Вариант 12

Задание 2.1 (испр.) Привести уравнение к каноническому виду (гиперболический тип)

Ответ:

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} \quad &+ \frac{(-y^2 + \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1-\sqrt{1-2y^2}))}{(4x^2y^2-2x^2)}u_\xi \\ &+ \frac{(-y^2 - \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1+\sqrt{1-2y^2}))}{(4x^2y^2-2x^2)}u_\eta = 0 \end{aligned}$$

Задание 2.2 (испр.) Привести уравнение к каноническому виду (параболический тип)

Ответ:

$$u_{\eta\eta} + \frac{(4x^2y + y^3)}{y^2}u_\xi = 0$$

Задание 3.1 (испр.) Привести к каноническому виду (гиперболический тип)

Ответ:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{8\sqrt{-xy}xy}(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}})u_\xi - \frac{1}{8\sqrt{-xy}xy}(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}})u_\eta = 0$$

Задание 3.2 (испр.) Привести к каноническому виду (параболический тип)

Ответ:

$$u_{\eta\eta} = 0$$

Задание 3.3 (испр.) Привести к каноническому виду (элиптический тип)

Ответ:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\xi + \frac{1}{2x\sqrt{x}}u_\eta$$

Задание 4 (испр.). Привести уравнение к каноническому виду и упростить

Упростим уравнение:

$$2u_{\xi\eta} - u_\eta + 2u = 0$$

Проведем замену:

$$u = e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta}v$$

$$u_\eta = (\alpha_2 v + v_\eta)e^{\alpha_1\xi+\alpha_2\eta}$$

$$u_{\xi\eta} = (\alpha_2 v_\xi + \alpha_1\alpha_2 v + \alpha_1 v_\eta + v_{\xi\eta})e^{\alpha_1\xi+\alpha_2\eta}$$

Вычислим коэффициенты

$$v_{\xi\eta} : 2 \qquad v : 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 + 2$$

$$v_\xi : 2\alpha_2 \qquad v_\eta : 2\alpha_1 - 1$$

Подставим и получим:

$$2v_{\xi\eta} + 2v = 0 \Rightarrow v_{\xi\eta} + v = 0$$

Ответ: $v_{\xi\eta} + v = 0$

Задание 7 (испр.). Решить задачу Гурса

$$\begin{cases} u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0, \\ x > 0, y > 0, \\ u(x, 2x) = e^x, u(x, 4x) = xe^x, \end{cases}$$

Ответ:

$$u(x,y) = e^{-\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}y}((\frac{1}{2}y - x)e^{-2y+x} + e^{-3y+3x})$$

Код для проверки решения:

```
pde = D[u[x, y], {x, 2}] + 6*D[u[x, y], x, y] + 8*D[u[x, y], {y, 2}]
+ D[u[x, y], x] + D[u[x, y], y] == 0;
bc1 = u[x, 2*x] == Exp[x];
bc2 = u[x, 4*x] == x*Exp[x];

sol = DSolve[{pde, bc1, bc2}, u[x, y], {x, y}] // Simplify

FullSimplify[sol]
```

Результат проверки:

```
{{u[x_, y_] -> E^(-(1/2)*x + (11/8)*y)*(((1/2)*y - x)*E^(-2*y + x) + E^(-
```

Задание 9 (испр.). Решить задачу Коши

$$x\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + y\,u_{yy} = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$$

$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \qquad u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}} = -x^4$$

Ответ:

$$u = \frac{x^2}{y}$$

Код для проверки решения:

```
pde = x*D[u[x, y], {x, 2}] + (x + y)*D[u[x, y], x, y]
+ y*D[u[x, y], {y, 2}] == 0;

bc1 = u[x, 1/x] == x^3;
bc2 = Derivative[0, 1][u][x, 1/x] == -x^4;

sol = DSolve[{pde, bc1, bc2}, u[x, y], {x, y}]
```

Результат проверки:

```
{{u[x, y] -> x^2/y}}
```