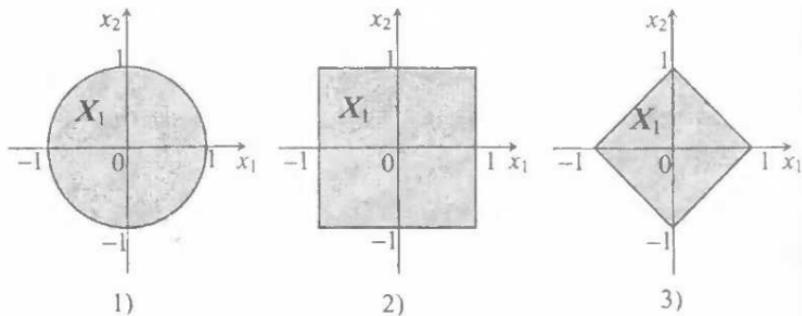


Рис. 6.13

Теорема 6.7. Непустые множества Лебега функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$:

- выпуклы, если $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, – выпуклая функция;
- строго выпуклы, если $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, – строго выпуклая функция;
- строго выпуклы и ограничены, если $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, – сильно выпуклая функция.

Доказательство. а) Пусть $x^1, x^2 \in X_\alpha$, т. е. $f(x^1) \leq \alpha$, $f(x^2) \leq \alpha$. В силу выпуклости функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, для любых $\lambda \in [0, 1]$ имеем $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$. Следовательно, $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_\alpha$, $\lambda \in [0, 1]$, т. е. X_α – выпуклое множество.

Утверждение б) доказывается аналогично.

Заметим, что множества Лебега строго выпуклой функции могут быть неограниченными (например, для функции $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$), (рис. 6.14).

Докажем утверждение в. Действительно, сильно выпуклая функция и строго выпукла. Значит, ее множества Лебега строго выпуклы. Покажем ограниченность множеств Лебега. Утверждение докажем от противного. Предположим, что при некотором $\alpha < \infty$ множество Лебега X_α неограничено. Согласно определению собственных функций $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, существует точка $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, на которой $f(\bar{x}) < \infty$. Постро-

им последовательность точек x^1, \dots, x^k, \dots , принадлежащих X_α . Точка x^1 выбирается произвольно из X_α . Пусть построена точка $x^k \in X_\alpha$. В силу неограниченности множества X_α для любого числа $p > 1$ найдется такая точка $y^k \in X_\alpha$, что $\|y^k - x^k\| = p^k$. Точку x^{k+1} построим по правилу: $x^{k+1} = \lambda_k y^k - (1 - \lambda_k)x^k$, где $\lambda_k = q^k$, $0 < q < 1$.

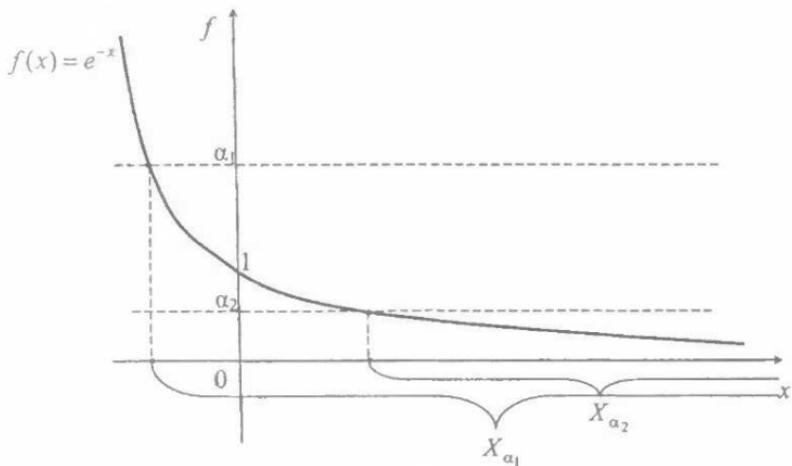


Рис. 6.14

Подсчитаем $\|x^{k+1} - x^k\| = \|\lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)x^k - x^k\| = \lambda_k \|y^k - x^k\| = (pq)^k$. Это означает, что при $pq < 1$ последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, — фундаментальная и имеет предел $x^k \rightarrow \underline{x}$, $k \rightarrow \infty$.

Обозначим через β_k число, удовлетворяющее неравенству $f(x^k) \leq \alpha - \beta_k$ ($\beta_1 = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq \lambda_k f(y^k) + (1 - \lambda_k)f(x^k) - \lambda_k(1 - \lambda_k)\mu(y^k - x^k)'(y^k - x^k) \leq \\ &\leq \lambda_k \alpha + (1 - \lambda_k)f(x^k) - \lambda_k(1 - \lambda_k)\mu p^{2k} \leq \lambda_k \alpha + (1 - \lambda_k)(\alpha - \beta_k) - \\ &- \mu \lambda_k(1 - \lambda_k)p^{2k} = \alpha - (1 - \lambda_k)\beta_k - \mu \lambda_k(1 - \lambda_k)p^{2k} = \alpha - \beta_{k+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} &= (1 - \lambda_k)\beta_k - \mu \lambda_k(1 - \lambda_k)p^{2k} = (1 - q^k)\beta_k + \\ &+ \mu q^k(1 - q^k)p^{2k} = (1 - q^k)\beta_k + \mu(1 - q^k)(p^2 q)^k, \end{aligned} \quad (6.21)$$

т. е. последовательность β_k , $k = 1, 2, \dots$, является решением линейного неоднородного рекуррентного уравнения (6.18).

При $p^2q > 1$ неоднородная часть уравнения (6.21) неограниченно возрастает, если $k \rightarrow \infty$. Поэтому и решение β_k , $k=1, 2, \dots$, уравнения (6.21) неограниченно возрастает, т. е. $\beta_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Если предположить противное, то, записав уравнение (6.21) в виде

$$\beta_{k+1} - (1 - q^k)\beta_k = \mu q^k (1 - q^k) p^{2k},$$

при $k \rightarrow \infty$ получаем противоречие: слева – ограниченная величина, справа – неограниченная. Таким образом, $f(x^k) \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow \infty$ ($p^2q > 0$) и, значит, $f(\underline{x}) = -\infty$, что противоречит определению собственной функции. При доказательстве в качестве чисел p и q можно взять числа $p = 2$, $q = \frac{1}{3}$.

Свойство (6.14) сильно выпуклых функций позволяет дать другое доказательство ограниченности их множеств Лебега, ибо последние у бесконечно больших функций ограничены.

Действительно, если допустить, что при некотором $\alpha < +\infty$ существует такая последовательность $x^k \in X_\alpha$, $\|x^k\| \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$, то из (6.14) получим $f(x^k) \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, что противоречит неравенствам $f(x^k) \leq \alpha$, $k = 1, 2, \dots$ ■

Не каждая функция, у которой множества Лебега выпуклы, является выпуклой. Например, $f(x) = x^3$, $f(x) = 1 - e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (рис. 6.15).

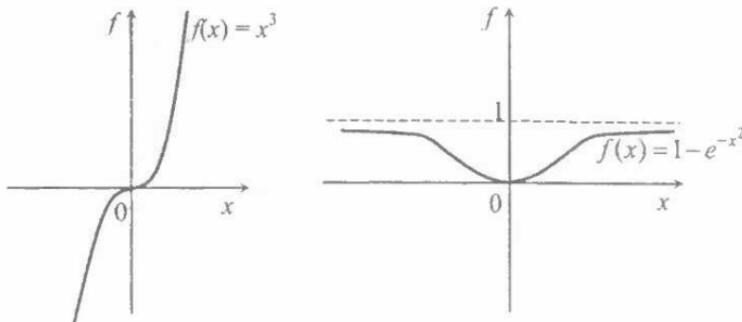


Рис. 6.15

11. Определение 6.9. Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется *квазивыпуклой*, если ее множества Лебега X_α выпуклы.

Теорема 6.8. Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, квазивыпукла тогда и только тогда, когда для любых $x^1, x^2 \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in]0, 1[$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max \{f(x^1), f(x^2)\}. \quad (6.22)$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ квазивыпуклая. Тогда из определения квазивыпуклой функции следует, что для любых $x^1, x^2 \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \in]0, 1[$ точка $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ принадлежит X_α , где $\alpha = \max \{f(x^1), f(x^2)\}$. Таким образом,

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \alpha = \max \{f(x^1), f(x^2)\},$$

т. е. неравенство (6.22) выполняется.

Обратно, пусть выполняется неравенство (6.22). Очевидно, что $x^1, x^2 \in X_\alpha$, где $\alpha = \max \{f(x^1), f(x^2)\}$. Из (6.22) следует, что $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \alpha \quad \forall x^1, x^2 \in X_\alpha$. Это означает, что множество Лебега X_α выпукло. ■

12. Определение 6.10. Множество

$$\text{epi } f = \{(x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}) : x \in X, y \geq f(x)\}$$

называется *надграфиком функции* $f(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n$.

Теорема 6.9. Функция $f(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, определенная на выпуклом множестве X , выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик – выпуклое множество.

Доказательство. Пусть $f(x)$, $x \in X$, – выпуклая функция. По любым двум точкам $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in \text{epi } f$ ($\bar{x}^1 = (x^1, y^1)$, $\bar{x}^2 = (x^2, y^2)$, $x^1, x^2 \in X$, $y^1 \geq f(x^1)$, $y^2 \geq f(x^2)$) составим выпуклую комбинацию $\bar{x}(\lambda) = \lambda \bar{x}^1 + (1-\lambda) \bar{x}^2 = (\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2)$, $\lambda \in [0, 1]$. Поскольку X – выпуклое множество, то $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$. Из определения множества $\text{epi } f$ и выпуклости функции $f(x)$, $x \in X$, следует, что $\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \geq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \geq f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)$, т. е. $\bar{x}(\lambda) \in \text{epi } f$.

С другой стороны, пусть множество $\text{epi } f$ выпукло. Рассмотрим две его точки $\bar{x}^1 = (x^1, f(x^1))$, $\bar{x}^2 = (x^2, f(x^2))$. При любом $\lambda \in [0, 1]$ имеем $\bar{x}(\lambda) = \lambda \bar{x}^1 + (1-\lambda) \bar{x}^2 = (\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)) \in \text{epi } f$. По определению множества $\text{epi } f$ это означает, что $\lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \geq$

$\geq f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2)$. Последнее неравенство положено в определение выпуклой функции.

13. *Определение 6.11. Опорной плоскостью к выпуклой функции* $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^* называется опорная плоскость к надграфику $\text{epi } f$ в точке $(x^*, f(x^*))$ (рис. 6.16).

Из этого определения следует, что опорная плоскость к выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, существует в любой точке $x \in \mathbf{R}^n$. Это означает, что существует такой ненулевой вектор $\bar{c} = (\bar{c}' \in \mathbf{R}^n; \bar{c}_{n+1} \in \mathbf{R})$, что

$$\bar{c}'(x - x^*) + \bar{c}_{n+1}(y - f(x^*)) \leq 0 \quad \forall (x, y \geq f(x)) \in \text{epi } f. \quad (6.23)$$

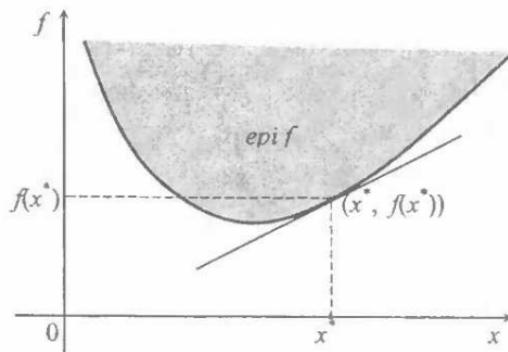


Рис. 6.16

Заметим, что $\bar{c}_{n+1} \leq 0$, так как в противном случае неравенство (6.23) противоречило бы возможности выбора достаточно большого y . Покажем, что $\bar{c}_{n+1} < 0$. Предположим, что $\bar{c}_{n+1} = 0$. Тогда из (6.23) следует $\bar{c}'(x - x^*) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$, что невозможно. Разделив неравенство (6.23) на $-\bar{c}_{n+1}$ и обозначив $c = -\bar{c}'/\bar{c}_{n+1}$, получим

$$c'(x - x^*) - y + f(x^*) \leq 0 \quad \forall (x, y \geq f(x)) \in \text{epi } f. \quad (6.24)$$

Следовательно, плоскость $y = f(x^*) + c'(x - x^*)$ является опорной к $\text{epi } f$ в точке $(x^*, f(x^*))$ с нормальным вектором $(c, -1)$. Положив в (6.24) $y = f(x)$, получим

$$f(x) - f(x^*) \geq c'(x - x^*) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (6.25)$$

Отсюда следуют два утверждения, которые отражают специфику выпуклой функции и ее надграфика:

a) в каждой точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ существует такой вектор $c \in \mathbb{R}^n$, что выполняется неравенство (6.25);

б) при отделении надграфика выпуклой функции от других множеств достаточно использовать разделяющие плоскости с нормалями вида ($c \in \mathbb{R}^n$, -1) (рис. 6.17).

Если $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — непрерывно-дифференцируемая выпуклая функция, то согласно критерию выпуклости (6.15) имеет место неравенство

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} (x - x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда нормаль касательной плоскости в точке $(x^*, f(x^*))$ имеет вид $\left(\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x}, -1\right)$. Таким образом, в гладком случае опорная плоскость единственна и совпадает с касательной плоскостью (рис. 6.18).

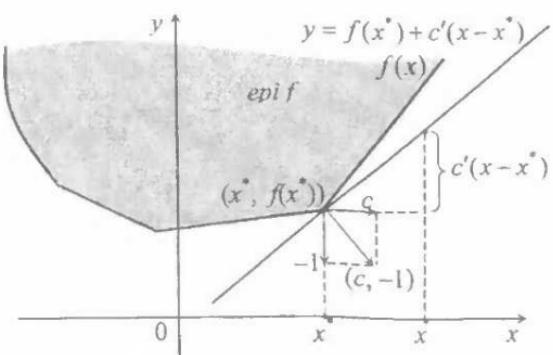


Рис. 6.17

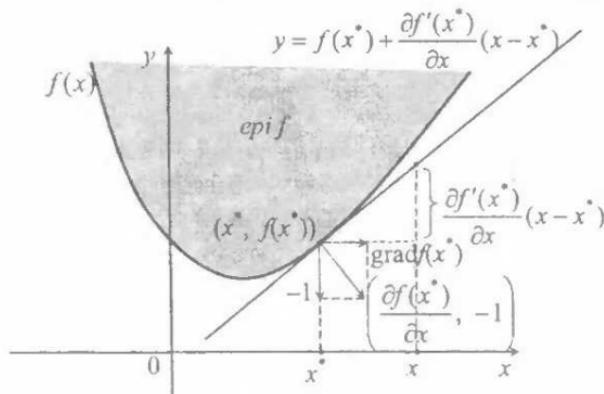


Рис. 6.18

14. Определение 6.12. Выпуклой оболочкой $\text{conv } f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, функции $f(x)$, $x \in X$, на выпуклом множестве X называется функция

$$\text{conv } f(x) = \inf \{y \in \mathbb{R}: (x, y) \in \text{conv}(\text{epi } f(x))\}, \quad x \in X.$$

Из выпуклости множества $\text{conv}(\text{epi } f)$ следует, что $\text{conv } f(x)$, $x \in X$, — выпуклая функция.

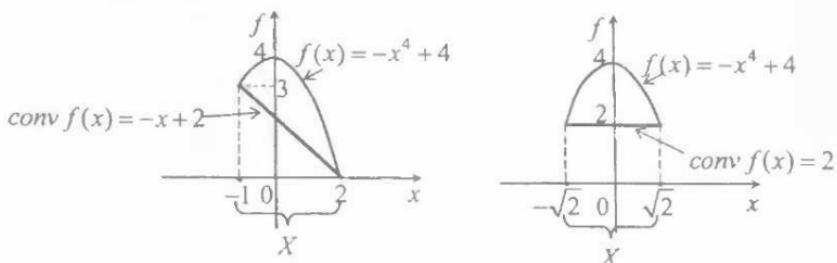


Рис. 6.19

На рис. 6.19 приведены примеры выпуклых оболочек функции $f(x) = -x^4 + 4$, $x \in \mathbf{R}$, определенной на различных отрезках X .

15. Выпуклая функция $f(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, непрерывна во внутренних точках непустого выпуклого множества X .

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in \text{int } X$. Тогда существует такое $\delta_1 > 0$, что $x \in X$, если $\|x - \bar{x}\| \leq \delta_1$. Подсчитаем число

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max(f(\bar{x} + \delta_1 e_i) - f(\bar{x}), f(\bar{x} - \delta_1 e_i) - f(\bar{x})) \right\}, \quad (6.26)$$

где $e_i \in \mathbf{R}^n$ — единичный вектор с 1 на i -м месте. Очевидно, что $0 \leq \alpha \leq \infty$. Положим

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_1}{n}, \frac{\varepsilon \delta_1}{n \alpha} \right\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (6.27)$$

Возьмем произвольный вектор x , удовлетворяющий неравенству $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$. Положим $y_i = \delta_1 e_i$, если $x_i - \bar{x} \geq 0$; $y_i = -\delta_1 e_i$ — в противном случае. Тогда $x - \bar{x} = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n$, где $\mu_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. Кроме того,

$$\|x - \bar{x}\| = \delta_1 \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right)^{1/2}. \quad (6.28)$$

Поскольку $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$, то из (6.27) получим $\mu_i \leq 1/n$, $i = \overline{1, n}$. Из выпуклости функции $f(x)$, $x \in X$, и неравенств $0 \leq n\mu_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$, следует

$$f(x) = f\left(\bar{x} + \sum_{i=1}^n \mu_i y_i\right) = f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} + n\mu_i y_i)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\bar{x} + n\mu_i y_i) = \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f((1-n\mu_i)\bar{x} + n\mu_i(\bar{x} + y_i)) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((1-n\mu_i)f(\bar{x}) + n\mu_i f(\bar{x} + y_i)).$$

Отсюда получим $f(x) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i (f(\bar{x} + y_i) - f(\bar{x}))$. Из (6.23) следует, что $f(\bar{x} + y_i) - f(\bar{x}) \leq \alpha$, $i = \overline{1, n}$. Поскольку $\mu_i \geq 0$, то

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \alpha \sum_{i=1}^n \mu_i. \quad (6.29)$$

Из (6.27), (6.28) вытекает, что $\mu_i \leq \varepsilon / n\alpha$, и неравенство (6.29) принимает вид $f(x) - f(\bar{x}) \leq \varepsilon$. Остается показать, что $f(\bar{x}) - f(x) \leq \varepsilon$.

Пусть $z = 2\bar{x} - x$. Из неравенства $\|z - \bar{x}\| \leq \delta$ следует $f(z) - f(\bar{x}) \leq \varepsilon$. Поскольку $\bar{x} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x$, то в силу выпуклости функции

$f(x)$, $x \in X$, имеем $f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(z)$.

Следовательно, $f(\bar{x}) - f(x) \leq \varepsilon$. ■

Таким образом, выпуклая функция может разрываться лишь в граничных точках множества X (рис. 6.20).

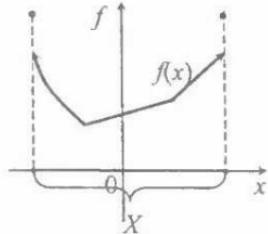


Рис. 6.20

6.4. Дифференцируемость выпуклых функций

Производной функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^* по направлению $l \in \mathbf{R}^n$ называется предел

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x^* + tl) - f(x^*)}{t},$$

если он существует.

В общем случае выпуклая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, не является дифференцируемой (например, $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$). Однако каждая выпуклая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в любой точке дифференцируема по всем направлениям $l \in \mathbf{R}^n$.

Действительно, возьмем два достаточно малых числа t_1, t_2 , $t_1 > 0, t_2 > 0$. В силу выпуклости функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, имеем

$$f(x + t_1 l) = f\left(\frac{t_1}{t_2}(x + t_2 l) - (1 - \frac{t_1}{t_2})x\right) \leq \frac{t_1}{t_2} f(x + t_2 l) + (1 - \frac{t_1}{t_2})f(x).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{f(x + t_1 l) - f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x + t_2 l) - f(x)}{t_2},$$

т. е. функция $(f(x + tl) - f(x))/t$ неубывающая по $t > 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tl) - f(x)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{f(x + tl) - f(x)}{t}.$$

Например, для выпуклой функции $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, имеем

$$\frac{\partial |x|}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|x + tl| - |x|}{t} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x + tl - x}{t} = l, & \text{если } x > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|0 + tl| - 0}{t} = |l|, & \text{если } x = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-x - tl + x}{t} = -l, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Определение 6.13. Вектор $c \in \mathbf{R}^n$ называют *субградиентом* выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^* , если

$$f(x) - f(x^*) \geq c'(x - x^*) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (6.30)$$

Согласно свойству 13 выпуклых функций субградиент выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, существует в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$. Если выпуклая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, непрерывно дифференцируема, то субградиент единственный и совпадает с градиентом $\partial f(x)/\partial x$.

Множество всех субградиентов выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке $x^* \in \mathbf{R}^n$ называется *субдифференциалом* и обозначается символом $\partial f(x^*)$.

Теорема 6.10. Субдифференциал $\partial f(x^*)$ выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, – непустой выпуклый компакт в каждой точке $x^* \in \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Докажем сначала выпуклость множества $\partial f(x^*)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$. Пусть $c^1, c^2 \in \partial f(x^*)$, т. е.

$$f(x) - f(x^*) \geq (c^1)'(x - x^*), \quad f(x) - f(x^*) \geq (c^2)'(x - x^*), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Умножив первое неравенство на λ , $\lambda \in [0, 1]$, второе – на $1 - \lambda$ и сложив результаты, получим $f(x) - f(x^*) \geq (\lambda c^1 + (1 - \lambda)c^2)'(x - x^*)$, $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. $\lambda c^1 + (1 - \lambda)c^2 \in \partial f(x^*) \forall \lambda \in [0, 1]$. Выпуклость множества $\partial f(x^*)$ доказана.

Докажем замкнутость множества $\partial f(x^*)$. Пусть c – предельная точка последовательности $c^k \in \partial f(x^*)$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $f(x) - f(x^*) \geq c^{k'}(x - x^*)$, $x \in \mathbb{R}^n$. При $k \rightarrow \infty$ отсюда получим $c \in \partial f(x^*)$. Замкнутость множества $\partial f(x^*)$ доказана.

Покажем ограниченность множества $\partial f(x^*)$. Возьмем любой вектор $c \in \partial f(x^*)$. Согласно свойству 15 функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывна. Поэтому

$$\sup_{\|x-x^*\| \leq \varepsilon} f(x) = f_* < \infty,$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

В неравенстве (6.29) положим $x = x^* + \varepsilon c / \|c\|$. Тогда

$$\|c\| \leq (f(x^* + \varepsilon c / \|c\|) - f(x^*)) / \varepsilon < (f_* - f(x^*)) / \varepsilon < +\infty$$

при всех $c \in \partial f(x^*)$, т. е. субдифференциал $\partial f(x^*)$ ограничен. ■

Геометрическая интерпретация субдифференциала приведена на рис. 6.21, а, б.

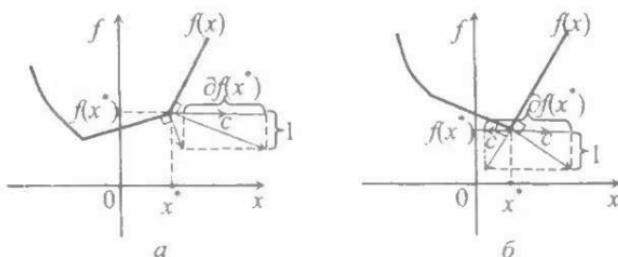


Рис. 6.21

Лемма 6.2. Для выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, имеет место равенство

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \max_{c \in \partial f(x)} c'l, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad l \in \mathbf{R}^n. \quad (6.31)$$

Доказательство. Из определения субградиента имеем

$$\frac{f(x+tl) - f(x)}{t} \geq c'l \quad \forall c \in \partial f(x), \quad l \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0.$$

Отсюда при $t \rightarrow +0$ получим

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} \geq c'l \quad \forall c \in \partial f(x), \quad l \in \mathbf{R}^n,$$

т. е.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} \geq \max_{c \in \partial f(x)} c'l, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad l \in \mathbf{R}^n. \quad (6.32)$$

Введем два множества

$$A = \left\{ (x, y) : x \in \mathbf{R}^n, y > f(x) \right\},$$

$$B = \left\{ (z, z_0) : z = \bar{x} + tl, z_0 = f(\bar{x}) + t \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial l}, t \geq 0 \right\}, \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \quad l \in \mathbf{R}^n.$$

Очевидно, что эти множества выпуклы. Покажем, что они не имеют общих внутренних точек. Если предположить, что $x = \bar{x} + t_1 l$ при некотором $t_1 \geq 0$, то $z_0 = y > f(x) = f(\bar{x} + t_1 l)$ и, значит, $y - f(\bar{x}) > f(\bar{x} + t_1 l) - f(\bar{x}) \geq t_1 \partial f(\bar{x}) / \partial l$. Тогда $z_0 > f(x) + t_1 \partial f(\bar{x}) / \partial l$, т. е. $(z, z_0) \notin B$. Получили противоречие.

Поскольку множества A и B выпуклы, не имеют общих внутренних точек, то эти множества отделимы (см. теорему 6.2). В качестве разделяющей плоскости можно взять опорную плоскость к $\text{epi } f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке $(x, f(x))$ с нормальным вектором $(c, -1)$, т. е. справедливо неравенство

$$c'x - y \geq c'(\bar{x} + tl) - f(\bar{x}) - t \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial l} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0.$$

Положив в этом неравенстве $x = \bar{x}$, получим

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} \leq c'l, \quad c \in \partial f(x), \quad l \in \mathbf{R}^n.$$

Объединяя полученное неравенство с неравенством (6.32), придем к (6.31). ■

6.5. Экстремумы выпуклых функций

В выпуклом программировании исследуются задачи минимизации выпуклых функций. Не каждая выпуклая (и даже строго выпуклая) функция имеет точку минимума, даже если она ограничена снизу. Заметим, что ограниченная снизу строго выпуклая функция $f(x) = e^{-x}$ на множестве $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ не имеет точки минимума (рис. 6.22).

Справедливы утверждения:

- у выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, локальный минимум совпадает с глобальным;
- непустое множество X^0 точек минимума выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, выпукло. Оно состоит из единственной точки, если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, строго выпуклая;
- сильно выпуклая функция всегда имеет точку минимума и она единственна.

Доказательство. Из утверждения *a* следует, что выпуклая функция не может иметь двух различных локальных минимумов. Действительно, если $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, – точки локального минимума выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $f(x^1) > f(x^2)$, то для точки $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, $\lambda \in]0, 1[$, имеем

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) < \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^1) = f(x^1).$$

При достаточно малых λ , $\lambda > 0$, точка $x(\lambda)$ попадает в сколь угодно малую окрестность точки x^1 и поэтому последнее соотношение противоречит тому, что x^1 – точка локального минимума, т. е. $f(x^1) = f(x^2)$.

*Доказательство утверждения *b* очевидно.*

Докажем утверждение *c*. Множества Лебега сильно выпуклой функции ограничены, и, кроме того, они замкнуты в силу непрерывности сильно выпуклой функции. Поэтому по теореме Вейерштрасса существует точка минимума, и она единственна в силу строгой выпуклости функции. ■

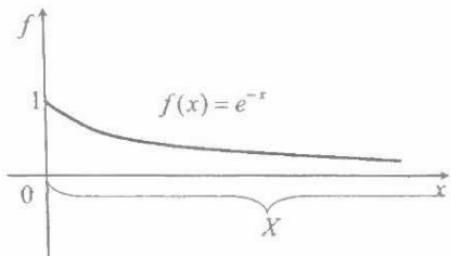


Рис. 6.22

В выпуклом программировании для идентификации точек минимума выпуклых функций используются производные по направлениям и субдифференциалы.

Теорема 6.11. Для того чтобы точка $x^0 \in \mathbf{R}^n$ была точкой минимума выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из условий

$$a) \frac{\partial f(x^0)}{\partial l} \geq 0 \quad \forall l \in \mathbf{R}^n;$$

$$b) 0 \in \partial f(x^0).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть x^0 – точка минимума функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда $f(x^0 + tl) \geq f(x^0) \quad \forall l \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$ и $(f(x^0 + tl) - f(x^0))/t \geq 0$, $\forall t > 0$. Устремив $t \rightarrow +0$, получим неравенство a . Определение ($f(x) \geq f(x^0)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$) точки минимума x^0 запишем в виде $f(x) - f(x^0) \geq c'(x - x^0)$, где $c = 0$. Таким образом, $c = 0$ – субградиент функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^0 , т. е. справедливо включение b .

Достаточность. Пусть в точке x^0 выполняется неравенство a , но существует такая точка $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, что $f(\bar{x}) = f(x^0) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Построим точку $\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x^0$, $\lambda \in]0, 1[$. В силу выпуклости функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, имеем

$$f(\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x^0) = f(x^0 + \lambda(\bar{x} - x^0)) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x^0) = f(x^0) - \varepsilon.$$

Отсюда для направления $l = \bar{x} - x^0$ получим

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(x^0 + \lambda l) - f(x^0)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{-\varepsilon\lambda}{\lambda} < 0,$$

что противоречит a .

Если же вектор $c = 0$ – субградиент функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^0 , то $f(x) - f(x^0) \geq c'(x - x^0) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, т. е. x^0 – точка минимума функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. ■

Замечание 6.3. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, называется **вогнутой**, если функция $-f(x)$, $x \in X$, выпуклая. Поэтому основные свойства вогнутых функций непосредственно следуют из свойств выпуклых функций.

Замечание 6.4. Если выпуклая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, непрерывно-дифференцируема, то для того чтобы точка $x^0 \in \mathbf{R}^n$ была точкой минимума, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \text{grad } f(x^0) = 0$.

§ 7. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТЕОРЕМА КУНА – ТАККЕРА

Теоремой Куна-Таккера в выпуклом программировании называют критерий оптимальности в основной задаче.

7.1. Постановка задачи

Основной в ВП принято считать задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad x \in Q, \quad (7.1)$$

в которой $Q \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество, $f(x)$, $x \in Q$, и компоненты $g_i(x)$, $x \in Q$, $i = \overline{1, m}$, m -вектор-функции $g(x)$, $x \in Q$, – выпуклые функции.

Каждый n -вектор x , удовлетворяющий ограничениям задачи (7.1), называется (как и в ЛП) *планом*. Решение x^0 задачи (7.1)

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) \leq 0, \quad x \in Q,$$

будем называть *оптимальным планом*.

Из свойств выпуклых множеств и функций (§ 6) следует, что множество планов

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n : g(x) \leq 0, \quad x \in Q\}$$

и множество оптимальных планов задачи (7.1)

$$X^0 = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = f(x^0), \quad x \in X\}$$

выпуклы.

Говорят, что *ограничения* X задачи (7.1) *регулярны* (удовлетворяют условию Слейтера), если на некотором $x^* \in Q$ выполняется неравенство

$$g(x^*) < 0. \quad (7.2)$$

Задача (7.1) с регулярными ограничениями называется *регулярной*.

7.2. Теорема Куна – Таккера

Из элементов задачи (7.1) составим *функцию Лагранжа*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'g(x), \quad x \in Q, \quad \lambda \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbf{R}^m). \quad (7.3)$$

Пару $\{x^*, \lambda^*\}$, $x^* \in Q$, $\lambda^* \geq 0$, будем называть *седловой точкой функции Лагранжа* (7.3), если выполняются неравенства

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*) \quad \forall x \in Q, \quad \lambda \geq 0. \quad (7.4)$$

Справедлив критерий оптимальности.

Теорема 7.1 (Куна – Таккера). Для оптимальности плана x^0 регулярной задачи (7.1) необходимо и достаточно существование такого m -вектора $\lambda^0 \geq 0$, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ – седловая точка функции Лагранжа (7.3).

Доказательство. Необходимость. В $(m+1)$ -мерном пространстве построим множества

$$Y = \{\bar{y} = (y_0, y) : y_0 \geq f(x), \quad y \geq g(x) \text{ при некотором } x \in Q\},$$

$$Z = \{\bar{z} = (z_0, z) : z_0 < f(x^0), \quad z < 0\}.$$

Оба множества выпуклы. Действительно, пусть $\bar{y}^1, \bar{y}^2 \in Y$. По определению множества Y найдутся такие векторы $x^1, x^2 \in Q$, что

$$\begin{aligned} y_0^1 &\geq f(x^1), \quad y^1 \geq g(x^1), \\ y_0^2 &\geq f(x^2), \quad y^2 \geq g(x^2). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Построим точку $\bar{y}(\lambda) = \lambda\bar{y}^1 + (1-\lambda)\bar{y}^2$, $\lambda \in [0, 1]$. Для компонент $\lambda\bar{y}_0^1 + (1-\lambda)\bar{y}_0^2$, $\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$ этой точки в силу (7.5) и выпуклости функций $f(x)$, $g(x)$, $x \in Q$, выполняются неравенства

$$\lambda y_0^1 + (1-\lambda)y_0^2 \geq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \geq f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2),$$

$$\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \geq \lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2) \geq g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2).$$

Поскольку $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in Q \quad \forall \lambda \in [0, 1]$, то полученные неравенства означают, что $\bar{y}(\lambda) \in Y$, т. е. Y – выпуклое множество.

Множество Z выпукло как пересечение полупространств.

Множества Y и Z не имеют общих точек. Предположим противное: $\bar{y} = \bar{z}$, $\bar{y} \in Y$, $\bar{z} \in Z$. Тогда при некотором $\tilde{x} \in Q$ будут выполнять-

ся неравенства $f(\bar{x}) \leq y_0 = z_0 < f(x^0)$, $g(\bar{x}) \leq y = z < 0$, которые противоречат оптимальности плана x^0 . Таким образом, $Y \cap Z = \emptyset$.

По теореме 6.2 об отделимости выпуклых множеств множества Y и Z отделимы, т. е. существует такой вектор $\bar{c} = (c_0, c) \in \mathbf{R}^{m+1}$, $\|\bar{c}\| = 1$, что выполняется неравенство

$$\bar{c}' \bar{y} \geq \bar{c}' \bar{z} \quad \forall \bar{y} \in Y, \bar{z} \in Z. \quad (7.6)$$

Из неравенства (7.6) и определения множества Z следует, что вектор \bar{c} неотрицателен: $\bar{c} \geq 0$. Действительно, если допустить, что существует отрицательная компонента $\bar{c}_i < 0$, то для вектора $\bar{z} = (f(x^0) + \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \beta^2 \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ с элементом $\beta^2 \varepsilon$ на i -м месте при фиксированном $\varepsilon < 0$ и достаточно большом β^2 получим сколь угодно большую величину $\bar{c}' \bar{z}$, что противоречит неравенству (7.6).

Согласно определению множества Y неравенство (7.6) принимает вид

$$c_0 f(x) + c' g(x) \geq \bar{c}' \bar{z} \quad \forall x \in Q, \bar{z} \in Z.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо для всех точек множества Z , то оно будет выполняться и для предельных точек этого множества, в частности для точки $(f(x^0), 0)$:

$$c_0 f(x) + c' g(x) \geq c_0 f(x^0) \quad \forall x \in Q. \quad (7.7)$$

Докажем, что $c_0 > 0$. Если допустить, что $c_0 = 0$, то из $\bar{c} \geq 0$, $\bar{c} \neq 0$, следует $c \geq 0$, $c \neq 0$. Тогда неравенство (7.7) принимает вид $c' g(x) \geq 0 \quad \forall x \in Q$. С другой стороны, согласно (7.2) имеем неравенство $c' g(x^*) < 0$. Противоречие доказывает, что $c_0 > 0$.

Обозначим $\lambda^0 = c/c_0$. Поскольку $c_0 > 0$, то из (7.7) получим

$$f(x) + \lambda^0 g(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in Q. \quad (7.8)$$

Отсюда при $x = x^0$ приходим к неравенству $\lambda^0 g(x^0) \geq 0$. С другой стороны, из $\lambda^0 \geq 0$ и $g(x^0) \leq 0$ следует $\lambda^0 g(x^0) \leq 0$. Таким образом, $\lambda^0 g(x^0) = 0$.

Неравенство (7.8) с учетом последнего условия принимает вид

$$f(x^0) + \lambda^0 g(x^0) \leq f(x) + \lambda^0 g(x) \quad \forall x \in Q.$$

Присоединив сюда очевидное неравенство $f(x^0) + \lambda'g(x^0) \leq f(x^0) + \lambda^0 g(x^0)$ $\forall \lambda \geq 0$, получим, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ – седловая точка функции Лагранжа задачи (7.1).

Достаточность. Запишем неравенства (7.3) в исходных функциях:

$$f(x^0) + \lambda'g(x^0) \leq f(x^0) + \lambda^0 g(x^0) \leq f(x) + \lambda^0 g(x^0) \quad \forall x \in Q, \lambda \geq 0. \quad (7.9)$$

Из левого неравенства (7.9) следует

$$\lambda'g(x^0) \leq \lambda^0 g(x^0) \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (7.10)$$

Для выполнения (7.10) необходимо, чтобы $g(x^0) \leq 0$, ибо если $g_i(x^0) > 0$ при некотором $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, то, полагая $\lambda_j = 0, j \neq i$, и выбрав λ_i достаточно большим, получим слева в (7.10) сколь угодно большое положительное число.

Из (7.10) следует равенство $\lambda^0 g(x^0) = 0$. Действительно, если допустить, что $\lambda^0 g(x^0) = \alpha < 0$, то, положив в (7.10) $\lambda = \lambda^0/2$, получим противоречие: $\alpha/2 \leq \alpha < 0$.

С учетом этого равенства из (7.9) имеем $f(x^0) \leq f(x) + \lambda^0 g(x)$ $\forall x \in Q$. Отсюда при $\lambda^0 \geq 0$ следует, что для всех $x \in Q$, удовлетворяющих неравенству $g(x) \leq 0$, выполняется соотношение $f(x^0) \leq f(x)$. Таким образом, x^0 – оптимальный план задачи (7.1). ■

Замечание 7.1. При доказательстве теоремы показали, что на паре $\{x^0, \lambda^0\}$ выполняется условие дополняющей нежесткости $\lambda^0 g(x^0) = 0$.

Замечание 7.2. Достаточность теоремы верна для любых функций (не обязательно выпуклых).

7.3. Задача ВП с линейными ограничениями

Рассмотрим задачу ВП с линейными ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (7.11)$$

где $A = A(I, J)$ – $m \times n$ -матрица, $b = b(I)$ – m -вектор, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $f(x)$ – гладкая выпуклая функция.

Пусть $x \in X$. Для любого вектора $l \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющего неравенствам

$$A(I_a(x), J)l \leq 0, \quad l(J_0(x)) \geq 0, \quad (7.12)$$

$$I_a(x) = \{i \in I : A(i, j)x = b_i\}, \quad J_0(x) = \{j \in J : x_j = 0\},$$

вектор $x_0(J) = x_0 = x + \theta l$, $\theta \in [0, \theta_0]$, – план задачи (7.11), если $\theta_0 > 0$ достаточно мало. Это следует из того, что в силу (7.12) выполняются ограничения

$$A(I_a(x), J)x_0 = A(I_a(x), J)x + \theta A(I_a(x), J)l \leq b(I_a(x)),$$

$$x_0(J_0(x)) = x(J_0(x)) + \theta l(J_0(x)) = \theta l(J_0(x)) \geq 0.$$

Остальные ограничения

$$A(I \setminus I_a(x), J)x_0 \leq b(I \setminus I_a(x)), \quad x_0(J \setminus J_0(x)) \geq 0$$

выполняются при достаточно малых $\theta_0 > 0$, так как справедливы неравенства $A(I \setminus I_a(x), J)x < b(I \setminus I_a(x))$, $x(J \setminus J_0(x)) > 0$.

Поэтому, если x^0 – оптимальный план задачи (7.11), тогда для каждого вектора l , удовлетворяющего системе (7.12), выполняется неравенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} = l' \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} \geq 0. \quad (7.13)$$

Действительно, предположим, что вектор l_* удовлетворяет системе (7.12), но

$$l_*' \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} < 0. \quad (7.14)$$

Тогда вектор $x_0 = x^0 + \theta l$, $\theta \in [0, \theta_0]$, при достаточно малых $\theta_0 > 0$ удовлетворяет ограничениям задачи (7.11). А значит, в силу (7.14) выполняется неравенство

$$\frac{df(x^0)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l_* < 0,$$

из которого для достаточно малых $\theta > 0$ следует неравенство $f(x_0) < f(x^0)$, противоречившее оптимальности плана x^0 .

Применив к утверждению (7.13) теорему Фаркаша (см. разд. 5.3), получим двойственное необходимое условие оптимальности.

Теорема 7.2. Для оптимальности плана x^0 в задаче (7.11) необходимо существование таких неотрицательных m -вектора $\lambda^0 \geq 0$ и n -вектора $\mu^0 \geq 0$, что выполняются условия:

1) стационарности

$$\partial f(x^0)/\partial x + A'\lambda^0 = \mu^0, \quad (7.15)$$

2) дополняющей неизвестности

$$\lambda^{0'}(Ax^0 - b) = 0, \quad x^{0'}\mu^0 = 0. \quad (7.16)$$

В терминах функции Лагранжа равенство (7.15) имеет вид

$$\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x = \mu^0, \quad (7.17)$$

где $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'(Ax - b)$.

Из свойств выпуклых функций следует, что при $\lambda \geq 0$ функция Лагранжа выпукла по x , т. е. $F(x, \lambda^0) - F(x^0, \lambda^0) \geq (x - x^0)' \partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x$. Отсюда с учетом (7.16), (7.17) получаем $F(x, \lambda^0) \geq F(x^0, \lambda^0) + x'\mu^0$, т. е. при всех $x \geq 0$ выполняется неравенство

$$F(x^0, \lambda^0) \leq F(x, \lambda^0). \quad (7.18)$$

С другой стороны, поскольку неравенство $\lambda'(Ax^0 - b) \leq 0$ выполняется для всех $\lambda \geq 0$, а согласно (7.16) выполняется равенство $\lambda^{0'}(Ax^0 - b) = 0$, то для всех $\lambda \geq 0$ будем иметь

$$F(x^0, \lambda) = f(x^0) + \lambda'(Ax^0 - b) \leq f(x^0) + \lambda'(Ax^0 - b) = F(x^0, \lambda^0). \quad (7.19)$$

Неравенства (7.18), (7.19) означают, что $\{x^0, \lambda^0\}$ – седловая точка функции Лагранжа.

Таким образом, для задачи (7.11) справедлива теорема Куна – Таккера без предположения о регулярности множества планов.

Замечание 7.3. Результат этого пункта можно доказать и без предположения о гладкости функции $f(x)$, $x \in X$.

§ 8. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Теорема Куна – Таккера позволяет естественным образом ввести новую (двойственную) задачу и установить связи между основной и двойственной задачами ВП, которые составляют основу теории двойственности в выпуклом программировании.

8.1. Двойственная задача

Рассмотрим регулярную задачу выпуклого программирования

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in \mathbf{R}^n : g(x) \leq 0, \quad x \in Q\}. \quad (8.1)$$

По элементам задачи (8.1) составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'g(x), \quad x \in Q, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}^m.$$

Определим прямую $\varphi(x)$, $x \in Q$, и двойственную $\psi(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, функции

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sup_{\lambda \geq 0} F(x, \lambda), \quad x \in Q, \\ \psi(\lambda) &= \inf_{x \in Q} F(x, \lambda), \quad \lambda \geq 0.\end{aligned} \quad (8.2)$$

Назовем задачу

$$\varphi(x) \rightarrow \min, \quad x \in Q, \quad (8.3)$$

прямой, задачу

$$\psi(\lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \geq 0, \quad (8.4)$$

– двойственной задачей выпуклого программирования, множество $\{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) < \infty\}$ – множеством прямых планов, множество $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R}^m : \psi(\lambda) > -\infty\}$ – множеством двойственных планов.

Поскольку

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X, \\ \infty, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

то множество прямых планов совпадает с множеством планов задачи (8.1), а задача (8.3) – с задачей (8.1). Поэтому задачу (8.1) будем называть прямой задачей выпуклого программирования.

Заметим, что в случае

$$f(x) = -c'x, \quad g(x) = Ax - b, \quad x \in Q = \{x \in \mathbf{R}^n : d_* \leq x \leq d^*\},$$

задача (8.4) совпадает с двойственной задачей линейного программирования (см. разд. 2.1).

8.2. Соотношения двойственности

Для задач (8.3), (8.4) выполняются следующие соотношения двойственности, выражающие связь между прямой и двойственной задачами:

1. Для существования решения x^0 прямой задачи необходимо существование решения λ^0 двойственной задачи.

2. На решениях x^0, λ^0 задач (8.3), (8.4) выполняется равенство

$$\varphi(x^0) = \psi(\lambda^0).$$

3. Для каждой пары $\{x, \lambda\}$ из прямого и двойственного планов выполняется неравенство

$$\varphi(x) \geq \psi(\lambda).$$

4. Если на некоторой паре $\{x^*, \lambda^*\}$ из прямого и двойственного планов выполняется равенство

$$\varphi(x^*) = \psi(\lambda^*),$$

то x^*, λ^* — решения задач (8.3), (8.4).

5. Если вдоль некоторой последовательности $\lambda^k, k=1, 2, \dots, (x^k, k=1, 2, \dots)$ двойственных (прямых) планов целевая функция двойственной (прямой) задачи не ограничена, то пусто множество прямых (двойственных) планов.

6. На решениях x^0, λ^0 задач (8.3), (8.4) выполняется условие дополняющей нежесткости

$$\lambda^{0'} g(x^0) = 0.$$

7. Для того чтобы векторы x^0, λ^0 были решениями задач (8.3), (8.4), необходимо и достаточно, чтобы пара $\{x^0, \lambda^0\}$ была седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Из определения (8.2) функций $\varphi(x), x \in Q; \psi(\lambda), \lambda \geq 0$, следуют неравенства

$$\varphi(x) \geq F(x, \lambda) \geq \psi(\lambda) \quad \forall x \in X, \lambda \in \Lambda, \quad (8.5)$$

т. е. имеет место утверждение 3. Соотношения 4, 5 суть следствия соотношения 3. Если x^0 — оптимальный план прямой задачи, λ^0 — соответствующий ему вектор Лагранжа, то из теоремы Куна - Таккера следует

$$\varphi(x^0) = F(x^0, \lambda^0) = \psi(\lambda^0).$$

Отсюда в силу (8.5) заключаем, что λ^0 — оптимальный двойственный план. Следовательно, справедливы утверждения 1, 2. Обратно, если λ^0 — оптимальный двойственный план, то из утверждений 2 и 5 получаем, что λ^0 — вектор Лагранжа, соответствующий оптимальному прямому

плану x^0 , и выполняется утверждение 6. Необходимая часть утверждения 7 вытекает из теоремы Куна – Таккера. ■

8.3. Задача квадратичного программирования

Рассмотрим задачу

$$f(x) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx \rightarrow \min, \quad Ax \leq b, \quad (8.6)$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $D' = D$, $D > 0$, $A - m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m < n$.

Задача (8.6) относится к задачам выпуклого программирования и представляет одну из форм *задач квадратичного программирования*. Для нее функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, \lambda) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx + \lambda'(Ax - b), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}^m.$$

Построим двойственную задачу

$$\psi(\lambda) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} (c'x + \frac{1}{2}x'Dx + \lambda'(Ax - b)) \rightarrow \max, \quad \lambda \geq 0. \quad (8.7)$$

Поскольку функция Лагранжа $F(x, \lambda)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \geq 0$, сильно выпукла по x ($D > 0$), то точка минимума $x(\lambda)$ в правой части задачи (8.7) существует, единственна и совпадает со стационарной точкой функции Лагранжа ($\partial F(x, \lambda)/\partial x = 0$):

$$c + Dx(\lambda) + A'\lambda = 0.$$

Отсюда получаем

$$x(\lambda) = -D^{-1}(A'\lambda + c).$$

Найденное значение $x(\lambda)$ подставим в двойственную функцию (8.7):

$$\psi(\lambda) = -\frac{1}{2}(c + A'\lambda)'D^{-1}(A'\lambda + c) - b'\lambda.$$

Из теории матриц известно, что $AD^{-1}A' > 0$, если $D > 0$. Значит, функция $\psi(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, сильно вогнутая ($\partial^2 \psi(\lambda)/\partial \lambda^2 = -AD^{-1}A' < 0$).

Таким образом, двойственная задача $\psi(\lambda) \rightarrow \max, \lambda \geq 0$, – задача вогнутого программирования, эквивалентная задаче выпуклого программирования

$$\frac{1}{2}(c + A'\lambda)'D^{-1}(A'\lambda + c) + b'\lambda \rightarrow \min, \quad \lambda \geq 0. \quad (8.8)$$

Пусть λ^0 – оптимальный план последней задачи. Подставив вектор λ^0 в выражение для $x(\lambda)$, получим оптимальный план $x^0 = x(\lambda^0)$ исходной задачи (8.6).

Пример 8.1. Рассмотрим задачу (8.6) с $m=2$, $n=3$. Двойственная к ней задача (8.8) содержит две переменные λ_1 , λ_2 , и ее можно решить графо-аналитическим методом (см. разд. 9.2).

Пусть нужно решить задачу

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} > 0, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } A = 2 < 3,$$

$$c = (-3, 2, 0), \quad b = (2, 2).$$

$$\text{Подсчитаем } D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$-\psi(\lambda) = \frac{1}{2}(c + A'\lambda)'D^{-1}(A'\lambda + c) + b'\lambda = \frac{3}{4}\lambda_1^2 + \frac{11}{4}\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1 - 6\lambda_2.$$

Задача (8.8) запишется так:

$$\frac{3}{4}\lambda_1^2 + \frac{11}{4}\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1 - 6\lambda_2 \rightarrow \min, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \quad (8.10)$$

При этом $x(\lambda) = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), x_3(\lambda))$, где

$$x_1(\lambda) = -3\lambda_2 + 4, \quad x_2(\lambda) = -\lambda_1 - \lambda_2 + 1, \quad x_3(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2. \quad (8.11)$$

Решив задачу (8.10) графо-аналитическим методом (пример 9.2), получим $\lambda_1^0 = 0$, $\lambda_2^0 = 12/11$. Этот результат подставим в (8.11). Тогда оптимальный план задачи (8.9) будет: $x_1^0 = 8/11$, $x_2^0 = -1/11$, $x_3^0 = -6/11$.

8.4. Задача геометрического программирования

Рассмотрим задачу геометрического программирования

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \rightarrow \min, \quad t \geq 0, \quad (8.12)$$

где $c_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Функция $f(t) = f(t_1, \dots, t_m)$, $t \in \mathbf{R}^n$, называется *позиционом*, матрица $(a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$ – матрицей экспонент.

Задача (8.12), вообще говоря, не является задачей выпуклого программирования.

Введем обозначения

$$x_j = \ln t_j, \quad j = \overline{1, m}; \quad x_{m+i} = \ln \left(c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \right), \quad b_i = -\ln c_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

В новых переменных задача (8.12) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n e^{x_{m+i}} \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - x_{m+i} = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.13)$$

Задача (8.13) – задача выпуклого программирования, поскольку целевая функция этой задачи строго выпукла, а ограничения – линейные.

С помощью функции Лагранжа

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n e^{x_{m+i}} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - x_{m+i} - b_i \right),$$

где $x = (x_j, j = \overline{1, m}, x_{m+i}, i = \overline{1, n})$, $\lambda = (\lambda_i, i = \overline{1, n})$, запишем задачу, двойственную к задаче (8.13):

$$\psi(\lambda) = \min_{x \in \mathbf{R}^{n+m}} F(x, \lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \in \mathbf{R}^n. \quad (8.14)$$

Минимум функции $F(x, \lambda)$ по переменным x_{m+i} , $i = \overline{1, n}$, достигается при $x_{m+i}^* = \ln \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, двойственные планы задачи (8.14) удовлетворяют неравенствам $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. Подсчитав минимум функции $F(x, \lambda)$ по переменным x_j , $j = \overline{1, m}$, найдем, что компоненты двойственных планов удовлетворяют уравнениям $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} = 0$, $j = \overline{1, m}$. Таким образом, двойственная задача (8.14) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_i + \ln \prod_{i=1}^n (c_i / \lambda_i)^{\lambda_i} \rightarrow \max, \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Учитывая однородность ограничений последней задачи, ее решение будем искать в виде

$$\lambda_i = \alpha \delta_i, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \alpha > 0.$$

Задача (8.15) в новых переменных принимает вид:

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^n \delta_i (1 + \ln c_i / \alpha \delta_i) &\rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n \delta_i a_{ij} &= 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Переменная α входит только в целевую функцию. Вычислив максимум по α (он достигается в точке $\alpha = \prod_{i=1}^n (c_i / \delta_i)^{\delta_i}$), получим другую

эквивалентную форму двойственной задачи (8.16)

$$\begin{aligned} \psi(\delta) &= \prod_{i=1}^n (c_i / \delta_i)^{\delta_i} \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n \delta_i a_{ij} &= 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

В силу соотношений двойственности и введенных обозначений по решению δ^0 двойственной задачи (8.17) найдем решение t^0 исходной задачи (8.12) из равенств

$$c_i \prod_{j=1}^m (t_j^0)^{a_{ij}} = \psi(\delta^0) \delta_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Заметим, что двойственная задача (8.17) часто оказывается проще исходной. Можно выделить класс задач (8.12), для которых ограничениям задачи (8.17) удовлетворяет единственный набор $\delta_i, i = \overline{1, n}$. Тогда операция максимизации в (8.17) становится излишней.

Пример 8.2. Компания заключила контракт на перевозку руды в количестве P , включающий морские перевозки из порта A в порт B . Для морских перевозок компания арендует судно (рудовоз). Затраты на морские перевозки включают в себя расходы u_1 на аренду судна, оплату u_2 труда экипажа и закупку u_3 топлива. Стоимость месячной аренды судна определяется по эмпирической формуле $P = k_1 t_1^{6/5}$, где t_1 – тоннаж судна, k_1 – некоторый коэффициент пропорциональности $k_1 > 0$.

Пусть s – длина рейса в обе стороны, t_2 – скорость судна (например, в узлах).

Тогда время аренды судна равно $\rho s t_1^{-1} t_2^{-1}$ и, значит, расходы на аренду равны $u_1 = c_1 t_1^{1/5} t_2^{-1}$, где $c_1 = k_1 \rho s > 0$. Оплата труда экипажа пропорциональна времени, на которое арендуется судно, т. е. $u_2 = k_2 s \rho t_1^{-1} t_2^{-1} = c_2 t_1^{-1} t_2^{-1}$ ($c_2 = k_2 \rho s > 0$). Наконец, затраты на топливо пропорциональны общему пройденному пути $\rho t_1^{-1} s$ и гидродинамическому сопротивлению судна, т. е. величине $t_1^{2/3} t_2^2$. Следовательно, $u_3 = c_3 t_1^{-1/3} t_2^2$ ($c_3 > 0$). Таким образом, общие затраты на морские перевозки руды равны $f(t) = u_1 + u_2 + u_3 = c_1 t_1^{1/5} t_2^{-1} + c_2 t_1^{-1} t_2^{-1} + c_3 t_1^{-1/3} t_2^2$.

Задача состоит в том, чтобы выбрать такие тоннаж и скорость судна, которые обеспечивают минимум затрат, т. е. задача имеет вид

$$f(t) = c_1 t_1^{1/5} t_2^{-1} + c_2 t_1^{-1} t_2^{-1} + c_3 t_1^{-1/3} t_2^2 \rightarrow \min, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0.$$

Запишем двойственную задачу. Ее ограничения таковы:

$$\delta_1 / 5 - \delta_2 - \delta_3 / 3 = 0,$$

$$-\delta_1 - \delta_2 - 2\delta_3 = 0,$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \delta_2 \geq 0, \quad \delta_3 \geq 0.$$

Им удовлетворяет единственное решение $\delta_1^0 = 35/54$, $\delta_2^0 = 1/54$, $\delta_3^0 = 18/54$, которое является оптимальным планом двойственной задачи (8.13), при этом

$$\psi(\delta^0) = \left(\frac{c_1}{\delta_1^0} \right)^{\delta_1^0} \left(\frac{c_2}{\delta_2^0} \right)^{\delta_2^0} \left(\frac{c_3}{\delta_3^0} \right)^{\delta_3^0} = 54 \left(\frac{c_1^{35} c_2 c_3^{18}}{35^{35} \cdot 18^{18}} \right)^{54}.$$

Тогда из равенств (8.14) имеем $c_1 t_1^{1/5} t_2^{-1} = \frac{35}{54} \psi(\delta^0)$, $c_2 t_1^{-1} t_2^{-1} = \frac{1}{54} \psi(\delta^0)$, $c_3 t_1^{-1/3} t_2^2 = \frac{18}{54} \psi(\delta^0)$. Разделив первое уравнение на второе, найдем $t_1^0 = (35 c_2 / c_1)^{5/6}$. Далее из второго уравнения получим $t_2^0 = (18 / c_3)^{1/3} (c_1 / 18)^{5/27} c_2^{4/27}$.

Итак, оптимальный тоннаж судна равен $(35 c_2 / c_1)^{5/6}$, оптимальная скорость равна $(18 / c_3)^{1/3} (c_1 / 18)^{5/27} c_2^{4/27}$.

§ 9. ОБЩАЯ ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи минимизации функций на произвольных многограных множествах принято выделять в специальный раздел нелинейного программирования. При этом раздел называют линейным программированием (ЛП), если минимизируемая функция линейна, и квадратичным программированием (КП), если последняя выпукла и квадратична. В ЛП разработана эффективная техника учета многограных ограни-

чений. Целью данного параграфа является синтез этих конструкций для построения конечного метода решения общей задачи КП.

9.1. Каноническая задача КП

Пусть $c = c(J)$, $d_* = d_*(J)$, $d^* = d^*(J)$ – n -векторы, $b = b(I)$ – m -вектор, $A = A(I, J)$ – $m \times n$ -матрица ($\text{rank } A = m \leq n$), $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $D = D(J, J)$ – симметричная неотрицательная $n \times n$ -матрица. Задача минимизации

$$f(x) = c'x + x'Dx/2 \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*, \quad (9.1)$$

выпуклой квадратичной функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, на многогранном множестве $X = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b, d_* \leq x \leq d^*\}$ называется *канонической задачей квадратичного программирования*.

Элементы множества X будем, как и в ЛП, называть планами, функцию $f(x)$ – целевой, равенство $Ax = b$ – основным ограничением, неравенства $d_* \leq x \leq d^*$ – прямыми ограничениями.

Решение x^0 задачи (9.1):

$$f(x^0) = \min f(x), \quad x \in X,$$

называется оптимальным планом.

При $D = 0$ задача (9.1) становится канонической задачей ЛП. Два класса (ЛП и КП) задач обладают многими общими теоретическими свойствами. Однако из-за более высокой сложности целевой функции разработанность конструктивной теории КП заметно отстает от аналогичной в ЛП.

Пусть x – план задачи КП. Для проверки его на оптимальность и замену в случае необходимости на лучший нужно иметь средство эффективного построения других, сравниваемых с x , планов. Аналогичная проблема решена в ЛП. Поэтому воспользуемся техникой ЛП.

Любой план \bar{x} можно представить в виде $\bar{x} = x + \Delta x$. Поскольку $Ax = b$, $A\bar{x} = b$, то вектор Δx должен удовлетворять равенству

$$A\Delta x = 0, \quad (9.2)$$

состоящему из m уравнений. Для обеспечения равенства (9.2) выделим m компонент Δx_j , $j \in J_{\text{оп}} \subset J$. Равенство (9.2) с помощью компонент

Δ_j , $j \in J_{\text{оп}}$, обеспечивается при любых значениях остальных Δx_j , $j \in J_H = J \setminus J_{\text{оп}}$, тогда и только тогда, когда

$$\det A(I, J_{\text{оп}}) \neq 0. \quad (9.3)$$

Определение 9.1. Совокупность $J_{\text{оп}} \subset J$, $|J_{\text{оп}}| = m$, называется *опорой ограничений канонической задачи КП*, если она обладает свойством (9.3).

Обозначим $A_{\text{оп}} = A(I, J_{\text{оп}})$. Располагая опорой ограничений $J_{\text{оп}}$, из (9.2) легко найти вектор $\Delta x_{\text{оп}} = (\Delta x_j, j \in J_{\text{оп}})$:

$$\Delta x_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_H \Delta x_H, \quad A_H = A(I, J_H), \quad (9.4)$$

который в совокупности с произвольным вектором $\Delta x_H = (\Delta x_j, j \in J_H)$ составляет приращение $\Delta x = (\Delta x_{\text{оп}}, \Delta x_H)$ для построения вектора \bar{x} , удовлетворяющего основному ограничению.

Сравнение двух планов x , \bar{x} в экстремальных задачах ведется по значениям на них целевой функции. Найдем приращение целевой функции в задаче КП:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{\partial f'(x)}{\partial x} \Delta x + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta x' \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Delta x = (c + Dx)' \Delta x + \Delta x' D \Delta x / 2. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Выразим $\Delta f(x)$ через «независимые» переменные Δx_H , заменив в (9.5) вектор $\Delta x_{\text{оп}}$ с помощью выражения (9.4):

$$\Delta f(x) = \Delta'_H(x) \Delta x_H + \Delta'_H D_A \Delta x_H / 2.$$

Здесь

$$\Delta_H(x) = (\Delta_j(x), j \in J_H),$$

$$\Delta(x) = (\Delta_j(x), j \in J) = c + Dx - A' A_{\text{оп}}^{-1} (D(J_{\text{оп}}, J)x + c(J_{\text{оп}})),$$

$$\begin{aligned} D_A &= D_A(J_H, J_H) = D(J_H, J_H) - A'(I, J_H) A_{\text{оп}}^{-1} D(J_{\text{оп}}, J_H) - \\ &- D(J_H, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_H) + A'(I, J_H) (A_{\text{оп}}^{-1})' D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_H). \end{aligned}$$

Заметим, что матрица D_A , как и D , будет неотрицательной. Вектор $\Delta(x)$ получается из вектора градиента $\partial f(x)/\partial x$ с помощью опоры ограничений $J_{\text{оп}}$. Его компоненты $\Delta_j(x)$, $j \in J$, как и раньше, будем называть *оценками*.

Если временно игнорировать ограничения

$$d_{\text{оп}} - x_{\text{оп}} \leq -A_{\text{оп}}^{-1} A_H \Delta x_H \leq d_{\text{оп}}^* - x_{\text{оп}},$$

вытекающие из прямых ограничений $d_{\text{оп}} \leq x_{\text{оп}} + \Delta x_{\text{оп}} \leq d_{\text{оп}}^*$ на опорную компоненту $\Delta x_{\text{оп}}$, то задача (9.1) в терминах неопорных компонент приращения Δx_H принимает форму простой задачи КП:

$$\Delta f(x) = \Delta'_H \Delta x_H + \Delta x'_H D_A \Delta x_H / 2 \rightarrow \min, \quad d_{\text{оп}} - x_H \leq \Delta x_H \leq d_H^* - x_H. \quad (9.6)$$

Задачу (9.6) назовем производной задачей КП на плане x и опоре ограничений $J_{\text{оп}}$.

С помощью производной задачи докажем критерий оптимальности. Предварительно введем следующее понятие.

Определение 9.2. План x назовем невырожденным относительно опоры ограничений $J_{\text{оп}}$, если его опорные компоненты x_j , $j \in J_{\text{оп}}$, некритические:

$$d_{\text{оп}} < x_j < d_j^*, \quad j \in J_{\text{оп}}.$$

Теорема 9.1. Пусть x – план задачи (9.1), $J_{\text{оп}}$ – опора ограничений. Для оптимальности плана x достаточно, чтобы оценки удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta_j &\geq 0 \quad \text{при } x_j = d_{\text{оп}}; \quad \Delta_j \leq 0 \quad \text{при } x_j = d_j^*; \\ \Delta_j &= 0 \quad \text{при } d_{\text{оп}} < x_j < d_j^*, \quad j \in J_H. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Пусть план x не вырожденный относительно $J_{\text{оп}}$. Для оптимальности плана x необходимо, чтобы оценки на нем удовлетворяли соотношениям (9.7).

Доказательство. Достаточность. Пусть на плане x и опоре ограничений $J_{\text{оп}}$ выполнены условия (9.7). Для любого плана $\bar{x} = x + \Delta x$ справедливы неравенства: $\Delta x_j \geq 0$ при $x_j = d_{\text{оп}}$; $\Delta x_j \leq 0$ при $x_j = d_j^*$, $j \in J_H$, из которых с учетом (9.7) и в силу неотрицательности матрицы D_A следует

$$\Delta f(x) = \Delta'_H \Delta x_H + \Delta x'_H D_A \Delta x_H / 2 \geq 0.$$

Таким образом,

$$f(\bar{x}) = f(x) + \Delta f(x) \geq f(x),$$

т. е. x – оптимальный план задачи (9.1).

Необходимость. Предположим, что для оптимального невырожденного относительно $J_{\text{оп}}$ плана соотношения (9.7) не выполняются и $j_* \in J_H$ — тот индекс, на котором они нарушаются. Положим

$$\begin{aligned}\Delta x_{j_*} &= -\theta \text{sign} \Delta_{j_*}(x); \quad \Delta x_j = 0, \quad j \in J_H \setminus j_*; \quad \theta > 0, \\ \Delta x_{\text{оп}} &= \theta A_{\text{оп}}^{-1} A(I, j_*) \text{sign} \Delta_{j_*}(x).\end{aligned}\tag{9.8}$$

Поскольку план x не вырожден относительно $J_{\text{оп}}$, то найдется такое число $\theta_0 > 0$, что для всех θ , $0 < \theta \leq \theta_0$, точка $x + \Delta x$ является планом задачи (9.1). Из формулы приращения целевой функции с учетом (9.8) имеем

$$\Delta f(x) = \Delta'_H(x) \Delta x_H + \Delta'_H D_A \Delta x_H / 2 = -\theta |\Delta_{j_*}(x)| + \theta^2 D_A(j_*, j_*) / 2.$$

В силу $|\Delta_{j_*}(x)| > 0$ правая часть последнего выражения при достаточно малых $\theta > 0$ отрицательна, что противоречит оптимальности плана x . ■

9.2. Графо-аналитический метод

Рассмотрим задачу квадратичного программирования с двумя переменными $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$:

$$f(x) = x'Dx/2 + c'x \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in \mathbf{R}^2 : a_i'x \leq b_i, i = \overline{1, m}\}. \tag{9.9}$$

При $D = 0$ задача (7.9) становится задачей ЛП, графический метод решения которой описан в разд. 1.2.

Для идентификации и построения оптимальных планов задачи (9.9) будем использовать следующий геометрически очевидный *критерий оптимальности*, который в общем случае будет доказан в гл. 3: план x^0 в задаче (9.9) оптимален тогда и только тогда, когда производная целевой функции по любому допустимому направлению $l \in L_X(x^0)$ неотрицательна:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} = \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l \geq 0 \quad \forall l \in L_X(x^0). \tag{9.10}$$

Вектор $l \in \mathbf{R}^n$, $\|l\|=1$, называется *допустимым направлением* в точке \bar{x} относительно множества X , если существует такое число $\theta^0 > 0$, что $\bar{x} + \theta l \in X \quad \forall \theta \in [0; \theta^0]$. На рис. 9.1 изображены множества

$L_X(\bar{x})$ допустимых направлений в точке \bar{x} относительно многоугольного множества планов на плоскости переменных $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

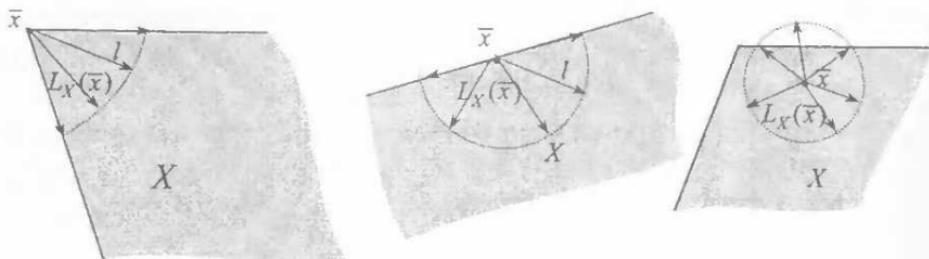


Рис. 9.1

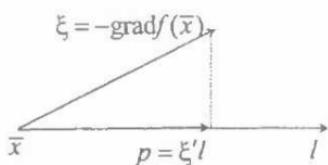


Рис. 9.2

Напомним геометрический смысл производной по направлению в евклидовой метрике. Антиградиент $\xi = -\text{grad}f(\bar{x})$ функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в точке \bar{x} характеризует величину и направление наискорейшего уменьшения функции в точке \bar{x} . Проекция пр. $_{\xi}$ вектора ξ на направление $l \in \mathbb{R}^n$, $\|l\|=1$, равна производной функции

$f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, по направлению l в точке \bar{x} и характеризует начальную скорость уменьшения функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, при движении вдоль направления l (рис. 9.2).

Приступим к решению задачи (9.9). Предварительно осуществим вспомогательные построения. Изобразим на плоскости переменных x_1, x_2 многоугольное множество планов X .

В случае $X = \emptyset$ задача (9.9) не имеет решения из-за несовместности ее ограничений.

Пусть $X \neq \emptyset$. Изобразим множество точек безусловного минимума целевой функции $X^* = \{x \in \mathbb{R}^2 : Dx + c = 0\}$. Возможны три случая:

- 1) $\det D \neq 0$ (столбцы d_1, d_2 матрицы D линейно независимы);
- 2) $\det D = 0$ (векторы d_1, d_2 линейно зависимы) и векторы c, d_1 линейно зависимы;
- 3) $\det D = 0$ и векторы c, d_1 линейно независимы.

В случае 1 множество X^* состоит из единственной точки x^* , координаты которой получаются из системы уравнений $d'_1x + c_1 = 0$, $d'_2x + c_2 = 0$. В случае 2 множество X^* представляет прямую $d'_1x + c_1 = 0$. В случае 3 множество X^* пустое (задача безусловной минимизации не имеет решения).

Если $X^* \cap X \neq \emptyset$, то, согласно критерию оптимальности, $X^0 = X^* \cap X$ – множество оптимальных планов задачи (9.9) (рис 9.3, а, б, в).

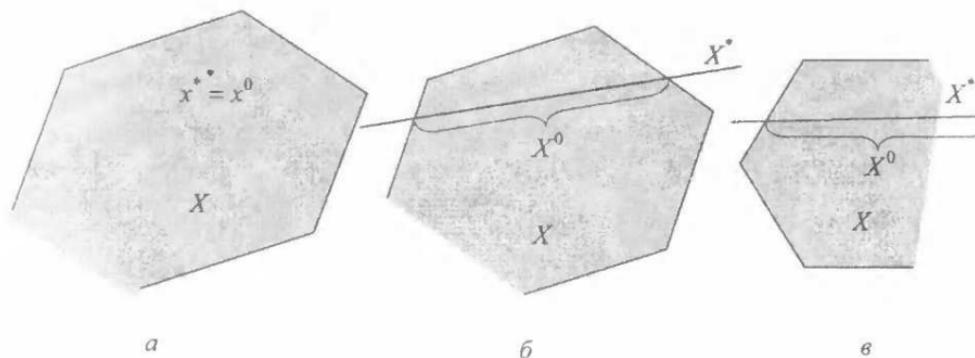


Рис. 9.3

Пусть $X^* \cap X = \emptyset$. Процедуру решения задачи (9.9) разобьем на две фазы. Цель первой фазы – построить начальное приближение $x^1 \in X$, цель второй – найти оптимальные планы или показать, что задача (9.9) не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции на множестве планов.

Случай 1: $\det D \neq 0$ (точка x^* безусловного минимума целевой функции единственная, рис. 9.4). В качестве начального приближения возьмем точку $x^1 \in X$, которая визуально ближайшая к точке x^* . Такой точкой может оказаться либо вершина множества планов (рис. 9.4, а), либо точка, лежащая на его ребре (рис. 9.4, б, в).

Как следует из построения x^1 , возможны три ситуации, изображенные на рис. 9.4. Рассмотрим первую из них, когда x^1 – вершина X . Построим антиградиент $\xi^1 = -\text{grad}f(x^1)$ целевой функции в этой точке и его проекции $p_\beta^1 = \text{пр}_\beta \xi^1$, $p_\gamma^1 = \text{пр}_\gamma \xi^1$ на прямые β , γ , содержащие ребра, в пересечении которых лежит точка x^1 . Если среди

ненулевых векторов p_β^1 , p_γ^1 нет допустимых направлений в точке x^1 относительно множества X (рис. 9.5, а), то, согласно критерию оптимальности, $x^1 = x^0$ – оптимальный план.

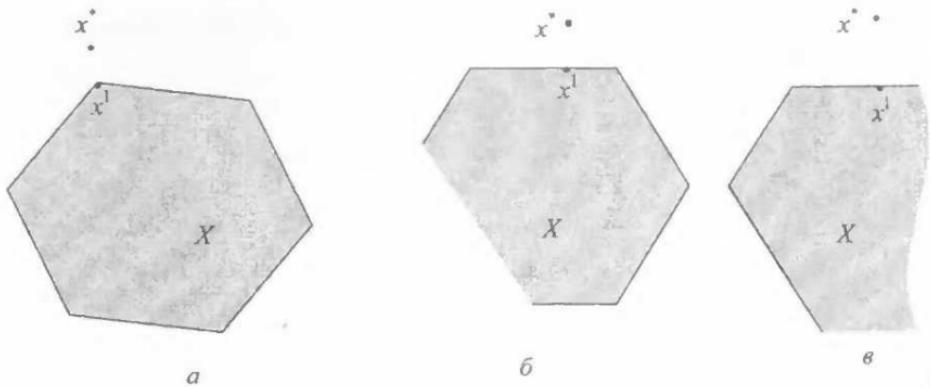


Рис. 9.4

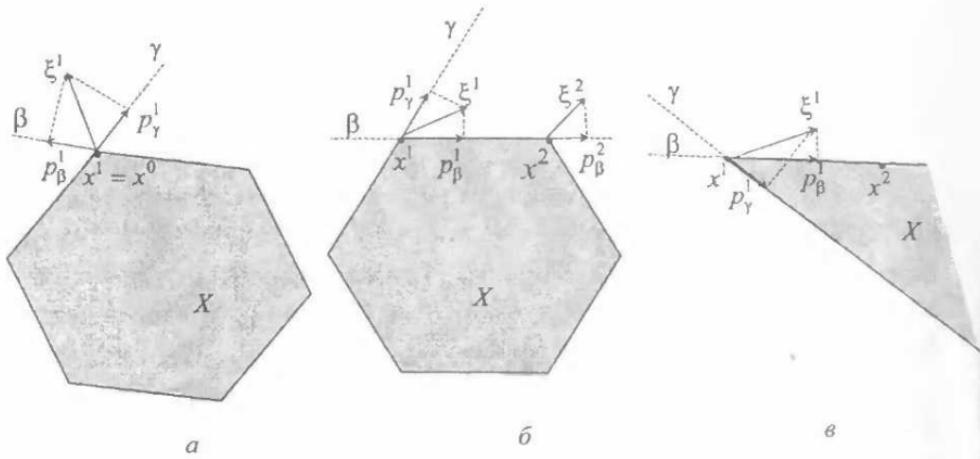


Рис. 9.5

Пусть среди непулевых векторов p_β^1 , p_γ^1 есть допустимые направления (рис. 9.5, б, в) и наибольшую длину имеет, скажем, вектор p_β^1 . Осуществим движение из точки x^1 в направлении p_β^1 по прямой β . Возможны две ситуации: 1а) при движении в направлении p_β^1 встретится вершина множества X (рис. 9.5, б); 1б) при движении в направле-

нии P_β^1 вершина не встретится (ребро не ограничено, рис. 9.5, *в*). В первой ситуации в качестве второго приближения x^2 возьмем встретившуюся вершину, во второй – любую точку из X на прямой β .

Для ситуации 1а возможны два подслучаи: вектор p_β^2 не является допустимым направлением в точке x^2 (рис. 9.5, *б*), вектор p_β^2 – допустимое направление (рис. 9.6, *а*).

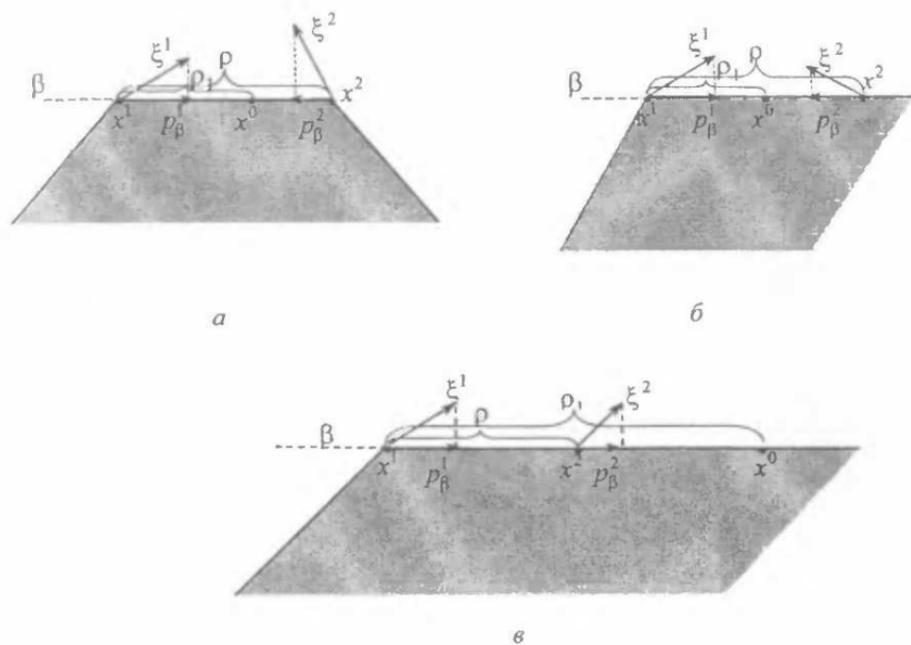


Рис. 9.6

В первом подслучае точка $x^2 = x^0$ – оптимальный план. Во втором случае оптимальный план x^0 находится на ребре между x^1 и x^2 и отстоит от точки x^1 на расстоянии

$$\rho_1 = \frac{\|p_\beta^1\|}{\|p_\beta^1\| + \|p_\beta^2\|} \rho, \quad (9.11)$$

где ρ – расстояние между точками x^1 , x^2 , $\|p_\beta^1\|$, $\|p_\beta^2\|$ – длины векторов p_β^1 , p_β^2 . Действительно, второй подслучай означает, что значение целевой функции вначале уменьшается как при движении от x^1

к x^2 , так и в обратном направлении. Следовательно, точка x^0 , в которой скорость изменения целевой функции равна нулю, находится между x^1 и x^2 . При движении вдоль прямой β скорость целевой функции изменяется линейно. Поэтому положение точки x^0 можно найти следующим образом. Повернем векторы p_β^1, p_β^2 на 90° в одинаковом направлении вокруг точек x^1, x^2 соответственно и через концы повернутых векторов проведем прямую (рис. 9.7, а). Точка пересечения этой прямой с прямой β и дает оптимальным план x^0 . Формула (9.11) получается из подобия построенных прямоугольных треугольников.

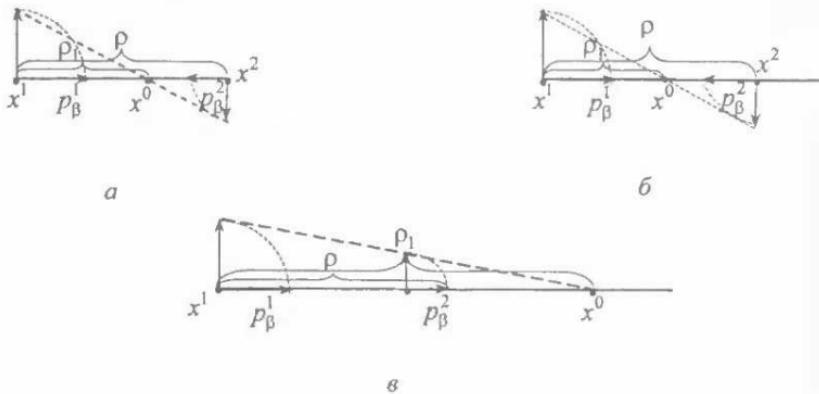


Рис. 9.7

Для ситуации 1б вектор p_β^2 – всегда допустимое направление. Однако здесь тоже возможны два подслучаи (рис. 9.6, б, в). Для первого (рис. 9.6, б) расстояние от x^1 до x^0 вычисляется по формуле (9.11), как и во втором подслучае 1а (см. рис. 9.7, б). Второй подслучай изображен на рис. 9.6, в. Здесь оптимальный план x^0 находится на ребре в направлении p_β^1 от точки x^1 и отстоит от нее на расстоянии

$$\rho_1 = \frac{\|p_\beta^1\|}{\|p_\beta^1\| - \|p_\beta^2\|} \rho.$$

Последняя формула доказывается аналогично формуле (9.11) (см. рис. 9.7, в).

Рассмотрим теперь для случая 1 ситуации, изображенные на рис. 9.4, б, в, когда точка x^1 лежит на ребре множества X . Построим проекцию антиградиента $\xi^1 = -\text{grad}f(x^1)$ на это ребро. Если вектор ξ^1 ортогонален ребру, т. е. проекция равна нулю, то $x^1 = x^0$ – оптимальный план (рис. 9.8). В случае, когда проекция отлична от нуля, поступаем аналогично ситуации 1б.

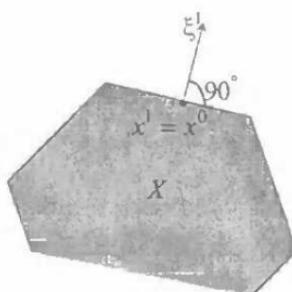


Рис. 9.8

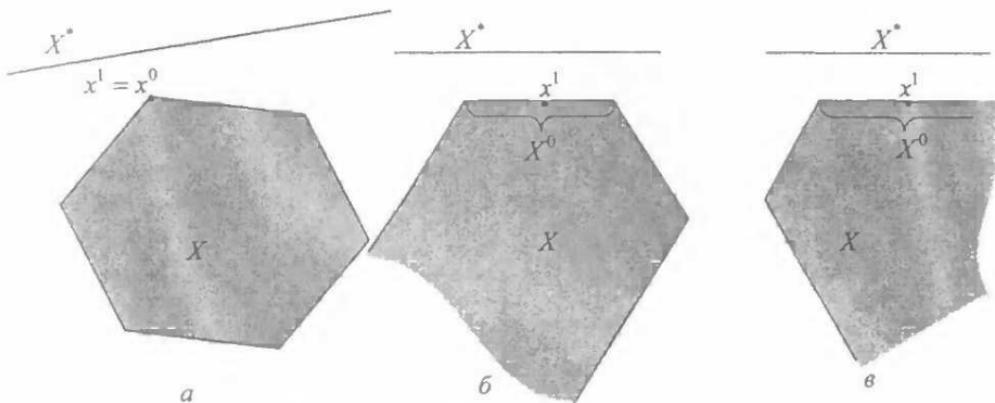


Рис. 9.9

Случай 2: $\det D = 0$ и векторы c, d_i линейно зависимы (множество X^* точек безусловного минимума целевой функции – прямая, рис. 9.9).

В качестве начального приближения возьмем точку, визуально ближайшую к прямой X^* . Такой точкой может оказаться: а) вершина $x^1 \in X$ (рис. 9.9, а); б) любая точка ребра, параллельного прямой X^* (рис. 9.9, б, в). Согласно критерию оптимальности точка x^1 в ситуации а и все точки указанного ребра в ситуации б являются оптимальными планами. Поэтому процесс решения задачи (9.9) на этом завершается.

Случай 3: $\det D = 0$ и векторы c, d_i линейно независимы (множество X^* точек безусловного минимума целевой функции пусто). Построим прямую $X_* = \{x \in \mathbf{R}^2 : d'_i x = 0\}$, состоящую из точек безусловно-

го минимума квадратичного члена целевой функции задачи (9.9), и проекцию вектора $-c$ на прямую X_* : $p = \text{пр}_{X_*}(-c)$.

Пусть $X_* \cap X \neq \emptyset$. Начнем двигаться по прямой X_* в направлении p . При этом движении значение квадратичного члена остается равным нулю, а значение линейного члена уменьшается со скоростью $\|p\|$. Поэтому если движение после попадания на X не покидает это множество, то целевая функция неограниченно уменьшается, т. е. задача (9.9) не имеет решения (рис. 9.10, *a*). В случае, когда указанное движение покидает X , за первое приближение x^1 примем последнюю точку из X (рис. 9.10, *b*).

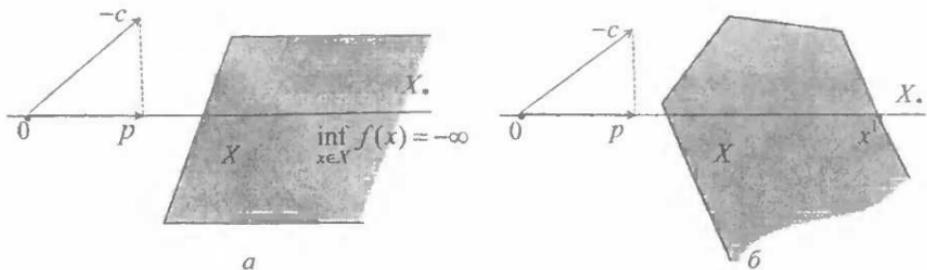


Рис. 9.10

Пусть $X_* \cap X = \emptyset$. Множество точек из X , визуально ближайших к X_* , может состоять из вершины или из ребра, параллельного прямой X_* .

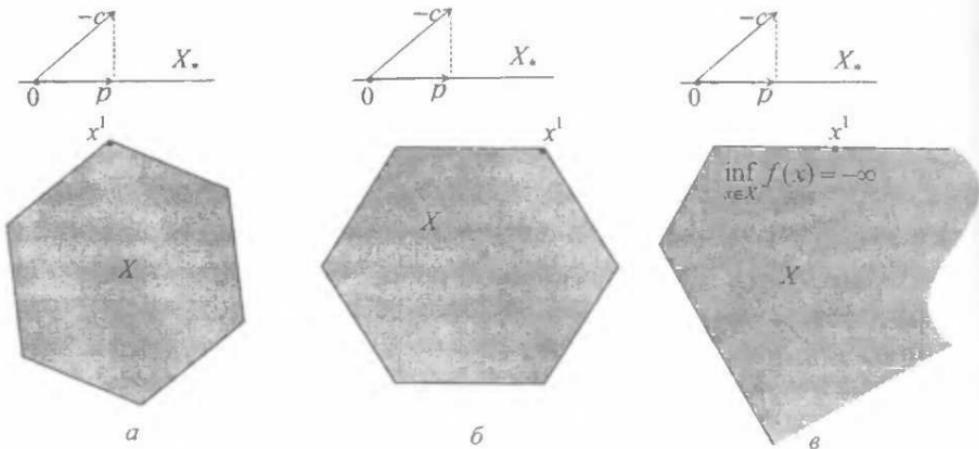


Рис. 9.11

В первой ситуации в качестве x^1 возьмем указанную вершину (рис. 9.11, а), во второй – точку на ребре, крайнюю в направлении p (рис. 9.11, б). С вектором x^1 поступаем таким же образом, как и в случае 1.

Если в направлении p крайней точки не окажется, то задача не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции (рис. 9.11, в), ибо при движении в направлении p значение квадратичного члена целевой функции остается постоянным, а линейный член уменьшается со скоростью $\|p\|$.

На этом описание графо-аналитического метода закончено. Через конечное число итераций метод приводит к одному из следующих результатов: 1) ограничения задачи несовместны; 2) целевая функция не ограничена снизу на множестве планов; 3) построены оптимальные планы.

Для иллюстрации метода приведем примеры.

Пример 9.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 / 2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 / 2 - 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 / 4 &\leq 4, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 &\leq 7, \\ x_2 &\leq 5/2, \\ -x_1 &\leq 0, \\ -x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Матрица $D = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 4 \end{pmatrix} > 0$ определенно положительна, т. е. имеет место

случай 1: $\det D \neq 0$. Множество X^* состоит из единственной точки

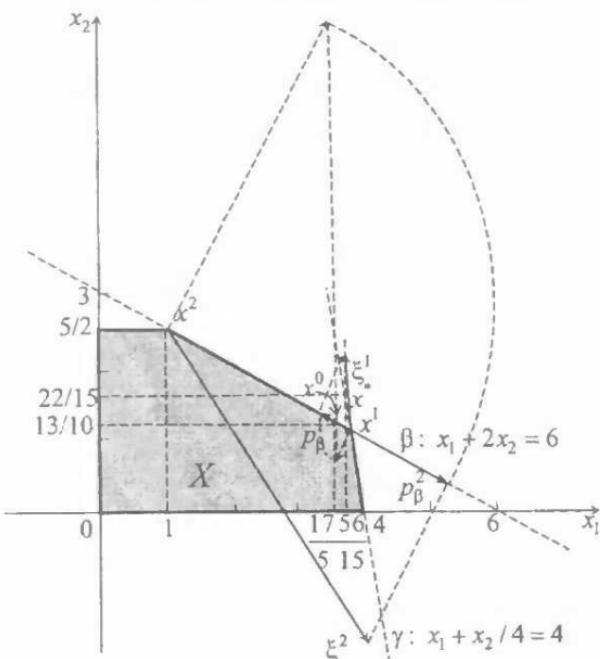


Рис. 9.12

$x^* = (56/15, 22/15)$. Построим множество планов X (рис. 9.12). Точка $x^* \notin X$, т. е. $X \cap X^* = \emptyset$.

В качестве начального приближения возьмем вершину $x^1 = (26/7; 8/7)$. Построим в ней антиградиент $\xi^1 = -\text{grad } f(x^1) = (-1/7; 9/7)$ и его проекции $p_\beta^1 = \text{пр}_\beta \xi^1$, $p_\gamma^1 = \text{пр}_\gamma \xi^1$ на прямые β , γ . Двигаясь из точки x^1 по направлению p_β^1 , перейдем в точку $x^2 = (1; 5/2)$. Построим антиградиент $\xi^2 = -\text{grad } f(x^2) = (13/4; -11/2)$. Вектор p_β^2 является допустимым направлением из точки x^2 . Для построения оптимального плана повернем векторы p_β^1 , p_β^2 в одном направлении на 90° и через концы повернутых векторов проведем прямую. Точка пересечения этой прямой с прямой β и даст оптимальный план $x^0 = (17/5; 13/10)$.

Пример 9.2. Рассмотрим задачу (8.9) (см. разд. 8.3), предварительно решив графо-аналитическим методом двойственную к ней задачу (8.10). Множество планов задачи

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0\} \neq \emptyset.$$

Множество Λ^* состоит из одной точки $\lambda^* = (-27/16; 15/16)$, которая находится из системы уравнений $3\lambda_1 - \lambda_2 + 6 = 0$, $-\lambda_1 + 11\lambda_2 - 12 = 0$, т. е. $\Lambda^* \cap \Lambda = \emptyset$ (рис. 9.13) и реализуется случай 1:

$$\det \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 11/2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0.$$

В качестве начального приближения возьмем точку $\lambda^1 = (0; 15/16)$, которая визуально ближайшая к точке λ^* .

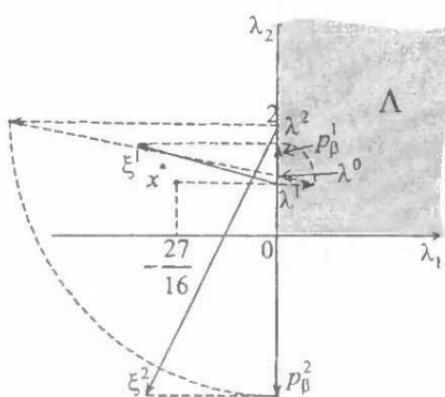


Рис. 9.13

Вычислим антиградиент $\xi^1 = (-81/32; 27/32)$ и построим проекцию p_β^1 . Вдоль допустимого направления p_β^1 на прямой β возьмем точку $\lambda^2 = (0; 2)$. Построим антиградиент $\xi^2 = (-2; -5)$ и проекцию на β в точке λ^2 . Повернем проекции p_β^1 и p_β^2 около точек λ^1 , λ^2 соответственно в одинаковом направлении на 90° . Через концы повернутых векторов проведем прямую, которая пересекается с прямой β в точке $\lambda^0 = (0; 12/11)$: $\left(\frac{11}{2}\lambda_2 - 6 = 0\right)$.

9.3. Алгоритм решения простой задачи квадратичного программирования

В данном пункте исследуется простая задача квадратичного программирования (КП), в которой минимизация осуществляется на простых множествах, представляющих параллелепипеды в конечномерном пространстве. Это позволяет отчетливее описать метод учета особенностей нового, по сравнению с ЛП, класса задач. Классические задачи на безусловный минимум представляют частный случай рассматриваемых далее задач и поэтому отдельно (самостоятельно) не рассматриваются.¹⁾

Пусть $c = c(J)$, $d_* = d_*(J)$, $d^* = d^*(J)$ – n -векторы ($J = \{1, 2, \dots, n\}$), $D = D(J, J)$ – симметричная ($D' = D$) неотрицательная ($D \geq 0$) $n \times n$ -матрица.

Задачу

$$f(x) = c'x + x'Dx/2 \rightarrow \min, \quad d_* \leq x \leq d^*, \quad (9.12)$$

минимизации выпуклой ($\partial^2 f(x)/\partial x^2 \geq 0$) квадратичной функции $f(x)$ на параллелепипеде $X = \{x \in \mathbb{R}^n : d_* \leq x \leq d^*\}$ назовем *простой задачей квадратичного программирования*.

Как в ЛП, элементы множества X будем называть *планами*, функцию $f(x)$, $x \in X$, – *целевой*. План x^0 , на котором целевая функция достигает минимального значения

$$f(x^0) = \min f(x), \quad x \in X,$$

называется *оптимальным (решением)* задачи (9.12).

При $\|d_*\| < \infty$, $\|d^*\| < \infty$ задача (9.12) имеет решение в силу теоремы Вейерштрасса. Она имеет решение (причем единственное) и при любом $x \in \mathbb{R}^n$, если матрица D положительна ($D > 0$, т. е. $x'Dx > 0$ для всех $x \neq 0$).

Пусть x – план задачи (9.12). Компоненты $\Delta_j = \Delta_j(x)$, $j \in J$, вектора градиента

$$\Delta(x) = \text{grad } f(x) = c + Dx$$

¹⁾ В современных работах часто большие задачи на безусловный минимум численно решают путем сведения их к последовательности задач с ограничениями.

назовем *оценками* плана x . Из определения оценок следует, что $\Delta_j(x)$ – начальная скорость изменения целевой функции $f(x)$, если у плана x увеличивать единственную компоненту x_j , оставляя неизменными остальные.

Теорема 9.2 (критерий оптимальности). Для оптимальности плана x^0 необходимо и достаточно, чтобы его оценки удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned}\Delta_j(x^0) &\geq 0 \text{ при } x_j^0 = d_{*j}; \quad \Delta_j(x^0) \leq 0 \text{ при } x_j^0 = d_j^*; \\ \Delta_j(x^0) &= 0 \text{ при } d_{*j} < x_j^0 < d_j^*, \quad j \in J.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Доказательство. Необходимость. Предположим от противного, что существует такой оптимальный план x^0 , что соотношения (9.12) не выполняются на некотором индексе $j_* \in J$, т. е.

$$\begin{aligned}\text{если } x_{j_*}^0 = d_{*j_*}, \text{ то } \Delta_{j_*} < 0; \text{ если } x_{j_*}^0 = d_{j_*}^*, \text{ то } \Delta_{j_*} > 0; \\ \text{если } d_{*j_*} < x_{j_*}^0 < d_{j_*}^*, \text{ то } \Delta_{j_*} \neq 0.\end{aligned}\tag{9.14}$$

Отметим, что во всех случаях $|\Delta_{j_*}| \neq 0$. Построим луч $x(\theta) = x^0 - \theta e_{j_*} \operatorname{sign} \Delta_{j_*}(x^0)$, $\theta \geq 0$, с компонентами $x_{j_*}(\theta) = x_{j_*}^0 - \theta \operatorname{sign} \Delta_{j_*}(x^0)$, $x_j(\theta) \equiv x_j^0$, $j \in J \setminus j_*$, где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Согласно (9.14) при всех достаточно малых $\theta > 0$ векторы $x(\theta)$, $\theta \geq 0$, будут планами задачи (9.12). Подсчитаем начальную скорость изменения целевой функции при движении вдоль луча $x(\theta)$, $\theta \geq 0$:

$$\begin{aligned}\left. \frac{df(x(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= \left. \frac{\partial f'(x(\theta))}{\partial x} \frac{dx(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \\ &= \left. \Delta'(x(\theta)) \right|_{\theta=0} \left(-e_{j_*} \operatorname{sign} \Delta_{j_*}(x^0) \right) = -|\Delta_{j_*}(x^0)| < 0.\end{aligned}\tag{9.15}$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $\theta > 0$ выполняется неравенство $f(x(\theta)) < f(x^0)$, противоречащее оптимальности плана x^0 .

Достаточность. Пусть на плане x^0 выполняются соотношения (9.13). Рассмотрим любой другой план x задачи (9.12). Для компонент вектора $\Delta x = x - x^0$ имеем:

$$\begin{aligned}\Delta x_j &= x_j - x_j^0 \geq d_{*j} - d_{*j} = 0 \text{ при } x_j^0 = d_{*j}; \\ \Delta x_j &= x_j - x_j^0 \leq d_{*j} - d_{*j} = 0 \text{ при } x_j^0 = d_j^*, \quad j \in J.\end{aligned}$$

Сравнив эти соотношения с (9.13), получаем неравенства

$$\Delta_j(x^0)\Delta x_j \geq 0, \quad j \in J. \quad (9.16)$$

Подставим неравенства (9.15) в приращение целевой функции, учтывая при этом неотрицательность матрицы D , будем иметь:

$$f(x) - f(x^0) = \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \Delta x = \Delta'(x^0) \Delta x + \Delta x' D \Delta x / 2 \geq 0.$$

Последнее неравенство подтверждает оптимальность плана x . ■

Неравенство $\partial f(x)/\partial x_s > 0$ при $x_s = d_{s*}$ и неравенство $\partial f(x)/\partial x_s < 0$

при $x_s = d_s^*$ – это **оптимальные признаки-неравенства** в точке x , равенство $\partial f(x)/\partial x_s = 0$ – **оптимальный признак-равенство**. Согласно критерию оптимальности план, обладающий n оптимальными признаками, является оптимальным.

Из определения оптимальных признаков видно, что признаки-неравенства устойчивы к малым вариациям компонент плана x . В отличие от них признаки-равенства могут исчезать после сколь угодно малых вариаций.

Таким образом, для конечности методов решения задачи (9.12) необходимо иметь средство «удержания» на итерациях оптимальных признаков-равенств. В конкретном случае задачи (9.12) эти признаки представляют линейные уравнения. Как известно из ЛП, для выполнения линейных ограничений-равенств удобным средством является **опора**. С целью соблюдения одного равенства она выделяет одну опорную переменную, «отвечающую» за это равенство. В ЛП такой переменной могла быть произвольная, и алгоритм в процессе итераций подбирал оптимальную. В случае задачи (9.12) равенство $\partial f(x)/\partial x_s = 0$, которое нужно удержать, появляется из целевой функции из-за конкурентной переменной x_s . Поэтому естественна мысль с помощью именно этой переменной обеспечить порожденное равенство. Целесообразность такого выбора подкрепляется и следующим анализом. Любое неуправляемое изменение переменной может отрицательно сказаться на ситуации, связанной с данным планом. Во-первых, оно может увеличить значение минимизируемой функции. Во-вторых, оно может изменить знак оценок оптимальных признаков. Согласно физическому смыслу оценок степень влияния вариации переменных в первом приближении определяется величиной $|\Delta_s(x)|$. Поэтому если для выполнения равенства $\partial f(x)/\partial x_s = \Delta_s(x) = 0$ использовать такую переменную x_j , $j \neq s$, что $\partial f(x)/\partial x_j \neq 0$, то можем увеличить значение $f(x)$ с на-

чальной скоростью $|\Delta_s(x)|$. Если же для этой цели использовать x_s , то в силу $\Delta_s(x) = 0$ значение целевой функции из-за этой вариации в первом приближении не изменится. Понятно, что для того чтобы при этом не нарушить другие признаки-равенства, нужно одновременно удерживать все линейно-независимые уравнения $\Delta_s = 0$.

Приведенный анализ составляет эвристическую основу вводимого далее понятия опоры целевой функции. Дополнение состоит в том, что при введении опоры целевой функции ставится не частная задача сохранения признаков-равенств, а более общая и жесткая задача управления оценками.

Определение 9.3. Совокупность оценок $\Delta_j(x)$, $j \in J^*$, назовем управляемой, если для любых чисел δ_j , $j \in J^*$, ξ_j , $j \in J \setminus J^*$, найдутся такие числа ξ_j , $j \in J^*$, что на векторе $\bar{x} = (x_j + \xi_j, j \in J)$ выполняются равенства

$$\Delta_j(\bar{x}) = \Delta_j(x) + \delta_j, \quad j \in J^*. \quad (9.17)$$

С учетом равенства (9.17) перепишем $c_j + D(j, J)\bar{x}$, $j \in J^*$:

$$c_j + D(j, J)(x + \xi) = \Delta_j(x) + D(j, J)\xi(J) = \Delta_j(x) + \delta_j, \quad j \in J^*.$$

Таким образом, для управляемости совокупности $(\Delta_j(x), j \in J^*)$ необходимо и достаточно при любом $\delta(J^*)$ разрешимости относительно вектора $\xi(J^*)$ уравнения

$$D(J^*, J^*)\xi(J^*) + D(J^*, J \setminus J^*)\xi(J \setminus J^*) = \delta(J^*).$$

Как известно, это имеет место тогда и только тогда, когда $\det D(J^*, J^*) \neq 0$.

Пусть x – план задачи (9.12). По вектору оценок $\Delta(x)$ построим множество $J_0 = \{j \in J : \Delta_j(x) = 0\}$.

Определение 9.4. Совокупность $J_{\text{оп}} \subset J$ называется опорой целевой функции на плане x , если:

1) $J_{\text{оп}} \in J_0$;

2) совокупность $(\Delta_j(x), j \in J_{\text{оп}})$ управляема.

Матрицу $D_{\text{оп}} = D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$ будем называть опорной матрицей целевой функции. Она неособая по построению.

Как видно из определения, опора $J_{\text{оп}}$ состоит из таких индексов, на которых оценки равны нулю. При этом для любых значений *неопорных компонент плана* \bar{x}_j , $j \in J_{\text{нп}} = J \setminus J_{\text{оп}}$, *опорные переменные* x_j , $j \in J_{\text{оп}}$, можно выбирать так, чтобы на векторе $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J)$ оценки $\Delta_j(x)$, $j \in J_{\text{оп}}$, также равнялись нулю:

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_j(\bar{x}) = 0, \quad j \in J_{\text{оп}}. \quad (9.18)$$

Другими словами, при любом изменении неопорных компонент плана опора позволяет осуществить такое движение в пространстве переменных $x = (x_j, j \in J)$, вдоль которого значения опорных компонент оценок сохраняются.

Приведем экстремальную характеристику опоры целевой функции. При изменении неопорных компонент плана на начальную скорость изменения целевой функции не влияет выбор способа изменения значений опорных компонент плана, поскольку опорные оценки равны нулю. Однако от выбора способа изменения опорных компонент плана зависит ускорение изменения целевой функции.

Оказывается, если опорные компоненты плана выбирать из условия (9.18), то ускорение изменения целевой функции будет минимальным. Действительно, $D(J_{\text{оп}}, J)l = 0$, по которому строится направление $l_{\text{оп}}$ изменения опорных компонент плана, можно трактовать как условие минимума выпуклой функции

$$f(l_{\text{оп}}) = l'_{\text{оп}} D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})l_{\text{оп}} + 2l'_{\text{оп}} D(J_{\text{оп}}, J_{\text{нп}})l_{\text{нп}} + l'_{\text{нп}} D(J_{\text{нп}}, J_{\text{оп}})l_{\text{оп}},$$

полученной из функции $l'Dl$ при фиксации вектора $l_{\text{нп}}$. Но число $l'Dl$ равно ускорению, с которым целевая функция изменяется при движении вдоль направления l :

$$\begin{aligned} \frac{df(x + \theta l)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} (c'(x + \theta l) + (x + \theta l)'D(x + \theta l)(x + \theta l)/2) = \\ &= c'l + l'D(x + \theta l); \quad \frac{d^2 f(x + \theta l)}{d\theta^2} = l'Dl. \end{aligned}$$

Таким образом, при движении вдоль направления $l = (l_{\text{оп}}, l_{\text{нп}})$ начальная скорость уменьшения целевой функции, заданная вектором $l_{\text{нп}}$, гасится при выборе вектора $l_{\text{оп}}$ из условия (9.18) в минимальной степени. Понятно, что с точки зрения минимизации целевой функции это наиболее благоприятная ситуация.

*Определение 9.5. а) Пара $\{x, J_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры целевой функции на x называется **опорным планом**.*

*б) Опорный план $\{x, J_{\text{оп}}\}$ назовем **невырожденным**, если опорные компоненты плана некритические: $d_{*j} < x_j < d_j^*, j \in J_{\text{оп}}$.*

Наряду с опорным планом $\{x, J_{\text{оп}}\}$ рассмотрим произвольный n -вектор $\bar{x} = x + \Delta x$, на котором опорные оценки равны нулю: $\Delta_j(\bar{x}) = 0, j \in J_{\text{оп}}$. Вектор \bar{x} легко строится в силу определения опоры целевой функции. Зададим произвольный вектор $\Delta x_{\text{нц}} = (\Delta x_j, j \in J_{\text{нц}})$. Из уравнения

$$\Delta_{\text{оп}}(\bar{x}) = (\Delta_j(\bar{x}), j \in J_{\text{оп}}) = \Delta_{\text{оп}}(x) + D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})\Delta x_{\text{оп}} + D(J_{\text{оп}}, J_{\text{нц}})\Delta x_{\text{нц}} = 0$$

найдем

$$\Delta x_{\text{оп}} = -D_{\text{оп}}^{-1}D(J_{\text{оп}}, J_{\text{нц}})\Delta x_{\text{нц}}. \quad (9.19)$$

Искомый вектор $\bar{x} = x + \Delta x$ построен. С учетом (9.18), (9.19) вычислим приращение целевой функции при переходе $x \rightarrow \bar{x}$:

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) = \Delta' \Delta x + (\Delta x)' D \Delta x / 2 = \Delta'_{\text{нц}} \Delta x_{\text{нц}} + \eta, \quad (9.20)$$

где η – остаточный член,

$$\eta = (\Delta x)' D \Delta x / 2 \geq 0, \quad (9.21)$$

в котором компоненты $\Delta x_{\text{оп}}$ вектора Δx заменены выражением (9.18).

Таким образом, оценке $\Delta_j, j \in J_{\text{нц}}$, можно придать следующий **физический смысл**: $\Delta_j = \Delta_j(x)$ – начальная скорость изменения целевой функции на опорном плане $\{x, J_{\text{оп}}\}$, если у плана x среди неопорных компонент увеличивать единственную компоненту x_j , а опорные компоненты $x_j, j \in J_{\text{оп}}$, изменять так, чтобы опорные оценки получающихся векторов равнялись нулю.

Отметим, что начальная скорость $\Delta_j(x)$ изменения целевой функции при изменении компоненты плана x_j сохраняется и в том случае, когда наряду с x_j изменяются все опорные компоненты плана.

Далее в процессе построения оптимальных планов с текущим планом x будут сравниваться не все планы, а лишь те, которые лежат на специальных линейных многообразиях, порожденных опорой текущего плана.

Определение 9.6. Опорный план $\{x, J_{\text{оп}}\}$ назовем оптимальным, если $f(x) = \min f(\bar{x})$, $\Delta_j(\bar{x}) = 0$, $j \in J_{\text{оп}}$, $\bar{x} \in X$.

Теорема 9.3. Для оптимальности опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ достаточно, а в случае невырожденности и необходимо, чтобы неопорные оценки удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned}\Delta_j(x) &\geq 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \quad \Delta_j(x) \leq 0 \text{ при } x_j = d_j^*; \\ \Delta_j(x) &= 0 \text{ при } d_{*j} < x_j < d_j^*, \quad j \in J_{\text{нп}}.\end{aligned}\tag{9.22}$$

Следует подчеркнуть, что план, удовлетворяющий критерию оптимальности (9.22), будет оптимальным по отношению ко всем планам, а не только относительно планов, лежащих на определенных выше линейных многообразиях.

Геометрически движение к оптимальным планам вдоль специальных линейных многообразий $\Delta_j(x) = 0$, $j \in J_{\text{оп}}$, можно трактовать как движение вдоль дна оврага. При этом размер и направление дна определяются опорой $J_{\text{оп}}$.

Опишем итерацию метода.

Пусть x – начальный план. Вычислим для него вектор оценок $\Delta = c + Dx$. По множеству $J_0 = \{j \in J : \Delta_j(x) = 0\}$ составим такое (возможно, пустое) множество $J_{\text{оп}} \subseteq J$, что $\det D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) \neq 0$ (если $J_{\text{оп}} = \emptyset$, то $\det D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) \neq 0$ по определению). Пара $\{x, J_{\text{оп}}\}$ – начальный опорный план. Обозначим через $J_{\text{нп}}$ множество тех неопорных индексов, на которых критерий оптимальности не выполняется. Найдем

$$|\Delta_{j_*}| = \min |\Delta_j|, \quad j \in J_{\text{нп}}$$

и построим вектор $l = (l_{\text{оп}}, l_{\text{нп}})$:

$$\begin{aligned}l_{\text{нп}} &= -e_{j_*} \operatorname{sign} \Delta_{j_*}(x), \\ l_{\text{оп}} &= -D_{\text{оп}}^{-1} D(J_{\text{оп}}, J_{\text{нп}}) l_{\text{нп}}.\end{aligned}\tag{9.23}$$

Приняв вектор l за направление движения, новый план \bar{x} будем искать на луче

$$x(\theta) = x + \theta l, \quad \theta \geq 0.\tag{9.24}$$

Согласно проведенным ранее вычислениям (см. (9.15)) при движении вдоль луча (9.24) начальная скорость изменения целевой функции $f(x)$

отрицательна и равна $-|\Delta_{j_*}|$. При этом для всех $\theta \geq 0$ выполняются тождества $\Delta_j(x(\theta)) \equiv 0$, $j \in J_{\text{ou}}$.

Имея целью минимизацию функции $f(x)$ на множестве планов X , целесообразно двигаться вдоль луча (9.24) до тех пор, пока: либо 1) точка $x(\theta)$ не достигнет границы множества X , либо 2) функция $f(x(\theta))$, $\theta \geq 0$, не перестанет убывать.

Согласно (9.23) при движении вдоль луча (9.24) у вектора $x(\theta)$ могут изменяться только компоненты с индексами j_* и $j \in J_{\text{ou}}$. Максимальный шаг по компоненте $x_{j_*}(\theta)$, допускаемый прямыми ограничениями $d_{j_*} \leq x_{j_*}(\theta) \leq d_{j_*}^*$, очевидно, равен

$$\theta_{j_*} = \begin{cases} x_{j_*} - d_{j_*}, & \text{если } \Delta_{j_*}(x) > 0, \\ d_{j_*}^* - x_{j_*}, & \text{если } \Delta_{j_*}(x) < 0. \end{cases}$$

Как и в ЛП, легко вычислить максимальный шаг θ_{ou} , допускаемый прямыми ограничениями $d_{\text{ou}} \leq x_{\text{ou}}(\theta) = x_{\text{ou}} + \theta l_{\text{ou}} \leq d_{\text{ou}}^*$:

$$\theta_j = \begin{cases} (d_{*j} - x_j)/l_j, & \text{если } l_j < 0; \\ (d_{*j} - x_j)/l_j, & \text{если } l_j < 0; \\ \infty, & \text{если } l_j = 0, j \in J_{\text{ou}}. \end{cases}$$

Таким образом, максимальный шаг θ_0 , при котором точка $x(\theta)$, $\theta \geq 0$, остается во множестве планов X , равен

$$\theta_0 = \min \{\theta_{j_*}, \theta_{\text{ou}}\}. \quad (9.25)$$

Теперь найдем шаг θ_f полной релаксации целевой функции $f(x)$ вдоль луча (9.24). Скорость изменения функции $f(x)$ при выбранном способе варьирования (9.24) равна

$$\frac{df(x(\theta))}{d\theta} = \Delta' I + \theta I' D I = -|\Delta_{j_*}| + \theta \alpha,$$

где $\alpha = D(j_*, j_*) - D(j_*, J_{\text{ou}}) D_{\text{ou}}^{-1} D(J_{\text{ou}}, j_*)$.

Поэтому условие полной релаксации $df(x(\theta_f))/d\theta = 0$ дает

$$\theta_f = \begin{cases} |\Delta_{j_*}|/\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0; \\ \infty, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases} \quad (9.26)$$

Сравнив числа (9.25), (9.26), найдем шаг θ^0 вдоль направления l :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_*}, \theta_{\text{оп}}, \theta_f\}$$

и построим новый план

$$\bar{x} = x + \theta^0 l.$$

Опора $\bar{J}_{\text{оп}}$ нового плана \bar{x} строится в зависимости от реализации шага θ^0 . Рассмотрим все возможности.

1. $\theta^0 = \theta_{j_*}$. Этот случай означает, что при движении вдоль луча (9.24) в точке $\theta = \theta^0$ компонента $x_{j_*}(\theta^0)$ стала критической и на ней стал выполнятся критерий оптимальности, ибо $x_{j_*}(\theta_{j_*}) = d_{j_*}$ при $\Delta_{j_*} > 0$; $x_{j_*}(\theta_{j_*}) = d_{j_*}^*$ при $\Delta_{j_*} < 0$. У нового плана \bar{x} по сравнению с планом x появился новый оптимальный признак. Количество индексов $|J_{\text{нц}}^-|$, не удовлетворяющих критерию оптимальности, уменьшилось на единицу, а среди опорных компонент плана не появилось новых критических $|\bar{J}_{\text{нц}}^-| = J_{\text{нц}}^- \setminus j_*$. Поэтому нет оснований изменять опору: $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$.

2. $\theta^0 = \theta_{\text{оп}} = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_{\text{оп}}$. В этом случае в точке $\theta = \theta^0$ стала критической опорная компонента $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0}(\theta^0)$. Оставлять индекс j_0 в новой опоре $\bar{J}_{\text{оп}}$ нецелесообразно, ибо пара $\{\bar{x}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$ – вырожденный опорный план и на следующей итерации из-за критичности компоненты \bar{x}_{j_0} , возможно, не удастся улучшить план \bar{x} . Поэтому индекс j_0 удалим из опоры $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$. Ясно, что $\Delta_j(\bar{x}) = 0$, $j \in J_{\text{оп}}$. Нетрудно показать, что $\det D(\bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}) \neq 0$. Таким образом, $\bar{J}_{\text{оп}}$ – опора плана \bar{x} .

3. $\theta^0 = \theta_f$. В этом случае движение остановилось из-за полной минимизации целевой функции вдоль направления l . В связи с этим в точке $\theta = \theta_f$ появился новый оптимальный признак-равенство $\Delta_{j_*}(\bar{x}) = \Delta_{j_*}(x) + \theta_f D(j_*, J)l = \Delta_{j_*}(x) - |\Delta_{j_*}(x)| \text{sign} \Delta_{j_*}(x) = 0$. Этот при-

знак можно удержать, ибо $\det D(J_{\text{оп}} \cup j_*, J_{\text{оп}} \cup j_*) \neq 0$ в силу $\alpha \neq 0$.
Индекс j_* включим в новую опору: $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*$.

Замечание 9.1. Описанный выше метод, вообще говоря, не является конечным. Однако простое дополнительное правило выбора ведущего индекса j_* позволяет гарантировать это важное свойство. **Правило критичности:** если множество $J_{\text{нц}}^-$ содержит совокупность $J_\Delta = \{j \in J_{\text{нц}}^- : d_{*j} < x_j < d_j^*\}$ индексов некритических компонент плана, то можно положить $j_* = \min j, j \in J_\Delta$. Согласно этому правилу улучшение опорного плана осуществляется в первую очередь при помощи его неопорных некритических компонент.

9.4. Алгоритм решения общей задачи квадратичного программирования

Процесс решения общей задачи КП (9.1) можно представить состоящим на каждом этапе из двух частей: сначала при фиксированной опоре ограничений $J_{\text{оп}}$ решается производная задача (до конца или частично), затем в зависимости от результата ее решения меняется $J_{\text{оп}}$. Следуя этой схеме, сначала решим производную задачу, которая, как показано в разд. 9.1, представляет собой простую задачу КП. Для построения конечного метода решения простых задач КП в разд. 9.3 использовалась опора целевой функции. Перенесем это понятие на общую задачу КП.

Определение 9.7. При заданных x , $J_{\text{оп}}$ совокупность $J_{\text{оп}} \subset J_H$ назовем **опорой целевой функции** канонической задачи КП на плане x , если:

- 1) $\Delta_j(x) = 0, j \in J_{\text{оп}}$;
- 2) $\det D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) \neq 0$ ($D(J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) = D_{\text{оп}}$).

Другими словами, $J_{\text{оп}}$ – опора целевой функции общей задачи, если она – опора целевой функции производной задачи.

Объединяя две опоры $J_{\text{оп}}$, $J_{\text{оп}}$, введем следующие понятия.

Определение 9.8. При заданном плане x совокупность $J_{\text{оп}} = \{J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ из опоры ограничений и опоры целевой функции называется **опорой задачи** на плане x .

Определение 9.9. Пару $\{x, J_{\text{оп}}\}$ из плана x и опоры задачи $J_{\text{оп}}$ назовем **опорным планом**.

Опорный план будем называть *невырожденным*, если $d_{*j} < x_j < d_j^*$,

$j \in J_{\text{оп}}$.

Определение 9.10. *Опорный план* $\{x^0, J_{\text{оп}}\}$ назовем *оптимальным*, если

$$f(x^0) = \min f(x), \Delta_j(x) = 0, j \in J_{\text{оп}}; x \in X.$$

По схеме приведенного выше доказательства (теорема 9.3) доказывается *критерий оптимальности опорного плана*: для оптимальности опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ достаточно, а в случае невырожденности и необходимо выполнение соотношений:

$$\begin{aligned} \Delta_j &\geq 0, \text{ если } x_j = d_{*j}; \Delta_j &\leq 0, \text{ если } x_j = d_j^*; \\ \Delta_j &= 0, \text{ если } d_{*j} < x_j < d_j^*, j \in J_{\text{ни}} = J \setminus J_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Опишем *итерацию прямого метода*. Пусть $\{x, J_{\text{оп}}\}$ – начальный опорный план. Проблема построения начального плана x и начальной опоры ограничений $J_{\text{оп}}$ уже обсуждалась в ЛП. Начальная опора целевой функции $J_{\text{оп}}$ тесно связана с планом. Она может выбираться произвольной или строиться по доступной информации. Проще всего на первой итерации выбирать ее пустой: $J_{\text{оп}} = \emptyset$, $J_{\text{ни}} = J_{\text{ни}}$, $J_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$.

Подсчитав на $\{x, J_{\text{оп}}\}$ вектор оценок $\Delta(x)$ (компоненты приведенного градиента), приступим к проверке критерия оптимальности (9.27). Пусть j_* – первый индекс из $J_{\text{ни}}$, на котором обнаружилось нарушение критерия оптимальности. Положим

$$\begin{aligned} l_{j_*} &= -\text{sign}\Delta_{j_*}, l_j \equiv 0, j \in J_{\text{ни}} \setminus j_*; \\ l_{\text{оп}} &= D_{A_{\text{оп}}}^{-1} D_A(J_{\text{оп}}, j_*) \text{sign}\Delta_{j_*}; l_{\text{оп}} &= -A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{ни}}) l(J_{\text{ни}}). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Тогда вектор $x(\theta) = x + \theta l$ с $l = (l_{\text{оп}}, l_{\text{оп}}, l_{\text{ни}})$ при любых $\theta \geq 0$ удовлетворяет основному ограничению, и на нем при всех $\theta \geq 0$ оценки с индексом $j \in J_{\text{оп}}$ равны нулю: $\Delta_j(x + \theta l) \equiv 0$, $j \in J_{\text{оп}}$, $\theta \geq 0$.

Начальная скорость изменения целевой функции вдоль $x(\theta)$ равна

$$\left. \frac{df(x(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=0} = -|\Delta_{j_*}(x)| < 0.$$

Найдем максимальный шаг θ^0 вдоль построенного направления l (9.28). Для этого проследим за выполнением четырех условий:

1) значения переменной $x_{j_*}(\theta)$ не выходят за границы прямых ограничений, т. е.

$$d_{j_*} \leq x_{j_*} - \theta \text{sign} \Delta_{j_*}(x) \leq d_{j_*}^*; \quad (9.29)$$

2) аналогичным свойством обладают и переменные $x_j(\theta)$, $j \in J_{\text{оп}}$:

$$d_{j_*} \leq x_j + \theta l_j \leq d_j^*, \quad j \in J_{\text{оп}}; \quad (9.30)$$

3) переменные $x_j(\theta)$, $j \in J_{\text{оп}}$, не нарушают прямых ограничений:

$$d_{j_*} \leq x_j + \theta l_j \leq d_j^*, \quad j \in J_{\text{оп}}; \quad (9.31)$$

4) происходит релаксация целевой функции:

$$df(x(\theta)) / d\theta \leq 0. \quad (9.32)$$

Максимальное число θ_{j_*} , удовлетворяющее неравенству (9.29), равно

$$\theta_{j_*} = \begin{cases} x_{j_*} - d_{j_*}, & \text{если } \Delta_{j_*} > 0; \\ d_{j_*}^* - x_{j_*}, & \text{если } \Delta_{j_*} < 0. \end{cases}$$

Максимальное число $\theta_{\text{оп}}$, удовлетворяющее неравенствам (9.30), равно $\theta_{\text{оп}} = \min \theta_j = \theta_{j_{\text{оп}}}$, $j \in J_{\text{оп}}$;

$$\theta_j = \begin{cases} (d_{j_*} - x_j) / l_j, & \text{если } l_j < 0; \\ (d_j^* - x_j) / l_j, & \text{если } l_j > 0; \\ \infty, & \text{если } l_j = 0. \end{cases}$$

Аналогично находим максимальное число $\theta_{\text{оп}}$, удовлетворяющее неравенствам (9.31):

$$\theta_{\text{оп}} = \min \theta_j = \theta_{j_{\text{оп}}}, \quad j \in J_{\text{оп}};$$

$$\theta_j = \begin{cases} (d_{j_*} - x_j) / l_j, & \text{если } l_j < 0; \\ (d_j^* - x_j) / l_j, & \text{если } l_j > 0; \\ \infty, & \text{если } l_j = 0. \end{cases}$$

С учетом равенства $df(x(\theta)) / d\theta = -|\Delta_{j_*}(x)| + \theta \alpha$, где

$$\alpha = D_A(j_*, j_*) - D_A(j_*, J_{\text{оп}}) D_{\text{оп}}^{-1} D_A(J_{\text{оп}}, j_*),$$

максимальное число θ_f , удовлетворяющее условию (9.32), равно

$$\theta_f = \begin{cases} |\Delta_{j_*}(x)|/\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0; \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, максимальный шаг θ^0 , обладающий всеми четырьмя свойствами, равен

$$\theta^0 = \min \{\theta_{j_*}, \theta_{\text{оп}}, \theta_{\text{он}}, \theta_f\}. \quad (9.33)$$

Новый план \bar{x} полагаем равным $\bar{x} = x + \theta^0 I$. Построим для него новую опору $\bar{J}_{\text{оз}} = \{\bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{он}}\}$. Преобразование старой опоры $J_{\text{оз}}$ будем вести в зависимости от результата первой части итерации. Этот результат зависит от конкретной реализации шага θ^0 (9.33). Рассмотрим отдельно все возможности первой части итерации.

1. $\theta^0 = \theta_{j_*}$. При этом по j_* -й неопорной компоненте плана будет выполнен критерий оптимальности. Менять опору нет необходимости: $\bar{J}_{\text{оз}} = J_{\text{оз}}$. К новой итерации переходим с опорным планом $\{\bar{x}, \bar{J}_{\text{оз}}\}$.

2. $\theta^0 = \theta_{\text{оп}} = \theta_{j_{\text{оп}}}$. Компонента $\bar{x}_{j_{\text{оп}}}$ нового плана x стала критической. Индекс $j_{\text{оп}}$ необходимо вывести из опоры целевой функции, ибо в противном случае согласно принятому правилу построения допустимого направления нельзя гарантировать, что на следующей итерации удастся сделать ненулевой шаг. В то же время вывод индекса $j_{\text{оп}}$ из опоры целевой функции возможен только в том случае, если $\det \bar{D}_{\text{оп}} \neq 0$, где $\bar{D}_{\text{оп}} = -D_A(J_{\text{оп}} \setminus j_{\text{оп}}, J_{\text{оп}} \setminus j_{\text{оп}})$. Последнее имеет место, поскольку новая матрица $\bar{D}_{\text{оп}}$ получена из положительно определенной матрицы $D_{\text{оп}}$ удалением строки и столбца с индексом $j_{\text{оп}}$. Таким образом, строим новую опору задачи $\bar{J}_{\text{оз}} = \{\bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{он}}\}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{он}} = J_{\text{оп}} \setminus j_{\text{оп}}$ и переходим к новой итерации с опорным планом $\{\bar{x}, \bar{J}_{\text{оз}}\}$.

3. $\theta^0 = \theta_{\text{он}} = \theta_{j_{\text{он}}}$. Реализовалась ситуация, аналогичная случаю 2. Поэтому индекс $j_{\text{он}}$ должен быть удален из опоры задачи. Однако в силу требования $|J_{\text{оп}}| = m$ необходимо из множества $J_{\text{оп}}$ ввести в $J_{\text{оп}}$ новый индекс. Построим вектор $h'(J_{\text{оп}}) = e'_{j_{\text{он}}} A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{оп}})$, если $J_{\text{оп}} \neq \emptyset$.

Будем различать две возможности: 3а) $J_{\text{он}} \neq \emptyset$ и найдется такой индекс $k \in J_{\text{он}}$, что $h_k \neq 0$; 3б) $J_{\text{он}} = \emptyset$ или $h(J_{\text{он}}) = 0$.

В случае 3а вывод индекса $j_{\text{он}}$ из опоры задачи осуществим в два этапа. На первом этапе произведем обмен индексами между опорой ограничений и опорой целевой функции: $\bar{J}_{\text{он}} = (J_{\text{он}} \setminus j_{\text{он}}) \cup k$, $\bar{J}_{\text{он}} = (J_{\text{он}} \setminus k) \cup j_{\text{он}}$, $\bar{J}_{\text{нн}} = J_{\text{нн}}$. При этом новая матрица $A(I, \bar{J}_{\text{он}})$ будет невырожденной, поскольку отличен от нуля элемент $\alpha = hk \neq 0$. Будет невырожденной и новая матрица $\bar{D}_{\text{он}} = \bar{D}_A(\bar{J}_{\text{он}}, \bar{J}_{\text{он}})$, все элементы которой совпадают с элементами матрицы $D_{\text{он}}$, кроме строки и столбца с индексом $j_{\text{он}}$. В результате проведенных операций индекс критической опорной компоненты станет принадлежать опоре целевой функции: $j_{\text{он}} \in \bar{J}_{\text{он}}$, т. е. будут выполнены условия случая 2. Второй этап преобразований совпадает с операциями, описанными для случая 2.

В случае 3б замену опоры ограничений осуществим по правилу короткого двойственного шага ЛП. Для этого выполним следующие операции. Построим вектор p с компонентами

$$p_{j_0} = -\text{sign} l_{j_{\text{он}}}, \quad p_j = 0, \quad j \in J_{\text{он}} \setminus j_{\text{он}};$$

$$p'(J_{\text{нн}}) = -e'_{j_{\text{он}}} A_{\text{он}}^{-1} A(I, J_{\text{нн}}) \text{sign} l_{j_{\text{он}}}.$$

Найдем числа $\delta_{\text{нн}} = \min \delta_j, j \in J_{\text{нн}}$,

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j(\bar{x}) / p_j & \text{при } \Delta_j(\bar{x}) p_j < 0; \\ 0 & \text{при } \Delta_j(\bar{x}) = 0, p_j > 0, \bar{x}_j \neq d_{*j}, \\ & \text{либо } \Delta_j(\bar{x}) = 0, p_j < 0, \bar{x}_j \neq d_j^*; \\ \infty & \text{в остальных случаях, } j \in J_{\text{нн}}. \end{cases}$$

Пусть $\delta_{\text{нн}} = \delta_{j_{\text{нн}}}, j_{\text{нн}} \in J_{\text{нн}}$. Заменим опору задачи:

$$\bar{J}_{\text{он}} = (J_{\text{он}} \setminus j_{\text{он}}) \cup j_{\text{нн}}; \quad \bar{J}_{\text{он}} = J_{\text{он}}; \quad \bar{J}_{\text{нн}} = (J_{\text{нн}} \setminus j_{\text{нн}}) \cup j_{\text{он}}.$$

К новой итерации переходим с опорным планом $\{\bar{x}, \bar{J}_{\text{он}}\}$, $\bar{J}_{\text{он}} = \{\bar{J}_{\text{он}}, \bar{J}_{\text{он}}\}$, которому соответствует вектор оценок $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}) + \delta_{\text{нн}} p$.

4. $\theta = \theta_f$. В этом случае на первом шаге итерации достигнута полная минимизация целевой функции вдоль направления l . В связи с этим на j_{*} -й компоненте плана выполняется критерий опти-

мальности, поскольку $\Delta_{j_*}(\bar{x}) = 0$. Зафиксируем этот оптимальный признак, вводя индекс j_* в опору целевой функции: $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*$, $\bar{J}_{\text{нн}} = J_{\text{нн}} \setminus j_*$. Это можно сделать, поскольку ненулевой ведущий элемент $\alpha \neq 0$ обеспечит невырожденность матрицы $\bar{D}_{\text{оп}} = D_A(\bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$.

Как и в случае простой задачи КП, гарантировать конечность алгоритма позволяет *правило некритичности*: на каждой итерации улучшение опорного плана осуществляется, если возможно, без изменения критических неопределенных компонент.

Пример 9.3. Рассмотрим задачу (см. пример 9.1) минимизации функции

$$f(x) = x_1^2 / 2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 / 2 - 3x_1 - 4x_2$$

на множестве X , определенном системой неравенств

$$x_1 + x_2 / 4 \leq 4,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$0 \leq x_1 \leq 7,$$

$$0 \leq x_2 \leq 5/2.$$

Матрица $D = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 4 \end{pmatrix} > 0$ положительна, значит, функция $f(x_1, x_2)$,

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, сильно выпукла. Чтобы решить задачу прямым опорным методом, перейдем к канонической форме, введя свободные переменные x_3, x_4 :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 / 2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 / 2 - 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 / 4 + x_3 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\ 0 \leq x_1 &\leq 7, \quad 0 \leq x_2 \leq 5/2, \\ 0 \leq x_3 &\leq 4, \quad 0 \leq x_4 \leq 6. \end{aligned} \tag{9.34}$$

Полученная задача является частным случаем задачи КП (9.1) с параметрами ($m = 2, n = 4$):

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$d_* = (0; 0; 0; 0), \quad d^* = (7; 5/2; 4; 6).$$

В качестве начальных возьмем план $x^1 = (0; 0; 4; 6)$, опору ограничений $J_{\text{оп}}^1 = \{3, 4\}$ и пустую опору целевой функции $J_{\text{оц}}^1 = \emptyset$. По опорному плану подсчитаем вектор оценок $\Delta^1 = (-3; -4; 0; 0)$. Критерий оптимальности (9.27) нарушается по индексам 1 и 2. Возьмем индекс $j_* = 2$ с максимальной по модулю оценкой. Построим направление l^1 :

$$l_1^1 = 0; \quad l_2^1 = -\text{sign} \Delta_2^1 = 1;$$

$$l^1(J_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_*) l_{j_*}^1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем максимально допустимый шаг θ^1 вдоль направления l^1 :

$$\theta^1 = \min \{\theta_{j_*}, \theta_{\text{оц}}, \theta_{\text{оп}}, \theta_f\},$$

где $\theta_{j_*} = d_{j_*}^* - x_{j_*}^1 = 5/2$; $\theta_{\text{оц}} = \infty$, поскольку $J_{\text{оц}}^1 = \emptyset$; $\theta_{\text{оп}} = \min \{\theta_3, \theta_4\}$, $\theta_3 = (d_{*3} - x_3^1) / l_3^1 = (0 - 4) / (-1/4) = 16$, $\theta_4 = (d_{*4} - x_4^1) / l_4^1 = (0 - 6) / (-2) = 3$; т. е. $\theta_{\text{оп}} = \min \{16, 3\} = 3 = \theta_4$; $\theta_f = |\Delta_{j_*}| / \alpha = 4/4 = 1$, поскольку $\alpha = D_A(j_*, j_*) = 4$.

Таким образом, $\theta^1 = \min \{5/2; \infty; 3; 1\} = 1 = \theta_f$. Построим план $x^2 = x^1 + \theta^1 l^1 = (0; 1; 15/4; 4)$.

Итерацию завершим построением новой опоры. Поскольку реализовался случай 4 ($\theta^1 = \theta_f$), то индекс $j_* = 2$ введем в опору целевой функции: $J_{\text{оп}}^2 = \{2\}$. Опоре $J_{\text{оп}}^2$ соответствует обратная матрица $D_{\text{оп}}^{-1} = 1/\alpha = 1/4$. В этом случае опора ограничений не изменяется: $J_{\text{оц}}^2 = J_{\text{оц}}^1$.

В результате после первой итерации построены: план x^2 , опора ограничений $J_{\text{оп}}^2$ и опора целевой функции $J_{\text{оц}}^2$. Вторую итерацию начинаем с вычисления вектора оценок $\Delta^2 = (-7/2; 0; 0; 0)$. Критерий оптимальности нарушается только по первому индексу, который и возьмем в качестве ведущего: $j_* = 1$. Построим направление $l^2 = (1; 1/8; -33/32; -5/4)$ и подсчитаем шаг θ^2 вдоль него:

$$\theta^2 = \min \{\theta_{j_*}, \theta_{\text{оп}}, \theta_{\text{оц}}, \theta_f\},$$

где

$$\theta_{j_*} = 7 - 0 = 7; \quad \theta_{\text{оп}} = \theta_2 = (5/2 - 1) : (1/8) = 12; \quad \theta_{\text{оц}} = \min \{\theta_3, \theta_4\} = 16/5;$$

$$\theta_3 = (0 - 15/4) : (-33/32) = 120/33; \quad \theta_4 = (0 - 4) : (-5/4) = 16/5;$$

$$\theta_f = (7/2) : (15/16) = 56/15.$$

Таким образом, $\theta^2 = \theta_{\text{оп}} = \theta_4 = 16/5$.

Построим план $x^3 = x^2 + \theta^2 l^2 = (16/5; 7/5; 9/20; 0)$. На итерации реализовался случай 3: $\theta^2 = \theta_{\text{оп}} = \theta_4$. Поэтому индекс $j_{\text{оп}} = j_4 = 4$ выведем из опоры в два

этапа. На первом обменяем индекс из опоры ограничений на индекс из опоры целевой функции: $J_{\text{оп}}^3 = (J_{\text{оп}}^2 \setminus 4) \cup 2$; $J_{\text{оп}}^3 = (J_{\text{оп}}^2 \setminus 2) \cup 4 = \{4\}$. На втором этапе индекс $j_{\text{оп}} = 4$ исключим из опоры целевой функции. В результате получим опору ограничений $J_{\text{оп}}^3 = \{3, 2\}$ и опору целевой функции $J_{\text{оп}}^3 = \emptyset$. Опоре ограничений $J_{\text{оп}}^3$ соответствует обратная матрица $A_{\text{оп}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Для третьего опорного плана подсчитаем вектор оценок $\Delta^3 = (-1/2; 0; 0; 0)$. Первый индекс по-прежнему остается ведущим: $j_* = 1$. Построим направление $l^3 = (1; -1/2; 7/8; 0)$ и подсчитаем шаг θ_3 вдоль него:

$$\theta^3 = \min \{0_{j_*} = 19/5; \theta_{\text{оп}} = \infty; \theta_{\text{оп}} = 7/10; \theta_f = 1/5\} = 1/5.$$

Построим план $x^4 = x^3 + \theta^3 l^3 = (17/5; 13/10; 5/8; 0)$. Ведущий индекс введем в опору целевой функции $J_{\text{оп}}^4 = \{1\}$. Опора ограничений не меняется: $J_{\text{оп}}^4 = J_{\text{оп}}^3$. Для вектора оценок $\Delta^4 = (0; 0; 0; 1/4)$ критерий оптимальности выполняется. Таким образом, x^4 – оптимальный план задачи (9.34). На рис. 9.14 изображен процесс решения в проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$.

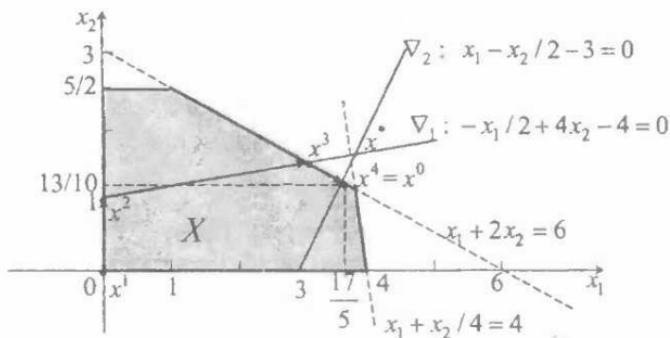


Рис. 9.14

§ 10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общие методы численного решения экстремальных конечномерных задач будут изложены в гл. 4. В данном параграфе опишем специальные методы решения задач выпуклого программирования, учитывающие специфику задач и использующие двойственный метод ЛП.

Предварительно напомним суть непрямых методов решения экстремальных задач.

10.1. Непрямые методы

Из математического анализа известно, что классический непрямой метод решения гладкой задачи на безусловный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

состоит в сведении ее к решению векторного уравнения

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0,$$

которое выражает классическую теорему Ферма о необходимом условии безусловного минимума.

Известно также, что классический непрямой метод решения гладкой регулярной задачи на условный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, \quad h_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, k} \quad (k < n),$$

состоит в сведении ее к решению относительно $x \in \mathbf{R}^n$, $\mu_j \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1, k}$, системы уравнений (гл. 4)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \sum_{j=1}^k \mu_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} = 0, \quad h_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, k},$$

которая выражает необходимое условие минимума в форме классического правила множителей Лагранжа.

По аналогии с этим непрямыми методами решения регулярных задач выпуклого программирования базируются на следующем *критерии оптимальности*, доказательство которого будет дано в следующей главе: если x^0 – оптимальный план гладкой регулярной задачи выпуклого программирования

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (10.1)$$

то найдутся такие числа $\lambda_i \geq 0$, $i \in I_a(x^0) = \{i \in I : g_i(x^0) = 0\}$, что выполняется равенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0. \quad (10.2)$$

И обратно, если для плана x^* задачи (10.1) при некоторых $\lambda_i \geq 0$, $i \in I_a(x^*)$, выполняются равенства

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \sum_{i \in I_a(x^*)} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x} = 0, \\ g_i(x^*) = 0, \quad i \in I_a(x^*), \quad (10.3)$$

то $x^* = x^0$ – оптимальный план задачи (10.1).

Замечание 10.1. Если задача (10.1) дополнительно содержит линейные ограничения-равенства

$$a'_j x = b_j, \quad j = \overline{1, k} \quad (k < n),$$

то к левым частям равенств (10.2), (10.3) добавится выражение $\sum_{j=1}^k \mu_j a_j$.

Таким образом, решение задачи (10.1) сводится к решению уравнений (10.3).

Принципиальное отличие этого метода от классического аналога состоит в том, что в классическом случае нужно решать фиксированную систему уравнений, а здесь заранее неизвестны все уравнения и нужно дополнительно найти множество $|I_a(x)|$ уравнений. В общем случае это множество может быть найдено перебором, что требует большого объема работы. Ниже оно будет построено с помощью прямых методов.

10.2. Прямые методы

Прямыми методами решения экстремальных задач на минимум называют методы построения минимизирующих последовательностей x^k , $k = 1, 2, \dots$, обладающих свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Прямые методы ВП опишем для трех задач.

1. Минимизация выпуклой функции на многограннике. Начнем с решения следующей задачи ВП:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b, d_* \leq x \leq d^*\}. \quad (10.4)$$

Если точка безусловного минимума функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, принадлежит X , то она является оптимальным планом задачи (10.4).

Решение задачи начнем с выбора произвольного плана $x^1 \in X$. Его можно, к примеру, найти с помощью первой фазы симплекс-

метода. В точке x^1 построим линейную аппроксимацию целевой функции задачи (10.4):

$$g(x; x^1) = (\xi^1)'x + \alpha^1, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где $\xi^1 = \text{grad}f(x^1)$, $\alpha^1 = f(x^1) - (\xi^1)'x^1$, и прямым или двойственным симплекс-методом решим задачу

$$(\xi^1)'x \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (10.5)$$

Пусть x^2 – оптимальный план задачи (10.5). Если

$$f(x^2) \leq g(x^2; x^1) + \varepsilon, \quad (10.6)$$

то $x^2 = x^\varepsilon$ – ε -оптимальный план задачи (10.4). Напомним, что план $x^\varepsilon \in X$ называется ε -оптимальным, если

$$f(x^\varepsilon) \leq f(x^0) + \varepsilon, \quad (10.7)$$

где x^0 – оптимальный план. Покажем, что при выполнении неравенства (10.6) получим

$$f(x^2) \leq f(x^0) + \varepsilon, \quad (10.8)$$

т. е. справедливо неравенство (10.7). В силу выпуклости функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, имеем

$$g(x^0; x^1) \leq f(x^0). \quad (10.9)$$

Поскольку x^2 – решение задачи (10.5), то выполняется соотношение

$$(\xi^1)'x^2 \leq (\xi^1)'x^0. \quad (10.10)$$

Складывая неравенства (10.6) и (10.10), получим

$$f(x^2) + (\xi^1)'x^2 \leq g(x^2; x^1) + (\xi^1)'x^0 + \varepsilon$$

или, с учетом введенных выше обозначений и неравенства (10.9), будем иметь

$$\begin{aligned} f(x^2) &\leq g(x^2; x^1) + (\xi^1)'(x^0 - x^2) + \varepsilon = (\xi^1)'x^2 + \alpha^1 + (\xi^1)'(x^0 - x^2) + \varepsilon = \\ &= g(x^0; x^1) + \varepsilon \leq f(x^0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. выполняется неравенство (10.8).

Если вектор x^2 не является ε -оптимальным планом задачи (10.4), то процесс решения продолжаем. Последовательные приближения x^k , $k = 3, 4, \dots$, строим как решения задач

$$\varphi_k(x^{k+1}) = \min_{x \in X} \max \{ \varphi_{k-1}(x), g(x; x^k) \}, \quad (10.11)$$

где $\varphi_1(x) = g(x; x^1)$, $g(x; x^k) = (\xi^k)'x + \alpha^k$, $\xi^k = \text{grad}f(x^k)$, $\alpha^k = f(x^k) - (\xi^k)'x^k$. Для решения последовательности задач (10.11) используем двойственный симплекс-метод, а в качестве начальной базисной матрицы берем оптимальную базисную матрицу, полученную на предыдущем шаге (см. § 3).

Замечание 10.2. При решении задач (10.11) на каждом шаге можно отбрасывать те функции $g(x; x^s)$, $s = \overline{1, k-1}$, $x \in X$, для которых $\varphi_k(x^{k+1}) - g(x^{k+1}; x^s) > \varepsilon$. В дальнейшем они не будут участвовать в формировании функций $\varphi_k(x)$, $x \in X$.

Пусть построена последовательность приближений x^1, \dots, x^k и $x^k = x^*$. Введем множества

$$\begin{aligned} J_B^- &= \{j \in J_B^k : x_j^k - d_{*j} \leq \varepsilon_1\}, \quad J_B^+ = \{j \in J_B^k : d_j^* - x_j^k \leq \varepsilon_1\}, \\ J_H^- &= \{j \in J_H^k : x_j^k = d_{*j}, |\Delta_j^k| > \varepsilon_1\}, \quad J_H^+ = \{j \in J_H^k : x_j^k = d_j^*, \Delta_j^k > \varepsilon_1\}, \\ J_B^\pm &= J_B^+ \cup J_B^-, \quad J_H^\pm = J_H^+ \cup J_H^-, \quad J^\pm = J_B^\pm \cup J_H^\pm, \quad J^0 = J \setminus J^\pm, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ – заданное число. Положим:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= d_j^*, \quad j \in J_B^+ \cup J_H^+, \\ \bar{x}_j &= d_{*j}, \quad j \in J_B^- \cup J_H^-. \end{aligned}$$

Координаты x_j , $j \in J^0$, будем считать свободными и по ним минимизируем целевую функцию задачи (10.4). Таким образом, имеем задачу

$$\begin{aligned} f(x(J^0)) &\rightarrow \min, \\ A(I, J^0)x(J^0) &= b - A(I, J^\pm)\bar{x}(J^\pm), \\ d_{*j} &\leq x_j \leq d_j^*, \quad j \in J^0. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Для нахождения оптимального плана задачи (10.12) решаем, например, методом Ньютона систему уравнений

$$\frac{\partial f(x(J^0))}{\partial x_j} + y'A(I, j) = 0, \quad j \in J^0; \quad (10.13)$$

$$A(I, J^0)x(J^0) = b - A(I, J^\pm)\bar{x}(J^\pm),$$

взяв в качестве начального приближения $x_j = x_j^k$, $j \in J^0$; $y = u^k$, где u^k – вектор потенциалов, соответствующий оптимальной базисной матрице при решении задачи (10.11). Пусть $(x^*(J^0), y^*)$ – решение системы (10.13). Если $d_*(J^0) \leq x^*(J^0) \leq d^*(J^0)$, то проверяем условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x^*(J^0))}{\partial x_j} &\geq 0 \quad \text{при } x_j^* = d_{*j}, \\ \frac{\partial f(x^*(J^0))}{\partial x_j} &\leq 0 \quad \text{при } x_j^* = d_j^*, \\ \frac{\partial f(x^*(J^0))}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{при } d_{*j} < x_j^* < d_j^*, \quad j \in J^0.\end{aligned}$$

Если эти условия выполняются, то $(x^*(J^0), \bar{x}(J^\pm)) = x^0$ – оптимальный план задачи (10.4) и решение прекращаем. В остальных случаях уменьшаем ε , например, берем $\varepsilon/2$ и возвращаемся к построению x^{k+1} и последующих приближений.

2. Минимизация линейной функции на выпуклом множестве. Рассмотрим вторую регулярную задачу ВП

$$c'x \rightarrow \min, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad d_* \leq x \leq d^*, \quad (10.14)$$

где $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, $x \in \mathbb{R}^n$, – выпуклые гладкие функции.

В качестве начального приближения x^1 возьмем решение задачи

$$c'x \rightarrow \min, \quad x \in X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : d_* \leq x \leq d^*\}.$$

Если $g_i(x^1) \leq 0$, $i = \overline{1, m}$, то $x^1 = x^0$. В противном случае строим последовательные приближения x^2, x^3, \dots следующим образом. Пусть построено приближение x^k . Подсчитаем невязки $\omega_i^k = g_i(x^k)$, $i = \overline{1, m}$, и выбираем максимальную

$$\omega_{i_k}^k = \max_{i=\overline{1, m}} \omega_i^k.$$

Если $g_{i_k}(x^k) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число, то $x^k = x^\varepsilon$ – оптимальный ε -план, т. е. x^k – решение задачи

$$c'x \rightarrow \min, \quad g_i(x) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, m}, \quad d_* \leq x \leq d^*.$$

Рассмотрим $I_a^k = \{i = \overline{1, m} : |g_i(x^k)| \leq \varepsilon\}$ — множество индексов ограничений, ε -активных в точке x^k . Решим, например, методом Ньютона систему уравнений

$$c + \sum_{i \in I_a^k} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} = 0, \quad g_i(x) = 0, \quad i \in I_a^k, \quad (10.15)$$

взяв в качестве начального приближения векторы x^k , $\lambda^i = u^k$, где u^k — вектор потенциалов при решении задачи (10.16) на данном шаге.

Если $g_{i_k}(x^k) > \varepsilon$, то находим точку \bar{x}^k как решение задачи

$$\frac{\partial g'_{i_k}(x^k)}{\partial x} x \rightarrow \min, \quad g_{i_k}(x) = 0.$$

Для построения оптимального плана \bar{x}^k этой задачи можно применить, например, метод множителей Лагранжа.

Построим множество $X_{k+1} = X_k \cap \bar{X}_k$, где

$$\bar{X}_k = \{x \in \mathbf{R}^n : g_{i_k}(\bar{x}^k) + \frac{\partial g'_{i_k}(\bar{x}^k)}{\partial x} (x - \bar{x}^k) \leq 0\}.$$

Приближение x^{k+1} — решение задачи

$$c' x \rightarrow \min, \quad x \in X_{k+1}. \quad (10.16)$$

Задачу (10.16) решаем двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начальной базисной матрицы оптимальную базисную матрицу, полученную на предыдущем шаге.

Вернемся к задаче (10.15). Пусть (x^*, λ^*) — ее решение. Если $d_* \leq x^* \leq d^*$ и $\lambda^* \geq 0$, то $x^* = x^0$. Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, уменьшаем ε , взяв $\varepsilon/2$, и возвращаемся к построению последовательности приближений x^{k+1}, \dots .

3. Общая задача. Рассмотрим теперь регулярную гладкую задачу ВП общего вида

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad d_* \leq x \leq d^*. \quad (10.17)$$

Введем новую переменную x_{n+1} и запишем задачу (10.17) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\rightarrow \min, \\ f(x) - x_{n+1} &\leq 0, \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ d_* \leq x &\leq d^*, \quad d_{n+1} \leq x_{n+1} \leq d_{n+1}^*, \end{aligned} \tag{10.18}$$

где $d_{n+1} = \min f(x)$, $d_* \leq x \leq d^*$, $d_{n+1}^* = f(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in X$ – любой план задачи (10.17).

Введя обозначения $\bar{x} = (x, x_{n+1})$, $\bar{c} = (0, \dots, 0, 1)$, $\bar{g} = (g, f - x_{n+1})$, $\bar{d}_* = (d_*, d_{n+1})$, $\bar{d}^* = (d^*, d_{n+1}^*)$, задачу (10.18) запишем в виде

$$\bar{c}' \bar{x} \rightarrow \min, \quad \bar{g}_i(\bar{x}) \leq 0, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad \bar{d}_* \leq \bar{x} \leq \bar{d}^*. \tag{10.19}$$

Задача (10.19) эквивалентна задаче (10.17) и с точностью до обозначений совпадает с задачей (10.14), метод решения которой описан выше.

4. Использование квадратичной аппроксимации. При рассмотрении указанных выше трех задач использовались линейные или кусочно-линейные аппроксимации выпуклых функций. Можно использовать и квадратичную аппроксимацию. Так, при решении задачи (10.4) вместо функций $g(x; x^k)$ можно взять функцию

$$h(x; x^k) = (\xi^k)' x + x' A_k x / 2 + \alpha^k,$$

где

$$\begin{aligned} (\xi^k)' &= \partial f'(x^k) / \partial x - (x^k)' A_k, \quad A_k = \partial^2 f(x^k) / \partial x^2, \\ \alpha^k &= f(x^k) - (\xi^k)' x^k - (x^k)' A_k x^k / 2. \end{aligned}$$

При этом x^k – решение задачи

$$(\xi^1)' x + x' A_k x / 2 \rightarrow \min, \quad x \in X. \tag{10.20}$$

Если $x \in \mathbb{R}^2$, то для решения задачи (10.20) можно применить графо-аналитический метод, описанный в разд. 9.2.

При построении последовательности приближений x^3, x^4, \dots в задаче (10.11) заменяем функцию $g(x; x^k)$ на $h(x; x^k)$.

Литература

1. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982.
2. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002.
3. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, В. М. Ракецкий. – Минск: Изд-во БГУ, 1987.
4. Еремин, И. И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования / И. И. Еремин, Н. Н. Астафьев. – М.: Наука, 1976.
5. Пшеничный, Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980.
6. Пшеничный, Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М.: Наука, 1975.
7. Рокафеллар, Р. Т. Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973.

Глава 3 НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Нелинейным программированием (НЛП) называют математическую дисциплину, посвященную теории и методам решения задач о нахождении экстремальных (минимальных или максимальных) значений функций на множествах пространства \mathbf{R}^n , задаваемых равенствами и неравенствами. В отличие от ЛП в данном случае предполагается, что среди функций, формирующих задачу, есть нелинейные. Настоящая глава посвящена теории НЛП, вычислительные методы будут изложены в следующей главе. В дальнейшем для определенности рассматриваются только задачи минимизации, поскольку задачи максимизации легко к ним сводятся, если у целевой функции изменить знак. НЛП является разделом *математического программирования* (МП), которое также включает в себя линейные и выпуклые задачи, рассмотренные в предыдущих главах.

§ 11. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть X – некоторое множество пространства \mathbf{R}^n , $f(x)$ – определенная на нем функция. *Общая задача МП*, которую символически будем записывать следующим образом:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \tag{11.1}$$

состоит в нахождении такой точки $x^0 \in X$, что $f(x^0) \leq f(x)$ для всех $x \in X$. Любую точку множества X будем называть *планом* или *допустимой точкой*, а функцию $f(x)$ – *целевой функцией*. Решение x^0 рассмотренной задачи назовем *оптимальным планом* или *точкой глобального минимума*.

Понятно, что не каждая задача (11.1) имеет решение. Достаточные условия разрешимости общей задачи МП дает теорема Вейерштрасса.

Теорема 11.1. *Если X – компактное множество, а $f(x)$, $x \in X$, – непрерывная функция, то оптимальный план в задаче (11.1) существует.*

Доказательство этой теоремы можно найти в любом курсе математического анализа.

При выводе условий оптимальности с помощью дифференциального исчисления значение $f(x^0)$ сравнивается со значениями $f(x)$

только для тех допустимых точек x , которые достаточно близки к x^0 . Как следствие, такие условия справедливы и для локально оптимальных планов. План x^0 называют **локально оптимальным (точкой локального минимума)**, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $f(x^0) \leq f(x)$ для всех планов x , удовлетворяющих условию $\|x - x^0\| < \varepsilon$. Понятно, что оптимальный план является и локально оптимальным, но не наоборот. Впрочем, для задачи ВП справедливо и обратное утверждение.

Теорема 11.2. *Если $f(x), x \in X$, – выпуклая функция, то точка локального минимума в задаче (11.1) является оптимальным планом.*

Доказательство. Пусть x^0 – локально оптимальный план в задаче (11.1). Если он не является оптимальным, то найдется такой план x^1 , что $f(x^1) < f(x^0)$. Тогда для любого $\lambda \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} f(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1) &\leq \lambda f(x^0) + (1-\lambda)f(x^1) < \\ &< \lambda f(x^0) + (1-\lambda)f(x^0) = f(x^0). \end{aligned} \quad (11.2)$$

При достаточно малых λ точка $\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1$ попадает в сколь угодно малую окрестность плана x^0 , поэтому соотношение (11.2) противоречит локальной оптимальности этого плана. Таким образом, сделанное предположение оказалось неверным, т. е. x^0 – оптимальный план. ■

Локально оптимальный план x^0 называют **точкой строгого локального минимума**, если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $f(x^0) < f(x)$ для всех планов x , удовлетворяющих условию $0 < \|x - x^0\| < \varepsilon$.

Пусть $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x), h_1(x), \dots, h_p(x)$ – заданные на \mathbf{R}^n функции, среди которых есть нелинейные. Рассмотрим задачу (11.1), в которой

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, h_i(x) = 0, i = \overline{1, p}\}.$$

Такую задачу называют **задачей НЛП**. Ее можно компактно записать следующим образом:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \quad (11.3)$$

вводя в рассмотрение вектор-функции

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)), \quad h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x)).$$

Задачу (11.3) часто называют *задачей на условной минимум со смешанными ограничениями*, поскольку в ней присутствуют ограничения типа равенств и типа неравенств. При ее исследовании будут применяться рассуждения, которые не исключают возможности того, что в задаче имеются ограничения только одного типа. Поэтому задачу с ограничениями-равенствами (ограничениями-неравенствами) можно рассматривать как частный случай задачи (11.3). Кстати, задачу

$$f(x) \rightarrow \min, h(x) = 0, \quad (11.4)$$

называют *классической задачей на условный минимум*, поскольку это первая нетривиальная задача условной минимизации, для которой были получены необходимые условия оптимальности.

Примером задачи НЛП является математическая модель задачи минимизации издержек производства. Рассмотрим фирму, которая производит один вид продукции, используя n видов затрат (ресурсов). Пусть x_i – количество i -го ресурса, используемое фирмой, а $p_i > 0$ – цена этого вида затрат. В общем случае цена закупаемого ресурса зависит от его количества: $p_i = p_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$. Предполагается, что все ресурсы обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Технологическая связь между выпуском продукции y и затратами x_1, \dots, x_n описывается производственной функцией $y = h(x) = h(x_1, \dots, x_n)$. Требуется найти план производства $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \geq 0$, при котором заданный объем выпуска продукции $y_0 > 0$ достигается с наименьшими затратами.

Математическая модель поставленной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x_1)x_1 + \dots + p_n(x_n)x_n \rightarrow \min, \\ g_i(x) &= -x_i \leq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad h(x) = h(x) - y_0 = 0, \end{aligned} \quad (11.5)$$

и является частным случаем задачи НЛП (11.3).

§ 12. ЗАДАЧА БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

12.1. Необходимое условие минимума первого порядка

Задачу МП (11.1), в которой $X = \mathbf{R}^n$:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (12.1)$$

называют *задачей на безусловный минимум*. Рассмотрим ее в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$ вместе со своими частными производными по компонентам вектора x (в этом случае пишут $f(x) \in C^{(1)}$).

Теорема 12.1 (необходимое условие минимума первого порядка). *Каждый локально оптимальный план x^0 задачи (12.1) является решением уравнения*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0. \quad (12.2)$$

Доказательство. Пусть $\partial f(x^0)/\partial x \neq 0$. Из точки x^0 будем двигаться в таком направлении l , что

$$l' \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} < 0. \quad (12.3)$$

Скорость изменения целевой функции при движении по траектории $x(t) = x^0 + lt$, $t \geq 0$, в начальный момент $t = 0$ равна

$$\left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} \right| l. \quad (12.4)$$

В силу (12.3) она отрицательна, и, следовательно, для достаточно малых $t > 0$ будет выполняться неравенство $f(x(t)) < f(x^0)$, которое противоречит локальной оптимальности плана x^0 . ■

Приведенное доказательство конструктивно, поскольку указывает простое правило улучшения плана x^0 , если последний не удовлетворяет необходимому условию минимума первого порядка. Из (12.4) и неравенства Коши – Буняковского следует, что начальная скорость изменения целевой функции при движении вдоль направления l , $\|l\|=1$, будет минимальной, если $l = -\text{grad } f(x^0)/\|\text{grad } f(x^0)\|$. Таким образом, антиградиент $-\text{grad } f(x^0)$ есть направление наискорейшего убывания целевой функции. Итерационные методы поиска локально оптимальных планов, основанные на этом свойстве градиента, называются градиентными (см. разд. 18.1).

Решения векторного уравнения (12.2) называют *стационарными планами (точками)* задачи (12.1) (функции $f(x)$). Таким образом, локально оптимальные (а следовательно, и оптимальные) планы находят-

ся среди стационарных планов. Поэтому для построения решения задачи (12.1), имеющей оптимальные планы, достаточно найти все стационарные точки, а затем путем сравнения на них значений целевой функции отобрать наилучший план. Однако такая процедура может оказаться практически неосуществимой, если в задаче имеется бесконечно много стационарных планов.

Пример 12.1. Рассмотрим задачу

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + \exp(-x_3^2) \rightarrow \min, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Уравнения стационарности в данном случае имеют вид

$$2(x_1 - x_2) = 0, \quad 2(x_2 - x_1) = 0, \quad -2x_3 \exp(-x_3^2) = 0,$$

и все планы, лежащие на прямой $x_1 = x_2, x_3 = 0$, являются стационарными.

12.2. Условия оптимальности второго порядка

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка по всем аргументам ($f(x) \in C^{(2)}$). Сформулируем и докажем условие, позволяющее, вообще говоря, выявить среди стационарных планов те, которые не являются локально оптимальными.

Теорема 12.2 (необходимое условие минимума второго порядка). *На каждом локально оптимальном плане x^0 задачи (12.1) матрица вторых производных целевой функции неотрицательна:*

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \geq 0. \quad (12.5)$$

Доказательство. Предположим противное, тогда существует такой вектор l , что

$$l' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l < 0. \quad (12.6)$$

Из формулы (12.4) следует, что первая производная целевой функции вдоль траектории $x(t) = x^0 + lt, t \geq 0$, в начальный момент равна нулю. Вычислим вторую производную, учитывая условия стационарности:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 f(x(t))}{dt^2} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{dx'(t)}{dt} \frac{\partial^2 f(x(t))}{\partial x^2} \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} + \\ &+ \left. \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = l' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l. \end{aligned}$$

В силу (12.6) эта производная отрицательна, и, следовательно, для достаточно малых $t > 0$ выполняется неравенство $f(x(t)) < f(x^0)$, противоречащее локальной оптимальности плана x^0 . ■

При исследовании на неотрицательность матрицы вторых производных целевой функции обычно используют критерий Сильвестра (см. разд. 6.3).

Пример 12.2. Вернемся к задаче, рассмотренной в примере 12.1. Матрица вторых производных целевой функции на всех стационарных планах имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Критерий Сильвестра неотрицательности матриц для нее не выполняется. Таким образом, в рассмотренной задаче нет локально оптимальных планов, и, следовательно, эта задача не имеет решения.

Усиленное условие (12.5) является достаточным для локальной оптимальности стационарных планов.

Теорема 12.3 (достаточное условие строгого локального минимума). Если для стационарной точки x^* функции $f(x)$ выполняется условие

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} > 0, \quad (12.7)$$

то x^* – точка строгого локального минимума.

Доказательство. Пусть $x(t) = x^* + lt$, $\|l\| = 1$, $t \geq 0$. По формуле Тейлора с учетом вычислений, сделанных при доказательстве теорем 12.1, 12.2, имеем

$$f(x(t)) - f(x^*) = f(x(t)) - f(x(0)) = \frac{t^2}{2} l' \frac{\partial^2 f(x^* + l\theta(l))}{\partial x^2} l, \quad 0 < \theta(l) < t.$$

Обозначим $\alpha = \min l' \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} l$, $\|l\| = 1$. В силу теоремы Вейерштрасса это минимальное значение существует. Из условия (12.7) следует, что $\alpha > 0$. Поскольку вторые производные целевой функции непрерывны, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех направлений l

$$l' \frac{\partial^2 f(x^* + l\theta(l))}{\partial x^2} l > l' \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} l - \alpha \geq 0,$$

если $0 < t \leq \varepsilon$. Тогда для таких значений t выполняется неравенство $f(x(t)) - f(x^*) > 0$. Поскольку точки $x(t) = x^* + It$, $\|I\| = 1$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, заполняют ε -окрестность плана x^* , то теорема доказана.

Положительность, как и неотрицательность, матрицы может быть проверена с помощью критерия Сильвестра.

Теоремы 12.1, 12.2 получили свое название по порядку производных, которые в них используются. Нетрудно получить условия минимума третьего и более высоких порядков. Однако из-за сложности проверки таких условий идея привлечения производных высокого порядка не получила в общем случае своего развития. Исключение составляют условия для функции скалярного аргумента, которые доказываются в математическом анализе.

Теорема 12.4. *Если для функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, имеющей непрерывные производные до порядка k включительно, выполняются соотношения*

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0, \dots, \frac{d^{k-1}f(x^*)}{dx^{k-1}} = 0, \quad \frac{d^k f(x^*)}{dx^k} \neq 0,$$

то x^ – точка локального минимума тогда и только тогда, когда k – четное, и $\frac{d^k f(x^*)}{dx^k} > 0$. При выполнении этих условий минимум является строгим.*

§ 13. ЗАДАЧИ С ПРОСТЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим задачу (11.1), в которой $X \neq \mathbf{R}^n$. Теоремы 12.1–12.3, как видно из приведенных доказательств, будут справедливы и в этом случае, если x^0, x^* – внутренние точки множества X . Понятно также, что любая изолированная точка множества X является локально оптимальным планом задачи (11.1). Приведем условия оптимальности, с помощью которых можно исследовать граничные точки в случае простых ограничений.

Пусть в задаче (11.1) $n=1$, а $X = [a, b]$. Теорема 12.4 остается справедливой в этом случае, если $x^* \in]a, b[$. Наряду с ней в курсе математического анализа доказывается следующее утверждение.

Теорема 13.1. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a (b) правостороннюю (левостороннюю) производную. Тогда неравенство*

$\frac{df(a)}{dx} \geq 0 \left(\frac{df(b)}{dx} \leq 0 \right)$ необходимо, а неравенство $\frac{df(a)}{dx} > 0 \left(\frac{df(b)}{dx} < 0 \right)$ достаточно для локальной оптимальности плана a (b).

Рассмотрим задачу (11.1), в которой $X = \{x \in \mathbf{R}^n : a \leq x \leq b\}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, а функция $f(x)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по компонентам вектора x на некотором открытом множестве, содержащем X .

Теорема 13.2. Пусть $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ – локально оптимальный план задачи

$$f(x) \rightarrow \min, x \in \mathbf{R}^n, a \leq x \leq b,$$

тогда для всех $i = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} &\geq 0, \text{ если } x_i^0 = a_i, \quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \leq 0, \text{ если } x_i^0 = b_i, \\ \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} &= 0, \text{ если } a_i < x_i^0 < b_i. \end{aligned}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированных утверждений, достаточно воспользоваться необходимыми условиями локального минимума функций $f_i(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$, $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = \overline{1, n}$, скалярного аргумента.

Пусть в задаче (11.1) X представляет собой множество, ограниченное гиперсферой радиуса r : $X = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}$, а функция $f(x)$ определена на некотором открытом множестве, содержащем X , и принадлежит классу $C^{(1)}$.

Теорема 13.3. Если x^0 – локально оптимальный план в задаче

$$f(x) \rightarrow \min, \|x\|^2 \leq r^2, \quad (13.1)$$

то

$$r^2 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = x^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} x^0. \quad (13.2)$$

Доказательство. Если x^0 – внутренняя точка множества X , то $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = 0$ и условие (13.1), очевидно, выполняется. Поэтому будем считать, $\|x^0\|^2 = r^2$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоре-

мы 12.1, убеждаемся в том, что для точек $x(t) = x^0 + lt$, $t > 0$, при достаточно малых t имеет место $\|x(t)\|^2 < r^2$, если только $x^0 l < 0$, а для направлений l , удовлетворяющих этому условию, $l' \partial f(x^0) / \partial x \geq 0$. Тогда по теореме Фаркаша (см. замечание 5.1) найдется такое неотрицательное число λ , что

$$-\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \lambda x^0. \quad (13.3)$$

Умножая это равенство скалярно на x^0 , получаем $\lambda = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} x^0$.

Отсюда и из (13.3) следует условие (13.2). ■

Пример 13.1. Рассмотрим задачу (13.1) в предположении, что функция $f(x)$ является линейной:

$$c'x \rightarrow \min, \|x\|^2 \leq r^2.$$

Условие (13.2) в данном случае принимает вид $r^2 c = x^0 c' x^0$. Умножая это равенство скалярно на c , получаем $r^2 \|c\|^2 = (c' x^0)^2$. Разумеется, $c \neq 0$, тогда

$\|x^0\|^2 = r^2$ и полученное равенство может быть записано в виде $\|c\|^2 \|x^0\|^2 = (c' x^0)^2$. Отсюда, в силу неравенства Коши – Буняковского, следует $x^0 = \pm rc / \|c\|$. Решением рассмотренной задачи (согласно теореме Вейерштрасса оно существует) будет план $x^0 = -rc / \|c\|$, а $rc / \|c\|$ – точка максимума целевой функции при условии $\|x\|^2 \leq r^2$. В случае, когда $n = 2$, этот результат может быть получен и графическим методом, который используется при решении задач ЛП (см. рис. 13.1).

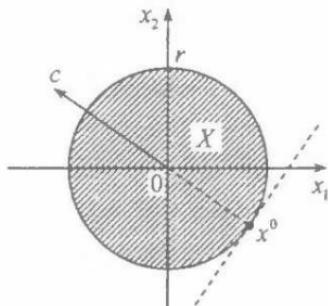


Рис. 13.1

§ 14. ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

14.1. Обобщенное правило множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу (11.3) в предположении, что все функции, ее формирующие, принадлежат классу $C^{(1)}$.

Определение 14.1. *Ограничение* $g_i(x) \leq 0$ называют *активным* (*пассивным*) на плане x^* задачи (11.3), если $g_i(x^*) = 0$ ($g_i(x^*) < 0$).

Для каждого плана x введем в рассмотрение множество индексов активных на этом плане ограничений-неравенств $I_a(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$. Для обозначения множества индексов пассивных ограничений будем использовать символ $I_n(x)$.

Теорема 14.1. Пусть x^0 – локально оптимальный план задачи (11.3) и векторы

$$\frac{\partial h_1(x^0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_p(x^0)}{\partial x} \quad (14.1)$$

линейно независимы, тогда не существует вектора $l \in \mathbf{R}^n$, для которого выполняются соотношения

$$\frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l < 0, \quad (14.2)$$

$$\frac{\partial g'_i(x^0)}{\partial x} l < 0, \quad i \in I_a(x^0), \quad (14.3)$$

$$\frac{\partial h'_i(x^0)}{\partial x} l = 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (14.4)$$

Доказательство. Покажем предварительно, что в случае линейной независимости векторов (14.1) существует решение l_1, \dots, l_p системы уравнений

$$\frac{\partial h'_i(x^0)}{\partial x} l_j = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, p}, \quad (14.5)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Векторы (14.1) при необходимости (если $p < n$) дополним до базиса \mathbf{R}^n векторами a_{p+1}, \dots, a_n (произвольным образом) и составим $(n \times n)$ -матрицу

$$H = \left(\frac{\partial h_1(x^0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_p(x^0)}{\partial x}, a_{p+1}, \dots, a_n \right).$$

Поскольку матрица H невырожденная, то найдется такая $(n \times n)$ -матрица L ($L = H^{-1}$), что $LH = E_n$. Взяв в качестве векторов l_1, \dots, l_p первые p строк матрицы L , будем иметь (14.5).

Предположим, что теорема неверна, т. е. найдется вектор l , для которого выполнены соотношения (14.2) – (14.4). Рассмотрим систему уравнений

$$h_i^*(\varepsilon, \alpha) = h_i(x^0 + \varepsilon l + \sum_{j=1}^p \alpha_j l_j) = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad (14.6)$$

для переменных $\varepsilon, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. При сделанном предположении функции $h_i^*(x), i = \overline{1, p}$, имеют непрерывные частные производные по всем аргументам. Кроме того, $h_i^*(0, 0) = h_i(x^0) = 0, i = \overline{1, p}$. Матрица

$$\left(\frac{\partial h_i^*(0, 0)}{\partial \alpha_j}, i, j = \overline{1, p} \right) = \left(\frac{\partial h_i'(x^0)}{\partial x} I_j, i, j = \overline{1, p} \right)$$

в силу (14.5) является единичной, и ее определитель, т. е. якобиан системы (14.6), отличен от нуля. Тогда по теореме о неявной функции уравнения (14.6) однозначно определяют в некоторой окрестности нуля $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\alpha(\varepsilon) = (\alpha_1(\varepsilon), \dots, \alpha_p(\varepsilon))$, такую, что $\alpha(0) = 0$ и

$$h_i^*(\varepsilon, \alpha(\varepsilon)) = h_i(x^0 + \varepsilon l + \sum_{j=1}^p \alpha_j(\varepsilon) l_j) = 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0, i = \overline{1, p}. \quad (14.7)$$

Заметим, что в силу (14.4)

$$\frac{\partial h_i^*(0, 0)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial h_i'(x^0)}{\partial x} l = 0, i = \overline{1, p}.$$

Тогда, вычисляя по обычному правилу производные функций $\alpha_j(\varepsilon), j = \overline{1, p}$, в нуле, будем иметь

$$\frac{d\alpha(0)}{d\varepsilon} = 0. \quad (14.8)$$

Рассмотрим семейство точек

$$x(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon l + \sum_{j=1}^p \alpha_j(\varepsilon) l_j, |\varepsilon| < \varepsilon_0. \quad (14.9)$$

Согласно (14.7) эти точки удовлетворяют ограничениям типа равенств задачи (11.3). Будут для них, очевидно, выполняться и пассивные на плане x^0 ограничения типа неравенств, если только ε достаточно мало по модулю. Пусть, наконец, $i \in I_a(x^0)$. По формуле Тейлора с учетом того, что $\alpha(0) = 0$, имеем

$$g_i(x(\varepsilon)) = g_i(x(0)) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} g_i(x(0)) + o(\varepsilon) =$$

$$= g_i(x^0) + \varepsilon \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} \frac{dx(0)}{d\varepsilon} + o(\varepsilon),$$

и в силу (14.8), (14.9)

$$g_i(x(\varepsilon)) = g_i(x^0) + \varepsilon \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l + o(\varepsilon). \quad (14.10)$$

Поскольку $g_i(x^0) = 0$, то из (14.3), (14.10) следует $g_i(x(\varepsilon)) < 0$, если число ε положительно и достаточно мало. Итак, точки (14.9) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяют всем ограничениям задачи (11.3), т. е. являются планами этой задачи.

По аналогии с (14.10) имеем

$$f(x(\varepsilon)) = f(x^0) + \varepsilon \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l + o(\varepsilon),$$

что вместе с (14.2) влечет за собой выполнение неравенства $f(x(\varepsilon)) < f(x^0)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Это неравенство, однако, противоречит локальной оптимальности плана x^0 . Таким образом, предположение о существовании вектора l , удовлетворяющего соотношениям (14.2) – (14.4), оказалось неверным. ■

По элементам задачи (11.3) составим функцию $n+m+p+1$ переменных

$$\begin{aligned} F(x, \bar{\lambda}, \mu) &= \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) = \\ &= \lambda_0 f(x) + \lambda' g(x) + \mu' h(x), \end{aligned} \quad (14.11)$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$. Эту функцию назовем *обобщенной функцией Лагранжа*, скаляры $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p$ – *множителями Лагранжа*, а вектор $(\bar{\lambda}, \mu)$, из них составленный, – *обобщенным вектором Лагранжа*.

Теорема 14.2 (обобщенное правило множителей Лагранжа). Для каждого локально оптимального плана x^0 задачи (11.3) существует такой ненулевой обобщенный вектор Лагранжа $(\bar{\lambda}^0, \mu^0)$, что выполняются условия

$$1) \text{ стационарности } \frac{\partial F(x^0, \bar{\lambda}^0, \mu^0)}{\partial x} = 0;$$

- 2) неотрицательности $\bar{\lambda}^0 \geq 0$;
 3) дополняющей нежесткости $\lambda^0 g(x^0) = 0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что поскольку вектор λ^0 неотрицателен, а вектор $g(x^0)$ неположителен, то условие дополняющей нежесткости выполняется в том и только в том случае, когда $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Эти равенства, в свою очередь, означают, что пассивным на плане x^0 ограничениям типа неравенств соответствуют нулевые множители Лагранжа.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Если векторы (14.1) линейно зависимы, то утверждение теоремы является тривиальным. Действительно, в этом случае найдется такой вектор $\mu^0 = (\mu_1^0, \dots, \mu_p^0) \neq 0$, что

$$\sum_{i=1}^p \mu_i^0 \frac{\partial h_i(x^0)}{\partial x} = \frac{\partial h'(x^0)}{\partial x} \mu^0 = 0. \quad (14.12)$$

Это равенство можно записать в виде условия стационарности, если положить $\bar{\lambda}^0 = 0$. Условия неотрицательности и дополняющей нежесткости будут также при этом выполняться.

Рассмотрим теперь содержательный случай, когда векторы (14.1) линейно независимы. Согласно теореме 14.1 система (14.2) – (14.4) в этом случае является несовместной. Тогда в силу леммы 6.1 найдутся не равные одновременно нулю числа $\lambda_0^0, \lambda_i^0, i \in I_a(x^0), \mu_i^0, i = \overline{1, p}$, такие, что

$$\lambda_0^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^p \mu_i^0 \frac{\partial h_i(x^0)}{\partial x} = 0, \quad (14.13)$$

причем $\lambda_0^0 \geq 0, \lambda_i^0 \geq 0, i \in I_a(x^0)$. Если положить $\lambda_i^0 = 0$ для $i \in I_n(x^0)$, то равенство (14.13) можно записать в виде условия стационарности, при этом условия неотрицательности и дополняющей нежесткости будут, очевидно, выполнены. ■

Понятно, что в задаче с ограничениями типа неравенств

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad (14.14)$$

обобщенная функция Лагранжа имеет вид $F(x, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda' g(x)$, а в обобщенном правиле множителей Лагранжа речь идет о существовании вектора $\bar{\lambda}^0$. В классической задаче на условный минимум (11.4)

это правило не включает в себя условия неотрицательности вектора λ^0 и дополняющей нежесткости. В нем говорится о существовании вектора (λ_0^0, μ^0) , $\lambda_0^0 \geq 0$, при котором выполняется условие стационарности для функции $F(x, \lambda_0, \mu) = \lambda_0 f(x) + \mu' h(x)$.

14.2. Классическое правило множителей Лагранжа

При исследовании задачи (11.3) со временем Лагранжа используется функция

$$F(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' g(x) + \mu' h(x), \quad (14.15)$$

которая получается из (14.11) при $\lambda_0 = 1$. Будем называть ее *классической функцией Лагранжа*, а вектор (λ, μ) – *классическим вектором Лагранжа*. Выясним, когда при формулировке условий оптимальности можно использовать функцию (14.15).

Определение 14.2. План x^ задачи (11.3) назовем регулярным, если векторы*

$$\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x}, i \in I_a(x^*), \quad \frac{\partial h_i(x^*)}{\partial x}, i = \overline{1, p}, \quad (14.16)$$

линейно независимы.

Понятно, что если $p > n$, то в задаче (11.3) нет регулярных планов.

Теорема 14.3 (классическое правило множителей Лагранжа). *Если локально оптимальный план x^0 задачи (11.3) является регулярным, то найдется единственный классический вектор Лагранжа (λ^0, μ^0) , для которого выполняются условия*

1) стационарности $\frac{\partial F(x^0, \lambda^0, \mu^0)}{\partial x} = 0$;

2) неотрицательности $\lambda^0 \geq 0$;

3) дополняющей нежесткости $\lambda^0 g(x^0) = 0$.

Доказательство. Как видно из формулировки теоремы 14.2, обобщенный вектор Лагранжа $(\bar{\lambda}^0, \mu^0)$, соответствующий локально оптимальному плану x^0 , определен с точностью до положительного множителя. Поэтому без ограничения общности можно считать, что в обобщенном правиле множителей Лагранжа имеет место один из двух случаев: а) $\lambda_0^0 = 1$, б) $\lambda_0^0 = 0$. В случае а приходим к классическому

правилу множителей Лагранжа, а второй случай невозможен, если x^0 – регулярный план. Действительно, условие стационарности с учетом условия дополняющей нежесткости может быть записано в виде (14.13), что в случае б противоречит регулярности плана x^0 , поскольку, по крайней мере, одно из чисел $\lambda_i^0, i \in I_a(x^0), \mu_i^0, i = \overline{1, p}$, отлично от нуля.

Для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что в классическом правиле вектор Лагранжа определен однозначно. Предположим, что это не так, т. е. существует еще один вектор $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p)$, для которого выполнены условия теоремы 14.3. Тогда наряду с условием (14.13), где $\lambda_0^0 = 1$, будет иметь место равенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial h_i(x^0)}{\partial x} = 0.$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получаем

$$\sum_{i \in I_a(x^0)} (\lambda_i^0 - \lambda_i) \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^p (\mu_i^0 - \mu_i) \frac{\partial h_i(x^0)}{\partial x} = 0,$$

что противоречит регулярности плана x^0 , поскольку $(\lambda, \mu) \neq (\lambda^0, \mu^0)$.

Для локально оптимальных планов, не являющихся регулярными, классическое правило множителей Лагранжа, вообще говоря, неверно.

Пример 14.1. Рассмотрим задачу

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow \min, \quad g_1(x_1, x_2) = -x_1^3 \leq 0, \quad h_1(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 = 0,$$

планы которой лежат на полукубической параболе (см. рис. 14.1).

План $x^0 = (0, 0)$, очевидно, является ее решением, причем ограничение типа неравенства на нем активно. Поскольку векторы

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h_1(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, то оптимальный план не является регулярным. Составим классическую функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda_1, \mu_1) = x_1 - \lambda_1 x_1^3 + \mu_1 (x_1^3 - x_2^2).$$

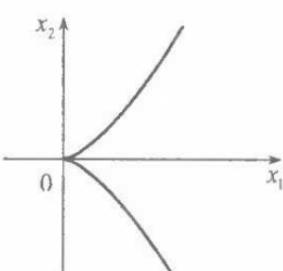


Рис. 14.1

Условие стационарности приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 - 3(\lambda_1 - \mu_1)x_1^2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2\mu_1 x_2 = 0.$$

Точка $x^0 = (0, 0)$ не удовлетворяет этим уравнениям ни при каких множителях λ_1, μ_1 . Заметим, что обобщенное правило множителей Лагранжа выполняется для оптимального плана при $\lambda_0 = 0, \lambda_1 \geq 0$ и любом μ_1 .

Множество обобщенных векторов Лагранжа, соответствующих в силу теоремы 14.2 локально оптимальному плану, представляет собой конус в пространстве \mathbb{R}^{m+p+1} , поскольку наряду с $(\bar{\lambda}, \mu)$ содержит луч $(k\bar{\lambda}, k\mu), k > 0$. Если локально оптимальный план является регулярным, этот конус состоит из одного луча. В противном случае, как свидетельствует только что рассмотренный пример, он может представлять собой более широкое множество.

В задаче (11.3), в отличие от задачи ВП, регулярный оптимальный план x^0 не является, вообще говоря, точкой глобального минимума функции $F(x, \lambda^0, \mu^0)$, где (λ^0, μ^0) – классический вектор Лагранжа, соответствующий этому плану.

Пример 14.2. В задаче

$$f(x_1, x_2) = -x_1^3 \rightarrow \min, \quad g_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 1 \leq 0, \quad h_1(x_1, x_2) = x_2 = 0,$$

оптимальный план $x^0 = (1, 0)$ является регулярным. В силу условия стационарности он вместе с соответствующими ему множителями Лагранжа удовлетворяет системе уравнений $-3x_1^2 + \lambda_1 = 0, -\lambda_1 + \mu_1 = 0$. Отсюда видно, что оптимальному плану соответствуют множители $\lambda_1^0 = 3, \mu_1^0 = 3$. План $(1, 0)$, как легко убедиться, не является точкой минимума функции $F(x, \lambda_1^0, \mu_1^0) = -x_1^3 + 3x_1 - 3$ ни на \mathbb{R}^2 , ни на множестве планов рассмотренной задачи. Это точка локально-го максимума.

14.3. Условно стационарные и нормальные планы

Определение 14.3. План x^* задачи (11.3) назовем *условно стационарным*, если для него найдется такой классический вектор Лагранжа (λ^*, μ^*) , что выполняются соотношения

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x} = 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad \lambda^* g(x^*) = 0. \quad (14.17)$$

Понятно, что регулярный локально оптимальный план является условно стационарным. Однако множество условно стационарных планов может содержать и точки локального минимума, не являющиеся регулярными планами.

Определение 14.4. Локально оптимальный план задачи (11.3) назовем нормальным, если у всех обобщенных векторов Лагранжа $(\lambda_0, \lambda, \mu)$, соответствующих этому плану, $\lambda_0 \neq 0$.

Регулярный локально-оптимальный план является нормальным, поскольку при доказательстве теоремы 14.3 было установлено, что такому плану не может соответствовать обобщенный вектор Лагранжа с $\lambda_0 = 0$. Выясним, в каком случае справедливо обратное утверждение. Если план x^0 является нормальным, то векторы (14.1) линейно независимы. Действительно, в противном случае найдется ненулевой вектор $\mu^0 = (\mu_1^0, \dots, \mu_p^0)$, для которого имеет место равенство (14.12). Однако это противоречит нормальности плана x^0 , поскольку для него будет выполняться обобщенное правило множителей Лагранжа с вектором $(\bar{\lambda}^0 = 0, \mu^0)$. Из вышесказанного следует, что в классической задаче на условный минимум (11.4) нормальный план является регулярным. При наличии в задаче (11.3) ограничений-неравенств, и в частности в задаче (14.14), подобное утверждение, вообще говоря, несправедливо.

Пример 14.3. Решением задачи

$$f(x_1, x_2) = -x_1 \rightarrow \min, \quad g_1(x_1, x_2) = x_1 \leq 0, \quad g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 \leq 0,$$

очевидно, является план $x^0 = (0, 0)$. Условия стационарности для обобщенной функции Лагранжа в данном случае приводят к уравнениям $-\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 x_2 = 0$. Из первого уравнения и условия неотрицательности следует, что $\lambda_0 = 0$ только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Поскольку обобщенный вектор Лагранжа не может быть нулевым, оптимальный план является нормальным. Оба ограничения на нем активны, при этом векторы

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_2(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы. Таким образом, нормальный оптимальный план не является регулярным.

Теорема 14.4. В задаче (14.14) каждый локально оптимальный план является нормальным, если $g_i(x), x \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1, m}$, — выпуклые функции и выполняется условие Слейтера, т. е. существует план, на котором все ограничения задачи пассивны.

Доказательство. Если локально оптимальный план x^0 не является нормальным, то $I_a(x^0) \neq \emptyset$ и найдутся не равные одновременно нулю неотрицательные числа $\lambda_i^0, i \in I_a(x^0)$, такие, что

$$\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что x^0 – точка глобального минимума выпуклой функции $\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 g_i(x), x \in \mathbf{R}^n$ (см. замечание 6.4). Однако это противоречит условию Слейтера. ■

Заметим, что условия этой теоремы выполнены в примере 14.3.

Вернемся к задаче (11.3). Нормальный план x^* , очевидно, является условно стационарным, при этом гарантировать единственность вектора (λ^*, μ^*) , удовлетворяющего соотношениям (14.17), можно только в случае, когда x^* – регулярный план (см. пример 14.3).

Замечание 14.1. Множество планов задачи (11.3) не может быть конечным, если $p < n$ и существует хотя бы один нормальный план. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, что применялись при доказательстве теоремы 14.1. Если x^0 – нормальный план, то существует вектор l , удовлетворяющий соотношениям (14.3), (14.4). Действительно, в противном случае в силу леммы 6.1 найдутся не равные одновременно нулю числа $\lambda_i^0 \geq 0, i \in I_a(x^0), \mu_i^0, i = \overline{1, p}$, такие, что имеет место равенство (14.13), в котором $\lambda_0^0 = 0$. Отсюда следует, что плану x^0 соответствует обобщенный вектор Лагранжа с множителями $\lambda_0^0 = 0, \lambda_i^0, i \in I_a(x^0), \lambda_i^0 = 0, i \in I_n(x^0), \mu_i^0, i = \overline{1, p}$. Полученное противоречие доказывает совместность системы (14.3), (14.4). Если $p < n$, то среди векторов l , удовлетворяющих этой системе, найдется ненулевой. В ходе доказательства теоремы 14.1 было установлено, что точки семейства (14.9) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ являются планами задачи (11.3), если только для вектора l выполняются соотношения (14.3), (14.4). Планы, соответствующие разным значениям ε , при $l \neq 0$ будут отличаться друг от друга. Таким образом, множество планов является бесконечным.

Определение 14.4. Задачу (11.3) назовем **нормальной**, если она имеет решение и среди ее оптимальных планов есть нормальный.

Поскольку градиенты функций $h_i(x)$, $i=1, p$, на нормальных планах линейно независимы, то в нормальной задаче $p \leq n$. В случае $p < n$ множество планов нормальной задачи является бесконечным (см. замечание 14.1). Решение нормальной задачи находится среди условно стационарных планов. Заметим, что прикладные задачи НЛП, как правило, являются нормальными.

В общем случае не все точки локального минимума представляют собой нормальные планы (см. пример 14.1) и не все условно стационарные планы являются локально оптимальными.

Пример 14.4. Требуется из проволоки заданной длины L сделать равносторонний треугольник и квадрат, суммарная площадь которых максимальна.

Пусть x_1, x_2 – длины частей проволоки, выделенных на треугольник и квадрат соответственно. Тогда общая площадь фигур будет равна $\sqrt{3}x_1^2/36 + x_2^2/16$, и соответственно с этим математическая модель поставленной задачи имеет вид

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{3}x_1^2/36 - x_2^2/16 \rightarrow \min, \quad g_1(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0, \\ g_2(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0, \quad h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - L = 0.$$

Условно стационарные планы этой задачи и соответствующие им множители Лагранжа удовлетворяют системе уравнений

$$-\sqrt{3}x_1/18 - \lambda_1 + \mu_1 = 0, \quad -x_2/8 - \lambda_2 + \mu_1 = 0, \quad x_1 + x_2 - L = 0, \quad \lambda_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 x_2 = 0,$$

в которых $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$. Эта система имеет три решения:

$$x^{(1)} = \left(9L/(9+4\sqrt{3}), 4\sqrt{3}L/(9+4\sqrt{3}) \right), \quad (\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) = \left(0, 0, \sqrt{3}L/(18+8\sqrt{3}) \right); \\ x^{(2)} = (L, 0), \quad (\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}) = \left(0, \sqrt{3}L/18, \sqrt{3}L/18 \right); \\ x^{(3)} = (0, L), \quad (\lambda^{(3)}, \mu^{(3)}) = \left(L/8, 0, L/8 \right).$$

Условно стационарный план $x^{(1)}$, как легко убедиться, не является локально оптимальным.

14.4. Условия минимума второго порядка

В этом разделе будем считать, что все функции, формирующие задачу (11.3), дважды непрерывно дифференцируемы. Пусть x^* – условно стационарный план этой задачи, (λ^*, μ^*) – соответствующий ему классический вектор Лагранжа. Введем в рассмотрение множества индексов

$$I_a^+(x^*, \lambda^*) = \{i \in I_a(x^*) : \lambda_i^* > 0\}, \quad I_a^0(x^*, \lambda^*) = \{i \in I_a(x^*) : \lambda_i^* = 0\}.$$

Если план x^* является регулярным, то вектор (λ^*, μ^*) определяется соотношениями (14.17) однозначно и введенные множества зависят только от плана: $I_a^+(x^*, \lambda^*) = I_a^+(x^*)$, $I_a^0(x^*, \lambda^*) = I_a^0(x^*)$. В этом случае ограничения-неравенства с индексами из первого (второго) множества называют **жесткими (мягкими)**.

Теорема 14.5 (необходимое условие минимума второго порядка). Для локальной оптимальности регулярного плана x^0 задачи (11.3) необходимо, чтобы для любого n -вектора l , удовлетворяющего соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l &\leq 0, i \in I_a^0(x^0), \quad \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l = 0, i \in I_a^+(x^0), \\ \frac{\partial h_i'(x^0)}{\partial x} l &= 0, i = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (14.18)$$

выполнялось неравенство

$$l' \frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0, \mu^0)}{\partial x^2} l \geq 0, \quad (14.19)$$

где (λ^0, μ^0) – вектор Лагранжа, соответствующий x^0 .

Доказательство. Пусть l – n -вектор, удовлетворяющий соотношениям (14.18). Введем в рассмотрение множество индексов

$$I_0 = \left\{ i \in I_a(x^0) : \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l = 0 \right\}.$$

Поскольку план x^0 регулярный, то векторы

$$\frac{\partial h_i(x^0)}{\partial x}, i = \overline{1, p}, \quad \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x}, i \in I_0,$$

линейно независимы. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 14.1, убеждаемся в том, что существуют n -векторы $l_j, j = \overline{1, p}$, $r_j, j \in I_0$, и определенные в некоторой окрестности нуля $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ вектор-функции $\alpha(\varepsilon) = (\alpha_j(\varepsilon), j = \overline{1, p})$, $\beta(\varepsilon) = (\beta_j(\varepsilon), j \in I_0)$, из класса $C^{(2)}$, для которых выполняются соотношения

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = 0, \quad \frac{d\alpha(0)}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{d\beta(0)}{d\varepsilon} = 0, \quad (14.20)$$

$$h_i(x(\varepsilon)) = 0, i = \overline{1, p}, \quad g_i(x(\varepsilon)) = 0, i \in I_0, \quad (14.21)$$

где $x(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon l + \sum_{j=1}^p \alpha_j(\varepsilon)l_j + \sum_{j \in I_0} \beta_j(\varepsilon)r_j$. Если для $i \in I_a^0(x^0)$ имеет место неравенство $\frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x}l < 0$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$g_i(x(\varepsilon)) = g_i(x^0) + \varepsilon \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x}l + o(\varepsilon) < 0.$$

Для точек $x(\varepsilon)$ с достаточно малым (по модулю) ε будут, очевидно, выполняться и пассивные на плане x^0 ограничения-неравенства. Таким образом, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ эти точки являются планами задачи (11.3).

Если $i \notin I_0$, то $\lambda_i^0 = 0$. Вместе с (14.21) это позволяет записать приращение целевой функции в виде

$$f(x(\varepsilon)) - f(x^0) = F(x(\varepsilon), \lambda^0, \mu^0) - F(x^0, \lambda^0, \mu^0). \quad (14.22)$$

Используя формулу Тейлора, равенства (14.20) и условие стационарности, получаем

$$f(x(\varepsilon)) - f(x^0) = \frac{\varepsilon^2}{2} l' \frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0, \mu^0)}{\partial x^2} l + o(\varepsilon^2). \quad (14.23)$$

Поскольку x^0 – локально оптимальный план, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ приращение целевой функции должно быть неотрицательным, что может иметь место только при выполнении неравенства (14.19). ■

Теорема 14.6 (достаточное условие строгого локального минимума). Пусть \dot{x}^* – условно стационарный план задачи (11.3), (λ^*, μ^*) – соответствующий ему вектор Лагранжа. Если для каждого ненулевого вектора l , удовлетворяющего соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x}l \leq 0, & i \in I_a^0(x^*, \lambda^*), \quad \frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x}l = 0, & i \in I_a^+(x^*, \lambda^*), \\ \frac{\partial h_i'(x^*)}{\partial x}l = 0, & i = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (14.24)$$

выполняется неравенство

$$l' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x^2} l > 0, \quad (14.25)$$

то x^* – точка строгого локального минимума.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены, но x^* не является точкой строгого локального минимума. Тогда находится такая сходящаяся к x^* последовательность планов $\{x^k\}$, что $x^k \neq x^*$, $f(x^k) < f(x^*)$, $k = 1, 2, \dots$. Члены этой последовательности представимы в виде $x^k = x^* + \varepsilon_k l_k$, где $\varepsilon_k = \|x^k - x^*\|$, $l_k = (x^k - x^*)/\varepsilon_k$. Понятно, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а $\|l_k\| = 1$, $k = 1, 2, \dots$. Из последовательности $\{l_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность сходится, и обозначим ее предел через l_* ($\|l_*\| = 1$). Для планов x^k выполняются соотношения

$$f(x^k) - f(x^*) < 0, \quad g_i(x^k) - g_i(x^*) \leq 0, \quad i \in I_a(x^*), \quad h(x^k) - h(x^*) = 0.$$

Используя формулу Тейлора, эти соотношения можно записать в виде

$$\varepsilon_k \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} l_k + \frac{\varepsilon_k^2}{2} l_k' \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} l_k + o(\varepsilon_k^2) < 0, \quad (14.26)$$

$$\varepsilon_k \frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x} l_k + \frac{\varepsilon_k^2}{2} l_k' \frac{\partial^2 g_i(x^*)}{\partial x^2} l_k + o(\varepsilon_k^2) \leq 0, \quad i \in I_a(x^*), \quad (14.27)$$

$$\varepsilon_k \frac{\partial h_i'(x^*)}{\partial x} l_k + \frac{\varepsilon_k^2}{2} l_k' \frac{\partial^2 h_i(x^*)}{\partial x^2} l_k + o(\varepsilon_k^2) = 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (14.28)$$

Разделив обе части каждого из них на ε_k и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l_* \leq 0, \quad \frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x} l_* \leq 0, \quad i \in I_a(x^*), \quad \frac{\partial h_i'(x^*)}{\partial x} l_* = 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (14.29)$$

Если допустить, что при некотором $i \in I_a^+(x^*, \lambda^*)$ выполняется неравенство $\frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x} l_* < 0$, то, используя (14.29) и условие стационарности, придем к противоречию

$$0 \leq -\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l_* = \sum_{i \in I_a^+(x^*, \lambda^*)} \lambda_i^* \frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x} l_* < 0.$$

Таким образом, $\frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x} l_* = 0$, $i \in I_a^+(x^*)$. Вместе с (14.29) это означает, что вектор l_* удовлетворяет соотношениям (14.24). Умножим i -е неравенство в (14.27) на λ_i^* , i -е равенство в (14.28) на μ_i^* и сложим все полученные соотношения с (14.26). Сумма линейных по ε_k членов в силу условия стационарности равна нулю. Поэтому, разделив полученное неравенство на $\varepsilon_k^2/2$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, будем иметь

$$l_*' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x^2} l_* \leq 0.$$

Таким образом, для ненулевого вектора l_* , удовлетворяющего соотношениям (14.24), условие (14.25) не выполняется. Получено противоречие. ■

14.5. Линейные ограничения

Рассмотрим задачу (11.3), в которой ограничения задаются линейными функциями:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \quad g_i(x) = a_i' x + b_i \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ h_i(x) &= c_i' x + d_i = 0, \quad i = \overline{1, p}. \end{aligned} \tag{14.30}$$

Покажем, что в этом случае классическое правило множителей Лагранжа и необходимое условие минимума второго порядка справедливы и без предположения о регулярности локально оптимального плана.

Теорема 14.7. *Локально оптимальный план x^0 задачи (14.30) является условно стационарным. Если $f(x) \in C^{(2)}$, то для любого вектора l , удовлетворяющего соотношениям*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l &\leq 0, \quad i \in I_a^0(x^0, \lambda^0), \quad \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l = 0, \quad i \in I_a^+(x^0, \lambda^0), \\ \frac{\partial h_i'(x^0)}{\partial x} l &= 0, \quad i = \overline{1, p}, \end{aligned} \tag{14.31}$$

выполняется неравенство (14.19), где (λ^0, μ^0) – вектор Лагранжа, соответствующий x^0 .

Доказательство. Пусть l – n -вектор, удовлетворяющий соотношениям

$$a'_i l \leq 0, i \in I_a(x^0), \quad c'_i l = 0, i = \overline{1, p}.$$

Точки семейства $x(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon l$, как легко убедиться, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будут планами задачи (14.30), что влечет за собой неравенство

$$\frac{df(x(\varepsilon))}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l \geq 0,$$

поскольку x^0 – локально оптимальный план. Тогда в силу теоремы о неравенствах-следствиях (см. замечание 5.2) найдутся такие числа $\lambda_i^0 \geq 0, i \in I_a(x^0), \mu_i^0, i = \overline{1, p}$, что

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 a_i + \sum_{i=1}^p \mu_i^0 c_i.$$

Если положить $\lambda_i^0 = 0, i \in I_n(x^0)$, то это равенство можно записать в виде условия стационарности. Будут выполнены также условия неотрицательности и дополняющей нежесткости. Таким образом, x^0 – условно стационарный план.

Предположим теперь, что вектор l удовлетворяет соотношениям (14.31). Точки семейства $x(\varepsilon)$ с достаточно малыми $\varepsilon > 0$ по-прежнему будут планами задачи (14.30). Заметим, что в данном случае $g_i(x(\varepsilon)) = 0, i \in I_a^+(x^0, \lambda^0)$, и так как $\lambda_i^0 = 0, i \in I_a^0(x^0)$, то справедлива формула (14.22), из которой в силу условия стационарности следует асимптотическое равенство (14.23). При достаточно малых $\varepsilon > 0$ правая часть этого равенства – неотрицательная величина. Разделив ее на $\varepsilon^2/2$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем неравенство (14.19). ■

Пример 14.5. Вернемся к задаче, рассмотренной в примере 14.4. Множество планов этой задачи является компактным, а целевая функция непрерывна. Поэтому задача имеет решение. В силу линейности ограничений точка глобального минимума находится среди условно стационарных планов. На каждом из них

$$l \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} l = -\sqrt{3} l_1^2 / 18 - l_2^2 / 8.$$

Это отрицательно определенная квадратичная форма. Поэтому достаточное условие локальной оптимальности ни на одном из планов выполниться не может, а необходимому условию минимума второго порядка будут удовлетворять только те

планы, для которых из соотношений (14.31) следует $l_1 = l_2 = 0$. Выпишем эти соотношения для каждого из трех условно стационарных планов:

$$\frac{\partial h_1'(x^{(1)})}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0; \quad \frac{\partial g_2'(x^{(2)})}{\partial x} l = -l_2 = 0, \quad \frac{\partial h_1'(x^{(2)})}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0;$$

$$\frac{\partial g_1'(x^{(3)})}{\partial x} l = -l_1 = 0, \quad \frac{\partial h_1'(x^{(3)})}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0.$$

Отсюда видно, что необходимому условию минимума второго порядка первый план не удовлетворяет, а второй и третий планы могут быть оптимальными. Поскольку $f(x^{(2)}) = -\sqrt{3}L^2/36$, $f(x^{(3)}) = -L^2/16$, то решением задачи является план $x^{(3)} = (0, L)$. Таким образом, максимальная суммарная площадь $L^2/16$ получается, когда из всей проволоки сделан лишь один квадрат.

14.6. Общая схема исследования задачи НЛП

Подводя итог проведенному исследованию, опишем общую схему решения задачи (11.3).

Прежде всего находятся все условно стационарные планы и соответствующие им множители Лагранжа. Для этого решается система $n+m+p$ уравнений

$$\frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad h_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \lambda_i g_i(x), \quad i = \overline{1, m},$$

с $n+m+p$ неизвестными $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p$, и среди найденных решений отбираются те, которые удовлетворяют условиям $g_i(x) \leq 0, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Решение задачи (11.3) находится среди условно стационарных планов, если выполнено одно из следующих условий:

- а) функции $g_i(x), i = \overline{1, m}$, $h_i(x), i = \overline{1, p}$, являются линейными;
- б) функции $g_i(x), i = \overline{1, m}$, выпуклы, отсутствуют ограничения-равенства, и существует такой план x^* , что $g(x^*) < 0$.

В этом случае условно стационарный план с наименьшим значением целевой функции будет оптимальным. В общем случае, когда условия а), б) не выполняются, оптимальный план может не быть условно стационарным, если он не является регулярным. В соответствии с этим решение задачи нужно искать среди условно стационарных и нерегулярных планов путем сравнения на них значений целевой функции. На планах, не являющихся регулярными, векторы

$$\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x}, i \in I_a(x^*), \frac{\partial h_i(x^*)}{\partial x}, i = \overline{1, p},$$

линейно зависимы. Разумеется, говорить об оптимальности того или иного плана можно лишь в случае, когда задача (11.3) имеет решение.

Иногда представляют интерес и локально оптимальные планы, которые не являются точками глобального минимума. При выполнении условий регулярности они наряду с решением задачи находятся среди условно стационарных планов. Выявить такие планы, т. е. по существу классифицировать условно стационарные точки, можно с помощью условий минимума второго порядка. Кроме того, эти условия, которые сужают множество точек, «подозрительных на оптимальность», могут оказаться полезными и для нахождения глобального минимума в тех случаях, когда множество условно стационарных планов является бесконечным.

В заключение отметим, что исходные предположения, сделанные при постановке задачи (11.3), можно ослабить. Совсем не обязательно, чтобы функции, формирующие эту задачу, были определены на всем пространстве \mathbf{R}^n . Задача НЛП имеет смысл, когда не пусто множество

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^n : x \in X_0; x \in Y_i, g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; x \in Z_i, h_i(x) = 0, i = \overline{1, p} \right\},$$

где $X_0, Y_i, i = \overline{1, m}, Z_i, i = \overline{1, p}$, – области определения функций $f(x)$, $g_i(x), i = \overline{1, m}$, $h_i(x), i = \overline{1, p}$, соответственно. Приведенные выше условия локальной оптимальности будут справедливы, если эти функции определены и непрерывны вместе со своими производными в некоторой окрестности точки x^0 .

Пример 14.6. Рассмотрим задачу минимизации издержек производства (см. § 11) в предположении, что цены ресурсов не зависят от объемов их закупок, а связь между выпуском продукции и затратами задается производственной функцией Кобба – Дугласа:

$$y = Ax_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, A > 0, \alpha_i > 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Согласно (11.5) математическая модель такой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \rightarrow \min, \\ g_i(x) &= -x_i \leq 0, i = \overline{1, n}, h_i(x) = Ax_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} - y_0 = 0. \end{aligned} \tag{14.31}$$

Множество планов X задачи (14.31) является замкнутым. Целевая функция непрерывна и ограничена снизу на нем. Кроме того, при достаточно большом

$C > 0$ множество $\{x \in X : f(x) \leq C\}$ представляет собой непустой компакт. Отсюда следует, что рассмотренная задача имеет решение.

На всех планах ограничения-неравенства пассивны, а функции $f(x), h_i(x)$ бесконечно дифференцируемы в области $x > 0$. Поскольку в этой области $\partial h_i(x) / \partial x \neq 0$, то все планы являются регулярными. Поэтому решение $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ задачи (14.31) находится среди условно стационарных планов, которые вместе с соответствующим им множителем Лагранжа μ_1 удовлетворяют системе уравнений

$$p_i + \mu_1 \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad Ax_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} - y_0 = 0.$$

Эта система при условиях, наложенных на параметры функции Кобба – Дугласа, имеет единственное решение

$$x_i^0 = -\frac{\mu_1^0 \alpha_i y_0}{p_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu_1^0 = -\frac{1}{A} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{p_n}{\alpha_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Заметим, что $\mu_1^0 = -\sum_{i=1}^n p_i x_i^0 / y_0$. Отсюда видно, что абсолютная величина множителя Лагранжа равна себестоимости единицы продукции, выпускаемой при оптимальном плане производства.

§ 15. НЕГЛАДКИЕ ЗАДАЧИ

В предыдущих параграфах предполагалось, что функции, участвующие в постановке задач НЛП, непрерывно дифференцируемы. Такие задачи, которые принято называть *гладкими*, удобны для исследования с помощью хорошо развитых классических методов дифференциального исчисления. В связи с запросами практики в МП развивается также теория *негладких задач оптимизации*, элементы которой излагаются в данном параграфе.

15.1. Минимизация функций, дифференцируемых по направлениям

Среди негладких задач минимизации наиболее изученными являются выпуклые и *минимаксные задачи*. Эти задачи объединяет то, что функции, их формирующие, дифференцируемы по направлениям. Говорят, что функция $f(x), x \in \mathbb{R}^n$, дифференцируема по направлениям в точке x , если в этой точке существует ее производная по любому направлению $l \in \mathbb{R}^n$.

В минимаксной задаче целевая функция имеет вид

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (15.1)$$

Она непрерывна, если непрерывны функции $f_i(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{1, n}$. Если же эти функции принадлежат классу $C^{(1)}$, то $f(x)$ дифференцируема по направлениям, причем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \max \frac{\partial f_i(x)}{\partial l}, \quad i \in I(x),$$

где $I(x) = \{i : f_i(x) = f(x)\}$. Как показывает пример $f(x) = \max\{x, -x\} = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, функция (15.1) может оказаться недифференцируемой, при сколь угодно гладких функциях $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$.

Выпуклая функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, дифференцируема по направлениям в любой точке, и $\partial f(x)/\partial l = \max c'l$, $c \in \partial f(x)$, где $\partial f(x)$ – субдифференциал, т. е. множество субградиентов функции $f(x)$ (см. разд. 6.4). Производная по направлению выпуклой функции является *сублинейной функцией* направления, что означает

- a) $\partial f(x)/\partial(\lambda l) = \lambda \partial f(x)/\partial l$, $\lambda \geq 0$, $l \in \mathbf{R}^n$;
- б) $\partial f(x)/\partial(l_1 + l_2) = \partial f(x)/\partial l_1 + \partial f(x)/\partial l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbf{R}^n$.

Свойство а) непосредственно следует из определения производной по направлению, а свойство б) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial(l_1 + l_2)} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x + (t/2)(l_1 + l_2)) - f(x)}{t/2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f((x + tl_1)/2 + (x + tl_2)/2) - f(x)}{t/2} \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x + tl_1) - f(x) + f(x + tl_2) - f(x)}{t} = \frac{\partial f(x)}{\partial l_1} + \frac{\partial f(x)}{\partial l_2}. \end{aligned}$$

Заметим, что в общем случае функция может быть разрывной в точке, в которой она дифференцируема по направлениям. Например, заданная на \mathbf{R}^2 функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1^2 + x_2 = 0, x_1 > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

имеет в точке $(0, 0)$ производную по любому направлению. Вместе с тем она разрывна в этой точке.

Вернемся к задаче на безусловный минимум (12.1).

Теорема 15.1. Если x^0 – локально оптимальный план задачи (12.1) и функция $f(x)$ дифференцируема по направлениям в этой точке, то

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} \geq 0, l \in \mathbf{R}^n. \quad (15.2)$$

Доказательство. Если допустить, что $\partial f(x^0)/\partial l_* < 0$ для некоторого вектора $l_* \in \mathbf{R}^n$, то непосредственно из определения производной по направлению будем иметь $(f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0))/\varepsilon < 0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Тогда $f(x^0 + \varepsilon l_*) < f(x^0)$, что противоречит локальной оптимальности плана x^0 . ■

Заметим, что если $f(x)$ – выпуклая функция, то условие (15.2) необходимо и достаточно для оптимальности плана x^0 в задаче (12.1) (см. теорему 6.11).

Теорема 15.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема по направлениям в точке x^* и удовлетворяет условию Липшица в окрестности этой точки. Если для каждого вектора $l, \|l\|=1$, выполнено условие $\partial f(x^*)/\partial l < 0$, то x^* – точка строгого локального минимума в задаче (12.1).

Доказательство. Допустим, что сделанное утверждение не справедливо. Тогда существует сходящаяся к x^* последовательность $\{x^k\}$ такая, что $f(x^k) \leq f(x^*), x^k \neq x^*, k = 1, 2, \dots$. Положим $\varepsilon_k = \|x^k - x^*\|$, $l_k = (x^k - x^*)/\varepsilon_k$. Понятно, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а $\|l_k\|=1, k = 1, 2, \dots$. В силу компактности единичной сферы в \mathbf{R}^n из последовательности $\{l_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что сама последовательность сходится, и обозначим ее предел через l_* ($\|l_*\|=1$). Пусть $0 < \alpha < \partial f(x^*)/\partial l_*$. Из определения производной по направлению следует, что для достаточно больших k имеет место неравенство $(f(x^* + \varepsilon_k l_*) - f(x^*))/\varepsilon_k > \alpha$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left(f(x^* + \varepsilon_k l_*) - f(x^*) \right) / \varepsilon_k &= \left(f(x^* + \varepsilon_k l_k) - f(x^*) \right) / \varepsilon_k + \\ &+ \left(f(x^* + \varepsilon_k l_*) - f(x^* + \varepsilon_k l_k) \right) / \varepsilon_k \leq \left(f(x^k) - f(x^*) \right) / \varepsilon_k + \\ &+ C \|l_* - l_k\| \leq C \|l_* - l_k\|, \end{aligned}$$

где C – константа Липшица. Таким образом, $C \|l_* - l_k\| > \alpha$ при достаточно больших k , но это противоречит тому, что $l_k \rightarrow l_*$ при $k \rightarrow \infty$. ■

Рассмотрим теперь задачу НЛП (14.14) с ограничениями типа неравенств. Пусть в допустимой точке x^* функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, дифференцируемы по направлениям. Вектор $l \in \mathbf{R}^n$, $l \neq 0$, назовем допустимым направлением в точке x^* по ограничениям задачи, если $\partial g_i(x^*) / \partial l < 0$, $i \in I_a(x^*)$. Множество всех допустимых направлений представляет собой конус в пространстве \mathbf{R}^n . Обозначим его через $K(x^*)$. Понятно, что если все ограничения задачи (14.14) пассивны на плане x^* , то $K(x^*) = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Теорема 15.3. Пусть x^* – план задачи (14.14) и $K(x^*) \neq \emptyset$. Для локальной оптимальности плана x^* необходимо, чтобы

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial l} \geq 0, \quad l \in K(x^*). \quad (15.3)$$

Если к тому же $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, – выпуклые функции, то это условие является достаточным для оптимальности плана x^* .

Доказательство. Из существования производных по направлениям следует, что для любого вектора $l \in \mathbf{R}^n$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства $g_i(x^* + \varepsilon l) < 0$, $i \in I_n(x^*)$. Если же $l \in K(x^*)$, то наряду с этими неравенствами имеет место

$$g_i(x^* + \varepsilon l) = g_i(x^* + \varepsilon l) - g_i(x^*) < 0, \quad i \in I_a(x^*).$$

Таким образом, для любого вектора $l \in K(x^*)$ существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что точки $x^* + \varepsilon l$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, являются планами задачи (14.14). Тогда $f(x^* + \varepsilon l) - f(x^*) \geq 0$, если ε_0 достаточно мало. Разделив обе части этого неравенства на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (15.3).

Пусть $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}$ – выпуклые функции. Предположим, что выполнено условие (15.3), но план x^* задачи (14.4) не является оптимальным. Тогда существует такая точка x_* , что $g_i(x_*) \leq 0, i = \overline{1, m}$, $f(x_*) < f(x^*)$. Положим $l_* = x_* - x^*$. В силу выпуклости $f(x)$ для достаточно малых $t > 0$ имеем

$$f(x^* + tl_*) - f(x^*) = f(tx_* + (1-t)x^*) - f(x^*) \leq t(f(x_*) - f(x^*)).$$

Соответственно с этим $\partial f(x^*) / \partial l_* \leq f(x_*) - f(x^*) < 0$. Аналогично убеждаемся в справедливости неравенств $\partial g_i(x^*) / \partial l_* \leq 0, i \in I_a(x^*)$. Поскольку $K(x^*) \neq \emptyset$, то существует такой вектор l_0 , что $\partial g_i(x^*) / \partial l_0 < 0, i \in I_a(x^*)$. Введем в рассмотрение вектор $l_\varepsilon = \varepsilon l_0 + (1-\varepsilon)l_*$. В силу сублинейности производных по направлениям выпуклых функций для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$\partial f(x^*) / \partial l_\varepsilon \leq \varepsilon \partial f(x^*) / \partial l_0 + (1-\varepsilon) \partial f(x^*) / \partial l_* < 0,$$

$$\partial g_i(x^*) / \partial l_\varepsilon \leq \varepsilon \partial g_i(x^*) / \partial l_0 + (1-\varepsilon) \partial g_i(x^*) / \partial l_* < 0, i \in I_a(x^*).$$

Последнее означает, что $l_\varepsilon \in K(x^*)$. Таким образом, сделанное предположение оказалось неверным. ■

Теорема 15.4. Пусть функции $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}$, дифференцируемы по направлениям в точке x^* и удовлетворяют условию Липшица в окрестности этой точки. Если для каждого вектора $l, \|l\| = 1$, удовлетворяющего соотношению $\partial g_i(x^*) / \partial l \leq 0, i \in I_a(x^*)$, выполняется неравенство $\partial f(x^*) / \partial l > 0$, то x^* – точка строгого локального минимума в задаче (14.14).

Доказательство этого утверждения во многом повторяет доказательство теоремы 15.2, но в отличие от задачи безусловной минимизации теперь для точек $x^k = x^* + \varepsilon_k l_k$ выполняются неравенства $g_i(x^k) \leq 0, i = \overline{1, m}$. Если $i \in I_a(x^*)$, то

$$\begin{aligned} & \left(g_i(x^* + \varepsilon_k l_k) - g_i(x^*) \right) / \varepsilon_k + \left(g_i(x^* + \varepsilon_k l_k) - g_i(x^* + \varepsilon_k l_*) \right) / \varepsilon_k = \\ & = \left(g_i(x^* + \varepsilon_k l_k) - g_i(x^*) \right) / \varepsilon_k = g_i(x^* + \varepsilon_k l_k) / \varepsilon_k \leq 0. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Поскольку функции $g_i(x), i = \overline{1, m}$, удовлетворяют условию Липшица, то $(g_i(x^* + \varepsilon_k l_k) - g_i(x^* + \varepsilon_k l_*))/\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда из (15.4) получаем $\partial g_i(x^*)/\partial l_* \leq 0, i \in I_a(x^*)$. Заключительные рассуждения такие же, как при доказательстве теоремы 15.2.

15.2. Производная и субдифференциал Кларка

В работах Ф. Кларка введена в рассмотрение обобщенная производная функции по направлению. Пусть функция $f(x), x \in \mathbf{R}^n$, непрерывна в окрестности точки x^* . Верхний предел

$$f'_{Cl}(x^*, l) = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x^* \\ l \rightarrow 0}} \frac{f(x + tl) - f(x)}{t}, \quad (15.5)$$

если он конечен, назовем *верхней субпроизводной* или *производной Кларка* функции $f(x)$ в точке x^* по направлению l . Если эта производная существует для любого $l \in \mathbf{R}^n$, то будем говорить, что функция $f(x)$ *дифференцируема по Кларку* в точке x^* .

Было установлено, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности Ω точки x^* , то она дифференцируема по Кларку в этой точке, причем производная (15.5) является сублинейной функцией аргумента l (см. разд. 15.1). Из этого свойства, в частности, следует, что *субдифференциал Кларка*

$$\partial_{Cl} f(x^*) = \left\{ c \in \mathbf{R}^n : f'_{Cl}(x^*, l) \geq c'l \text{ для всех } l \in \mathbf{R}^n \right\} \quad (15.6)$$

функции $f(x)$ в точке x^* представляет собой непустой выпуклый компакт в \mathbf{R}^n . Для любого $l \in \mathbf{R}^n$

$$f'_{Cl}(x^*, l) = \max c'l, c \in \partial_{Cl} f(x^*),$$

так что задание функции $f'_{Cl}(x^*, l)$ эквивалентно заданию множества $\partial_{Cl} f(x^*)$.

Один из способов нахождения субдифференциала Кларка основан на теореме Радемахера, утверждающей, что локально липшицевая функция дифференцируема почти всюду. Пусть Ω_f – множество точек из Ω , в которых функция $f(x)$ дифференцируема. Тогда ее субдиффе-

ренциал Кларка в точке x^* представляет собой выпуклую оболочку всех точек вида $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}$, где $\{x^k\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к x^* , члены которой принадлежат Ω_f :

$$\partial_{Cl} f(x^*) = conv \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x} : x^k \rightarrow x^*, x^k \in \Omega_f \right\}. \quad (15.7)$$

Для выпуклой функции верхняя субпроизводная совпадает с производной по направлению, а субдифференциал Кларка – с субдифференциалом в смысле выпуклого анализа. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^* , то субдифференциал $\partial_{Cl} f(x^*)$ содержит единственный элемент $\partial f(x^*)/\partial x$. Заметим также, что из дифференцируемости по Кларку не следует, вообще говоря, дифференцируемость по направлениям (см. разд. 15.1).

Теорема 15.5. Если функция $f(x), x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки ее локального минимума x^0 , то

$$0 \in \partial_{Cl} f(x^0). \quad (15.8)$$

Доказательство. Из определения верхнего предела и непрерывности функции $f(x)$ в точке x^0 следует, что

$$f'_{Cl}(x^0, l) \geq \overline{\lim_{t \rightarrow +0}} \frac{f(x^0 + tl) - f(x^0)}{t}. \quad (15.9)$$

Поскольку x^0 – точка локального минимума, то для любого $l \in \mathbf{R}^n$ и достаточно малых $t > 0$ выполняется неравенство $f(x^0 + tl) - f(x^0) \geq 0$, что вместе с (15.9) влечет за собой $f'_{Cl}(x^0, l) \geq 0$. Отсюда и из (15.6) следует (15.8). ■

Пример 15.1. Рассмотрим заданную на \mathbf{R}^2 функцию $f(x) = |x_1| + |x_2| + 2(x_1 + x_2)$. Она удовлетворяет условию Липшица и дифференцируема в точках, не принадлежащих множеству $\{(x_1, x_2) : x_1 x_2 = 0\}$, при этом

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{cases} (3, 3), & \text{если } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ (3, 1), & \text{если } x_1 > 0, x_2 < 0, \\ (1, 3), & \text{если } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ (1, 1), & \text{если } x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Тогда согласно формуле (15.7) в точке $x^* = (0, 0)$ имеем

$$\partial_{Cf} f(x^*) = \text{conv}\{(3, 3), (3, 1), (1, 3), (1, 1)\}.$$

На плоскости (x_1, x_2) это множество представляет собой квадрат с вершинами $(3, 3), (3, 1), (1, 3), (1, 1)$. Поскольку оно не содержит начала координат, то в силу теоремы 5.5 $x^* = (0, 0)$ не является точкой локального минимума рассмотренной негладкой функции.

§ 16. ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Проблема одновременной минимизации нескольких целевых функций в теории экстремальных задач возникла из достаточно распространенных в приложениях ситуаций, когда выбираемые решения (планы) оцениваются по нескольким критериям (показателям). Эти критерии могут отражать оценки различных качеств объекта, относительно которого принимается решение, или оценки одной и той же характеристики, но с различных точек зрения.

16.1. Принципы выбора

Формально *векторная (многокритериальная) задача МП* задается некоторым множеством планов X из пространства \mathbf{R}^n и набором целевых функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$, определенных на этом множестве. Сущность векторной задачи математического программирования (ВЗМП) состоит в минимизации заданной совокупности целевых функций. Ситуация, когда существует план, минимизирующий все целевые функции, является редчайшим исключением, теоретически не интересна и в дальнейшем не рассматривается. В теории ВЗМП понятие оптимальности получает различные и, причем нетривиальные, истолкования. Дополнительную информацию, которая наряду с исходной позволяет сделать задачу векторной оптимизации вполне определенной, называют *принципом выбора критерия оптимальности*. Этот принцип, определяющий решение ВЗМП (назовем его *векторно-оптимальным планом*), дает ответ на главный вопрос – в каком смысле векторно-оптимальный план лучше всех остальных.

К настоящему времени предложено много принципов выбора, но все они носят эвристический характер. Убедительных аргументов, показывающих, что векторно-оптимальные планы нужно определять так, а не иначе, по-видимому, не существует. Первая попытка определить

решение многокритериальной задачи была сделана в работе итальянского математика-экономиста В. Парето.

Определение 16.1. План x^0 оптимален по Парето, если не существует плана x , для которого имеет место $f(x) \leq f(x^0)$, $f(x) \neq f(x^0)$, где $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Существенным недостатком такого выбора критерия оптимальности является множественность решений задачи. В примере

$$X = \{x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, \quad f_1(x) = x_1, \quad f_2(x) = x_2,$$

все планы оптимальны по Парето. На рис. 16.1 наглядно представлено множество $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$, которое в данном случае совпадает с X .

В связи с указанным недостатком в настоящее время оптимальность по Парето рассматривают как необходимое условие векторной оптимальности, а *планы*, ему удовлетворяющие, называют *эффективными*. На рис. 16.2 проиллюстрирован случай, когда

$$X = \{x = (x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}, \quad f_1(x) = x_1, \quad f_2(x) = x_2.$$

Множество $f(X_3) = \{f(x) : x \in X_3\}$, соответствующее множеству X_3 эффективных планов, выделено жирной линией.

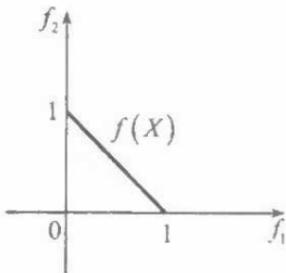


Рис. 16.1

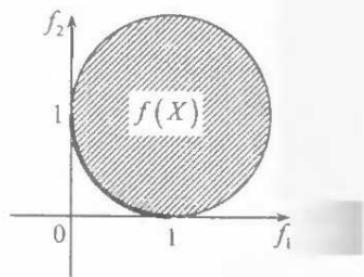


Рис. 16.2

Рассмотрим несколько наиболее известных принципов выбора критерия оптимальности, сужающих множество эффективных планов.

16.2. Скаляризация критерия

Наиболее прямолинейным подходом к определению решения ВЗМП является ее сведение к обычной однокритериальной задаче минимизации путем замены системы целевых функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$ на одну «сводную» функцию $F_0(x) = F(f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in X$ (*скаляризация*).

ризация критерия). Следует отметить, что в ВЗМП значения целевых функций не сопоставимы между собой, если они имеют различный физический смысл и, как следствие, измеряются в различных единицах. **Операция приведения масштабов** отдельных критериев к единому, обычно безразмерному, масштабу носит название **нормализации**. Эта операция предшествует выбору критерия оптимальности.

Один из наиболее распространенных способов скаляризации состоит в рассмотрении взвешенной суммы $F_0(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$, $x \in X$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Весовой коэффициент λ_i интерпретируется как мера (степень) важности i -й целевой функции. Весовые коэффициенты обычно задаются на основании экспертных оценок. Векторно-оптимальным считается такой план x^0 , что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^0) = \min \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x), x \in X.$$

Этот план, очевидно, является оптимальным по Парето. Основным недостатком описанного подхода является то, что он применим лишь в случае, когда есть возможность задавать весовые коэффициенты, т. е. по существу измерять важность целевых функций.

Другой способ скаляризации состоит в **минимизации максимальной компоненты**:

$$F_0(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x) \rightarrow \min, x \in X.$$

Такая свертка применяется к нормализованным целевым функциям.

В некоторых критериях векторной оптимизации используется **идеальная точка** (f_1^0, \dots, f_m^0) , где $f_i^0 = \min f_i(x)$, $x \in X$. Задача

$$F_0(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{f_i(x) - f_i^0}{f_i^0} \right)^2 \rightarrow \min, x \in X,$$

трактуется как **минимизация нормализованного расстояния до идеальной точки**.

16.3. Введение иерархии целевых функций

В ряде случаев отсутствует информация, позволяющая задать веса целевых функций, но известна сопоставимая значимость критериев, т. е. любые два из них можно сравнить и выбрать более

важный. Опишем *метод последовательных уступок*, который применим в таких случаях при определении векторно-оптимального плана. Прежде всего проводится анализ относительной значимости критериев и целевые функции нумеруются в порядке уменьшения их важности:

$$f_1(x) \succ f_2(x) \succ \dots \succ f_m(x).$$

Затем находится минимально возможное значение наиболее важной целевой функции $f_1^* = \min f_1(x), x \in X$, и назначается величина $\varepsilon_1 > 0$ допустимого увеличения (уступки) по первому критерию. Далее находится минимум f_2^* второй по важности целевой функции $f_2(x)$ при условии $f_1(x) \leq f_1^* + \varepsilon_1, x \in X$, и т. д. Процесс заканчивается минимизацией последней по важности целевой функции, и точка минимума x^0 считается векторно-оптимальным планом. Формально этот план определяется соотношениями

$$f_m(x^0) = \min f_m(x), x \in X_m,$$

$$X_{k+1} = \left\{ x \in X_k : f_k(x) \leq f_k^* + \varepsilon_k \right\},$$

$$f_k^* = \min f_k(x), x \in X_k, k = \overline{1, m-1}, X_1 = X.$$

Недостатком описанного подхода является сложность выбора уступок $\varepsilon_k > 0, k = \overline{1, m-1}$, поскольку чаще всего они не соизмеримы между собой.

В тех случаях, когда нельзя задать отношения предпочтения на множестве всех целевых функций, но известна наиболее важная из них $f_1(x)$, векторно-оптимальный план x^0 может быть определен следующим образом:

$$f_1(x^0) = \min f_1(x), f_i(x) \leq \alpha_i, i = \overline{2, m}, x \in X.$$

Параметры $\alpha_i, i = \overline{2, m}$, выбираемые на основании содержательных соображений, называют *гарантированными уровнями*. Многие задачи скалярной минимизации возникают из реальных задач векторной оптимизации в результате применения данного принципа выбора.

Пусть (f_1^0, \dots, f_m^0) – идеальная точка, а $f_1(x)$ – наиболее важная из целевых функций. Следующий принцип выбора векторно-оптимального плана:

$$f_1(x^0) = \min f_1(x), \frac{f_1(x) - f_1^0}{f_i(x) - f_i^0} = \mu_i > 0, i = \overline{2, m}, x \in X,$$

называют *методом пропорциональных уступок*.

Общим недостатком принципов выбора, основанных на иерархии целевых функций, является то, что они могут привести к планам, которые не являются оптимальными по Парето.

Литература

1. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982.
2. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002.
3. Гороховик, В. В. Конечномерные задачи оптимизации / В. В. Гороховик. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
4. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М.: Физматлит, 2001.
5. Мину, М. Математическое программирование / М. Мину. – М.: Наука, 1990.
6. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М.: Наука, 1983.

Глава 4

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Теория нелинейного программирования служит фундаментом для построения разнообразных численных методов. В этой главе будут описаны некоторые методы минимизации функций конечного числа переменных.

Численные методы нелинейного программирования разделяют на *прямые* и *непрямые*. К непрямым относят такие, в которых решение исходной задачи получают через решение другой задачи, к которой предварительно сводится исходная. Прямые методы оперируют непосредственно с исходными экстремальными задачами.

Большинство прямых методов, предназначенных для реализации на ЭВМ, – *дискретные (итеративные)*, т. е. в процессе работы генерируются (дискретные) последовательности векторов

$$x^1, x^2, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots$$

(последовательные приближения к решению x^0). Как правило, *итерация* (переход от одного приближения x^k к следующему x^{k+1}) строится по схеме

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k,$$

где вектор l^k называется *направлением*, число $\theta_k \geq 0$ – *шагом* итерации. Методы отличаются друг от друга принципами построения l^k, θ_k .

Метод называется *одношаговым*, если на текущей итерации (при построении l^k, θ_k) используется информация о значениях элементов задачи (целевой функции, функции ограничений) только на текущем приближении x^k .

Если же на итерации привлекаются значения элементов задачи на предыдущих приближениях ($x^k, x^{k-1}, \dots, x^{k-m}$), то метод называют *многошаговым* (с памятью глубины m).

Метод называется методом *p-го порядка*, если на итерации используется хотя бы одна производная *p*-го порядка от какого-либо элемента задачи, но производные более высокого порядка не используются. Методы нулевого порядка ($p=0$) называют еще *методами поиска*.

Методы делятся на *точные* и *приближенные*. В точных методах на каждой итерации план задачи преобразуется также в план исходной задачи. Если метод состоит в преобразовании одной оценки (приближения) плана в другую, его называют *приближенным*. Если решение

задачи получается за конечное число итераций, то метод называют *конечным*.

Итеративный метод называется *сходящимся*, если генерирует последовательность векторов, которая сходится к решению задачи. Качество сходящихся итеративных методов чаще всего оценивают по *скорости сходимости*. Если в итеративном методе выполняются неравенства

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leq q \|x^k - x^0\|, \quad 0 < q < 1, \quad k \geq k_0,$$

то говорят о *линейной скорости сходимости* (сходимости со скоростью геометрической прогрессии). В случае

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leq q \|x^k - x^0\|^{\alpha}, \quad k \geq k_0,$$

принято говорить, что метод имеет *сверхлинейную скорость*, если $1 < \alpha < 2$, и *квадратичную*, если $\alpha = 2$.

§ 17. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В данном параграфе описываются методы поиска точки минимума функции одной переменной.

17.1. Поиск точек безусловного минимума. Метод Пауэлла

Рассмотрим задачу на безусловный минимум (рис. 17.1):

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (17.1)$$

Опишем алгоритм Пауэлла решения задачи (17.1). Он является методом нулевого порядка. В нем используются только значения функции (производные нулевого порядка) в первых трех точках, полученных в направлении поиска.

Выберем произвольную начальную точку x_1 , шаг метода $\theta > 0$ и константу остановки $\varepsilon \geq 0$.

Построим точку x_2 как $x_2 = x_1 + \theta$. Вычислим $f(x_1)$, $f(x_2)$. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то положим $x_3 = x_1 + 2\theta$. Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \theta$. Вычислим $f(x_3)$. Таким образом, будет построена начальная тройка $\{x_1, x_2, x_3\}$.

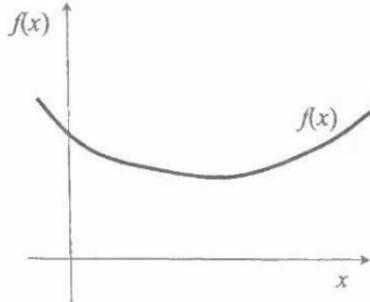


Рис. 17.1

Опишем итерацию метода Паузла (рис. 17.2) для задачи (17.1), считая, что текущая тройка $\{x_1, x_2, x_3\}$ уже построена.

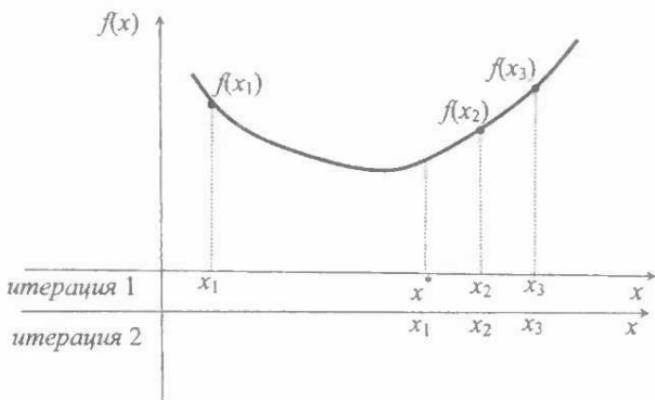


Рис. 17.2

1) Используя квадратичную аппроксимацию целевой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, вычислим приближенное значение x^* в точке минимума функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, по формуле

$$x^* = -\frac{1}{2} \frac{\left((x_2)^2 - (x_3)^2\right)f(x_1) + \left((x_3)^2 - (x_1)^2\right)f(x_2) + \left((x_1)^2 - (x_2)^2\right)f(x_3)}{(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3)}.$$

Здесь x^* вычисляется как точка минимума параболы, построенной по трем точкам x_1, x_2, x_3 и значениям $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{f(x_2)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{f(x_3)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

$$x \in \mathbf{R}.$$

2) Если при выбранном $\varepsilon \geq 0$ выполняются неравенства $|x^* - x_1| < \varepsilon$, $|x^* - x_2| < \varepsilon$, $|x^* - x_3| < \varepsilon$ или $|f(x^*) - f(x_1)| < \varepsilon$, $|f(x^*) - f(x_2)| < \varepsilon$, $|f(x^*) - f(x_3)| < \varepsilon$, то решение закончим: x^* – требуемое приближение к решению задачи. В противном случае вычислим $f(x^*)$, исключим из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ то значение x_i , которое соответствует наибольшему значению функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, и добавим x^* . Обозначим новые точки в естественном порядке и перейдем к шагу 1.

Работа алгоритма продолжается до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность, упомянутая на шаге 2.

17.2. Методы поиска точек минимума унимодальных функций

Рассмотрим задачу на условный минимум:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X \subset \mathbb{R}. \quad (17.2)$$

Пусть $X = [a, b]$. Точный локальный минимум функции $f(x)$ на $[a, b]$ неизвестен, поэтому отрезок $[a, b]$ называется **интервалом неопределенности** или **интервалом локализации** точки минимума. Цель методов поиска в задачах на условный минимум – сократить (уменьшить) интервал локализации. Для так называемых унимодальных функций интервал локализации может быть сокращен с помощью вычисления значения функции $f(x)$ в двух точках, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

Определение 17.1. Непрерывная функция $f(x)$, $x \in [a, b]$, называется **унимодальной**, если существует такая точка $x^* \in [a, b]$, что на промежутке $[a, x^*]$ функция $f(x)$ убывает, на $[x^*, b]$ – возрастает.

Как следует из определения, строго выпуклые, строго квазивыпуклые функции являются унимодальными.

Всюду дальше в этом разделе считаем, что в задаче (17.2) функция $f(x)$, $x \in [a, b]$, унимодальная.

Пусть $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_1 < x_2$. Вычислим значения $f(x_1)$, $f(x_2)$ и сравним их между собой. Тогда если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка минимума принадлежит интервалу $[x_1, b]$; если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то новый интервал локализации $[a, x_2]$. Рассмотрим несколько методов уменьшения интервалов локализации.

1. Дихотомический поиск. Рассмотрим задачу (17.2) с унимодальной целевой функцией. Наименьшее число вычислений значений функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, которые необходимы для уменьшения интервала локализации, равно двум. В зависимости от значений функции $f(x)$ в точках $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_1 < x_2$, длина нового интервала локализации равна $x_2 - a$ или $b - x_1$.

Заметим, что *a priori* не известно, будет ли $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) \geq f(x_2)$. Следовательно, оптимальная стратегия (исключить наихудший вариант) выбора точек x_1, x_2 может быть достигнута выбором в качестве x_1 и x_2 середины отрезка $[a, b]$. Но тогда мы будем иметь только одну точку и не сможем уменьшить интервал локализации. В связи с этим точки x_1, x_2 выбираем симметрично на расстоянии $\delta/2$ от середины отрезка (δ – некоторое число в интервале $]0, b - a[$) и при малых δ делим его пополам – этим и объясняется название метода. Величина δ выбирается вычислителем и может определяться целесообразным количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x .

Алгоритм дихотомического поиска. К началу решения задачи задаются: начальный интервал локализации $[a_1, b_1]$, длина конечного интервала локализации точки минимума $\varepsilon > \delta$, константа различимости $\delta \in]0, b_1 - a_1[$. Пусть на k -й итерации интервал локализации $[a_k, b_k]$ известен и его длина $b_k - a_k = (b_1 - a_1 - \delta)/2^k + \delta > \delta$ ($k \geq 2$).

1. Если длина k -го интервала локализации $b_k - a_k < \varepsilon$, то процесс решения задачи (17.2) заканчивается: точка минимума локализована в интервале длины ε . В качестве точки минимума можно взять точку x_1^{k-1} или x_2^{k-1} .

В противном случае полагаем

$$x_1^k = \frac{a_k + b_k - \delta}{2}, \quad x_2^k = \frac{a_k + b_k + \delta}{2}.$$

2. Вычисляем значения $f(x_1^k), f(x_2^k)$.

3. Если выполняется неравенство $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$, то полагаем $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_2^k$. В противном случае полагаем $a_{k+1} = x_1^k, b_{k+1} = b_k$. На этом k -я итерация завершается.

Поскольку каждое деление пополам требует двух вычислений функции, то для достижения точности $b_k - a_k < \varepsilon$ требуется всего $n = 2k > 2 \log_2 ((b_1 - a_1 - \delta)/(\varepsilon - \delta))$ таких вычислений.

2. Метод «золотого сечения». Как известно, «*золотым сечением*» отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.

Метод «золотого сечения» позволяет решить задачу с требуемой точностью при меньшем, чем в методе дихотомического поиска, количестве вычислений значений функции.

Пусть на k -й итерации метода «золотого сечения» интервал локализации равен $[a_k, b_k]$. Новый интервал локализации $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ равен $[x_1^k, b_k]$, если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, и $[a_k, x_2^k]$, если $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$. Точки x_1^k, x_2^k из интервала $[a_k, b_k]$ выбираем из следующих соображений.

a. Должно выполняться равенство $b_k - x_1^k = x_2^k - a_k$ (точки выбираются симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$) и длина нового интервала локализации $b_{k+1} - a_{k+1}$ не зависит от результата на k -й итерации (т. е. от того, какое неравенство выполняется: $f(x_1^k) > f(x_2^k)$ или $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$). Следовательно, если

$$x_1^k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k), \quad \alpha \in]0, 1[, \quad (17.3)$$

то

$$x_2^k = a_k + \alpha(b_k - a_k), \quad \alpha \in]0, 1[. \quad (17.4)$$

В этом случае $b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(b_k - a_k)$.

б. На $(k+1)$ -й итерации x_1^{k+1}, x_2^{k+1} выбираются так, чтобы либо x_1^{k+1} совпадала с x_2^k , либо x_2^{k+1} совпадала с x_1^k . В результате этого требования на $(k+1)$ -й итерации потребуется только одно вычисление значения функции $f(x)$, $x \in [a, b]$.

Если реализуется случай $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, то (рис. 17.3)

$$a_{k+1} = x_1^k, \quad b_{k+1} = b_k, \quad (17.5)$$

причем $x_1^{k+1} = x_2^k$. Рассмотрим последнее равенство. С одной стороны, поскольку соотношения (17.3), (17.4) должны выполняться для всех $k = 1, 2, \dots$, то для $k+1$ из равенства (17.3) получим

$$x_1^{k+1} = a_{k+1} + (1 - \beta)(b_{k+1} - a_{k+1}). \quad (17.6)$$

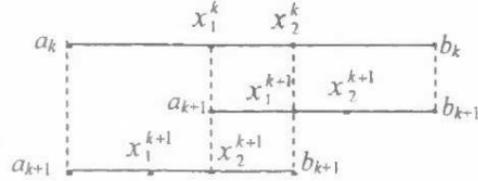


Рис. 17.3

С другой стороны, имеем равенство (17.4). Приравнивая правые части равенств (17.4), (17.6) и используя соотношения (17.3), (17.5), будем иметь $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$. Такое же уравнение относительно α получаем в случае $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$. Корни этого уравнения $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0,618$ и

$\alpha = (-1 - \sqrt{5})/2 \approx -1,618$, причем $\alpha \in]0, 1[$. Отсюда следует, что точка x_1^k производит золотое сечение отрезка $[a_k, x_2^k]$, точка x_2^k — отрезка $[x_1^k, b_k]$. Таким образом, выбор точек x_1^k, x_2^k согласно (17.3), (17.4) с $\alpha \approx 0,618$ показывает, что длина интервала локализации сжимается с коэффициентом 0,618 и $b_k - a_k < \varepsilon$. На первой итерации вычисляются значения $f(x)$ в двух точках x_1^1, x_2^1 , а на каждой последующей требуется только одно вычисление.

Алгоритм метода «золотого сечения». Перед началом решения задается начальный интервал локализации $[a_1, b_1] = [a, b]$ и длина конечного интервала локализации $\varepsilon > 0$. Полагаем $x_1^1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1)$ и $x_2^1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$, и вычисляем значения функции $f(x_1^1), f(x_2^1)$ в этих точках. Опишем итерацию метода, считая, что интервал локализации $[a_k, b_k]$ уже определен.

1. Если $b_k - a_k < \varepsilon$, то задача решена. В качестве точки минимума можно взять, например, середину интервала $[a_k, b_k]$. В противном случае, если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, переходим к шагу 2, а если $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$, переходим к шагу 3.

2. Полагаем $a_{k+1} = x_1^k, b_{k+1} = b_k, x_1^{k+1} = x_2^k, x_2^{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$. Вычисляем $f(x_2^{k+1})$ и увеличиваем k . Переходим к шагу 1.

3. Полагаем $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_2^k, x_1^{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}), x_2^{k+1} = x_1^k$. Вычисляем $f(x_1^{k+1})$, увеличиваем k и переходим к шагу 1.

3. Метод Фибоначчи. Процедура этого метода основана на последовательности чисел Фибоначчи, которая определяется следующим образом:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad F_0 = F_1 = 1. \quad (17.7)$$

С помощью индукции легко показать, что k -е число Фибоначчи представимо в виде

$$\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть на k -й итерации интервал локализации равен $[a_k, b_k]$. Положим

$$x_1^k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad (17.8)$$

$$x_2^k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (17.9)$$

где n – заданное число вычислений значений целевой функции $f(x)$. Точки x_1^k и x_2^k расположены на отрезке $[a_k, b_k]$ симметрично относительно его середины.

Тогда новый интервал локализации определяется следующим образом: $[a_{k-1}, b_{k+1}] = [x_1^k, b_k]$, если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, и $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_2^k]$, если $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$. В первом случае имеем (с учетом (17.7), (17.8))

$$b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - x_1^k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k).$$

Во втором случае, учитывая (17.7), (17.9), получаем

$$b_{k+1} - a_{k+1} = x_2^k - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k).$$

Отсюда следует, что длина интервала локализации сжимается с коэффициентом F_{n-k} / F_{n-k+1} .

Легко показать, что при выборе точек x_1^k, x_2^k из условий (17.8), (17.9) на $(k+1)$ -й итерации $x_1^{k+1} = x_2^k$ или $x_2^{k+1} = x_1^k$.

Таким образом, на первой итерации требуются два вычисления функции, а на последующих – только одно. Тогда в конце $(n-2)$ -й итерации будет сделано $n-1$ вычислений функции и $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$ в силу (17.7) – (17.9). Поэтому, чтобы далее сократить интервал локализации, точка последнего вычисления функции $f(x)$ выбирается слева или справа от средней точки $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$. Это смещение должно быть достаточно мало, но быть таким, чтобы значения функции $f(x)$ в выбранной точке и точке $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$ были различны. Таким образом, последний интервал локализации $[a_n, b_n]$ имеет длину $(b_{n-1} - a_{n-1})/2$.

Итак, в методе число вычислений функции $f(x)$ должно быть выбрано перед началом процедуры. Это следует из того, что выбор точек (17.8), (17.9) зависит от n , а поскольку $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/F_n$, то число $(b_1 - a_1)/F_n$ должно быть согласовано с требуемой точностью.

Алгоритм метода Фибоначчи. Пусть задан начальный интервал локализации $[a_1, b_1]$. Выбираем конечную длину интервала локализации $\varepsilon > 0$ и константу различимости $\delta > 0$. Число n вычислений функции $f(x)$ выбираем из условия $F_n > (b_1 - a_1)/\varepsilon$. Полагаем $x_1^1 = a_1 + (F_{n-2}/F_n)(b_1 - a_1)$, $x_2^1 = a_1 + (F_{n-1}/F_n)(b_1 - a_1)$ и вычисляем значения функции $f(x_1^1)$, $f(x_2^1)$.

Опишем k -ю итерацию метода Фибоначчи.

1. Если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, переходим к шагу 2, если $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$, – к шагу 3.

2. Полагаем $a_{k+1} = x_1^k$, $b_{k+1} = b_k$ и $x_1^{k+1} = x_2^k$, $x_2^{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-1}/F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$. Если $k = n - 2$, то переходим шагу 4, в противном случае вычисляем $f(x_2^{k+1})$ и переходим к шагу 1.

3. Полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2^k$, $x_1^{k+1} = a_{k-1} + (F_{n-k-2}/F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$, $x_2^{k+1} = x_1^k$. Если $k = n - 2$, переходим к шагу 4, в противном случае вычисляем $f(x_1^{k+1})$ и переходим к шагу 1.

4. Полагаем $x_1^n = x_1^{n-1}$, $x_2^n = x_1^n + \delta$. Если $f(x_1^n) > f(x_2^n)$, то $[a_n, b_n] = [x_1^n, b_{n-1}]$, в противном случае $[a_n, b_n] = [a_{n-1}, x_1^n]$. Задача решена: точка минимума находится в интервале $[a_n, b_n]$.

Замечание 17.1. При заданной длине $\varepsilon > 0$ конечного интервала локализации необходимое число вычислений n значений функции $f(x)$ будет равно наименьшему натуральному числу, которое удовлетворяет неравенствам:

$$\frac{\varepsilon}{b_1 - a_1} \geq \frac{1}{F_n} \text{ – метод Фибоначчи;}$$

$$\frac{\varepsilon}{b_1 - a_1} \geq \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{n-1} \text{ – метод «золотого сечения»;}$$

$$\frac{\varepsilon}{b_1 - a_1} \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{n/2} \text{ – дихотомический поиск.}$$

Следовательно, наиболее эффективным является метод Фибоначчи, затем – метод «золотого сечения» и дихотомический поиск. Интересно также заметить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

т. е. при достаточно больших n начальные точки методов Фибоначчи и золотого сечения практически совпадают.

17.3. Метод ломанных

Пусть $X = [a, b]$, функция $f(x)$, $x \in X$, удовлетворяет *условию Липшица* с константой $L > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in X. \quad (17.10)$$

Рассмотрим задачу (17.2) минимизации функции $f(x)$, $x \in X$, удовлетворяющей условию Липшица. Опишем для нее *метод ломанных*.

Выберем какую-либо точку $x^1 \in X$ и определим функцию

$$g(x, x^1) = f(x^1) - L|x - x^1|, \quad x \in X.$$

Функция $g(x, x^1)$, $x \in X$, кусочно-линейна, график ее представляет собой ломаную линию, составленную из отрезков двух прямых, имеющих угловые коэффициенты L и $-L$ и пересекающихся в точке $(x^1, f(x^1))$. На рис. 17.4 функция $g(x, x^1)$, $x \in X$, изображена ломаной {1, 2, 3}.

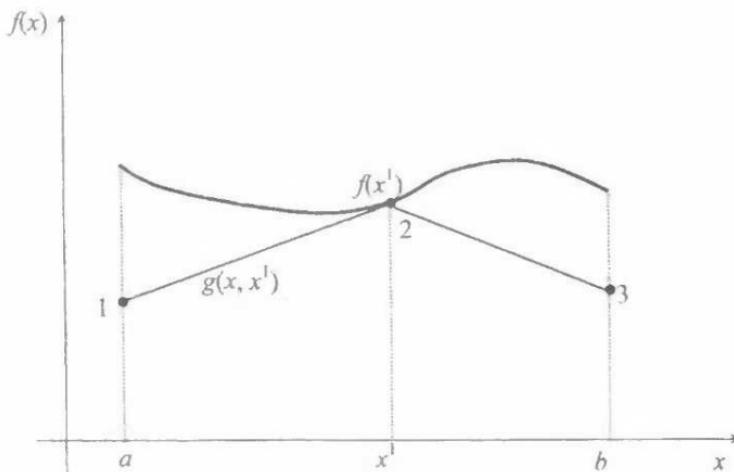


Рис. 17.4

Из условия (17.10) следует

$$f(x) - g(x, x^1) \geq \left(L - \frac{|f(x) - f(x^1)|}{|x - x^1|} \right) |x - x^1| \geq 0, \quad x \neq x^1,$$

т. е.

$$g(x, x^1) = f(x) - L|x - x^1| \leq f(x), \quad x \in X, \quad (17.11)$$

причем $g(x^1, x^1) = f(x^1)$.

Положим $p_1(x) = g(x, x^1)$, $x \in X$. Следующую точку x^2 определим из условия

$$p_1(x^2) = \min_{x \in X} p_1(x).$$

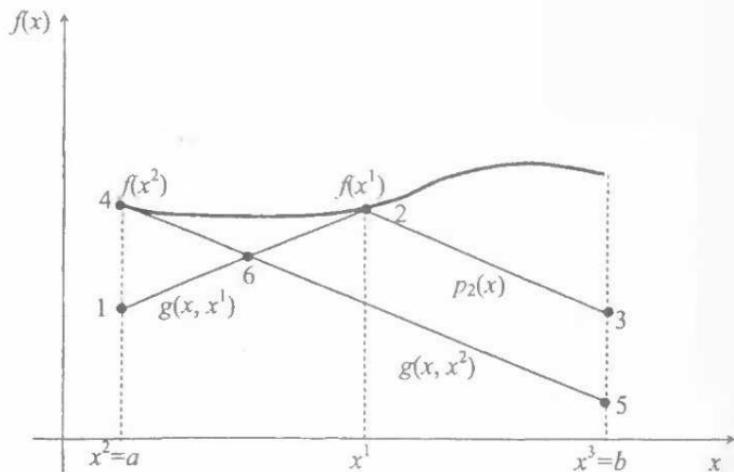


Рис. 17.5

Очевидно, что $x^2 = a$ или $x^2 = b$. Далее построим новую функцию

$$p_2(x) = \max \{g(x, x^2), p_1(x)\}, \quad x \in X,$$

и найдем очередную точку x^3 из условия

$$p_2(x^3) = \min_{x \in X} p_2(x).$$

На рис. 17.5 функция $g(x, x^2)$, $x \in X$, изображена ломаной {4, 5}, функция $p_2(x)$, $x \in X$, — ломаной {4, 6, 2, 3}.

Пусть точки x^1, x^2, \dots, x^k ($k \geq 1$) уже построены. Тогда составим функцию

$$p_k(x) = \max \{g(x, x^k), p_{k+1}(x)\} = \max_{1 \leq i \leq k} g(x, x^i),$$

и точку x^{k+1} найдем из условия

$$p_k(x^{k+1}) = \min p_k(x), \quad x \in X.$$

Если минимум функции $p_k(x)$, $x \in X$, достигается в нескольких точках, то в качестве x^{k+1} берем любую из них.

Первые несколько итераций описанного процесса представлены на рис. 17.6. Функции $g(x, x^3)$, $x \in X$, и $p_3(x)$, $x \in X$, изображены ломаными $\{8, 7\}$ и $\{4, 6, 2, 9, 7\}$ соответственно; функции $g(x, x^4)$, $x \in X$, и $p_4(x)$, $x \in X$, – ломаными $\{11, 10, 12\}$ и $\{4, 13, 10, 14, 2, 9, 7\}$.

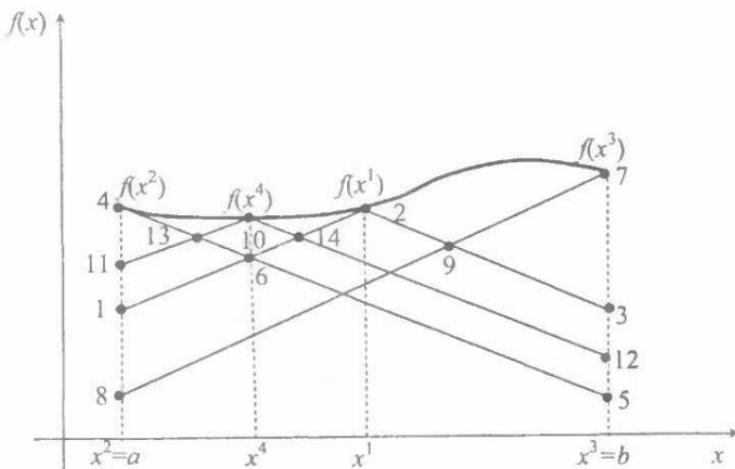


Рис. 17.6

Очевидно, $p_k(x)$, $x \in X$, является кусочно-линейной функцией, и ее график представляет непрерывную ломаную линию, состоящую из отрезков прямых с угловыми наклонами L или $-L$. Ломаная $p_k(x)$, $x \in X$, удовлетворяет условию (17.10) с той же постоянной L , что и функция $f(x)$, $x \in X$. Ясно, что

$$p_{k+1}(x) = \max_{1 \leq i \leq k+1} g(x, x^i) \leq \max_{1 \leq i \leq k} g(x, x^i) = p_k(x), \quad x \in X. \quad (17.12)$$

Кроме того, согласно (17.11) выполняется неравенство $g(x, x^i) \leq f(x)$, $x \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$. Поэтому

$$p_k(x) \leq f(x), \quad x \in X, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Таким образом, на каждом шаге метода ломаных задача минимизации функции $f(x)$, $x \in X$, заменяется более простой задачей мини-

мизации кусочно-линейной функции $p_k(x)$, $x \in X$, которая приближает $f(x)$, $x \in X$, снизу, причем согласно (17.12) $p_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, монотонно возрастает.

Теорема 17.1. Пусть $f(x)$, $x \in X$, — функция, удовлетворяющая условию (17.10). Тогда последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, обладает свойствами:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(x^{k+1}) = f_* = \inf_{x \in X} f(x);$
- 2) $0 \leq f(x^{k+1}) - f_* \leq f(x^{k+1}) - p_k(x^{k+1}), k = 1, 2, \dots;$
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, X_*) = 0$, где X_* — множество точек минимума $f(x)$, $x \in X$.

§ 18. БЕЗУСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе рассматриваются методы градиентного типа и метод Ньютона решения задач безусловной минимизации.

18.1. Методы градиентного типа

Рассмотрим гладкую задачу на безусловный минимум:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (f(x) \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)). \quad (18.1)$$

Функция

$$f_1(x; x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial f(x^*)}{\partial x}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (18.2)$$

называется *аппроксимацией первого порядка (линейной аппроксимацией)* функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^* , поскольку в окрестности точки $x = x^*$ совпадает с $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, с точностью до $o(\|x - x^*\|)$.
 $(|f(x) - f_1(x; x^*)| \leq o(\|x - x^*\|))$.

Линейной аппроксимацией задачи (18.1) назовем последовательность задач

$$f_1(x^{k+1}; x^k) = \min f_1(x; x^k), \quad x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

в которой начальный вектор x^1 и ε_k -окрестности $s_k(x^k, \varepsilon_k)$ векторов x^k являются *параметрами аппроксимации*. Конкретный выбор параметров аппроксимации задает реализацию метода решения задачи (18.1).

Градиентные методы являются методами первого порядка и основаны на свойстве вектора-градиента функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. В евклидовой метрике направление наискорейшего возрастания функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке \bar{x} совпадает с направлением градиента $\text{grad } f(\bar{x}) \neq 0$, а направление наискорейшего убывания — с направлением антиградиента $-\text{grad } f(\bar{x})$ (рис. 18.1).

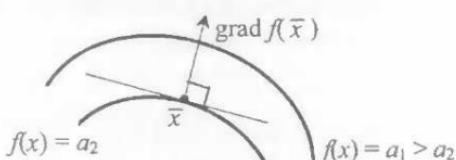


Рис. 18.1

В градиентных методах, как и во всех итеративных методах, решение задачи начинается с выбора начального приближения $x^1 \in \mathbf{R}^n$ (первая фаза). Будем считать, что x^1 выбрано. Следующие приближения строятся по правилу

$$x^{k+1} = x^k - \theta_k \text{grad } f(x^k), \quad \theta_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18.3)$$

Число θ_k из (18.3) называют *шагом метода*.

Существуют различные способы выбора шага θ_k в (18.3). Наиболее часто используются два способа:

- 1) шаг постоянен: $\theta_k \equiv \theta$, $k = 1, 2, \dots$ (рис. 18.2, а);
- 2) шаг θ_k выбирается как решение задачи минимизации функции скалярного аргумента θ (см. разд. 17.1) (рис. 18.2, б):

$$f(x^k - \theta_k \text{grad } f(x^k)) = \min_{\theta \geq 0} f(x^k - \theta \text{grad } f(x^k)).$$

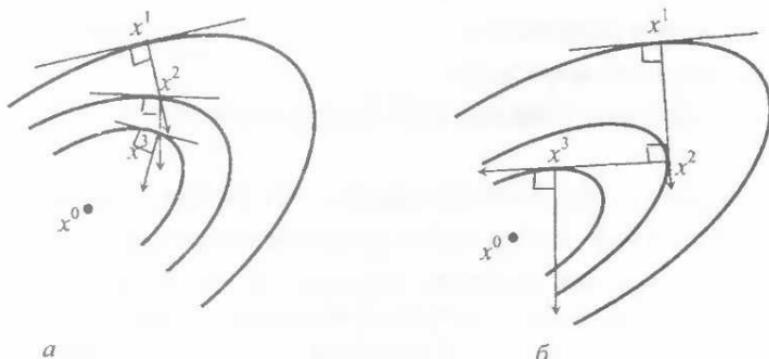


Рис. 18.2

Метод с выбором шага по правилу 1 называется *градиентным методом*; если шаг выбирается по правилу 2, то метод называют *методом наискорейшего спуска*.

Итерации (18.3) продолжают до тех пор, пока не выполнится один из критериев останова:

- 1) $|x_k - x_{k+1}| \leq \varepsilon$, 2) $|f(x_k) - f(x_{k+1})| \leq \varepsilon$, 3) $|\operatorname{grad} f(x_k)| \leq \varepsilon$,
- 4) $\frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{|x_{k+1} - x_k|} < \varepsilon$, 5) $|f(x_k) - f(x_{k+1})| + |x_k - x_{k+1}| \leq \varepsilon$,

где $\varepsilon > 0$ – заданное число. Иногда заранее задают количество итераций. Возможны различные сочетания этих и других критериев.

Теорема 18.1. Пусть

- a) функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, дифференцируема на \mathbf{R}^n ;
- b) функция $\operatorname{grad} f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbf{R}^n;$$

- c) функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, ограничена снизу;

- d) число θ удовлетворяет условию $0 < \theta < 2/L$.

Тогда градиентный метод (18.3) обладает свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{grad} f(x^k) = 0, \quad f(x^{k+1}) \leq f(x^k).$$

Теорема 18.2. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, – непрерывно дифференцируемая функция, x^* – ее точка минимума, множество $\{x : f(x) \leq f(x^*)\}$ ограничено. Тогда метод наискорейшего спуска обладает свойствами:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{grad} f(x^k) = 0$;

2) у последовательности x^k , $k = 1, 2, \dots$, существуют предельные точки, которые стационарны;

3) найдется такая подпоследовательность $x^{k_i} \rightarrow x^*$, что $\operatorname{grad} f(x^*) = 0$.

Замечание 18.1. Методы градиентного типа медленно сходятся в тех случаях, когда поверхности уровня функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, сильно вытянуты и функция имеет так называемый «овражный» характер. Это означает, что небольшое изменение некоторых переменных приводит к резкому изменению значений функции – эта группа переменных характеризует «склон оврага», а по остальным переменным, задающим направление «дна оврага», функция меняется незначительно. Если точка лежит на склоне «оврага», то направление спуска из этой точки будет почти перпендикулярным к направлению «дна оврага», и в результате

приближения, получаемые градиентным методом, будут поочередно находиться то на одном, то на другом «склоне оврага». Такие скачки могут сильно замедлить сходимость градиентного метода. Один из способов защиты методов от отрицательного влияния «овражной» структуры – усреднение последовательных градиентов.

18.2. Метод Ньютона

Если в (18.1) $f(x) \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$, то функция

$$f_2(x; x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \frac{1}{2} (x - x^*)' \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} (x - x^*), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

называется *аппроксимацией второго порядка (квадратичной аппроксимацией)* функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^* , поскольку $|f(x) - f_2(x; x^*)| \leq o(\|x - x^*\|^2)$.

Квадратичной аппроксимацией задачи (18.1) называется последовательность задач

$$f_2(x^{k+1}; x^k) = \min f_2(x; x^k), \quad x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18.4)$$

сформированных с помощью квадратичной аппроксимации целевой функции задачи (18.1).

Метод Ньютона является классическим методом второго порядка.

Пусть x^1 – некоторое начальное приближение. Если известно k -е приближение x^k , то следующее $(k+1)$ -е приближение ищется в виде

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k, \quad (18.5)$$

где l^k – решение задачи

$$l' \frac{\partial f(x^k)}{\partial x} + \frac{1}{2} l' \frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2} l \rightarrow \min, \quad l \in \mathbf{R}^n. \quad (18.6)$$

Согласно гл. 3, при $\det A_k \neq 0$, $A_k = \partial^2 f(x^k) / \partial x^2$, оно совпадает с единственным решением уравнения

$$b_k + A_k l = 0 \quad \left(b_k = \frac{\partial f(x^k)}{\partial x} \right)$$

и имеет вид

$$l^k = -A_k^{-1} b_k. \quad (18.7)$$

Вектор (18.7) называется *направлением Ньютона*.

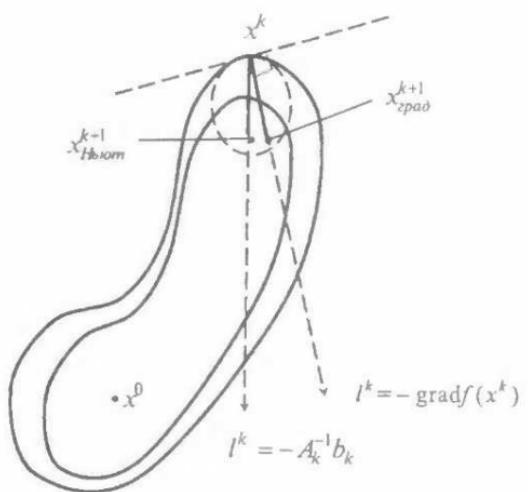


Рис. 18.3

Метод построения последовательных приближений по формуле (18.5), где l^k – направление Ньютона, а шаг $\theta_k \equiv 1$, называется **методом Ньютона**. Из приведенного описания видно, что метод Ньютона за одну итерацию строит оптимальный план задачи (18.1), если функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, квадратичная. Существуют модификации метода Ньютона, в которых шаг θ_k в (18.5) выбирается по аналогии с методами градиентного типа (разд. 18.1).

Разница между градиентным методом и методом Ньютона наглядно видна из рис. 18.3.

Теорема 18.3. Пусть

a) функция $f(x) \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$ сильно выпукла с константой μ ;

b) функция $\partial^2 f(x)/\partial x^2$, $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица с константой L :

$$\left\| \frac{\partial^2 f(x_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x_2)}{\partial x^2} \right\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n, L = \text{const} > 0;$$

c) начальное приближение x^1 выбрано таким, что

$$L \left\| \frac{\partial f(x^1)}{\partial x} \right\| \leq 2\mu^2 q,$$

где q – некоторая константа, $0 < q < 1$.

Тогда последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, генерируемая методом Ньютона, сходится к решению x^* задачи (18.1) с квадратичной скоростью:

$$\|x^k - x^*\| \leq \left(\frac{2\mu}{L} \right) q^{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Замечание 18.2. Метод Ньютона носит локальный характер, т. е. он быстро сходится вблизи точки минимума функции. Поэтому он, как правило, применяется на завершающем этапе поиска минимума, когда с помощью более грубых, менее трудоемких методов уже найдена некоторая точка, достаточно близкая к точке минимума.

§ 19. УСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются некоторые из алгоритмов минимизации функций многих переменных при наличии ограничений: метод проекций градиента, метод условного градиента, метод множителей Лагранжа, методы штрафных функций.

19.1. Метод проекции градиента

Будем рассматривать задачу:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subseteq \mathbf{R}^n, \quad (19.1)$$

где множество X не обязательно совпадает со всем пространством \mathbf{R}^n , а $f(x) \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$. Непосредственное применение описанного выше градиентного метода в случае $X \neq \mathbf{R}^n$ может привести к затруднениям, так как точка x^{k+1} из (18.3) при каком-то k может не принадлежать X . Однако эту трудность можно преодолеть, если полученную с помощью формулы (18.3) точку $x^k - \theta_k \operatorname{grad} f(x^k)$ при каждом k проектировать¹⁾ на множество X .

Проекцию точки x на множество X будем обозначать через $P_X(x)$.

Пусть $x^1 \in X$ – некоторое начальное приближение. Последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, строится по правилу

$$x^{k+1} = P_X(x^k - \theta_k \operatorname{grad} f(x^k)), \quad \theta_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19.2)$$

Если X – выпуклое замкнутое множество и способ выбора θ_k , $k = 1, 2, \dots$, в (19.2) задан согласно условиям 1, 2 разд. 2.1, то последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, будет однозначно определяться

¹⁾ Проекцией точки x из \mathbf{R}^n на множество X называется ближайшая к x точка \bar{x} множества X , т. е. точка $\bar{x} \in X$, удовлетворяющая условию $\|x - \bar{x}\| = \inf \|x - y\|$, $y \in X$.

условием (19.2). В частности, при $X = \mathbb{R}^n$ метод (19.2) превратится в метод градиентного типа.

Если в (19.2) на некоторой итерации оказалось $x^{k+1} = x^k$ (например, это случится при $\text{grad } f(x^k) = 0$), то процесс (19.2) прекращают. В этом случае для выяснения того, является ли в действительности x^k решением задачи (19.1) или нет, при необходимости проводят дополнительное исследование поведения функции $f(x)$, $x \in X$, в окрестности точки x^k . В частности, если $f(x)$, $x \in X$, – выпуклая функция, то такая точка x^k является решением задачи (19.1).

Теорема 19.1. Если функция $f(x)$, $x \in X$, ограничена снизу на множестве X и ее градиент удовлетворяет условию Липшица, то существует такое число $\theta_k > 0$, что метод сходится при $0 < \theta_k < \theta_0 < \infty$. Если, кроме того, функция $f(x)$, $x \in X$, выпукла, то последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, генерируемая методом, является минимизирующей, т. е. $f(x^*) = \inf f(x)$, $x \in X$; $f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$.

19.2. Метод условного градиента

Пусть требуется решить задачу (19.1). Опишем один из вариантов метода условного градиента. Предположим, что X – выпуклое замкнутое ограниченное множество из \mathbb{R}^n , функция $f(x) \in C^{(1)}(X)$.

Пусть $x^1 \in X$ – некоторое начальное приближение. Если известно k -е приближение $x^k \in X$, $k \geq 1$, то следующее приближение x^{k+1} вычисляют по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k(\bar{x}^k - x^k), \quad (19.3)$$

где \bar{x}^k – решение задачи

$$f_k(x) = \frac{\partial f'(x^k)}{\partial x}(x - x^k) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (19.4)$$

а шаг θ_k удовлетворяет равенству

$$f(x^k + \theta_k(\bar{x}^k - x^k)) = \min_{\theta \in [0, 1]} f(x^k + \theta(\bar{x}^k - x^k)).$$

Поскольку множество X замкнуто и ограничено, а линейная функция $f_k(x)$, $x \in X$, непрерывна, то точка \bar{x}^k из (19.4) всегда существует.

Если функция $f_k(x)$, $x \in X$, достигает своей нижней грани на X более, чем в одной точке, то в качестве точки \bar{x}^k берут любую из них.

Вектор $\bar{x}^k - x^k$, с помощью которого строится следующее приближение x^{k+1} , называется *условным градиентом* функции $f(x)$, $x \in X$, в точке x^k .

Если предположить, что градиент целевой функции удовлетворяет условию Липшица на X , то метод (19.3) генерирует последовательность x^k , $k = 1, 2, \dots$, вдоль которой функция $f(x)$, $x \in X$, монотонно убывает и $\lim_{k \rightarrow \infty} (\partial f(x^k)/\partial x)'(\bar{x}^k - x^k) = 0$.

В случае, когда функция $f(x)$, $x \in X$, еще и выпукла, то последовательность точек, построенная по описанным правилам, является минимизирующей и сходящейся к множеству точек глобального минимума.

Метод (19.3) целесообразно применять в тех случаях, когда задача (19.4) (задача минимизации линейной функции на множестве X) решается просто.

19.3. Метод модифицированных функций Лагранжа

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in \mathbf{R}^n : x \in X_0, g(x) \leq 0\}, \quad (19.5)$$

где $f(x)$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$, — заданные функции из $C^{(1)}(X_0)$. Пусть $f_* = \min_{x \in X} f(x) > -\infty$ и множество X_* точек минимума функции $f(x)$, $x \in X$, не пусто.

Наряду с классической функцией Лагранжа задачи (19.5)

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad x \in X_0, \quad \lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbf{R}^m : \lambda \geq 0\}, \quad (19.6)$$

рассмотрим следующую, *модифицированную*, функцию Лагранжа

$$M(x, \lambda) = f(x) + \frac{((\lambda + Ag(x))^+)^2}{2A} - \frac{|\lambda|^2}{2A}, \quad x \in X_0, \quad \lambda \in \Lambda_0, \quad (19.7)$$

где A — произвольная фиксированная положительная константа и принято обозначение

$$a^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_m^+), \quad a_i^+ = \max \{a_i, 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

— проекция точки $a \in \mathbf{R}^m$ на положительный ортант \mathbf{R}_+^m .

Если X_0 – выпуклое множество и функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $x \in X_0$, выпуклы, то функция $M(x, \lambda)$, $x \in X_0$, $\lambda \in \Lambda_0$, выпукла по переменной x на X_0 при любом фиксированном $\lambda \in \mathbf{R}^m$ и вогнута по переменной λ на Λ_0 при любом фиксированном $x \in X_0$.

В качестве начального приближения возьмем любые точки $x^1 \in X_0$, $\lambda \in \Lambda_0$. Пусть k -е приближение уже известно. Составим функцию

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \alpha M(x, \lambda^k), \quad x \in X_0, \quad (19.8)$$

где $\alpha > 0$ – параметр метода. Предположим, что существует точка \bar{x} , удовлетворяющая условиям

$$\bar{x} \in X_0, \quad \Phi_k(\bar{x}) = \min_{x \in X_0} \Phi_k(x), \quad x \in X_0. \quad (19.9)$$

В качестве следующего $(k+1)$ -го приближения берется точка x^{k+1} такая, что

$$x^{k+1} \in X_0, \quad \Phi_k(x^{k+1}) \leq \min_{x \in X_0} \Phi_k(x) + \frac{\delta_k^2}{2}, \quad |g(x^{k+1}) - g(\bar{x})| \leq \delta_k, \quad (19.10)$$

где $\delta_k \geq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. В частности, если точка \bar{x} из (21) известна, то можно положить $x^{k+1} = \bar{x}$. В общем случае для определения x^{k+1} из условий (19.10) нужно решать задачу (19.9) с помощью какого-либо сходящегося метода минимизации. Предположим, что точка x^{k+1} , удовлетворяющая условиям (19.10), найдена. Точка λ^{k+1} находится по формуле

$$\lambda^{k+1} = (\lambda^k + Ag(x^{k+1}))^+. \quad (19.11)$$

Таким образом, x^{k+1} , λ^{k+1} построены.

Теорема 19.2. Пусть $X_0 \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество; функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $x \in X_0$, выпуклы и принадлежат классу $C^{(1)}(X_0)$; $f_i > -\infty$, $X_0 \neq \emptyset$; функция Лагранжа (19.6) имеет хотя бы одну седловую точку; последовательность δ_k , $k = 1, 2, \dots$, из (19.10) неотрицательна и $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$. Тогда последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая условиям (19.10), (19.11), при

любом выборе начальных $(x^1, \lambda^1) \in X_0 \times \Lambda_0$ и любых фиксированных параметрах $\delta > 0$, $A > 0$ существует и сходится к некоторой седловой точке функции Лагранжа (19.6).

19.4. Метод штрафных функций

Будем рассматривать задачу (19.1). Основная идея метода заключается в сведении исходной задачи (19.1) к последовательности задач минимизации

$$\Phi_k(x) \rightarrow \min, \quad x \in X_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19.12)$$

где $\Phi_k(x)$, $x \in X_0$, – некоторая вспомогательная функция и $X \subset X_0$. При этом функция $\Phi_k(x)$, $x \in X_0$, подбирается так, чтобы она с ростом номера k мало отличалась от исходной функции $f(x)$, $x \in X$, и быстро возрастила на множестве $X_0 \setminus X$.

Определение 19.1. Последовательность функций $P_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, определенных и неотрицательных на множестве X_0 ($X \subset X_0$), называют *штрафом* или *штрафной функцией* множества X на множестве X_0 , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X, \\ \infty, & \text{если } x \in X_0 \setminus X. \end{cases}$$

Отсюда видно, что при больших k за нарушение условия $x \in X$ приходится «платить» большой штраф, в то время как при $x \in X$ штрафная функция представляет собой бесконечно малую величину при $k \rightarrow \infty$.

Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ можно указать сколь угодно различных штрафных функций. Например, если множество X имеет вид $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; h_j(x) = 0, j = \overline{1, l}\}$, тогда

$$P_k(x) = A_k \left(\sum_{i=1}^m (\max \{g_i(x), 0\})^p + \sum_{j=1}^l |h_j(x)|^p \right), \quad x \in X_0, \quad (19.13)$$

где $A_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$; $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \infty$; $p \geq 1$ – фиксированное число.

Допустим, что некоторое множество X_0 , содержащее X , а также штрафная функция $P_k(x)$, $x \in X_0$, множества X на X_0 уже выбра-

ны. Предполагая, что функция $f(x)$ определена на X_0 , введем функции

$$\Phi_k(x) = f(x) + P_k(x), \quad x \in X_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19.14)$$

и рассмотрим последовательность задач (19.12) с функциями (19.14). Будем считать, что

$$\Phi_{k^*} = \min \Phi_k(x) > -\infty, \quad x \in X_0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (19.15)$$

Если здесь при каждом $k = 1, 2, \dots$ нижняя грань достигается, то условия

$$\Phi_k(x^k) = \Phi_{k^*}, \quad x^k \in X_0, \quad (19.16)$$

определяют последовательность $x^k, k = 1, 2, \dots$. Однако точно определить x^k из (19.16) удается в редких случаях. Поэтому будем считать, что при каждом $k = 1, 2, \dots$ с помощью какого-либо метода минимизации найдена точка x^k , определяемая условиями

$$x^k \in X_0, \quad \Phi_k(x^k) \leq \Phi_{k^*} + \varepsilon_k, \quad (19.17)$$

где $\varepsilon_k > 0, k = 1, 2, \dots$, — некоторая заданная последовательность, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

Теорема 19.3. Пусть функции $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}; h_j(x), j = \overline{1, l}$; определены на множестве X_0 , а последовательность $x^k, k = 1, 2, \dots$, определена условиями (19.13) – (19.15), (19.17). Тогда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x^k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_{k^*} \leq f_*$$

Если, кроме того, $\min_{x \in X_0} f(x) > -\infty$, то

$$P(x^k) = \sum_{i=1}^m (\max \{g_i(x^k), 0\})^p + \sum_{j=1}^l |h_j(x^k)|^p = O(A_k^{-1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h_j(x^k) = 0, \quad j = \overline{1, l}.$$

Литература

1. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982.

3. Гилл, Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985.
4. Евтушенко, Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – М.: Наука, 1982.
5. Зангвилл, У. И. Нелинейное программирование / У. И. Зангвилл. – М.: Советское радио, 1973.
6. Зойтендейк, Г. Методы возможных направлений / Г. Зойтендейк. – М.: Изд-во иностр. литер., 1963.
7. Моисеев, Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М.: Наука, 1978.
8. Полак, Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э. Полак. – М.: Мир, 1974.
9. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М.: Наука, 1983.
10. Пшеничный, Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М.: Наука, 1975.
11. Пшеничный, Б. Н. Метод линеаризации / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1983.
12. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М.: Наука, 1979.
13. Фиакко, А. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. – М.: Мир, 1972.
14. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975.

Глава 5

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Дискретным программированием называют раздел математического программирования, в котором исследуются и решаются экстремальные задачи на конечных множествах.

§ 20. МЕТОДЫ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

20.1. Постановка задачи дискретного программирования

Рассмотрим задачу МП

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (20.1)$$

множество планов X которой дискретно, т. е. состоит из конечной совокупности элементов. Такая задача называется *задачей дискретного программирования*. Наиболее изученными и распространенными задачами дискретного программирования являются задачи ЛП с дополнительным условием целочисленности планов. Их называют *задачами целочисленного линейного программирования* (ЦЛП). Рассмотренная в разд. 1.1 производственная задача будет задачей ЦЛП, если вся выпускаемая предприятием продукция не обладает свойством произвольной делимости и ее объемы измеряются целыми числами.

С математической точки зрения задача дискретного программирования представляется тривиальной. В самом деле, для ее решения достаточно перенумеровать элементы множества X и затем последовательно вычислять значения функции $f(x)$ в этих точках, запоминая на каждом шаге тот из уже проверенных элементов, для которого значение целевой функции было наименьшим. Однако довольно часто такая процедура практически нереализуема даже с использованием ЭВМ из-за слишком большого числа элементов множества X . К сказанному следует добавить, что это множество может задаваться в неявной форме. Так, например, в задаче ЦЛП оно определяется как совокупность целочисленных решений системы линейных уравнений и неравенств. При таком и более сложных способах задания множества X нетривиальной становится не только задача полного перечисления его элементов, но и указания хотя бы одного элемента этого множества.

Заметим, что любой план задачи дискретного программирования (20.1) будет локально оптимальным в смысле определения, приведенного в § 11, и результаты, полученные в предыдущих главах с помо-

щью средств непрерывного анализа, непосредственно применять в данном случае нельзя.

20.2. Общая схема методов ветвей и границ

Один из подходов к решению задачи дискретного программирования связан с такой организацией перебора элементов множества X , при которой удается отбрасывать не отдельные точки, а достаточно большие подмножества, состоящие из заведомо неоптимальных элементов. Эта идея положена в основу алгоритмов, которые принято называть *методами ветвей и границ*. Приведем общую схему таких методов.

Алгоритмом дробления конечного множества X назовем правило, определяющее на первом шаге разбиение X на несколько подмножеств, затем – разбиение каждого из полученных подмножеств и т. д., действующее до тех пор, пока элементами разбиения не станут отдельные точки множества X . Применение алгоритма дробления обычно осуществляется следующим образом. После разбиения X среди полученных подмножеств (их называют *концевыми множествами первого шага*) выбирается одно, и к нему применяется алгоритм дробления. Полученные при этом подмножества вместе с остальными концевыми множествами первого шага образуют *концевые множества второго шага*. Из них выбирается одно, к нему применяется алгоритм дробления и т. д. *Концевыми множествами k -го шага* являются все элементы очередного разбиения и не подвергшиеся дроблению концевые множества $(k - 1)$ -го шага.

Числовую функцию $\xi(Y)$, $Y \subset X$, определенную на совокупности подмножеств X , которые могут быть получены в процессе дробления, называют *системой оценок дробления*, а значение этой функции на некотором подмножестве – его *оценкой*.

Методом ветвей и границ для решения задачи дискретного программирования (20.1) назовем алгоритм дробления множества X и связанную с ним систему оценок дробления ξ , удовлетворяющую следующим условиям:

1) оценка любого подмножества, полученного при дроблении, не превосходит минимального значения целевой функции на этом подмножестве;

2) оценка любого подмножества не меньше оценки того множества, разбиением которого оно получено;

3) оценка множества, состоящего из единственной точки, равна значению целевой функции в этой точке.

Реализация любого метода ветвей и границ может осуществляться по двум основным схемам.

Схема полного ветвления. Прежде всего вычисляется оценка $\xi(X)$ множества планов. В соответствии с алгоритмом дробления осуществляется разбиение множества X и вычисляются оценки полученных концевых множеств 1-го шага. На каждом последующем шаге из всех концевых множеств предыдущего шага выбирается множество, имеющее минимальную оценку¹⁾, осуществляется его разбиение в соответствии с алгоритмом дробления и вычисляются оценки вновь полученных концевых множеств. Вычисления заканчиваются после получения одноэлементного множества, оценка которого не превосходит оценок всех концевых множеств последнего шага. Этот элемент (план) является решением задачи (20.1), что очевидным образом следует из свойств 1 – 3 оценок.

Схема одностороннего ветвления. В отличие от схемы полного ветвления, здесь на каждом шаге выбор концевого множества, имеющего наименьшую оценку и подлежащего разбиению, производится не из всех концевых множеств предыдущего шага, а только из тех, которые впервые получены на этом шаге дробления. Процесс осуществляется до получения, по крайней мере, одного одноэлементного подмножества. Минимальная оценка полученных одноэлементных подмножеств называется *первым рекордом*. Запоминаются элемент, имеющий эту оценку, и значение рекорда. После вычисления рекорда из рассмотрения исключаются все концевые множества последнего шага, имеющие оценки не меньше рекорда. Множество, имеющее наименьшую оценку среди оставшихся концевых множеств, подвергается дроблению в соответствии со схемой одностороннего ветвления. Однако сейчас в отличие от процесса получения первого рекорда на каждом шаге исключаются из дальнейшего рассмотрения концевые множества, имеющие оценки не меньше рекорда. Эта процедура либо заканчивается появлением нового одноэлементного множества, имеющего оценку меньше рекорда, либо обрывается вследствие того, что все концевые множества, впервые полученные на последнем шаге дробления, будут исключены из рассмотрения. Первый случай приводит к новому рекорду, который запоминается вместе с соответствующим элементом. В дальнейшем для исключения концевых множеств использу-

¹⁾ Если таких множеств несколько, то выбирается любое из них.

ется этот рекорд. Во втором случае из оставшихся концевых множеств (их оценки будут меньше первого рекорда) выбирается множество с наименьшей оценкой и осуществляется его дробление в соответствии со схемой одностороннего ветвления. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не окажется, что на некотором шаге оценки всех концевых множеств будут не меньше последнего рекорда. Этот рекорд равен минимальному значению целевой функции на множестве X , а соответствующий ему элемент является оптимальным планом задачи (20.1).

Для решения конкретной задачи с помощью любой из двух описанных схем нужно задать алгоритм дробления и указать способ вычисления оценок. То и другое определяется спецификой рассматриваемой задачи и целиком зависит от исследователя.

§ 21. ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ

Задачами о рюкзаке называют задачи дискретного программирования, которые допускают следующую интерпретацию. Имеется n предметов с номерами $1, 2, \dots, n$. Вес i -го предмета равен p_i , а его ценность составляет c_i . Требуется уложить в рюкзак совокупность предметов с минимальным суммарным весом при условии, что ценность груза будет не меньше заданной величины c .

Введем булевые переменные x_i , $i = \overline{1, n}$: $x_i = 1$, если i -й предмет укладывается в рюкзак, в противном случае $x_i = 0$. Тогда математическая модель поставленной задачи будет иметь следующий вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad x_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, n}. \quad (21.1)$$

Эта задача дискретного программирования может быть решена методом ветвей и границ. Опишем алгоритм дробления и связанную с ним систему оценок дробления.

Пусть X – множество планов задачи (21.1). Положим

$$\xi(X) = \min f(x), \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, n}. \quad (21.2)$$

Для того чтобы подсчитать эту оценку, нужно решить «непрерывную» задачу ЛП. Множество ее планов является расширением X , и, как следствие, $\xi(X) \leq \min f(x)$, $x \in X$. Задачу (21.2) называют задачей о рюкзаке с делимыми предметами. Ее содержательный смысл состоит в

следующем. Предполагается, что укладываемые в рюкзак предметы допускают сколь угодно мелкое дробление без потери относительной ценности (ценности на единицу веса). Нужно при этом условии засыпать в рюкзак груз минимального веса из данных предметов так, чтобы ценность груза была не меньше c . Очевиден метод решения такой задачи. Прежде всего нужно найти предмет с наименьшим относительным весом p_i/c_i на единицу ценности. Пусть такой предмет имеет номер i_1 . Этот предмет в раздробленном виде нужно засыпать в рюкзак до тех пор, пока не будет достигнута заданная стоимость груза c или не будет засыпан весь предмет. Первый случай реализуется, когда $c_{i_1} \geq c$. В этом случае план $x_{i_1}^* = c/c_{i_1}$, $x_i^* = 0$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq i_1$, является решением задачи (21.2). Во втором случае, т. е. когда $c_{i_1} < c$, полагаем $x_{i_1}^* = 1$ и среди оставшихся предметов находим тот, который имеет наименьший относительный вес на единицу ценности. С ним поступаем так же, как с предметом i_1 , с той лишь разницей, что сейчас вместо c берется $c - c_{i_1}$. Продолжая этот процесс, либо построим оптимальный план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ задачи (21.2), либо не достигнем заданной стоимости груза c , несмотря на то, что все предметы будут засыпаны. Последний случай реализуется, когда $\sum_{i=1}^n c_i < c$. В этом случае задача (21.2), а значит и исходная задача (21.1), не имеет решения из-за пустоты множества планов.

Предположим, что оптимальный план x^* задачи (21.2) построен. Если все его компоненты целочисленные, т. е. равны 0 или 1, то он, очевидно, будет решением исходной задачи (21.1). В противном случае множество X разбиваем на два подмножества $X_{11} = \{x \in X : x_1 = 0\}$, $X_{12} = \{x \in X : x_1 = 1\}$. В качестве оценок этих концевых множеств возьмем следующие числа:

$$\xi(X_{11}) = \min \sum_{i=2}^n p_i x_i, \quad \sum_{i=2}^n c_i x_i \geq c, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{2, n}, \quad (21.3)$$

$$\xi(X_{12}) = \min \left(p_1 + \sum_{i=2}^n p_i x_i \right), \quad \sum_{i=2}^n c_i x_i \geq c - c_1, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{2, n}. \quad (21.4)$$

Задачи (21.3), (21.4) решаем описанным выше способом¹⁾. Множество планов задачи (21.3) может оказаться пустым. В этом случае полагаем $\xi(X_{11}) = \infty$.

Дальнейшее решение задачи проводится в соответствии с выбранной схемой ветвления. Заметим, что если $\xi(X_{11}) = \infty$, то в любой схеме ветвления пустое множество X_{11} не подлежит дроблению. В случае, когда оптимальный план \bar{x}^* задачи (21.3) целочисленный, множество X_{11} разбивается на два подмножества $X_{21} = \{(0, \bar{x}^*)\}$ и $X_{22} = X_{11} \setminus X_{21}$ с оценками $\xi(X_{21}) = \xi(X_{22}) = \xi(X_{11})$. В дальнейшем эти концевые множества дробиться не будут (см. § 20). Если у плана \bar{x}^* есть дробные компоненты, то в качестве элементов разбиения X_{11} берутся множества $X_{21} = \{x \in X_{11} : x_2 = 0\}$, $X_{22} = \{x \in X_{11} : x_2 = 1\}$. Их оценки вычисляются путем решения следующих задач:

$$\xi(X_{21}) = \min \sum_{i=3}^n p_i x_i, \quad \sum_{i=3}^n c_i x_i \geq c, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{3, n},$$

$$\xi(X_{22}) = \min \left(p_2 + \sum_{i=3}^n p_i x_i \right), \quad \sum_{i=3}^n c_i x_i \geq c - c_2, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{3, n}.$$

Множество X_{12} и подлежащие дроблению на последующих шагах концевые множества разбиваются и оцениваются аналогичным образом. Свойства 1–3 оценок (см. разд. 20.2) будут при этом, очевидно, выполняться.

Пример 21.1. Решим задачу о рюкзаке, в которой $n = 5$, $c = 30$, а остальные данные приведены в табл. 21.1

Вычислим оценку множества планов X этой задачи:

$$\begin{aligned} \xi(X) &= \min(6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 4x_5), \\ 10x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 4x_4 + 6x_5 &\geq 30, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, 5}. \end{aligned} \tag{21.5}$$

Задачу (21.5) решаем описанным выше методом. В порядке возрастания относительного веса на единицу ценности предметы расположатся следующим образом: 3 ($p_3 / c_3 = 5/16$), 2 ($p_2 / c_2 = 2/5$), 1 ($p_1 / c_1 = 3/5$), 5 ($p_5 / c_5 = 2/3$), 4 ($p_4 / c_4 = 2$). Суммарная ценность предметов 3, 2 меньше, а предметов 3, 2, 1 больше заданной стоимости груза. Поэтому предметы 3, 2 в раздробленном виде засыпаются в рюк-

Таблица 21.1

i	1	2	3	4	5
c_i	10	5	16	4	6
p_i	6	2	5	8	4

¹⁾ Исключение составляет лишь случай, когда в задаче (21.4) $c - c_1 \leq 0$. В такой ситуации решением этой задачи, очевидно, будет нулевой вектор.

зак полностью ($x_3^* = x_2^* = 1$), а предмет 1 лишь частично ($x_1^* = 9/10$). Заданная ценность груза при этом будет достигнута, и остальные предметы вообще не засыпаются ($x_4^* = x_5^* = 0$). Итак, решением задачи (21.5) является план $(9/10, 1, 1, 0, 0)$, а $\xi(X) = 12\frac{2}{5}$. Множество X разбиваем на два подмножества $X_{11} = \{x \in X : x_1 = 0\}$, $X_{12} = \{x \in X : x_1 = 1\}$ и полагаем

$$\xi(X_{11}) = \min(2x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 4x_5), \quad (21.6)$$

$$5x_2 + 16x_3 + 4x_4 + 6x_5 \geq 30, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{2, 5};$$

$$\xi(X_{12}) = \min(6 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 4x_5), \quad (21.7)$$

$$5x_2 + 16x_3 + 4x_4 + 6x_5 \geq 20, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{2, 5}.$$

Задачи (21.6), (21.7) решаем тем же методом, что и задачу (21.5). Их оптимальными планами являются соответственно векторы $(1, 1, 3/4, 1)$, $(4/5, 1, 0, 0)$.

Поскольку $\xi(X_{11}) = 17$, $\xi(X_{12}) = 12\frac{3}{5}$, то наименьшую оценку среди концевых множеств первого шага имеет X_{12} . Ветвим это множество на два $X_{21} = \{x \in X_{12} : x_2 = 0\}$, $X_{22} = \{x \in X_{12} : x_2 = 1\}$, полагая

$$\xi(X_{21}) = \min(6 + 5x_3 + 8x_4 + 4x_5), \quad (21.8)$$

$$16x_3 + 4x_4 + 6x_5 \geq 20, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{3, 5};$$

$$\xi(X_{22}) = \min(8 + 5x_3 + 8x_4 + 4x_5), \quad (21.9)$$

$$16x_3 + 4x_4 + 6x_5 \geq 15, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{3, 5}.$$

Оптимальными планами задач (21.8), (21.9) являются соответственно векторы $(1, 0, 2/3)$, $(15/16, 0, 0)$, при этом $\xi(X_{21}) = 13\frac{2}{3}$, $\xi(X_{22}) = 12\frac{11}{16}$.

Среди концевых множеств X_{11} , X_{21} , X_{22} второго шага наименьшую оценку имеет X_{22} . При любой схеме ветвления на следующем шаге нужно дробить это множество. Разбиваем его на подмножества $X_{31} = \{x \in X_{22} : x_3 = 0\}$, $X_{32} = \{x \in X_{22} : x_3 = 1\}$ и полагаем

$$\xi(X_{31}) = \min(8 + 8x_4 + 4x_5), \quad 4x_4 + 6x_5 \geq 15, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{4, 5}; \quad (21.10)$$

$$\xi(X_{32}) = \min(13 + 8x_4 + 4x_5), \quad 4x_4 + 6x_5 \geq -1, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{4, 5}. \quad (21.11)$$

Множество планов задачи (21.10) пусто, поэтому $\xi(X_{31}) = \infty$. Решением задачи (21.11) является вектор $(0, 0)$, а $\xi(X_{32}) = 13$. Среди концевых множеств X_{11} , X_{21} , X_{31} , X_{32} третьего шага наименьшую оценку имеет множество X_{32} , впервые полученное на этом шаге. Поэтому, какая бы схема ветвления не применялась, дробить следует его. Так как оптимальный план $(0, 0)$ задачи (21.11) целочисленный, то разбиваем X_{32} на подмножества $X_{41} = \{(1, 1, 1, 0, 0)\}$, $X_{42} = X_{32} \setminus X_{41}$,

полагая $\xi(X_{41}) = \xi(X_{42}) = \xi(X_{32}) = 13$. Одноэлементное множество X_{41} имеет наименьшую оценку среди всех концевых множеств четвертого шага. Тогда соответствующий элемент $x^0 = (1, 1, 1, 0, 0)$ является решением исходной задачи, $\xi(X_{41}) = 13$ есть оптимальное значение целевой функции. Таким образом, минимальный вес рюкзака равен 13 и достигается при загрузке предметов с номерами 1, 2, 3. Суммарная ценность груза при этом равна 31.

На рис. 21.1 графически изображена схема проведенных вычислений. Рядом с концевыми множествами указаны их оценки.

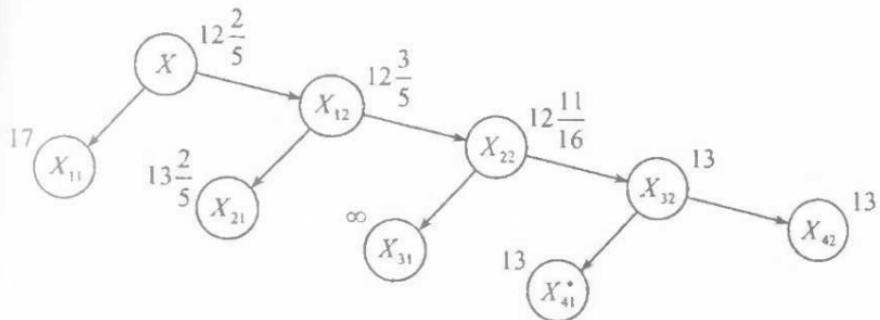


Рис. 21.1

§ 22. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

22.1. Метод ветвей и границ

Рассмотрим задачу, к которой впервые был применен метод ветвей и границ:

$$c'x \rightarrow \min, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad (22.1)$$

где \mathbb{Z}^n – множество векторов из \mathbf{R}^n с целочисленными компонентами. Опишем алгоритм дробления и связанную с ним систему оценок дробления для этой задачи ЦЛП. В дальнейшем будем считать, что элементы матрицы A и компоненты векторов b, c – целые числа.

В качестве оценки множества планов X задачи (22.1) возьмем минимальное значение целевой функции в задаче ЛП

$$\xi(X) = \min c'x, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (22.2)$$

которая получается из исходной, если исключить требование целочисленности допустимых точек. Может оказаться, что эта задача не имеет решения из-за пустоты множества планов. Тогда по той же причине неразрешима и исходная задача (22.1). Если в задаче (22.2) целевая функция не ограничена снизу на множестве планов, то исходная задача также не имеет решения, но не обязательно из-за неограниченности це-

левой функции. В этом случае, как легко убедиться на примерах, множество планов задачи (22.1) может быть пустым. Допустим, что оптимальный план x^* задачи (22.2) построен. Рассмотрим два возможных случая: 1) $x^* \in \mathbb{Z}^n$; 2) $x^* \notin \mathbb{Z}^n$. В первом случае x^* является решением задачи (22.1). Если встретился второй случай, то у вектора x^* находим нецелочисленную компоненту $x_{i_1}^*$ и множество X дробим на два подмножества $X_{11} = \left\{ x \in X : x_{i_1} \leq [x_{i_1}^*] \right\}$, $X_{12} = \left\{ x \in X : x_{i_1} \geq [x_{i_1}^*] + 1 \right\}$ ($[a]$ – целая часть числа a). В качестве оценок этих концевых множеств берем следующие числа:

$$\xi(X_{11}) = \min c'x, Ax \leq b, x_{i_1} \leq [x_{i_1}^*], x \geq 0, \quad (22.3)$$

$$\xi(X_{12}) = \min c'x, Ax \leq b, x_{i_1} \geq [x_{i_1}^*] + 1, x \geq 0. \quad (22.4)$$

Каждая из задач (22.3), (22.4) отличается от (22.2) только одним дополнительным ограничением. Поэтому рекомендуется решать их двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального двойственный базисный план, построенный по оптимальным потенциалам задачи (22.2) (см. разд. 3.5). Если в какой-нибудь из задач (22.3), (22.4) множество планов окажется пустым, то соответствующую оценку полагаем равной ∞ . Попутно заметим, что при любой схеме ветвления в дальнейшем могут дробиться лишь те концевые множества, которые имеют конечные оценки. В случае когда $\xi(X_{11}) = \xi(X_{12}) = \infty$, вычисления прекращаются: исходная задача (22.1) не имеет решения из-за пустоты множества планов (противоречивости ограничений).

Множество X_{11} при необходимости разбивается следующим образом. Если оптимальный план \bar{x}^* задачи (22.3) целочисленный, то X_{11} ветвим на два подмножества $X_{21} = \{\bar{x}^*\}$, $X_{22} = X_{11} \setminus X_{21}$, полагая $\xi(X_{21}) = \xi(X_{22}) = \xi(X_{11})$. При любой схеме ветвления эти концевые множества в дальнейшем не подлежат дроблению (см. разд. 20.2). Если у вектора \bar{x}^* есть нецелочисленная компонента $\bar{x}_{i_2}^*$, то множество X_{11} разбиваем на подмножества

$$X_{21} = \left\{ x \in X_{11} : x_{i_2} \leq [\bar{x}_{i_2}^*] \right\}, \quad X_{22} = \left\{ x \in X_{11} : x_{i_2} \geq [\bar{x}_{i_2}^*] + 1 \right\},$$

оценки которых полагаем равными

$$\xi(X_{21}) = \min c'x, Ax \leq b, x_{i_1} \leq [x_{i_1}^*], x_{i_2} \leq [\bar{x}_{i_2}^*], x \geq 0,$$

$$\xi(X_{22}) = \min c'x, Ax \leq b, x_{i_1} \leq [x_{i_1}^*], x_{i_2} \geq [\bar{x}_{i_2}^*] + 1, x \geq 0.$$

Множество X_{12} и подлежащие дроблению в соответствии с выбранной схемой ветвления (см. разд. 20.2) другие концевые множества разбиваются и оцениваются аналогично.

Замечание 22.1. Кажется естественным попытаться получить приближенное решение исходной задачи ЦЛП (22.1), округляя компоненты оптимального плана x^* задачи (22.2) до ближайших целых чисел. Однако такое округление не всегда дает удовлетворительный результат. Читателю в качестве упражнения предлагается построить примеры с $n = 2$, в которых дискретный и непрерывный оптимумы отстоят далеко друг от друга как по расстоянию, так и по значениям целевой функции.

Замечание 22.2. Из неразрешимости задачи ЛП (22.2), вообще говоря, не следует неразрешимость задачи ЦЛП (22.1), если среди элементов матрицы A и компонент вектора b есть иррациональные числа (задача с рациональными коэффициентами эквивалентна задаче с целыми коэффициентами). Например, в задаче

$$-x_1 \rightarrow \min, \sqrt{2}x_1 - x_2 \leq 0, x_2 - \sqrt{2}x_1 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

целевая функция не ограничена снизу на множестве планов. В то же время среди планов этой задачи есть только один целочисленный $(0, 0)$. Понятно, что он является решением соответствующей задачи ЦЛП.

Пример 22.1. Решим с помощью описанного метода следующую задачу:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\rightarrow \min, 5x_1 - x_2 \leq 15, 2x_2 - x_1 \leq 6, 2x_2 - 7x_1 \leq 0, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Вычислим оценку множества планов X этой задачи:

$$\begin{aligned} \xi(X) &= \min(x_1 - x_2), 5x_1 - x_2 \leq 15, 2x_2 - x_1 \leq 6, \\ 2x_2 - 7x_1 &\leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Задачу (22.6) и другие задачи ЛП, возникающие при ветвлении, удобнее всего решать с помощью графического метода (см. разд. 1.2). Оптимальным планом задачи (22.6) является вектор $\left(1, 3\frac{1}{2}\right)$, а $\xi(X) = -2\frac{1}{2}$. Вторая компонента оптимального плана неполочисленная, поэтому X разбиваем на два подмножества

$$X_{11} = \{(x_1, x_2) \in X : x_2 \leq 3\}, \quad X_{12} = \{(x_1, x_2) \in X : x_2 \geq 4\},$$

полагая

$$\begin{aligned} \xi(X_{11}) &= \min(x_1 - x_2), 5x_1 - x_2 \leq 15, 2x_2 - x_1 \leq 6, \\ 2x_2 - 7x_1 &\leq 0, x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 3; \end{aligned} \quad (22.7)$$

$$\begin{aligned} \xi(X_{12}) &= \min(x_1 - x_2), 5x_1 - x_2 \leq 15, 2x_2 - x_1 \leq 6, \\ 2x_2 - 7x_1 &\leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 4. \end{aligned} \quad (22.8)$$

Оптимальным планом задачи (22.7) является вектор $(6/7, 3)$, при этом $\xi(X_{11}) = -2 \frac{1}{7}$. Соответственно решением задачи (22.8) будет вектор $(2, 4)$, а $\xi(X_{12}) = -2$.

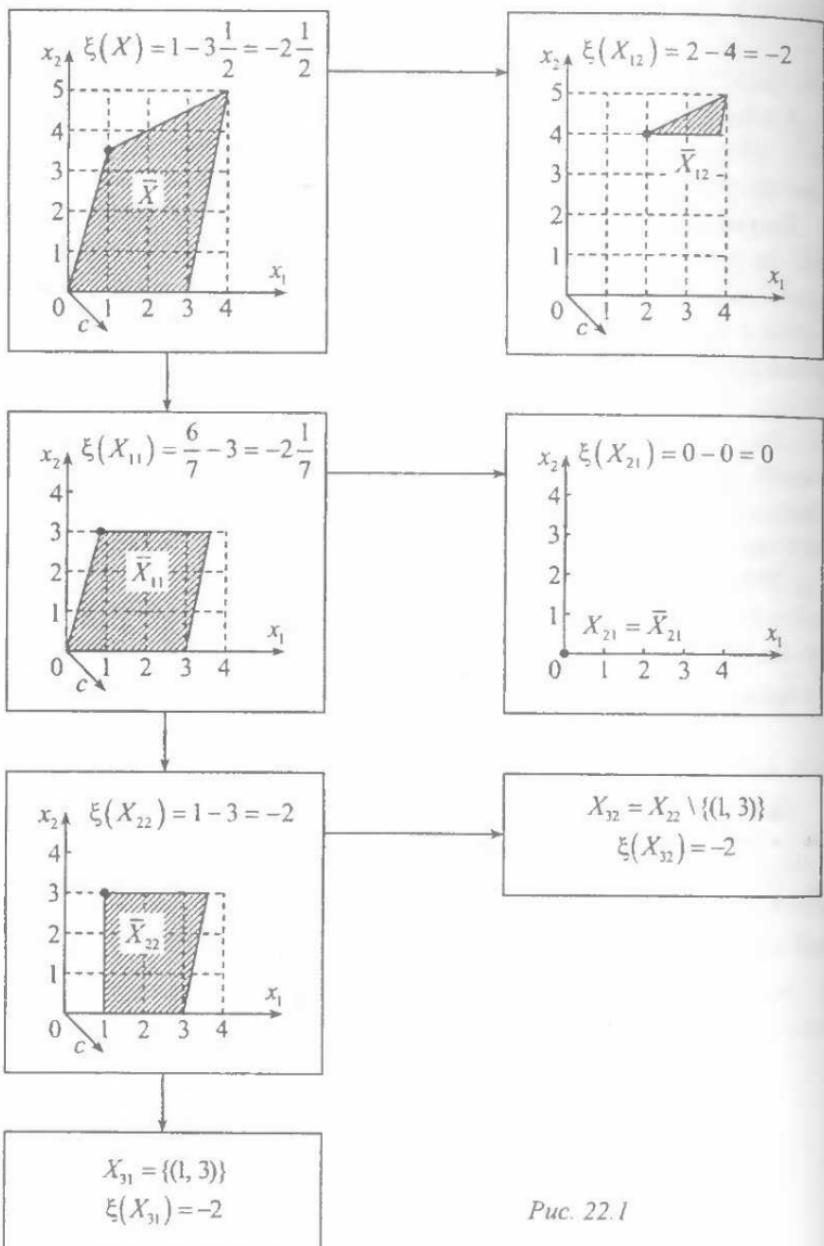


Рис. 22.1

Среди концевых множеств первого шага наименьшую оценку имеет X_{11} . Поскольку первая компонента оптимального плана задачи (22.7) нецелочисленная, то множество X_{11} дробим на подмножества $X_{21} = \{(x_1, x_2) \in X_{11} : x_1 \leq 0\}$, $X_{22} = \{(x_1, x_2) \in X_{11} : x_2 \geq 1\}$ и полагаем

$$\begin{aligned}\xi(X_{21}) &= \min(x_1 - x_2), \quad 5x_1 - x_2 \leq 15, \quad 2x_2 - x_1 \leq 6, \\ 2x_2 - 7x_1 &\leq 0, \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 3;\end{aligned}\tag{22.9}$$

$$\begin{aligned}\xi(X_{22}) &= \min(x_1 - x_2), \quad 5x_1 - x_2 \leq 15, \quad 2x_2 - x_1 \leq 6, \\ 2x_2 - 7x_1 &\leq 0, \quad x_1 \geq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 3.\end{aligned}\tag{22.10}$$

Решением задачи (22.9) является вектор $(0, 0)$, а задачи (22.10) – вектор $(1, 3)$, при этом $\xi(X_{21}) = 0$, $\xi(X_{22}) = -2$.

Среди концевых множеств X_{12}, X_{21}, X_{22} второго шага минимальную оценку имеют X_{12}, X_{22} . При применении схемы одностороннего ветвления следует дробить множество X_{22} , впервые полученное на втором шаге. Если же применяется схема полного ветвления, то можно разбивать любые из множеств X_{12}, X_{22} . Будем ветвить X_{22} . Поскольку оптимальный план $(1, 3)$ задачи (22.10) целочисленный, то это множество разбиваем на подмножества $X_{31} = \{(1, 3)\}$, $X_{32} = X_{22} \setminus X_{31}$, полагая $\xi(X_{31}) = \xi(X_{32}) = \xi(X_{22}) = -2$. Одноэлементное множество X_{31} имеет наименьшую оценку среди всех концевых множеств третьего шага. Поэтому соответствующий элемент $x^0 = (1, 3)$ является решением исходной задачи (22.5).

На рисунке 22.1 изображена схема проведенных вычислений с применением графического метода решения сопутствующих задач ЛП. Чerta над концевым множеством означает его «непрерывное» расширение после отказа от требования целочисленности планов.

Проанализируем схему полного ветвления, когда на третьем шаге дробится множество X_{12} . Поскольку решением задачи (22.8) является целочисленный вектор $(2, 4)$, то X_{12} нужно разбивать на подмножества $X_{31} = \{(2, 4)\}$, $X_{32} = X_{12} \setminus X_{31}$, с оценками $\xi(X_{31}) = \xi(X_{32}) = \xi(X_{12}) = -2$. Одноэлементное множество X_{31} имеет наименьшую оценку среди всех концевых множеств третьего шага. Поэтому соответствующий элемент $(2, 4)$ является оптимальным планом исходной задачи (22.5). Таким образом, эта задача имеет, по крайней мере, два решения $(1, 3)$ и $(2, 4)$.

22.2. Метод отсечения Гомори

Один из подходов к решению задач ЦЛП состоит в последовательном введении дополнительных ограничений, не исключающих целочисленных допустимых точек, пока оптимальный план соответствующей «непрерывной» задачи ЛП не будет целочисленным. Понятно, что в этом случае он является оптимальной допустимой точкой и в исходной задаче ЦЛП. Заметим, что процесс введения дополнительных ограничений (их называют *отсечениями*) обязательно остановится,

если область, задаваемая линейными ограничениями, сократится до выпуклой оболочки множества планов исходной задачи.

На рис. 22.2 проиллюстрирован один из возможных способов введения отсечений для задачи ЦЛП с двумя переменными. Выпуклая оболочка множества планов задачи заштрихована.

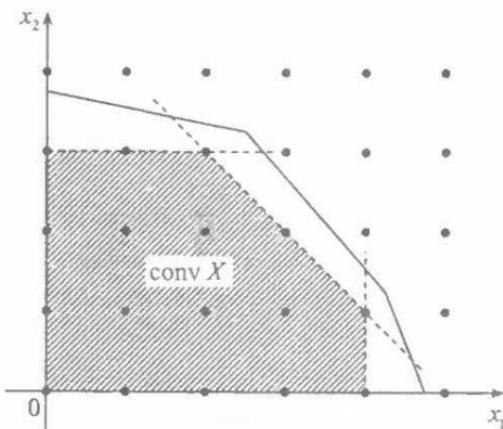


Рис. 22.2

Опишем метод введения дополнительных ограничений, разработанный Р. Гомори. Предложенные им отсечения обладают следующими свойствами:

- 1) все дополнительные ограничения сохраняют планы исходной целочисленной задачи;
- 2) каждое новое отсечение сужает область, задаваемую линейными ограничениями;
- 3) за конечное число шагов создается достаточное количество дополнительных ограничений для того, чтобы оптимальный план «непрерывной» модифицированной задачи был целочисленным.

Метод Гомори разработан для канонической задачи ЦЛП с односторонними прямыми ограничениями

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad (22.11)$$

и целочисленными коэффициентами. Вычисления начинаются с решения симплекс-методом задачи ЛП

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (22.12)$$

без условия целочисленности планов. Если эта задача не имеет решения, то неразрешима и исходная задача. В противном случае будет построен оптимальный базисный план x^* . Если все базисные компоненты

$x_j^*, j \in J_B$, этого плана – целые числа, то x^* – решение задачи (22.11). Пусть среди базисных компонент есть нецелочисленная x_k^* . В этом случае вводится дополнительное линейное ограничение

$$\sum_{j \in J_H} \{x_{kj}\} x_j \geq \{x_k^*\}, \quad (22.13)$$

где J_H – множество небазисных индексов плана x^* , x_{kj} – компонента с индексом k вектора $A_B^{-1} a_j$, $A_B = (a_j, j \in J_B)$ – базисная матрица, $a_j, j = \overline{1, n}$, – векторы условий ($\{a\} = a - [a]$ – дробная часть числа a).

Поскольку $\{x_k^*\} > 0$, $x_j^* = 0, j \in J_H$, то ограничение (22.13) отсекает оптимальный план x^* задачи (22.12). Покажем, что любой план $x = (x_1, \dots, x_n)$ исходной задачи (22.11) удовлетворяет этому ограничению. Пусть $x_B = (x_j, j \in J_B)$, $x_H = (x_j, j \in J_H)$, $A_H = (a_j, j \in J_H)$, тогда $A_B x_B + A_H x_H = b$, или $x_B + A_B^{-1} A_H x_H = A_B^{-1} b = x_B^*$. В частности,

$$x_k + \sum_{j \in J_H} x_{kj} x_j = x_k^*. \quad (22.14)$$

Так как $x_j, j = \overline{1, n}$, – неотрицательные числа, то

$$\sum_{j \in J_H} [x_{kj}] x_j \leq \sum_{j \in J_H} x_{kj} x_j.$$

Отсюда и из (22.14) получаем

$$x_k + \sum_{j \in J_H} [x_{kj}] x_j \leq x_k^*.$$

Поскольку x – целочисленный план, то левая часть этого неравенства – целое число. Тогда

$$x_k + \sum_{j \in J_H} [x_{kj}] x_j \leq [x_k^*],$$

что вместе с (22.14) приводит к неравенству (22.13). Таким образом, любой план исходной задачи удовлетворяет введенному дополнительному ограничению.

Второй этап алгоритма Гомори состоит в решении задачи ЛП

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, \sum_{j \in J_H} \{x_{kj}\} x_j \geq \{x_k^*\}, x \geq 0, \quad (22.15)$$

двойственным симплекс-методом. Необходимая для начала вычислений информация будет известна после решения задачи (22.12) (см. разд. 3.5). Если задача (22.15) не имеет решения из-за пустоты

множества планов, то по той же причине неразрешима и исходная задача. В противном случае будет построен оптимальный план задачи (22.15). Если все компоненты этого плана – целые числа, то он является решением исходной задачи (22.11). В случае наличия у решения задачи (22.15) нецелочисленных компонент к ограничениям этой задачи добавляется еще одно, причем второе отсечение вводится так же, как и первое. Полученная задача решается двойственным симплекс-методом и т. д.

При отсутствии зацикливания в симплекс-алгоритмах, с помощью которых решаются сопутствующие задачи ЛП, метод Гомори позволяет за конечное число шагов найти решение исходной задачи ЦЛП либо установить ее неразрешимость вследствие отсутствия планов.

Основным недостатком методов отсечения и, в частности, алгоритма Гомори является то, что с их помощью нельзя решать большие задачи (скажем, с несколькими десятками переменных и ограничений), так как в этом случае число необходимых отсечений, как правило, является чрезмерно большим.

Пример 22.2. Решим методом Гомори следующую задачу ЦЛП:

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow \max, \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 14, \quad 3x_2 - 4x_1 \leq 0, \\ 0 &\leq x_1 \leq 4, \quad x_2 \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \quad (22.16)$$

Вводя свободные переменные x_3, x_4, x_5 , сведем эту задачу к канонической:

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow \max, \quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \quad -4x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_5 &= 4, \quad x_i \geq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, 5}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Задачу (22.17) без условия целочисленности планов решаем симплекс-методом. После двух итераций получаем оптимальный базисный план $x^* = \left(2, 2\frac{2}{3}, 0, 0, 5\right)$, у которого $J_B = \{1, 2, 5\}$. Вторая компонента этого плана нецелочисленная, $\{x_2^*\} = 2/3$, $x_{23} = \{x_{23}\} = 4/21$, $x_{24} = \{x_{24}\} = 1/7$. Соответственно с этим вводим дополнительное ограничение

$$\frac{4}{21}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \geq \frac{2}{3}.$$

Заметим, что оно порождает в плоскости переменных x_1, x_2 отсечение $x_2 \leq 2$.

Задача (22.15) после приведения ее к канонической форме в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow \max, \quad 3x_1 + x_2 + x_3 = 14, \quad -4x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_5 &= 4, \quad -\frac{4}{21}x_3 - \frac{1}{7}x_4 + x_6 = -\frac{2}{3}, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 6}. \end{aligned} \quad (22.18)$$

За одну итерацию двойственного симплекс-метода с использованием информации, полученной на предыдущем этапе (см. разд. 3.5), находим оптимальный базисный план $\bar{x}^* = \left(1\frac{1}{2}, 2, 3\frac{1}{2}, 0, 2\frac{1}{2}, 0\right)$ задачи (22.18) с множеством базисных индексов

$J_B = \{1, 2, 3, 5\}$. У этого плана три нецелочисленные компоненты. Для отсечения используем первую компоненту. Поскольку $\{\bar{x}_1^*\} = 1/2$, $\{x_{14}\} = \{x_{16}\} = 3/4$, то второе дополнительное ограничение имеет вид

$$\frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_6 \geq \frac{1}{2}. \quad (22.19)$$

Оно порождает в плоскости переменных x_1, x_2 отсечение $x_1 - x_2 \geq 0$.

Задачу (22.18) с дополнительным условием (22.19) приводим к канонической форме и решаем двойственным симплекс-методом. За одну итерацию получаем оптимальный базисный план $(2, 2, 2, 2, 2, 0, 0)$ канонической задачи, компоненты которого – целые числа. Тогда решением задачи (22.17) будет вектор $(2, 2, 2, 2, 2)$, а $x^0 = (2, 2)$ – оптимальный план исходной задачи (22.16).

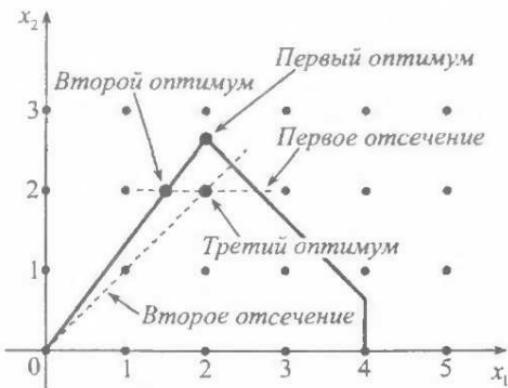


Рис. 22.3

На рис. 22.3 представлена геометрическая иллюстрация описанного процесса решения задачи в плоскости исходных переменных x_1, x_2 .

§ 23. МЕТОД ВАРИАЦИЙ. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ШТРАФОВ

Как было отмечено в разд. 20.1, конечность множества планов X задачи дискретного программирования (20.1) препятствует применению для решения этой задачи средств непрерывного анализа, основанных на вариациях планов и предельных переходах (см. гл. 1–4). Однако в некоторых случаях дискретные аналоги непрерывных методов, использующие простейшие вариации элементов из X , позво-

ляют получать интересные результаты. Для иллюстрации *метода вариаций* рассмотрим задачу минимизации штрафов при обслуживании заявок.

Имеется n заявок с номерами $1, 2, \dots, n$, которые нужно обслужить. Две и более заявок одновременно обслуживаться не могут. Пусть T_i — время обслуживания, а c_i — величина штрафа за единицу времени ожидания i -й заявки, $i = \overline{1, n}$. Требуется найти очередность обслуживания заявок с минимальным общим штрафом.

Планами этой задачи дискретного программирования являются перестановки $x = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ элементов множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Их число равно $n!$. В перестановке x в период обслуживания заявки i_1 остальные заявки простоявают T_{i_1} единиц времени, и, следовательно,

штраф за ожидание в этот период составит $T_{i_1} \sum_{k=2}^n c_{i_k}$. Рассматривая далее периоды обслуживания заявок i_2, \dots, i_n , получаем, что общий штраф для перестановки x равен

$$f(x) = T_{i_1} \sum_{k=2}^n c_{i_k} + T_{i_2} \sum_{k=3}^n c_{i_k} + \dots + T_{i_{n-1}} c_{i_n} = \sum_{k=2}^n c_{i_k} t_{i_k}, \quad (23.1)$$

где $t_{i_k} = \sum_{s=1}^{k-1} T_{i_s}$ — время ожидания заявки i_k .

Простейшей вариацией плана x назовем транспозицию двух элементов i_k и i_{k+1} , $k = \overline{1, n-1}$ (*перестановочный прием*). Новый план обозначим через \bar{x} . Поскольку после транспозиции время ожидания для заявки i_k возросло на $T_{i_{k+1}}$, для заявки i_{k+1} уменьшилось на T_{i_k} , а для остальных заявок осталось неизменным, то приращение целевой функции (23.1) составит

$$f(\bar{x}) - f(x) = c_{i_k} T_{i_{k+1}} - c_{i_{k+1}} T_{i_k}. \quad (23.2)$$

Для оптимальности перестановки x необходимо, чтобы $f(\bar{x}) - f(x) \geq 0$ при любом $k = \overline{1, n-1}$, что с учетом (23.2) может быть записано в виде

$$c_{i_k} T_{i_{k+1}} - c_{i_{k+1}} T_{i_k} \geq 0, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Эти неравенства приводят к следующему необходимому условию оптимальности перестановки $x = (i_1, i_2, \dots, i_n)$:

$$\frac{c_{i_1}}{T_{i_1}} \geq \frac{c_{i_2}}{T_{i_2}} \geq \dots \geq \frac{c_{i_n}}{T_{i_n}}. \quad (23.3)$$

Полученное условие дает простое правило построения оптимальной последовательности обслуживания заявок. Прежде всего находятся относительные штрафы c_i/T_i , $i = \overline{1, n}$. Первой обслуживается заявка с наибольшим относительным штрафом. Если таких заявок несколько, то очередность их обслуживания может быть произвольной, поскольку, как видно из формулы (23.2), любая транспозиция заявок с равными относительными штрафами не изменяет значения целевой функции¹⁾. Затем обслуживается заявка с максимальным относительным штрафом среди оставшихся заявок и т. д.

Замечание 23.1. Если заявки интерпретировать как посетителей приемной, а T_i – как время рассмотрения вопроса посетителя, то при $c_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, общий штраф будет представлять собой суммарное время ожидания приема всеми посетителями. Для того чтобы оно было минимальным, как следует из вышеизложенного, в первую очередь нужно принимать посетителей с «мелкими» вопросами.

Литература

1. Емеличев, В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М.: Наука, 1981.
2. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985.
3. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2 Т. / А. Схрейвер. – М.: Мир, 1991.
4. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях/ Т. Ху. – М.: Мир, 1974.

¹⁾ Это, кстати, означает, что неравенства (23.3) представляют собой и достаточные условия оптимальности.

Глава 6

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование – один из наиболее мощных современных методов оптимизации. Основной областью его применения являются многошаговые процессы, т. е. процессы, развивающиеся во времени, что дало основание назвать этот метод динамическим. Возникновение динамического программирования связывают с именем американского ученого Р. Беллмана, который в начале пятидесятых годов прошлого столетия предложил принцип последовательного анализа вариантов, названный впоследствии *принципом оптимальности*. Динамическое программирование опирается также на идею погружения оптимизационной задачи в семейство подобных ей задач. Благодаря этому приему, названному *принципом инвариантного погружения*, метод применим ко многим задачам, которые в исходной постановке не являются динамическими. Особенностью динамического программирования, выделяющей его среди других методов оптимизации, является форма конечного результата. Выигрыш при применении этого метода состоит прежде всего в том, что исходная задача разбивается на ряд более простых задач. Эффект от применения динамического программирования к конкретной задаче оптимизации характеризуется тем, насколько велико такое упрощение.

§ 24. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

24.1. Постановка задачи

Пусть имеется некоторый объект (система), изменяющий свое состояние в дискретные моменты времени, которые для удобства будем обозначать через $1, 2, \dots, N$. В каждый момент t из этой совокупности состояния объекта полностью описывается n -вектором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, и процесс $x(t)$, $t = \overline{1, N}$, определяется как собственной динамикой объекта, так и внешними управляющими воздействиями $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, $t = \overline{1, N - 1}$. Общая зависимость задается рекуррентным уравнением

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \quad x(1) = x_0, \quad t = \overline{1, N - 1}, \quad (24.1)$$

где $f(x, u, t)$ – вектор-функция, определенная в области значений своих аргументов, x_0 – начальное состояние процесса (объекта, системы).

Вектор-функцию $u(t)$, $t = \overline{1, N-1}$, назовем *допустимым управлением* или *программой*, если $u(t) \in U(t)$, $t = \overline{1, N-1}$, где $U(t)$ – заданные множества пространства \mathbf{R}^r .

Как видно из (24.1), течение процесса однозначно определяется выбранным управлением. Качество управления оценим величиной

$$J(u) = \phi(x(N)) + \sum_{t=1}^{N-1} f_0(x(t), u(t), t),$$

где $\phi(x)$, $f_0(x, u, t)$ – скалярные функции, определенные в области значений своих аргументов, и рассмотрим задачу минимизации этой величины, называемой *критерием качества*, на множестве допустимых управлений. Допустимое управление $u^0(t)$, $t = \overline{1, N-1}$, которое доставляет минимум критерию качества, и порожденный им в силу (24.1) *процесс (траекторию*) $x^0(t)$, $t = \overline{1, N}$, называют *оптимальными*.

Сформулированную задачу символически записывают следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(1) = x_0, \quad u(t) \in U(t), \quad t = \overline{1, N-1}, \\ J(u) &= \phi(x(N)) + \sum_{t=1}^{N-1} f_0(x(t), u(t), t) \rightarrow \min. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Она по сути является задачей МП, однако при больших N (типичная ситуация для процессов управления) число переменных в ней настолько велико, что применение методов, изложенных в предыдущих главах, становится затруднительным или неэффективным. Поэтому при решении задачи (24.2) необходимо учитывать ее динамическую структуру.

Примером задачи оптимизации многошагового процесса может служить задача о замене оборудования (см. разд. 24.6).

24.2. Инвариантное погружение. Функция Беллмана

Первый шаг при решении экстремальных задач методом динамического программирования состоит во вложении конкретной задачи в семейство подобных ей задач. Этот шаг называют *инвариантным погружением* задачи. Любая задача оптимизации характеризуется рядом числовых параметров (числом переменных, постоянными, задающими ограничения и т. п.). При инвариантном погружении отвлекаются от заданных значений некоторых параметров и считают их переменными

величинами. Выбор таких параметров есть в некотором смысле искусство: в каждом конкретном случае он зависит от опыта и изобретательности исследователя. Если говорить конкретно о задаче (24.2), то ее можно погрузить в следующее семейство:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \quad x(k) = y, \quad u(t) \in U(t), \quad t = \overline{k, N-1}, \\ J(u) = \varphi(x(N)) + \sum_{t=k}^{N-1} f_0(x(t), u(t), t) \rightarrow \min, \quad (24.3)$$

где k – натуральное число, $1 \leq k \leq N-1$, а y – произвольный n -вектор. Задача (24.2) выделяется из семейства (24.3) при $k=1$, $y=x_0$.

Минимальное значение критерия качества в задачах (24.3) зависит, очевидно, от параметров y и k . Функция $B(y, k)$, выражающая эту зависимость, называется *функцией Беллмана*.

24.3. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана

Составление уравнения для функции Беллмана представляет собой второй основной этап решения задачи методом динамического программирования. На этом этапе могут применяться различные рассуждения, но все они в той или иной степени опираются на *принцип оптимальности*, который Беллман сформулировал следующим образом: *оптимальная политика обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и принятное начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальную политику относительно состояния, возникшего в результате первоначального решения*. При составлении уравнения для функции Беллмана выявляется правильность инвариантного погружения. С другой стороны, способ погружения сказывается на виде уравнения. Обратимся к задаче (24.3) с заданными значениями параметров y, k ($1 \leq k \leq N-2$) и положим $u(k)=u$, где u – произвольный вектор из множества $U(k)$. Оставляя пока в стороне вопрос об оптимальности такого решения, постараемся распорядиться остальными переменными $u(t)$, $t = \overline{k+1, N-1}$, так, чтобы критерий качества принял минимально возможное значение, т. е. поставим перед собой следующую задачу:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \quad x(k+1) = f(y, u, k), \quad u(t) \in U(t), \quad t = \overline{k+1, N-1}, \\ J(u) = f_0(y, u, k) + \varphi(x(N)) + \sum_{t=k+1}^{N-1} f_0(x(t), u(t), t) \rightarrow \min.$$

Согласно определению функции Беллмана минимальное значение критерия качества в этой задаче равно

$$f_0(y, u, k) + B(f(y, u, k), k+1). \quad (24.4)$$

Минимум выражения (24.4) по $u \in U(k)$ есть, очевидно, оптимальное значение критерия качества в задаче (24.3), т. е. $B(y, k)$. Таким образом,

$$B(y, k) = \min_{u \in U(k)} (f_0(y, u, k) + B(f(y, u, k), k+1)), \quad k = \overline{1, N-2}. \quad (24.5)$$

Непосредственно из определения функции Беллмана следует

$$B(y, N-1) = \min_{u \in U(N-1)} (f_0(y, u, N-1) + \varphi(f(y, u, N-1))). \quad (24.6)$$

Объединяя (24.5) и (24.6), получаем для функции $B(y, k)$ рекуррентно-функциональное уравнение

$$B(y, k) = \min_{u \in U(k)} (f_0(y, u, k) + B(f(y, u, k), k+1)), \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (24.7)$$

$$B(y, N) = \varphi(y), \quad (24.8)$$

которое называют *уравнением Беллмана*.

Из приведенных рассуждений также следует, что вектор $u(y, k)$, на котором достигается минимум в (24.7), есть значение оптимального управления в задаче (24.3) в начальный момент времени.

Третий, заключительный, этап применения динамического программирования состоит в нахождении решения уравнения Беллмана и построении по нему оптимальной стратегии в исходной задаче. Решая рекуррентное уравнение (24.7), (24.8), последовательно получаем функции $B(y, N)$, $B(y, N-1)$, ..., $B(y, 1)$ и одновременно значения управления

$$u(y, N-1), u(y, N-2), \dots, u(y, 1), \quad (24.9)$$

на которых достигается минимум в (24.7). Понятно, что $B(x_0, 1)$ – минимальное значение критерия качества в исходной задаче (24.2). Оптимальные управление $u^0(t)$, $t = \overline{1, N-1}$, и траектория $x^0(t)$, $t = \overline{1, N}$, рекуррентно вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^0(1) &= u(x_0, 1), \quad x_0(2) = f(x_0, u^0(1), 1), \\ u^0(t) &= u(x_0(t), t), \quad x^0(t+1) = f(x^0(t), u^0(t), t), \quad t = \overline{2, N-1}. \end{aligned} \quad (24.10)$$

24.4. Анализ результатов

Обсудим полученные результаты. Выигрыш при применении динамического программирования к задаче (24.2) состоит в том, что исходная задача нахождения управления для всего процесса разбивается на ряд бо-

лее простых задач вычисления значений управления для отдельных этапов процесса. Отметим также как существенный факт то, что динамическое программирование решает, по сути дела, задачу более общую, чем поставленная. Применение инвариантного погружения приводит к построению оптимального управления (24.9) как функции не только времени, но и состояния системы. Оптимальное управление вида $u(x, t)$ называют управлением типа обратной связи, а его построение – синтезом оптимальной системы. Осуществив синтез, можно легко найти оптимальное управление в программном виде (как функцию времени) для задачи с любыми начальными условиями (см. (24.10)). Более того, синтез дает возможность сконструировать замкнутую систему управления (рис. 24.1), которая без участия человека функционирует в оптимальном режиме, т. е. при любом возмущении состояния в ней автоматически возбуждается оптимальный (для нового состояния) процесс.

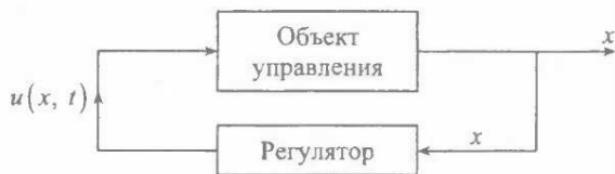


Рис. 24.1

Недостатки динамического программирования будут отмечены в следующем разделе.

24.5. Стандартная процедура

Получить решение уравнения (24.7), (24.8) в явном виде удается лишь в редких случаях. Опишем схему численного решения этого уравнения, которую называют *стандартной процедурой*.

Перед началом вычислений оценивается и покрывается сеткой путем квантования координат вектора x область возможных состояний процесса. Пусть x^1, x^2, \dots, x^M – узлы этой сетки, которую называют фазовой (см. рис. 24.2). Значения функции $B(x, N) = \varphi(x)$ вычисляются в узлах фазовой сетки и заносятся в оперативную память. Теперь можно приступить к подсчету по формуле (24.7) значений $B(x, N-1)$. Для этого, когда нет никакой информации об оптимальном управлении, поступают следующим образом. Путем квантования координат управле-

ния множество $U(N-1)$ покрывается сеткой с узлами $u^1(N-1), u^2(N-1), \dots, u^{M_{N-1}}(N-1)$ (рис. 24.3). Для вычисления значения функции $B(x, N-1)$ в узле x^k находятся числа

$$f_0(x^k, u^i(N-1), N-1) + B(f(x^k, u^i(N-1), N-1), N), \quad i = \overline{1, M_{N-1}}. \quad (24.11)$$

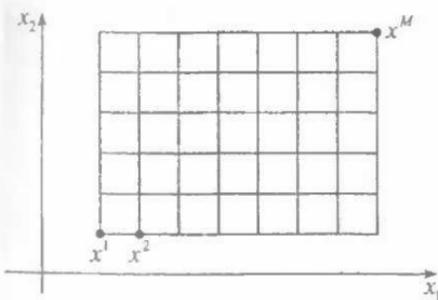


Рис. 24.2

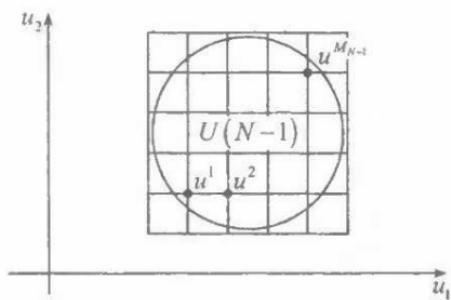


Рис. 24.3

В общем случае не все векторы

$$f(x^k, u^i(N-1), N-1), \quad i = \overline{1, M_{N-1}}, \quad (24.12)$$

попадут в узлы фазовой сетки. Поэтому числа (24.11) находятся с помощью интерполяции известных значений функции $B(x, N)$. Наименьшее из этих чисел, которое в силу (24.7), (24.8) приближенно равняется $B(x^k, N-1)$, заносится в оперативную память. Одновременно запоминается и вектор $u(x^k, N-1) = u^e(N-1)$, на котором достигается минимум. Подобным образом перебираются все узлы фазовой сетки. В результате в оперативной памяти появится запись значений $B(x, N-1), u(x, N-1)$ в этих узлах, после чего значения $B(x, N) = \phi(x)$ могут быть стерты.

Следующие шаги процедуры в точности повторяют первый, и процесс продолжается вычислением значений функций $B(x, k), u(x, k)$ в узлах фазовой сетки в направлении убывания аргумента k . Через $N-1$ шагов получим значения $B(x, 1), u(x, 1)$. Оптимальные управление и траектория в задаче (24.2) находятся по формулам (24.10).

Проанализируем описанную процедуру. В качестве достоинства отметим то, что она не предъявляет никаких требований к функциям $f(x, u, t), f_0(x, u, t), \phi(x)$ и множествам $U(t)$ – они могут быть заданы любым способом. Основным недостатком процедуры являются чрезмер-

ные требования к оперативной памяти. На k -м шаге нужно хранить в памяти значения функций $B(x, N - k)$, $B(x, N - k + 1)$, $u(x, N - k)$, ..., $u(x, N - 1)$. К концу процедуры в памяти будет храниться $M((N - 1)r + 2)$ чисел. Само название «многошаговый процесс» говорит о возможных значениях N . Число M напрямую зависит от n и точности вычислений. Для достижения требуемой точности числа $M \geq 100^n$ можно считать обычными. Поэтому уже для $n = 4$ описанная процедура на современных ЭВМ, как правило, не может быть реализована. Указанный недостаток динамического программирования Беллман назвал **«проклятием размерности»**. Второй недостаток – опасность расширяющейся сетки. Этот недостаток состоит в следующем. Если некоторые из векторов (24.12) не попадают в пределы фазовой сетки, то значения функции $B(x, N - 1)$ в узле x^k не может быть найдено по описанной схеме. Это вполне может случиться с приграничными узлами. В результате уже на первом шаге появятся «пустые» узлы, т. е. произойдет фактическое сужение фазовой сетки. В дальнейшем описанная ситуация может повториться, и не исключено, что вычисления оборвутся на некотором шаге, поскольку узел x_0 окажется за пределами сетки. В этом случае первоначальную сетку нужно расширять, что ведет к увеличению необходимой памяти.

24.6. Задача о замене оборудования

При производстве некоторой продукции используется оборудование, стоимость которого равна p . В силу естественных причин ежегодные затраты на эксплуатацию оборудования с течением времени меняются (увеличиваются) и равны $g(s)$, если к началу текущего года оборудование проработало s лет. Требуется найти план замены оборудования на T лет, при котором суммарные затраты на эксплуатацию и покупку оборудования будут минимальны. В начале периода планирования на предприятии имеется оборудование, прослужившее m лет.

Поскольку первое решение, менять или не менять оборудование, нужно принимать в конце года, предшествующего периоду планирования, начнем отсчет лет с этого года, считая его первым.

Пусть $x(t)$, $t = \overline{2, T + 1}$, – возраст оборудования, эксплуатируемого в году t , а

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если оборудование меняется в конце года } t, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $t = \overline{1, T}$. Тогда

$$x(t+1) = (x(t) + 1)(1 - u(t)), \quad x(1) = m - 1, \quad t = \overline{1, T},$$

а суммарные расходы на эксплуатацию и покупку оборудования равны

$$\sum_{t=2}^{T+1} g(x(t)) + \sum_{t=1}^T p u(t).$$

Таким образом, поставленная задача может быть записана в виде

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (x(t) + 1)(1 - u(t)), \quad x(1) = m - 1, \\ u(t) \in \{0, 1\}, \quad t &= \overline{1, T}, \quad \sum_{t=2}^{T+1} g(x(t)) + \sum_{t=1}^T p u(t) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Это частный случай задачи (24.2), где $n = 1$, $r = 1$, $N = T + 1$, $x_0 = m - 1$,

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= (x + 1)(1 - u), \quad U(t) = \{0, 1\}, \quad t = \overline{1, T}, \quad \varphi(x) = g(x), \\ f_0(x, u, 1) &= p u, \end{aligned}$$

$$f_0(x, u, t) = g(x) + p u, \quad t = \overline{2, T}.$$

В соответствии с (24.7), (24.8) в данном случае

$$B(y, T+1) = g(y),$$

$$\begin{aligned} B(y, k) &= \min \{g(y) + B(y+1, k+1), g(y) + p + B(0, k+1)\}, \\ k &= \overline{2, T}, \end{aligned} \quad (24.14)$$

$$B(y, 1) = \min \{B(y+1, 2), p + B(0, 2)\}. \quad (24.15)$$

Решая это рекуррентное уравнение, получаем последовательность функций $B(y, T+1)$, $B(y, T)$, ..., $B(y, 1)$ дискретного аргумента y . Значение $B(m-1, 1)$ равно минимальным общим затратам на эксплуатацию и покупку оборудования.

Оптимальный план замены оборудования (оптимальное управление в задаче (24.13)) определяется согласно (24.10) следующим образом. Как видно из (24.15),

$$B(m-1, 1) = \min \{B(m, 2), p + B(0, 2)\}.$$

Если первое из чисел в фигурных скобках не больше второго, то оборудование перед началом периода планирования не меняется, в противном случае происходит замена оборудования.

Дальнейшие действия зависят от принятого решения. Пусть в первом году периода планирования использовалось старое оборудование. Полагая в (24.14) $k = 2$, $y = m$, имеем

$$B(m, 2) = \min \{g(m) + B(m+1, 3), g(m) + p + B(0, 3)\}.$$

Если минимум достигается на первом числе, то и перед вторым годом периода планирования оборудование не меняется, в противном случае приобретается новое оборудование.

Предположим теперь, что в течение первого года использовалось новое оборудование. Из (24.14) при $k = 2$, $y = 0$ получаем

$$B(0, 2) = \min \{g(0) + B(1, 3), g(0) + p + B(0, 3)\}.$$

Если первое из чисел в фигурных скобках не больше второго, то перед вторым годом периода планирования оборудование не меняется, в противном случае опять покупается новое оборудование.

Продолжая описанный процесс, можно полностью составить оптимальный план замены оборудования на весь период из T лет.

§ 25. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Пусть имеется n технологических процессов, использующих сырье, запасы которого равны c . Выделение x единиц сырья на i -й технологический процесс приносит $f_i(x)$ единиц прибыли. Требуется найти такое распределение ресурсов, при котором суммарная прибыль была бы максимальной.

Обозначим через x_i , $i = \overline{1, n}$, количество сырья, выделяемого на i -й процесс. Понятно, что $0 \leq x_i \leq c$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n x_i = c$. Кроме того, в общем случае величины x_i , $i = \overline{1, n}$, могут накладываться дополнительные ограничения. Чтобы учесть их, будем считать, что $x_i \in G_i$, $i = \overline{1, n}$, где G_i – некоторое замкнутое подмножество отрезка $[0, c]$. Тогда математическая модель поставленной задачи будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = c, \quad x_i \in G_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (25.1)$$

Специфика задачи МП (25.1) состоит в том, что функции, ее формирующие, являются *сепарабельными*, т. е. представлены в виде суммы функций одной переменной. Эта особенность дает возможность

с помощью инвариантного погружения придать задаче «динамический характер» и применить для ее решения метод динамического программирования.

Осуществляя принцип инвариантного погружения, вложим задачу (25.1) в следующее семейство подобных ей задач:

$$\sum_{i=1}^k f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \in G_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad (25.2)$$

с произвольным числом k технологических процессов ($1 \leq k \leq n$) и произвольным запасом у сырья ($0 \leq y \leq c$).

Введем в рассмотрение функцию Беллмана $B(y, k)$ как максимальное значение целевой функции в задаче (25.2):

$$B(y, k) = \max \sum_{i=1}^k f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \in G_i, \quad i = \overline{1, k}. \quad (25.3)$$

Заметим, что эта функция определена при $k = \overline{1, n}$ и тех y из отрезка $[0, c]$, для которых не пусто множество планов задачи (25.2). В дальнейшем область определения функции $B(y, k)$ при заданном значении k будем обозначать через Y_k . Очевидно, $Y_1 = G_1$.

Составим уравнение для функции Беллмана. Обратимся к задаче (25.2), считая, что $k = \overline{2, n}$, $y \in Y_k$, и положим $x_k = x$ ($x \in G_k$). Остальными переменными постараемся распорядиться так, чтобы целевая функция приняла при сделанном выборе максимально возможное значение, т. е. поставим перед собой следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_i) + f_k(x) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^{k-1} x_i = y - x, \quad x_i \in G_i, \quad i = \overline{1, k-1}. \quad (25.4)$$

Для ее разрешимости необходимо, чтобы $y - x \in Y_{k-1}$. Если это так, то в соответствии с (25.3) максимальное значение целевой функции в задаче (25.4) будет следующим:

$$B(y - x, k - 1) + f_k(x). \quad (25.5)$$

Максимум величины (25.5) по $x \in G_k$, для которых $y - x \in Y_{k-1}$, совпадает, очевидно, с максимальным значением $B(y, k)$ целевой функции в задаче (25.2). Таким образом, уравнение для функции Беллмана в рассмотренной задаче имеет вид

$$B(y, k) = \max_{x \in G_k, y-x \in Y_{k-1}} (f_k(x) + B(y - x, k - 1)), \quad y \in Y_k, \quad k = \overline{2, n}. \quad (25.6)$$

Начальное условие, необходимое для решения этого рекуррентно-функционального уравнения, получаем непосредственно из определения (25.3):

$$B(y, 1) = f_1(y), \quad y \in G_1. \quad (25.7)$$

Перейдем к заключительному этапу, который состоит в поиске решения уравнения Беллмана (25.6), (25.7) и построении по нему оптимального плана распределения ресурсов в исходной задаче (25.1).

В уравнении (25.6) положим $k = 2$. Учитывая, что $Y_1 = G_1$, будем иметь

$$B(y, 2) = \max_{x \in G_2, y-x \in G_1} (f_2(x) + B(y-x, 1)), \quad y \in Y_2. \quad (25.8)$$

В силу (25.7) правая часть этого уравнения определена для тех $y \in [0, c]$, для которых $y - x \in G_1$ хотя бы при одном $x \in G_2$. Очевидно, множество таких y есть Y_2 . Для каждого $y \in Y_2$ найдем значение $x_2(y)$, на котором достигается максимум в правой части (25.8), и само значение максимума $B(y, 2)$. Далее, полагая в (25.6) $k = 3, 4, \dots, n$ и решая соответствующие задачи максимизации, получаем последовательно функции $x_3(y)$, $B(y, 3)$, $y \in Y_3$, ..., $x_n(y)$, $B(y, n)$, $y \in Y_n$.

Если $c \in Y_n$, то $B_n(c)$ — максимальная прибыль в исходной задаче (25.1). В противном случае задача не имеет решения, так как не существует ни одного допустимого плана распределения ресурсов.

Как следует из приведенных рассуждений, $x_k(y)$ есть последняя компонента решения задачи (25.2) (оптимальное количество сырья, выделяемое на k -й процесс в этой задаче). Соответственно с этим оптимальный план распределения ресурсов в исходной задаче может быть найден следующим образом:

$$x_n^0 = x_n(c), \quad x_{n-1}^0 = x_{n-1}(c - x_n^0), \quad \dots, \quad x_2^0 = x_2(c - \sum_{i=3}^n x_i^0), \quad x_1^0 = c - \sum_{i=2}^n x_i^0.$$

Как уже отмечалось, одним из основных достоинств динамического программирования является то, что этот метод не предъявляет никаких требований к функциям, формирующими экстремальную задачу, они могут быть заданы таблично, графически, алгоритмически и т. п. Отмеченное достоинство особенно ценно с практической точки зрения. Так, например, в задаче распределения ресурсов, как правило, невозможно установить аналитическую зависимость прибыли $f_i(x)$ от количества сырья x , выделяемого на i -й технологический процесс. Чаще

всего значения функций $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, могут быть экспериментально найдены лишь для отдельных значений аргумента x , т. е. эти функции задаются таблично. Поэтому при постановке задачи о распределении ресурсов, естественно, предполагается, что на каждый процесс может выделяться лишь такое количество сырья, для которого известна прибыль.

Пример 25.1. Пусть имеется 4 технологических процесса, а запасы сырья составляют 6 единиц. Значения функций $f_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$, известны лишь для целых значений x и приведены в табл. 25.1

Таблица 25.1

x	0	1	2	3	4	5	6
f_1	0	10	18	25	30	34	36
f_2	0	12	20	26	30	33	35
f_3	0	9	18	25	31	36	40
f_4	0	15	25	31	35	37	38

Требуется найти оптимальный план распределения ресурсов при условии, что на каждый технологический процесс может выделяться лишь целое число единиц сырья.

Математическая модель поставленной задачи имеет вид (25.1), где $n = 4$, $c = 6$, $G_i = G = \{0, 1, \dots, 6\}$, $i = \overline{1, 4}$. Легко видеть, что в данном случае $Y_k = G$, $k = \overline{1, 4}$.

Значения функции $B(y, 1)$, вычисленные по формуле (25.7), приведены в табл. 25.2.

Таблица 25.2

y	0	1	2	3	4	5	6
$B(y, 1)$	0	10	18	25	30	34	36

Уравнение (25.8) в данном случае имеет вид

$$B(y, 2) = \max_{x \in G, y-x \in G} (f_2(x) + B(y-x, 1)), \quad y \in G. \quad (25.9)$$

Заметим, что условие $y-x \in G$ эквивалентно следующему $x \leq y$. Для каждого $y \in G$ с помощью перебора, используя данные из табл. 2.1, 2.2, находим значения максимума $B(y, 2)$ в правой части (25.9) и точку $x_2(y)$, в которой этот максимум достигается. Результаты вычислений приведены в табл. 25.3.

Таблица 25.3

y	0	1	2	3	4	5	6
$B(y, 2)$	0	12	22	30	38	45	51

Полагая далее в уравнении (25.6) $k = 3$, переходим к вычислению $B(y, 3)$, $x_3(y)$, $y \in G$ и т. д. В итоге будет заполнена табл. 25.4. С помощью этой таблицы легко находится решение рассмотренной задачи. Максимальная прибыль в ней составляет $B(6, 4) = 65$ единиц. Чтобы получить такую прибыль, сырье нужно распределить следующим образом: на четвертый процесс следует выделить $x_4^0 = x_4(6) = 2$ единиц сырья, на третий процесс — $x_3^0 = x_3(4) = 2$ единиц, на второй — $x_2^0 = x_2(2) = 1$, на первый — $x_1^0 = 6 - 5 = 1$.

Таблица 25.4

y	0	1	2	3	4	5	6
$B(y, 1)$	0	10	18	25	30	34	36
$B(y, 2)$	0	12	22	30	38	45	51
$x_2(y)$	0	1	1	1;2	2	2	3
$B(y, 3)$	0	12	22	31	40	48	56
$x_3(y)$	0	0	0	1	2	2	2
$B(y, 4)$	0	15	27	37	47	56	65
$x_4(y)$	0	1	1	1;2	2	2	2

Достоинством динамического программирования, как было отмечено в разд. 24.4, является то, что его вычислительная процедура изменяется незначительно при изменении параметров задачи. Предположим, например, что четвертый технологический процесс по некоторым причинам остановлен и требуется перераспределить сырье между первыми тремя процессами. Для нахождения оптимального распределения ресурсов в новых условиях опять используем табл. 25.4: $x_3^0 = x_3(6) = 2$, $x_2^0 = x_2(4) = 2$, $x_1^0 = 6 - 4 = 2$. Суммарная прибыль при таком распределении составит $B(6, 3) = 56$ единиц.

Вернемся к задаче распределения ресурсов между четырьмя технологическими процессами, но предположим теперь, что запасы сырья уменьшились с 6 до 4 единиц. С помощью табл. 25.4 легко находится решение задачи и в этой ситуации: $x_4^0 = x_4(4) = 2$, $x_3^0 = x_3(2) = 0$, $x_2^0 = x_2(2) = 1$, $x_1^0 = 4 - 3 = 1$. Максимальная прибыль равна $B(4, 4) = 47$.

§ 26. ПОСТРОЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ НА СЕТИ

Пусть имеется ориентированная сеть $S = \{I, U\}$, каждой дуге $(i, j) \in U$ которой приписано неотрицательное число c_{ij} — расстояние от узла i до узла j . *Путем* из узла s в узел k назовем соединяющую эти узлы цепь, все дуги которой при движении из s в k прямые. Требуется для двух заданных узлов $s, k \in I$ найти путь из s в k минимальной длины.

Вложим эту задачу в семейство подобных задач, а именно, будем считать, что требуется найти кратчайший путь из узла s в произвольный узел $j \in I$. Введем в рассмотрение функцию Беллмана B_j – длину кратчайшего пути из s в j .

Пусть $I_j^- = \{i : i \in I, (i, j) \in U\}$ – множество узлов, соединенных с узлом j дугами, оканчивающимися в j . Поскольку последним промежуточным узлом на любом пути из s в j будет узел из этого множества, то функция Беллмана, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$B_j = \min_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i). \quad (26.1)$$

Заметим, что в отличие от предыдущих параграфов уравнения Беллмана (26.1) не является рекуррентным. Краевое условие для него очевидным образом следует из определения функции Беллмана:

$$B_s = 0. \quad (26.2)$$

Решение уравнения (26.1), (26.2) можно найти с помощью метода пометок, суть которого состоит в следующем. Обозначим через I^* множество узлов, для которых известно значение функции Беллмана на некотором этапе вычислений (перед началом вычислений это множество содержит только узел s). Предположим, что $k \notin I^*$. Пусть $\omega(I^*) = \{j : j \in I \setminus I^*, I_j^- \cap I^* \neq \emptyset\}$ – множество узлов, соседних с множеством I^* . Если $\omega(I^*) = \emptyset$, то в сети S нет путей из s в k . Если же $\omega(I^*) \neq \emptyset$, то для каждого узла $j \in \omega(I^*)$ по формуле

$$B'_j = \min_{i \in I_j^- \cap I^*} (c_{ij} + B_i) \quad (26.3)$$

подсчитаем число B'_j – временную метку узла, а затем найдем узел j_* с наименьшей временной меткой. Для узла $j_* \notin I^*$ значение функции Беллмана равно B'_{j_*} . Узел j_* добавляется к множеству I^* , и описанные операции повторяются. Не исключено, что несколько узлов будут иметь наименьшую временную метку. В этом случае все они присоединяются к множеству I^* .

Числа B_j , $j \in I^*$, называют *постоянными метками узлов*. На каждой итерации число постоянных меток увеличивается. Поэтому либо узел k через конечное число итераций получит постоянную метку, либо вычисления оборвутся на некотором шаге из-за того, что $\omega(I^*) = \emptyset$.

Второй случай означает, что не существует путей из s в k . В первом случае B_k – длина кратчайшего пути из s в k . Кратчайший путь строится по постоянным меткам следующим образом. По метке B_k находим такую метку B_{i_1} , что $B_k = c_{i_1 k} + B_{i_1}$. Далее ищем метку B_{i_2} , для которой имеет место равенство $B_{i_1} = c_{i_2 i_1} + B_{i_2}$ и т. д., пока не попадем в узел s . Кратчайший путь из s в k соответствует обратному движению.

Пример 26.1. Для иллюстрации метода пометок найдем кратчайший путь из узла 1 в узел 8 сети, изображенной на рис. 26.1. Над дугами проставлены их длины.

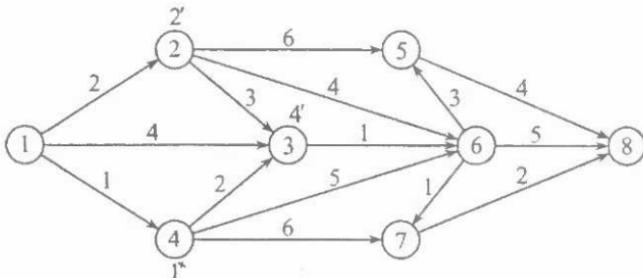


Рис. 26.1

На первой итерации $I^* = \{1\}$, $B_1 = 0$, $\omega(I^*) = \{2, 3, 4\}$. Как видно из формулы (26.3), чтобы найти временную метку любого узла $j \in \omega(I^*)$, нужно сделать следующее: 1) найти все узлы из I^* , с которыми узел j связан дугами, в нем оканчивающимися; 2) к постоянной метке каждого такого узла прибавить длину дуги, ведущей из него в j , и из полученных чисел выбрать наименьшее. Проделав эти несложные операции для каждого из узлов 2, 3, 4, соседних с узлом 1, получим $B'_2 = 2$, $B'_3 = 4$, $B'_4 = 1$. Временные метки запишем рядом с узлами, снабдив их штрихами. Наименьшую временную метку имеет узел 4. Этую метку делаем постоянной, т. е. зачеркиваем штрих (рис. 26.1).

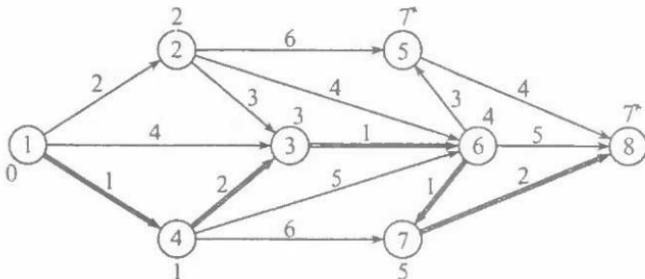


Рис. 26.2

На второй итерации $I^* = \{1, 4\}$, $B_1 = 0$, $B_4 = 1$, $\omega(I^*) = \{2, 3, 6, 7\}$. По указанной схеме вычисляем временные метки узлов, соседних с I^* : $B'_2 = 2$, $B'_3 = 3$, $B'_6 = 6$, $B'_7 = 7$. Наименьшую временную метку $B'_2 = 2$ делаем постоянной и переходим к следующей итерации.

Узел 8 получит постоянную метку $B_8 = 7$ на шестой итерации одновременно с узлом 5 (рис. 26.2). К этому моменту будут известны постоянные метки всех остальных узлов, которые помещены рядом с узлами. На рис. 26.2 изображен кратчайший путь из узла 1 в узел 8, построенный по постоянным меткам.

§ 27. ЗАДАЧА СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В сетевом планировании исследуются вопросы реализации сложных проектов, состоящих из большого количества отдельных работ, которые должны выполняться в определенной технологической последовательности. Одна из основных задач сетевого планирования – расчет времени выполнения проекта.

Составим сетевую модель такой задачи. Каждой работе A проекта поставим в соответствие дугу (i, j) . Узел i будем интерпретировать как начало, а узел j – как конец работы. Начало работы является концом другой, поэтому в узле i должны оканчиваться дуги, которые соответствуют работам, предшествующим A ¹⁾, а в узле j должны начинаться дуги, соответствующие работам, которым A предшествует. В сети выделяются два узла: s – начало выполнения проекта, k – завершение проекта. В узле s начинаются все дуги, которым отвечают работы, не имеющие предшествующих. В узле k оканчиваются дуги, которым соответствуют работы, не имеющие последующих. Каждой дуге (i, j) сети приписывается характеристика $c_{ij} > 0$ – время выполнения соответствующей работы.

Далеко не для всех проектов удается построить сетевую модель, опираясь на изложенные принципы. Пусть, например, проект включает 4 работы A, B, C, D . Работы A, B могут выполняться параллельно и являются предшествующими для C . Если работа D также может начинаться только после завершения работ A, B , то сетевая модель строится без труда (рис. 27.1). Узел 1 означает начало выполнения проекта, а узел 3 – его завершение. Если же для работы D предшествующей является только работа A , то изложенные выше принципы построения сети

¹⁾ Под этим термином понимаются не все работы, которые должны быть завершены до начала A , а только те из них, что выполняются непосредственно перед данной работой.

приводят нас к противоречивой ситуации: с одной стороны, дуга B должна оканчиваться в узле 2, а с другой — нет. Выйти из положения в данной и подобных ей ситуациях можно путем введения фиктивных работ нулевой продолжительности. При введении фиктивной работы нужно соблюдать одно правило: предшествовать ей могут только те работы, которые являются предшествующими для работ, непосредственно следующих за фиктивной. В рассмотренном примере достаточно ввести одну фиктивную работу Φ (рис. 27.2).

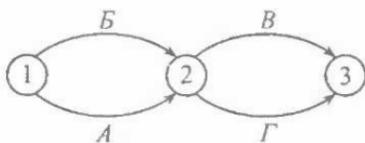


Рис. 27.1

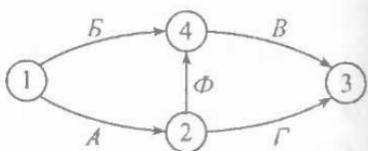


Рис. 27.2

Числовые характеристики c_{ij} дуг построенной сети $S = \{I, U\}$ будем интерпретировать как их длины. Тогда время выполнения проекта будет не меньше длины любого пути из узла s в узел k и совпадает с максимальной из этих длин.

Путь максимальной длины из s в k называют *критическим*. Вложим задачу отыскания такого пути в семейство подобных задач. Общая задача семейства состоит в построении пути максимальной длины из узла s в произвольный узел $j \in I$. Введем в рассмотрение функцию Беллмана B_j — длину критического пути из s в j . Заметим, что на языке исходной задачи сетевого планирования B_j есть время, через которое можно приступить к работам, дуги которых начинаются в узле j . По аналогии с (26.1), (26.2) имеем

$$B_j = \max_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i), \quad (27.1)$$

$$B_s = 0. \quad (27.2)$$

Структура построенной сети позволяет решить уравнение Беллмана (27.1), (27.2) следующим методом. Пусть I^* — множество узлов, для которых известно значение функции Беллмана на некотором этапе вычислений (перед началом вычислений $I^* = \{s\}$). Если $k \in I^*$, то задача решена: B_k — длина критического пути из s в k или, что то же самое, время выполнения проекта. Пусть $k \notin I^*$. Введем в рассмотрение мно-

жество $\omega^*(I^*) = \{j : j \in I \setminus I^*, I_j^- \in I^*\}$ узлов, соседних с множеством I^* и обладающих тем свойством, что все дуги, в них оканчивающиеся, начинаются в узлах из I^* . Из принципов, положенных в основу построения сети, следует, что это множество непустое. Для каждого узла $j \in \omega^*(I^*)$ значения функции Беллмана легко находятся по формуле (27.1). Такие узлы добавляются к множеству I^* , и операции повторяются. Через конечное число итераций будет найдено значение B_k — время выполнения проекта. Критический путь строится по найденным значениям функции Беллмана так же, как и путь минимальной длины (см. § 26).

Пример 27.1. Найдем время, необходимое для строительства жилого дома, данные о проекте которого приведены в табл. 27.1.

Таблица 27.1

Этап	Выполняемые работы	Требуемое число дней	Предшествующие этапы
А	Подготовка стройплощадки	1	—
Б	Сооружение фундамента	3	А
В	Подводка магистральных линий электро-, газо- и водоснабжения	2	А
Г	Монтаж вертикальных стен и перекрытий	6	Б
Д	Сооружение кровли	1	Г
Е	Укладка полов	2	Г
Ж	Установка дверей и окон	1	Г
З	Монтаж электропроводки	1	В, Г
И	Монтаж систем отопления, водо- и газоснабжения	2	В, Г
К	Установка сантехники и газовых плит	1	И
Л	Отделочные работы	4	Е, Ж, З, К

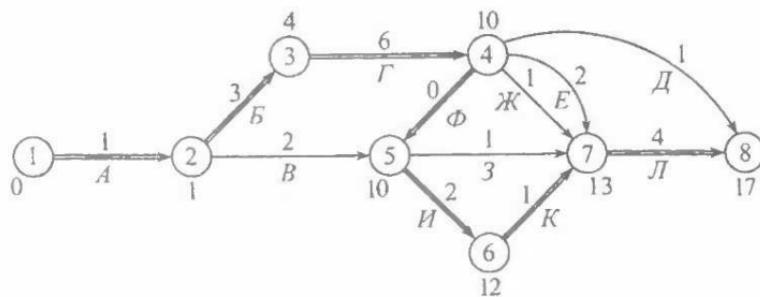


Рис. 27.3

Сеть, соответствующая такому проекту, изображена на рис. 27.3. Узел 1 означает начало, а узел 8 – конец выполнения проекта. При составлении сетевой модели пришлось ввести одну фиктивную работу, соответствующую дуге обозначена символом Ф. Над дугами стоят их длины (продолжительности работ).

При решении уравнения 4.1, 4.2 на 1-м шаге находится значение функции Беллмана в узле 2, на 2-м – в узле 3, на 3-м – в узле 4, на 4-м – в узле 5, на 5-м – в узле 6, на 6-м – в узле 7, на 7-м – в узле 8. Эти значения записаны рядом с узлами. Время выполнения проекта равно $B_8 = 17$ дней. Дуги критического пути обозначены на рис. 4.3 двойными линиями.

Литература

1. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностр. лит., 1960.
2. Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. – М.: Наука, 1969.
3. Габасов, Р. Основы динамического программирования / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1975.
4. Хедли, Дж. Нелинейное и динамическое программирование / Дж. Хедли. – М.: Мир, 1967.

Глава 7

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В многочисленных приложениях приходится иметь дело с функциями, определенными на некоторых множествах, элементы которых – также функции.

Функции, определенные на множествах, элементами которых являются функции, называют *функционалами*.

Многие прикладные экстремальные задачи сводятся к задачам оптимизации функционалов, т. е. к задачам поиска функций, на которых заданные функционалы достигают минимальных (максимальных) значений. Такие задачи, хотя и имеют аналоги в конечномерном случае, представляют собой более сложные объекты для исследований. Первые задачи такого типа поставлены и решены в XVII–XVIII вв. Теория, в которой исследуются задачи оптимизации в функциональных (бесконечномерных) пространствах, называется *вариационным исчислением* (название происходит от основного метода исследования – исчисления (анализа) вариаций).

В этой главе рассматриваются некоторые методы решения простейших задач вариационного исчисления.

§ 28. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Основная задача вариационного исчисления возникла как непосредственное обобщение поставленной И. Бернулли в 1696 г. задачи о брахистохроне. Эта задача содержала типичные черты нового класса математических задач и стала объектом и основой новых методов и важных обобщений.

28.1. Задача о брахистохроне

В вертикальной плоскости заданы две точки A и B , расположенные на разных уровнях (рис. 28.1). Требуется соединить эти точки такой гладкой линией, скатываясь вдоль которой с нулевой начальной скоростью, тяжелый материальный шарик пройдет путь от A до B за минимальное время.

Название задачи происходит от греческих слов *βραχιστοξ* – кратчайший и *χρόνος* – время.

Составим математическую модель задачи. По закону сохранения энергии сумма потенциальной и кинетической энергий в точке A и лю-

бой точке (x, y) (рис. 28.1) на кривой $y(x)$ равны между собой: $0 + 0 = -mgy + mv^2/2$, поэтому

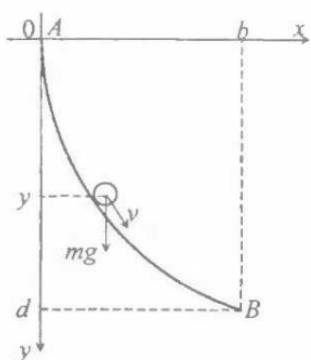


Рис. 28.1

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (28.1)$$

Пусть $y = y(x)$, $x \in [0, b]$, — гладкая линия, соединяющая точки A и B . Известно, что $v = ds/dt$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ($dy = y_x dx$, $y_x \equiv dy/dx$). С учетом последних соотношений из (28.1) получаем $dt = \sqrt{(1 + y_x^2)/2gy} dx$, т. е. время движения шарика из A в B по линии $y(x)$, $x \in [0, b]$, равно

$$T_{AB} = \int_0^b \sqrt{(1 + y_x^2)/2gy} dx. \quad (28.2)$$

Таким образом, задача о брахистохроне свелась к поиску такой гладкой функции $y^0 = y^0(x)$, $x \in [0, b]$, которая принимает заданные значения на концах отрезка $[0, b]$: $y^0(0) = 0$, $y^0(b) = d$ и доставляет минимум функционалу (28.2).

Сформулированная задача отличается от задач, исследованных в предыдущих главах, тем, что в ней нужно найти не конечномерный вектор, а функцию $y^0(x)$, $x \in [0, b]$, — элемент бесконечномерного пространства.

28.2. Основная задача

Рассмотрим задачу поиска минимума функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx \rightarrow \min, \quad y(\cdot) \in \Omega, \quad (28.3)$$

где $y(\cdot) = (y(x), x \in [a, b])$, $\Omega = \{y(x), x \in [a, b]: y(x) \in C^{(1)}, y(a) = d_1, y(b) = d_2\}$, $F(x, y, y_x)$ на $[a, b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ принадлежит классу $C^{(2)}$.

Функции (кривые) $y(\cdot) \in \Omega$ будем в дальнейшем называть *допустимыми*.

Задача (28.3) называется *основной* (нередко *простейшей*) задачей *вариационного исчисления*.

Допустимую кривую $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, называют **сильной минимальной задачи** (28.3) (**функционала** $J(y)$), если при некотором $\varepsilon > 0$ для всех $y(\cdot) \in \Omega$ таких, что

$$|y(x) - y^0(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [a, b], \quad (28.4)$$

выполняется неравенство

$$J(y^0) \leq J(y). \quad (28.5)$$

Если неравенство (28.5) выполняется только для допустимых кривых $y(x)$, $x \in [a, b]$, которые кроме (28.4) удовлетворяют еще условию $|y_x(x) - y_x^0(x)| \leq \varepsilon$, $x \in [a, b]$, то говорят, что $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, – **слабая минимальная**.

Таким образом, сильная минималь лучше всех допустимых кривых, близких к ней по своим значениям (рис. 28.2), слабая минималь лучше только тех допустимых кривых, которые близки к ней как по своим значениям, так и по значениям своих производных (рис. 28.3). Ясно, что сильная минималь является и слабой, поэтому все необходимые условия слабого минимума будут и необходимыми условиями сильного минимума. В данной главе изучаются только слабые минимали. Сильные минимали будут исследованы в гл. 8.

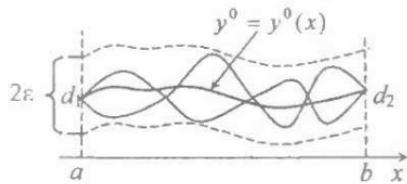


Рис. 28.2

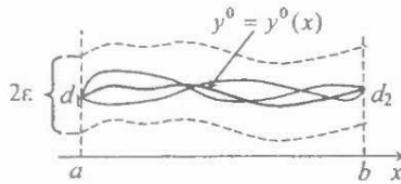


Рис. 28.3

Приведем без доказательства **условия существования решения основной задачи**.

Пусть: а) $F(x, y, y_x) \in C^{(1)}$ на $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; б) $F(x, y, y_x)$ выпукла по y_x ; в) $F(x, y, y_x) \geq \Phi(y_x)$, где $\Phi(y_x)/y_x \rightarrow \infty$, $y_x \rightarrow \infty$. Тогда существует абсолютно непрерывная функция $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, которая является допустимой и на ней функционал $J(y)$ достигает минимального значения (сильный минимум).

Если в основной задаче не выполнено условие выпуклости по y_x функции $F(x, y, y_x)$, $x \in [a, b]$, то задача (28.3) может не иметь решения в принятом смысле. Тогда рассматривается расширение основной задачи, в которой вместо функции $F(x, y, y_x)$, $x \in [a, b]$, берется ее

выпуклая по y_x оболочка. По решению расширенной задачи можно построить минимизирующую последовательность для исходной задачи (28.3), т. е. такую последовательность допустимых кривых $y^k(x)$, $x \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots$, что $J(y^k) \rightarrow \inf J(y)$, $k \rightarrow \infty$.

Минимизирующую последовательность можно считать обобщенным решением основной задачи, построение которого достаточно для многих прикладных задач.

28.3. Другие задачи вариационного исчисления

Основная задача вариационного исчисления допускает разнообразные обобщения. Приведем краткое описание типичных из них.

1) Изопериметрическая задача

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx \rightarrow \min,$$

$$\int_a^b f_i(x, y(x), y_x(x)) dx = l_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad y(\cdot) \in \Omega.$$

2) Задача Лагранжа

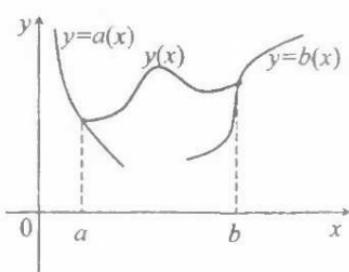


Рис. 28.4

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx \rightarrow \min,$$

$$g_k(x, y(x), y_x(x)) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad y(\cdot) \in \Omega$$

3) Задача Майера

$$J(y) = \phi(y(a), y(b)) \rightarrow \min,$$

$$g_k(x, y(x), y_x(x)) = 0, \quad k = \overline{1, s},$$

$y(\cdot) \in \{y(x) \in C^{(1)}, x \in [a, b]:$ левый конец функции $y(x)$ лежит на заданной кривой $a(x)$, правый конец $y(b)$ лежит на заданной кривой $b(x)\}$. Такие задачи называют *задачами с подвижными концами* (рис. 28.4).

4) Задача Больца: отличается от задачи Майера только видом функционала. В ней рассматривается функционал

$$J(y) = \phi(y(a), y(b)) + \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx.$$

5) *Вариационные задачи с высшими производными*: здесь минимизируется функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), dy(x)/dx, \dots, d^p y(x)/dx^p) dx$$

на допустимых кривых

$$y(x) \in C^{(p)}, \quad x \in [a, b], \quad y^{(i-1)}(a) = d_{1,i}, \quad y^{(i-1)}(b) = d_{2,i}, \quad i = \overline{1, p}.$$

6) *Многомерные вариационные задачи*. Допустимые функции $y(x)$, $x \in [a, b]$, являются непрерывно дифференцируемыми n -вектор-функциями, где $y(a) = d_1$, $y(b) = d_2$, $d_1, d_2 \in \mathbf{R}^n$.

В данной главе излагаются методы решения основной задачи вариационного исчисления. Они допускают соответствующее обобщение на перечисленные задачи 1–6. Некоторые результаты для обобщенных задач вариационного исчисления будут получены в гл. 8.

§ 29. МЕТОД ВАРИАЦИЙ

Метод вариаций, предложенный Ж. Л. Лагранжем в 1760 г., – основной метод исследования экстремальных задач в функциональных пространствах. Он представляет естественное обобщение метода исследования функций на максимум и минимум с помощью дифференциалов (см. гл. 3). В этом методе решающую роль играет тип используемой вариации, от которой существенно зависит как простота, так и сила получаемого результата.

29.1. Вариация допустимой кривой

Пусть $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, – допустимая кривая основной задачи вариационного исчисления. Функцию $\delta y(x)$, $x \in [a, b]$, называют (*допустимой*) *вариацией кривой* $y(x)$, $x \in [a, b]$, если функция $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$, $x \in [a, b]$, вновь является допустимой кривой.

При исследовании слабых минималей удобно вариацию кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, рассматривать в виде

$$\delta y(x) = \varepsilon h(x), \quad x \in [a, b], \tag{29.1}$$

где ε – число. В представлении (29.1) нетрудно заметить аналогию с представлением $\Delta x = \theta l$, принятым в нелинейном программировании, т. е. в (29.1) функция $h(x)$, $x \in [a, b]$, играет роль направления движе-

ния в функциональном пространстве от кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, а число ε – роль шага вдоль этого направления.

Вариацию кривой в виде (29.1) предложил Лагранж. Использование таких вариаций является основным приемом исследования задач вариационного исчисления.

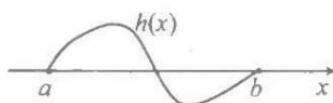


Рис. 29.1

Функцию $h(x)$, $x \in [a, b]$, в дальнейшем будем также называть вариацией допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, если она соответствует вариации $\delta y(x)$, $x \in [a, b]$.

Из определения допустимой кривой следует, что функция $h(x)$, $x \in [a, b]$, – вариация допустимой кривой в том и только том случае, если $h(x) \in C^{(1)}$, $x \in [a, b]$, $h(a) = h(b) = 0$ (рис. 29.1).

29.2. Вариации функционала

Пусть $J(y)$ – функционал, определенный на допустимых кривых $y(x)$, $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon h(x)$. Если при фиксированных допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, и вариации $h(x)$, $x \in [a, b]$, приращение функционала $\Delta J(y)$ допускает разложение

$$\Delta J(y) = J(y + \varepsilon h) - J(y) = \varepsilon \delta J(y, h) + \varepsilon^2 \delta^2 J(y, h)/2 + o(\varepsilon^2), \quad (29.2)$$

то коэффициент $\delta J(y, h)$ при первой степени параметра ε называется *первой вариацией функционала* $J(y)$ на кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, и вариации $h(x)$, $x \in [a, b]$. Коэффициент $\delta^2 J(y, h)$ при $\varepsilon^2/2$ в разложении (29.2) называют *второй вариацией функционала* $J(y)$. Из (29.2) следуют простые правила вычисления вариаций функционала:

$$\delta J(y, h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \delta^2 J(y, h) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(y + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Для функционала $J(y)$ основной задачи вариационного исчисления получаем

$$\delta J(y, h) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon h, y_x + \varepsilon h_x) dx \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} h_x(x) \right) dx, \quad (29.3)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(y, h) &= \frac{d^2}{d\epsilon^2} \int_a^b F(x, y + \epsilon h, y_x + \epsilon h_x) dx \Big|_{\epsilon=0} = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y^2} h^2(x) + 2 \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} h_x^2(x) \right) dx, \end{aligned} \quad (29.4)$$

29.3. Необходимые условия слабого минимума в терминах вариаций функционала

Из определения слабой минимали следует, что допустимая кривая $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, – слабая минималь тогда и только тогда, когда при некоторых $M < \infty$, $\epsilon_0 > 0$ для всех вариаций $|h(x)| \leq M$, $|h_x(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$ и $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ выполняется неравенство

$$J(y^0) \leq J(y^0 + \epsilon h). \quad (29.5)$$

Приведенный критерий слабого минимума неудобен для практического использования из-за большого объема необходимых вычислений. Цель теоретических исследований – получение более удобных для проверки условий минимума.

Первый результат получается с помощью вариаций $\delta y(x) = \epsilon h(x)$, $x \in [a, b]$, с достаточно малыми ϵ , т. е. равномерно малых на отрезке $[a, b]$ (рис. 29.2).

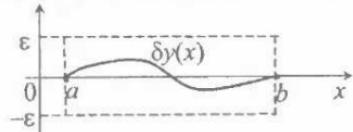


Рис. 29.2

Теорема 29.1. На каждой слабой минимали $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, и любой вариации $h(x)$, $x \in [a, b]$, выполняются условия:

1) первая вариация функционала равна нулю (условие стационарности):

$$\delta J(y^0, h) = 0; \quad (29.6)$$

2) вторая вариация функционала неотрицательна:

$$\delta^2 J(y^0, h) \geq 0. \quad (29.7)$$

Доказательство. Если допустить, что $\delta J(y^0, \bar{h}) = \alpha \neq 0$ для некоторой вариации $\bar{h}(x)$, $x \in [a, b]$, то из (29.2), (29.5) при достаточно малых $|\varepsilon|$, $\text{sign } \varepsilon = -\text{sign } \alpha$, получим противоречие: $0 \leq J(y^0 + \varepsilon \bar{h}) - J(y^0) = -|\varepsilon|(|\alpha| + o(\varepsilon)/\varepsilon) < 0$.

Аналогично при выполнении (29.6) предположение $\delta^2 J(y^0, \bar{h}) = \alpha < 0$ ведет к противоречию: $0 \leq J(y^0 + \varepsilon \bar{h}) - J(y^0) = \varepsilon^2 (\alpha/2 + o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2) < 0$, если $|\varepsilon|$ – достаточно малое число. ■

Применяя условия (29.6), (29.7) к функционалу простейшей задачи с учетом (29.3), (29.4), получаем следующие результаты: если $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, – слабая минимум основной задачи вариационного исчисления, то для всех вариаций $h(x)$, $x \in [a, b]$, выполняются равенство

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x} h_x(x) \right) dx = 0 \quad (29.8)$$

и неравенство

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y^2} h^2(x) + 2 \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) + \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x^2} h_x^2(x) \right) dx \geq 0. \quad (29.9)$$

29.4. Уравнение Эйлера

Необходимое условие слабого минимума (29.8) проще для проверки, чем критерий (29.5), поскольку оно выражено с помощью линейного относительно h функционала. Усиление этого результата достигается с помощью специальных вариаций $h(x)$, $x \in [a, b]$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, имеющее самостоятельный интерес.

Лемма 29.1 (Дюбуа-Раймона). *Если равенство*

$$\int_a^b b(x)g(x)dx = 0 \quad (29.10)$$

выполняется для непрерывной функции $b(x)$, $x \in [a, b]$, и всех непрерывных функций $g(x)$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $b(x) \equiv \text{const}$, $x \in [a, b]$.

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению найдутся точки $x_1, x_2 \in]a, b[$, что $b(x_1) \neq b(x_2)$. Пусть для определенности

$b(x_1) > b(x_2)$. Тогда в силу непрерывности функции $b(x)$, $x \in [a, b]$, при некотором $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство

$$\min_{x \in [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]} b(x) > \max_{x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]} b(x). \quad (29.11)$$

Функция $g(x)$, $x \in [a, b]$, изображенная на рис. 29.3, удовлетворяет условию $\int_a^b g(x) dx = 0$ (можно

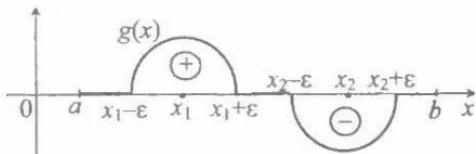


Рис. 29.3

взять функцию $g(x)$, $x \in [a, b]$, вида

$$g(x) = \begin{cases} (x - x_1 + \varepsilon)^2 (x - x_1 - \varepsilon)^2, & x \in [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon], \\ -(x - x_2 + \varepsilon)^2 (x - x_2 - \varepsilon)^2, & x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon], \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [a, b]. \end{cases}$$

На этой функции левая часть в (29.10) с учетом (29.11) положительна:

$$\int_a^b b(x)g(x)dx = \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} b(x)g(x)dx + \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} b(x)g(x)dx > 0,$$

что противоречит равенству (29.10). ■

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 29.2. Каждая слабая минималь $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, основной задачи вариационного исчисления является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (29.12)$$

Доказательство. Интегрируя по частям первое слагаемое в (29.8) и используя свойство $h(a) = h(b) = 0$ вариации $h(x)$, $x \in [a, b]$, из (29.8) получаем

$$\delta J(y^0) = \int_a^b \left(- \int_a^x \frac{\partial F(s, y^0, y_x^0)}{\partial y} ds + \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x} \right) h_x(x) dx = 0. \quad (29.13)$$

Применив лемму 29.1 к выражению (29.13), приходим к выводу, что каждая слабая минималь задачи (28.3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} = \int_a^x \frac{\partial F(s, y, y_x)}{\partial y} ds + \text{const}, \quad x \in [a, b], \quad (29.14)$$

которое называют *интегральным уравнением Эйлера*.

В тождестве, которое получается из уравнения (29.14) после подстановки в него функции $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, правая часть непрерывно дифференцируема по x . Следовательно, и левая часть имеет непрерывную производную по x , т. е. вдоль слабой минимали $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, существует и непрерывна производная

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}. \quad (29.15)$$

Заметим, что вдоль произвольной допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, функция (29.15) может быть или не определена, или не принадлежать классу C на $[a, b]$.

Взяв производную по x от тождества (29.14) вдоль минимали $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, получим *дифференциальное уравнение Эйлера* (29.12). ■

Уравнение Эйлера (29.12) в подробной записи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} y_{xx} + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y \partial y_x} y_x + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial x \partial y_x} - \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial x} = 0, \quad (29.16)$$

т. е. при $y(x) \in C^{(2)}$, $x \in [a, b]$, в неособом случае ($\partial^2 F / \partial y_x^2 \neq 0$) это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $y(x)$, $x \in [a, b]$. Общее решение $y(x, c_1, c_2)$ таких уравнений зависит от двух произвольных постоянных c_1, c_2 .

Таким образом, основная задача вариационного исчисления, имеющая решение, методом вариаций свелась (редуцировалась) к поиску двух постоянных c_1, c_2 , удовлетворяющих равенствам

$$y(a, c_1, c_2) = d_1, \quad y(b, c_1, c_2) = d_2,$$

которые вытекают из определения допустимой кривой ($y(a) = d_1$, $y(b) = d_2$).

Замечание 29.1. Для вывода дифференциального уравнения Эйлера в вариационном исчислении также используется следующий результат.

Лемма 29.2 (Лагранжа). *Если равенство*

$$\int_a^b a(x) h(x) dx = 0$$

выполняется для непрерывной функции $a(x)$, $x \in [a, b]$, и всех вариаций $h(x)$, $x \in [a, b]$, то $a(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$.

Эту лемму называют также *основной леммой вариационного исчисления*. Лемма Лагранжа имеет и самостоятельный интерес.

Допустимые кривые $y(x)$, $x \in [a, b]$, основной задачи, являющиеся решениями уравнения Эйлера, принято называть *экстремалями* (Эйлера) или *экстремалями функционала* $J(y)$ задачи. В этих терминах утверждение теоремы 29.2 гласит: *каждая слабая минимум основной задачи находится среди экстремалей Эйлера*.

Для еще одной интерпретации теоремы 29.2 введем новое понятие. Сначала вспомним, что для функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, допускающей разложение

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a \cdot \Delta x + o(|\Delta x|),$$

число a называется производной $df(x)/dx$ функции $f(x)$ или ее градиентом $\text{grad } f(x)$. По аналогии с этим для функционала $J(y)$, допускающего разложение

$$J(y + \delta y) - J(y) = \int_a^b a(x) \delta y(x) dx + o(\|\delta y(\cdot)\|),$$

функцию $a(x)$, $x \in [a, b]$, называют *вариационной производной (первого рода)* $\delta J(y)/\delta y(x)$ или *градиентом* $\text{grad } J(y)$ *функционала*.

Согласно приведенным выше вычислениям левая часть выражения (29.12) с точностью до множителя ε представляет линейную относительно δy часть разложения функционала основной задачи (28.3). Следовательно, вариационная производная функционала $J(y)$ основной задачи имеет вид

$$\frac{\delta J(y)}{\delta y(x)} = \text{grad } J(y) = \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}$$

и в силу теоремы 29.2 на слабой минимали равна нулю. Таким образом, утверждение (29.12) теоремы 29.2 представляет полный аналог необходимого условия оптимальности в задачах на безусловный минимум (теорема Ферма: $\partial f(x^0)/\partial x = \text{grad } f(x^0) = 0$).

29.5. Теорема Гильберта

Допустимая кривая $y(x)$, $x \in [a, b]$, называется *неособой*, если вдоль нее $\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 \neq 0$, $x \in [a, b]$.

Теорема 29.3. *Каждая неособая экстремаль принадлежит классу $C^{(2)}$.*

Доказательство. По интегральному уравнению (29.14) и экстремали $y(x)$, $x \in [a, b]$, построим уравнение

$$\varphi(x, z) = - \int_a^x \frac{\partial F(s, y(s), y_x(s))}{\partial y} ds + \frac{\partial F(x, y(x), z)}{\partial y_x} - \text{const} = 0, \quad (29.17)$$

которое имеет решение $z(x) = y_x(x)$, $x \in [a, b]$.

Из определения неособой экстремали следует, что

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} \right|_{z=y_x(x)} = \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} \neq 0.$$

Поэтому по теореме о неявной функции решение $z = y_x(x)$, $x \in [a, b]$, уравнения (29.17) допускает столько производных по x , сколько их по x имеет функция $\varphi(x, z)$. Поскольку $F(x, y, z) \in C^{(2)}$, то $\varphi(x, z) \in C^{(1)}$. Следовательно, $y_x(x) \in C^{(1)}$, т. е. $y(x) \in C^{(2)}$, $x \in [a, b]$. ■

29.6. Кусочно-гладкие допустимые кривые

Основная задача может не иметь решения в классе гладких допустимых кривых. Сейчас расширим класс допустимых кривых до кусочно-гладких кривых. Под кусочно-гладкими кривыми будем понимать непрерывные функции $y(x)$, $x \in [a, b]$, $y(a) = d_1$, $y(b) = d_2$, имеющие непрерывные производные всюду на $[a, b]$, за исключением, возможно, конечного числа точек, в которых производные терпят разрывы первого рода (рис. 29.4).

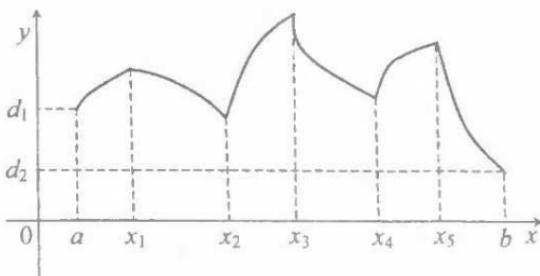


Рис. 29.4

Анализируя доказательство теоремы 29.2, приведенное в разд. 29.4, нетрудно заметить, что непрерывность функции $y_x(x)$, $x \in [a, b]$, использовалась только при переходе от интегрального уравнения Эйлера (29.14) к дифференциальному (29.12). При этом переход остается законным во всех точках непрерывности функции

$y_x(x)$, $x \in [a, b]$, т. е. между точками излома слабая минималь удовлетворяет уравнению Эйлера. В точках разрыва производной $y_x(x)$ правая часть в (29.14) остается непрерывной функцией. Следовательно, будет непрерывной функция в левой части (29.14):

$$\frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x} \Bigg|_{x=x_i-0} = \frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x} \Bigg|_{x=x_i+0}, \quad i = \overline{1, k}. \quad (29.18)$$

Условия (29.18) – первые условия Вейерштрасса – Эрдмана.

Вторые условия Вейерштрасса – Эрдмана утверждают, что в точках излома слабой минимали непрерывна функция

$$F(x, y^0(x), y_x^0(x)) - y_x^0(x) \frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x},$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \left(F(x, y^0(x), y_x^0(x)) - y_x^0(x) \frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x} \right) \Bigg|_{x=x_i-0} = \\ & = \left(F(x, y^0(x), y_x^0(x)) - y_x^0(x) \frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x} \right) \Bigg|_{x=x_i+0}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Пример 29.1. Для иллюстрации полученных выше необходимых условий слабого минимума решим задачу о брахистохроне (см. разд. 28.1).

Поскольку $F(x, y, y_x) = \sqrt{(1+y_x^2)/2gy}$, то уравнение Эйлера (29.12) или (29.16) имеет вид

$$-\frac{g\sqrt{1+y_x^2}}{2gy\sqrt{2gy}} + \frac{y_x^2}{2y\sqrt{2gy(1+y_x^2)}} - \frac{y_{xx}}{(1+y_x^2)\sqrt{2gy(1+y_x^2)}} = 0,$$

т. е. $2yy_{xx} + y_x^2 + 1 = 0$. Выражение $y(1+y_x^2) = c$ является первым интегралом уравнения Эйлера: $\frac{d}{dx}(y(1+y_x^2)) = y_x(1+y_x^2 + 2yy_{xx}) = 0$.

Из выражения первого интеграла имеем $y_x = \sqrt{(c-y)/y}$. Подстановка $y = c \sin^2(t/2)$ приводит к уравнению $dx = c \sin^2(t/2)dt = c(1 - \cos t)dt/2$, откуда $x = c_1 + c(t - \sin t)/2$, $y = c(1 - \cos t)/2$. Произвольные постоянные c , c_1 выбираются из условия, что кривая $y(x)$, $x \in [0, b]$, проходит через начало координат и точку B . Поэтому $c_1 = 0$.

Система уравнений $x = c(t - \sin t)/2$, $y = c(1 - \cos t)/2$ является уравнением циклоиды в параметрической форме. Следовательно, брахистохроной может быть лишь дуга циклоиды.

Пример 29.2. Найти экстремали с одной угловой точкой в задаче

$$J(y) = \int_0^3 (y_x^2 - 1)^2 dx \rightarrow \min, \quad y(0) = y(3) = 0.$$

Подынтегральная функция $F = (y_x^2 - 1)^2$ зависит только от y_x . Очевидно, что экстремалами функционала задачи являются прямые $y = c_1 x + c_2$. Пусть $x_1 \in]0, 3[$ — точка излома экстремали. Исходя из граничных условий $y(0) = y(3) = 0$, экстремали с одной точкой излома ищем в виде

$$y(x) = \begin{cases} k_1 x, & x \in [0, x_1[, \\ k_2(x - 3), & x \in [x_1, 3]. \end{cases}$$

Поскольку экстремали непрерывны, то

$$k_1 x_1 = k_2(x_1 - 3).$$

Выпишем условия Вейерштрасса — Эрдмана. Имеем

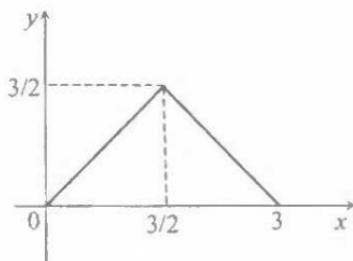
$$\frac{\partial F}{\partial y_x} = 4y_x^3 - 4y_x; \quad F - y_x \frac{\partial F}{\partial y_x} = -3y_x^4 + 2y_x^2 + 1.$$

Тогда $y_x(x_1 - 0) = k_1$ (производная слева в точке x_1), $y_x(x_1 + 0) = k_2$ (производная справа), поэтому условия Вейерштрасса — Эрдмана дают:

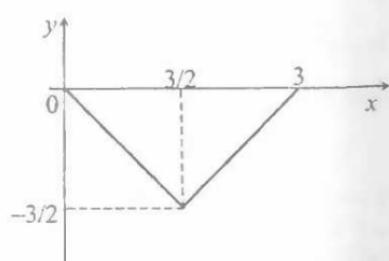
$$\begin{cases} (k_1 - k_2)(k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2 - 1) = 0, \\ (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)(3(k_1^2 + k_2^2) - 2) = 0. \end{cases}$$

Решение системы $k_1 = k_2$ должно быть отброшено: при нем экстремаль имеет непрерывную производную. Таким образом, $k_1 + k_2 = 0$ и, значит: а) $k_1 = 1$; $k_2 = -1$; б) $k_1 = -1$; $k_2 = 1$. Отсюда и из (29.18) получаем $x_1 = 3/2$. Следовательно, искомые экстремали имеют вид (рис. 29.5):

$$a) \quad y(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 3/2[, \\ -x + 3, & x \in [3/2, 3]; \end{cases} \quad b) \quad y(x) = \begin{cases} -x, & x \in [0, 3/2[, \\ x - 3, & x \in [3/2, 3]. \end{cases}$$



а



б

Рис. 29.5

Таким образом, на найденных экстремалах a, b с угловой точкой $x_1 = 3/2$ может достигаться слабый минимум.

§ 30. ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ

В предыдущем параграфе методом вариаций получены необходимые условия слабого минимума первого порядка, основанные на исследовании первой вариации функционала основной задачи вариационного исчисления. Новые необходимые условия слабого минимума, а также достаточные условия слабого минимума получаются при исследовании методом вариаций второй вариации функционала. В данном параграфе излагаются некоторые классические условия слабого минимума второго порядка.

30.1. Присоединенная задача о минимуме

Обозначим

$$\begin{aligned} \omega(x, h, h_x) = & \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y \partial y_x} h h_x + \\ & + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} h_x^2. \end{aligned} \quad (30.1)$$

Тогда выражение (29.4) для второй вариации $\delta^2 J(y, h)$ функционала основной задачи вдоль допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, примет вид

$$\delta^2 J(y, h) = \int_a^b \omega(x, h(x), h_x(x)) dx. \quad (30.2)$$

Задача минимизации второй вариации (30.2) на вариациях $h(x)$, $x \in [a, b]$, вдоль допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, называется *присоединенной задачей о минимуме* (соответствующей допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$).

Поскольку $\delta^2 J(y^0, h) \geq 0$ на всех вариациях $h(x)$, $x \in [a, b]$ (см. теорему 29.1), то присоединенная задача о минимуме вдоль слабой минимали $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, всегда имеет решение $h^0(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$, причем $\delta^2 J(y^0, h^0) = 0$.

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \omega}{\partial h_x} = 0, \quad (30.3)$$

составленное по функционалу (30.2) присоединенной задачи о минимуме, называется *уравнением Якоби* основной задачи вариационного исчисления. В подробной записи (с учетом выражения (30.1)) уравнение Якоби при $h(x) \in C^{(2)}$, $x \in [a, b]$ представляет линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a(x)h_{xx} + b(x)h_x + c(x)h = 0 \quad (30.4)$$

с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} \Bigg|_{y=y(x)}, \quad b(x) = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} \Bigg|_{y=y(x)}, \\ c(x) &= \left(\frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y \partial y_x} - \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y^2} \right) \Bigg|_{y=y(x)}. \end{aligned}$$

30.2. Условие Лежандра – Клебша

С помощью метода вариаций докажем следующее необходимое условие слабого минимума второго порядка.

Теорема 30.1 (Лежандра – Клебша). *Вдоль каждой слабой минимали $y^0(x) \in C^{(1)}$, $x \in [a, b]$, выполняется неравенство*

$$\frac{\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x^2} \geq 0, \quad x \in]a, b[.$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. найдется такая точка $\bar{x} \in]a, b[$, что выполняется неравенство

$$\frac{\partial^2 F(\bar{x}, y^0(\bar{x}), y_x^0(\bar{x}))}{\partial y_x^2} = \alpha < 0. \quad (30.5)$$

Рассмотрим вариацию (рис. 30.1)

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(x - \bar{x} + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & x \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[, \\ 0, & x \notin]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[, \end{cases} \quad (30.6)$$

для которой (рис. 30.2)

$$\bar{h}_x(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\varepsilon} \sin \frac{\pi(x - \bar{x} + \varepsilon)}{\varepsilon}, & x \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[, \\ 0, & x \notin]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[. \end{cases} \quad (30.7)$$

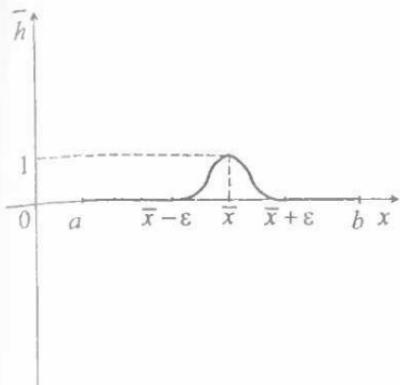


Рис. 30.1

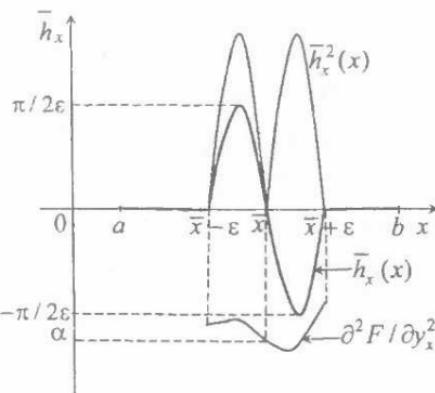


Рис. 30.2

Вторая вариация $\delta^2 J(y, h)$ (30.2) с учетом (30.6), (30.7) равна

$$\delta^2 J(y^0, \bar{h}) = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} \omega^0(x, \bar{h}(x), \bar{h}_x(x)) dx, \quad (30.8)$$

где $\omega^0(x, \bar{h}, \bar{h}_x)$ – выражение (30.1) вдоль допустимой кривой $y^0(x)$, $x \in [a, b]$. В силу (30.5) и непрерывности функции $\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)/\partial y_x^2$, $x \in [a, b]$, найдется такое достаточно малое число $\varepsilon > 0$, что

$$\frac{\partial^2 F(y, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x^2} < 0, \quad x \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon].$$

Тогда из (30.5) – (30.7) видно (рис. 30.2), что в выражении $\delta^2 J(y^0, \bar{h})$ при малых $\varepsilon > 0$ слагаемое

$$\int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} \bar{h}_x^2(x) \frac{\partial^2 F(y, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x^2} dx$$

будет сколь угодно большим (по модулю) и, следовательно, вносит основной вклад во вторую вариацию (30.8). Учитывая эти рассуждения, получим неравенство $\delta^2 J(y^0, \bar{h}) < 0$, противоречащее необходимому условию минимума $\delta^2 J(y^0, h) \geq 0$ для любых допустимых вариаций $h(x)$, $x \in [a, b]$. ■

30.3. Условие Якоби

Заметим, что все нетривиальные решения уравнения Якоби (30.4), удовлетворяющие условию $h(a) = 0$, отличаются друг от друга лишь

отличным от нуля постоянным множителем и, следовательно, обращаются в нуль одновременно.

Говорят, что вдоль допустимой кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, точка $x^* \in]a, b]$ сопряжена с точкой a , если существует такое нетривиальное решение $h(x) \equiv h(x, a, c) \neq 0$, $x \in [a, b[$, c – произвольная постоянная, уравнения Якоби (30.4), что $h(a) = 0$, $h(x^*) = 0$.

Теорема 30.2 (Якоби). Вдоль неособой минимали $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, не существует точек $x^* \in]a, b[$, сопряженных с точкой a .

Доказательство. Рассуждаем от противного: вдоль $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, существует точка $\bar{x} \in]a, b[$, сопряженная с точкой a . Пусть $h^*(x) \neq 0$, $x \in [a, b[$, – соответствующее решение уравнения Якоби (30.4) (рис. 30.3).

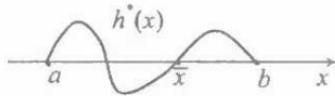


Рис. 30.3

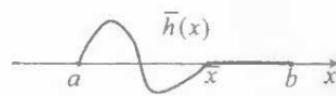


Рис. 30.4

Ясно, что

$$h_x^*(\bar{x} - 0) \neq 0, \quad (30.9)$$

иначе в силу теорем существования и единственности решений линейных дифференциальных уравнений получим тождество $h^*(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. Построим вариацию (рис. 30.4)

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h^*(x), & x \in [a, \bar{x}[\\ 0, & x \in [\bar{x}, b]. \end{cases} \quad (30.10)$$

Подсчитаем вдоль нее вторую вариацию (30.2) функционала. Учитывая формулу Эйлера $2\omega(x, h, h_x) = h\partial\omega/\partial h + h_x\partial\omega/\partial h_x$ для однородных (второй степени) функций, уравнение Якоби (30.3), которому удовлетворяет функция $h^*(x)$, $x \in [a, b[$, и свойство $h^*(a) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \delta^2 J(y^0, \bar{h}) &= \int_a^b \omega^0(x, \bar{h}, \bar{h}_x) dx = \int_a^{\bar{x}} \omega^0(x, h^*, h_x^*) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{\bar{x}} \left(h^* \frac{\partial \omega^0}{\partial h} + h_x^* \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_a^{\bar{x}} \left(h^* \frac{d}{dx} \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} + h_x^* \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^{\bar{x}} \frac{d}{dx} \left(h^* \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(h^*(x) \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} \right) \Big|_a^{\bar{x}} = 0.$$

Таким образом, вариация (30.10) – решение присоединенной задачи о минимуме.

Соотношение (30.9) вместе с $\bar{h}_x(\bar{x}+0) = 0$ означает, что вариация (30.10) в точке $x = \bar{x}$ имеет излом. Следовательно, при $x = \bar{x}$ должно выполняться условие Вейерштрасса – Эрдмана (29.17)

$$\left. \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} \right|_{x=\bar{x}-0} = \left. \frac{\partial \omega^0}{\partial h_x} \right|_{x=\bar{x}+0},$$

которое в подробной записи имеет вид

$$\begin{aligned} & \left. \left(2\bar{h}(x) \frac{\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y \partial y_x} + 2\bar{h}_x(x) \frac{\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x^2} \right) \right|_{x=\bar{x}-0} = \\ & = \left. \left(2\bar{h}(x) \frac{\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y \partial y_x} + 2\bar{h}_x(x) \frac{\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x^2} \right) \right|_{x=\bar{x}+0}. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Поскольку $\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y_x^0 > 0$, $x \in]a, b[$, (экстремаль $y^0(x)$, $x \in [a, b]$, неособая) и $\bar{h}(\bar{x}-0) = \bar{h}(\bar{x}+0) = 0$, $\bar{h}_x(\bar{x}+0) = 0$, то из (30.11) получим равенства $\bar{h}_x(\bar{x}+0) = 0$, $\bar{h}_x(\bar{x}-0) = 0$, противоречащие тому, что \bar{x} – точка излома вариации (30.10). ■

Замечание 30.1. Полученные выше необходимые условия оптимальности (Эйлера, Лежандра – Клебша, Якоби) не являются в отдельности достаточными условиями слабого минимума. Достаточные условия оптимальности дает следующее утверждение.

Теорема 30.3. Если допустимая кривая $y(x)$, $x \in [a, b]$:

1) является экстремалью;

2) удовлетворяет усиленному условию Лежандра – Клебша, т. е. вдоль нее выполняется неравенство

$$\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} > 0, \quad x \in [a, b];$$

3) удовлетворяет усиленному условию Якоби, т. е. вдоль этой кривой не существует точек из $]a, b]$, сопряженных с точкой $x = a$, то она является слабой минималью основной задачи вариационного исчисления.

Пример 30.1. Рассмотрим задачу

$$J(y) = \int_0^1 \left(x + 2y + \frac{1}{2} y_x^2 \right) dx \rightarrow \min, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Уравнение Эйлера для рассматриваемой задачи имеет вид $y_{xx} = 2$. Отсюда решения этого уравнения – семейство функций $y(x) = x^2 + c_1x + c_2$, $x \in [0, 1]$.

Экстремалю, удовлетворяющей граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$, является кривая $y(x) = x^2 - x$, $x \in [0, 1]$. Вдоль этой экстремали выполняется усиленное условие Лежандра – Клебша: $\partial^2 F / \partial y_x^2 = 12 > 0$. Проверим условие Якоби. Для этого запишем уравнение Якоби: $h_{xx} = 0$. Его общее решение $h(x) = c_1x + c_2$, $x \in [0, 1]$. Условие $h(0) = 0$ дает $c_2 = 0$, т. е. пучок кривых $h(x) = c_1x$ при $c_1 \neq 0$ нигде на отрезке $[0, 1]$ в нуль не обращается, кроме точки $x = 0$. Таким образом, выполнено усиленное условие Якоби. Следовательно, на экстремали $y(x) = x^2 - x$, $x \in [0, 1]$, данный функционал достигает слабого минимума:

$$J(y) = \int_0^1 \left(x + 2(x^2 - x) + \frac{1}{2}(2x - 1)^2 \right) dx = \frac{1}{3}.$$

Литература

1. Блісс, Г. А. Лекции по вариационному исчислению / Г. А. Блісс. – М.: ИЛ, 1950.
2. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М.: Физматлит, 1961.
3. Эльсгольц, Л. Э. Вариационное исчисление. – Изд.7-е, стереот. / Л. Э. Эльсгольц. – М.: УРСС, 2008.

Глава 8

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Теория оптимального управления, отражающая современный этап развития вариационного исчисления (гл. 7), возникла в середине XX века в связи с задачами, поставленными практикой в различных областях развития новой техники. Они содержали математические задачи, экстремальные по своей сущности, и не укладывались в рамки классического вариационного исчисления.

Фундамент математической теории оптимальных процессов составляют *принцип максимума Понtryгина* и *динамическое программирование Беллмана*.

§ 31. ЗАДАЧА ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Задача предельного быстродействия, поставленная специалистами по автоматическому регулированию, стала первой задачей теории оптимального управления. Ее суть поясним на простейшем примере.

31.1. Оптимальное по быстродействию управление механическим объектом

Тележку массы m требуется с помощью горизонтальной силы u , не превышающей по модулю величины L , переместить за минимальное время по горизонтальной прямой (без трения) из начального положения A , в котором она имела скорость v_u , в конечное положение B , где она должна иметь заданную скорость v_k (рис. 31.1).

Математическую постановку задачи начнем с составления математической модели *объекта управления*. Согласно закону Ньютона движение тележки вдоль оси Ox описывается уравнением

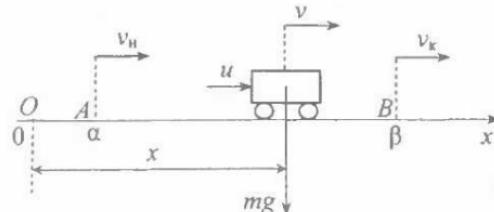


Рис. 31.1

$$m\ddot{x} = u, \quad (31.1)$$

где $\ddot{x} = \ddot{x}(t) = d^2x(t)/dt^2$ – ускорение тележки в момент времени t ;
 $u = u(t)$ – величина силы, приложенной в момент t к объекту управления.

Из физической постановки задачи следуют условия на положение $x(t)$ и скорость $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$ тележки в начальный ($t = 0$) и конечный ($t = t^*$) моменты времени:

$$x(0) = \alpha, \quad \dot{x}(0) = v_h; \quad x(t^*) = \beta, \quad \dot{x}(t^*) = v_k. \quad (31.2)$$

По предположению, ограничены значения прилагаемой к тележке силы u :

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in [0, t^*]. \quad (31.3)$$

В первых постановках задач оптимального управления инженеры допускали законы $u(t)$, $t \geq 0$, изменения силы u , описываемые кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t \in [0, t^*]$.

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи состоит в поиске таких момента t^{*0} и кусочно-непрерывной функции $u^0(t)$, $t \in [0, t^{*0}]$, стесненной ограничением (31.3), для которых на соответствующем решении $x^0(t)$, $t \in [0, t^{*0}]$, уравнения (31.1) выполняются краевые условия (31.2) и минимальна продолжительность t^{*0} переходного процесса.

31.2. Сравнение задачи быстродействия с задачей о брахистохроне

Перейдем в задаче (31.1)–(31.3) к *фазовым переменным* $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ (*переменным состояния* (x_1, x_2) объекта управления). Тогда сформулированная задача примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \alpha, & x_1(t^*) = \beta, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}u; & x_2(0) = v_h; & x_2(t^*) = v_k; \end{cases} \quad (31.4)$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in [0, t^*]; \quad t^* \rightarrow \min.$$

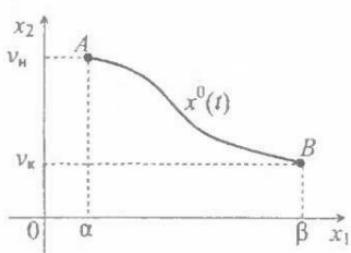


Рис. 31.2

На геометрическом языке задача (31.4) означает построение на фазовой плоскости переменных x_1, x_2 такой *траектории* $x^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t))$, $t \geq 0$, системы (31.4), по которой фазовая точка за кратчайшее время t^{*0} переходит из состояния $A(\alpha, v_h)$ в состояние $B(\beta, v_k)$ (рис. 31.2).

В такой интерпретации рассматриваемая задача управления движением похожа на задачу о брахистохроне из вариационного исчисления (гл. 7). Принципиальное отличие задачи быстродействия от задачи о брахистохроне состоит в наличии ограничения типа нестрогого неравенства (31.3), которое не позволяет использовать технику и результаты классического вариационного исчисления.

31.3. Математическая модель задачи предельного быстродействия

Рассмотрим объект, поведение которого в n -мерном фазовом пространстве \mathbf{R}^n описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (31.5)$$

Здесь $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – *состояние* объекта в момент времени t , $\dot{x} = \dot{x}(t) = dx/dt$ – его *скорость*, $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ – значение в момент времени t r -мерного *управляющего воздействия*.

Пусть в r -мерном пространстве \mathbf{R}^r задано множество $U \subset \mathbf{R}^r$. Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \geq 0$, принимающую значения из U :

$$u(t) \in U, t \geq 0,$$

назовем *доступным управляющим воздействием*. Будем считать, что каждому доступному управляющему воздействию соответствует единственное решение $x(t)$, $t \geq 0$, векторного уравнения (31.5) с начальным условием $x(0) = x_0$. Доступное управляющее воздействие $u(t)$, $t \geq 0$, называется *программой*, если при заданных x_0 , $x_k \in \mathbf{R}^n$ соответствующая траектория $x(t)$, $t \geq 0$, в некоторый момент времени $0 < t^* = t^*(u) < \infty$ удовлетворяет условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x(t^*) = x_k.$$

Задача предельного быстродействия: среди программ найти такую $u^0(t)$, $t \geq 0$ (*оптимальную*), для которой продолжительность $t^{*0} = t^*(u^0)$ переходного процесса минимальна.

Приведем без доказательства теорему существования решения сформулированной задачи.

Теорема 31.1. Пусть X – ограниченное множество, $X \subset \mathbf{R}^n$, $f(x, u) \in C$, $x \in X$, $u \in U$; множество траекторий системы (31.5), соответствующих всевозможным программам, не пусто и ограничено ($(x(t) \in X, t \geq 0)$); для каждого $x \in X$ множество скоростей

$f(x, U) = \{f(x, u) : u \in U\}$ – выпуклый компакт. Тогда задача предельного быстродействия имеет решение в классе измеримых управляющих воздействий.

В дальнейшем в качестве доступных управляющих воздействий будем использовать, как правило, кусочно-непрерывные функции, хотя основной результат – принцип максимума – справедлив и для измеримых функций. Случай, когда утверждение верно только для измеримых управляющих воздействий, будем отмечать особо.

Напомним, функция $u(t)$, $t \in T$, называется *измеримой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется кусочно-непрерывная функция $u_\varepsilon(t)$, $t \in T$, которая отличается от $u(t)$, $t \in T$, на множестве интервалов $\omega \subset T$, суммарная длина которых не превышает ε .

К математическим моделям теории оптимального управления сводятся многочисленные экстремальные задачи, не связанные с управлением. В этих задачах объекты оптимизации могут быть статическими. Каждую задачу вариационного исчисления можно свести к задаче теории оптимального управления. В связи с этим иногда теорию оптимального управления называют неклассическим вариационным исчислением. В теории оптимального управления исследуются как традиционные для классического вариационного исчисления вопросы (существование, единственность, непрерывная зависимость решений, необходимые и достаточные условия оптимальности и др.), так и вопросы, не рассматриваемые в нем (стабилизация, управляемость, наблюдаемость, синтез оптимальных систем и др.).

§ 32. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Принцип максимума – классическое необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления. Оно является самым сильным из известных необходимых условий оптимальности первого порядка. В данном параграфе докажем его для *задачи оптимального управления типа Больца*.

Задачу предельного быстродействия исследуем позже.

32.1. Постановка задачи

Пусть поведение объекта управления в ограниченной области $X \subset \mathbf{R}^n$ описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0) = x_0, \quad (32.1)$$

где $x = x(t) \in X$ – *состояние* объекта в момент времени t ; $u = u(t) \in \mathbf{R}^r$ – значение *управляющего воздействия*; t – скаляр (*время*); x_0 – *начальное состояние*; T – фиксированный промежуток времени управления.

Класс доступных управляющих воздействий сохраним таким же, как в § 31: это кусочно-непрерывные функции $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $t \in T$, удовлетворяющие условию

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (32.2)$$

где $U \subset \mathbf{R}^r$ – заданное множество. Поскольку в данной задаче нет ограничений на конечное (*терминальное*) состояние, то доступное управляющее воздействие совпадает с программой.

Качество программы оценим с помощью *функционала (критерия качества, целевого функционала)*

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (32.3)$$

Оптимальными назовем *программу* $u^0(t)$, $t \in T$, и соответствующую ей *траекторию* $x^0(t)$, $t \in T$, которые минимизируют критерий качества (32.3):

$$\begin{aligned} J(u^0) &= \varphi(x^0(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt = \\ &= \min \left(\varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \right) = \min J(u), \end{aligned}$$

где минимум вычисляется по всем программам.

Задача (32.1)–(32.3) называется *задачей оптимального управления типа Больца* (*задачей оптимального управления со свободным правым концом траектории*).

Оптимальную программу назовем *программным решением* задачи (32.1)–(32.3).

32.2. Существование оптимальных программ

В дальнейшем при использовании принципа максимума будем предполагать, что $X \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченное множество, $U \subset \mathbf{R}^r$ – компакт, функции $\varphi(x)$, $f(x, u)$, $f_0(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, непрерывны вместе с $\partial\varphi/\partial x$, $\partial f/\partial x$, $\partial f_0/\partial x$, траектории динамической системы существуют

ют, единственны, продолжимы на весь промежуток времени и принадлежат множеству X .

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 32.1. Если при каждом $x \in X$ функция $f_0(x, u)$, $u \in U$, и множество скоростей $f(x, U) = \{f(x, u) : u \in U\}$ выпуклы, то задача (32.1)–(32.3) имеет решение в классе измеримых управляемых воздействий.

Оба условия теоремы существенны (см. разд. 32.9). Если не выполняется хотя бы одно из требований теоремы, то задача может не иметь решения в классе измеримых управляемых воздействий. В таких случаях переходят к различным ее расширениям в зависимости от конкретной задачи и строят обобщенные решения. Для упрощения выкладок поясним это на частном случае задачи (32.1)–(32.3) – на задаче оптимального управления типа Майера (задаче терминального управления) ($f_0(x, u) \equiv 0$):

$$\begin{aligned} J(u) &= \phi(x(t^*)) \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T = [0, t^*]. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Пусть множества $f(x, U)$, $x \in X$, не выпуклы. Наряду с задачей (32.4) рассмотрим ее *расширение*

$$\begin{aligned} J(\alpha, v) &= \phi(x(t^*)) \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= g(x, \alpha, v), \quad x(0) = x_0, \\ v(t) &\in V, \quad \alpha(t) \in \mathcal{A}, \quad t \in T. \end{aligned} \tag{32.5}$$

Здесь $v(t) \in \mathbf{R}^{(n+1)r}$, $\alpha(t) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $t \in T$, – новые управляемые воздействия,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\alpha = (\alpha_i, i = \overline{1, n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1\}, \\ V &= \{v = (v^{(i)}, i = \overline{1, n+1}) \in \mathbf{R}^{(n+1)r} : v^{(i)} \in U, i = \overline{1, n+1}\}, \\ g(x, \alpha, v) &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x, v^{(i)}). \end{aligned}$$

Согласно теореме 32.1 расширенная задача (32.5) имеет решение в классе измеримых управляемых воздействий.

Пусть $\{\alpha^0(\cdot), v^0(\cdot)\}$ – оптимальная программа расширенной задачи (32.5). Возможны два случая: 1) $\alpha_i^0(t) = 0 \vee 1$ почти всюду на

T , $i = \overline{1, n+1}$; 2) существуют такие индекс i_0 и множество $\sigma \subset T$ ненулевой меры, что $0 < \alpha_{i_0}^0(t) < 1$, $t \in \sigma$.

В первом случае исходная задача (32.4) имеет решение в классе измеримых управляющих воздействий: $u^0(t) \equiv v^{(i)^0}(t)$, $t \in T_i = \{\tau \in T : \alpha_i^0(\tau) = 1\}$, $i = \overline{1, n+1}$.

Во втором случае задача не имеет решения в классическом смысле. Однако по решению расширенной задачи (32.5) можно построить **минимизирующую последовательность (обобщенное решение)**

$$u^{(k)}(t), t \in T, k = 1, 2, \dots, \quad (32.6)$$

кусочно-непрерывных управляющих воздействий исходной задачи (32.4), вдоль которых критерий качества стремится к нижней грани: $J(u^{(k)}(\cdot)) \rightarrow \inf J(u)$.

Построение минимизирующей последовательности продемонстрируем для частного случая задачи (32.1)–(32.3), в которой $r = 1$, функция $f_0(x, u)$ выпукла по $u \in U$ при каждом $x \in X$, множество U состоит из двух изолированных точек:

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U = \{u \in \mathbf{R} : u = \underline{u} \vee \bar{u}\}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (32.7)$$

Здесь множество скоростей $f(x, U) = \{f \in \mathbf{R}^n : f = f(x, u), u \in U\}$ состоит из двух точек и не выпукло. Расширенная задача имеет вид

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} g_0(x(t), \alpha(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= g(x, \alpha), \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (32.8)$$

$$\alpha(t) \in \mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2 : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}, \quad t \in T,$$

где $g_0(x, \alpha) = \alpha_1 f_0(x, \underline{u}) + \alpha_2 f_0(x, \bar{u})$, $g(x, \alpha) = \alpha_1 f(x, \underline{u}) + \alpha_2 f(x, \bar{u})$.

В расширенной задаче (32.8) все условия теоремы 32.1 выполнены – задача имеет решение $\alpha^0(t)$, $t \in T$. Как указывалось выше, если $\alpha_i^0(t) = 0 \vee 1$, $i = 1, 2$, почти всюду на T , то исходная задача (32.7) имеет решение в классе измеримых управляющих воздействий: $u^0(t) \equiv \bar{u}$, $t \in \bar{T} = \{\tau \in T : \alpha_2^0(\tau) = 1\}$, $u^0(t) \equiv \underline{u}$, $t \in \underline{T} = \{\tau \in T : \alpha_1^0(\tau) = 1\}$.

Пусть существует такое подмножество $\sigma \subset T$ ненулевой меры, что $0 < \alpha_i^0(t) < 1$, $i = 1, 2$, $t \in \sigma$. Для упрощения рассуждений будем считать, что $\sigma = T$. Если $0 < \alpha_i^0(t) \equiv C_i < 1$, $t \in T$, $i = 1, 2$, $C_1 + C_2 = 1$, то один из методов построения минимизирующей последовательности приведен в примере 32.8. Будем считать, что $\alpha^0(t)$, $t \in T$, – некоторая кусочно-непрерывная вектор-функция.

Рассмотрим k -й член последовательности (32.6). Разобьем отрезок T на k равных непересекающихся частей: $T = \bigcup_{j=1}^k T_j$. На каждом j -м участке T_j подсчитаем «средние» значения α_i^j функций $\alpha_i^0(t)$, $t \in T_j$: $\alpha_i^j | T_j | = \int_{T_j} \alpha_i^0(t) dt$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, k}$. После этого каждый участок T_j разобьем

произвольным образом на k непересекающихся частей: $T_j = \bigcup_{s=1}^k T_j^s$.

Выделим подмножество I_j^1 участков T_j^s , суммарная длина которых равна $\alpha_1^j | T_j |$: $\sum_{s \in I_j^1} |T_j^s| = \alpha_1^j | T_j |$. Остальное подмножество участков обозначим через I_j^2 : $I_j^2 = \{1, \dots, k\} \setminus I_j^1$. Очевидно, $\sum_{s \in I_j^2} |T_j^s| = \alpha_2^j | T_j |$.

Положим

$$u^{(k)}(t) \equiv \underline{u}, t \in \bigcup_{s \in I_j^1} T_j^s; \quad u^{(k)}(t) \equiv \bar{u}, t \in \bigcup_{s \in I_j^2} T_j^s, \quad j = \overline{1, k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32.9)$$

Количество точек переключения управляющих воздействий $u^{(k)}(\cdot)$ при $k \rightarrow \infty$ неограниченно растет. Последовательность (32.9) не имеет предела, но соответствующая последовательность $x^{(k)}(t)$, $t \in T$, траекторий системы (32.1) равномерно сходится к оптимальной траектории $x^0(t)$, $t \in T$, расширенной задачи (32.8).

Последовательность (32.9) называется *обобщенным решением* задачи (32.7), а соответствующая последовательность $x^{(k)}(t)$, $t \in T$, – *скользящим режимом*.

Перейдем к исследованию оптимальных программ в задаче (32.1)–(32.3). Будем вести его с помощью метода приращений.

32.3. Формула приращения критерия качества

Рассмотрим две программы $u(t)$ и $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, и соответствующие траектории $x(t)$ и $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$, системы (32.1). Найдем формулу

$$\Delta J(u) = \varphi(\bar{x}(t^*)) - \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} (f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f_0(x(t), u(t))) dt \quad (32.10)$$

для приращения критерия качества (32.3). Используя сделанные в разд. 32.2 предположения, запишем выражение (32.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & \frac{\partial \varphi'(x(t^*))}{\partial x} \Delta x(t^*) + o_1(\|\Delta x(t^*)\|) + \\ & + \int_0^{t^*} \left(\Delta_{\bar{u}(t)} f_0(x(t), u(t)) + \frac{\partial f'_0(x(t), \bar{u}(t))}{\partial x} \Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t)\|) \right) dt, \end{aligned} \quad (32.11)$$

где $\Delta_{\bar{u}} f_0(x, u) = f_0(x, \bar{u}) - f_0(x, u)$.

Введем в рассмотрение функцию $\psi(t) \in \mathbf{R}^n$, $t \in T$, принимающую в момент времени t^* значение

$$\psi(t^*) = -\frac{\partial \varphi(x(t^*))}{\partial x}. \quad (32.12)$$

Ее свойства будут определены ниже, а пока считаем ее непрерывно дифференцируемой. Тогда равенство (32.11) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & -\psi'(t^*) \Delta x(t^*) + \\ & + \int_0^{t^*} \left(\Delta_{\bar{u}(t)} f_0(x(t), u(t)) + \frac{\partial f'_0(x(t), \bar{u}(t))}{\partial x} \Delta x(t) \right) dt + \eta_1 + \eta_2, \end{aligned} \quad (32.13)$$

где

$$\eta_1 = o_1(\|\Delta x(t^*)\|), \quad (32.14)$$

$$\eta_2 = \int_0^{t^*} o_2(\|\Delta x(t)\|) dt. \quad (32.15)$$

Представим выражение $\psi'(t^*) \Delta x(t^*)$ в форме

$$\psi'(t^*) \Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} (\psi'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) \Delta \dot{x}(t)) dt. \quad (32.16)$$

Приращение $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$, $t \in T$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \dot{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) - f(x, u), \quad t \in T, \quad \Delta x(0) = 0, \quad (32.17)$$

которое запишем в следующем виде:

$$\Delta \dot{x} = \Delta_{\bar{u}} f(x, u) + \frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \Delta x + o_3(\|\Delta x\|), \quad t \in T, \quad \Delta x(0) = 0. \quad (32.18)$$

Здесь, как и выше для f_0 , обозначено $\Delta_{\bar{u}} f(x, u) = f(x, \bar{u}) - f(x, u)$. Положим

$$H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u) - f_0(x, u), \quad (32.19)$$

$\Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u) = H(x, \psi, \bar{u}) - H(x, \psi, u)$. С помощью введенных обозначений после подстановки в равенство (32.16) выражения (32.18) для $\Delta \dot{x}(t)$, а результата – в (32.13) получим

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & - \int_0^t \Delta_{\bar{u}(t)} H(x(t), \psi(t), u(t)) dt - \\ & - \int_0^t \left(\psi'(t) + \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), \bar{u}(t))}{\partial x} \right) \Delta x(t) dt + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \end{aligned} \quad (32.20)$$

где

$$\eta_3 = - \int_0^t \psi'(t) o_3(\|\Delta x(t)\|) dt. \quad (32.21)$$

Определим функцию $\psi(t)$, $t \in T$, как решение уравнения

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x(t), \psi, u(t))}{\partial x}, \quad t \in T, \quad (32.22)$$

с начальным условием (32.12). Компоненты ψ_1, \dots, ψ_n вектора ψ называют *сопряженными переменными*, уравнение (32.22) – *сопряженной системой* (вдоль $u(t)$, $t \in T$), функцию (32.19) – *гамильтонианом*¹⁾.

Подставив выражение (32.22) в равенство (32.20), придем к иско-
мой формуле приращения критерия качества

$$\Delta J(u) = - \int_0^t \Delta_{\bar{u}(t)} H(x(t), \psi(t), u(t)) dt + \eta, \quad (32.23)$$

где $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$,

¹⁾ Это предложение Л.С. Понtryгина; другие ученые называют ее *функцией Понtryгина, Гамильтона – Понtryгина*, ибо она отличается от своего аналога из вариационного исчисления.

$$\eta_4 = - \int_0^t \frac{\partial \Delta_{\bar{u}(t)} H'(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} \Delta x(t) dt. \quad (32.24)$$

С ее помощью докажем основной результат для задачи (32.1)–(32.3) – принцип максимума.

32.4. Необходимое условие оптимальности программ (принцип максимума Понтрягина)

Необходимые условия оптимальности программ получаются, как и в вариационном исчислении, с помощью *вариаций*. Вариации теории оптимального управления принципиально отличаются от вариаций (*вариаций Лагранжа*), использованных в предыдущей главе. Простейшая вариация нового типа

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon], \end{cases} \quad t \in T, \quad (32.25)$$

где $v \in U$, $\theta \in [0, t^*]$, $\varepsilon > 0$, изображена на рис. 32.1. Функция (32.25) называется *игольчатой вариацией* или *вариацией Макшейна*. Вариации Лагранжа (гл. 7) были равномерно малыми на T , малость же игольчатой вариации определяется малостью длины отрезка, на котором она отлична от нуля.

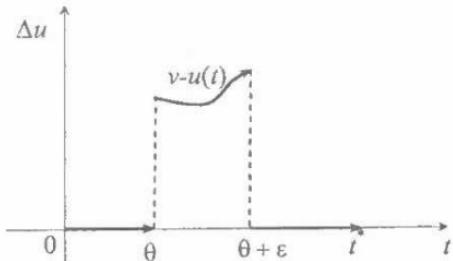


Рис. 32.1

Как будет показано ниже, при малых значениях $\varepsilon > 0$ траектория $\bar{x}(t)$, $t \in T$, порожденная управляемым воздействием $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, с игольчатой вариацией (32.25), мало отличается от $x(t)$, $t \in T$:

$$\|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K\varepsilon, \quad t \in T, \quad (32.26)$$

но ее производная $d\bar{x}(t)/dt$, $t \in T$, из-за произвольности вектора $v \in U$ может сильно отличаться от $dx(t)/dt$, $t \in T$. Поэтому говорят, что вариация Макшейна – *сильная вариация*, а вариация Лагранжа – *слабая вариация*. Сильные вариации используются для исследования сильных минимумов, которым в теории оптимального управления соответствуют определенные выше (сильные) оптимальные траектории.

Докажем свойство (32.26).

Рассмотрим решение уравнения (32.17) на игольчатой вариации. На промежутке $[0, \theta]$ уравнение (32.17) имеет вид

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, u) - f(x, u), \quad \Delta x(0) = 0,$$

и допускает единственное решение $\Delta x(t) \equiv 0, t \in [0, \theta]$.

Запишем уравнение (32.17) на промежутке $[\theta, \theta + \varepsilon]$:

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, v) - f(x, u), \quad \Delta x(\theta) = 0.$$

Из интегральной непрерывности решений дифференциальных уравнений следует существование такого числа $0 < K_1 < \infty$, что $\|\Delta x(t)\| = \|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K_1 \varepsilon, t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$, т. е. свойство (32.26) имеет место на отрезке $[\theta, \theta + \varepsilon]$.

Наконец, на отрезке $[\theta + \varepsilon, t^*]$ уравнение (32.17) имеет вид

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, u) - f(x, u), \quad \|\Delta x(\theta + \varepsilon)\| \leq K_1 \varepsilon.$$

Используя непрерывную зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных данных, заключаем, что при некотором $0 < K_2 < \infty$ выполняется неравенство $\|\Delta x(t)\| \leq K_2 \varepsilon, t \in [\theta + \varepsilon, t^*]$. Таким образом, взяв $K = \max\{K_1, K_2\}$, получим неравенство (32.26).

Докажем необходимое условие оптимальности программы.

Теорема 32.2 (принцип максимума Понtryгина). Для оптимальности программы $u^0(t), t \in T$, в задаче (32.1)–(32.3) необходимо, чтобы вдоль нее и соответствующих ей решений $x^0(t), \psi^0(t), t \in T$, исходной (32.1) и сопряженной (32.22), (32.12) систем выполнялось условие максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u), \quad t \in [0, t^*]. \quad (32.27)$$

Доказательство. Пусть $u^0(t), t \in T$, – оптимальная программа, $x^0(t), \psi^0(t), t \in T$, – соответствующие ей решения систем (32.1), (32.22), (32.12). Предположим, что теорема неверна, т. е. при некоторых $\theta \in [0, t^*], v \in U$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), v) - H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta)) = \\ = \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta)) = \alpha > 0. \end{aligned} \quad (32.28)$$

Проверим управляющее воздействие $u^0(t), t \in T$, игольчатой вариацией (32.25), в которой $u(t) = u^0(t), t \in T$, и вычислим приращение критерия качества. Согласно формуле приращения (32.23) имеем

$$\Delta J(u^0) = - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) dt + \eta. \quad (32.29)$$

Справедливо разложение

$$\int_0^{0+\varepsilon} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) dt = \alpha\varepsilon + o_4(\varepsilon), \quad (32.30)$$

где $o_4(\varepsilon) \leq K_3\varepsilon^2$, $K_3 > 0$. Из (32.14), (32.15), (32.21), (32.24) в силу (32.26) следует

$$\begin{aligned}\eta_1 &= o_1(\|\Delta x(t^*)\|) \leq K_4\varepsilon^2, \quad K_4 > 0; \\ \eta_2 &\leq \int_0^{t^*} o_2(\varepsilon) dt \leq K_5\varepsilon^2, \quad K_5 > 0; \\ \eta_3 &\leq \int_0^{t^*} \psi'(t)o_3(\varepsilon) dt \leq K_6\varepsilon^2, \quad K_6 > 0; \\ \eta_4 &= - \int_0^{0+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t))}{\partial x} \Delta x(t) dt \leq K_7\varepsilon^2, \quad K_7 > 0.\end{aligned}$$

Подставив эти оценки и разложение (32.30) в равенство (32.29), приходим к неравенству

$$\Delta J(u^0) \leq -\alpha\varepsilon + K_8\varepsilon^2, \quad K_8 = \max_{i=3,7} K_i > 0,$$

которое в силу (32.28) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ становится противоречивым. ■

Замечание 32.1. Как видно из теоремы 32.1, принцип максимума представляет необходимое условие оптимальности первого порядка (в его формулировке участвуют производные не выше первого порядка от элементов задачи). Многочисленные исследования показали, что он представляет самое сильное из известных необходимых условий оптимальности первого порядка и из него следует большинство других необходимых условий оптимальности в теории оптимального управления и вариационного исчисления.

32.5. Достаточное условие оптимальности

В общем случае принцип максимума не является достаточным условием оптимальности, т. е. не каждая программа, удовлетворяющая принципу максимума, является оптимальной.

Пример 32.1. Рассмотрим задачу

$$J(u) = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 1].$$

Задачи с таким (интегральным) критерием качества называются *задачами оптимального управления типа Лагранжа*. Для рассматриваемой задачи имеем

$H = \psi u + x^2 / 2$. Сопряженная система $\dot{\psi} = -\partial H / \partial x = -x$, $\psi(1) = 0$. Отсюда

$$\psi(t) = - \int_1^t x(\tau) d\tau, \quad t \in T.$$

Рассмотрим программу $u(t) = 1$, $t \in [0, 1/3]$; $u(t) = -1$, $t \in [1/3, 1]$ (рис. 32.2). Ей соответствует траектория

$$x(t) = t, \quad t \in [0, 1/3];$$

$$x(t) = -t + 2/3, \quad t \in [1/3, 1].$$

Для функции $\psi(t)$, $t \in T$, получим

$$\psi(t) = -(t^2 / 2 - 1/18), \quad t \in [0, 1/3];$$

$$\psi(t) = (t - 2/3)^2 / 2 - 1/18, \quad t \in [1/3, 1].$$

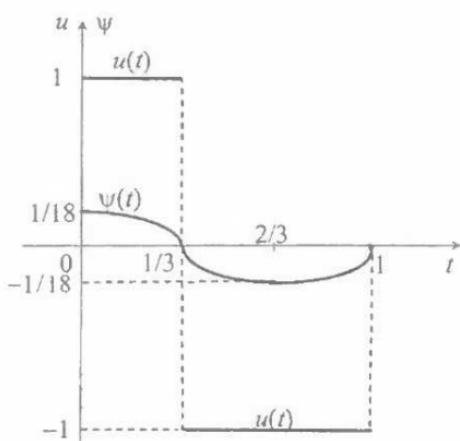


Рис. 32.2

Ее график изображен на рис. 32.2. Из него видно, что рассматриваемая программа удовлетворяет принципу максимума. Однако она не оптимальна, ибо $J(u) = -1/54$, а на программе $\bar{u}(t) \equiv 1$, $t \in T$, получаем $J(\bar{u}) = -1/6 < -1/54$.

Приведем задачи, для которых принцип максимума – необходимое и достаточное условие оптимальности программ (критерий оптимальности).

Как показано выше, принцип максимума как необходимое условие оптимальности справедлив для любых задач типа (32.1)–(32.3) без каких-либо дополнительных свойств относительно параметров задачи, кроме указанных в разд. 32.1. Покажем, что при дополнительных свойствах принцип максимума становится и достаточным условием оптимальности программ.

В формуле приращения (32.23) остаточные члены η_i , $i = \overline{1, 4}$, характеризуют определенные свойства функциональных параметров задачи:

1) $\eta_1 = o_1(\|\Delta x(t^*)\|)$ характеризует нелинейность терминального члена $\phi(x(t^*))$ в критерии качества;

2) $\eta_2 = \int_0^{t^*} o_2(\|\Delta x(t)\|) dt$ характеризует нелинейность по x функции $f_0(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$;

3) $\eta_3 = - \int_0^t \psi'(t) o_3(\|\Delta x(t)\|) dt$ характеризует нелинейность по x функции $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$;

4) $\eta_4 = - \int_0^t \frac{\partial \Delta_{\bar{u}(t)} H'(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} \Delta x(t) dt$ характеризует степень неразделенности по x и u функций $f_0(x, u)$, $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$.

Пусть $\phi(x)$, $x \in X$, — выпуклая функция, а функции $f_0(x, u)$, $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, имеют вид

$$f_0(x, u) = f_0(x) + b_0(u), \quad f(x, u) = Ax + b(u), \quad (32.31)$$

причем $f_0(x)$, $x \in X$, — выпуклая функция. Тогда $\eta_1 \geq 0$, $\eta_2 \geq 0$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$ и из формулы (32.23) получим

$$\Delta J(u) \geq - \int_0^t \Delta_{\bar{u}(t)} H(x(t), \psi(t), u(t)) dt. \quad (32.32)$$

Условие максимума (32.27) принимает вид

$$\psi^{0'}(t)b(u^0(t)) - b_0(u^0(t)) = \max_{u \in U} \left(\psi^{0'}(t)b(u) - b_0(u) \right), \quad t \in [0, t^*], \quad (32.33)$$

а функция $\psi^0(t)$, $t \in T$, — решение уравнения

$$\dot{\psi} = -A'\psi + \frac{\partial f_0(x^0(t))}{\partial x}$$

с начальным условием (32.12).

Очевидно, что если программа $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (32.1)–(32.3) с функциями $f_0(x, u)$, $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, вида (32.31) и выпуклыми функциями $\phi(x)$, $f_0(x)$, $x \in X$, удовлетворяет условию максимума (32.33), то в силу (32.32) она будет удовлетворять и неравенству $\Delta J(u^0) \geq 0$, т. е. $u^0(t)$, $t \in T$, — оптимальная программа, а принцип максимума — достаточное условие оптимальности программ.

Ослабим условие линейности по x функции $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, и усилим условие выпуклости функции $f_0(x)$, $x \in X$. Будем считать, что:

1) $f(x, u) = f(x) + b(u)$, где функция $f(x)$, $x \in X$, слабо нелинейна, т. е. существует такое достаточно малое число $k > 0$, что

$$\|o_3(\|\Delta x(t)\|)\| \leq k \|\Delta x(t)\|^2, \quad t \in T; \quad (32.34)$$

2) функция $f_0(x)$, $x \in X$, сильно выпукла, т. е. существует такое число $K > 0$, что

$$|o_2(\|\Delta x(t)\|)| \geq K \|\Delta x(t)\|^2, \quad t \in T; \quad (32.35)$$

3) $\varphi(x)$, $x \in X$, — выпуклая функция.

Рассмотрим остаточные члены η_2 , η_3 в формуле (32.23) приращения критерия качества. В силу (32.34), (32.35) имеем:

$$\eta_2 = \int_0^{t^*} o_2(\|\Delta x(t)\|) dt \geq K t^* \|\Delta x\|^2, \quad (32.36)$$

где $\|\Delta x\| = \max_{t \in T} \|\Delta x(t)\|$,

$$\begin{aligned} |\eta_3| &= \left| - \int_0^{t^*} \psi'(t) o_3(\|\Delta x(t)\|) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^{t^*} \|\psi(t)\| \cdot \|o_3(\|\Delta x(t)\|)\| dt \leq M k t^* \|\Delta x\|^2, \end{aligned} \quad (32.37)$$

где $M = \max_{t \in T} \|\psi(t)\| > 0$. Из неравенства (32.37) следует

$$\eta_3 \geq -M k t^* \|\Delta x\|^2. \quad (32.38)$$

Таким образом, $K > kM$ при достаточно малом k . Из неравенств (32.36) и (32.38) получим

$$\eta_2 + \eta_3 \geq t^* (K - M k) \|\Delta x\|^2 \geq 0. \quad (32.39)$$

Поскольку $\eta_1 \geq 0$, $\eta_4 = 0$, то в силу соотношения (32.39) из формулы приращения критерия качества следует неравенство (32.32), которое позволяет доказать, что для рассматриваемого случая принцип максимума является необходимым и достаточным условием (локальной) оптимальности программ.

32.6. Задачи оптимального управления с терминальными ограничениями

Пусть $X^* = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = \overline{1, m}\}$ — множество, заданное с помощью непрерывно дифференцируемых функций $h_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$, $m < n$. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (32.40)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (32.41)$$

$$x(t^*) \in X^*, \quad (32.42)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [0, t^*], \quad (32.43)$$

которая называется *задачей оптимального управления типа Больца с подвижным правым концом траектории*.

Доступное управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, назовем *программой*, если соответствующая траектория $x(t)$, $t \in T$, системы (32.41) удовлетворяет условию (32.42).

Одним из методов приближенного решения задач типа (32.40) – (32.43) является *метод штрафных функций*. Следуя этому методу, заменим задачу (32.40) – (32.43) на *задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории*

$$J_p(u) = \phi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt + \sum_{i=1}^m \rho_i h_i^2(x(t^*)) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (32.44)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T,$$

где $\rho_i > 0$ — штраф за «единицу» нарушения ($h_i^2(x(t^*)) = 1$) ограничения $h_i(x) = 0$.

Записав для задачи (32.44) доказанные в разд. 32.4 необходимые условия оптимальности программы, получим следующее утверждение.

Теорема 32.3. *Оптимальная программа $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (32.44) вместе с соответствующей траекторией $x^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяют условию максимума*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u), \quad t \in [0, t^*], \quad (32.45)$$

где $\psi^0(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t), \psi, u(t))}{\partial x} \quad (32.46)$$

с начальным условием

$$\psi^0(t^*) = -\frac{\partial \phi(x^0(t^*))}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial h_i(x^0(t^*))}{\partial x},$$

в котором $\lambda_i^0 = 2\rho_i h_i(x^0(t^*))$, $i = \overline{1, m}$.

Метод штрафных функций можно использовать и в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями-неравенствами. Чем больше значения параметров ρ_i , $i = \overline{1, m}$, тем ближе решение вспомогательной задачи к решению исходной. Будут сближаться и необходимые условия оптимальности программы.

В общем случае необходимые условия оптимальности формулируются следующим образом.

Теорема 32.4. Пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные программа и траектория задачи

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (32.47)$$

$$x(t^*) \in X^* = \{x \in \mathbf{R}^n : h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m_1}, h_i(x) = 0, i = \overline{m_1 + 1, m}\},$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [0, t^*].$$

Тогда найдутся такие числа λ_i^0 , $i = \overline{0, m}$, что вдоль указанных программы $u^0(t)$, $t \in T$, траектории $x^0(t)$, $t \in T$, и решения $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы (32.42) выполняются условия:

1) условие нетривиальности: $\sum_{i=0}^m (\lambda_i^0)^2 \neq 0$;

2) условия неотрицательности: $\lambda_i^0 \geq 0$, $i = \overline{0, m_1}$;

3) условие максимума (32.45);

4) условие трансверсальности

$$\psi^0(t^*) = -\lambda_0^0 \frac{\partial \varphi(x^0(t^*))}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial h_i(x^0(t^*))}{\partial x};$$

5) условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_i^0 h_i(x^0(t^*)) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Схему доказательства теоремы 2.4 приведем после доказательства необходимых условий оптимальности для частного случая задачи (32.47):

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in T, \quad x(0) = x_0,$$

$$x(t^*) \in X^* = \{x \in \mathbf{R}^n : h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (32.48)$$

в которой $\varphi(x)$, $h_i(x)$, $x \in X$, $i = \overline{1, m}$, — квазивыпуклые непрерывно дифференцируемые функции, $U \subset \mathbf{R}^r$ — выпуклый компакт.

Предположим, что выполняется *условие регулярности*: существует такой вектор $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, что $h_i(\bar{x}) < 0$, $i = \overline{1, m}$.

Введем *множество Лебега*

$$R(\delta) = \{x \in X : \varphi(x) \leq \delta\}$$

функции $\varphi(x)$, $x \in X$, и *множество достижимости* системы управления

$$Q = \{x \in X : x = x(t^*, u(\cdot)), u(t) \in U, t \in T\},$$

составленное из тех и только тех точек x , для которых существует управляющее воздействие

$u(\cdot) = \{u(t) \in U, t \in T\}$, переводящее систему за время t^* из состояния x_0 в состояние x . Для $n=2$ это множество изображено на рис. 32.3.

Покажем, что введенные множества выпуклы. Множество $R(\delta)$ выпукло по определению квазивыпуклых функций.

Выпуклость множества Q следует из линейности системы управления и выпуклости множества U . В самом деле, пусть $x^{(1)}, x^{(2)} \in Q$ — произвольные точки. Им соответствуют управляющие воздействия $u^{(1)}(t), u^{(2)}(t) \in U, t \in T$, порождающие эти точки: $x^{(i)} = x(t^*, u^{(i)}(\cdot))$, $i = 1, 2$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение линейной системы, соответствующее управляющему воздействию $u(t) \in U, t \in T$, можно записать по *формуле Коши*

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T, \quad (32.49)$$

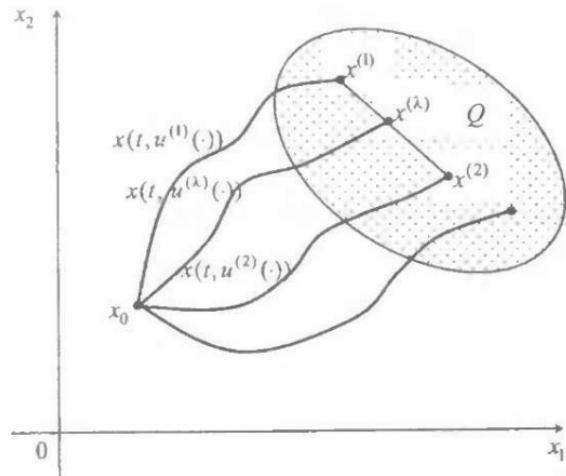


Рис. 32.3

где $F(t)$, $t \in T$, — фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = Ax$, т. е.

$$\dot{F} = AF, \quad t \in T, \quad F(0) = E. \quad (32.50)$$

Справедливость формулы (32.49) проверяется ее подстановкой в исходное уравнение.

Таким образом, в силу формулы Коши точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ представимы в виде

$$x^{(i)} = F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)Bu^{(i)}(t)dt, \quad i=1, 2. \quad (32.51)$$

Составим произвольную выпуклую комбинацию $\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Используя выражение $x^{(i)}$ из формулы (32.51), получим:

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} = F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)B(\lambda_1 u^{(1)}(t) + \lambda_2 u^{(2)}(t))dt. \quad (32.52)$$

Поскольку U — выпуклое множество, то $\lambda_1 u^{(1)}(t) + \lambda_2 u^{(2)}(t) \in U$, $t \in T$. Следовательно, из (32.52) будем иметь: $\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} \in Q$, т. е. Q — выпуклое множество.

Можно показать, что Q — ограниченное замкнутое множество в классе измеримых управляемых воздействий, т. е. Q — выпуклый компакт.

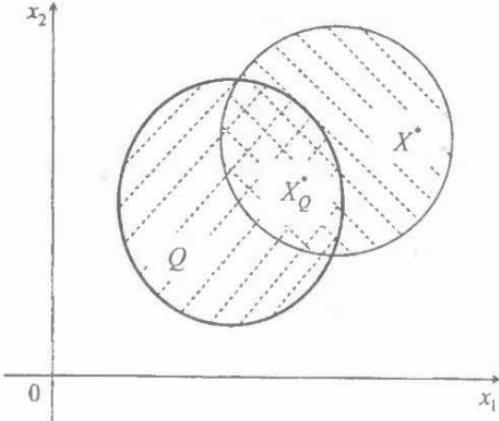


Рис. 32.4

Множества Q и X^* позволяют дать наглядную геометрическую интерпретацию задачи. Очевидно, задача будет иметь решение, если и только если выпуклый компакт $X_Q = Q \cap X^*$ — непустое множество (рис. 32.4). Выпуклость множества X^* следует из определения квазивыпуклых функций и свойства выпуклых множеств.

Непрерывная функция

$\varphi(x)$, $x \in X_Q^*$, достигает минимального значения δ^0 на компакте X_Q^* . Обозначим через x^0 любую точку из $R(\delta^0) \cap X_Q^*$. Введем еще одно множество $X^*(\delta) = X^* \cap R(\delta)$. Как видно из рис. 32.5, а, пересечение множеств Q и $X^*(\delta)$ (на рис. 32.5, а, оно имеет двойную штриховку) состоит из точек, соответствующих программам, на которых критерий качества принимает значение, не большее δ . При $\delta = \delta^0$ множества Q и $X^*(\delta^0)$ касаются в общей точке x^0 (рис. 32.5, б).

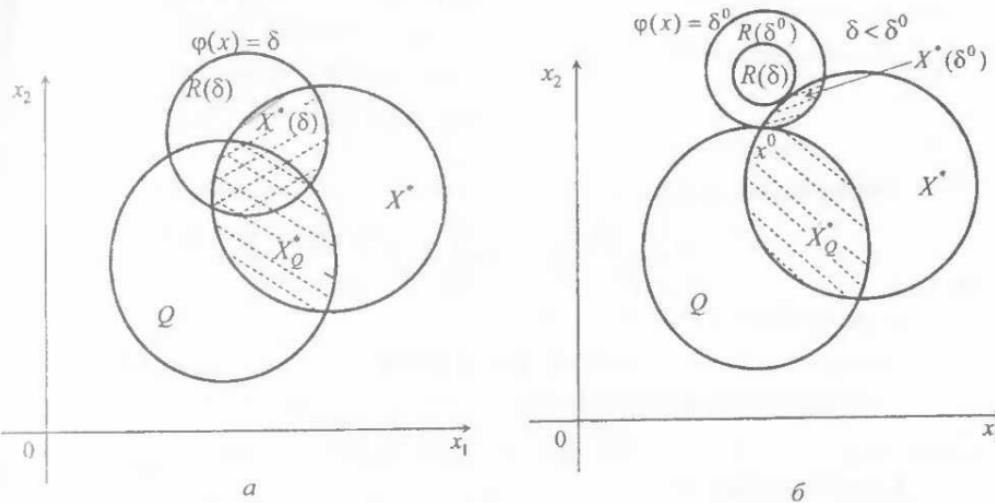


Рис. 32.5

Множества Q и $X^*(\delta^0)$ не имеют общих внутренних точек. В самом деле, включение $\bar{x} \in \text{int}(Q \cap X^*(\delta^0))$ означает, что $\varphi(\bar{x}) < \delta^0$, $h_i(\bar{x}) < 0$, $i = \overline{1, m}$, $\bar{x} \in \text{int } Q$. Эти неравенства противоречат минимальности числа δ^0 .

Согласно теореме об отделимости выпуклых множеств (разд. 6.2) существует такой вектор $g \in \mathbf{R}^n$, $\|g\| \neq 0$, что выполняются неравенства (рис. 32.6)

$$g'x \leq g'x^0 \quad \forall x \in Q, \quad (32.53)$$

$$g'y \geq g'x^0 \quad \forall y \in X^*(\delta^0). \quad (32.54)$$

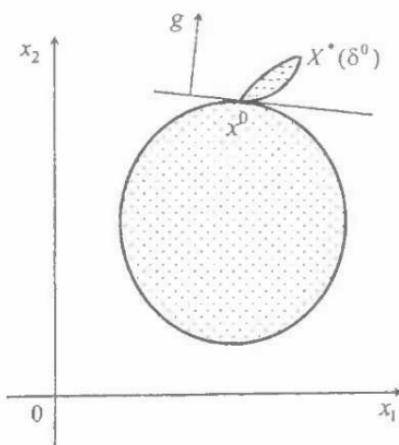


Рис. 32.6

Из неравенств (32.53), (32.54) получим:

$$g'x^0 = \min g'x,$$

$$\varphi(x) \leq \delta^0, h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; \quad (32.55)$$

$$g'x^0 = \max g'x, x \in Q. \quad (32.56)$$

Согласно классическому правилу множителей Лагранжа для решения $x^0 = x^0(t^*)$ задачи (32.55) в силу условий регулярности существуют такие числа $\lambda_i^0, i = \overline{0, m}$, что выполняются условия:

1) стационарности

$$g + \lambda_0^0 \frac{\partial \varphi(x^0(t^*))}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial h_i(x^0(t^*))}{\partial x} = 0; \quad (32.57)$$

2) неотрицательности

$$\lambda_i^0 \geq 0, i = \overline{0, m}; \quad (32.58)$$

3) дополняющей нежесткости

$$\lambda_i^0 h_i(x^0(t^*)) = 0, i = \overline{1, m}; \quad (32.59)$$

4) нетривиальности

$$\sum_{i=0}^m (\lambda_i^0)^2 \neq 0. \quad (32.60)$$

Задача (32.56) с использованием формулы Коши (32.49) записывается в виде

$$\begin{aligned} & g'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} g'F(t^*)F^{-1}(t)Bu^0(t)dt = \\ & = \max_{u(t) \in U, t \in T} \left(g'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} g'F(t^*)F^{-1}(t)Bu(t)dt \right). \end{aligned} \quad (32.61)$$

Уберем из обеих частей равенства (32.61) слагаемое $g'F(t^*)x_0$, не зависящее от $u(t), t \in T$. Поскольку выбор значений $u(t_1) \in U, u(t_2) \in U$ в разные моменты $t_1 \neq t_2$ не зависит друг от друга, то из (32.61) получим

$$g'F(t^*)F^{-1}(t)Bu^0(t) = \max_{u \in U} g'F(t^*)F^{-1}(t)Bu, t \in T. \quad (32.62)$$

Введем функцию

$$\psi^0(t) = g'F(t^*)F^{-1}(t), \quad t \in T. \quad (32.63)$$

Из (32.62) получим

$$\psi^0(t)Bu^0(t) = \max_{u \in U} \psi^0(t)Bu, \quad t \in T. \quad (32.64)$$

Дифференцируя тождество $F(t)F^{-1}(t) = E$ и учитывая уравнение (32.50), нетрудно проверить, что матричная функция $F^{-1}(t)$, $t \in T$, удовлетворяет уравнению $\dot{F}^{-1} = -F^{-1}A$, $F^{-1}(0) = E$. С учетом последнего уравнения, продифференцировав функцию (32.63), получим, что она является решением уравнения

$$\dot{\psi} = -A'\psi. \quad (32.65)$$

Начальное условие $\psi^0(t^*) = g$ для него получаем из (32.63). Оно с учетом (32.57) примет вид

$$\psi^0(t^*) = -\lambda_0^0 \frac{\partial \varphi(x^0(t^*))}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial h_i(x^0(t^*))}{\partial x}. \quad (32.66)$$

Таким образом, для задачи (32.48) справедливы следующие необходимые условия оптимальности программы.

Теорема 32.5. *Оптимальные программы $u^0(t)$, $t \in T$, траектория $x^0(t)$, $t \in T$, задачи (32.48) вместе с решением $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы (32.65) удовлетворяют условиям: 1) максимума (32.64), 2) нетривиальности (32.60), 3) неотрицательности (32.58), 4) трансверсальности (32.66), 5) дополняющей нежесткости (32.59).*

Доказательство теоремы 32.4 в общем случае проводится по следующей схеме. Множества Q , X^* , $R(\delta^0)$ в окрестности точки $x^0(t^*)$ аппроксимируются выпуклыми множествами. При этом для аппроксимации множества Q используются вариации Макшейна. Если Q и $X^*(\delta^0)$ не имеют общих внутренних точек, то и их выпуклые аппроксимации тоже не будут их иметь. Далее применяем приведенное выше доказательство. ■

В приведенной схеме доказательства, как во всей теории оптимального управления, основную роль играют два элемента: вариации Макшейна и теорема об отдельности выпуклых множеств. Напомним, в вариационном исчислении подобную роль играли вариации Лагранжа и теорема о включении минимали в семейство допустимых кривых.

Теоремы 32.4, 32.5 дают необходимые условия оптимальности программы. Докажем теперь достаточные условия оптимальности.

Теорема 32.6. Пусть в задаче (32.47):

1) функции $\varphi(x)$, $h_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, $f_0(x, u)$, $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, определены и непрерывно дифференцируемы по x ; $f_0(x, u) = f_0(x) + b_0(u)$, $f(x, u) = Ax + b(u)$;

2) функции $\varphi(x)$, $h_i(x)$, $i = \overline{1, m_1}$, $f_0(x)$, $x \in X$, выпуклы, $h_i(x)$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, линейны;

3) для каждой кусочно-непрерывной функции $u(t)$, $t \in T$, существует единственная непрерывная траектория $x(t)$, $t \in T$.

Программа $u(t)$, $t \in T$, и соответствующая траектория $x(t)$, $t \in T$, оптимальны в задаче (32.47), если найдутся такие числа λ_i , $i = \overline{1, m}$, и непрерывно дифференцируемая функция $\psi(t)$, $t \in T$, что выполняются условия:

1) $\psi(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'\psi + \frac{\partial f_0(x(t))}{\partial x}; \quad (32.67)$$

2) условия трансверсальности на правом конце траектории

$$\psi(t^*) = -\frac{\partial \varphi(x(t^*))}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial h_i(x(t^*))}{\partial x}; \quad (32.68)$$

3) условия неотрицательности

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad (32.69)$$

4) условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_i h_i(x(t^*)) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad (32.70)$$

5) условие максимума для программы $u(t)$, $t \in T$:

$$\psi'(t)b(u(t)) - b_0(u(t)) = \max_{u \in U} (\psi'(t)b(u) - b_0(u)), \quad t \in [0, t^*]. \quad (32.71)$$

Доказательство. Пусть $I_a = \{i = \overline{1, m_1} : h_i(x(t^*)) = 0\}$; числа λ_i , $i = \overline{1, m}$, такие, что $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, m_1}$, причем $\lambda_i = 0$, $i \in I_n = \{i = \overline{1, m_1} : h_i(x(t^*)) < 0\}$. Очевидно, выполняются условия (32.69), (32.70).

Пусть $\bar{u}(t)$, $\bar{x}(t)$, $t \in T$, – другая программа и соответствующая траектория. На них, очевидно, выполняются соотношения

$$\lambda_i(h_i(\bar{x}(t^*)) - h_i(x(t^*))) = 0, \quad i \in I_n \cup \{\overline{m_1 + 1, m}\},$$

$$\lambda_i(h_i(\bar{x}(t^*)) - h_i(x(t^*))) \leq 0, \quad i \in I_a,$$

из которых в силу выпуклости функций $h_i(x)$, $x \in X$, $i = \overline{1, m_1}$, и линейности $h_i(x)$, $x \in X$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, получим

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\partial h'_i(x(t^*))}{\partial x} \Delta x(t^*) &= 0, \quad i \in I_n \cup \{\overline{m_1 + 1, m}\}, \\ \lambda_i \frac{\partial h'_i(x(t^*))}{\partial x} \Delta x(t^*) &\leq 0, \quad i \in I_a. \end{aligned} \quad (32.72)$$

Приращения $\Delta u(t) = \bar{u}(t) - u(t)$, $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$, $t \in T$, удовлетворяют уравнению

$$\Delta \dot{x}(t) = A \Delta x(t) + b(\bar{u}(t)) - b(u(t)), \quad t \in T, \quad \Delta x(0) = 0. \quad (32.73)$$

Введем в рассмотрение непрерывно дифференцируемую функцию $\psi(t)$, $t \in T$, и подсчитаем с учетом (32.73) выражение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\psi'(t) \Delta x(t)) &\equiv \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) = \\ &= \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) (A \Delta x(t) + b(\bar{u}(t)) - b(u(t))), \quad t \in T. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это тождество:

$$\psi'(t^*) \Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} \left(\dot{\psi}'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) (A \Delta x(t) + b(\bar{u}(t)) - b(u(t))) \right) dt. \quad (32.74)$$

Рассмотрим приращение критерия качества на двух программах. В силу выпуклости функций $\varphi(x)$, $f_0(x)$, $x \in X$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) &\geq \frac{\partial \varphi'(x(t^*))}{\partial x} \Delta x(t^*) + \\ &+ \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial f'_0(x(t))}{\partial x} \Delta x(t) + b_0(\bar{u}(t)) - b_0(u(t)) \right) dt. \end{aligned} \quad (32.75)$$

Сложив соотношения (32.72), (32.74), (32.75), будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &\geq \left(\frac{\partial \varphi'(x(t^*))}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial h'_i(x(t^*))}{\partial x} + \psi'(t^*) \right) \Delta x(t^*) - \\ &- \int_0^{t^*} \left(\dot{\psi}'(t) + \psi'(t) A - \frac{\partial f'_0(x(t))}{\partial x} \right) \Delta x(t) dt - \\ &- \int_0^{t^*} \left(\psi'(t) b(\bar{u}(t)) - b_0(\bar{u}(t)) - \psi'(t) b(u(t)) + b_0(u(t)) \right) dt. \end{aligned}$$

В силу условий (32.67), (32.68), (32.71), (32.72) из последнего неравенства следует $\Delta J(u) \geq 0$, т. е. $u(t)$, $t \in T$, – оптимальная программа.

32.7. Принцип максимума для задач быстродействия

Вернемся к задаче быстродействия (разд. 31.3). Сначала рассмотрим ее с подвижным правым концом траектории:

$$\begin{aligned} t^* &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \\ x(t^*) &\in X(\delta) = \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) \leq \delta\}, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T = [0, t^*], \end{aligned} \tag{32.76}$$

где $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, – такая непрерывно дифференцируемая функция, что

$$X(\delta_1) \subset X(\delta_2), \text{ если } \delta_1 < \delta_2. \tag{32.77}$$

Пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = [0, t^0]$, – оптимальные программы и соответствующая траектория задачи (32.76), $t^0 = t^{*0}$ – минимальное время переходного процесса. Покажем, что $u^0(t)$, $t \in T^0$, – оптимальная программа и для задачи терминального управления со свободным правым концом траектории:

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t^0)) \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T^0, \end{aligned} \tag{32.78}$$

при этом

$$\varphi(x^0(t^0 - \varepsilon)) > \varphi(x^0(t^0)) \tag{32.79}$$

для всех $\varepsilon > 0$.

В самом деле, если бы существовала такая программа $\bar{u}(t)$, $t \in T^0$, что на соответствующей траектории $\bar{x}(t)$, $t \in T^0$, задачи (32.78) выполнялось неравенство $\varphi(\bar{x}(t^0)) < \varphi(x^0(t^0)) = \delta$, то в силу свойства (32.77) это означало бы, что программа $\bar{u}(t)$, $t \in T^0$, переводит систему задачи (32.76) из состояния x_0 на терминальное множество $X(\delta)$ за время $\bar{t} < t^0$, что противоречит оптимальности момента t^0 .

Из неравенства (32.79) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ получим

$$\begin{aligned} \varphi(x^0(t^0 - \varepsilon)) - \varphi(x^0(t^0)) &= -\varepsilon \frac{\partial \varphi'(x^0(t^0))}{\partial x} \dot{x}(t^0) + o(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon \psi^0(t^0) f(x^0(t^0), u^0(t^0)) + o(\varepsilon) = \varepsilon H(x^0(t^0), \psi^0(t^0), u^0(t^0)) + o(\varepsilon) > 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$H(x^0(t^0), \psi^0(t^0), u^0(t^0)) \geq 0. \quad (32.80)$$

Объединив принцип максимума для задачи терминального управления со свободным правым концом траектории (32.78) и неравенство (32.80), получим принцип максимума для задачи быстродействия с подвижным правым концом траектории (32.76).

Теорема 32.7. Для оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in [0, t^0[$, и соответствующей траектории $x^0(t)$, $t \in T^0$, в задаче предельного быстродействия (32.76) необходимо, чтобы вдоль них и соответствующего решения $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0)}{\partial x} \psi, \\ \psi^0(t^0) &= -\frac{\partial \phi(x^0(t^0))}{\partial x}, \end{aligned} \quad (32.81)$$

выполнялись условие максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u), \quad t \in [0, t^0[, \quad (32.82)$$

и условие (32.80) для оптимального момента времени t^0 .

Теперь рассмотрим двухточечную задачу предельного быстродействия, описанную в разд. 31.3:

$$t^* \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad x(t^*) = x_k, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (32.83)$$

Для исследования условий оптимальности программы в этой задаче используем полученные выше результаты для задачи (32.76). С этой целью в задаче (32.76) в качестве функции $\phi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, возьмем $\phi(x) = (x - x_k)'(x - x_k)$. При $\delta \rightarrow 0$ решения задачи (32.76) с указанной функцией $\phi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, стремятся к решению задачи (32.83). Принцип максимума, сформулированный в теореме 32.7, для предельной задачи принимает следующую форму.

Теорема 32.8. Для оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in T^0 = [0, t^0[$, и соответствующей траектории $x^0(t)$, $t \in T^0$, в задаче (32.83) необходимо существование такого нетривиального решения

$\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы (32.81), что вдоль их выполняется условие максимума (32.82) и условие (32.80) для оптимального момента времени t^0 .

Докажем, что условия, сформулированные в теореме 32.8, являются и достаточными в случае, если $f(x, u) = Ax + bu$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^1$,

$$\text{rank}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = n \quad (32.84)$$

и $x_k = 0$, т. е. в задаче вида

$$\begin{aligned} t^* &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(t^*) = 0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T = [0, t^*]. \end{aligned} \quad (32.85)$$

Для этой задачи условие максимума (32.82) и сопряженная система принимают форму

$$\psi^{0'}(t)bu^0(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi^{0'}(t)bu, \quad t \in [0, t^0], \quad (32.86)$$

$$\dot{\psi} = -A'\psi. \quad (32.87)$$

Теорема 32.9. Для оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in [0, t^0]$, в задаче (32.85) при выполнении условия (32.84) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое нетривиальное решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, системы (32.87), что выполняется условие максимума (32.86).

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 32.8.

Достаточность. Нетривиальность решения $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, системы (32.87) означает существование такого ненулевого вектора $d \in \mathbf{R}^n$, что $\psi^0(t^0) = d$.

Как указывалось в разд. 32.6, решение уравнения (32.87) можно представить в виде

$$\psi^{0'}(t) = d'F(t^0)F^{-1}(t), \quad t \in T^0, \quad (32.88)$$

где $F(t)$, $t \in T^0$, удовлетворяет уравнению (32.50): $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$, а $F^{-1}(t)$, $t \in T^0$, – уравнению $\dot{F}^{-1} = -F^{-1}A$, $F^{-1}(0) = E$. Запишем траекторию $x(t)$, $t \in T^0$, задачи (32.85) с помощью формулы Коши:

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau, \quad t \in T^0. \quad (32.89)$$

Покажем, что при выполнении условия (32.84) справедливо соотношение

$$\gamma(t) = \psi^{0'}(t)b \neq 0, \quad t \in T^0. \quad (32.90)$$

В самом деле, любая квадратная матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению (теорема Гамильтона – Кэли), т. е.

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0E = 0. \quad (32.91)$$

Умножим равенство (32.91) слева на $\psi^{0'}(t)$, справа – на b , получим

$$\psi^{0'}(t)A^n b + \alpha_{n-1}\psi^{0'}(t)A^{n-1}b + \dots + \alpha_1\psi^{0'}(t)Ab + \alpha_0\psi^{0'}(t)b = 0. \quad (32.92)$$

С учетом (32.87) для функции $\gamma(t)$ (32.90) имеем:

$$\dot{\gamma}(t) = -\psi^{0'}(t)Ab, \quad \gamma^{(2)}(t) = \psi^{0'}(t)A^2b, \quad \dots, \quad \gamma^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}\psi^{0'}(t)A^n b. \quad (32.93)$$

Таким образом, уравнение (32.92) примет вид однородного дифференциального уравнения n -го порядка

$$(-1)^n\gamma^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(-1)^{n-1}\gamma^{(n-1)}(t) + \dots - \alpha_1\dot{\gamma}(t) + \alpha_0\gamma(t) = 0. \quad (32.94)$$

Начальные условия для него следуют из (32.88), (32.90), (32.93):

$$\gamma(t^0) = d'b, \quad \dot{\gamma}(t^0) = -d'Ab, \quad \dots, \quad \gamma^{(n-1)}(t^0) = (-1)^{n-1}d'A^{n-1}b. \quad (32.95)$$

При выполнении условия (32.84) при любом $d \neq 0$ среди чисел $d'b$, $d'Ab$, ..., $d'A^{n-1}b$ найдутся ненулевые, которые гарантируют выполнение условия (32.90).

Допустим, что программа $u^0(t)$, $t \in T^0$, удовлетворяет условию максимума (32.86), т. е. существует такой ненулевой вектор d , что с функцией (32.88) выполняется условие (32.86), из которого следует, что программа

$$u^0(t) = \text{sign}\psi^{0'}(t)b, \quad t \in T, \quad (32.96)$$

переводит траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, в момент t^0 в начало координат: $x^0(t^0) = 0$.

Предположим, что существует другая программа $\bar{u}(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, такая, что $\bar{x}(\bar{t}) = 0$, $\bar{t} < t^0$, причем $\bar{u}(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, удовлетворяет условию максимума, т. е. $\bar{u}(t) = \text{sign}\bar{\psi}'(t)b$, $t \in [0, \bar{t}]$, где $\bar{\psi}'(t) = \bar{d}F(\bar{t})F^{-1}(t)$, $t \in T$, $\bar{d} \neq 0$.

Поскольку $x^0(t^0) = 0$, то из формулы Коши (32.89) следует

$$0 = x^0(t^0) = F(t^0)x_0 + \int_0^{t^0} F(t^0)F^{-1}(t)bu^0(t)dt$$

или, после умножения обеих частей равенства на $F^{-1}(t^0)$,

$$0 = x_0 + \int_0^{t^0} F^{-1}(t) b u^0(t) dt.$$

Умножим скалярно обе части последнего равенства на вектор $d'F(t^0)$ и учтем равенство (32.96):

$$0 = d'F(t^0)x_0 + \int_0^{t^0} \psi^{0'}(t) b u^0(t) dt = d'F(t^0)x_0 + \int_0^{t^0} |\psi^{0'}(t)b| dt. \quad (32.97)$$

Аналогичным образом получим

$$0 = \bar{d}F(\bar{t})x_0 + \int_0^{\bar{t}} |\bar{\psi}'(t)b| dt. \quad (32.98)$$

Сравнивая равенства (32.97), (32.98), заключаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= d'F(t^0)x_0 + \int_0^{t^0} |\psi^{0'}(t)b| dt = d'F(t^0)x_0 + \int_0^{\bar{t}} |\psi^{0'}(t)b| dt + \int_{\bar{t}}^{t^0} |\psi^{0'}(t)b| dt \geq \\ &\geq \bar{d}F(\bar{t})x_0 + \int_0^{\bar{t}} |\bar{\psi}'(t)b| dt + \int_{\bar{t}}^{t^0} |\psi^{0'}(t)b| dt = \int_{\bar{t}}^{t^0} |\psi^{0'}(t)b| dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\psi^{0'}(t)b \equiv 0, \quad t \in [\bar{t}, t^0],$$

что противоречит соотношению (32.90). ■

32.8. Краевая задача принципа максимума Понтрягина

В теории экстремальных задач методы решения, сводящие с помощью необходимых условий экстремума решение исходной экстремальной задачи к решению неэкстремальной задачи, называются **непрямыми**. Например, в вариационном исчислении решение основной задачи сводится к решению уравнения Эйлера (гл. 7). Непрямой метод решения задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина состоит в следующем.

Из элементов задачи

$$J(u) = \phi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (32.99)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (32.100)$$

$$x(t^*) \in X^* = \{x \in \mathbf{R}^n : h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m_1}, h_i(x) = 0, i = \overline{m_1 + 1, m}\}, \quad (32.101)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (32.102)$$

составим функцию Гамильтона-Понtryгина

$$H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u) + \psi_0 f_0(x, u), \quad x \in X, \quad u \in U, \quad \psi \in \mathbf{R}^n, \quad \psi_0 \leq 0.$$

Найдем функцию

$$u = u(x, \psi), \quad x \in X, \quad \psi \in \mathbf{R}^n, \quad (32.103)$$

из соотношения

$$H(x, \psi, u(x, \psi)) = \max_{u \in U} H(x, \psi, u). \quad (32.104)$$

Подставим функцию (32.103) в уравнение (32.100) и в сопряженную систему $\dot{\psi} = -\partial H / \partial x$, в результате чего получим систему из $2n$ дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, \psi, u(x, \psi))}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H(x, \psi, u(x, \psi))}{\partial x}, \quad (32.105)$$

которую называют *π -системой*.

Добавим к системе (32.105) следующие краевые условия (см. теорему 32.4)

$$x(0) = x_0, \quad \psi(t^*) = -\lambda_0 \frac{\partial \phi(x(t^*))}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial h_i(x(t^*))}{\partial x}, \quad (32.106)$$

$$\psi_0 \leq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m_1}; \quad \lambda_i h_i(x(t^*)) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i^2 \neq 0. \quad (32.107)$$

Соотношения (32.105)–(32.107) называют *краевой задачей принципа максимума Понtryгина*. Функцию $u(t) = u(x(t), \psi(t))$, $t \in T$, построенную по решению $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, краевой задачи, назовем *экстремальной Понtryгина*. Если на некотором промежутке $\sigma \subseteq T$ функция $u(t)$, $t \in T$, определяется из (32.104) неоднозначно, то говорят, что *управляющее воздействие на этом участке особое*.

Из принципа максимума Понtryгина следует, что краевая задача принципа максимума всегда имеет решение, если существует оптимальная программа задачи (32.99)–(32.102), т. е. оптимальную программу нужно искать среди экстремалей Понtryгина. Если исходная задача (32.99)–(32.102) имеет решение, а экстремаль Понtryгина единственная, то она является оптимальной программой. В том случае, когда принцип максимума является и достаточным условием оптимальности, построенная экстремальная Понtryгина является оптимальной программой.

Различные ситуации, возникающие при поиске оптимальных программ с помощью принципа максимума Понtryгина, продемонстрируем на примерах.

32.9. Примеры

Пример 32.2. Рассмотрим задачу быстродействия

$$\begin{aligned} t^* &\rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \\ x_1(t^*) &= x_2(t^*) = 0, \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, t^*]. \end{aligned} \quad (32.108)$$

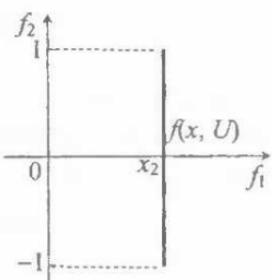


Рис. 32.7

В ней множество скоростей $f(x, U) = \{f \in \mathbb{R}^2 : f = f(x, u), |u| \leq 1\}$ — выпуклый компакт (рис. 32.7), задача имеет решение.

Принцип максимума для задачи (32.108) — критерий оптимальности программы. Следовательно, каждая экстремаль Понtryгина — оптимальная программа.

Гамильтониан имеет вид $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Из условия максимума

$$\psi_2 u(\psi) = \max \psi_2 u, \quad |u| \leq 1,$$

найдем

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi_2 > 0; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi_2 < 0;$$

$$u(\psi) \in [-1, 1], \text{ если } \psi_2 = 0. \quad (32.109)$$

Составим π -систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = 1; \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \text{ если } \psi_2 > 0; \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -1; \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \text{ если } \psi_2 < 0; \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 \in \{-1, 1\}, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \text{ если } \psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (32.110)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t^*) = x_2(t^*) = 0; \\ \psi_1(t^*) &= C_1, \quad \psi_2(t^*) = C_2, \quad C_1^2 + C_2^2 = \alpha^2 \neq 0, \end{aligned} \quad (32.111)$$

α — произвольное число.

Из π -системы следует $\psi_1(t) = C_1$, $\psi_2(t) = -C_1(t-t^*)+C_2$, $t \in T$. Функция $\psi_2(t)$, $t \in T$, имеет не более одного нуля. Пусть t_1 — ее нуль, $C_1 < 0$, $C_2 > 0$. Тогда $\psi_2(t) < 0$, $t \in [0, t_1]$, $\psi_2(t) > 0$, $t \in [t_1, t^*]$, и в силу (32.105) π -система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -1, \quad t \in [0, t_1]; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad t \in [t_1, t^*]; \\ -C_1(t_1-t^*)+C_2 &= 0, \end{aligned}$$

с граничными условиями (32.111). Решив эту краевую задачу, получим: $t^{*0} = 2$, $t_1 = 1$,

$$\begin{aligned}x_1^0(t) &= -t^2/2 + 1, \quad x_2^0(t) = -t, \quad t \in [0, 1]; \\x_1^0(t) &= t^2/2 - 2t + 2, \quad x_2^0(t) = t - 2, \quad t \in [1, 2]; \\&\psi_1(t) = -1, \quad \psi_2(t) = t - 1, \quad t \in [0, 2].\end{aligned}\tag{32.112}$$

Подставив $\psi_2(t)$, $t \in [0, 2]$, из (32.112) в (32.109), найдем оптимальную программу

$$u^0(t) \equiv -1, \quad t \in [0, 1]; \quad u^0(t) \equiv 1, \quad t \in [1, 2].\tag{32.113}$$

Таким образом, оптимальная программа в рассматриваемом примере — *кусочно-постоянная (релейная) функция*. Оптимальные программы и траектория изображены на рис. 32.8.

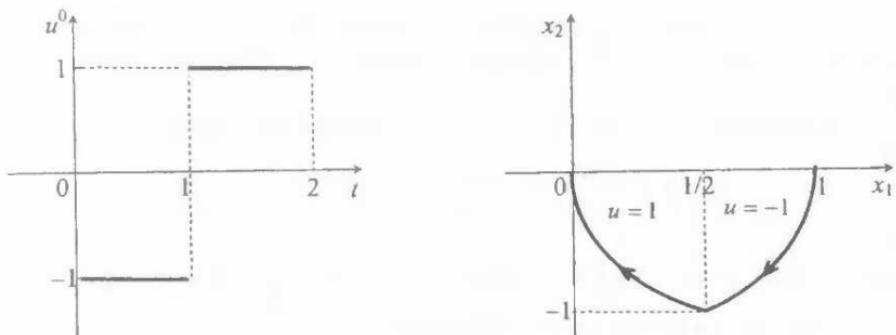


Рис. 32.8

Пример 32.3. Рассмотрим задачу (32.108) примера 32.2 с другим ограничением на управляющие воздействия:

$$\begin{aligned}t^* &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \\ x_1(t^*) &= x_2(t^*) = 0, \\ u(t) &\in U = \{u \in \mathbb{R} : u = \pm 1\}, \quad t \in T = [0, t^*].\end{aligned}\tag{32.114}$$

Теперь для каждого x множество скоростей не выпукло и состоит из двух точек (рис. 32.9), т. е. условия теоремы существования 32.1 не выполняются. Принцип максимума остается критерием оптимальности. Следовательно, любая экстремальная Понtryагина является оптимальной программой. Из условия максимума имеем

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi_2 > 0; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi_2 < 0;$$

$$u(\psi) = \pm 1, \text{ если } \psi_2 = 0.$$

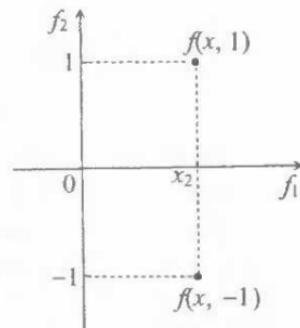


Рис. 32.9

В первых двух случаях π -система имеет тот же вид (32.109), что в предыдущем примере. В третьем случае π -система приобретает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \pm 1; \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = -\psi_1; \quad \psi_2 = 0, \quad t \in T.$$

Границные условия (32.111) остаются и здесь справедливыми. Таким образом, решение краевой задачи будет таким же, как в предыдущем примере. Следовательно, экстремаль Понтрягина (32.113) является оптимальной программой задачи (32.114).

Пример 32.4. Рассмотрим задачу минимизации полной энергии для успокоения динамической системы:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{2,2} u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad (32.115)$$

$$x_1(2,2) = x_2(2,2) = 0, \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, 2, 2].$$

Согласно теореме существования 32.1 задача (32.115) имеет решение. Здесь, как и в примерах 32.2, 32.3, принцип максимума — критерий оптимальности (разд. 32.5).

Гамильтониан $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - (1/2)u^2$ и условие максимума

$$\psi_2 u(\psi) - (1/2)u^2(\psi) = \max (\psi_2 u - (1/2)u^2), \quad |u| \leq 1,$$

дает

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi_2 > 1; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi_2 < -1; \quad u(\psi) = \psi_2, \text{ если } |\psi_2| \leq 1. \quad (32.116)$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad \text{если } \psi_2 > 1; \quad (32.117)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -1, \quad \text{если } \psi_2 < -1; \quad (32.117)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \psi_2, \quad \text{если } |\psi_2| \leq 1;$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = -\psi_1, \quad t \in T; \quad (32.118)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0; \quad x_1(2,2) = x_2(2,2) = 0;$$

$$\psi_1(2,2) = C_1, \quad \psi_2(2,2) = C_2, \quad C_1 + C_2 \neq 0.$$

Интегрируя систему (32.118), как и в предыдущих примерах, получим $\psi_1(t) = C_1$, $\psi_2(t) = -C_1(t-2,2) + C_2$, $t \in T$.

Пусть t_1, t_2 — моменты, в которые согласно (32.116) $|\psi_2(t)| = 1$, причем $t_1 < t_2$, $C_1 < 0$. Тогда в силу (32.116) будем иметь

$$u(t) = -1, \quad 0 \leq t < t_1; \quad u(t) = \psi_2(t), \quad t_1 \leq t < t_2; \quad u(\psi) = 1, \quad t_2 \leq t \leq 2,2. \quad (32.119)$$

Подставив значения (32.119) в систему (32.117) и учитя равенства $\psi_2(t_1) = -1$, $\psi_2(t_2) = 1$, получим краевую задачу:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -1, \quad t \in [0, t_1[; \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0;$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -C_1(t-2, 2) + C_2, \quad t \in [t_1, t_2]; \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad t \in [t_2, 2, 2]; \quad x_1(2, 2) = x_2(2, 2) = 0; \\ \psi_2(t_1) &= -C_1(t_1-2, 2) + C_2 = -1, \quad \psi_2(t_2) = -C_1(t_2-2, 2) + C_2 = 1.\end{aligned}$$

Ее решение имеет вид:

$$t_1 = 1,1 - \sqrt{0,63} \approx 0,31, \quad t_2 = 1,1 + \sqrt{0,63} \approx 1,89;$$

$$\psi_2(t) = \frac{2}{t_2 - t_1} t - \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1}, \quad t \in T;$$

$$x_1^0(t) = -\frac{t^2}{2} + 1, \quad x_2^0(t) = -t, \quad t \in [0, t_1];$$

$$x_1^0(t) = \frac{1}{3(t_2 - t_1)} t^3 - \frac{t_2 + t_1}{2(t_2 - t_1)} t^2 + \frac{t_1^2}{t_2 - t_1} t - \frac{t_1^3}{3(t_2 - t_1)} + 1,$$

$$x_2^0(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} t^2 - \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} t + \frac{t_1^2}{t_2 - t_1}, \quad t \in [t_1, t_2];$$

$$x_1^0(t) = \frac{1}{2} t^2 - (t_2 + t_1)t + \frac{1}{3}(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + 1,$$

$$x_2^0(t) = t - (t_2 + t_1), \quad t \in [t_2, 2, 2].$$

Оптимальные программы и траектория изображены на рис. 32.10.

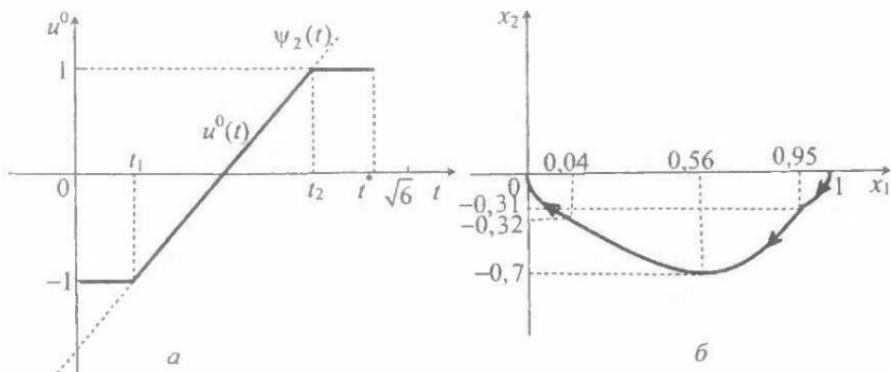


Рис. 32.10

Заметим, что при $t^* = 2$ оптимальная программа имеет такой же вид, как в примере 32.2, поскольку $t^* = 2$ – минимальное время перехода системы из заданного состояния $x_0 = (1, 0)$ в начало координат. При $t^* < 2$ задача не имеет решения из-за отсутствия программы, переводящей систему из $x_0 = (1, 0)$ в начало координат. При $2 < t^* < \sqrt{6}$ оптимальная программа имеет вид (32.119) и изображена на рис. 32.10, а. Если $t^* = \sqrt{6}$, то $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{6}$; оптимальная программа изобра-

жена на рис. 32.11, а. Если $t^* > \sqrt{6}$, то оптимальная программа имеет вид $u^0(t) = \psi_2(t)$, $t \in [0, t^*]$ (рис. 32.11, б).

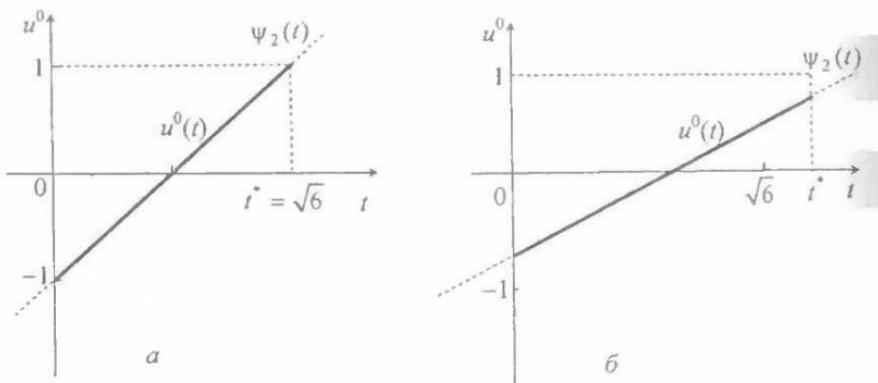


Рис. 32.11

Таким образом, в данном примере оптимальная программа – непрерывная функция при $t^* > 2$.

Пример 32.5. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} x^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.120)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, t^*].$$

Выполнены все условия теоремы существования 32.1. Решение задачи существует. Принцип максимума – критерий оптимальности, следовательно, каждая экстремаль Понtryгина – оптимальная программа. Имеем $H = \psi u - x^2/2$. Из условия максимума найдем

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi > 0; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < 0; \quad u(\psi) \in [-1, 1], \text{ если } \psi = 0. \quad (32.121)$$

Запишем краевую задачу принципа максимума

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{\psi} = x, \text{ если } \psi > 0, \quad x(0) = x_0, \quad \psi(t^*) = 0;$$

$$\dot{x} = -1, \quad \dot{\psi} = x, \text{ если } \psi < 0, \quad x(0) = x_0, \quad \psi(t^*) = 0; \quad (32.122)$$

$$\dot{x} \in [-1, 1], \quad \dot{\psi} = x, \text{ если } \psi = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \psi(t^*) = 0.$$

Построим фазовый портрет π -системы (рис. 32.12). При $u(\psi) = -1$, $\psi < 0$ траекториями системы (32.122) являются параболы $\psi = \psi_0 - x^2/2 + x_0^2/2$. Если $u(\psi) = 1$, $\psi > 0$, то траектории системы (32.122) – параболы $\psi = \psi_0 + x^2/2 - x_0^2/2$. Пусть для $x_0 > 0$ время перехода из точки A в начало координат равно \bar{T} . Если $t^* \leq \bar{T}$, то найдется точка B на вертикали $x = x_0$, при которой дуга BC является решением задачи (32.122). Ей соответствует экстремаль $u^0(t) \equiv -1$, $t \in T$, которая в силу критерия оптимальности является оптимальной программой.

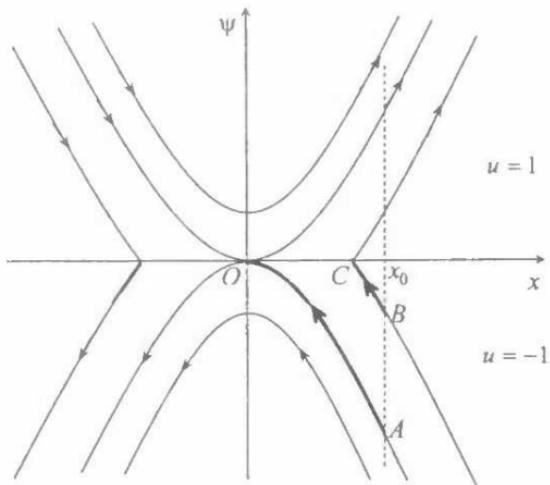


Рис. 32.12

Аналогично для $x_0 < 0$ оптимальная программа имеет вид $u^0(t) \equiv 1, t \in T$.

При $t^* > \bar{t}$ решением задачи будет программа

$$\begin{aligned} u^0(t) &= -1, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad u^0(t) = 0, \quad t \in [\bar{t}, t^*], \text{ если } x_0 > 0; \\ u^0(t) &= 1, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad u^0(t) = 0, \quad t \in [\bar{t}, t^*], \text{ если } x_0 < 0, \\ u^0(t) &\equiv 0, \quad t \in [0, t^*], \text{ если } x_0 = 0. \end{aligned}$$

Участки $[\bar{t}, t^*]$, на которых $u(t) \equiv 0$, являются *особыми*. На них принцип максимума не позволяет найти экстремаль. Ее находят дифференцированием тождества $\psi(t) \equiv 0, t \in [\bar{t}, t^*]$, до появления управляющего воздействия: $\dot{\psi}(t) = \dot{x}(t) \equiv 0, \quad \ddot{\psi}(t) = \dot{x}(t) = u(t) \equiv 0, t \in [\bar{t}, t^*]$. Отсюда получаем экстремаль $u(t) \equiv 0, t \in [\bar{t}, t^*]$. В силу достаточности принципа максимума она является оптимальной программой.

Итак, в рассматриваемом примере в зависимости от x_0, t^* оптимальная программа может быть релейной, причем состоять либо из одного участка – неособого, либо из двух – неособого и особого, либо полностью быть особой.

Пример 32.6. Рассмотрим задачу минимизации среднеквадратичного уклонения траектории:

$$J(u) = \int_0^{t_F} x^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0,$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, t_F].$$

Здесь t_F – некоторый момент времени. Задача исследована А. Т. Фуллером. Условия теоремы существования 32.1 выполнены – решение существует. Принцип

максимума – критерий оптимальности. Следовательно, экстремали Понtryгина – оптимальные программы.

Фуллер А. Т. показал, что в данной задаче оптимальная программа не является кусочно-непрерывной функцией, а представляет измеримую функцию. На отрезке $T = [0, t_F]$ оптимальная программа имеет бесконечное число точек переключения, которые сгущаются при приближении к моменту t_F . Соответствующая компонента $x_1^0(t)$, $t \in T$, траектории имеет синусоидальный вид с переменной амплитудой, приближающейся к нулю при $t \rightarrow t_F$ (рис. 32.13).

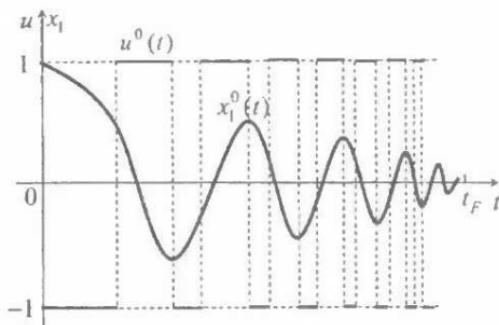


Рис. 32.13

Время t_F , при котором происходит успокоение координаты $x_1(t)$ ($x_1(t_F) = 0$), равно

$$t_F = \frac{2(1+k)^{1/2}}{1-k^{1/2}},$$

где $k = \frac{1}{4} \left(17 + 3\sqrt{33} - \sqrt{570 + 102\sqrt{33}} \right) \approx 0,05862$.

Пример 32.7. Рассмотрим задачу примера 32.1:

$$J(u) = -\frac{1}{2} \int_0^{t^*} x^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.123)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, t^*].$$

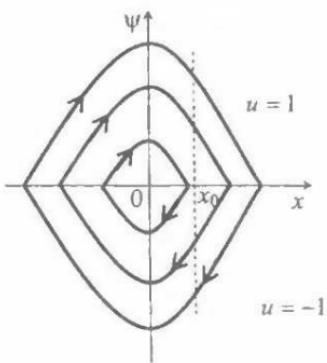


Рис. 32.14

Согласно теореме существования 32.1 задача имеет решение. Для нее принцип максимума – лишь необходимое условие оптимальности. Гамильтониан задачи (32.123) имеет вид $H = \psi u + x^2/2$. Из условия максимума получим функцию вида (32.121). Запишем краевую задачу принципа максимума

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1, & \psi &= -x, & \text{если } \psi < 0; \\ \dot{x} &= 1, & \psi &= -x, & \text{если } \psi > 0; \\ \dot{x} &\in [-1, 1], & \psi &= -x, & \text{если } \psi = 0, t \in T; \\ x(0) &= x_0, & \psi(t^*) &= 0. \end{aligned} \quad (32.124)$$

Фазовый портрет π -системы изображен на

рис. 32.14. Из него следует:

- 1) экстремаль существует для каждого x_0 ;
- 2) экстремалей бесконечное множество:

$$u(t) \equiv 1, \quad t \in T; \quad u(t) \equiv -1, \quad t \in T; \quad (32.125)$$

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in T;$$

$$u^{(p)}(t) = \text{sign} \cos \frac{2p+1}{2} \pi t, \quad t \in T; \quad (32.126)$$

$$u^{(p)}(t) = -\text{sign} \cos \frac{2p+1}{2} \pi t, \quad t \in T; \quad p = 0, 1, 2, \dots; \quad (32.127)$$

3) оптимальные программы получаются методом перебора или с помощью дополнительных необходимых условий оптимальности. Нетрудно проверить, что они являются экстремали (32.125).

Рассмотрим экстремали (32.126), (32.127). При $p = 0$ соответствующие фазовые траектории краевой задачи (32.124) при $x_0 = 0, t^* = 1$ изображены на рис. 32.15, а, б.

При $p = 1$ эти траектории имеют вид, изображенный на рис. 32.16, а, б, т. е. состоят из двух дуг.

При произвольном $p > 1$ фазовые портреты траекторий π -системы, соответствующие управляющим воздействиям (32.126), (32.127), будут представлять замкнутые линии, состоящие из дуг парабол. Первая точка переключения экстремали будет в момент $t_1 = 1/(2p+1)$. Затем переключения происходят через каждые $2/(2p+1)$ единиц времени. Чем больше число p , тем больше вращений вокруг начала координат совершает траектория π -системы и тем ближе эта траектория к началу координат.

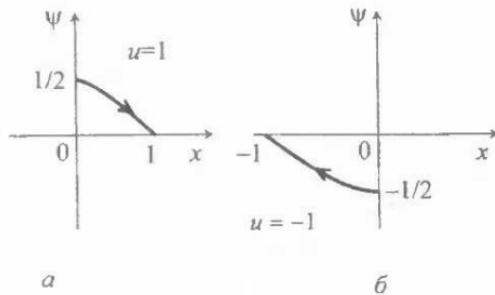


Рис. 32.15

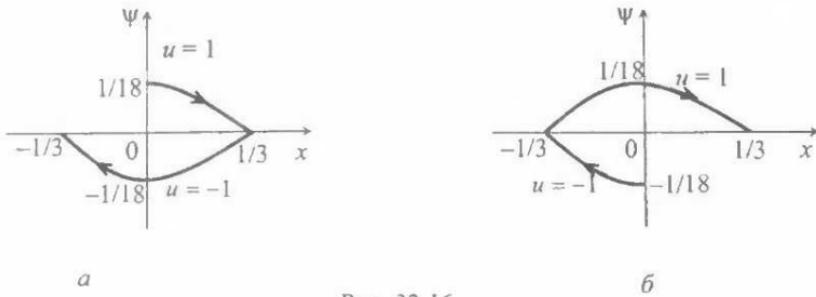


Рис. 32.16

Пример 32.8. Рассмотрим задачу примера 32.5 с другими ограничениями на управляющие воздействия:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} x^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.128)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : u = \pm 1\}, \quad t \in T.$$

Условия теоремы существования не выполняются (множество скоростей не выпукло, см. пример 32.3). Из условия максимума получаем управляющие воздействия $u(\psi)$, как и в примере 32.3:

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi > 0; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < 0; \quad u(\psi) = \pm 1, \text{ если } \psi = 0. \quad (32.129)$$

Первые два уравнения краевой задачи принципа максимума совпадают с первыми двумя уравнениями (32.122), третье имеет вид

$$\dot{x} \in \{-1, 1\}, \quad \psi = x, \text{ если } \psi = 0.$$

Граничные условия такие же: $x(0) = x_0$, $\psi(t^*) = 0$. Фазовый портрет π -системы представлен на рис. 32.12. Как указывалось в примере 32.5, при $x_0 = 0$ или при $x_0 \neq 0$, $t^* > \bar{t}$ в задаче (32.120) экстремаль особая (в первом случае) или особой является ее финальная часть: $u(t) \equiv 0$, $t \in T$ (или $u(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t^*]$). В рассматриваемой же задаче (32.128) в этом случае решение в обычном смысле не существует, поскольку не существует решения краевой задачи со свойством $\psi(t^*) = 0$.

В связи с этим найдем обобщенное решение.

По схеме, приведенной в разд. 32.2, построим выпуклую оболочку множества $f(x, U)$:

$$g(x, V) = \{g \in \mathbb{R} : g = v, v \in V\}, \quad V = \{v \in \mathbb{R} : v = -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_i \geq 0, i=1, 2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

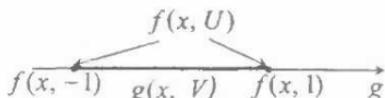


Рис. 32.17

Она представляет отрезок, соединяющий точки $f(x, -1)$ и $f(x, 1)$ (рис. 32.17), т. е. совпадает с множеством скоростей примера 32.5. Таким образом, расширенная задача имеет вид

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} x^2(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = g(x, v), \quad x(0) = x_0,$$

$$v(t) \in V, \quad t \in T. \quad (32.130)$$

В задаче (32.130) функция $v(t) \in V$, $t \in T$, – управляющее воздействие, выполнены все условия теоремы существования, решение существует, принцип максимума – критерий оптимальности. Следовательно, любая экстремаль – оптимальная программа. Множество скоростей этой задачи совпадает с множеством скоростей примера 32.5, значит, будут совпадать и оптимальные программы:

$$u^0(t) = v^0(t) = -\alpha_1^0(t) + \alpha_2^0(t). \quad (32.131)$$

Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда $x_0 = 0$, $u^0(t) \equiv 0$, $t \in T$, т. е. вся экстремаль особая. Тогда из (32.131) и определения множества \mathcal{A} следует: $\alpha_1^0(t) = \alpha_2^0(t) = 1/2$, $t \in T$, т. е. исходная задача не имеет решения.

Построим для нее обобщенное решение (минимизирующую последовательность управляющих воздействий), используя решение расширенной задачи (32.130).

Как указывалось в разд. 32.2, свойство $\alpha_1^0(t) = \alpha_2^0(t) = 1/2$, $t \in T$, означает, что в каждом члене минимизирующей последовательности значения управляющего воздействия исходной задачи (32.128) половину времени принадлежат одной границе, а вторую половину — другой. Исходя из этого, построим минимизирующую последовательность.

Разделим отрезок $[0, t^*]$ (если $u^0(t) \equiv 0$, $t \in T_1 = [\bar{t}, t^*]$, то делим отрезок T_1) на $N = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, равных частей и положим:

$$u^{(k)}(t) \equiv 1, \quad t \in \left[\frac{it^*}{2^k}, \frac{(i+1)t^*}{2^k} \right]; \quad u^{(k)}(t) \equiv -1, \quad t \in \left[\frac{(i+1)t^*}{2^k}, \frac{(i+2)t^*}{2^k} \right], \quad (32.132)$$

$$i = 0, 2, 4, \dots, 2^k - 2; \quad k = 1, 2, \dots$$

Соответствующая последовательность траекторий исходной системы имеет вид (рис 32.18):

$$x^{(k)}(t) \equiv t - \frac{it^*}{2^k}, \quad t \in \left[\frac{it^*}{2^k}, \frac{(i+1)t^*}{2^k} \right];$$

$$x^{(k)}(t) \equiv -t + \frac{(i+2)t^*}{2^k}, \quad t \in \left[\frac{(i+1)t^*}{2^k}, \frac{(i+2)t^*}{2^k} \right], \quad (32.133)$$

$$i = 0, 2, 4, \dots, 2^k - 2; \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что на последовательности (32.133) значение критерия качества стремится к нулю. Последовательность $x^{(k)}(t)$, $t \in T$, $k = 1, 2, \dots$, траекторий исходной задачи при $k \rightarrow \infty$ равномерно стремится к функции $x(t) \equiv 0$, $t \in T$, которая не является траекторией исходной задачи ни при какой программе. Последовательность управляющих воздействий (32.132) (обобщенное решение) не имеет предела при $k \rightarrow \infty$. Число точек переключения членов этой последовательности неограниченно растет при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, последовательность (32.133) представляет собой скользящий режим (разд. 32.2).

Итак, при достаточно больших значениях t^* оптимальная траектория задачи

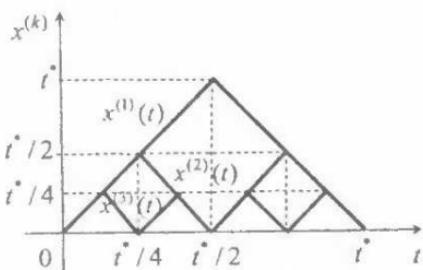


Рис. 32.18

состоит из двух частей: на начальной стадии она соответствует релейному управляемому воздействию, на финальной представляет скользящий режим.

Пример 32.9. Рассмотрим задачу (32.123) примера 32.7 с другим множеством значений управляемых воздействий $U = \{u : u = \pm 1\}$.

Рассуждая, как в примере 32.7, получим, что экстремали совпадают с экстремалами задачи (32.123), за исключением особой $u(t) = 0$, $t \in T$. Оптимальные программы задачи совпадают с оптимальными программами (32.125) задачи примера 32.7.

Пример 32.10. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} (x^2(t) - u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.134)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : -1 \leq u \leq 2\}, \quad t \in T.$$

Все условия теоремы существования 32.1 выполнены – решение существует, принцип максимума – критерий оптимальности. Следовательно, любая экстремаль – оптимальная программа.

Гамильтониан имеет вид $H = (\psi + 1/2)u - x^2/2$. Из условия максимума получим

$$\begin{aligned} u(\psi) &= 2, \text{ если } \psi > -1/2; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < -1/2; \\ u(\psi) &\in [-1, 2], \text{ если } \psi = -1/2. \end{aligned} \quad (32.135)$$

Запишем краевую задачу принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2, \quad \psi = x, \quad \text{если } \psi > -1/2; \\ \dot{x} &= -1, \quad \psi = x, \quad \text{если } \psi < -1/2; \\ \dot{x} &\in [-1, 2], \quad \psi = x, \quad \text{если } \psi = -1/2; \\ x(0) &= x_0, \quad \psi(t^*) = 0. \end{aligned} \quad (32.136)$$

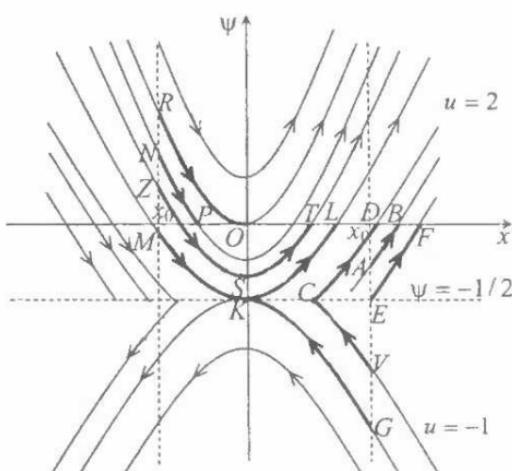


Рис. 32.19

Рассмотрим фазовый портрет π -системы (рис. 32.19). Его анализ позволяет сделать следующие выводы.

Пусть $x_0 > 0$.

1. Если $0 < t^* \leq \bar{T}$, где \bar{T} – время перехода π -системы из точки E ($\psi = -1/2$) в точку F ($\psi(t^*) = 0$), то оптимальная программа $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [0, t^*]$ (рис. 32.20, а, соответствующая дуга π -системы AB на рис. 32.19).

2. При $\bar{T} < t^* \leq t^{(1)} + t^{(2)} = \bar{\bar{T}}$, где $t^{(1)}$ – время перехода π -системы из точки G в точку K , $t^{(2)}$ – из точки K в точку L ($\psi = 0$,

рис. 32.19), оптимальная программа имеет вид: $u^0(t) \equiv -1$, $t \in [0, t_1[$, $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [t_1, t^*]$ (рис. 32.20, б, соответствующие дуги π -системы на рис. 32.19 VC и CD), t_1 — время движения π -системы по дуге VC .

3. При $t^* > \bar{t}$ оптимальная программа: $u^0(t) \equiv -1$, $t \in [0, t^{(1)}]$, $u^0(t) \equiv 0$, $t \in [t^{(1)}, t_2]$, $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [t_2, t^*]$, где $t_2 = t^* - t^{(2)}$ (рис. 32.20, в, соответствующие дуги π -системы на рис. 32.19: GK , точка K и KL).

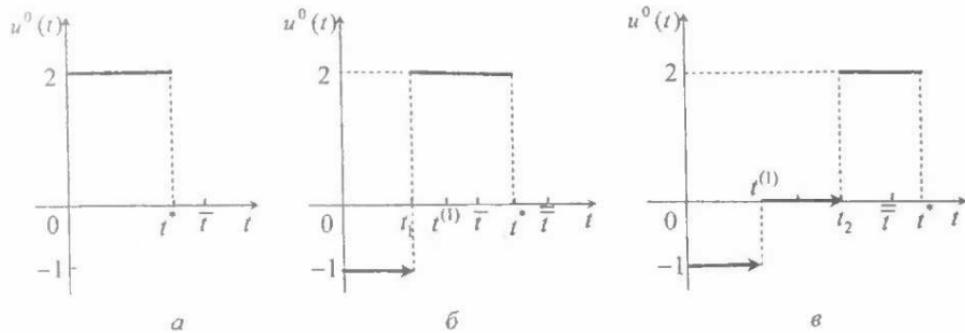


Рис. 32.20

Пусть $x_0 < 0$.

1. Если $t^* \leq \bar{t}$, где $\bar{t} = t^{(1)} + t^{(2)}$, $t^{(1)}$ — время перехода π -системы из точки M в точку K ($\psi = -1/2$), $t^{(2)}$ — из точки K в точку L ($\psi = 0$), оптимальная программа имеет вид: $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [0, t^*]$ (рис. 32.21, а, соответствующие дуги π -системы на рис. 32.19 NP , RO или ZST).

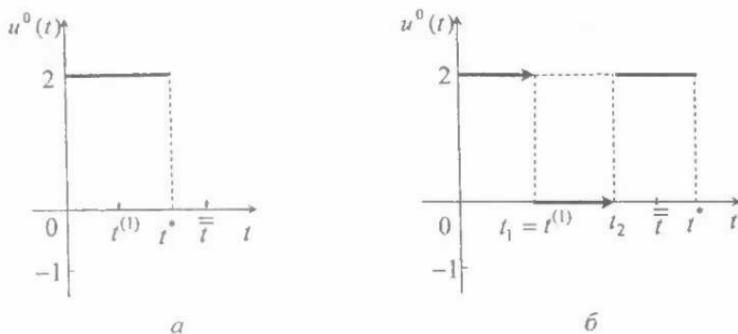


Рис. 32.21

2. Если $t^* > \bar{t}$, то $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [0, t_1[$, $u^0(t) \equiv 0$, $t \in [t_1, t_2[$, $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [t_2, t^*]$ (рис. 32.21, б), где $t_1 = t^{(1)}$, $t_2 = t^* - t^{(2)}$ (соответствующие дуги π -системы на рис. 32.19 MK , точка K и KL).

Таким образом, оптимальная программа является кусочно-постоянной (релейной) функцией, содержащей при больших значениях t^* особые участки.

Пример 32.11. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^t (x^2(t) - u^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.137)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : 1 \leq u \leq 2\}, \quad t \in T.$$

Условия теоремы существования не выполняются, поскольку функция $f_0(x, u) = (x^2 - u^2)/2$ не выпукла по u . Принцип максимума – критерий оптимальности. Гамильтониан имеет вид $H = \psi u - (x^2 - u^2)/2$. Из условия максимума

$$\psi u(\psi) + u^2(\psi)/2 = \max \left(\psi u + u^2/2 \right), \quad 1 \leq u \leq 2,$$

имеем

$$u(\psi) = 2, \text{ если } \psi > -3/2; \quad u(\psi) = 1, \text{ если } \psi < -3/2;$$

$u(\psi) \in \{1, 2\}$, если $\psi = -3/2$.

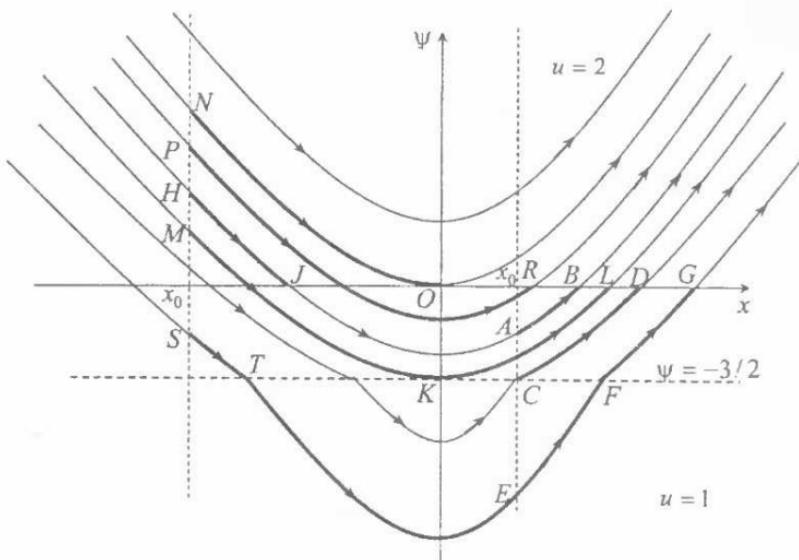
Краевая задача принципа максимума:

$$\dot{x} = 2, \quad \dot{\psi} = x, \quad \text{если } \psi > -3/2;$$

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{\psi} = x, \quad \text{если } \psi < -3/2;$$

$$\dot{x} \in \{1, -2\}, \quad \dot{\psi} = x, \quad \text{если } \psi = -3/2;$$

$$x(0) = x_0, \quad \Psi(t^*) = 0.$$



Puc. 32.22

Фазовый портрет π -системы изображен на рис. 32.22. Из его анализа для случая, когда $0 \notin U$, можно сделать следующие выводы.

Пусть $x_0 > 0$. Тогда: 1) при $0 < t^* \leq \bar{t}$, где \bar{t} – время перехода π -системы из точки C (на прямой $\psi = -3/2$) в точку D ($\psi(t^*) = 0$), оптимальная программа име-

ет вид $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [0, t^*]$ (рис. 32.23, а), ей соответствует дуга AB π -системы (рис. 32.22); 2) при $t^* > \bar{t}$ оптимальной программой будет $u^0(t) \equiv 1$, $t \in [0, t_1[$, $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [t_1, t^*]$, где $t_1 = t^* - \bar{t}$ – точка переключения, при которой $\psi(t_1) = -3/2$ (рис. 32.23, б); ей соответствуют дуги EF и FG π -системы (рис. 32.22).

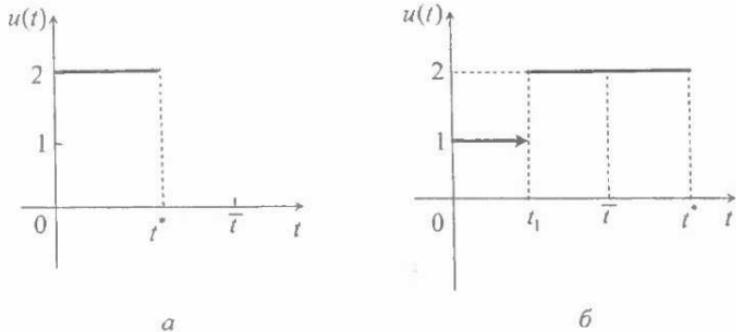


Рис. 32.23

При $x_0 < 0$ имеем: 1) если $0 < t^* \leq \bar{t}$, где \bar{t} – время перехода π -системы из точки M в точку L , то оптимальная программа $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [0, t^*]$ (рис. 32.23, а), ей соответствуют дуги HJ , NO или PR π -системы (рис. 32.22); 2) если $t^* > \bar{t}$, то оптимальной программой будет $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [0, t_1[$, $u^0(t) \equiv 1$, $t \in [t_1, t_2[$, $u^0(t) \equiv 2$, $t \in [t_2, t^*]$ (рис. 32.24); ей соответствуют дуги ST , TF и FG π -системы (рис. 32.22).

Таким образом, в случае $0 \notin U$ задача имеет решение при любых x_0 , t^* .

Рассмотрим задачу (32.137) с множеством $U = \{u \in \mathbb{R} : -1 \leq u \leq 2\}$, при котором $0 \in U$. Из принципа максимума следует:

$$u(\psi) = 2, \text{ если } \psi > -1/2; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < -1/2; \\ u(\psi) \in \{-1, 2\}, \text{ если } \psi = -1/2.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2, & \dot{\psi} &= x, & \text{если } \psi > -1/2; \\ \dot{x} &= -1, & \dot{\psi} &= x, & \text{если } \psi < -1/2; \\ \dot{x} &\in \{-1, 2\}, & \dot{\psi} &= x, & \text{если } \psi = -1/2; \\ x(0) &= x_0, & \psi(t^*) &= 0. \end{aligned} \tag{32.138}$$

Фазовый портрет π -системы будет такой же, как в предыдущем примере (рис. 32.19). В краевых задачах (32.136), (32.138) отличаются третьи уравнения.

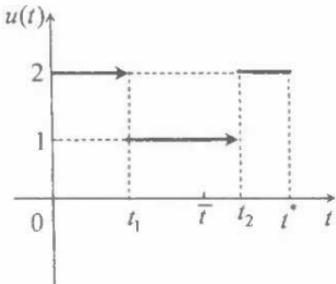


Рис. 32.24

Поэтому задача (32.137) при $t^* > \bar{t}$ не имеет решения, поскольку не существует траектории π -системы (32.138) со свойством $\psi(t^*) = 0$.

Для построения обобщенного решения введем выпуклую оболочку функции $f_0(x, u) = (x^2 - u^2)/2$. Она имеет вид $g(x, u) = (x^2 - u^2)/2$ и совпадает с функцией $f_0(x, u)$ задачи (32.134) с точностью до постоянной -1 . Поэтому обобщенная задача совпадает с задачей (32.134), которая имеет решение. Поскольку при $t^* > \bar{t}$ задача (32.134) имеет особый участок $u^0(t) \equiv 0$, $t \in [t_1, t_2]$ (рис. 32.20, в), то исходная задача (32.137) на этом участке имеет скользящий режим. Минимизирующая последовательность на этом участке строится аналогично, как в примере 32.8.

Таким образом, задача (32.137) с множеством U , не содержащим 0, имеет решение с кусочно-постоянной (релейной) программой. Если множество U содержит 0, то при достаточно больших t^* задача не имеет решения в обычном смысле. В обобщенном решении имеются участки скользящего режима.

Пример 32.12. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.139)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T.$$

Условия теоремы существования 32.1 выполняются – решение существует. Принцип максимума – критерий оптимальности. Следовательно, любая экстремаль – оптимальная программа. Гамильтониан имеет вид $H = \psi u - (x^2 + u^2)/2$. Из условия максимума имеем:

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi > 1; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < -1; \quad u(\psi) = \psi, \text{ если } |\psi| \leq 1.$$

Запишем краевую задачу принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1, & \psi &= x, & \text{если } \psi < -1; \\ \dot{x} &= 1, & \psi &= x, & \text{если } \psi > 1; \\ \dot{x} &= \psi, & \psi &= x, & \text{если } |\psi| \leq 1; \\ x(0) &= x_0, & \psi(t^*) &= 0. \end{aligned} \quad (32.140)$$

Траектории π -системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi &= -x^2/2 + x_0^2/2 + \psi_0, & \psi &< -1; \\ \psi^2 &= x^2 - x_0^2 + \psi_0^2, & |\psi| &\leq 1; \\ \psi &= x^2/2 - x_0^2/2 + \psi_0, & \psi &> 1. \end{aligned}$$

На базе этих решений построим фазовый портрет (рис. 32.25).

Из рис. 32.25 можно сделать следующие выводы (для простоты изложения будем рассматривать только $x_0 > 0$):

1. Если $0 < x_0 \leq 1$, то оптимальная траектория $x^0(t)$, $t \in T$, исходной задачи состоит из одной дуги, соответствующей экстремали $u^0(t) = u(\psi(t)) = \psi(t)$, $t \in T$, где $x^0(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$ – решение краевой задачи (32.140) (на рис. 32.25 этот случай соответствует дуге AB π -системы с начальным вектором $x_0 = \bar{x}_0$). При этом чем больше время t^* , тем точка A ближе к асимптоте OL . Вид оптимальной программы изображен на рис. 32.26, а.

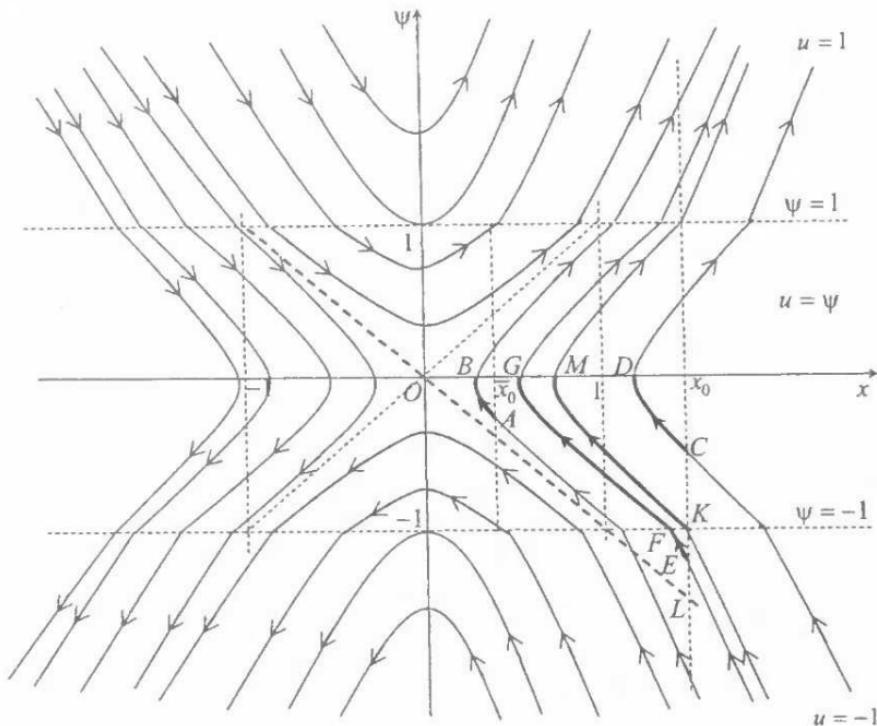


Рис. 32.25

2. а) Если $x_0 > 1$, $t^* \leq \bar{T}$, где \bar{T} – время движения π -системы из точки K ($\psi = -1$) в точку M ($\psi = 0$), тогда оптимальная траектория, как и в предыдущем случае, состоит из одной дуги (на рис. 32.25 она соответствует дуге CD π -системы).

б) Если $x_0 > 1$, $t^* > \bar{T}$, оптимальная траектория состоит из двух дуг: первая из них соответствует программе $u^0(t) \equiv -1$, $t \in [0, t_1[$, вторая – программе $u^0(t) = u(\psi(t)) = \psi(t)$, $t \in [t_1, t^*]$, где $x^0(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$ – решение краевой задачи

$$\dot{x} = -1, \quad \dot{\psi} = x, \quad t \in [0, t_1[, \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{x} = \psi, \quad \dot{\psi} = x, \quad t \in [t_1, t^*], \quad \psi(t^*) = 0,$$

$t^* - t_1 = \bar{t}$ – время перехода π -системы с прямой $\psi = -1$ на ось Ox (на рис. 32.25 эти дуги π -системы соответствуют дугам EF и FG). Вид оптимальной программы изображен на рис. 32.26, б.

Заметим, что чем больше t^* , тем точка E ближе к точке L , являющейся точкой пересечения асимптоты $\psi = -x$ и прямой $x = x_0$, а точка G ближе к началу координат.

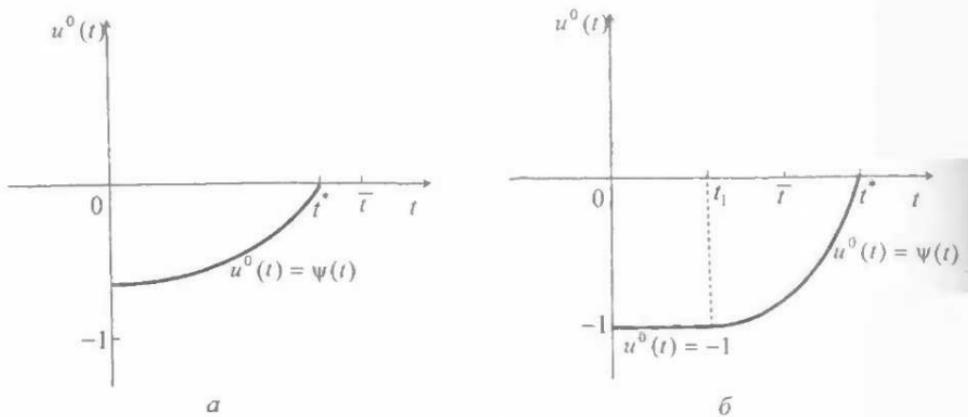


Рис. 32.26

3. Если $x_0 = 0$, то единственной оптимальной траекторией является траектория $x^0(t) \equiv 0$, $t \in T$, соответствующая особой программе $u^0(t) \equiv 0$, $t \in T$.

4. Оптимальные траектории обладают свойством: для любого начального состояния x_0 терминальное состояние $x(t^*)$ стремится к равновесному ($x(t^*) \rightarrow 0$) при $t^* \rightarrow \infty$. Это свойство задачи можно использовать для стабилизации неустойчивых динамических систем.

Пример 32.13. Рассмотрим задачу примера 32.12 с другим множеством значений управляющих воздействий

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.141)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : u = \pm 1\}, \quad t \in T.$$

Поскольку множество скоростей $f(x, U) = \{f \in \mathbb{R} : f = u, u = \pm 1\}$ не выпукло, то условия теоремы существования 32.1 не выполняются. Принцип максимума остается критерием оптимальности. Гамильтониан имеет тот же вид, что в предыдущем примере. Из условия максимума получаем:

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi > 0; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < 0; \quad u(\psi) = \pm 1, \text{ если } \psi = 0.$$

Следовательно, краевая задача принципа максимума имеет такой же вид, как и для задачи (32.128) примера 32.8, а значит, будет таким же и фазовый портрет π -системы, который изображен на рис. 32.12. Его анализ позволяет сделать следующие выводы.

Пусть при заданном x_0 время перехода в начало координат равно \bar{T} (соответствующая фазовая траектория π -системы AO при $x_0 > 0$ изображена на рис. 32.12). Если $t^* \leq \bar{T}$, то решение задачи (32.141) существует (для $x_0 > 0$ оптимальная программа равна $u^0(t) = -1$, $t \in T$, соответствующая фазовая траектория BC π -системы изображена на рис. 32.12; для $x_0 < 0$ имеем $u^0(t) = 1$, $t \in T$). Если $t^* > \bar{T}$, исходная задача не имеет решения, поскольку не существует решения краевой задачи со свойством $\psi(t^*) = 0$.

В последнем случае построим обобщенное решение, для чего рассмотрим расширенную задачу (для простоты считаем, что $|x_0| \leq 1$, $x_0 \neq 0$):

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} (x^2(t) + w^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = w; \quad x(0) = x_0, \quad (32.142)$$

$$|w(t)| \leq 1, \quad t \in T,$$

где $w(t) = (u^{(1)} - u^{(2)})\alpha(t) + u^{(2)}$, $u^{(1)} = 1$, $u^{(2)} = -1$, $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, $t \in T$.

Задача (32.142) полностью совпадает с задачей (32.139). Все условия теоремы существования 32.1 выполнены – решение задачи (32.142) существует. Принцип максимума для нее – критерий оптимальности. Решения задач (32.139) и (32.142) совпадают. Если $|x_0| \leq 1$, $x_0 \neq 0$, то, как следует из примера 32.12, $w^0(t) = u(\psi(t)) = \psi(t)$, $t \in T$, т. е. $2\alpha^0(t) - 1 = \psi(t)$, $t \in T$, откуда получаем

$$\alpha^0(t) = (\psi(t) + 1)/2, \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, – компонента решения краевой задачи $\dot{x} = \psi$, $\dot{\psi} = x$, $x(0) = x_0$, $\psi(t^*) = 0$.

Метод построения минимизирующей последовательности для рассматриваемой задачи (32.141) приведен в разд. 32.2.

Таким образом, в рассматриваемой задаче траектории могут либо соответствовать релейной программе, либо состоять из дуг, на начальной стадии которые соответствуют релейной программе, а на заключительной представляют скользящий режим, либо полностью представляют скользящий режим.

Пример 32.14. Рассмотрим задачу

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} (u^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, \quad (32.143)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbf{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T.$$

Условия теоремы существования 32.1 выполнены. Решение существует. Принцип максимума – лишь необходимое условие оптимальности. Гамильтониан имеет вид $H = \psi u - (u^2 - x^2)/2$. Из условия максимума имеем

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi > 1; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < -1; \quad u(\psi) = \psi, \text{ если } |\psi| \leq 1.$$

Запишем краевую задачу принципа максимума

$$\dot{x} = -1, \quad \dot{\psi} = -x \quad \text{при } \psi < -1;$$

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{\psi} = -x \quad \text{при } \psi > 1;$$

$$\dot{x} = \psi, \quad \dot{\psi} = -x \quad \text{при } |\psi| \leq 1;$$

$$x(0) = x_0, \quad \psi(t^*) = 0.$$

Фазовые траектории π -системы имеют вид

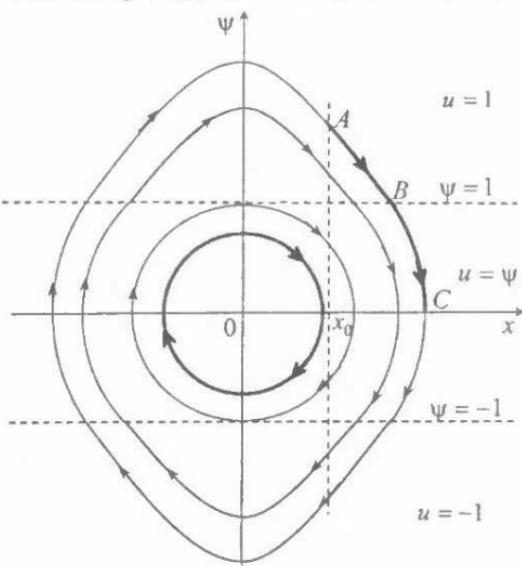


Рис. 32.27

Отметим, что оптимальная программа — релейная функция.

Пример 32.15. Рассмотрим задачу предыдущего примера с другим множеством значений управляемых воздействий

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} (u^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : u = \pm 1\}, \quad t \in T.$$

Условия теоремы существования не выполняются. Гамильтониан такой же, как в задаче (32.143). Из условия максимума получаем:

$$u(\psi) = 1, \text{ если } \psi > 0; \quad u(\psi) = -1, \text{ если } \psi < 0; \quad u(\psi) = \pm 1, \text{ если } \psi = 0.$$

Краевая задача принципа максимума такая же, как для примера 32.9. Поэтому решение будет таким же, т. е. для каждой пары (x_0, t^*) экстремаль не единственная и совпадает с экстремалами задачи (32.123) (фазовые траектории см. на рис. 32.14–32.16), за исключением особой: $u(t) \equiv 0, t \in T$. Оптимальные программы: $u^0(t) \equiv 1$ и $u^0(t) \equiv -1, t \in T$.

$$\psi = x^2 / 2 - x_0^2 / 2 + \psi_0, \quad \psi < -1;$$

$$\psi = -x^2 / 2 + x_0^2 / 2 + \psi_0, \quad \psi > 1;$$

$$\psi^2 + x^2 = \psi_0^2 + x_0^2, \quad |\psi| \leq 1.$$

Они изображены на рис. 32.27. Из него видно, что решение существует при любых x_0, t^* , причем не единственное. Одна из оптимальных программ имеет вид $u^0(t) \equiv 1, t \in [0, t_1[; u^0(t) = \psi(t), t \in [t_1, t^*]$, где $\psi(t), t \in T$, — компонента решения краевой задачи

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{\psi} = -x, \quad t \in [0, t_1[,$$

$$\dot{x} = \psi, \quad \dot{\psi} = -x, \quad t \in [t_1, t^*],$$

$$x(0) = x_0, \quad \psi(t_1) = 1, \quad \psi(t^*) = 0,$$

и соответствует дугам AB и BC фазового портрета (рис. 32.27).

§ 33. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

33.1. Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретных управляющих воздействий

Вернемся к задаче, исследованной в предыдущих разделах. Для упрощения выкладок ограничимся критерием качества типа Майера:

$$J(u) = \phi(x(t^*)) \rightarrow \min, \quad (33.1)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (33.2)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [0, t^*]. \quad (33.3)$$

В отличие от предыдущих разделов, где использовались кусочно-непрерывные управляющие воздействия, задачу (33.1) – (33.3) рассмотрим в классе дискретных управляющих воздействий.

Управляющее воздействие $u(t) \in U, t \in T$, называется *дискретным* (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^* - h\},$$

где $h = t^*/N$, N – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h .

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.

В принятом классе управляющих воздействий задача (33.1) – (33.3) эквивалентна задаче

$$J(u) = \phi(x(t^*)) \rightarrow \min, \quad (33.4)$$

$$x(t + h) = x(t) + g(x(t), u(t), h), \quad x(0) = x_0, \quad (33.5)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T_h, \quad (33.6)$$

где $g(x, u, h) = \int_0^h f(x(s), u) ds$, $x(s)$, $s \in [0, h[$, – решение уравнения (33.2) при $x(0) = x$, $u(s) = u$, $s \in [0, h[$. Задача (33.4) – (33.6) представляет специальную задачу нелинейного программирования с перемен-

ными $u(t)$, $x(t)$, $t \in T_h$, удовлетворяющими геометрическому ограничению (33.6) и ограничениям-равенствам (33.5). Она всегда имеет решение, если функция $\varphi(x)$, $x \in X$, непрерывна, а U – компакт.

Задачу (33.1) – (33.3) будем исследовать методом, учитывающим ее динамическую природу.

Понятия программы и оптимальной программы вводятся по аналогии с разд. 32.1. Формула приращения (32.23) критерия качества (33.1) сохраняется и для дискретных управляющих воздействий:

$$\Delta J(u^0) = - \int_0^{t^*} \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) dt + \eta. \quad (33.7)$$

Здесь $H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u)$, $\psi^0(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi, u^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T; \quad (33.8)$$

$$\psi^0(t^*) = - \frac{\partial \varphi(x^0(t^*))}{\partial x}, \quad (33.9)$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

$$\eta_1 = o_1(\|\Delta x(t^*)\|), \quad \eta_2 = - \int_0^{t^*} \psi^0(t) o_2(\|\Delta x(t)\|) dt, \quad (33.10)$$

$$\eta_3 = - \int_0^{t^*} \frac{\partial \Delta_{u(t)} H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t))}{\partial x} \Delta x(t) dt. \quad (33.11)$$

Для задачи (33.1) – (33.3) докажем необходимые условия оптимальности программы $u^0(t) \in U$, $t \in T$.

Теорема 33.1 (принцип квазимаксимума). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое достаточно малое число $h_* > 0$, что для каждого $0 < h < h_*$ оптимальная программа $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (33.1) – (33.3) вместе с соответствующими решениями $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in T$, систем (33.2) и (33.8), (33.9) удовлетворяет условию ε -максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u) - \varepsilon(t), \quad 0 < \varepsilon(t) \leq \varepsilon, \quad t \in T_h.$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. существует такое число $\varepsilon_* > 0$, что для каждого достаточно малого $h > 0$ найдутся момент $\theta = \theta(h) \in T_h$ и вектор $v = v(h) \in U$, при которых выполняется неравенство

$$H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta)) < H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), v) - \varepsilon_*$$

или, по-другому,

$$\Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta)) > \varepsilon_*.$$

Проверим программу $u^0(t)$, $t \in T$, с помощью вариации

$$\Delta_{\theta, v} u^0(t) = \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + h[, \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + h[, \end{cases} \quad t \in T_h. \quad (33.12)$$

Для соответствующего приращения траектории имеем:

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta];$$

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t), v) - f(x^0(t), u^0(t)), \quad t \in [\theta, \theta + h[, \quad \Delta x(\theta) = 0.$$

В силу интегральной непрерывности решений дифференциальных уравнений для достаточно малых $h > 0$ получим

$$\|\Delta x(t)\| \leq K_1 h, \quad t \in [\theta, \theta + h], \quad K_1 > 0,$$

причем K_1 не зависит от h . На промежутке $[\theta + h, t^*]$ приращение траектории удовлетворяет уравнению

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t), u^0(t)) - f(x^0(t), u^0(t)), \quad t \in [\theta + h, t^*[, \quad \|\Delta x(\theta + h)\| \leq K_1 h.$$

Из непрерывности решений дифференциальных уравнений по начальным данным следует, что для всех достаточно малых $h > 0$ выполняется неравенство

$$\|\Delta x(t)\| \leq K_2 h, \quad t \in [\theta + h, t^*], \quad K_2 > 0.$$

Таким образом, при достаточно малых $h > 0$ имеем оценку $\|\Delta x(t)\| \leq K h$, $t \in T$, $K = \max\{K_1, K_2\} > 0$. Следовательно, в формуле приращения (33.7) остаточный член в силу (33.10), (33.11) равен $\eta = o(h)$, а сама формула приращения принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) &= - \int_0^{0+h} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(\theta)) dt + o(\eta) = \\ &= -h \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta)) + o_1(h) < -h \varepsilon_* + o_1(h). \end{aligned} \quad (33.13)$$

Из (33.13) при достаточно малых $h > 0$ получим $\Delta J(u^0) < 0$, что противоречит оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in T$.

Теорема 33.2 (дискретный принцип максимума). Пусть в задаче (33.1) – (33.3) множество U – выпуклый компакт, функция $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, имеет вид

$$f(x, u) = f_0(x) + B(x)u, \quad (33.14)$$

где $f_0(x) \in \mathbf{R}^n$, $B(x) \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $x \in X$, – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда оптимальная программа $u^0(t)$, $t \in T$, вместе с соответствующими решениями $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in T$, систем (33.2), (33.14) и (33.8), (33.9) удовлетворяет условию максимума

$$\int_t^{t+h} H(x^0(s), \psi^0(s), u^0(s))ds = \max_{u \in U} \int_t^{t+h} H(x^0(s), \psi^0(s), u)ds, \quad t \in T_h. \quad (33.15)$$

Доказательство. Условие (33.15) в силу вида функции $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, принимает вид

$$\left(\int_t^{t+h} \psi^{0'}(s)B(x^0(s))ds \right) u^0(t) = \max_{u \in U} \left(\int_t^{t+h} \psi^{0'}(s)B(x^0(s))ds \right) u, \quad t \in T_h.$$

Предположим, что теорема неверна, т. е. существуют такие момент $\theta \in T_h$ и вектор $v \in U$, что выполняется неравенство

$$\left(\int_\theta^{t+h} \psi^{0'}(s)B(x^0(s))ds \right) (v - u^0(\theta)) = \alpha > 0. \quad (33.16)$$

Построим вектор

$$v(\varepsilon) = u^0(\theta) + \varepsilon(v - u^0(\theta)). \quad (33.17)$$

Поскольку U – выпуклое множество, то $v(\varepsilon) \in U$ для любого $\varepsilon \in [0, 1]$. Проверим программу $u^0(t) \in U$, $t \in T$, вариацией (33.12) с $v = v(\varepsilon)$. Оценим приращение траектории. Имеем:

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta];$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= f(x(t), v(\varepsilon)) - f(x^0(t), u^0(\theta)) = \\ &= f_0(x(t)) - f_0(x^0(t)) + B(x(t))v(\varepsilon) - B(x^0(t))u^0(\theta), \\ &t \in [\theta, \theta + h], \quad \Delta x(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta x(t) = \int_0^t B(x^0(s)) \left(v(\varepsilon) - u^0(\theta) \right) ds + \int_0^t \left(B(x(s)) - B(x^0(s)) \right) v(\varepsilon) ds + \\ + \int_0^t \left(f_0(x(s)) - f_0(x^0(s)) \right) ds.\end{aligned}\quad (33.18)$$

Поскольку $f_0(x)$, $B(x)$, $x \in X$, – непрерывно дифференцируемые функции, то они удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{aligned}\|f_0(x(s)) - f_0(x^0(s))\| \leq L_1 \|\Delta x(s)\|, \\ \|B(x(s)) - B(x^0(s))\| \leq L_2 \|\Delta x(s)\|, \\ s \in [\theta, \theta + h],\end{aligned}\quad (33.19)$$

где L_1 , L_2 – константы Липшица, которые в силу ограниченности траекторий можно выбрать не зависящими от ε . Из (33.18) с учетом (33.17), (33.19) получим

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t)\| \leq \varepsilon \int_0^t \|B(x^0(s))(v - u^0(\theta))\| ds + L_1 \int_0^t \|\Delta x(s)\| ds + \\ + L_2 \int_0^t \|\Delta x(s)\| ds \cdot \|v(\varepsilon)\| \leq \varepsilon \left(\int_0^{\theta+h} \|B(x^0(s))\| ds \right) \cdot \|v - u^0(\theta)\| + L \int_0^t \|\Delta x(s)\| ds,\end{aligned}$$

где $L = L_1 + L_2 \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \|v(\varepsilon)\|$. Обозначим

$$c = \left(\int_0^{\theta+h} \|B(x^0(s))\| ds \right) \|v - u^0(\theta)\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t)\| \leq \varepsilon c + L \int_0^t \|\Delta x(s)\| ds \leq \varepsilon c + L \int_0^t (\varepsilon c + L \int_0^s \|\Delta x(\tau)\| d\tau) ds = \\ = \varepsilon c + L \varepsilon c (t - \theta) + \varepsilon c \frac{L^2 (t - \theta)^2}{2} + L^3 \int_0^t (t - s) \int_0^s \|\Delta x(\tau)\| d\tau ds \leq \dots \leq \\ \leq \varepsilon c \left(1 + \frac{L(t - \theta)}{1!} + \frac{L^2 (t - \theta)^2}{2!} + \dots + \frac{L^k (t - \theta)^k}{k!} + \dots \right) = \varepsilon c e^{L(t-\theta)}.\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $t \in [\theta, \theta + h]$, $\varepsilon \in [0, 1]$ имеем

$$\|\Delta x(t)\| \leq K(v) \varepsilon,$$

где $K(v) = K_1(v)e^{Lh}$,

$$K_1(v) = h \sup_{s \in [\theta, \theta+h]} \|B(x^0(s))\| \|v - u^0(\theta)\|.$$

Пусть $t \in [\theta + h, t^*]$. Тогда

$$\Delta \dot{x}(t) = f_0(x(t)) - f_0(x^0(t)) + (B(x(t)) - B(x^0(t)))u^0(t), \quad \|\Delta x(\theta + h)\| \leq K\varepsilon.$$

Из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ следует $\|\Delta x(t)\| \leq \bar{K}\varepsilon$, $t \in [\theta + h, t^*]$, $\bar{K} > 0$.

Таким образом, для остаточных членов η_i , $i = \overline{1, 3}$ (33.10), (33.11) получим $\eta = o_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, а формула приращения (33.7) критерия качества примет вид

$$\Delta J(u^0) = -\varepsilon \left(\int_0^{\theta+h} \psi^{0'}(s) B(x^0(s)) ds \right) (v - u^0(\theta)) + o_1(\varepsilon) = -\varepsilon \alpha + o_1(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда в силу соотношения (33.16) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ следует неравенство $\Delta J(u^0) < 0$, которое противоречит оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in T$. ■

33.2. Оптимизация дискретных систем

Динамическая система называется *дискретной*, если ее поведение описывается рекуррентным уравнением

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \quad (33.20)$$

где $f(x, u) \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$, — непрерывная функция вместе с $\partial f / \partial x$.

В приложениях дискретные системы используются при исследовании многоэтапных (многошаговых) процессов. Для них управляющие воздействия $u(t)$, $t \in T$, суть функции дискретного аргумента.

Под траекторией дискретной системы (33.20), соответствующей начальному состоянию x_0 и управляющему воздействию $u(t)$, $t \in T$, понимается векторная функция дискретного аргумента $x(t)$, $t \in T^* = T \cup \{t^* = N\}$, вдоль которой выполняется (33.20). Ясно, что траектория системы (33.20) существует и единственна для любых начального

состояния и управляющего воздействия и легко строится пошагово слева направо.

Рассмотрим задачу оптимизации дискретной системы

$$\begin{aligned} J(u) &= \phi(x(N)) \rightarrow \min, \\ x(t+1) &= f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T. \end{aligned} \tag{33.21}$$

Задача (33.21) относится к специальному классу задач нелинейного программирования и имеет решение, если $\phi(x)$, $x \in X$, – непрерывная функция, а U – компакт.

Понятия программы и оптимальной программы вводим по аналогии с предыдущими разделами.

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$; $x^0(t)$, $t \in T^*$, – оптимальные программа и траектория задачи (33.21).

Наряду с программой $u^0(t)$, $t \in T$, рассмотрим программу $u(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, и вычислим приращение критерия качества

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) &= J(u^0) - J(u) = \phi(x(N)) - \phi(x^0(N)) = \\ &= \frac{\partial \phi'(x^0(N))}{\partial x} \Delta x(N) + o_1(\|\Delta x(N)\|). \end{aligned} \tag{33.22}$$

Здесь $\Delta x(t) = x(t) - x^0(t)$, $x(t)$, $t \in T^*$, – траектория системы (33.20), соответствующая программе $u(t)$, $t \in T$.

Для произвольных $\Delta x(t)$, $\psi(t) \in \mathbf{R}^n$, $t \in T$, $\Delta x(0) = 0$ справедливо равенство

$$\sum_{t \in T} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t \in T} \psi'(t-1) \Delta x(t) + \psi'(N-1) \Delta x(N). \tag{33.23}$$

Положим

$$\psi(N-1) = -\frac{\partial \phi(x^0(N))}{\partial x}. \tag{33.24}$$

Тогда из равенств (33.22), (33.23) получим

$$\Delta J(u^0) = -\sum_{t \in T} \psi'(t) \Delta x(t+1) + \sum_{t \in T} \psi'(t-1) \Delta x(t) + o_1(\|\Delta x(N)\|). \tag{33.25}$$

Поскольку $\Delta x(t)$, $t \in T^*$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta x(t+1) = f(x(t), u(t)) - f(x^0(t), u^0(t)), \quad \Delta x(0) = 0, \tag{33.26}$$

то, введя обозначение $H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u)$, запишем

$$\begin{aligned} \psi'(t)\Delta x(t+1) &= H(x(t), \psi(t), u(t)) - H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) = \\ &= \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) + \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} \Delta x(t) + \\ &\quad + o_2(\|\Delta x(t)\|). \end{aligned} \quad (33.27)$$

Положим

$$\psi(t-1) = \frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T. \quad (33.28)$$

Подставив (33.27) в (33.25) и учтя (33.28), получим формулу приращения критерия качества

$$\Delta J(u^0) = - \sum_{t \in T} \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) + \eta. \quad (33.29)$$

Здесь $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= o_1(\|\Delta x(N)\|), \quad \eta_2 = - \sum_{t \in T} o_2(\|\Delta x(t)\|), \\ \eta_3 &= - \sum_{t \in T} \frac{\partial \Delta_{u(t)} H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t))}{\partial x} \Delta x(t). \end{aligned} \quad (33.30)$$

Проверим программу $u^0(t)$, $t \in T$, следующей вариацией

$$\Delta_{\theta v} u^0(t) = \begin{cases} v - u^0(\theta), & t = \theta, \\ 0, & t \in T, t \neq \theta. \end{cases} \quad (33.31)$$

Подставив эту вариацию в уравнение (33.26), будем иметь:

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta];$$

$$\Delta x(\theta+1) = \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta)); \quad (33.32)$$

$$\Delta x(t+1) = f(x(t), u^0(t)) - f(x^0(t), u^0(t)), \quad t \in [\theta+1, N-1],$$

а из (33.29) получим

$$\Delta J(u^0) = -\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) + \eta, \quad (33.33)$$

причем $\eta_3 = 0$.

С помощью формулы (33.33) докажем необходимое условие оптимальности программ.

Теорема 33.3 (дискретный принцип максимума). Пусть для любых $x \in X$ выпукло множество

$$f(x, U) = \{y \in \mathbf{R}^n : y = f(x, u), u \in U\}. \quad (33.34)$$

Тогда вдоль оптимальной программы $u^0(t)$, $t \in T$, и соответствующих траекторий $x^0(t)$, $t \in T^*$, $\psi(t)$, $t \in T$, систем (33.20) и (33.24), (33.28) выполняется условие максимума

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u), \quad t \in T.$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. при некоторых $\theta \in T$, $v \in U$ выполняется неравенство

$$\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) = \alpha > 0. \quad (33.35)$$

В силу выпуклости множеств (33.34) для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ существует такой вектор $v(\varepsilon) \in U$, что

$$f(x^0(\theta), v(\varepsilon)) = f(x^0(\theta), u^0(\theta)) + \varepsilon \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta)). \quad (33.36)$$

В вариацию (33.31) вместо v подставим $v(\varepsilon)$. Непосредственным подсчетом из (33.32) получим:

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta];$$

$$\Delta x(\theta + 1) = \Delta_{v(\varepsilon)} f(x^0(\theta), u^0(\theta)) = \varepsilon \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta)),$$

т. е. $\|\Delta x(\theta + 1)\| \leq K_1 \varepsilon$, $K_1 > 0$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Аналогично будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta x(\theta + 2) &= f(x(\theta + 1), u^0(\theta + 1)) - f(x^0(\theta + 1), u^0(\theta + 1)) = \\ &= \frac{\partial f(x^0(\theta + 1), u^0(\theta + 1))}{\partial x} \Delta x(\theta + 1) + o(\|\Delta x(\theta + 1)\|) = \\ &= \varepsilon \frac{\partial f(x^0(\theta + 1), u^0(\theta + 1))}{\partial x} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta)) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ следует оценка $\|\Delta x(\theta + 2)\| \leq K_2 \varepsilon$, $K_2 > 0$.

Аналогичную оценку получим и для остальных $t \in [\theta + 3, N]$, т. е. при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|\Delta x(t)\| \leq \bar{K} \varepsilon, \quad \bar{K} > 0, \quad t \in T^*. \quad (33.37)$$

Подставив (33.37) в (33.30), будем иметь $|\eta| \leq K \varepsilon^2$, $\varepsilon \rightarrow 0$ ($K > 0$).

С учетом этой оценки и равенства (33.36) приращение (33.33) примет вид

$$\Delta J(u^0) = -\varepsilon \Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) + \eta \leq -\varepsilon \alpha + K\varepsilon^2.$$

Отсюда в силу (33.35) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ следует неравенство $\Delta J(u^0) < 0$, которое противоречит оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in T$. ■

Покажем, что предположение о выпуклости множества (33.34) существенно.

Пример 33.1. Рассмотрим задачу

$$J(u) = x_2(2) \rightarrow \min,$$

$$x_1(t+1) = x_1(t) + u, \quad x_2(t+1) = x_2(t) + x_1^2(t),$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$u(t) \in U = \{u : u = \pm 1\}, \quad t \in T = \{0, 1\}.$$

В этом примере множество $f(x, U) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} \right\}$ не выпукло.

Нетрудно проверить, что программа $u^0(0) = 1$, $u^0(1) = 1$ и соответствующая траектория $x_1^0(1) = 1$, $x_1^0(2) = 2$; $x_2^0(1) = 0$, $x_2^0(2) = 1$ оптимальны. Они не удовлетворяют условию максимума. Действительно, $H(x, \psi, u) = \psi_1(x_1 + u) + \psi_2(x_2 + x_1^2)$,

$$\psi_1(t-1) = \psi_1(t) + 2\psi_2(t)x_1^0(t); \quad \psi_2(t-1) = \psi_2(t);$$

$$\psi_1(N-1) = \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(N-1) = \psi_2(1) = -1; \quad \psi_1(0) = -2, \quad \psi_2(0) = -1.$$

Гамильтониан $H(x^0(0), \psi(0), u) = \psi_1(0)u = -2u$, $u \in U$, в точке $u = u(0) = 1$ достигает не максимума, а минимума.

33.3. Оптимизация квазинепрерывных систем

С появлением и бурным развитием вычислительной техники большие прикладные задачи решаются с помощью разностных методов. При этом используется переход от непрерывных динамических систем к дискретным системам специального вида, которые назовем квазинепрерывными.

Динамическую систему назовем *квазинепрерывной*, если ее поведение описывается уравнением

$$x(t+h) = f(x(t), u(t), h), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = \{0, h, 2h, \dots, t^* - h\}, \quad (33.38)$$

в котором $t^* = Nh$, N – натуральное число, функция $f(x, u, h) \in \mathbf{R}^n$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, $u \in U \subset \mathbf{R}^r$, $h > 0$, непрерывна вместе с $\partial f / \partial x$ и обладает следующим свойством

$f(x, u, h) \rightarrow x$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по $x \in X$, $u \in U$.

Понятия управляющих воздействий и решений уравнения (33.38) (траекторий) вводятся по аналогии с дискретными системами (разд. 33.2). Понятно, что решение уравнения (33.38) существует и единственno при каждом начальном векторе x_0 и управляющем воздействии.

Траектории квазинепрерывных систем обладают свойством, аналогичным свойствам траекторий непрерывных систем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \|x(t+h) - x(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in T, \text{ если } h < \delta. \quad (33.39)$$

Рассмотрим задачу оптимизации квазинепрерывной системы

$$\begin{aligned} J(u) &= \phi(x(t^*)) \rightarrow \min, \\ x(t+h) &= f(x(t), u(t), h), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (33.40)$$

Понятия программы и оптимальной программы вводятся по аналогии с разд. 32.1.

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, нетрудно получить формулу приращения критерия качества

$$\Delta J(u) = - \sum_{t \in T} \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), h) + \eta, \quad (33.41)$$

где $H(x, \psi, u, h) = \psi' f(x, u, h)$, $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$, η_i , $i = 1, 2, 3$, определяются по тем же формулам, что и в разд. 33.2, $\psi(t)$, $t \in T^*$, – решение сопряженной системы

$$\begin{aligned} \psi(t-h) &= \frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), h)}{\partial x}, \quad t \in T, \\ \psi(t^* - h) &= -\frac{\partial \phi(x^0(Nh))}{\partial x}. \end{aligned} \quad (33.42)$$

Справедливо следующее необходимое условие оптимальности программы.

Теорема 33.4 (принцип квазимаксимума). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $h_* > 0$, что при всех $0 < h < h_*$ оптимальная программа $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (33.40) вместе с соответствующими решениями $x^0(t)$, $\psi(t)$, $t \in T^*$, прямой и сопряженной (33.42) систем удовлетворяет условию квазимаксимума

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), h) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u, h) - \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \leq \varepsilon, \quad t \in T.$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. существует такое число $\varepsilon_* > 0$, что при любом сколь угодно малом $h > 0$ найдутся момент $\theta = \theta(h) \in T$ и вектор $v = v(h) \in U$, для которых выполняется неравенство

$$H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), h) < H(x^0(\theta), \psi(\theta), v, h) - \varepsilon_*,$$

т. е.

$$\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), h) - \varepsilon_* > 0. \quad (33.43)$$

Проверяющим программу $u^0(t)$, $t \in T$, вариацией (33.31) из разд. 33.2. Из свойства (33.39) функции $f(x, u, h)$, $x \in X$, $u \in U$, $h > 0$, для достаточно малых h следует оценка

$$\|\Delta x(t)\| \leq Kh, \quad K > 0, \quad t \in T. \quad (33.44)$$

В самом деле,

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta];$$

$$\Delta x(\theta + h) = \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), h).$$

Поскольку $f(x^0(\theta), u^0(\theta), h) \rightarrow x^0(\theta)$, $f(x^0(\theta), v, h) \rightarrow x^0(\theta)$ при $h \rightarrow 0$, то $\Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), h) \rightarrow \Delta x(\theta) = 0$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число δ , что как только $h < \delta$, то

$$\|\Delta x(\theta + h) - \Delta x(\theta)\| = \|\Delta x(\theta + h)\| \leq \varepsilon.$$

Взяв $K_1 > 0$ таким, что $\varepsilon = K_1 h$, получим оценку вида (33.44).

Для $t \in [\theta + 2h, Nh]$ последовательно получим оценку (33.44), используя условие Липшица

$$\|\Delta x(t + h)\| = \|f(x(t), u^0(t), h) - f(x^0(t), u^0(t), h)\| \leq L \|\Delta x(t)\|$$

и оценку вида (33.44) для $\|\Delta x(t)\|$ на предыдущем шаге.

Из формулы приращения (33.41) в силу неравенства (33.43) получим

$$\Delta J(u^0) = -\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), h) + o(h) < -\varepsilon_* + o(h),$$

т. е. для достаточно малых h выполняется неравенство $\Delta J(u^0) < 0$, что противоречит оптимальности программы $u^0(t)$, $t \in T$. ■

Пусть при каждом $x \in X$, $h > 0$ выпукло множество

$$f(x, U, h) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = f(x, u, h), u \in U\}.$$

Тогда для задачи (33.40) справедлив дискретный принцип максимума, формулировка и доказательство которого получается по аналогии с предыдущим разделом.

33.4. Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретно-импульсных управляющих воздействий

Вернемся снова к непрерывным динамическим системам, но теперь будем их оптимизировать в классе дискретно-импульсных управляющих воздействий. Под *дискретно-импульсным управляющим воздействием* будем понимать пару $(u(\cdot), v(\cdot))$ из дискретного управляющего воздействия $u(\cdot) = (u(t), t \in T = [0, t^*])$ с периодом квантования $h_1 > 0$ и импульсного управляющего воздействия $v(\cdot) = (v(t), t \in T_h)$, $T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^* = Nh\}$, N – натуральное число, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$, $t \in T$, $v(t) \in V \subset \mathbb{R}^m$, $t \in T_h$, для которых траектория $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $t \in T$, динамической системы описывается уравнениями (рис. 33.1)

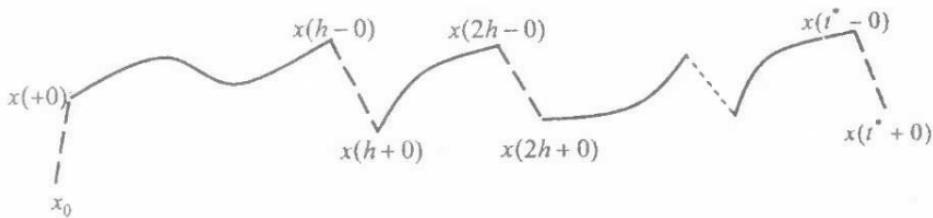


Рис. 33.1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \quad t \in T, \quad x(-0) = x_0, \\ x(\tau + 0) &= x(\tau - 0) + g(x(\tau - 0), v(\tau), h), \quad \tau \in T_h.\end{aligned}$$

Здесь $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, $g(x, v)$, $x \in X$, $v \in V$, – непрерывно дифференцируемые функции.

Импульсные управляющие воздействия моделируют в физических процессах кратковременные мощные управляющие воздействия.

В дальнейшем для простоты рассуждений будем считать, что периоды квантования управляющих воздействий $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ одинаковы и равны $h > 0$.

Каждому дискретно-импульсному управляющему воздействию $(u(\cdot), v(\cdot))$ и начальному состоянию x_0 соответствует единственная ку-

сочко-непрерывная траектория $x(t)$, $t \in T$, непрерывной динамической системы.

Во введенном классе управляющих воздействий рассмотрим задачу оптимизации непрерывной динамической системы

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \phi(x(t^* + 0)) \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(-0) = x_0, \\ x(\tau + 0) &= x(\tau - 0) + g(x(\tau - 0), v(\tau), h), \\ u(t) &\in U, \quad t \in T, \quad v(\tau) \in V, \quad \tau \in T_h. \end{aligned} \tag{33.45}$$

Понятия программы и оптимальной программы такие же, как в предыдущих разделах.

Пусть $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ – оптимальная программа, $x^0(t)$, $t \in T$, – соответствующая оптимальная траектория в задаче (33.45), $(u(\cdot), v(\cdot))$, $x(t)$, $t \in T$, – другие программа и соответствующая траектория. Получим формулу приращения критерия качества задачи (33.45)

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0, v^0) &= \phi(x(t^* + 0)) - \phi(x^0(t^* + 0)) = \frac{\partial \phi'(x^0(t^* + 0))}{\partial x} \Delta x(t^* + 0) + \\ &+ o_1(\|\Delta x(t^* + 0)\|). \end{aligned} \tag{33.46}$$

Положим

$$\psi(t^* + 0) = -\frac{\partial \phi(x^0(t^* + 0))}{\partial x}. \tag{33.47}$$

Преобразуем выражение $I = \psi'(t^* + 0) \Delta x(t^* + 0)$. Введя обозначения $H_f(x, \psi, u) = \psi' f(x, u)$, $H_g(x, \psi, v, h) = \psi' g(x, v, h)$, получим:

$$\begin{aligned} I &= \psi'(t^* + 0) \left(\Delta x(t^* - 0) + g(x(t^* - 0), v(t^*), h) - g(x(t^* - 0), v^0(t^*), h) \right) = \\ &= \psi'(t^* + 0) \Delta x(t^* - 0) + \Delta_{v(t^*)} H_g(x^0(t^* - 0), \psi(t^* + 0), v^0(t^*), h) + \\ &+ \frac{\partial H'_g(x^0(t^* - 0), \psi(t^* + 0), v(t^*), h)}{\partial x} \Delta x(t^* - 0) + o_N(\|\Delta x(t^* - 0)\|) = \\ &= \psi'(t^* - 0) \Delta x(t^* - 0) + \Delta_{v(t^*)} H_g(x^0(t^* - 0), \psi(t^* + 0), v^0(t^*), h) + \eta_N. \end{aligned}$$

Здесь

$$\psi(t^* - 0) = \psi(t^* + 0) - \frac{\partial H_g(x^0(t^* - 0), \psi(t^* + 0), v^0(t^*), h)}{\partial x}, \quad (33.48)$$

$$\eta_N = \frac{\partial \Delta_{v(t^*)} H'_g(x^0(t^* - 0), \psi(t^* + 0), v^0(t^*), h)}{\partial x} \Delta x(t^* - 0) + o_N(\|\Delta x(t^* - 0)\|).$$

Продолжим преобразование выражения I:

$$\begin{aligned} I &= \psi'(t^* - h + 0) \Delta x(t^* - h + 0) + \int_{t^*-h}^{t^*} \frac{d}{ds} (\psi'(s) \Delta x(s)) ds + \\ &\quad + \Delta_{v(t^*)} H_g(x^0(t^* - 0), \psi(t^* + 0), v^0(t^*), h) + \eta_N = \\ &= \psi'(t^* - h + 0) \Delta x(t^* - h - 0) + \sum_{t=t^*-h}^{t^*} \Delta_{v(t)} H_g(x^0(t - 0), \psi(t + 0), v^0(t), h) + \\ &\quad + \int_{t^*-h}^{t^*} \left(\dot{\psi}'(s) \Delta x(s) + \Delta_{u(s)} H_f(x^0(s), \psi(s), u^0(t^* - h)) \right) ds + \\ &\quad + \int_{t^*-h}^{t^*} \left(\frac{\partial H'_f(x^0(s), \psi(s), u(t^* - h))}{\partial x} \Delta x(s) \right) ds + \eta_{N-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(t^* - h - 0) &= \psi(t^* - h + 0) - \\ &- \frac{\partial H_g(x^0(t^* - h - 0), \psi(t^* - h + 0), v^0(t^* - h), h)}{\partial x}, \quad (33.49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{N-1} &= \eta_N + o_N(\|\Delta x(t^* - h - 0)\|) + \int_{t^*-h}^{t^*} \bar{o}_N(\|\Delta x(s)\|) ds + \\ &+ \frac{\partial \Delta_{v(t^*-h)} H'_g(x^0(t^* - h - 0), \psi(t^* - h + 0), v^0(t^* - h), h)}{\partial x} \Delta x(t^* - h - 0). \end{aligned}$$

Положим

$$\dot{\psi}(s) = - \frac{\partial H_f(x^0(s), \psi(s), u^0(t))}{\partial x}, \quad s \in [t, t+h], \quad t \in T_h \setminus t^*. \quad (33.50)$$

Переходя последовательно справа налево от отрезка $[ih, (i+1)h]$ к отрезку $[(i-1)h, ih]$ и учитывая формулы (33.47) – (33.50), окончательно получим

$$\Delta J(u^0, v^0) = - \sum_{t \in T_h} \Delta_{v(t)} H_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v^0(t), h) - \\ - \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} \Delta_{u(t)} H_f(x^0(s), \psi(s), u^0(t)) ds + \eta, \quad (33.51)$$

где $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= o_1(\|\Delta x(t^* + 0)\|), \\ \eta_2 &= - \sum_{t \in T_h \setminus 0} o_2(\|\Delta x(t-0)\|), \\ \eta_3 &= - \sum_{t \in T_h \setminus t^*} \int_t^{t+h} o_3(\|\Delta x(s)\|) ds, \\ \eta_4 &= - \sum_{t \in T_h} \frac{\partial \Delta_{v(t)} H'_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v^0(t), h)}{\partial x} \Delta x(t-0), \\ \eta_5 &= - \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} \frac{\partial \Delta_{u(t)} H'_f(x^0(s), \psi(s), u^0(t))}{\partial x} \Delta x(s) ds, \end{aligned}$$

$\psi(t)$, $t \in T$, – решение уравнения

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H_f(x^0(t), \psi, u^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T, \quad (33.52)$$

с начальным условием (33.47) и скачками

$$\psi(t-0) = \psi(t+0) - \frac{\partial H_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T_h. \quad (33.53)$$

Докажем необходимые условия оптимальности программ.

Теорема 33.5 (принцип квазимаксимума). Пусть функция $g(x, v, h)$, $x \in X$, $v \in V$, обладает свойством

$$g(x, v, h) \rightarrow x \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ равномерно по } x \in X, v \in V. \quad (33.54)$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $h_* > 0$, что при $0 < h < h_*$ оптимальная программа $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ задачи (33.45) вместе с

соответствующими траекториями $x^0(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, системы (33.45) и (33.52), (33.53) удовлетворяют условиям квазимаксимума:

$$H_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v^0(t), h) = \\ = \max_{v \in V} H_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v, h) - \varepsilon_g(t), \quad \varepsilon_g(t) \leq \varepsilon, \quad t \in T_h; \quad (33.55)$$

$$H_f(x^0(t+0), \psi(t+0), u^0(t)) = \\ = \max_{u \in U} H_f(x^0(t+0), \psi(t+0), u) - \varepsilon_f(t), \quad \varepsilon_f(t) \leq \varepsilon, \quad t \in T_h \setminus t^*. \quad (33.56)$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. существует такое число $\varepsilon_* > 0$, что при любом сколь угодно малом $h > 0$ найдется момент $\theta = \theta(h)$, для которого нарушается либо условие (33.55), либо условие (33.56).

Рассмотрим нарушение условия (33.56). Это означает, что существует вектор $u = u(h) \in U$, для которого выполняется неравенство

$$\Delta_u H_f(x^0(\theta+0), \psi(\theta+0), u^0(\theta)) - \varepsilon_* > 0. \quad (33.57)$$

Проварьируем программу $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ с помощью вариаций

$$\Delta_{\theta u} u^0(t) = \begin{cases} u - u^0(t), & t \in [\theta, \theta+h], \quad t \in T; \\ 0, & t \notin [\theta, \theta+h], \end{cases}$$

$$\Delta_\theta v^0(t) = 0, \quad t \in T_h.$$

Для соответствующего приращения траектории имеем:

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta+0];$$

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t), u) - f(x^0(t), u^0(\theta)), \quad t \in [\theta, \theta+h], \quad \Delta x(\theta+0) = 0.$$

В силу интегральной непрерывности решений дифференциальных уравнений для достаточно малых $h > 0$ получим

$$\|\Delta x(t)\| \leq K_1 h, \quad t \in [\theta, \theta+h], \quad K_1 > 0, \quad (33.58)$$

причем K_1 не зависит от h . В силу свойства (33.54) и неравенства (33.58) справедлива оценка

$$\|\Delta x(\theta+h+0)\| \leq \|\Delta x(\theta+h-0)\| + \|g(x(\theta+h-0), v^0(\theta+h), h) - g(x^0(\theta+h-0), v^0(\theta+h), h)\| \leq K_2 h, \quad h \rightarrow 0, \quad K_2 = K_1 + L > 0,$$

где L – константа Липшица функции $g(x, v, h)$.

Для $t \in [\theta + h + 0, t^* + 0]$ имеем:

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t), u^0(t)) - f(x^0(t), u^0(t)), \quad \|\Delta x(\theta + h + 0)\| \leq K_2 h,$$

$$\Delta x(t + 0) = \Delta x(t - 0) + g(x(t - 0), v^0(t), h) - g(x^0(t - 0), v^0(t), h), \quad t \in T_h.$$

В силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий на каждом отрезке $[\tau, \tau + h], \tau \in T_h \setminus t^*$, $\tau > \theta + h$, будет справедлива оценка вида (33.58). В точках $\tau + 0$ эта оценка справедлива в силу свойства (33.54).

Таким образом, для остаточных членов в формуле приращения (33.51) критерия качества будем иметь $\eta_i = o_i(h)$, $i = 1, 2, 3, 5$, $\eta_4 = 0$, $h \rightarrow 0$, а формула (33.51) примет вид

$$\Delta J(u^0, v^0) = -h \Delta_u H_f(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) + o(h).$$

Отсюда в силу (33.57) при достаточно малых $h > 0$ получим неравенство

$$\Delta J(u^0, v^0) < -h \varepsilon_* + o(h) < 0,$$

которое противоречит оптимальности программы $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$.

Пусть нарушается условие (33.55), т. е. существует такой вектор $v = v(h) \in V$, что выполняется неравенство

$$\Delta_v H_g(x^0(\theta - 0), \psi(\theta + 0), v^0(\theta)) - \varepsilon_* > 0. \quad (33.59)$$

Проверим программу $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ с помощью вариаций

$$\begin{aligned} \Delta_\theta u^0(t) &= 0, \quad t \in T, \\ \Delta_{\theta v} v^0(t) &= \begin{cases} v - v^0(\theta), & t = \theta, \\ 0, & t \neq \theta, t \in T_h. \end{cases} \end{aligned} \quad (33.60)$$

Для приращений траектории имеем:

$$\Delta x(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta - 0];$$

$$\Delta x(\theta + 0) = g(x^0(\theta), v, h) - g(x^0(\theta), v^0(\theta), h).$$

В силу свойства (33.54), как и в предыдущем разделе для функции $f(x, u, h)$, доказывается, что $\|\Delta x(\theta + h)\| \leq K h$, $h \rightarrow 0$ ($K > 0$). Для $t > \theta$ доказательство такой же оценки аналогично приведенному выше, если использовать теоремы о непрерывности решений от начальных данных и свойства (33.54). Отсюда следует, что $\eta_i = o_i(h)$, $i = 1, 2, 3$, $\eta_4 = \eta_5 = 0$, а формула приращения (33.51) в силу (33.59) примет вид

$$\Delta J(u^0, v^0) = -\Delta_v H_g(x^0(\theta-0), \psi(\theta+0), v^0(\theta), h) + o(h) < -\varepsilon_* + o(h).$$

При достаточно малых $h > 0$ выполняется неравенство $\Delta J(u^0, v^0) < 0$, которое противоречит оптимальности программы $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$. ■

Теорема 33.6 (принцип максимума). Пусть в задаче (33.45):

1) функция $f(x, u)$, $x \in X$, $u \in U$, имеет вид

$$f(x, u) = f_0(x) + B(x)u; \quad (33.61)$$

2) при каждом $x \in X$ выпукло множество

$$g(x, V, h) = \{y : y = g(x, v, h), v \in V\}; \quad (33.62)$$

3) U – выпуклый компакт.

Тогда оптимальная программа $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ вместе с соответствующими решениями $x^0(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, систем (33.45), (33.61) и (33.47), (33.52), (33.53) удовлетворяет условиям максимума

$$\int_t^{t+h} H_f(x^0(s), \psi(s), u^0(s))ds = \max_{u \in U} \int_t^{t+h} H_f(x^0(s), \psi(s), u)ds, \quad t \in T_h, \quad (33.63)$$

$$\begin{aligned} H_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v^0(t), h) &= \\ &= \max_{v \in V} H_g(x^0(t-0), \psi(t+0), v, h), \quad t \in T_h. \end{aligned} \quad (33.64)$$

Доказательство. Справедливость условия (33.63) доказывается в полной аналогии с доказательством теоремы 33.2. При этом используется вариация

$$\Delta_{\theta u} u^0(t) = \begin{cases} \varepsilon(u - u^0(\theta)), & t \in [\theta, \theta + h[, \quad t \in T; \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + h[, \end{cases}$$

$$\Delta_{\theta} v^0(t) = 0, \quad t \in T_h, \quad \varepsilon \in]0, 1[.$$

При доказательстве условия (33.64) используем методику доказательства теоремы 33.3 с использованием вариации $\Delta u^0(t) = 0$, $t \in T$, и (33.60), в которой вместо v возьмем вектор $v(\varepsilon) \in V$, для которого выполняется равенство

$$\begin{aligned} g(x^0(\theta), v(\varepsilon), h) &= g(x^0(\theta), v^0(\theta), h) + \\ &+ \varepsilon(g(x^0(\theta), v, h) - g(x^0(\theta), v^0(\theta), h)), \quad \varepsilon \in (0, 1), \end{aligned}$$

справедливое в силу выпуклости множества (33.62). ■

§ 34. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В теории управления, развитие которой привело к постановке и решению первых задач оптимального управления, различают два основных способа управления: *а) программное (управление по разомкнутому контуру); б) позиционное (управление с помощью обратной связи, по замкнутому контуру)*. Схематически эти способы управления изображены на рис. 34.1.

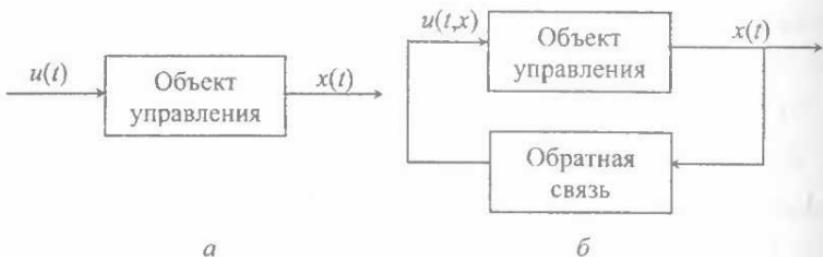


Рис. 34.1

Программные управляющие воздействия описываются с помощью функции времени $u(t)$, $t \in T$, которая формируется до начала процесса управления и не корректируется в процессе управления (рис. 34.1, а).

Позиционные управляющие воздействия описываются с помощью функций $u(t, x)$, $t \in T$, $x \in X$, которые зависят от времени и состояния и также формируются до начала процесса управления. Текущие значения $u^*(t)$ позиционного управляющего воздействия зависят как от текущего времени, так и от текущего состояния $x^*(t)$: $u^*(t) = u(t, x^*(t))$, $t \in T$.

На практике предпочтение отдают, как правило, управлению с обратной связью (рис. 34.1, б), поскольку при этом эффективно парируются вредные возмущения, неизбежно возникающие в процессе управления.

Как видно из приведенного выше материала, принцип максимума связан с программными управляющими воздействиями. В теории оптимального управления основным методом исследования позиционных управляющих воздействий является динамическое программирование Беллмана (гл. 6). Ниже приведены элементы динамического программирования в приложении к задачам оптимального управления.

34.1. Задача оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управляемых воздействий

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = \phi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad x(t^*) \in X^* \subset \mathbb{R}^n, \quad (34.1)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [0, t^*],$$

в предположении, что она имеет решение.

Следуя динамическому программированию (гл. 6), погрузим задачу (34.1) в семейство задач

$$J_{\tau, z}(u) = \phi(x(t^*)) + \int_{\tau}^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(\tau) = z, \quad x(t^*) \in X^*, \quad (34.2)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*],$$

зависящих от скаляра $\tau \in T$ и n -вектора z .

Пару (τ, z) назовем *позицией* в задаче (34.1). Обозначим через

$$B(\tau, z) = \min_{u(t|\tau, z)} J_{\tau, z}(u)$$

минимальное значение критерия качества в задаче (34.2) для позиции (τ, z) . Если для позиции (τ, z) задача (34.2) не имеет решения, то положим $B(\tau, z) = +\infty$. Пусть

$$X_{\tau} = \{z \in \mathbb{R}^n : B(\tau, z) < +\infty\}.$$

Функцию

$$B(\tau, z), \quad z \in X_{\tau}, \quad \tau \in T, \quad (34.3)$$

называют *функцией Беллмана*.

Получим уравнение, которому удовлетворяет функция (34.3). Для этого используем принцип оптимальности, приведенный в разд. 24.3. Промежуток $T(\tau)$ разобьем на два участка: $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ и $[\tau + \Delta\tau, t^*]$, где $\Delta\tau > 0$ – достаточно малое число. На первом участке выберем управляющее воздействие в виде $u(t) = v(t)$, где $v(t) \in U$, $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$, – произвольная кусочно-непрерывная функция, при которой объект

управления в момент $\tau + \Delta\tau$ попадает в такое состояние $x(\tau + \Delta\tau)$, что для позиции $(\tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau))$ существует решение задачи (34.2). На втором участке в качестве управляющего воздействия возьмем оптимальную программу $u(t) = u^0(t | \tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau))$, $t \in [\tau + \Delta\tau, t^*]$, для позиции $(\tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau))$.

На построенном управляющем воздействии $u(t)$, $t \in T(\tau)$, критерий качества принимает значение

$$\begin{aligned} J_{\tau,z}(u) &= \varphi(x^0(t^* | \tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau))) + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f_0(x(t), v(t)) dt + \\ &+ \int_{\tau + \Delta\tau}^{t^*} f_0(x^0(t | \tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau)), u^0(t | \tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau))) dt = \\ &= B(\tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau)) + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f_0(x(t), v(t)) dt \geq B(\tau, z). \end{aligned} \quad (34.4)$$

Если на первом участке $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ взять фрагмент оптимальной программы $u(t) = u^0(t) = u^0(t | \tau, z)$, то получим

$$J_{\tau,z}(u^0) = B(\tau + \Delta\tau, x^0(\tau + \Delta\tau)) + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt = B(\tau, z). \quad (34.5)$$

Предположим, что функция Беллмана гладкая. Соотношения (34.4) и (34.5) запишем в виде

$$\frac{B(\tau + \Delta\tau, x(\tau + \Delta\tau)) - B(\tau, z)}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f_0(x(t), v(t)) dt \geq 0,$$

$$\frac{B(\tau + \Delta\tau, x^0(\tau + \Delta\tau)) - B(\tau, z)}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt = 0.$$

При $\Delta\tau \rightarrow 0$ из этих соотношений следует

$$\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} + \frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \geq 0, \quad (34.6)$$

$$\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} + \frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, u^0(\tau, z)) + f_0(z, u^0(\tau, z)) = 0, \quad (34.7)$$

где $v = \lim_{t \rightarrow \tau+0} v(t)$, $u^0(\tau, z) = \lim_{t \rightarrow \tau+0} u^0(t | \tau, z)$.

Сравнивая соотношения (34.6), (34.7), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} + \frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, u^0(\tau, z)) + f_0(z, u^0(\tau, z)) = \\ & = \min_{v \in U} \left(\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} + \frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \right), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T. \end{aligned} \quad (34.8)$$

В силу независимости первого слагаемого от параметра v из равенств (34.7), (34.8) имеем

$$-\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \left(\frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \right), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T. \quad (34.9)$$

Уравнение в частных производных (34.9) называется *уравнением Беллмана*. Выделяя из семейства (34.2) задачу с $\tau = t^*$, находим граничное условие для уравнения Беллмана

$$B(t^*, z) = \begin{cases} \phi(z), & \text{если } z \in X^*, \\ +\infty, & \text{если } z \notin X^*. \end{cases} \quad (34.10)$$

Согласно приведенным вычислениям вектор

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau | \tau, z),$$

доставляющий минимум в правой части соотношения (34.9), представляет значение оптимального управляющего воздействия для позиции (τ, z) . Функция

$$u^0(\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T,$$

называется *позиционным решением (оптимальной обратной связью)* задачи (34.1). Она удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, u^0(\tau, z)) + f_0(z, u^0(\tau, z)) = \\ & = \min_{v \in U} \left(\frac{\partial B'(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \right), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T. \end{aligned} \quad (34.11)$$

Как следует из приведенных выше выкладок, уравнение Беллмана и позиционное решение являются необходимыми условиями оптимальности в задачах оптимального управления с гладкой функцией Беллмана.

Соотношения (34.9), (34.11) используем для формулировки достаточных условий оптимальности.

Теорема 34.1. Пусть: 1) $B(t, x)$, $x \in X_t$, $t \in T$, — гладкое решение уравнения Беллмана (34.9) с граничным условием (34.10); 2) функция $u^0(t, x)$, $x \in X_t$, $t \in T$, удовлетворяет равенству (34.11); 3) уравнение

$$\dot{x} = f(x, u^0(t, x)), \quad x(0) = x_0,$$

имеет решение $x^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяющее условию $x^0(t^*) \in X^*$. Тогда программа $u^0(t) = u^0(t, x^0(t))$, $t \in T$, является оптимальной в задаче (34.1).

Доказательство. Пусть $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$ — произвольные программа и соответствующая траектория. Из равенств (34.9) – (34.11) следуют соотношения

$$\frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial t} + \frac{\partial B'(t, x^0(t))}{\partial x} f(x^0(t), u^0(t)) + f_0(x^0(t), u^0(t)) = 0,$$

$$\frac{\partial B(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial B'(t, x(t))}{\partial x} f(x(t), u(t)) + f_0(x(t), u(t)) \geq 0,$$

которые можем переписать в виде

$$\left. \frac{dB(t, x)}{dt} \right|_{\begin{subarray}{l} u^0(t) \\ x^0(t) \end{subarray}} + f_0(x^0(t), u^0(t)) = 0, \quad \left. \frac{dB(t, x)}{dt} \right|_{\begin{subarray}{l} u(t) \\ x(t) \end{subarray}} + f_0(x(t), u(t)) \geq 0.$$

Проинтегрируем последние соотношения вдоль $u^0(\cdot)$, $u(\cdot)$ и используем граничное условие (34.10):

$$B(t^*, x^0(t^*)) - B(0, x^0(0)) + \int_0^{t^*} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt =$$

$$= \varphi(x^0(t^*)) - B(0, x_0) + \int_0^{t^*} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt = 0,$$

$$B(t^*, x(t^*)) - B(0, x(0)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt =$$

$$= \varphi(x(t^*)) - B(0, x_0) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \geq 0.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} J(u^0) &= \varphi(x^0(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt = B(0, x_0) \leq \\ &\leq \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt = J(u), \end{aligned}$$

т. е. $u^0(t)$, $t \in T$, – оптимальная программа. ■

К сожалению, не каждая задача оптимального управления обладает гладкой функцией Беллмана.

Пример 34.1. Рассмотрим задачу быстродействия, исследованную в разд. 32.9 (пример 32.2):

$$\begin{aligned} t^* &\rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = z_1, \quad x_2(0) = z_2, \\ x_1(t^*) &= x_2(t^*) = 0, \quad u(t) \in U = \{u : |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, t^*]. \end{aligned}$$

Функцией Беллмана в этой задаче является время быстродействия $t^{*0} = t^{*0}(z)$ для состояния $z = (z_1, z_2)$, которое в данной задаче является позицией. Если вычисления, выполненные в примере 32.2 для начального состояния $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, повторить для произвольного состояния $z = (z_1, z_2)$, то получим, что время быстродействия равно:

$$t^{*0}(z) = B(z) = \begin{cases} -z_2 + \sqrt{-z_1 + \frac{1}{2}z_2^2}, & \text{если } z_1 < -\frac{1}{2}z_2 |z_1|, \\ z_2 + \sqrt{z_1 + \frac{1}{2}z_2^2}, & \text{если } z_1 > -\frac{1}{2}z_2 |z_1|. \end{cases} \quad (34.12)$$

При

$$z_1 = -\frac{1}{2}z_2 |z_1| \quad (34.13)$$

оба выражения в (34.12) дают один и тот же результат.

Из (34.12) следует, что на линии (34.13) функция $B(z)$, $z \in \mathbb{R}^2$, недифференцируема.

Линия уровня функции $B(z)$, $z \in \mathbb{R}^2$ (множество точек с одинаковым временем $B(z) \equiv \text{const}$), изображена на рис. 34.2.

В настоящее время динамическое программирование строго основано в рамках негладкого анализа с помощью обобщенных производных.

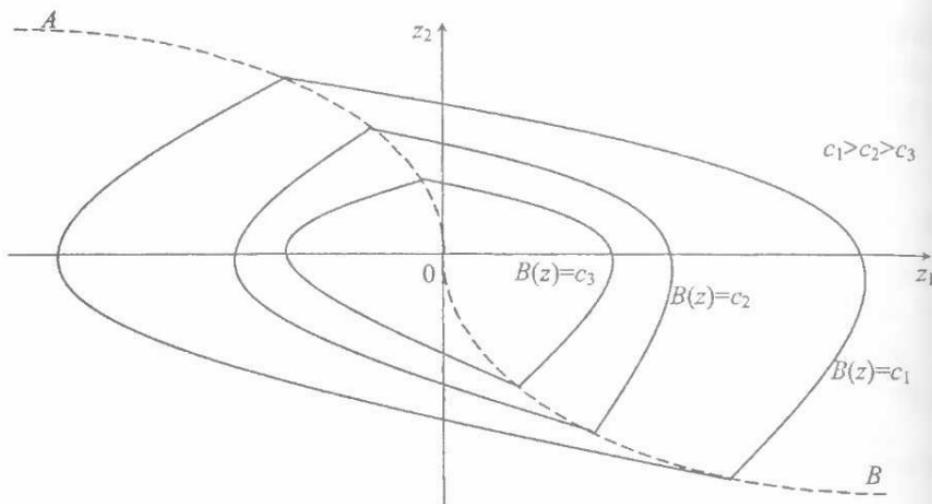


Рис. 34.2

Схема применения динамического программирования состоит в следующем.

Для задачи составляется уравнение Беллмана. По решению уравнения строится позиционное решение. Эффективно решить уравнения Беллмана удается в редких случаях (см. разд. 35.2). В общем случае необходимо привлекать численные методы. При этом основная трудность состоит в табулировании функции многих переменных. Этую трудность Беллман назвал «проклятием размерности».

34.2. Связь динамического программирования с принципом максимума

Рассмотрим задачу Больца со свободными правым концом траектории:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (34.14)$$

$$u(t) \in U \quad t \in T.$$

Уравнение Беллмана и граничное условие остаются прежними (34.9), (34.10), где $X^* = \mathbb{R}^n$.

Пусть $f(x, u)$, $f_0(x, u)$, $\varphi(x)$, $x \in X$, $u \in U$, — непрерывные функции вместе с $\partial f / \partial x$, $\partial f_0 / \partial x$, $\partial \varphi / \partial x$; $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, — оптимальные

программа и траектория задачи (34.14), $B(t, x)$, $x \in X$, $t \in T$, — функция Беллмана для нее, причем $B(t, x) \in C^{(2)}$; $\psi(t)$, $t \in T$, — решение сопряженной системы, т. е.

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \psi(t) + \frac{\partial f_0(x^0(t), u^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T, \\ \psi(t^*) &= -\frac{\partial \varphi(x^0(t^*))}{\partial x}.\end{aligned}\tag{34.15}$$

Покажем, что

$$\psi(t) \equiv -\frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T,\tag{34.16}$$

а уравнение Беллмана (34.9) представляет собой условие максимума.

В самом деле, из (34.9) следует:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial t} &\equiv \frac{\partial B'(t, x^0(t))}{\partial x} f(x^0(t), u^0(t)) + f_0(x^0(t), u^0(t)), \quad t \in T, \\ -\frac{\partial B(t, x)}{\partial t} &\leq \frac{\partial B'(t, x)}{\partial x} f(x, u^0(t)) + f_0(x, u^0(t)), \quad x \neq x^0(t), \quad t \in T,\end{aligned}$$

т. е. функция $\partial B(t, x)/\partial t + (\partial B'(t, x)/\partial x)f(x, u^0(t)) + f_0(x, u^0(t))$ в каждый момент $t \in T$ по аргументу x достигает максимума в точке $x = x^0(t)$. Запишем для нее условие стационарности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B(t, x^0(t))}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 B(t, x^0(t))}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t)) + \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial x} + \\ + \frac{\partial f_0(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} = 0, \quad t \in T.\end{aligned}\tag{34.17}$$

С другой стороны, вдоль $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial x} = \frac{\partial^2 B(t, x^0(t))}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t)) + \frac{\partial^2 B(t, x^0(t))}{\partial x \partial t}, \quad t \in T.\tag{34.18}$$

Из (34.17) и (34.18) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial x} = \\ = - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \frac{\partial B(t, x^0(t))}{\partial x} - \frac{\partial f_0(x^0(t), u^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (34.19)$$

Кроме того, справедливо условие

$$\frac{\partial B(t^*, x^0(t^*))}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x^0(t^*))}{\partial x}. \quad (34.20)$$

Таким образом, сравнивая (34.15) и (34.16), (34.20), получим тождество (34.16).

Подставив (34.16) в (34.9) с заменой z на $x^0(t)$, придем к условию максимума.

34.3. Применение динамического программирования к специальным задачам оптимального управления

34.3.1. Дискретные задачи оптимального управления. Рассмотрим задачу оптимального управления дискретным процессом (разд. 33.2)

$$\begin{aligned} J(u) = \phi(x(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} f_0(x(t), u(t)) \rightarrow \min, \\ x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) \in U, \quad t \in T = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \end{aligned} \quad (34.21)$$

Следуя методу динамического программирования, погрузим задачу (34.21) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_{\tau, z}(u) = \phi(x(N)) + \sum_{t=\tau}^{N-1} f_0(x(t), u(t)) \rightarrow \min, \\ x(\tau+1) = f(x(\tau), u(\tau)), \quad x(\tau) = z, \\ u(t) \in U, \quad t \in T(\tau) = \{\tau, \tau+1, \tau+2, \dots, N-1\}, \end{aligned} \quad (34.22)$$

зависящих от скаляра $\tau \in T$ и n -вектора z . Как и в разд. 34.1, пару (τ, z) назовем позицией в задаче (34.21). Через $B(\tau, z) = \min_{u(\cdot)} J(u)$ обозначим минимальное значение критерия качества задачи (4.22) для позиции (τ, z) . Здесь $u(\cdot) = (u(t), t \in T(\tau))$.

Множество $T(\tau)$ разобьем на два подмножества: первое составлено из одного момента $\{\tau\}$, второе – из остальных моментов $\{\tau+1, \dots, N-1\}$.

В момент $t = \tau$ выберем произвольное управляющее воздействие $u(\tau) = v \in U$. Тогда объект управления в момент $\tau + 1$ перейдет в состояние $x(\tau + 1) = f(x(\tau), v) = f(z, v)$. На множестве $\{\tau + 1, \dots, N - 1\}$ в качестве управляющих воздействий возьмем оптимальную программу $u(t) = u^0(t | \tau + 1, x(\tau + 1))$, $t \in \{\tau + 1, \dots, N - 1\}$, для позиции $(\tau + 1, x(\tau + 1))$.

На построенных управляющих воздействиях $u(t)$, $t \in T(\tau)$, критерий качества принимает значение

$$\begin{aligned} J_{\tau, z}(u) &= \varphi(x^0(N | \tau, x(\tau + 1))) + f_0(z, v) + \\ &+ \sum_{t=\tau+1}^{N-1} f_0(x^0(t | \tau + 1, x(\tau + 1)), u^0(t | \tau + 1, x(\tau + 1))) = \\ &= B(\tau + 1, x(\tau + 1)) + f_0(z, v) = \\ &= B(\tau + 1, f(z, v)) + f_0(z, v) \geq B(\tau, z). \end{aligned} \quad (34.23)$$

Если вместо v в момент τ взять фрагмент оптимальной программы $u(\tau) = u^0(\tau) = u^0(\tau | \tau, z)$ для позиции (τ, z) , то получим

$$\begin{aligned} J_{\tau, z}(u^0) &= B(\tau + 1, x^0(\tau + 1)) + f_0(z, u^0(\tau)) = \\ &= B(\tau + 1, f(z, u^0(\tau))) + f_0(z, u^0(\tau)) = B(\tau, z). \end{aligned} \quad (34.24)$$

Сравнивая соотношения (34.23) и (34.24), придем к уравнению Беллмана

$$B(\tau, z) = \min_{v \in U} (B(\tau + 1, f(z, v)) + f_0(z, v)), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T. \quad (34.25)$$

Границное условие следует из определения $B(\tau, z)$:

$$B(N, z) = \varphi(z), \quad z \in \mathbf{R}^n. \quad (34.26)$$

Позиционное решение $u^0(\tau, z)$, $z \in X_\tau$, $\tau \in T$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} B(\tau + 1, f(z, u^0(\tau, z)) + f_0(z, u^0(\tau, z))) &= \\ &= \min_{v \in U} B(\tau + 1, f(z, v) + f_0(z, v)). \end{aligned} \quad (34.27)$$

Дальнейшие операции по решению задачи (34.21) с использованием уравнения Беллмана (34.25), граничного условия (34.26) и соотношения (34.27) стандартны для динамического программирования.

Как и для непрерывных систем, уравнение Беллмана и соотношение (34.27) для позиционного решения $u^0(\tau, z) = u^0(\tau | \tau, z)$, $z \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in T$, являются необходимыми условиями оптимальности в задаче (34.21). Их можно использовать и для формулировки достаточных условий оптимальности.

Теорема 34.2. Если $B(t, x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in T$, – решение уравнения Беллмана (34.25) с граничным условием (34.26), функция $u^0(t, x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in T$, удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & B(t+1, f(x, u^0(t, x))) + f_0(x, u^0(t, x)) = \\ & = \min_{v \in U} (B(t+1, f(x, v)) + f_0(x, v)), \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (34.28)$$

$x^0(t)$, $t \in T$, – решение уравнения

$$x(t+1) = x(t) + f(x(t), u^0(t, x(t))), \quad x(0) = x_0,$$

то $u^0(t) = u^0(t, x^0(t))$, $t \in T$, – оптимальная программа в задаче (34.21).

Доказательство. Пусть $u(t)$, $x(t)$, $t \in T$, – произвольные программы и соответствующая траектория системы (34.21). Из равенств (34.25), (34.28) следуют соотношения

$$\begin{aligned} & -B(t, x^0(t)) + B(t+1, f(x^0(t), u^0(t))) + f_0(x^0(t), u^0(t)) = 0, \quad t \in T, \\ & -B(t, x(t)) + B(t+1, f(x(t), u(t))) + f_0(x(t), u(t)) \geq 0, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Просуммировав эти соотношения по $t = 0, 1, \dots, N-1$, получим

$$\begin{aligned} & -B(0, x_0) + \varphi(x^0(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} f_0(x^0(t), u^0(t)) = 0, \\ & -B(0, x_0) + \varphi(x(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} f_0(x(t), u(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} J(u^0) &= \varphi(x^0(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} f_0(x^0(t), u^0(t)) = B(0, x_0) \leq \\ &\leq \varphi(x(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} f_0(x(t), u(t)) = J(u). \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что $u^0(t)$, $t \in T$, – оптимальная программа. ■

4.3.2. Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретных управляющих воздействий. Рассмотрим задачу оптимального управления типа Больца

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T = [0, t^*], \end{aligned} \tag{34.29}$$

в классе дискретных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T$, с периодом квантования $h > 0$ (разд. 33.1).

Погрузим задачу (34.29) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_{\tau,z}(u) &= \varphi(x(t^*)) + \int_{\tau}^{t^*} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad x(\tau) = z, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*], \end{aligned}$$

где $\tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, (N-1)h = t^* - h\}$, $z \in \mathbf{R}^n$.

Функцию Беллмана определим, как и в разд. 34.1:

$$B(\tau, z) = \min_u J_{\tau,z}(u), \quad \tau \in T_h, \quad z \in \mathbf{R}^n.$$

Промежуток $[\tau, t^*]$ разобьем на два участка: $[\tau, \tau + h[$ и $[\tau + h, t^*]$. На первом участке положим $u(t) = u(\tau) = v \in U$, $t \in [\tau, \tau + h[$; на втором возьмем оптимальную программу $u(t) = u^0(t | \tau + h, x(\tau + h))$, $t \in [\tau + h, t^*]$, для позиции $(\tau + h, x(\tau + h))$, где $x(\tau + h)$ – состояние, в которое объект управления попадает в момент $\tau + h$ при управляющем воздействии $u(t) \equiv v$, $t \in [\tau, \tau + h[$, и начальном состоянии $x(\tau) = z$.

По аналогии с разд. 34.1 получим:

$$J_{\tau,z}(u) = \varphi(x^0(t^* | \tau + h, x(\tau + h))) + \int_{\tau}^{\tau+h} f_0(x(t), v) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\tau+h}^t f_0(x^0(t|\tau+h, x(\tau+h)), u^0(t|\tau+h, x(\tau+h))) dt = \\
& = B(\tau+h, x(\tau+h)) + \int_{\tau}^{\tau+h} f_0(x(t), v) dt \geq B(\tau, z). \quad (34.30)
\end{aligned}$$

Если на первом участке $[\tau, \tau+h]$ взять фрагмент оптимальной программы $u(t) = u^0(t) = u^0(t|\tau, z) \equiv u^0(\tau|\tau, z)$, то, очевидно, будем иметь

$$J_{\tau,z}(u^0) = B(\tau+h, x^0(\tau+h)) + \int_{\tau}^{\tau+h} f_0(x^0(t), u^0(t)) dt = B(\tau, z). \quad (34.31)$$

Из соотношений (34.30), (34.31) следует:

$$\begin{aligned}
B(\tau, z) &= \min_{v \in U} \left(B\left(\tau+h, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x(t|\tau, z), v) dt\right) + \int_{\tau}^{\tau+h} f_0(x(t|\tau, z), v) dt \right), \\
&\quad \tau \in T_h, z \in \mathbf{R}^n.
\end{aligned}$$

Здесь $x(t|\tau, z)$, $t \in [\tau, \tau+h]$, — решение уравнения $\dot{x} = f(x, v)$, $x(\tau) = z$.

Позиционное решение $u^0(\tau, z)$, $z \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in T$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}
& B\left(\tau+h, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x(t|\tau, z), u^0(\tau, z)) dt\right) + \\
& + \int_{\tau}^{\tau+h} f_0(x(t|\tau, z), u^0(\tau, z)) dt = \\
& = \min_{v \in U} \left(B\left(\tau+h, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x(t|\tau, z), v) dt\right) + \int_{\tau}^{\tau+h} f_0(x(t|\tau, z), v) dt \right), \\
&\quad \tau \in T_h, z \in \mathbf{R}^n.
\end{aligned}$$

34.3.3. Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретно-импульсных управляющих воздействий. Рассмотрим задачу оптимального управления, исследованную в разд. 33.4 с помощью принципа максимума:

$$\begin{aligned}
J(u, v) &= \varphi(x(t^* + 0)) \rightarrow \min, \\
\dot{x} &= f(x, u), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(-0) = x_0, \\
x(t+0) &= g(x(t-0), v(t)), \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^* = Nh\}, \\
u(t) &\in U, \quad t \in T, \quad v(t) \in V, \quad t \in T_h.
\end{aligned} \tag{34.32}$$

Здесь $U \in \mathbf{R}^r$, $V \in \mathbf{R}^m$, N – натуральное число, $u(t)$, $t \in T$, – дискретные управляющие воздействия, $v(t)$, $t \in T_h$, – импульсные управляющие воздействия с одинаковым периодом квантования $h > 0$.

Погрузим задачу (34.32) в два семейства задач

$$\begin{aligned}
J_{\tau, z}(u, v) &= \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min, \\
\dot{x} &= f(x, u), \quad t \in T(\tau - 0) = [\tau - 0, t^*], \quad x(\tau - 0) = z, \\
x(t+0) &= g(x(t-0), v(t)), \quad t \in T_h(\tau - 0) = \{\tau, \tau + h, \dots, t^*\}, \\
u(t) &\in U, \quad t \in T(\tau - 0), \quad v(t) \in V, \quad t \in T_h(\tau - 0);
\end{aligned} \tag{34.33}$$

и

$$\begin{aligned}
J_{\tau, z}(u, v) &= \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min, \\
\dot{x} &= f(x, u), \quad t \in T(\tau + 0) = [\tau + 0, t^*], \quad x(\tau + 0) = z, \\
x(t+0) &= g(x(t-0), v(t)), \quad t \in T_h(\tau + 0) = \{\tau + h, \dots, t^*\}, \\
u(t) &\in U, \quad t \in T(\tau + 0), \quad v(t) \in V, \quad t \in T_h(\tau + 0),
\end{aligned} \tag{34.34}$$

зависящих от $\tau \in T_h$, $z \in \mathbf{R}^n$. Пары $(\tau - 0, z)$, $(\tau + 0, z)$ назовем левой и правой позициями в момент τ .

Пусть $B(\tau \pm 0, z)$ – минимальное значение критерия качества $J_{\tau, z}(u, v)$ для позиций $(\tau \pm 0, z)$. Рассмотрим первое семейство задач (34.33). Разобьем множество $T(\tau + 0)$ на два участка. Первый из них состоит из точки τ , второй имеет вид $[\tau, t^*]$. На первом возьмем $v(\tau) = v \in V$, где v – произвольный вектор. Под действием этого управляющего воздействия система перейдет из состояния z в состояние $x(\tau + 0) = g(z, v)$.

На втором участке возьмем управляющие воздействия, оптимальные относительно позиции $(\tau + 0, x(\tau + 0))$: $u(t) = u^0(t | \tau + 0, x(\tau + 0))$, $t \in [\tau, t^*]$; $v(t) = v^0(t | \tau + 0, x(\tau + 0))$, $t \in \{\tau + h, \dots, t^*\}$. В результате получим:

$$J_{\tau, z}(u^0, v) = \varphi(x^0(t^* | \tau + 0, x(\tau + 0))) = B(\tau + 0, g(z, v)) \geq B(\tau - 0, z). \tag{34.35}$$

Если на первом участке взять импульсное управляющее воздействие $v(t) = v^0(\tau | \tau, z) = v^0(\tau, z)$, оптимальное относительно позиции $(\tau - 0, z)$, то получим:

$$J_{\tau, z}(u^0, v^0) = \varphi(x^0(t^* | \tau - 0, z)) = B(\tau + 0, g(z, v^0)) = B(\tau - 0, z). \quad (34.36)$$

Из соотношений (34.35), (34.36) следует:

$$B(\tau - 0, z) = \min_{v \in V} B(\tau + 0, g(z, v)), \quad \tau \in T_h, \quad z \in \mathbf{R}^n. \quad (34.37)$$

Рассмотрим второе семейство задач (34.34). Разобьем промежуток $T(\tau + 0) = [\tau + 0, t^*]$ на два участка: $[\tau, \tau + h[$ и $[\tau + h, t^*]$. На первом возьмем $u(t) \equiv u \in U$, $t \in [\tau, \tau + h[,$ где u – произвольный вектор. На втором возьмем $u(t) \equiv u^0(t | \tau + h, x(\tau + h - 0)))$, $t \in [\tau + h, t^*[,$ $v(t) = v^0(t | \tau + 0, z)$, $t \in \{\tau + h, \dots, t^*\}$. Получим

$$\begin{aligned} J_{\tau, z}(u, v^0) &= \varphi(x^0(t^* | \tau + h - 0, x(\tau + h - 0))) = \\ &= B(\tau + h - 0, x(\tau + h - 0)) = \\ &= B(\tau + h - 0, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x^0(t), u) dt) \geq B(\tau + 0, z). \end{aligned} \quad (34.38)$$

Если на первом участке взять $u(t) = u^0(t) = u^0(t | \tau + 0, z)$, то будем иметь:

$$\begin{aligned} J_{\tau, z}(u^0, v^0) &= \varphi(x^0(t^* | \tau + 0, z)) = B(\tau + h - 0, x^0(\tau + h - 0)) = \\ &= B(\tau + h - 0, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x^0(t | \tau + 0, z), u^0(t)) dt) = B(\tau + 0, z). \end{aligned} \quad (34.39)$$

Сравнивая соотношения (34.38) и (34.39), найдем

$$B(\tau + 0, z) = \min_{u \in U} B(\tau + h - 0, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x(t | \tau + 0, z), u) dt), \quad \tau \in T_h, \quad z \in \mathbf{R}^n. \quad (34.40)$$

Из определения $B(\tau, z)$, $\tau \in T_h$, $z \in \mathbf{R}^n$, следует граничное условие для функции

$$B(t^* + 0, z) = \varphi(z), \quad z \in \mathbf{R}^n. \quad (34.41)$$

Таким образом, для задачи (34.32) с дискретно-импульсными управляющими воздействиями имеем два уравнения Беллмана (34.34) и (34.40) с граничным условием (34.41).

Позиционное решение $(u^0(\tau + 0, z), v^0(\tau - 0, z))$ удовлетворяет соотношениям

$$B(\tau + 0, g(z, v^0(\tau - 0, z))) = \min_{v \in V} B(\tau + 0, g(z, v)),$$

$$B\left(\tau + h - 0, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x^0(t | \tau + 0, z), u^0(\tau + 0, z)) dt\right) =$$

$$= \min_{u \in U} B\left(\tau + h - 0, z + \int_{\tau}^{\tau+h} f(x(t | \tau + 0, z), u) dt\right).$$

Как следует из вывода уравнений Беллмана для рассмотренных в данном разделе задач, гладкость функции Беллмана не требуется.

§ 35. ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В теории управления под проблемой синтеза оптимальных систем понимают построение оптимальных обратных связей. Она считается в теории центральной. Из-за «проклятия размерности» проблема синтеза оптимальных систем остается нерешенной для сколь-нибудь сложных систем.

Цель данного параграфа – привести примеры решения проблемы с помощью двух фундаментальных методов теории оптимального управления. Кратко обсуждается возможность решения проблемы синтеза оптимальных систем в рамках современного принципа управления в реальном времени. Этот принцип управления существенно опирается на новые методы оптимизации и современную вычислительную технику.

35.1. Синтез оптимальных систем управления с помощью принципа максимума

35.1.1. Оптимальная обратная связь в задаче предельного быстродействия. В классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий вновь рассмотрим задачу быстродействия

$$t^* \rightarrow \min, \dot{x} = f(x, u), x(0) = x_0, x(t^*) = 0, u(t) \in U, t \in T = [0, t^*], \quad (35.1)$$

где $x = x(t) \in \mathbf{R}^n$ – состояние системы управления в момент времени t , $u = u(t) \in U \subset \mathbf{R}^r$ – значение управляющего воздействия, U – компакт, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ – заданный вектор.

Погрузим задачу (35.1) в семейство задач

$$t^* \rightarrow \min, \dot{x} = f(x, u), x(0) = z, x(t^*) = 0, u(t) \in U, t \in T, \quad (35.2)$$

зависящих от n -вектора z .

Пусть $t^{*0} = t^{*0}(z)$ – время быстродействия, $u^0(t|z)$, $t \in T^0 = [0, t^{*0}]$, – оптимальная программа задачи (35.2) для состояния z , Z – множество всех $z \in \mathbb{R}^n$, для которых задача (35.2) имеет решение. Функция

$$u^0(z) = u^0(0|z), z \in Z, \quad (35.3)$$

называется *оптимальной обратной связью (по состоянию)*, ее построение называют *синтезом оптимальной системы управления (позиционным решением задачи)*.

Подстановка функции (35.3) в уравнение (35.1) называется *замыканием системы управления* (рис. 35.1).

Полученное уравнение

$$\dot{x} = f(x, u^0(x)) \quad (35.4)$$

представляет математическую модель оптимальной автоматической



Рис. 35.1

системы управления. Для любого состояния x_0 решение уравнения (35.4) с начальным условием $x(0) = x_0$ есть оптимальная траектория задачи (35.1), вдоль которой объект управления переводится из состояния x_0 в начало координат за минимальное время.

В настоящее время не создано эффективных методов синтеза оптимальных по быстродействию обратных связей для систем выше второго порядка. Приведем примеры синтеза обратных связей для систем второго порядка.

35.1.2. Синтез оптимальной обратной связи для линейной неколебательной системы второго порядка. Вернемся к задаче быстродействия, рассмотренной в разд. 31.1:

$$t^* \rightarrow \min, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_1(t^*) = x_2(t^*) = 0, u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}: |u| \leq 1\}, t \in T = [0, t^*]. \quad (35.5)$$

Для нее гамильтониан имеет вид $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Согласно принципу максимума, каждой оптимальной программе для состоя-

ния z соответствует нетривиальное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)) \neq 0$, $t \in T^0 = [0, t^{*0}]$, сопряженной системы

$$\dot{\psi}_1 = 0, \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad (35.6)$$

вдоль которой выполняется равенство

$$u^0(t|z) = \operatorname{sign} \psi_2(t), \quad t \in T^0. \quad (35.7)$$

В силу однородности гамильтониана относительно сопряженных переменных нетривиальные решения сопряженной системы, соответствующие оптимальной программе, достаточно искать среди траекторий, которые оканчиваются на окружности единичного радиуса.

Синтез оптимальной обратной связи будем осуществлять методом попятного движения. Для каждого нетривиального решения сопряженной системы, двигаясь в обратном времени, построим оптимальные программу и соответствующую траекторию исходной системы, оканчивающуюся в начале координат. Фазовые траектории сопряженной системы (35.6) представляют вертикальные прямые, вдоль которых фазовая точка движется со скоростью $\dot{\psi}_2 = -\psi_1$, причем $\psi_1(t) \equiv \psi_1(t^{*0})$.

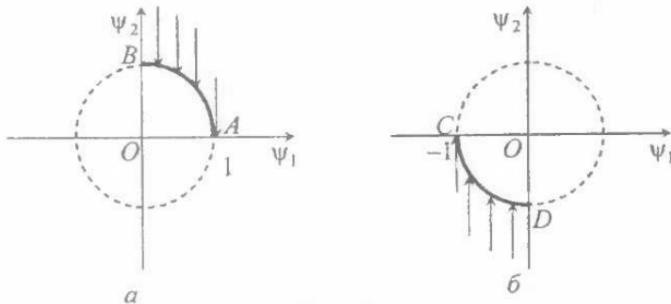


Рис. 35.2

Пусть точка $\psi(t^{*0})$ лежит на дуге AB окружности в первой четверти (рис. 35.2, а, $\psi_2 > 0$). Согласно соотношению (35.7) она соответствует оптимальной программе $u^0(t) \equiv 1$, $t \in T^0$, и фазовой траектории исходной системы $x_1^2 = x_2^2 / 2$ (дуга AO на рис. 35.3, а).

Аналогичный результат получим для точек $\psi(t^{*0})$, лежащих на дуге CD окружности в третьей четверти (рис. 35.2, б, $\psi_2 < 0$): оптимальная программа равна $u^0(t) = -1$, $t \in T^0$, соответствующая фа-

зовая траектория исходной системы имеет вид $x_1^2 = -x_2^2/2$ (дуга BO , рис. 35.3, δ).

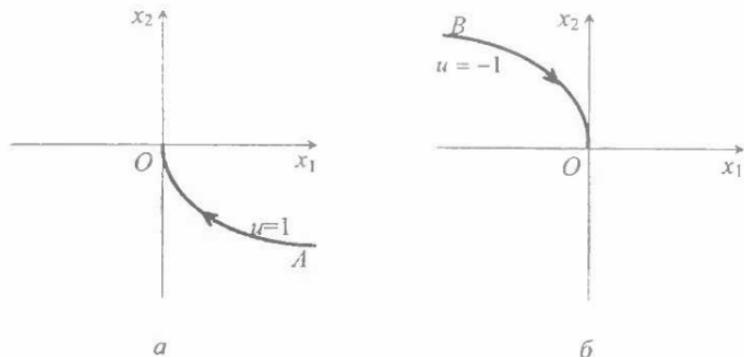


Рис. 35.3

Рассмотрим теперь точки $\psi(t^{*0})$, лежащие на дуге AD окружности в четвертой четверти (рис. 35.4, a , $\psi_2 < 0$).

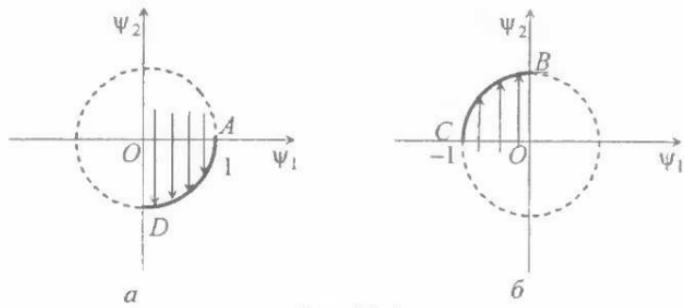


Рис. 35.4

Они соответствуют оптимальной программе, состоящей из двух частей: $u^0(t^{*0} - s) \equiv -1$, $s \in [0; s_1]$; $u^0(t^{*0} - s) \equiv 1$, $s > s_1$, где s_1 – время (при обратном отсчете) перехода сопряженной системы с дуги AD на ось $O\psi_1$ ($\psi_2(t^{*0} - s_1) = 0$). Соответствующая фазовая траектория исходной системы изображена на рис. 35.5, a (кривая ODC). Точка D является **точкой переключения**, а $t^{*0} - s_1$ – **моментом переключения**.

Аналогичную картину получаем для случая, когда $\psi(t^{*0})$ лежит на дуге CB окружности во второй четверти (рис. 35.4, b , $\psi_2 > 0$): оптимальная программа равна $u^0(t^{*0} - s) \equiv 1$, $s \in [0, s_1]$, $u^0(t^{*0} - s) \equiv -1$, $s > s_1$; соответствующая фазовая траектория исходной системы изображена на рис. 35.5, b (кривая OFG , F – точка переключения).

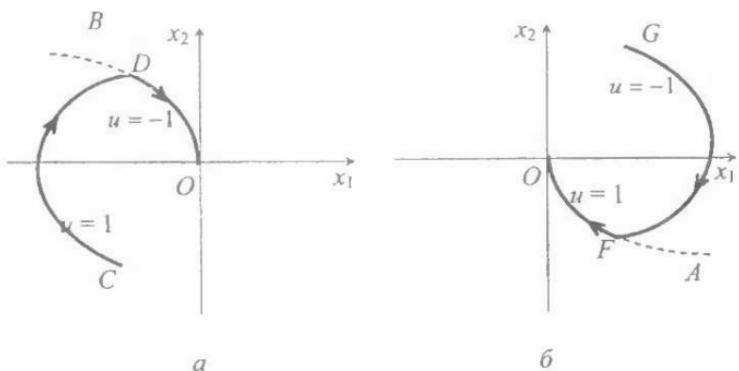


Рис. 35.5

Отметим, что при приближении фазовой траектории сопряженной системы к оси $O\psi_2$ скорость движения по ней фазовой точки стремится к нулю ($\dot{\psi}_2 = -\dot{\psi}_1$, значение $|\dot{\psi}_1|$ мало). Следовательно, момент s_1 достижения сопряженной фазовой точкой оси $O\psi_1$ ($\psi_2(t^{*0} - s_1) = 0$) стремится к ∞ . Соответственно точки переключения D и F исходной системы удаляются от начала координат по соответствующим дугам OB и OA в бесконечность.

Объединяя выполненные построения и перебирая все точки окружности $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$, получаем фазовый портрет оптимальной системы управления (рис. 35.6).

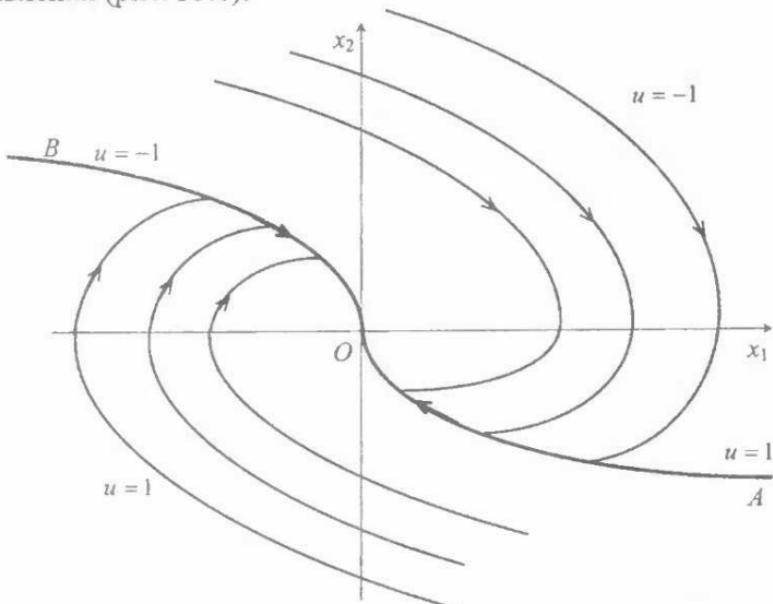


Рис. 35.6

Функция

$$u^0(x_1, x_2) = u^0(0 | (x_1, x_2)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, x_2) \in AO \text{ или лежит ниже } AOB, \\ -1, & \text{если } (x_1, x_2) \in BO \text{ или лежит выше } AOB, \end{cases}$$

является оптимальной обратной связью (позиционным решением) задачи быстродействия (35.5). Кривая AOB называется *линией переключения*.

35.1.3. Синтез оптимальной обратной связи для осциллятора.
Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} t^* \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\ x_1(t^*) = x_2(t^*) = 0, \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (35.8)$$

Для нее гамильтониан имеет вид $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + u)$. Из принципа максимума следует, что для каждой оптимальной программы существует нетривиальное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)) \neq 0$, $t \in T^0$, сопряженной системы

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad (35.9)$$

при этом, как и в задаче (35.5), имеем (см. (35.7)):

$$u^0(t | z) = \operatorname{sign} \psi_2(t), \quad t \in T^0.$$

Для синтеза оптимальной обратной связи опять воспользуемся методом попятного движения. Как и в задаче (35.5), двигаясь в обратном времени, построим нетривиальные решения сопряженной системы (35.9), соответствующие оптимальной программе и траектории, оканчивающейся в начале координат.

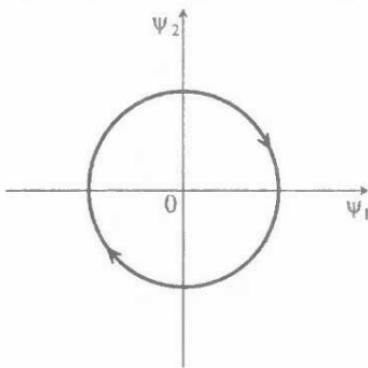


Рис. 35.7

Аналогично задаче (35.5) все нетривиальные решения сопряженной системы получаются при движении в обратном времени из точек, лежащих на окружности единичного радиуса. Фазовые траектории сопряженной системы – это сама окружность (рис. 35.7).

Фазовые траектории исходной системы при управляющем воздействии $u(t) \equiv 1$, $t \in T$, представляют собой окружности с центром в точке $(1, 0)$ (рис. 35.8, а). Аналогично получаем фазовый портрет исходной системы для $u(t) \equiv -1$, $t \in T$ (рис. 35.8, б).

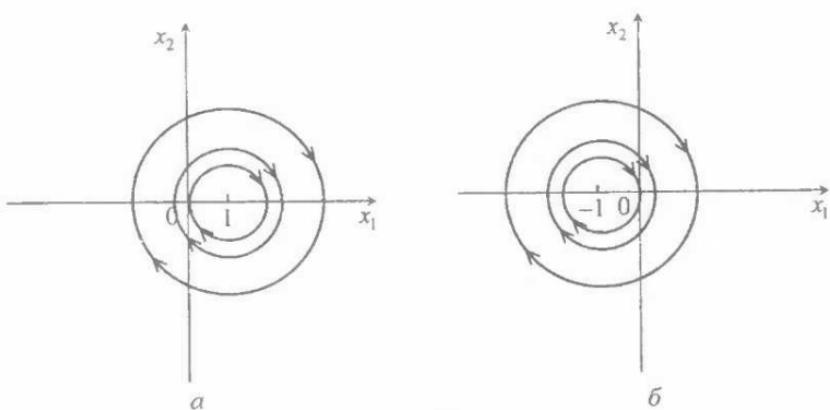


Рис. 35.8

Точки $\psi(t^{*0})$, лежащие на дуге ABC ($\psi_2(t^{*0}) > 0$, рис. 35.9, а), соответствуют оптимальной программе $u^0(t^{*0} - s) \equiv 1$, $s \in [0, s_1]$, где s_1 – время перехода сопряженной системы из точки M в обратном отсчете в точку C ($\psi_2(t^{*0} - s_1) = 0$). Соответствующая траектория исходной системы имеет вид $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$, $x_2 < 0$ (рис. 35.9, б).

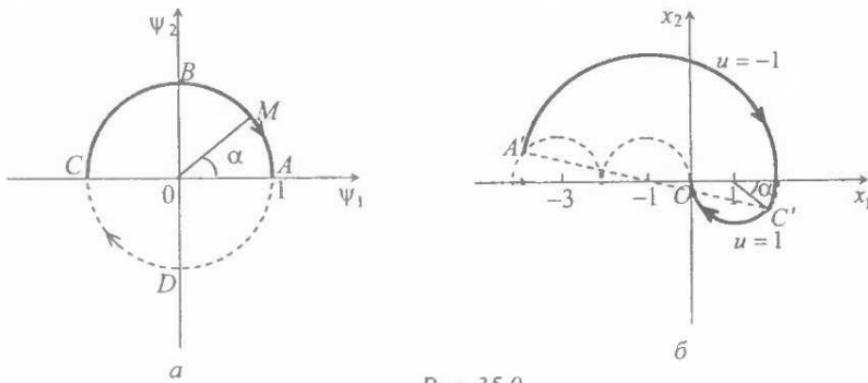


Рис. 35.9

Нетрудно подсчитать, что угловая скорость вращения фазовой точки как для сопряженной, так и для исходной систем постоянная и равна 1, и вращение происходит по часовой стрелке, следовательно, когда сопряженная система за время s_1 (в обратном отсчете) пройдет от точки M до точки C , исходная система за это же время пройдет от точки O до точки C' (т. е. в обоих случаях радиус повернется на один и тот же угол $\pi - \alpha$).

При $s > s_1$ точка M траектории сопряженной системы переходит на нижнюю дугу окружности (дуга CDA , рис. 35.9, а), для которой $\psi_2 < 0$.

Следовательно, оптимальная программа при $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ равна $u^0(t^{*0} - s) \equiv -1, s \in [s_1, s_2]$, где $s_2 - s_1$ — время движения точки сопряженной системы по дуге CDA в обратном времени от точки C до точки A . Соответствующая траектория исходной системы за это же время пройдет полуокружность $C'A'$ с центром в точке $(-1, 0)$ (рис. 35.9, б). Отметим также, что точка A' лежит на верхней дуге окружности

$$(x_1 + 3)^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0,$$

поскольку эта точка симметрична точке C' относительно центра окружности с центром в точке $(-1, 0)$.

Если продолжить попятное движение ($2\pi \leq \alpha < 3\pi$), то траектория исходной системы перейдет из точки A' в некоторую симметричную относительно $(1, 0)$ точку, лежащую на полуокружности $(x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 1, x_2 < 0$, при этом оптимальная программа опять будет равна $u^0(t^{*0} - s) \equiv 1, s \geq s_2$, и т. д.

Рассмотрим теперь случай, когда точки $\psi(t^{*0})$ лежат на нижней дуге CDA окружности (рис. 35.10, а, $\psi_2 < 0$).

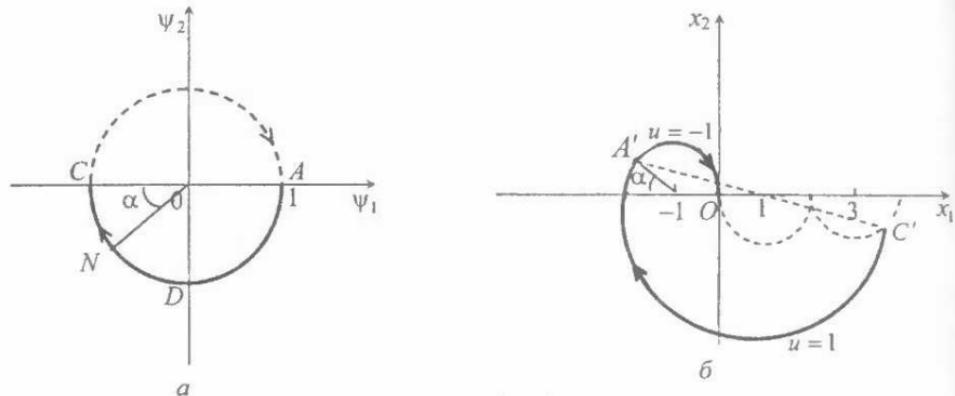


Рис. 35.10

Проведя аналогичные рассуждения, как для точек верхней окружности, получим оптимальную программу $u^0(t^{*0} - s) \equiv -1, s \in [0, s_1]; u^0(t^{*0} - s) \equiv 1, s \in [s_1, s_2]; u^0(t^{*0} - s) \equiv -1, s \geq s_2$, и т. д., а соответствующая фазовая траектория исходной системы имеет вид, изображенный на рис. 35.10, б. Моменты $t^{*0} - s_1, t^{*0} - s_2, \dots$ являются моментами переключения; A', C', \dots — точками переключения.

Объединяя выполненные построения и перебирая все точки окружности $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$, получаем фазовый портрет оптимальной системы управления, изображенный на рис. 35.11. При этом оптимальная обратная связь имеет вид

$$u^0(x_1, x_2) = u^0(0|x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \text{кривой } OCB \\ & \text{или лежит ниже линии } ADOCB, \\ -1, & \text{если } x \in \text{кривой } ADO \\ & \text{или лежит выше линии } ADOCB. \end{cases}$$

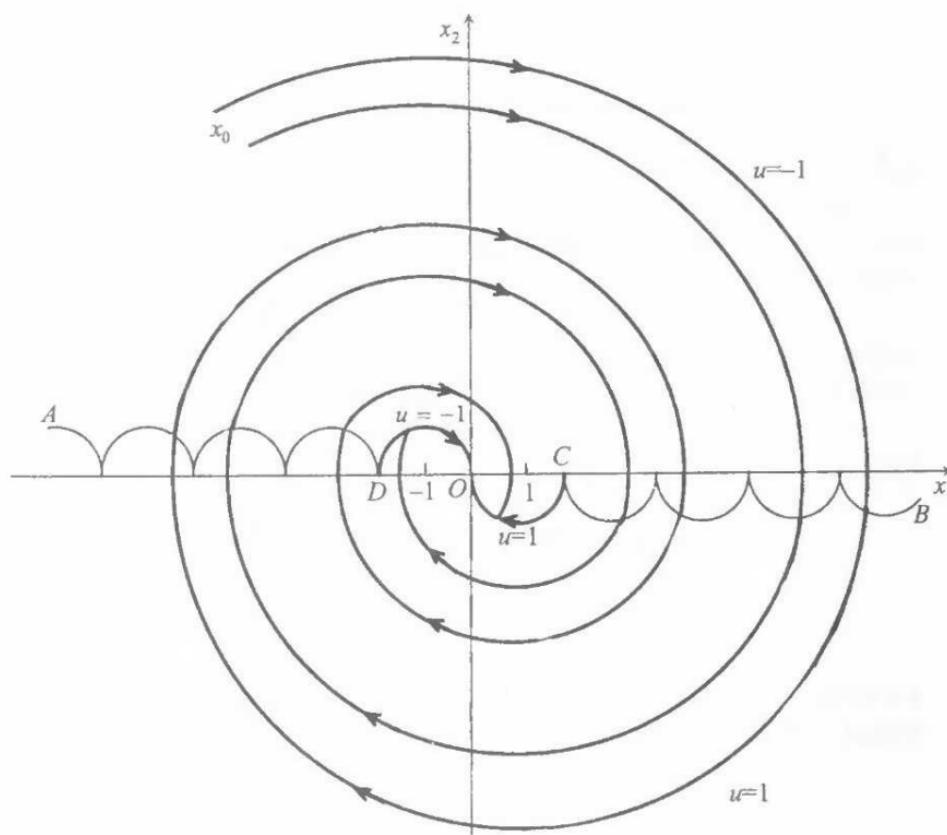


Рис. 35.11

Как видно из приведенных построений, количество точек переключения оптимальной программы может быть сколь угодно большим.

35.2. Применение динамического программирования к синтезу оптимальных систем управления

Как видно из § 34, проблему синтеза оптимальных систем формально можно решить с помощью динамического программирования. Однако фактическое ее решение наталкивается в общем случае на «проклятие размерности». Существуют отдельные задачи, для которых динамическое программирование является эффективным методом построения оптимальных обратных связей. К таким задачам относится линейно-квадратичная задача Лётова – Калмана:

$$J(u) = \int_0^{t^*} \left(x'(t)Dx(t) + \frac{1}{2}u^2(t) \right) dt \rightarrow \min, \quad (35.10)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0) = x_0.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $D' = D > 0$.

Задача (35.10) имеет две особенности: 1) отсутствуют геометрические ограничения на управляющие воздействия; 2) критерий качества имеет специальный вид.

Поскольку нас интересует позиционное решение, то будем решать задачу методом динамического программирования, опираясь на достаточные условия оптимальности (теорема 34.1).

Согласно разд. 34.1 уравнение Беллмана для задачи (35.10) имеет вид

$$-\frac{\partial B(t, x)}{\partial t} = \min_{u \in \mathbb{R}} \left((Ax + bu)' \frac{\partial B(t, x)}{\partial x} + x'Dx + \frac{1}{2}u^2 \right), \quad (35.11)$$

$$B(t^*, x) = 0.$$

Решение этого уравнения начинаем с выполнения операции минимизации в правой части уравнения Беллмана (35.11). Очевидно, минимум достигается в точке

$$u^0(t, x) = -b' \frac{\partial B(t, x)}{\partial x}. \quad (35.12)$$

Подставив (35.12) в (35.11), получим дифференциальное уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial B(t, x)}{\partial t} = x'A \frac{\partial B(t, x)}{\partial x} + x'Dx - \frac{1}{2} \left(b' \frac{\partial B(t, x)}{\partial x} \right)^2, \quad (35.13)$$

$$B(t^*, x) = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$B(t, x) = x' K(t) x, \quad t \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (K'(t) = K(t)). \quad (35.14)$$

Из (35.13) получим

$$\begin{aligned} -x' \dot{K}x &= x' K A x + x' A' K x + x' D x - 2x' K b b' K x, \\ x' K(t^*) x &= 0. \end{aligned}$$

Последние соотношения выполняются для всех $x \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда матричная функция $K(t)$, $t \in T$, удовлетворяет следующему уравнению

$$\dot{K} = -KA - A'K + 2Kbb'K - D, \quad t \in T, \quad K(t^*) = 0. \quad (35.15)$$

Уравнение (35.15) называется *матричным дифференциальным уравнением Риккати*. При сделанных предположениях оно имеет решение, определенное на отрезке T . В самом деле, уравнение (35.15) удовлетворяет условиям существования локального решения. Это решение можно продолжить на весь отрезок T в силу его ограниченности. Действительно, имеем неравенства

$$\begin{aligned} 0 < B(\tau, z) &= z' K(\tau) z = \min_{u_\tau(\cdot)} \int_{\tau}^{t^*} \left(x'(t) D x(t) + \frac{1}{2} u^2(t) \right) dt \leq \\ &\leq \int_{\tau}^{t^*} (\bar{x}'(t) D x(t)) dt \leq l = \text{const}. \end{aligned} \quad (35.16)$$

Здесь $u_\tau(\cdot) = (u(t), t \in T(\tau))$, $\bar{x}(t)$, $t \in T(\tau) = [\tau, t^*]$, – решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad t \in T(\tau), \quad x(\tau) = z,$$

при $u(t) = 0$, $t \in T(\tau)$.

Поскольку $\|K(\tau)\| = \max_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{B(\tau, z)}{\|z\|^2}$, то из неравенства (35.16) следует равномерная ограниченность функции $K(t)$, $t \in T$.

Подставив (35.14) в (35.12), получим

$$u^0(t, x) = p'(t)x, \quad t \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (35.17)$$

где $p'(t) = -2b'K(t)$, $t \in T$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 35.1. Оптимальная обратная связь в задаче Лётова – Калмана (35.10) представляет функцию (35.17), линейную относительно состояния.

Простота полученного решения привлекла к задаче Лётова – Калмана внимание многочисленных специалистов.

35.3. Оптимальные системы управления

В классической постановке введенные выше оптимальные обратные связи строятся по математическим моделям, но предназначены для управления их физическими прототипами. Поведение математических моделей отличается от поведения физических объектов в силу неточности математического моделирования и реализации оптимальной обратной связи, а также из-за действия неизвестных возмущений, возникающих в процессе управления объектом.

Если физический объект замкнуть оптимальной обратной связью, то получим *оптимальную систему управления*, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x) + w, \quad x(0) = x_0. \quad (35.18)$$

Будем считать, что в каждом конкретном процессе управления возмущение w реализуется в виде кусочно-непрерывной функции $w^*(t)$, $t \in T$.

Если оптимальная обратная связь построена в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий, то во многих задачах уравнение (35.18) представляет собой дифференциальное уравнение с разрывной правой частью. Оно часто не имеет классического решения, т. е. могут возникать скользящие режимы (см. пример 35.1). В случае, когда оптимальная обратная связь дискретная, уравнение имеет единственное решение, которое строится по шагам:

$$\dot{x} = Ax + bu^0(\tau, x^*(\tau)) + w^*(\tau), \quad x(\tau) \in X^*(\tau), \quad \tau \in T_h.$$

Пример 35.1. Пусть в задаче разд. 31.1 физический объект описывается уравнением $\ddot{x} = u$, $|u| \leq 1$. Замкнем его оптимальной обратной связью $u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, построенной в разд. 35.1. Тогда оптимальная система описывается уравнением

$$\dot{x} = u^0(x) + w. \quad (35.19)$$

Если возмущение $w^*(t) \equiv w = \text{const}$, $w < 0$, $t \in T$, то траектория уравнения (35.19) на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ с начальным условием $x_0 = 2$, $\dot{x}_0 = 0$ имеет вид, изображенный на рис. 35.12. На рисунке изображены траектория $x^0(t, x)$, $t \in T^0$ (кривая *CDO*) без учета возмущения и траектория $x^*(t, x)$, $t \geq 0$, с учетом возмущения $w < 0$ (кривая *CKLMN...O*).

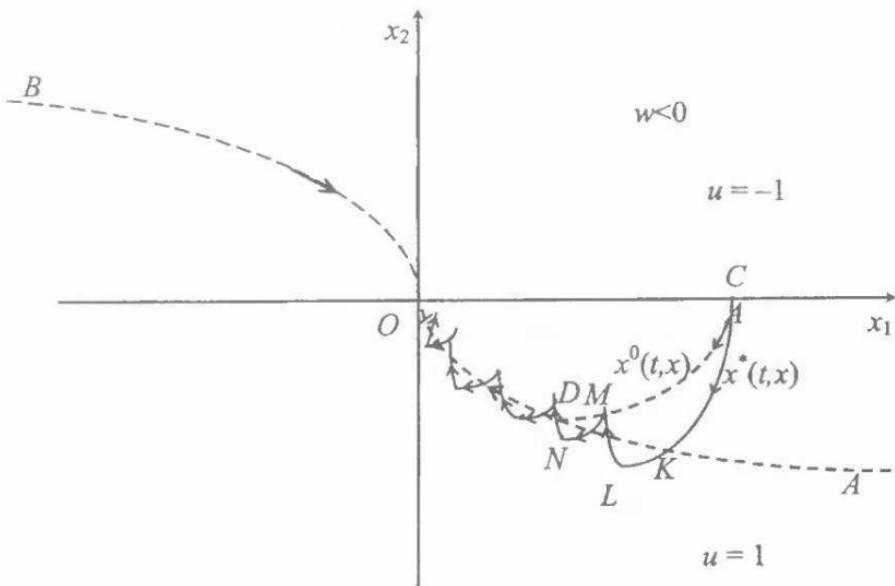


Рис. 35.12

Классического решения уравнения (35.19) не существует, ибо траекторию после точки K продолжить невозможно. На практике из-за запаздывания между моментом измерения состояния и моментом подачи управляющего воздействия возникает скользящий режим, в котором с увеличением точности интегрирования число точек переключения управляющего воздействия неограниченно растет и соответствующая траектория «скользит» вдоль линии AKO .

35.4. Оптимальное управление в реальном времени

Проанализируем использование оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления на примере задачи оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий.

Процесс управления начинается в момент времени $t=0$ с подачи на вход объекта управляющего воздействия $u^*(t)=u^0(0, x_0)$, $t \in [0, h]$. Обозначим через $x^*(h)$ состояние объекта в момент $t=h$, в котором он оказался под влиянием управляющего воздействия и реализовавшегося возмущения. Для позиции $(h, x^*(h))$ подсчитывается управляющее воздействие $u^*(t)=u^0(h, x^*(h))$, $t \in [h, 2h[$.

Продолжая процесс управления, получим управляющие воздействия $u^*(t)$, $t \in T$, и последовательность состояний объекта $x^*(\tau)$, $\tau \in T_h \cup t^*$, где $T_h = \{0, h, 2h, \dots, Nh = t^* - h\}$, соответствующих этому управляюще-

му воздействию. Назовем функцию $u^*(t)$, $t \in T$, *реализацией оптимальной обратной связи* в конкретном процессе управления.

Из приведенного анализа видно, что в конкретном процессе управления оптимальная обратная связь не используется целиком (на всей области определения). Нужны лишь ее значения вдоль одной последовательности измеряемых состояний физического объекта. Значения $u^*(t)$, $t \in T_h$, не нужно знать заранее. Достаточно уметь для текущего момента t вычислять $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ для каждого получаемого состояния $x^*(\tau)$.

Будем говорить, что *процесс управления осуществляется в реальном времени*, если для каждого $\tau \in T_h$ текущее значение $u^*(\tau)$ вычисляется за время $s(\tau)$, не превышающее h , т. е. до получения следующего измерения $x^*(\tau + h)$. Устройство, способное выполнять эту работу, назовем *оптимальным регулятором*.

Таким образом, проблема синтеза оптимальных систем свелась к построению алгоритма работы оптимального регулятора.

Цель данного раздела – описать применение двойственного симплекс-метода к построению алгоритма работы оптимального регулятора в линейной задаче оптимального управления.

В классе дискретных управляющих воздействий $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau \in T_h$, рассмотрим линейную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} J(u) &= c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \\ x(t^*) &\in X^* = \{x \in \mathbf{R}^n : Hx = g\}, \end{aligned} \quad (35.20)$$

$$u(t) \in U(t) = \{u \in \mathbf{R} : \underline{u}(t) \leq u \leq \bar{u}(t)\}, \quad t \in T = [0, t^*],$$

где $c, b \in \mathbf{R}^n$, $g \in \mathbf{R}^m$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m < n$, $\text{rank } H = m$, $|T_h| > m$, $x = x(t) \in \mathbf{R}^n$, – состояние объекта управления в момент времени t .

Согласно формуле Коши (разд. 32.6) терминальное состояние $x(t^*)$ имеет вид

$$x(t^*) = F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)bu(t)dt, \quad (35.21)$$

где $F(t)$, $t \in T$, – фундаментальная матрица, т. е. решение уравнения

$$\dot{F} = AF, \quad t \in T, \quad F(0) = E$$

($E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – единичная диагональная матрица).

Подставив значение $x(t^*)$ (35.21) в критерий качества и терминальное ограничение задачи (35.20), получим эквивалентную функциональную форму этой задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T_h} c(t)u(t) &\rightarrow \max, \\ \sum_{t \in T_h} d(t)u(t) = \tilde{g}, \quad u(t) \in U(t), \quad t \in T_h, \end{aligned} \quad (35.22)$$

где

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_t^{t+h} c'F(t^*)F^{-1}(s)bds, \\ d(t) &= \int_t^{t+h} HF(t^*)F^{-1}(s)bds, \quad t \in T_h, \\ \tilde{g} &= g - HF(t^*)x_0. \end{aligned} \quad (35.23)$$

Элементы (35.23) задачи (35.22) можно сгенерировать из динамической модели (35.20), вводя функции

$$\begin{aligned} \psi'_c(t) &= c'F(t^*)F^{-1}(t), \quad t \in T; \\ \psi'_{(i)}(t) &= h'_{(i)}F(t^*)F^{-1}(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (35.24)$$

где $h_{(i)}$ – i -я строка матрицы H . Нетрудно проверить, что функции (35.24) являются решениями сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad t \in T, \quad (35.25)$$

с граничными условиями

$$\psi_c(t^*) = c, \quad (35.26)$$

$$\psi_{(i)}(t^*) = h_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (35.27)$$

Пусть $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi'_{(i)}(t) \\ i = \overline{1, m} \end{pmatrix}$. Тогда элементы (35.23) примут вид

$$c(t) = \int_t^{t+h} \psi'_c(s)bds, \quad d(t) = \int_t^{t+h} \Psi(s)bds, \quad t \in T_h, \quad \tilde{g} = g - \Psi(0)x_0. \quad (35.28)$$

Из сравнения задачи (35.22) с канонической задачей ЛП (разд. 1.3)

$$\sum_{j \in J} \tilde{c}_j x_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j \in J} \tilde{a}_j x_j = b, \quad \tilde{d}_{*j} \leq x_j \leq \tilde{d}_j^*, \quad j \in J = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (35.29)$$

видно, что имеют место соответствия, приведенные в табл. 35.1.

Таблица 35.1

№ п/п	Задача ЛП (35.29)	Задача управления (35.22)
1	Множество индексов $J = \{1, 2, \dots, n\}$	Множество моментов времени $T_h = \{0, h, 2h, \dots, (N-1)h\}$
2	План $x = (x_j, j \in J)$	Программа $u(t), t \in T_h$
3	Базисное множество индексов $J_B \subset J, J_B = m$	Базисное множество моментов $T_B \subset T_h, T_B = m$
4	Базисная матрица $\tilde{A}_B = (\tilde{a}_j, j \in J_B)$	Базисная матрица $D_B = (d(t), t \in T_B)$
5	Базисный план $x \in X$: $x_j = \bar{d}_{*j} \vee \bar{d}_j^*, j \in J_H = J \setminus J_B$, $x_B = (x_j, j \in J_B)' = \tilde{A}_B^{-1}(b - A_H x_H)$, где $A_H = (a_j, j \in J_H)$, $x_H = (x_j, j \in J_H)$.	Базисная программа $u(t), t \in T$: $u(t) = \underline{u}(t) \vee \bar{u}(t), t \in T_H = T_h \setminus T_B$, $u(T_B) = (u(t), t \in T_B)' =$ $= D_B^{-1} \left(\tilde{g} - \sum_{t \in T_H} d(t)u(t) \right)$
6	Невырожденный базисный план $\bar{d}_{*j} < x_j < \bar{d}_j^*, j \in J_B$	Невырожденная базисная программа $\underline{u}(t) < u(t) < \bar{u}(t), t \in T_B$
7	Вектор потенциалов $u' = \tilde{c}_B' \tilde{A}_B^{-1}$	Вектор потенциалов $v' = c'(T_B)D_B^{-1}$
8	Коплан $\delta_j = c_j - y' \tilde{a}_j, j \in J, y \in \mathbb{R}^m$	Копрограмма $\delta(t) = (\psi_c'(t) - v'\psi(t))b = \psi'(t)b, t \in T$, где согласно (35.24) – (35.27) $\psi(t), t \in T$, – решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A'\psi, \psi(t^+) = c - H'v$
9	Базисный коплан (оценки) $\Delta_j = \delta_j = c_j - u' \tilde{a}_j, j \in J$	Базисная копрограмма $\delta_h(t) = \int_t^{t+h} \delta(s)ds = c(t) - v'a(t) =$ $= \int_t^{t+h} \psi'(s)bds, t \in T_h$
10	Невырожденный базисный коплан: $\Delta_j \neq 0, j \in J_H$	Невырожденная базисная копрограмма $\delta_h(t) \neq 0, t \in T_H$
11	Регулярная базисная матрица \tilde{A}_B , для которой $\Delta_j \neq 0, j \in J_H$	Регулярная базисная матрица D_B , для которой $\delta_h(t) \neq 0, t \in T_H$ (регулярное множество T_B)

12	<p>Базисный псевдоплан с базисной матрицей \tilde{A}_B (базисным множеством J_B): $\alpha_j = d_{*j}$, если $\delta_j < 0$; $\alpha_j = d_j^*$, если $\delta_j > 0$; $\alpha_j = d_{*j} \vee d_j^*$, если $\delta_j = 0$; $\alpha_B = \tilde{A}_B^{-1}(b - \tilde{A}_H \alpha_H)$</p>	<p>Базисная псевдопрограмма с базисной матрицей D_B (с базисным множеством T_B): $\omega(t) = \underline{u}(t)$, если $\delta_h(t) < 0$; $\omega(t) = \bar{u}(t)$, если $\delta_h(t) > 0$; $\omega(t) = \underline{u}(t) \vee \bar{u}(t)$, если $\delta_h(t) = 0$, $t \in T_H$;</p> $\omega(T_B) = D_B^{-1} \left(\tilde{g} - \sum_{t \in T_H} d(t) \omega(t) \right)$
----	---	--

С использованием этих соответствий и опираясь на критерии оптимальности прямого плана и базисного множества индексов (базисной матрицы) линейного программирования (см. § 1, 2), получим следующие утверждения.

Теорема 35.1 (критерий оптимальности программы – принцип максимума). Для оптимальности базисной программы $u^0(t)$, $t \in T$, с базисным множеством T_B^0 (базисной матрицей D_B^0) достаточно, а в случае ее невырожденности и необходимо существование такой котраектории $\psi^0(t)$, $t \in T$, вдоль которой выполняется условие максимума

$$\left(\int_t^{t+h} \psi^{0r}(s) b ds \right) u^0(t) = \max_{u \in U} \left(\int_t^{t+h} \psi^{0r}(s) b ds \right) u, \quad t \in T_h.$$

Множество T_B^0 , с которым оптимальная базисная программа $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет критерию оптимальности, назовем **оптимальным базисным множеством моментов**. Для него справедливо следующее утверждение.

Теорема 35.2 (критерий оптимальности базисного множества моментов). Для оптимальности базисного множества T_B^0 достаточно, а в случае его регулярности и необходимо, чтобы для соответствующей базисной псевдопрограммы $\omega(t)$, $t \in T$, выполнялись соотношения

$$\underline{u}(t) \leq \omega(t) \leq \bar{u}(t), \quad t \in T_B^0.$$

Опишем алгоритм работы оптимального регулятора, с помощью которого реализуется позиционное решение задачи (35.20).

До начала процесса управления оптимальный регулятор строит оптимальное базисное множество $T_B^0(0)$ и вычисляет оптимальные

сигналы $u^0(\tau | 0, x_0)$, $\tau \in T_h$, для задачи (35.20), решая прямым или двойственным симплекс-методом задачу (35.22). Поскольку все операции проводятся до начала процесса управления, то затраты времени несущественны.

Для двух случаев – 1) $0 \notin T_B^0(0)$, 2) $0 \in T_B^0(0)$ – оптимальный регулятор формирует множество $T_B^*(h)$: а) $T_B^*(h) = \emptyset$, если $0 \notin T_B^0(0)$; б) $T_B^*(h) = \{0\}$, если $0 \in T_B^0(0)$, и вычисляет состояние $x^0(h)$ математической модели (35.20) в момент $\tau = h$:

$$x^0(h) = x^0(h | 0, x_0) = F(h)x_0 + a(0)u^*(0),$$

где $u^*(0) = u^0(0 | 0, x_0)$, $a(t) = \int_t^{t+h} F(t+s)F^{-1}(s)bd s$, $t \in T_h$. Процесс

управления начинается в момент $t = 0$ с подачи на объект управляющего воздействия $u^*(0) = u^0(0 | 0, x_0)$, $t \geq 0$.

Предположим, что процесс управления осуществлен на промежутке $[0, \tau]$. Для вычисления управляющего импульса $u^*(\tau - h)$ для промежутка $[\tau - h, \tau]$ оптимальный регулятор построил оптимальное базисное множество $T_B^0(\tau - h)$, оптимальную программу $u^0(t | \tau - h, x^*(\tau - h))$, $t \in T(\tau - h)$, для задачи

$$\sum_{t \in T_h(\tau-h)} c(t)u(t) \rightarrow \max,$$

$$HF(t^*)F^{-1}(\tau-h)x^*(\tau-h) + \sum_{t \in T_h(\tau-h)} d(t)u(t) = g, \quad (35.30)$$

$$u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau-h),$$

а также множество $T_B^*(\tau)$ и состояние $x^0(\tau) = x^0(\tau | \tau - h, x^*(\tau - h))$ математической модели в момент τ :

$$x^0(\tau) = F(\tau)F^{-1}(\tau-h)x^*(\tau-h) + a(\tau-h)u^*(\tau-h). \quad (35.31)$$

Множество $T_B^*(\tau)$ назовем **множеством базисных индексов «замороженных» сигналов** в момент τ (аналог фиктивных переменных в ЛП, разд. 1.9).

Получив в момент τ состояние объекта управления $x^*(\tau)$, оптимальный регулятор должен построить оптимальное базисное множест-

во $T_B^0(\tau)$, оптимальную программу $u^0(t|\tau, x^*(\tau))$, $t \in T(\tau)$, и множество $T_B^*(\tau + h)$. Для этого ему нужно решить задачу

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_h(\tau)} c(t)u(t) \rightarrow \max, \\ & HF(t^*)F^{-1}(\tau)x^*(\tau) + \sum_{t \in T_h(\tau)} d(t)u(t) = g, \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau), \end{aligned} \quad (35.32)$$

где

$$\begin{aligned} x^*(\tau) = & F(\tau)F^{-1}(\tau-h)x^*(\tau-h) + a(\tau-h)u^*(\tau-h) + \\ & + \int_{\tau-h}^{\tau} F(\tau)F^{-1}(s)w^*(s)ds, \end{aligned} \quad (35.33)$$

$w^*(s)$, $s \in [\tau-h, \tau]$, – реализовавшееся на этом промежутке возмущение. Это возмущение регулятору неизвестно, но его воздействие на объект управления в момент $\tau \in T_h$ он находит из сравнения соотношений (35.31), (35.33):

$$\int_{\tau-h}^{\tau} F(\tau)F^{-1}(s)w^*(s)ds = x^*(\tau) - x^0(\tau). \quad (35.34)$$

Обозначим $T_h^\tau = \{0, h, \dots, \tau-h\}$, $T_h^* = T_h^\tau \setminus T_B^*(\tau)$.

Формулы (35.31), (35.33), (35.34) справедливы для всех $\tau = h, 2h, \dots, t^* - h$, поэтому последовательно подставляя (35.33) в задачи (35.30), (35.32) для $\tau-h, \tau-2h, \dots, h$ с учетом равенства (35.34) и соотношений (35.28) запишем задачи (35.30), (35.32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_h^{\tau-h}} c(t)u^*(t) + \sum_{t \in T_h(\tau-h)} c(t)u(t) \rightarrow \max, \\ & \sum_{t \in T_h^{\tau-h}} d(t)u^*(t) + \sum_{t \in T_h(\tau-h)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_h^{\tau-h} \setminus \{0\}} \Psi(t)(x^*(t) - x^0(t)) = \tilde{g}, \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau-h); \end{aligned} \quad (35.35)$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_h^\tau} c(t)u^*(t) + \sum_{t \in T_h(\tau)} c(t)u(t) \rightarrow \max, \\ & \sum_{t \in T_h^\tau} d(t)u^*(t) + \sum_{t \in T_h(\tau)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_h^\tau \setminus \{0\}} \Psi(t)(x^*(t) - x^0(t)) = \tilde{g}, \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau). \end{aligned} \quad (35.36)$$

Перепишем задачи (35.35), (35.36) в эквивалентной форме, накладывая прямые ограничения на сигналы $u(t)$, $t \in T_B^*(\tau)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_B^*(\tau-h)} c(t)u(t) + \sum_{t \in T_h(\tau-h)} c(t)u(t) \rightarrow \max, \\ & \sum_{t \in T_B^*(\tau-h)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_h(\tau-h)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_H^*(\tau-h)} d(t)u^*(t) + \\ & + \sum_{t \in T_h^{\tau-h} \setminus \{0\}} \Psi(t)(x^*(t) - x^0(t)) = \tilde{g}, \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau-h), \quad u^*(t) \leq u(t) \leq u^*(t), \quad t \in T_B^*(\tau-h); \end{aligned} \quad (35.37)$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_B^*(\tau)} c(t)u(t) + \sum_{t \in T_h(\tau)} c(t)u(t) \rightarrow \max, \\ & \sum_{t \in T_B^*(\tau)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_h(\tau)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_H^*(\tau)} d(t)u^*(t) + \\ & + \sum_{t \in T_h^{\tau} \setminus \{0\}} \Psi(t)(x^*(t) - x^0(t)) = \tilde{g}, \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau), \quad u^*(t) \leq u(t) \leq u^*(t), \quad t \in T_B^*(\tau). \end{aligned} \quad (35.38)$$

Наряду с задачей (35.38) рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_B^*(\tau)} c(t)u(t) + \sum_{t \in T_h(\tau)} c(t)u(t) \rightarrow \max, \\ & \sum_{t \in T_B^*(\tau)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_h(\tau)} d(t)u(t) + \sum_{t \in T_H^*(\tau)} d(t)u^*(t) + \\ & + \sum_{t \in T_h^{\tau-h} \setminus \{0\}} \Psi(t)(x^*(t) - x^0(t)) = \tilde{g}, \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in T_h(\tau), \quad u^*(t) \leq u(t) \leq u^*(t), \quad t \in T_B^*(\tau). \end{aligned} \quad (35.39)$$

Задачи (35.38) и (35.39) отличаются друг от друга лишь одним слагаемым $\Psi(\tau)(x^*(\tau) - x^0(\tau))$. Из (35.34) следует, что чем меньше h и $\|w^*(s)\|$, $s \in [\tau-h, \tau]$, тем эти задачи ближе одна к другой. Оптимальное базисное множество $T_B^0(\tau-h)$ будет оптимальным базисным множеством и для задачи (35.39), базисным для задачи (35.38), но не обязательно оптимальным базисным множеством для нее. Однако в силу близости задач (35.38) и (35.39), взяв для решения задачи (35.38) двой-

ственным симплекс-методом в качестве начального базисного множества $T_B(\tau)$ множество $T_B^0(\tau - h)$, оптимальный регулятор строит оптимальное базисное множество $T_B^0(\tau)$ и соответствующие оптимальные сигналы $u^*(t) = u^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$, $t \geq \tau$, за небольшое число итераций.

Решение задачи (35.38) начинается с построения базисной компоненты псевдопрограммы. Она имеет вид $\bar{\omega}(T_B^0(\tau - h)) = u^0(T_B^0(\tau - h)) + \Delta\omega$.

Из указанной выше связи между задачами (35.38), (35.39) следует:

$$\Delta\omega = (D_B^0(\tau - h))^{-1} \Psi(\tau)(x^*(\tau) - x^0(\tau)).$$

Если $\bar{\omega}(T_B^0(\tau - h)) \in U(\tau)$, то $T_B^0(\tau) = T_B^0(\tau - h)$. В противном случае осуществляются стандартные процедуры двойственного симплекс-метода.

После построения $T_B^0(\tau)$ и сигналов $u^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$, формируется множество $T_B^*(\tau + h)$: $T_B^*(\tau + h) = T_B^*(\tau) \cap T_B^0(\tau)$, если $\tau \notin T_B^0(\tau)$, и $T_B^*(\tau + h) = (T_B^*(\tau) \cap T_B^0(\tau)) \cup \{\tau\}$, если $\tau \in T_B^0(\tau)$, и вычисляется значение $x^0(\tau + h)$ состояния в момент $\tau + h$ математической модели задачи.

Используя результаты вычислений, оптимальный регулятор подает на вход объекта управления управляющее воздействие

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^0(\tau | \tau - h, x^*(\tau - h)), & t \in [\tau, \tau + s(\tau)], \\ u^*(\tau), & t \in [\tau + s(\tau), \tau + h], \end{cases}$$

где $s(\tau)$ – время решения задачи (35.38).

Поскольку $\tilde{u}(t) = u^*(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, где $\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u^*(t)$, то поведение физического объекта управления под действием управляющих воздействий, создаваемых оптимальным регулятором, описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x) + w + w_0,$$

где $w_0(t) = b\Delta u(t)$, $t \in [\tau, \tau + h]$, – возмущение, порожденное неточностью реализации регулятором оптимальной обратной связи. Это возмущение отлично от тождественного нуля на $[\tau, \tau + h]$, если $u^0(\tau | \tau - h, x^*(\tau - h)) \neq u^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$, и тем меньше, чем меньше $s(\tau)$.

Замечание 35.2. При вычислении $u^*(\tau)$ может оказаться, что задача (35.38) не имеет решения. Это означает, что для позиции $(\tau, x^*(\tau))$ не существует программы (см. пример 35.1, $w > 1$).

Пример 35.2. Рассмотрим задачу успокоения осциллятора на конечном промежутке времени с минимальным расходом энергии. Математическая модель этой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^{10} |u(t)| dt \rightarrow \min, \\ & \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = x_0, \\ & x(10) = \dot{x}(10) = 0, \\ & |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 10]. \end{aligned} \tag{35.40}$$

Решим задачу, используя дискретные управляющие воздействия с периодом квантования $h = 0,2$. Эквивалентная функциональная форма (35.22), (35.23) задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T_h} h(u_1(t) + u_2(t)) \rightarrow \min, \\ & \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} \sin(t^* - \tau) d\tau \cdot (u_1(t) - u_2(t)) = -\cos(t^*)x_{01} - \sin(t^*)x_{02}, \\ & \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} \cos(t^* - \tau) d\tau \cdot (u_1(t) - u_2(t)) = \sin(t^*)x_{01} - \cos(t^*)x_{02}, \\ & 0 \leq u_1(t) \leq 1, \quad 0 \leq u_2(t) \leq 1, \quad t \in T_h, \end{aligned}$$

где $T_h = \{0; 0,2; 0,4; \dots; 9,8\}$.

Оптимальная программа $u^0(t)$, $t \in T$, рассматриваемой задачи представлена на рис. 35.13. Соответствующая траектория системы изображена на рис. 35.14.

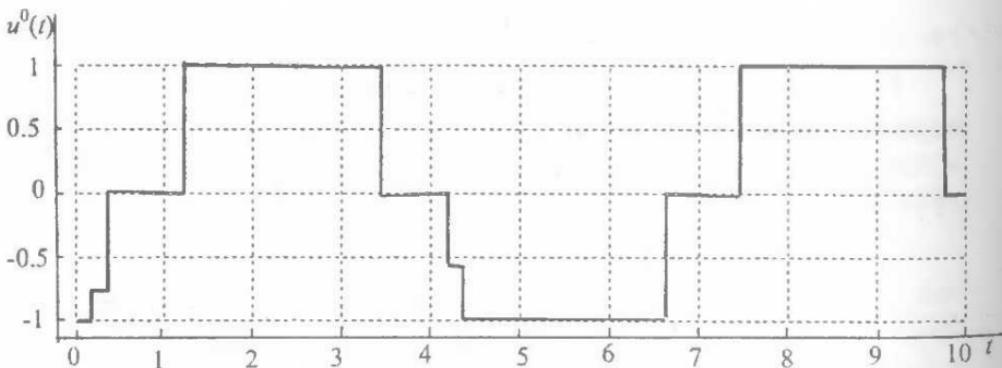


Рис. 35.13

Результаты решения задачи (35.40) прямым и двойственным симплекс-методами представлены в табл. 35.2 при $w(t) = 0$, в которой указано количество итераций, необходимое для решения задачи прямым методом при каждом

значении $t = ih$ и при корректировке полученного решения двойственным методом.

Пусть на физический объект действует внешнее возмущение. Замкнем объект обратной связью. Тогда динамическая система управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w.$$

Пусть реализующееся в процессе управления возмущение имеет вид

$$\begin{aligned} w^*(t) &= 0.6 \sin(2t), \quad t \in [0, 6]; \\ w^*(t) &= 0, \quad t \in [6, 10]. \end{aligned} \quad (35.41)$$

Результаты численной реализации оптимальной обратной связи прямым и двойственным симплекс-методом представлены в табл. 35.2 при $w = w^*(t)$, $t \in T$, вида (35.41). Как видно из таблицы, использование двойственного симплекс-метода для корректировки решения существенно уменьшает время решения, поскольку при этом количество итераций в десятки раз меньше, чем при прямом симплекс-методе, а для многих моментов времени двойственный метод не требует итераций, поскольку используемое в момент времени t начальное базисное множество моментов $T_B^0(t-h)$ оказывается оптимальным и для момента t , т. е. $T_B^0(t) = T_B^0(t-h)$.

На рис. 35.15 представлены реализация оптимальной обратной связи (сплошная линия) в рассматриваемом процессе управления, а также, для сравнения, оптимальная программа (штриховая линия) динамической системы, построенная выше.

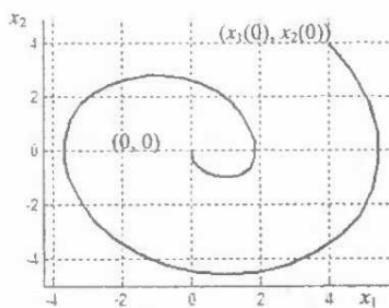


Рис. 35.14

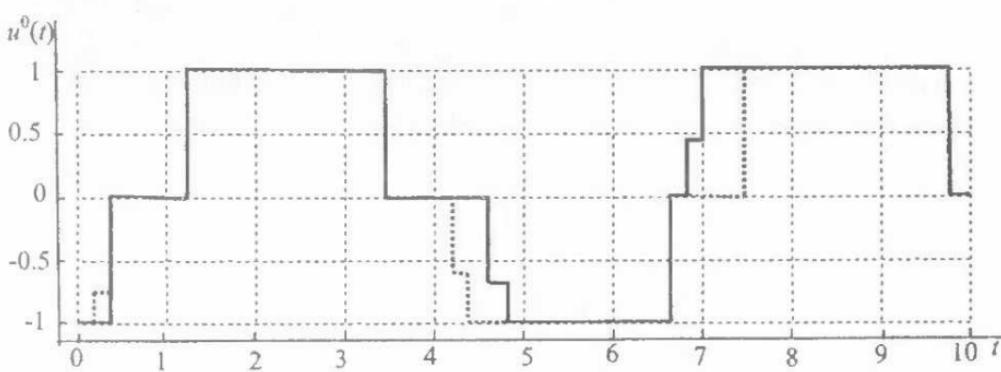


Рис. 35.15

Таблица 35.2

t	$w(t)=0$		$w=w^*(t)$	
	прямой	двойств	прямой	двойств
0	41	41	41	41
0,2	40	0	41	1
0,4	38	3	41	1
0,6	38	0	41	0
0,8	38	0	41	0
1	38	0	41	1
1,2	37	0	41	1
1,4	36	0	40	1
1,6	35	0	38	0
1,8	34	0	36	2
2	33	0	35	1
2,2	32	0	33	0
2,4	31	0	31	2
2,6	30	0	30	0
2,8	29	0	29	2
3	28	0	26	0
3,2	27	0	23	1
3,4	26	0	22	0
3,6	26	2	21	1
3,8	26	0	20	1
4	26	0	20	0
4,2	26	0	19	1
4,4	24	1	18	2
4,6	23	0	18	0
4,8	22	0	17	2

t	$w(t)=0$		$w=w^*(t)$	
	прямой	двойств	прямой	двойств
5	21	0	17	2
5,2	20	0	17	0
5,4	19	0	17	2
5,6	18	0	17	0
5,8	17	0	17	2
6	16	0	19	2
6,2	15	0	18	0
6,4	14	0	17	0
6,6	13	0	16	0
6,8	13	1	16	0
7	13	0	15	0
7,2	13	0	13	0
7,4	12	0	12	0
7,6	11	0	11	0
7,8	10	0	10	0
8	9	0	9	0
8,2	8	0	8	0
8,4	7	0	7	0
8,6	6	0	6	0
8,8	7	0	8	0
9	6	0	7	0
9,2	5	0	6	0
9,4	4	0	5	0
9,6	2	0	2	0
9,8	0	0	0	0

Рисунок 35.16 содержит траекторию динамической системы, замкнутой оптимальной обратной связью (при $w(t) \equiv 0, t \in T$, – штриховая линия, при $w(t) \equiv w^*(t), t \in T$, – сплошная линия).

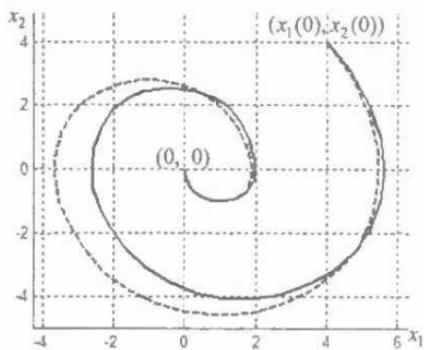


Рис. 35.16

Литература

1. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1979.
2. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968.
3. Беллман, Р. Процессы регулирования с адаптацией / Р. Беллман. – М.: Наука, 1964.
4. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965.
5. Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М.: Наука, 1969.
6. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1972.
7. Габасов, Р. Ф. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971.
8. Габасов, Р. Ф. Особые оптимальные управления / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1973.
9. Габасов, Р. Ф. Оптимизация линейных систем / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1973.
10. Габасов, Р. Ф. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Наука и техника, 1974.
11. Гамкрелидзе, Р. В. О скользящих оптимальных режимах / Р. В. Гамкрелидзе // ДАН СССР. Т. 143, № 6. 1962.
12. Калман, Р. Е. Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Тр. I конгресса ИФАК. – М.: Изд-во АН СССР. – 1961.
13. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968.
14. Кротов, В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М.: Наука, 1973.
15. Летов, А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. – М.: Наука, 1969.
16. Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972.
17. Понtryгин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983.
18. Розонэр, Л. И. Принцип максимума Л. С. Понtryгина в теории оптимальных систем / Л. И. Розонэр // Автоматика и телемеханика. Т. 20, № 10–12. – 1959.
19. Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М.: Наука, 1978.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алгоритм	11
- двойственного симплекс-метода	81
- дихотомического поиска	274
- дробления	295
- конечный	52
- метода «золотого сечения»	276
- метода Фибоначчи	278
- решения канонической задачи ЛП	34
Анализ выпуклый	14
- гладкий	14
- негладкий	14
- чувствительности	96
Аппроксимация квадратичная (второго порядка)	285
- линейная (первого порядка)	282

Б

Базис	25
-------------	----

В

Вариация допустимая кривой	335
- Лагранжа	361
- игольчатая	361
- Макшнейна	361
- простейшая	310
- сильная	361
- слабая	361
- функционала вторая	336
- первая	336
Вектор Лагранжа обобщенный	243
- невязок	38
- основных ограничений (ресурсов)	22
- оценок задачи ЛП	26
- - - небазисных	26
- потенциалов	26, 56, 450
- свободных переменных	24
- стоимости	22
- условий	22
Величина максимального потока	147
Вершины многогранника	18
Воздействие управляющее	353, 355
- - - дискретное	401
- - - дискретно-импульсное	413
- - - доступное	353
- - - особое	381

Г

Гамильтониан	360
Градиент приведенный	27
- условный	27, 289
- функции	19
- функционала	341
Граница искусственная	23

Д

Дерево	112
- сети	113
Дуга	106
- обратная	112

- прямая	112
	3
Задача Больца	334
- буферная	43
- вариационного исчисления с подвижными концами	334
- векторной математического программирования	265
- выпуклого программирования двойственной	187
- - - прямая	187
- геометрического программирования	190
- Дидони	5
- дискретного программирования	294
- Евклида	6
- изопериметрическая	334
- исходная	23
- каноническая ЛП	21
- - - двойственная	57
- - - двойственно невырожденная	61
- - - прямая	56
- - - невырожденная	25
- - - квадратичного программирования	189
- - - каноническая	194
- - - производная	196
- - - простая	207
- - - классическая на условный минимум	234
- - - краевая принципа максимума	381
- - - Лагранжа	334
- - - ЛП нестационарная	104
- - - Майера	334
- - - матричная транспортная	125
- - - вырожденная	135
- - - закрытая	137
- - - невырожденная	133
- - - открытая	137
- - - минимизации штрафов	309
- - - на минимакс	138
- - - на безусловный минимум	235
- - - на условный минимум со смешанными ограничениями	234
- - - нелинейного программирования	233
- - - с ограничениями типа неравенств	244
- - - нормальная ЛП	23, 249
- - - о брахистохроне	7, 331
- - - о замене оборудования	318
- - - о максимальном потоке	147
- - - о потоке минимальной стоимости	107
- - - о рюкзаке	297
- - общая математического программирования	232
- - оптимального управления типа Больца	354
- - - со свободным правым концом траектории	355, 367
- - - с подвижным правым концом траектории	367
- - - Лагранжа	364

— Майера	356
— основная (простейшая) вариационного исчисления	332
— первой фазы ЛП	38, 44
— транспортная	129
— предельного быстродействия	353
— присоединенная о минимуме	345
— распределения ресурсов	320
— регулярная	181
— сетевая транспортная	107
— — закрытая	123
— — открытая	123
— — двойственны вырожденная	123
— — невырожденная	120
— сетевого планирования	327
— терминального управления	356
— транспортная в сетевой форме	107
— условной минимизации	7
— целочисленного линейного программирования	294, 301
Задачи вариационные многомерные	335
— с высшими производными	335
— дискретные оптимального управления	428
— конечномерные игровые	13
— оптимизационные	5
— транспортные	13
Замыкание системы управления	436
Значение канонической задачи ЛП	95
— разреза	149
«Золотое сечение»	274
I	
Игра матричная	144
Интенсивность узла	106
Интервал локализации	273
— неопределенности	273
Источник	106
Итерация	11, 270
— метода Фибоначчи	278
— прямого метода	216
— — потенциалов	117
— двойственного метода потенциалов	121, 133
— симплекс-метода	30
— — двойственного с длинным	
— — двойственным шагом	81
— — с коротким двойственным шагом	78
K	
Комбинация выпуклая точек	152
Компоненты базисные	25
— небазисные	25
— неопорные	196, 211
— опорные	196
Коплан	60
— базисный	61
Копрограмма	450
— базисная	450
— невырожденная	450
Коэффициент чувствительности задачи ЛП	96
Коэффициенты стоимости	22
Кривая допустимая	332
— неособая	341
Критерий качества	313, 355
— несовместности ограничений	67
— оптимальности базисного множества	
— — моментов	451
— — плана задачи ЛП	27
— — перевозок	128
— — двойственного базисного плана	71
— — опорного плана	217
— — программы	451
— Сильвестра	165
L	
Лемма Дюбуа Раймона	338
— Лагранжа	340
— основная вариационного исчисления	341
Линия переключения	440
M	
Матрица базисная	25, 450
— регулярная	450
— оптимальная	29, 61
— неотрицательная	165
— опорная целевой функции	210
— платежная	144
— регулярная	61
— положительная	165
— условий (затрат)	22
Матрицы эквивалентные	69
Мера неоптимальности базисной матрицы	70
— плана	70
Метка узла временная	325
— постоянная	325
Метод вариаций	310
— ветвей и границ	295
— Гомори	306
— градиентный	284
— графический	19
— графо-аналитический	197
— двойственный	55
— «золотого сечения»	274
— конечный	271
— ломаных	279
— многошаговый	270
— наискорейшего спуска	284
— Ньютона	286
— обратной матрицы	36
— одношаговый	270
— Паузэлла	271
— последовательных уступок	268
— потенциалов	111
— приближенный	270
— пропорциональных уступок	269
— Фибоначчи	276
— штрафных функций	291, 367
Методы дискретные	270
— итеративные	270
— непрямые	270
— поиска	270
— приближенные	270
— прямые	225, 270
— точные	270

Минималь сильная задачи (функционала)	333
— слабая	333
Минимизация максимальной компоненты	267
Многогранник	18, 153
Множества концевые второго шага	295
— <i>k</i> -го шага	295
— первого шага	295
Множество базисных индексов	
«замороженных» сигналов	452
— моментов базисное	450
— — оптимальное	451
— базисных индексов	25
— выпуклое	151
— достижимости	369
— дут базисное	115
— полное	113
— клеток базисное	127
— Лебега	168, 369
— многогранное	18
— небазисных индексов	25
— планов задачи ЛП	22
— двойственных задачи выпуклого программирования	187
— прямых задачи выпуклого программирования	187
— строго выпуклое	151
— уровня	19
— чистых стратегий	144
Множитель Лагранжа	26, 243
Модель матричная (табличная)	
транспортных задач	124
Момент переключения	438

H

Надграфик функции	171
Направление	31, 270
— допустимое	197
— Ньютона	285
Нормализация	267

O

Оболочка выпуклая множества	153
— функции	173
Объект управления	351
Ограничение активное на плане	240
— — жесткое	251
— — мягкое	251
— пассивное на плане	240
Ограничения основные	21, 57
— прямые	21, 58
— регулярные	181
Опора задачи	216
— ограничений	195
— целевой функции	210, 216
Отсечения	306
Оценка множества	295
— объективно обусловленная	27
— небазисной координаты	26
— относительная	27
— субоптимальности плана	70
Оценки	56, 195

П	
Параметры аппроксимации	282
Перевозки базисные	127
— небазисные	127
Переменная двойственная	57
— искусственная	38
— опорная	211
— свободная	23
— сопряженная	360
— состояния	352
— фазовая	352
— фиктивная	43
План	22, 104, 181, 232
— базисный	25
— — двойственный	60
— — невырожденный	61
— — невырожденный	25
— векторно-оптимальный	265
— локально оптимальный	233
— невырожденный относительно опоры ограничений	196
— обобщенный	29
— нормальный	248
— опорный	212, 216
— опорный невырожденный	212, 217
— оптимальный	213, 217
— оптимальный	22, 104, 181, 232
— задачи выпуклого программирования	181
— — ЛП	22, 104
— — — двойственный	58
— — — улучшенный	60
— по Парето	266
— перевозок	125
— базисный	127
— — невырожденный	127
— регулярный	245
— стационарный	235
— субоптимальный (ϵ -оптимальный)	70
— условно стационарный	247
— эффективный	266
Плоскость разделяющая	154
— несобственно разделяющая	155
— опорная к множеству	157
— — к выпуклой функции	172
Погружение инвариантное	313
Позионом	191
Позиция	421
Поиск дихотомический	273
Последовательность минимизирующая	357
Поставщик (фиктивный)	137
Потенциал	26
Поток базисный	115
— невырожденный	115
— дуговой	106
— базисный	115
— небазисный	115
— максимальный	147
— на сети	107
— сетевой	107
— по дуге	107
Потребитель (фиктивный)	138
Правило критичности	216

— мнемоническое построения двойственных задач ЛП	58
— вычисления коэффициентов чувствительности	99
— множителей Лагранжа	7
— некритичности	221
Представление матрицы мультиплитативное	37
Приближения к оптимальному плану	30, 75
Прием перестановочный	310
Признак-равенство оптимальный	209
Признаки-неравенства оптимальные	209
Принцип вариационный	8
— выбора критерия оптимальности	265
— инвариантного погружения	312
— квазимаксимума	402, 411, 416
— максимума	30, 354
— дискретный	404, 409
— Понтрягина	12, 351, 362
— оптимальности	312, 314
— Ферма обобщенный	8
Проблема оптимизации систем в условиях неопределенности	14
Программа	313, 353, 367
— базисная	450
— невырожденная	450
— оптимальная	353, 355
Программирование выпуклое	150
— динамическое Беллмана	12, 312, 351
— дискретное	13, 294
— квадратичное	12
— линейное	10, 16
— математическое	12, 232
— нелинейное	13, 232
Производная вариационная	341
— Кларка	263
— функции по направлению	175
«Проклятие размерности»	318, 426
Процедура стандартная	316
Процесс оптимальный	313
Псевдоплан	63
— базисный	63
Псевдопоток	113
Псевдопрограмма базисная	451
Путь	324
— критический	328

Р

Размер задачи	21
Разрез (сети)	149
— минимальный	149
Рандомизация чистых стратегий	145
Реализация оптимальной обратной связи	448
Ребро	111
— висячее	111
— многогранника	18
Регулятор оптимальный	448
Режим реального времени	105, 448
— скользящий	358
Рекорд	296
Решение задачи программное	355
— обобщенное	357, 358

— позиционное	423, 436
---------------	----------

С

Свойства базисного множества клеток	127
— оптимальных круга и шара	5
Связь оптимальная обратная	423, 436
Сеть	106
— ориентированная	106
— простая	124
— частичная	113
Симплекс	20, 154
Симплекс-метод	10, 16
— — двойственный	55
— — прямой	56
Симплекс-множитель	26
Синтез оптимальной системы управления	436
Система динамическая дискретная	406
— квазинепрерывная	410
— оценок дробления	295
— сопряженная	360
— управления оптимальная	446
ξ-система	381
скаляризация критерия	267
Скорость объекта	353
— сходимости	271
— квадратичная	271
— линейная	271
Скорость сходимости сверхлинейная	271
Соокупность оценок управляемая	210
Соотношения двойственности	187
Состояние объекта	353, 355
— начальное	355
— терминальное (конечное)	355
Способы скаляризации	267
Стоимость потока	106
Сток	106
Стратегии игроков оптимальные	145
— — смешанные	145
— — оптимальные	146
Субградиент	176
Субдифференциал	176
— Кларка	263
Субпроизводная верхняя	263
Схема одностороннего ветвления	296
— полного ветвления	296

Т

Таблица транспортная	124
Теорема Гильберта	341
— двойственности	67
— Лежандра — Клебша	346
— о минимаксе	147
— существования	66
— Ферма	6
— Якоби	348
Теория двойственности	65
— дифференциальных игр	13
— оптимального управления	12, 351
Точка глобального минимума	232
— локальной минимума	233
— допустимая	232
— идеальная	267

- переключения	438
- седловая	144
- функции Лагранжа	182
- стационарная	235
- строгого локального минимума	233
Точки угловые (крайние)	18
Траектория	352
- оптимальная	313, 355

У

Узел	106
- висячий	111
- нейтральный	106
- промежуточный	106
- транзитный	106
- фиктивный	124
Управление допустимое	313
- позиционное (по замкнутому контуру)	420
- программное (по разомкнутому контуру)	420
- с помощью обратной связи	420
Управления программные	15
- типа обратной связи	15
Уравнение Беллмана	315, 423
- Риккати матричное дифференциальное	445
- Эйлера	339
- дифференциальное	340
- интегральное	339
- Якоби	346
Уровни гарантированные	268
Условие Лежандра – Клебша	346
- Липшица	279
- нетривиальности	368, 372
- оптимальности достаточное	67
- регулярности	369
- стационарности	337, 372
- субоптимальности достаточное	70
- трансверсальности	368, 374
- Якоби	347
Условия баланса	107
- Вейерштрасса – Эрдмана вторые	343
- первые	343
- дополняющей неизвестности	68, 248, 368, 374
- максимума	30
- достаточные отсутствия плана перевозок	126
- необходимые существования плана перевозок	126
- неотрицательности	244, 372
- стационарности	243, 372
- существования решения основной задачи вариационного исчисления	333
Участок особый	387

Ф

Фаза метода потенциалов вторая	118
--------------------------------	-----

- первая	117, 129
- двойственного симплекс-метода	
- вторая	75
- первая	75, 88
- симплекс-метода вторая	30
- первая	30, 45
Физический смысл оценок	212
- свободных переменных	23
- компонент двойственного плана	99
Форма квадратичная	162
Формула Коши	369
Функции гладкие	14
- сепарабельные	320
Функционал	331, 355
- целевой	355
Функция Беллмана	314, 421
- вогнутая	180
- выпуклая	160
- Гамильтона – Понтрягина	360
- дифференцируемая по Кларку	263
- по направлению	258
- допустимая	332
- измеримая	354
- квазивыпуклая	170
- кусочно-постоянная	383
- Лагранжа	182
- классическая	245
- модифицированная	289
- обобщенная	243
- Понтрягина	360
- релейная	383
- сильно выпуклая	161
- слабо нелинейная	163
- строго выпуклая	161
- целевая	21, 232
- штрафная	291

Ц

Цена игры	147
Цепь	111
- простая	111, 126
- элементарная	111, 126
Цикл	112, 127
Циркуляция	114

Ш

Шаг	31, 270
- двойственный длинный	80
- короткий	77
- метода	283
Штраф	291

Э

Экстремаль Понтрягина	381
- функционала (Эйлера)	341

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
Литература	15
Глава 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	16
§ 1. Симплекс-метод	16
1.1. Производственная задача	16
1.2. Графический метод решения задач ЛП	17
1.3. Каноническая задача ЛП	21
1.4. Базисный план	24
1.5. Потенциалы и оценки	26
1.6. Критерий оптимальности	27
1.7. Итерация симплекс-метода	30
1.8. Алгоритм	34
1.9. Первая фаза	37
1.10. Конечность симплекс-метода	52
1.11. Три свойства канонической задачи	53
1.12. Задача произвольной формы	53
§ 2. Двойственный симплекс-метод	55
2.1. Двойственная каноническая задача	55
2.2. Базисные двойственные план и псевдоплан	59
2.3. Теория двойственности	65
2.4. Критерий оптимальности базисного двойственного плана	71
2.5. Итерация	75
2.6. Алгоритмы двойственного симплекс-метода	81
2.7. Вырожденный базисный двойственный план	85
2.8. Первая фаза	88
2.9. Задача ЛП в произвольной форме	90

2.10. Конечность двойственного симплекс-метода	93
§ 3. Анализ решения	93
3.1. Единственность оптимального прямого плана	93
3.2. Единственность оптимального двойственного плана	94
3.3. Анализ чувствительности решения задачи	95
3.4. Коррекция оптимальных планов при возмущении задач ЛП	99
3.5. Изменение размеров задачи	100
3.6. Нестационарные задачи	104
§ 4. Специальные задачи	105
4.1. Сетевая транспортная задача	106
4.2. Матричные транспортные задачи	124
§ 5. Некоторые приложения ЛП	138
5.1. Задачи на минимакс	138
5.2. Кусочно-линейная экстремальная задача	139
5.3. Приложение к исследованию линейных соотношений	141
5.4. Линейное программирование и матричные игры. Теорема о минимаксе	144
5.5. Задача о максимальном потоке	147
Литература	149
Глава 2. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	150
§ 6. Выпуклые множества и функции	151
6.1. Выпуклые множества	151
6.2. Отделимость выпуклых множеств	154
6.3. Выпуклые функции	160
6.4. Дифференцируемость выпуклых функций	175
6.5. Экстремумы выпуклых функций	179
§ 7. Основная задача выпуклого программирования.	
Теорема Куна – Таккера	181
7.1 Постановка задачи	181

7.2. Теорема Куна – Таккера	182
7.3. Задача ВП с линейными ограничениями	184
§ 8. Теория двойственности в выпуклом программировании	186
8.1. Двойственная задача	187
8.2. Соотношения двойственности	187
8.3. Задача квадратичного программирования	189
8.4. Задача геометрического программирования	190
§ 9. Общая задача квадратичного программирования	193
9.1. Каноническая задача КП	194
9.2. Графо-аналитический метод	197
9.3. Алгоритм решения простой задачи квадратичного программирования	207
9.4. Алгоритм решения общей задачи квадратичного программирования	216
§ 10. Специальные методы численного решения задач выпуклого программирования	223
10.1. Непрямые методы	224
10.2. Прямые методы	225
Литература	231
Глава 3. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	232
§ 11. Конечномерные экстремальные задачи	232
§ 12. Задача безусловной оптимизации	234
12.1. Необходимое условие минимума первого порядка	234
12.2. Условия оптимальности второго порядка	236
§ 13. Задачи с простыми ограничениями	238
§ 14. Задача со смешанными ограничениями	240
14.1. Обобщенное правило множителей Лагранжа	240
14.2. Классическое правило множителей Лагранжа	245
14.3. Условно стационарные и нормальные планы	247

14.4. Условия минимума второго порядка	250
14.5. Линейные ограничения	254
14.6. Общая схема исследования задачи НЛП	256
§ 15. Негладкие задачи	258
15.1. Минимизация функций, дифференцируемых по направлениям	258
15.2. Производная и субдифференциал Кларка	263
§ 16. Векторная оптимизация	265
16.1. Принципы выбора	265
16.2. Скаляризация критерия	266
16.3. Введение иерархии целевых функций	267
Литература	269
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	270
§ 17. Минимизация функций одной переменной	271
17.1. Поиск точек безусловного минимума. Метод Паузэлла	271
17.2. Методы поиска точек минимума унимодальных функций ...	273
17.3. Метод ломаных	279
§ 18. Безусловная минимизация функций	282
18.1. Методы градиентного типа	282
18.2. Метод Ньютона	285
§ 19. Условная минимизация функций	287
19.1. Метод проекции градиента	287
19.2. Метод условного градиента	288
19.3. Метод модифицированных функций Лагранжа	289
19.4. Метод штрафных функций	291
Литература	292
ГЛАВА 5. ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	294
§ 20. Методы ветвей и границ	294

20.1. Постановка задачи дискретного программирования	294
20.2. Общая схема методов ветвей и границ	295
§ 21. Задача о рюкзаке	297
§ 22. Целочисленное линейное программирование	301
22.1. Метод ветвей и границ	301
22.2. Метод отсечения Гомори	305
§ 23. Метод вариаций. Задача минимизации штрафов	309
Литература	311
ГЛАВА 6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	312
§ 24. Оптимизация многошаговых процессов	312
24.1. Постановка задачи	312
24.2. Инвариантное погружение. Функция Беллмана	313
24.3. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана	314
24.4. Анализ результатов	315
24.5. Стандартная процедура	316
24.6. Задача о замене оборудования	318
§ 25. Задача распределения ресурсов	320
§ 26. Построение кратчайшего пути на сети	324
§ 27. Задача сетевого планирования	327
Литература	330
ГЛАВА 7. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	331
§ 28. Основная задача вариационного исчисления	331
28.1. Задача о брахистохроне	331
28.2. Основная задача	332
28.3. Другие задачи вариационного исчисления	334
§ 29. Метод вариаций	335
29.1. Вариация допустимой кривой	335
29.2. Вариации функционала	336

29.3. Необходимые условия слабого минимума в терминах вариаций функционала	337
29.4. Уравнение Эйлера	338
29.5. Теорема Гильберта	341
29.6. Кусочно-гладкие допустимые кривые	342
§ 30. Исследование второй вариации	345
30.1. Присоединенная задача о минимуме	345
30.2. Условие Лежандра – Клебша	346
30.3. Условие Якоби	347
Литература	350
ГЛАВА 8. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	351
§ 31. Задача предельного быстродействия	351
31.1. Оптимальное по быстродействию управление механическим объектом	351
31.2. Сравнение задачи быстродействия с задачей о брахистохроне	352
31.3. Математическая модель задачи предельного быстродействия	353
§ 32. Принцип максимума	354
32.1. Постановка задачи	354
32.2. Существование оптимальных программ	355
32.3. Формула приращения критерия качества	359
32.4. Необходимое условие оптимальности программ (принцип максимума Понтрягина)	361
32.5. Достаточное условие оптимальности	363
32.6. Задачи оптимального управления с терминальными ограничениями	366
32.7. Принцип максимума для задач быстродействия	376
32.8. Краевая задача принципа максимума Понтрягина	380
32.9. Примеры	382

§ 33. Специальные задачи оптимального управления	401
33.1. Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретных управляющих воздействий	401
33.2. Оптимизация дискретных систем	406
33.3. Оптимизация квазинепрерывных систем	410
33.4. Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретно-импульсных управляющих воздействий	413
§ 34. Динамическое программирование в теории оптимального управления	420
34.1. Задача оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий	421
34.2. Связь динамического программирования с принципом максимума	426
34.3. Применение динамического программирования к специальным задачам оптимального управления	428
§ 35. Проблема синтеза оптимальных систем управления	435
35.1. Синтез оптимальных систем управления с помощью принципа максимума	435
35.2. Применение динамического программирования к синтезу оптимальных систем управления	444
35.3. Оптимальные системы управления	446
35.4. Оптимальное управление в реальном времени	447
Литература	459
Предметный указатель	460

Учебное издание

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Габасов Рафаил

Кириллова Фаина Михайловна

Альсевич Виталий Викентьевич

Калинин Анатолий Иосифович

Крахотко Валерий Васильевич

Павленок Наталия Сергеевна

Редактор В. В. Альсевич

Дизайн обложки В. В. Андук

Компьютерная верстка А. В. Липницкий

Корректор Е. И. Бондаренко

Подписано в печать 08.11.2011. Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 27,4. Уч.-изд. л. 12,9.

Тираж 300 экз. Заказ № 63.

Издатель и полиграфическое исполнение:

ОДО «Издательство “Четыре четверти”».

ЛИ № 02330/0494362 от 16.03.2009.

Ул. Б. Хмельницкого, 8-215, 220013, г. Минск.

Тел. /факс: (017) 331 25 42. E-mail: info@4-4.by



ГАБАСОВ Рафаил

Профессор кафедры методов оптимального управления Белгосуниверситета, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РБ, почетный доктор наук Иркутского государственного университета, член Петровской академии наук и искусств в г. Санкт-Петербурге.

Закончил механический факультет Уральского политехнического института в г. Свердловске (ныне Екатеринбург).

Является одним из создателей белорусской научной школы по оптимизации и оптимальному управлению, редактором известных выпусков по программному обеспечению экстремальных задач. Опубликовано около 500 научных работ, в том числе 9 монографий и два учебных пособия (в соавторстве), часть из которых переведены в США и Японии. Награжден нагрудными знаками «Отличник образования» и «Заслуженный работник БГУ».



КИРИЛЛОВА Фаина Михайловна

Главный научный сотрудник Института математики НАН Республики Беларусь, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН РБ (первая в истории Беларуси женщина-математик, удостоенная этого научного звания), почетный доктор наук Иркутского государственного университета, член Петровской академии наук и искусств в г. Санкт-Петербурге, заслуженный деятель науки РБ.

Закончила физико-математический факультет Уральского государственного университета в г. Свердловске в 1954 г.

Является одним из создателей белорусской научной школы по оптимизации и оптимальному управлению, редактором известных выпусков по программному обеспечению экстремальных задач. Опубликовано около 500 научных работ, в том числе 9 монографий и учебное пособие (в соавторстве), часть из которых переведены в США и Японии.



АЛЬСЕВИЧ Виталий Викентьевич

Профессор кафедры методов оптимального управления ФПМИ, кандидат физико-математических наук, профессор.

Закончил математический факультет Белгосуниверситета в 1967 г.

Опубликовано свыше 80 научных и научно-методических работ, среди которых монография и пять учебных пособий (три – в соавторстве). Награжден нагрудным знаком «Отличник образования».



КАЛИНИН Анатолий Иосифович

Заведующий кафедрой методов оптимального управления Белгосуниверситета, доктор физико-математических наук, профессор.

Закончил в 1970 г. математический факультет БГУ.

Опубликовано более 150 научных работ, среди которых монография «Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем».



КРАХОТКО Валерий Васильевич

Доцент кафедры методов оптимального управления Белгосуниверситета, кандидат физико-математических наук.

Закончил математический факультет БГУ в 1969 г. Заместитель декана факультета прикладной математики и информатики по научной работе.

Опубликовано более 120 научных работ. Один из авторов учебного пособия «Методы оптимизации: упражнения и задания».



ПАВЛЕНOK Наталия Сергеевна

Доцент кафедры методов оптимального управления Белгосуниверситета, кандидат физико-математических наук.

В 2001 г. закончила факультет прикладной математики и информатики Белгосуниверситета.

Автор более 30 научных работ.

ISBN 9789856981527



9 789856 981527