§9. Отображения.
Основные типы отображений

Определение отображения

- Имеется, но ссылается на ещё не введённое понятие, поэтому здесь приведено не будет.

Подход: интуитивное представление

Пусть X, Y — непустые множества.

- Отображением множества X во множество Y или функцией, определённой на множестве X со значениями во множестве Y называется правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Важнейшие свойства

- Каждому $x \in X$
- Единственный $y \in Y$.

Обозначения

- $f : X \to Y$
  «отображение f [действует/действующее]
  из множества X во множество Y»
- $X \overset{f}{\mapsto} Y$
  «множество X отображается во множество Y
  функцией f»

Обозначения

- $f(x_0)$
  «элемент [из Y], поставленный
  отображением f в соответствие элементу x_0 [из X]»
- $y_0 = f(x_0)$
  «y_0 — это элемент [из Y], поставленный
  отображением f в соответствие элементу x_0 [из X]»

Понятия

Если $y_0 = f(x_0)$:

- элемент y_0 называется образом элемента x_0 [при отображении f]

  или значением функции f на элементе/в точке x_0;
- элемент x_0 называется прообразом элемента y_0 [при отображении f].

Замечание

Прообразов у произвольного элемента $y_0 \in Y$ при отображении f может быть несколько!

А может не быть вообще.

Понятия

Пусть $f : X \to Y, A \subseteq X$.

- Множество $\{f(a) \mid a \in A\}$
  называется образом множества A [при отображении f]
  и обозначается $f(A)$.

Пусть $f : X \to Y, B \subseteq Y$.

- Множество $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$
  называется полным прообразом множества B
  [при отображении f]
  и обозначается $f^{-1}(B)$.

Пусть $f : X \to Y, y \in Y$.

- Множество $\{x \in X \mid f(x) = y\}$
  называется полным прообразом элемента y
  [при отображении f]
  и будет нами обозначаться $f^{-1}(\{y\})$.

Пусть $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$.
Мы будем считать функции f_1 и f_2 равными только при выполнении каждого из следующих условий:

- $X_1 = X_2$,
- $Y_1 = Y_2$,
- $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ для каждого $x_0 \in X_1$.

Отображение $f : X \to Y$ называется:

- инъективным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Утверждение

Следующие утверждения эквивалентны:

- $f : X \to Y$ *инъективно;*
- *для любого* $y \in Y$ *выполнено*

$$|f^{-1}(\{y\})| \leq 1.$$

Отображение $f : X \to Y$ называется:

- сюръективным, если $f(X) = Y$.

Утверждение

Следующие утверждения эквивалентны:

- $f : X \to Y$ *сюръективно;*
- *для любого* $y \in Y$, *такого что* $f^{-1}(\{y\})$ *конечно, выполнено:*

$$|f^{-1}(\{y\})| \geq 1.$$

Отображение $f : X \to Y$ называется:

- биективным, если f инъективно и сюръективно.

Утверждение

Следующие утверждения эквивалентны:

- $f : X \to Y$ *биективно;*
- *для любого* $y \in Y$ *выполнено:*

$$|f^{-1}(\{y\})| = 1.$$

Теорема 1

Пусть X, Y — конечные множества, $|X| = n$, $|Y| = m$, $f : X \to Y$ — отображение.
Тогда:

- *если f инъективно, то $n \leqslant m$;*
- *если f сюръективно, то $n \geqslant m$;*
- *если f биективно, то $n = m$;*

Доказательство

- Заметим, что, поскольку f является отображением, имеет место следующее равенство множеств:

$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}).$$

- Более того, при $y_1 \neq y_2$ выполнено

$$f^{-1}(\{y_1\}) \cap f^{-1}(\{y_2\}) = \varnothing,$$

откуда следует, что

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(\{y\})|.$$

Доказательство

$$|X| = \sum_{y\in Y} |f^{-1}(\{y\})|$$

- Поскольку

$$|f^{-1}(\{y\})| \begin{cases} \leqslant 1, & \text{если f инъекция} \\ \geqslant 1, & \text{если f сюръекция} \\ = 1, & \text{если f биекция,} \end{cases}$$

то

$$|X| \begin{cases} \leqslant \sum\limits_{y\in Y} 1, & \text{если f инъекция} \\ \geqslant \sum\limits_{y\in Y} 1, & \text{если f сюръекция} \\ = \sum\limits_{y\in Y} 1, & \text{если f биекция.} \end{cases}$$

Доказательство

$$|X| \begin{cases} \leqslant \sum\limits_{y \in Y} 1, & \text{если f инъекция} \\ \geqslant \sum\limits_{y \in Y} 1, & \text{если f сюръекция} \\ = \sum\limits_{y \in Y} 1, & \text{если f биекция.} \end{cases}$$

- Но $\sum\limits_{y \in Y} 1 = |Y|$, откуда окончательно имеем:

$$|X| \begin{cases} \leqslant |Y|, & \text{если f инъекция} \\ \geqslant |Y|, & \text{если f сюръекция} \\ = |Y|, & \text{если f биекция.} \end{cases}$$

- Что и требовалось доказать.

§10. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле на кроликах

Пусть

- имеется n кроликов,
- имеется m отдельных клеток,
- $n > m$,
- и все кролики рассажены по клеткам (т. е. каждый кролик сидит хоть в какой-то клетке, но не в двух сразу).

Тогда:

- найдётся клетка, в которой сидит хотя бы два кролика.

Принцип Дирихле в терминах отображений

Пусть

- X — конечное множество, $|X| = n$,
- Y — конечное множество, $|Y| = m$,
- $n > m$,
- и задано отображение $f : X \to Y$.

Тогда:

- f не инъективно.

Доказательство принципа Дирихле

Доказательство

Принцип Дирихле настолько очевиден, что его доказательство

Доказательство принципа Дирихле

Доказательство

проводится методом от противного.

Зачем нужен принцип Дирихле?

- Чтобы ссылаться на него, а не проводить его доказательство заново каждый раз.

Пример 1: простейший

Правда ли, что среди любых 13 людей всегда найдутся двое, у которых дни рождения в одном и том же месяце?

Пример 1: ответ

- 13 людей,
- 12 месяцев,
- $13 > 12$,
- у каждого человека день рождения хоть в каком-то месяце.

По принципу Дирихле:

- найдётся месяц, в котором
  дни рождения хотя бы у двух из этих 13 людей.

Пример 2: сложный

Имеется n попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, таких что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < 2^n - 1.$$

Докажите, что существуют два непустых непересекающихся множества $X, Y \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ с тем свойством, что

$$\sum_{a_i \in X} a_i = \sum_{a_j \in Y} a_j.$$

Решение: идейно

- Непустых подмножеств множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — $2^n - 1$.
- Различных сумм элементов этих подмножеств: $< 2^n - 1$ (потому что сумма всех $< 2^n - 1$ по условию.)
- Принцип Дирихле.
- Есть два множества с одинаковой суммой.
- Они могут пересекаться — уберём из каждого общие элементы.

Решение: официально

- Рассмотрим множество M
  всех непустых подмножеств множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
- Пусть $T \in M$.
  Через $f(T)$ обозначим сумму всех элементов множества T.
- Построим множество $S = \{f(T) \mid T \in M\}$ — множество всевозможных сумм элементов множеств из M.
- Тогда введённое нами правило $f(T) = \sum\limits_{a_i \in T} a_i$
  задаёт отображение $f : M \to S$
  (поскольку для каждого множества $T \in M$
  можно вычислить сумму его элементов,
  притом единственным образом).

- Заметим, что для любого $T \in M$ выполнены неравенства:

$$1 \leqslant f(T) = \sum_{a_j \in T} a_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i < 2^n - 1.$$

- Следовательно, $|S| < 2^n - 1$.
- Но $|M| = 2^n - 1$.
- По принципу Дирихле заключаем,
  что $f : M \to S$ не инъективно,
  а значит, имеются два различных множества
  $B \in M, C \in M$,
  суммы элементов которых равны.

- Заметим, что не выполнено ни $B \subseteq C$, ни $C \subseteq B$, поскольку в противном случае нарушалось бы равенство $f(B) = f(C)$.
- Рассмотрим множества $X = B \setminus (B \cap C) = B \setminus C$ и $Y = C \setminus (B \cap C) = C \setminus B$.
- В силу сделанного нами замечания, $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$.
- Поскольку $f(B) = f(C)$, то и $f(X) = f(Y)$.
- Остаётся лишь заметить, что $X \cap Y = \varnothing$.
- Таким образом,
  существование требуемых множеств X и Y доказано.

Обобщённый принцип Дирихле на кроликах

Пусть

- имеется n кроликов,
- имеется m отдельных клеток,
- $n > k \cdot m$, где $k \in \mathbb{N}$,
- и все кролики рассажены по клеткам
(т. е. каждый кролик сидит хоть в какой-то клетке,
но не в двух сразу).

Тогда:

- найдётся клетка, в которой сидит хотя бы $k + 1$ кролик.

Обобщённый принцип Дирихле в терминах отображений

Пусть

- X — конечное множество, $|X| = n$,
- Y — конечное множество, $|Y| = m$,
- $n > k \cdot m$, где $k \in \mathbb{N}$,
- и задано отображение $f : X \to Y$.

Тогда:

- существуют хотя бы $k+1$ различных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in X$ с одинаковым при отображении f образом.

Доказательство обобщённого принципа Дирихле

Доказательство

Аналогично.

Пример 3

На плоскости выбираются
n различных целочисленных точек, т. е.

- $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, где $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.
- При каком наименьшем n можно утверждать, что среди этих точек есть две, середина отрезка с концами в которых тоже целочисленная?

Важный факт

Середина отрезка с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Четырёх не хватит:

- $(0,1)$
- $(0,0)$
- $(1,1)$
- $(1,0)$

Хватит пяти!
«Клетки»:

- (чётная, нечётная)
- (чётная, чётная)
- (нечётная, нечётная)
- (нечётная, чётная)

Пример 4

На плоскости выбираются
n различных целочисленных точек, т. е.

- $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$, где $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.
- При каком наименьшем n можно утверждать, что среди этих точек есть три, центроид которых — целочисленная точка?

Важный факт

Центроид треугольника, координаты вершин которого (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Тринадцати хватит.
Смотрим по остаткам от деления на 3:

- $(0, \dots)$
- $(1, \dots)$
- $(2, \dots)$

$13 > 4 \cdot 3$, следовательно, имеются 5 точек,
у которых одинаков остаток первой координаты.
Смотрим на остатки второй координаты:

- $(a, 0)$
- $(a, 1)$
- $(a, 2)$

Если есть все три остатка — берём эти три точки,
иначе $5 > 2 \cdot 2$ — есть три с одинаковым остатком.

- Реальный минимум на самом деле: 9 точек.
- А ещё есть обобщение задачи на большие размерности! (Открытые)