БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Использование рекуррентных уравнений для оценки времени работы алгоритма

(на примере алгоритмов поиска и внутренней сортировки)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Соотношения, которые связывают одни и те же функции, но с различными значениями аргументов, называются **рекуррентными соотношениями или рекуррентными уравнениями**.

Рекуррентное уравнение будем называть **правильным**, если значения аргументов у любой из функций в правой части соотношения меньше значения аргументов у любой из функций в левой части соотношения; если аргументов несколько, то достаточно уменьшения одного из них.

Правильное рекуррентное уравнение называется **полным**, если оно определено для всех допустимых значений аргументов.

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + C_2, n \geq 1 \\ T(0) = C_1 \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать (если не оговорено иное), что область определения функции $T(n)$ – это множество неотрицательных целых чисел $\{0,1,2,\dots\}$ и сама функция $T(n)$ принимает только неотрицательные целочисленные значения.
Это допущение вызвано тем, что функция $T(n)$ будет нами чаще всего использоваться для описания времени работы алгоритма.

Полное рекуррентное соотношение?

нет
$$\begin{cases} \mathrm{T}(n) = T(n-1) + c_1 \cdot n, n \geq 2 \\ T(0) = c_1 \end{cases}$$

да
$$\begin{cases} \mathrm{T}(n) = T(n-1) + c_1 \cdot n, n \geq 2 \\ T(1) = c_1 \end{cases}$$

да
$$\begin{cases} \mathrm{T}(n) = T(n-1) + c_1 \cdot n, n \geq 1 \\ T(0) = c_1 \end{cases}$$

да
$$\begin{cases} \mathrm{T}(n) = 2 \cdot T(n-2) + c_1 \cdot (n-1), n \geq 2 \\ T(1) = c_2, T(0) = c_3 \end{cases}$$

нет
$$\begin{cases} \mathrm{T}(n) = T(n-2) + c_1 \cdot n, n \geq 1 \\ T(0) = c_2 \end{cases}$$

Поиск максимального и минимального элементов в массиве

Задан массив из n элементов. Рассмотрим два алгоритма нахождения максимального и минимального элементов.

Оценим <u>число операций сравнения</u>, выполненных каждым из алгоритмов.

Алгоритм 1

<u>Последовательный поиск max и min</u>

Первый элемент массива полагаем в качестве **max** и **min**.

Каждый из оставшихся $(n-1)$ элементов сравниваем с **max** и **min**, и, если надо, то корректируем значения **max** и **min**.

```
template <class Iter>
std::pair<Iter, Iter> MinMaxElement2(Iter begin, Iter end) {
    std::pair<Iter, Iter> res = std::make_pair(begin, begin);
    for (Iter it = begin + 1; it != end; ++it) {
        if (*it < *res.first) {
            res.first = it;
        }
        if (*it > *res.second) {
            res.second = it;
        }
    }
    return res;
}
```

Оценим число операций сравнения для алгоритма последовательного поиска максимального и минимального элементов массива:

Способ 1. Просто подсчитаем: $0+(n-1)\cdot 2=2n-2$

Способ 2. Составим рекуррентное соотношение $\begin{cases} T(n)=T(n-1)+2, n\geq 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$

Решение уравнения методом ИТЕРАЦИЙ

$$T(n)=\underbrace{T(n-1)+2}_{1\text{–й шаг}}=[T(n-1)=T(n-2)+2]=$$

$$\underbrace{T(n-2)+2+2}_{2\text{–й шаг}}=[T(n-2)=T(n-3)+2]=\underbrace{T(n-3)+2+2+2}_{3\text{–й шаг}}=\cdots$$

$$\ldots=\underbrace{T(n-m)+2\cdot m}_{m\text{–й шаг}}=\begin{bmatrix} T(n-m)=T(1) \\ n-m=1; m=n-1 \end{bmatrix}=\underbrace{T(1)+2\cdot(n-1)}_{(n-1)\text{–й шаг}}=$$

$$=0+2(n-1)=2n-2$$

Алгоритм 2

«Разделяй и властвуй»

(«метод турниров»)

1. Разделим массив на две части (предположим, что $n=2^k$).

2. В каждой из частей этим же алгоритмом найдём локальные (max_1, min_1) (max_2 , min_2).

   Если в рассматриваемой области остаётся только два элемента, то деление не выполняем, а за одно сравнение определим максимальный и минимальный элемент этой области.

3. Полагаем

max=*наибольший* (max_1,max_2),

min=*наименьший* (min_1 ,min_2).

```cpp
template <class Iter>
std::pair<Iter, Iter> MinMaxElement(Iter begin, Iter end) {
    size_t n = end - begin;
    if (n == 1) {
        return std::make_pair(begin, begin);
    } else if (n == 2) {
        Iter first = begin;
        Iter second = begin + 1;
        if (*first < *second) {
            return std::make_pair(first, second);
        } else {
            return std::make_pair(second, first);
        }
    } else {
        Iter mid = begin + n / 2;
        std::pair<Iter, Iter> r1 = MinMaxElement(begin, mid);
        std::pair<Iter, Iter> r2 = MinMaxElement(mid, end);
        return std::make_pair(
            *r1.first < *r2.first ? r1.first : r2.first,
            *r1.second > *r2.second ? r1.second : r2.second
        );
    }
}
```

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2, n = 2^k, k \geq 2 \\ T(2) = 1 \end{cases}$$

Сведения из математики

Сумма геометрической прогрессии:

$$q^1 + q^2 + \dots + q^k = \frac{q \cdot \left(q^k - 1\right)}{q - 1}$$

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Решим рекуррентное уравнение методом итераций:

$$\begin{cases} T(n) = 2\cdot T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2, n = 2^k, k \geq 2 \\ T(2) = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$T(n) = \underbrace{2\cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 2}_{1\text{–й шаг}} = \left[T\left(\frac{n}{2}\right) = 2\cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\right] = \underbrace{2^2\cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2^2 + 2^1}_{2\text{–й шаг}} = \ldots$$

$$= \underbrace{2^m\cdot T\left(\frac{n}{2^m}\right) + 2^m + \ldots + 2^2 + 2^1}_{m\text{–й шаг}} = 2^m\cdot T\left(\frac{n}{2^m}\right) + \frac{2\cdot\left(2^m - 1\right)}{2-1} = \left[\begin{array}{l} T\left(\dfrac{n}{2^m}\right) = T(2) \\ \dfrac{n}{2^m} = 2;\ \ 2^m = \dfrac{n}{2};\ \ m = \log_2 n - 1 \end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{2}\cdot T(2) + 2\cdot\left(\frac{n}{2} - 1\right)}_{(\log_2 n - 1)\text{–й шаг}} = \frac{n}{2}\cdot 1 + 2\cdot\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}\cdot n - 2$$

Поиск максимального и минимального элементов в массиве

Последовательный поиск

$$2n-2$$

Метод «разделяй и властвуй»

$$\frac{3}{2}n-2$$

Оба алгоритма работают за время: $\Theta(n)$.

В алгоритме последовательного поиска можно получить оценку $2n-3$, выбирая на начальном этапе за одно сравнение из первых двух элементов массива максимальный и минимальный элемент. Затем оставшиеся $n-2$ элемента сравниваются с максимальным и минимальным: $1+2(n-2)=2n-3$.

Алгоритм, основанный на принципе «разделяй и властвуй», выполняет меньше сравнений, но на практике может быть медленнее из-за накладных расходов, вызванных рекурсией.

Существует не рекурсивный алгоритм, который выполняет ~ 3 n /2 сравнений.
В этом алгоритме поддерживается значение **max, min** на том префиксе, который уже пройден:

0	1	2	3	4	5			n-2	n-1
1 сравнение: **max, min**		для двух элементов за 1 сравнение находим **max’** и **min’**; затем ещё за 2 сравнения: **max** =наибольший (**max, max’**) **min** =наименьший (**min, min’**)		для двух элементов за 1 сравнение находим **max’** и **min’**; затем ещё за 2 сравнения: **max** =наибольший (**max, max’**) **min** =наименьший (**min, min’**)		и т.д.			
		3 сравнения		3 сравнения				3 сравнения	

$$\left\lceil \frac{3\cdot(n-2)}{2} \right\rceil + 1$$

В C ++ не рекурсивный алгоритм, который выполняет ~ 3· n/2 сравнений, реализован как функция `std::minmax_element()` библиотеки `STL`.

https://en.cppreference.com/w/cpp/algorithm/minmax_element

Поиск элемента в упорядоченном массиве

Задан упорядоченный массив $\boldsymbol{A}$ из $\boldsymbol{n}$ элементов: $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_{n-1}$
В массиве элементы могут повторяться.

Необходимо определить, есть ли среди элементов массива заданный элемент x.

$$? \; x = 5$$

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
2	4	5	5	5	27	61	91	97

$$n = 9$$

БИНАРНЫЙ ПОИСК (дихотомия)

1. Определяем границы $[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ области поиска как $q = 0, r = n$.

2. Определяем индекс центрального элемента области поиска

$$k = \left\lfloor \frac{q + r}{2} \right\rfloor$$

3. Сравниваем a_k — элемент последовательности и число x.

   Если элементы совпадают, то поиск завершён.

   Если $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{a_k}$, то продолжаем аналогичные действия, изменяя правую границу области поиска на k.

   Если $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{a_k}$, то продолжаем аналогичные действия, изменяя левую границу области поиска на $k + 1$.

4. Алгоритм прекращает работу, как только будет найден требуемый элемент либо станет верным равенство $q = r$ (в этом случае элемента в последовательности нет).

? x=5

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	5	5	<u>5</u>	27	61	91	97

n=9

```
def BinarySearch(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q < r:
               k = (q + r) // 2
               if x == a[k]:
                     return True
               else if x < a[k]:
                     r = k
               else: # x > a[k]
                     q = k + 1
return False
```

LowerBound

Задача поиска индекса первого элемента, большего, чем x, либо равного ему.

В случае отсутствия в массиве подходящих элементов договоримся, что возвращаемое значение будет равно n.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	5	5	5	27	61	91	97

$x = 5$ LowerBound(5) = 2

$x = 6$ LowerBound(6) = 5

$x = 100$ LowerBound(100) = 9

```
def LowerBound(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q < r:
                k = (q + r) // 2
                if x ≤ a[k]:
                        r = k
                else: # x > a[k]
                        q = k + 1
return q
```

UpperBound

Задача поиска индекса первого элемента, строго большего, чем x.

В случае отсутствия в массиве подходящих элементов договоримся, что возвращаемое значение будет равно n.

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$a[i]$	2	4	5	5	5	27	61	91	97

$n = 9$

$x = 5$ UpperBound(5) = 5

$x = 6$ Upper Bound(6) = 5

$x = 100$ LowerBound(100)= 9

```
def UpperBound(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q < r:
                k = (q + r) // 2
                if x < a[k]:
                        r = k
                else: # x ≥ a[k]
                        q = k + 1
return q
```

Задача поиска в в массиве заданного элемента $= x$.

```
def BinarySearch(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q < r:
                k = (q + r) // 2
                if x == a[k]:
                        return True
                else if x < a[k]:
                        r = k
                else: # x > a[k]
                        q = k + 1
return False
```

Задача поиска индекса первого элемента $\geq x$

```
def LowerBound(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q < r:
                k = (q + r) // 2


                if x ≤ a[k]:
                        r = k
                else: # x > a[k]
                        q = k + 1
return q
```

Задача поиска индекса первого элемента $> x$

```
def UpperBound(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q< r:
                k = (q + r) // 2


                if x < a[k]:
                        r = k
                else: # x ≥ a[k]
                        q = k + 1
return q
```

```python
def BinarySearch(a, x):
        q = 0, r = len(a)
        while q < r:
                k = (ql + r) // 2
                if x == a[k]:
                        return True
                else if x < a[k]:
                        r = k
                else: # x > a[k]
                        q = k + 1
return False
```

Время работы алгоритма бинарного поиска

$$\begin{cases} T(n) = C_1 + T\left(\frac{n}{2}\right), n = 2^k, k \geq 1 \\ T(1) = C_2 \end{cases}$$

Решение:

$$T(n) = \underbrace{\text{С}_1 + T\left(\frac{n}{2}\right)}_{1\text{–й шаг}} = \left[T\left(\frac{n}{2}\right) = \text{С}_1 + T\left(\frac{n}{2^2}\right)\right] = \underbrace{\text{С}_1 + \text{С}_1 + T\left(\frac{n}{2^2}\right)}_{2\text{–й шаг}} = \cdots = \underbrace{m \cdot \text{С}_1 + T\left(\frac{n}{2^m}\right)}_{m\text{–й шаг}} =$$

$$= \begin{bmatrix} T\left(\frac{n}{2^m}\right) = T(1) \\ \frac{n}{2^m} = 1; \quad 2^m = n \quad m = \log_2 n \end{bmatrix} = \underbrace{\text{С}_1 \cdot \log_2 n + T(1)}_{(\log_2 n)\text{–й шаг}} = \text{С}_1 \cdot \log_2 n + \text{С}_2$$

Вычислительная сложность алгоритма в худшем случае $T(l) = \text{O}(\log l), l = \Theta(n) -$ алгоритм полиномиальный.

В стандартной библиотеке языка C++

Функция std::binary_search выполняет бинарный поиск и возвращает логическое значение (есть элемент или нет).

Функции std::lower_bound и std::upper_bound действуют аналогично рассмотренным и возвращают итераторы.

В языке Java

для классов Arrays и Collections определён статический метод binarySearch, который совмещает в себе описанные выше функции BinarySearch и LowerBound, однако является менее гибким (при наличии в массиве нескольких элементов, равных искомому, метод может вернуть индекс любого).

В языке Python

бинарный поиск реализован в стандартном модуле bisect.

Задача

Задан упорядоченный массив из n элементов и число x.
Разработать алгоритм, который определит, сколько раз в массиве встречается заданное число?
Оценить время работы разработанного вами алгоритма.

Тернарный поиск –

метод поиска минимума или максимума функции на отрезке, которая либо сначала строго возрастает, затем строго убывает, либо наоборот.

Пусть имеется два значения L и R и известно, что максимум (минимум) функции $f(x)$ лежит на отрезке $[L, R]$.

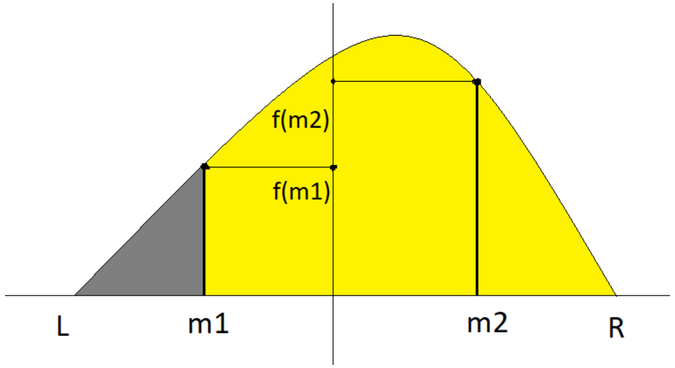
Возьмем две точки на данном отрезке m_1 и m_2, что $m_1 < m_2$, тогда имеется три варианта развития событий:

1. $f(m_1) < f(m_2)$ => максимум не может принадлежать отрезку $[L, m_1]$, продолжаем поиск на отрезке $[m_1, R]$;
2. $f(m_1) > f(m_2)$ => максимум не может принадлежать отрезку $[m_2, R]$ продолжаем поиски на отрезке $[L, m_2]$;
3. $f(m_1) = f(m_2)$ => максимум принадлежит отрезку $[m_1, m_2]$.

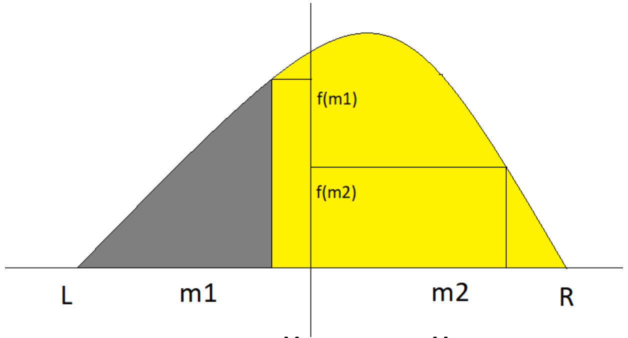
Используя данное соотношение, можно найти максиму с точностью до некоторого eps.
Говоря о выборе данных точек на каждом шаге, принято делить отрезок $[L, R]$ на три части точками:

$$m_1 = L + (R - L)/3$$
$$m_2 = R - (R - L)/3$$

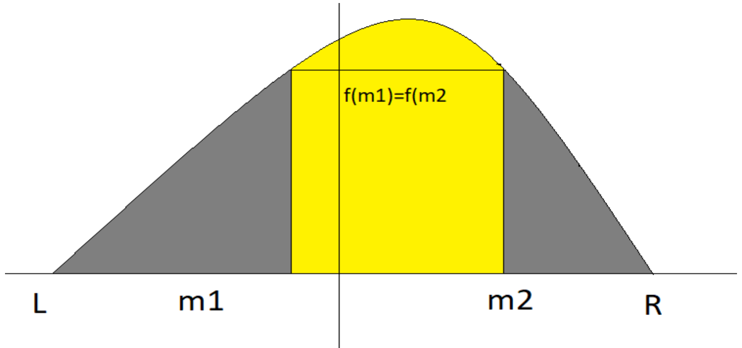
В ходе одного шага мы производит два вычисления функции и уменьшаем шаг в полтора раза, откуда следует, что время работы алгоритма $\mathrm{O}(\log_{3/2}(R - L)$.



1-й случай



2-й случай



3-й случай

Алгоритмы сортировки

Пусть задана последовательность $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ из $\boldsymbol{n}$ элементов (записей), выбранных из множества, на котором задан линейный порядок.

Каждая запись $\boldsymbol{a_j}$ имеет ключ $\boldsymbol{k_j}$, который управляет процессом сортировки.

Задача сортировки заключается в поиске перестановки $\pi = \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ этих n записей, после которой ключи записей расположились бы, например, в неубывающем порядке (будем предполагать порядок сортировки массива по неубыванию, если не оговорено иное):

$$k_{\pi_1} \leq k_{\pi_2} \leq \cdots \leq k_{\pi_n}.$$

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
k_i	7	2	3	5	1	8	11	4	0	6
π_i	9	5	2	3	8	4	10	1	6	7

$$k_9 \leq k_5 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_8 \leq k_4 \leq k_{10} \leq k_1 \leq k_6 \leq k_7$$

Алгоритм сортировки называют **устойчивым** (**стабильным**), если в процессе сортировки относительное расположение элементов с одинаковыми ключами не изменяется:

$$\pi_i < \pi_j, \text{ если } k_{\pi_i} \leq k_{\pi_j} \text{ и } i < j.$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_i	7	2_1	2022	607	1	2_2	3_1	4	0	3_2
π_i	9	5	2	6	7	10	8	1	4	3

$$k_9 \leq k_5 \leq k_2 \leq k_6 \leq k_7 \leq k_{10} \leq k_8 \leq k_1 \leq k_4 \leq k_3$$

$$0 \leq 1 \leq 2_1 \leq 2_2 \leq 3_1 \leq 3_2 \leq 4 \leq 7 \leq 607 \leq 2022$$

Процесс сортировки данных может быть осуществлен различными алгоритмами. Если объем входных данных позволяет обходиться исключительно основной (оперативной) памятью, то говорят об алгоритмах **внутренней сортировки**, в противном случае – об алгоритмах **внешней сортировки**.

Большинство алгоритмов внутренней сортировки относятся к классу **сортировок сравнениями** (англ. *comparison sort*).

Алгоритмы сортировок сравнениями выполняют только операции сравнения элементов и их перемещения (обмены), но никак не используют их внутреннюю структуру.

Для алгоритмов сортировок сравнениями известна нижняя оценка:

$$\Omega(n \cdot \log n),$$

т.е. нельзя выполнить внутреннюю сортировку n записей асимптотически быстрее, чем $n \cdot \log n$.

Рассмотрим в качестве примера алгоритма внутренней сортировки, который **не принадлежит классу алгоритмов сортировки сравнениями**, устойчивый алгоритм **сортировки подсчётом** *(англ. counting sort).*

В сортировке подсчётом предполагается, что все входные числа целые и принадлежат интервалу от 0 до k, где k − некоторая целая константа.

если все числа $0 \leq a_i \leq r$, то диапазон возможных значений $[0..r]$;

если все числа целые и неотрицательные и $0 \leq l \leq a_i \leq r$, то диапазон возможных значений $[0..r-l]$, а при работе с числом мы вычитаем из него число l;

если все числа целые, среди них могут быть отрицательные и $l \leq a_i \leq r$, то диапазон возможных значений $[0..r+|l|]$, а при работе с числом мы добавляем к нему величину $|l|$.

$\downarrow$

-3	3	5	-2	-0
0	6	8	1	3

$-3 \leq a_i \leq 5$

$|l|$=3

$[0..8]$

Алгоритм сортировки подсчётом применяется в случае, когда сортируемые элементы можно отобразить в диапазон возможных значений, который достаточно мал, по сравнению с числом сортируемых элементов.

Если $k = O(n)$, то время работы алгоритма сортировки подсчётом $- O(n)$.

Предположим, что элементы массива $A = \{a_0, \dots, a_5\}$ лежат в диапазоне $[0..8]$:

	0	1	2	3	4
$a[i]$	**0**	**6_1**	**6_2**	**8**	**1**

<u>на 1–м этапе</u>

создадим массив $\mathrm{C}\ [0..r]$, где
$\mathrm{c}[i]$ - количество элементов массива, равных i;

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{c}[i]$	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**1**

```
for i = 0 to r
        c[i] = 0;
 for i = 0 to l - 1
        c[a[i]] = c[a[i]] + 1;
```

<u>на 2-м этапе</u>

$\mathrm{c}[i]$ — количество элементов
массива A, которые $\leq i$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{c}[i]$	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**4**	**4**	**5**

```
for j = 1 to r
        c[j] = c[j] + c[j - 1];
```

<u>на 3–м этапе</u>

просматриваем массив A справа налево и заносим элемент $\mathrm{a}[i]$ в массив $A^{\text{сорт}}$ по индексу $c[a[i]] - 1$ и уменьшаем значение на $c[a[i]]$ на 1.

	0	1	2	3	4
$a[i]$	0	6_1	6_2	8	1
$a^{\text{сорт}}[i]$	**0**	**1**	**6_1**	**6_2**	**8**

```
for i = n - 1 to 0
    {aсорт[c[a[i]]-1] = a[i];
     c[a[i]] = c[a[i]] - 1 }
```

Время работы: $\Theta(n + r)$.

Память: $\Theta(n + r)$.

Алгоритмы
внутренней сортировки
сравнениями

1. Сортировка выбором (англ. SelectionSort)
2. Обменные алгоритмы сортировки
   Сортировка пузырьком (англ. BubbleSort)
   Шейкерная сортировка (перемешиванием) (англ. CocktailSort)
3. Сортировка вставками (включением) (англ. *InsertionSort*)

$\Theta(l^2)$

4. Сортировка слиянием (англ. *MergeSort*)
5. Быстрая сортировка Ч. Хоара (англ. *QuickSort*)

$O(l \cdot \log l)$

6. Сортировка кучей (пирамидальная) (англ. HeapSort)

$O(l \cdot \log l)$

Для оценки времени работы алгоритмов внутренней сортировки сравнениями составим рекуррентное уравнение, решим его и оценим время работы алгоритма.

Сортировка выбором

	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	7	14	70	0	1
1:	**0**	3	7	14	70	2	1
2:	**0**	**1**	7	14	70	2	3
3:	**0**	**1**	**2**	14	70	7	3
4:	**0**	**1**	**2**	**3**	70	7	14
5:	**0**	**1**	**2**	**3**	**7**	70	14
6:	**0**	**1**	**2**	**3**	**7**	**14**	70

На первой итерации среди n элементов массива найти элемент с минимальным ключом и поменять его с первым элементом. Теперь первый элемент стоит на своем месте.

Повторить описанные действия с оставшимися $n-1$ элементом.

Процесс завершается через $n-1$ итерацию.

Особенность: один обмен элементов массива в памяти компьютера на одну итерацию.

$$\begin{cases} T(n) = C_1 n + T(n-1), n \geq 2 \\ T(1) = C_2 \end{cases}$$

Сортировка выбором

$$\begin{cases} T(n) = \mathrm{C}_1 \cdot n + T(n-1), n \geq 2 \\ T(1) = \mathrm{C}_2 \end{cases}$$

$$T(n) = \underbrace{C_1 n + T(n-1)}_{1-\text{й шаг}} = [T(n-1) = C_1(n-1) + T(n-2)] =$$

$$\underbrace{C_1 n + C_1(n-1) + T(n-2)}_{2-\text{й шаг}} = [T(n-2) = C_1(n-2) + T(n-3)]$$

$$= \underbrace{C_1 n + C_1(n-1) + C_1(n-2) + T(n-3)}_{3-\text{й шаг}} = \cdots$$

$$\ldots = \underbrace{C_1 n + C_1(n-1) + C_1(n-2) + \cdots + C_1(n-m+1) + T(n-m)}_{m-\text{й шаг}} = \begin{bmatrix} T(n-m) = T(1) \\ n-m = 1; m = n-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{C_1 n + C_1(n-1) + C_1(n-2) + \cdots + C_1 \cdot 2 + T(1)}_{(\text{n}-1)-\text{й шаг}} = C_1 \cdot (2 + 3 + \cdots + n) + C_2$$

$$= \frac{(n+2)}{2} \cdot (n-1) \cdot C_1 + C_2$$

$T(l) = \mathrm{O}(l^2), l = \Theta(n) -$ алгоритм полиномиальный

Сортировка пузырьком

1	2	3	4	5	6	7	
2	3	7	14	70	0	1	←
0	2	3	7	14	70	1	←
0	**1**	2	3	7	14	70	←
0	**1**	**2**	3	7	14	70	←
0	**1**	**2**	**3**	7	14	70	←
0	**1**	**2**	**3**	**7**	14	70	←
0	**1**	**2**	**3**	**7**	**14**	70	

На первой итерации просматриваем массив справа налево и при каждом шаге меньший из двух соседних элементов перемещается к левой позиции (обменами).
Теперь первый элемент стоит на своем месте.
Повторить описанные действия с оставшимися $n-1$ элементом.
Процесс завершается через $n-1$ итерацию.

Особенность: на каждой итерации могут происходить многочисленные обмены элементов массива в памяти компьютера.

$$\begin{cases} T(n) = C_1 \cdot n + T(n-1), n \geq 2 \\ T(1) = C_2 \end{cases}$$

$T(l) = O(l^2), l = \Theta(n) -$ алгоритм полиномиальный

Шейкерная сортировка

1	2	3	4	5	6	7
10	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**10**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**10**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**10**

<u>Отличия от пузырьковой сортировки:</u>

1. Чередование направлений просмотра массива: при движении справа налево «всплывает самый лёгкий», при движении слева направо – «тонет самый тяжёлый».
2. Если при некотором проходе нет ни одного обмена, то сортировка досрочно завершается – массив отсортирован.
3. Сужение области просмотра: фиксируется индекс последнего обмена и при движении в противоположную сторону движение начинается с этого индекса.

$$\begin{cases} T(n) = C_1 n + C_2(n-1) + T(n-2), n \geq 2 \\ T(1) = C_3 \end{cases}$$

$T(l) = O(l^2), l = \Theta(n) -$ алгоритм полиномиальный

Сортировка вставками (включением)

1	2	3	4	5	6	7
2	**3**	**1**	**14**	**7**	**0**	**4**
2	**3**	**1**	**14**	**7**	**0**	**4**
1	**2**	**3**	**14**	**7**	**0**	**4**
1	**2**	**3**	**14**	**7**	**0**	**4**
1	**2**	**3**	**7**	**14**	**0**	**4**
0	**1**	**2**	**3**	**7**	**14**	4
0	**1**	**2**	**3**	4	**7**	**14**

Пусть элементы $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ уже упорядочены на предыдущих итерациях (первоначально в качестве упорядоченной части можно взять первый элемент массива).

На очередной итерации надо взять a_i (первый элемент из ещё неупорядоченной части) и включить в нужное место упорядоченной последовательности: $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$. В результате первые i элементов массива будут упорядочены. Данный процесс называют *просеиванием* (выполняется прямое или двоичное включение).

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + C_1 \cdot n, n \geq 2 \\ T(1) = C_2 \end{cases}$$

$T(l) = O(l^2), l = \Theta(n) -$ алгоритм полиномиальный.

Сортировка слиянием

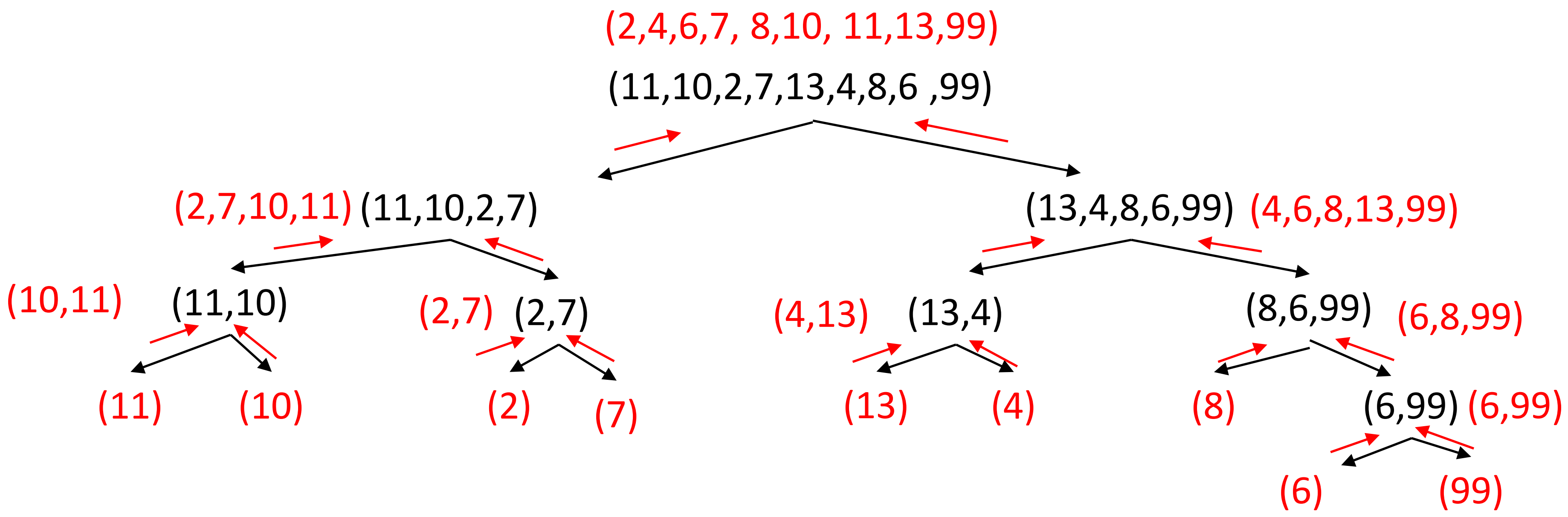
1. Делим последовательность элементов на две части (границы q и r включаем; если сортируемая последовательность состояла из n элементов, то первая часть может содержать $\lfloor n/2 \rfloor$ первых элементов, а вторая часть – оставшиеся; порядок следования элементов в каждой из полученных частей совпадает с их порядком следования в исходной последовательности). Если в последовательности только один элемент, то деление не выполняем.

2. Сортируем отдельно каждую из полученных частей этим же алгоритмом.

3. Производим слияние отсортированных частей последовательности так, чтобы сохранилась упорядоченность.

```
def MergeSort (q,r):
  if q ≠ r:
        k = (q + r) // 2
        MergeSort (q,k)
        MergeSort (k+1,r)
        MergeList (q,k,r)
```

```
def MergeSort (q,r):
  if l ≠ r:
        k = (q + r) // 2
        MergeSort (q,k)
        MergeSort (k+1,r)
        MergeList (q,k,r)
```



MergeList (q,k,r)

	q		k	k+1			r
array	2	3	7	1	4	12	100

Вводим дополнительную память (список вывода), которая по размеру зависит от n.

additional memory							

При слиянии двух упорядоченных частей, которые в исходном массиве занимают смежные области, сравниваем наименьшие элементы каждой из отсортированных частей и меньший из них отправляем в список вывода; повторяем описанные действия до тех пор, пока не исчерпается одна из частей; все оставшиеся элементы другой части пересылаем в список вывода.

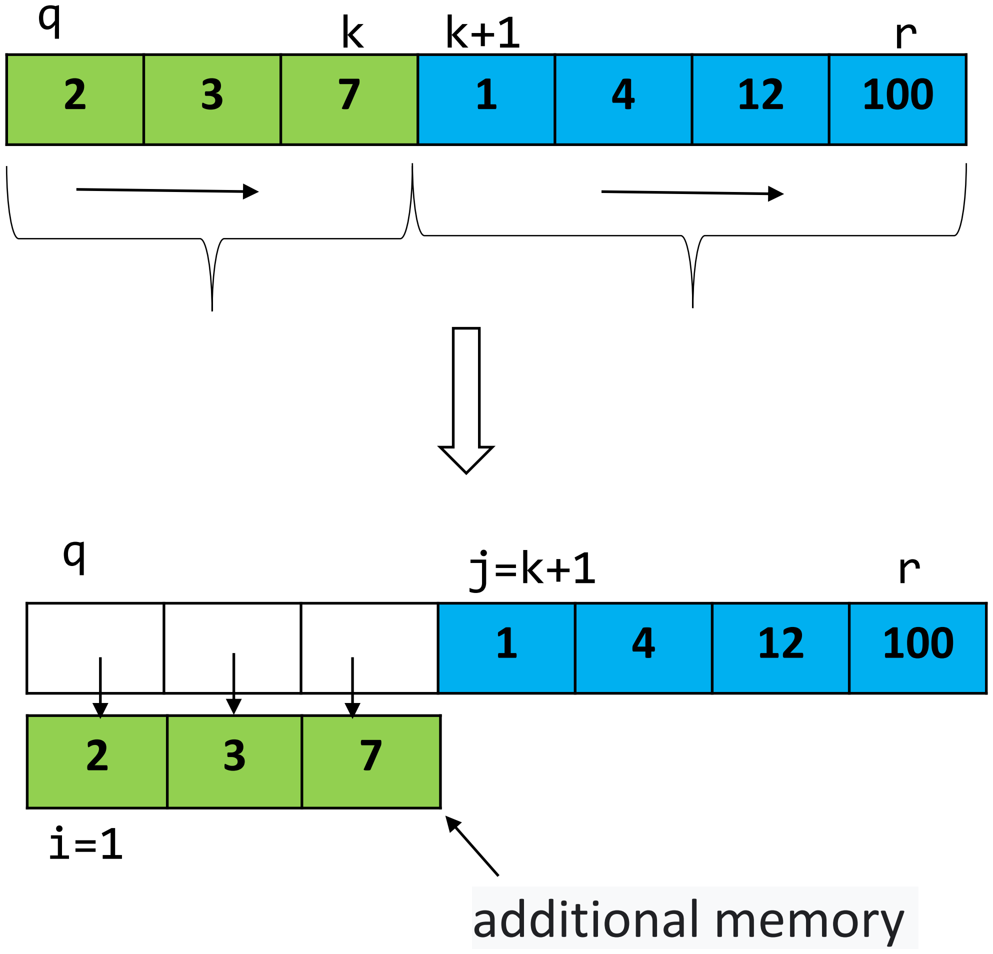
additional memory	1	2	3	4	7	12	100

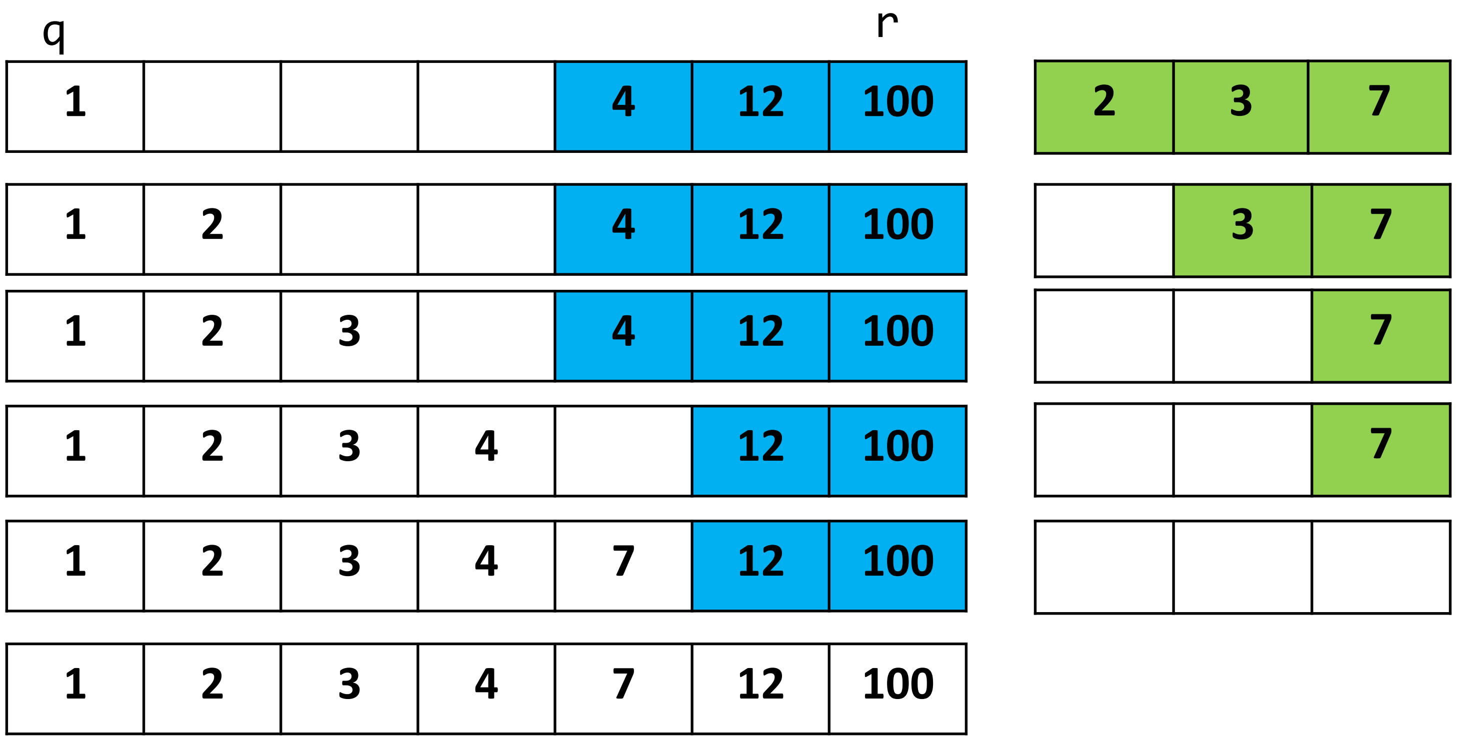
Затем из дополнительной памяти пересылаем элементы в исходный массив, начиная с индекса q и заканчивая r (т.е. на позиции, которые в массиве занимали элементы рассмотренных частей).

	q						r
array	1	2	3	4	7	12	100

MergeList (q,k,r)

Как уменьшить дополнительную память, которая нужна при выполнении функции MergeList?





$$\begin{cases} T(n) = C_1 + 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + C_2 \cdot n, n = 2^k, k \geq 1 \\ T(1) = C_3 \end{cases}$$

```
def MergeSort (l,r):
  if l ≠ r:
        k = (l + r) // 2
        MergeSort (l,k)
        MergeSort (k+1,r)
        MergeList (l,k,r)
```

Решение:

$$T(n) = \underbrace{C_1 + 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + C_2 \cdot n}_{1\text{–й шаг}} = \left[T\left(\frac{n}{2}\right) = C_1 + 2 \cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right) + C_2 \cdot \frac{n}{2}\right] =$$

$$= \underbrace{2^0 \cdot C_1 + 2^1 \cdot C_1 + 2^2 \cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right)}_{2\text{–й шаг}} + C_2 \cdot n + C_2 \cdot n = \cdots =$$

$$= \underbrace{C_1 \cdot (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{m-1}) + 2^m \cdot T\left(\frac{n}{2^m}\right)}_{m\text{–й шаг}} + m \cdot C_2 \cdot n =$$

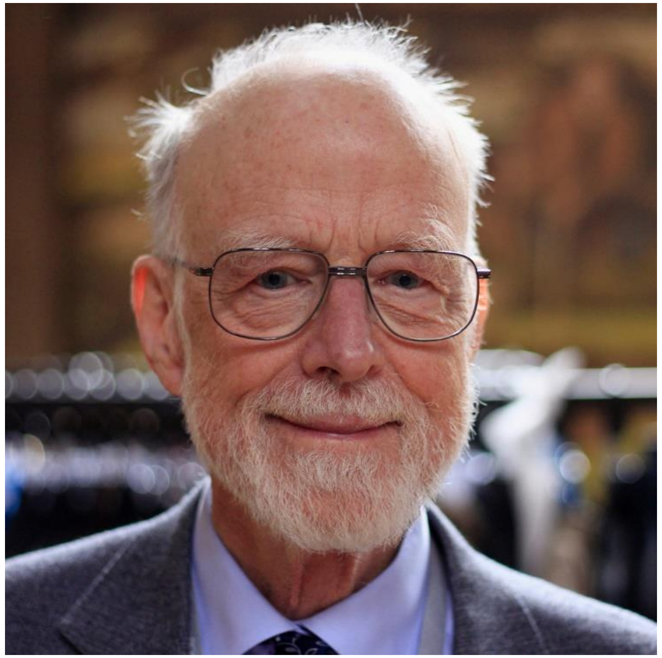
$$= \left[\begin{array}{l} T\left(\frac{n}{2^m}\right) = T(1) \\ \frac{n}{2^m} = 1; \quad 2^m = n \quad m = \log_2 n \end{array}\right] = \underbrace{C_1 \cdot (n-1) + n \cdot T(1) + C_2 \cdot n \cdot \log_2 n =}_{(\log_2 n)\text{–й шаг}}$$

$$= C_2 \cdot n \cdot \log_2 n + C_3 \cdot n + C_1 \cdot (n-1) = C_2 \cdot n \cdot \log_2 n + (C_3 + C_1) \cdot n - C_1$$

$T(l) = O(l \cdot \log l), l = \Theta(n) -$ алгоритм полиномиальный.

Быстрая сортировка Ч. Хоара (C.A.R. Hoare)

Чарльз Энтони Ричард Хоар
Charles Antony Richard Hoare



В **1960** году английский учёный Ч. Хоар разработал алгоритм «быстрой сортировки», который является наиболее популярным до настоящего времени.

Дата рождения: 11 января 1**934** года
Страна: Великобритания
Научная сфера: Информатика
Награды: Премия Тьюринга, медаль «Пионер компьютерной техники»
Известен как разработчик «быстрой сортировки»

QuickSort (q,r)

```
def QuickSort(q, r):
    if q < r:
        p=Partition(q,r)
        QuickSort(q, p-1)
        QuickSort(p+1, r)
```

Если $q \geq r$ то QuickSort (q,r) *завершает работу.*

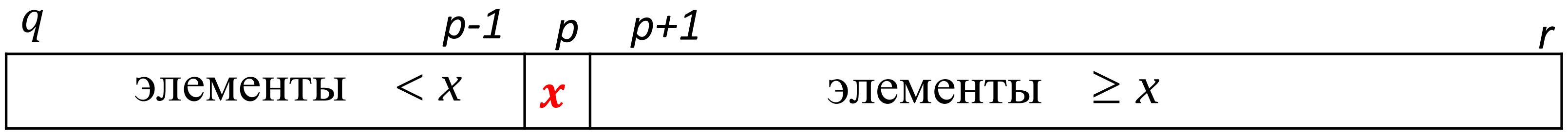
Если $q < r$ то

1. Выбирается разделитель (сепаратор, опорный элемент) (англ. pivot) – некоторый элемент $\boldsymbol{x}$ из рассматриваемой области. Например, в качестве сепаратора можно выбрать первый элемент области, т.е. $\boldsymbol{x} = array[q]$.

2. Относительно сепаратора $\boldsymbol{x}$ массив разделим на три части (алгоритм Н. Ламуто):
   - I часть - элементы строго меньше $\boldsymbol{x}$ (в array располагаются по индексам от *q* до *p-1);*
   - II часть - элемент $\boldsymbol{x}$ (в array располагается по индексу *p*);
   - III часть – элементы больше или равные $\boldsymbol{x}$ (в array располагаются по индексам от *p+1* до *r*);

3. Рекурсивно вызываем алгоритм для первой и третьей части (если они не пустые):

   QuickSort(q,p-1)
   QuickSort(p+1,r)

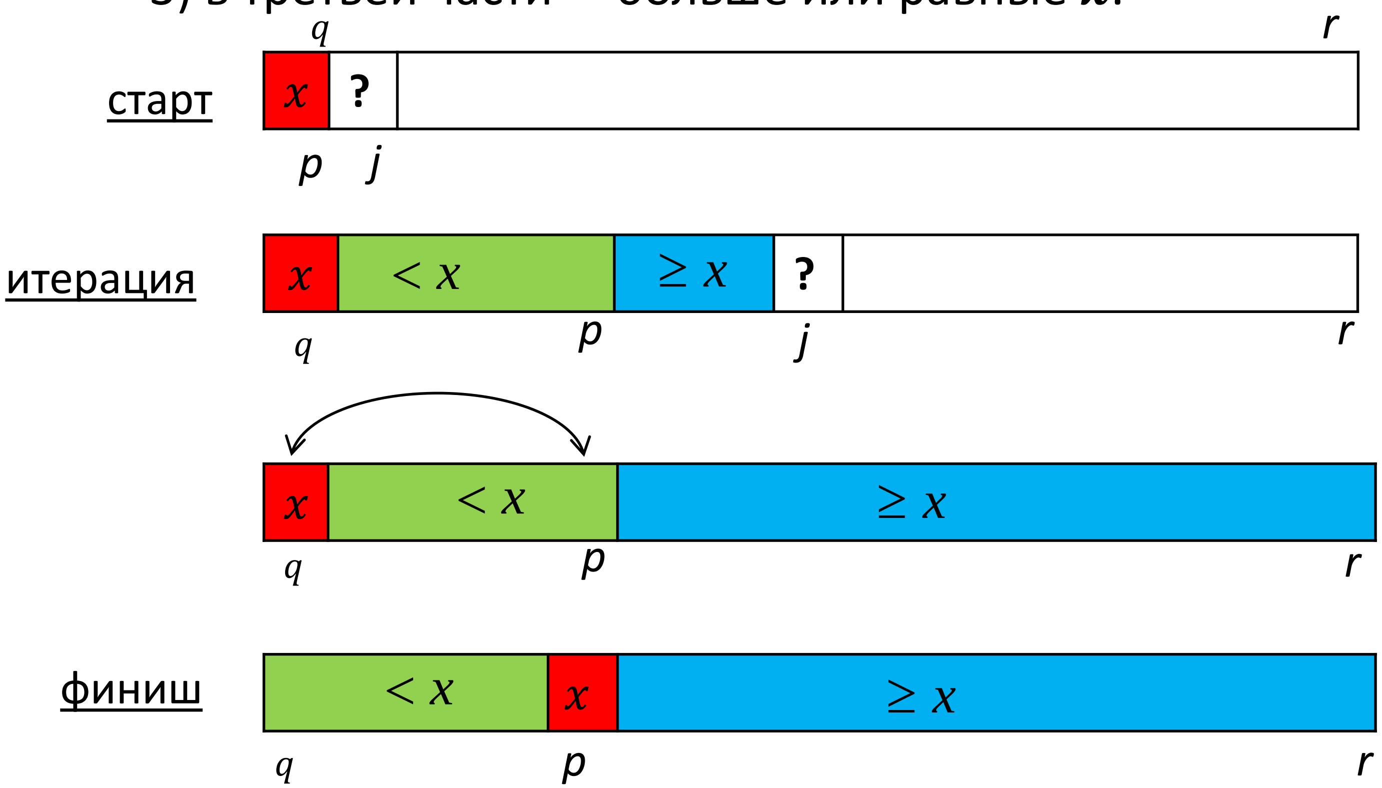


Разделение
(предложено **Нико Ламуто**)

В качестве сепаратора x выбираем первый элемент рассматриваемой области.

Относительно x массив разделим на три части функцией **Partition**:

1) в первой части окажутся все элементы, которые строго меньше x;
2) во второй части - элемент x;
3) в третьей части – больше или равные x.




```
def QuickSort(q, r):
        if q < r:
            p=Partition(q,r)
            QuickSort(q, p-1)
            QuickSort(p+1, r)
```

```
def Partition (q,r):
 x=array[q]
 p=q
 j=p+1
 while j<=r:
    if array[j]>=x:
          j+=1
     else: # array[j]<x
          p+=1
          array[p]↔array[j]
          j+=1
 array[l]↔array[p]
 return p
```

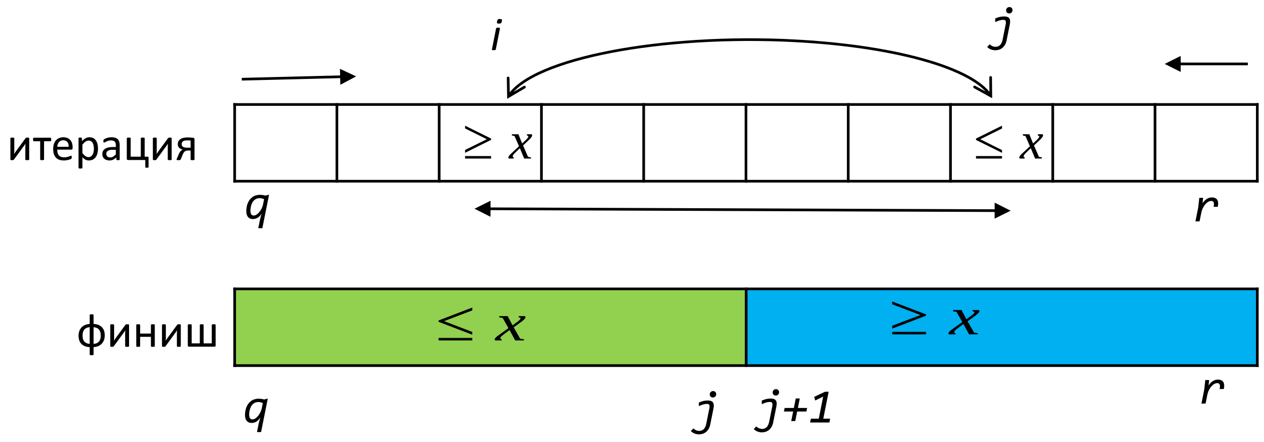
Разделение
(предложено **Чарльзом Хоаром**)

В качестве сепаратора x будем выбирать первый элемент рассматриваемой области.

Относительно сепаратора x массив разделим на две части функцией **Hoare_Partition**:

(1) в первой части окажутся все элементы, которые равны или меньше x (зелёная заливка) ;

(2) во второй– элементы, которые равны или больше x (синяя заливка) .




```
Hoare_Partition (A,q,r)
x ← a[q]
i ← q − 1
j ← r + 1
while TRUE
  do repeat   j ← j − 1
          untile   a[j] ≤ x
     repeat   i ← i + 1
          untile   a[i] ≥ x
     if i < j
          then a[i] ↔ a[j]
          else return j
```

В результате разделения будет сформирован индекс j, для которого справедливы неравенства:

$$q \le j < p$$

и каждый элемент подмассива $A[q\,..\,j]$ не превышает значений каждого элемента подмассива $A[j+1\,..\,r]$.

Исходный алгоритм разделения, предложенный Ч. Хоаром

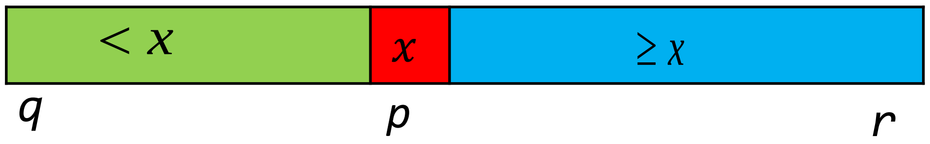
`Hoare_Partition`

<u>Худший случай</u>:

например, все данные различны и упорядочены, например, по возрастанию. Тогда в качестве сепаратора на каждом этапе разделения будет выбираться минимальный элемент и сортируемая область сократится только на 1 элемент.

Версия алгоритма разбиения, предложенная Нико Ламуто

`Partition`



<u>Худший случай</u>:

например, все данные одинаковы или упорядочены, например, по возрастанию. Сортируемая область в каждом из случаев сократится только на 1 элемент.

Худший случай

$$\begin{cases} T(n) = C_1 + C_2 \cdot n + T\left(n-1\right), n \geq 2 \\ T(1) = C_3 \end{cases}$$

Время работы QuickSort **в худшем случае**:

$$T(l) = O(l^2), l = \Theta(n)$$

Среднее время работы алгоритма QuickSort **по всем возможным наборам входных данных** :

$$T(l) = O(l \cdot \log l), l = \Theta(n).$$

деление на классы идёт на каждом этапе разделения Partition, а класс характеризуется той позицией *p*, куда будет помещён сепаратор после того, как будет произведено разделение

Если на каждом этапе разделения в качестве сепаратора выбирать **средний по значению элемент (медиана) и делать это за линейное от количества элементов массива время**, то время работы алгоритма сортировки `QuickSort` **в худшем случае**:

$$\begin{cases} T(n) = \mathrm{C}_1 \cdot n + \mathrm{C}_2 \cdot n + 2T\left(\frac{n}{2}\right), n \geq 2^k, k \geq 2 \\ T(1) = \mathrm{C}_3 \end{cases}$$

$$T(l) = \mathrm{O}(l \cdot \log l), l = \Theta(n).$$

C++ `std::sort()`

Основой служит алгоритм быстрой сортировки – модифицированный QuickSort, он же **IntroSort** (*интроспективная сортировка*) разработанный специально для STL (1997 г., Дэвид Мюссер).

В качестве опорного элемента выбирается «**медиана и трёх**»: средний по значению элемент из первого, последнего и центрального элемента сортируемой области.

Если в сортируемом фрагменте число элементов < **16**, то

фрагмент сортируется методом вставки **InsertionSort**

(сортировка вставками устойчива, работает в худшем случае за $O(n^2)$ и для больших массивов не используется, но на малых длинах эффективна ввиду простоты реализации).

Если в сортируемом фрагменте число элементов ≥ **16**, то выполняется **модифицированный QuickSort:**

если глубина рекурсии превысила некоторое пороговое значение, например, $\mathbf{1.5 \cdot \log_2(n)}$, где n − длина всего массива, то рекурсивные операции прекращаются и данный фрагмент сортируется пирамидальным методом **HeapSort** в чистом его виде (сортировка кучей в худшем случае работает за $O(n \cdot \log n)$, не устойчива).

Java `java.util.Collections.sort()`

Сортировка реализована на базе сортировки слиянием **`MergeSort`**, которая выбрана разработчиками из-за её устойчивости (показывает лучшую производительность по сравнению с другими устойчивыми алгоритмами сортировками, например, таким алгоритмом, как «пузырёк»).

Python `sort()` и `sorted()`

Функции в Python реализуют алгоритм **`TimSort`** (опубликован в 2002 году американским учёным Тимом Петерсом Tim Peters), основанный на сортировке слиянием **`MergeSort`** и сортировке вставкой **`InsertionSort`**. Основная идея алгоритма: по специальному алгоритму входной массив разделяется на подмассивы. Каждый подмассив сортируется сортировкой вставками. Отсортированные подмассивы собираются в единый массив с помощью модифицированной сортировки слиянием (https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Timsort)

Алгоритмы нахождения $\boldsymbol{k}$-го наименьшего элемента

Определение

Элемент, который стоит на $\boldsymbol{k}$ –месте в отсортированном по не убыванию массиве, называется $\boldsymbol{k}$–м наименьшим элементом (k–й порядковой статистикой).

Например, для массива

	1	2	3	4	5	6	8
$a[i]$	2	3	7	1	40	12	100

если $k = 4$, то k-й наименьший элемент равен 7:

	1	2	3	4	5	6	8
$a[i]^{\text{сорт.}}$	1	2	3	7	12	40	100

Определение

Если n – нечётно то **медианой** (англ. median) массива из n элементов называется такой его элемент, который стоит на месте $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ в упорядоченном массиве.

	1	2	3	4	5
$a[i]$	2	3	7	1	40

$a[i]^{\text{сорт.}}$	1	2	3	7	40

Если n – чётно, то **нижней медианой** массива из n элементов называют называется такой его элемент, который стоит на месте $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ в упорядоченном массиве.

Если n – чётно, то **верхней медианой** массива из n элементов называют называется такой его элемент, который стоит на месте $k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$в упорядоченном массиве.

	1	2	3	4	5	6
$a[i]$	2	3	7	1	40	12

	1	2	3	4	5	6
$a[i]^{\text{сорт.}}$	1	2	3	7	12	40

нижняя медиана

верхняя медиана

Если не оговорено иное, то медианой массива из n элементов будем считать нижнюю медиану, т.е. для любой чётности n полагаем $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Алгоритм 1.

Отсортируем массив, например, сортировкой слиянием.

Возьмём в отсортированном массиве элемент по индексу k.

Время работы алгоритма 1 в худшем случае $\boldsymbol{\Omega(n \cdot \log n)}$.

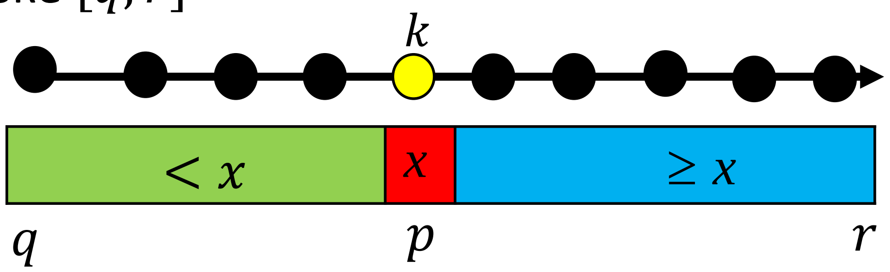
Алгоритм 2

Изначально $q = 1, r = n$, в качестве опорного элемента x возьмем первый элемент рассматриваемой области (в рандомизированной версии опорный элемент сначала выбирается случайным образом (random sampling) среди элементов с индексами от q до r , а затем он меняется с первым элементом рассматриваемой области).

Относительно x выполняется разделение массива на отрезке $[q, r]$

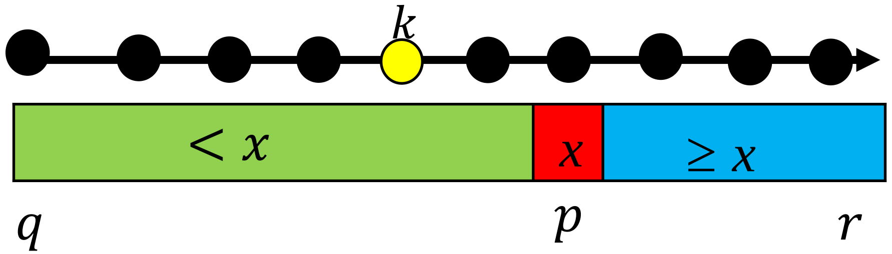
<u>Случай 1.</u>

Если $k = p - q + 1$, то опорный элемент x – ответ.



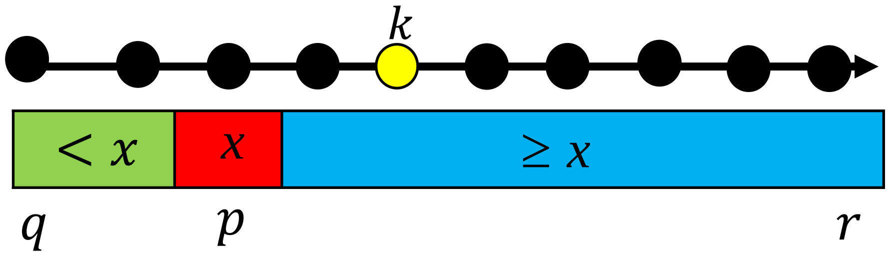
<u>Случай 2.</u>

Если $k < p - q + 1$, то продолжаем рекурсивно поиск k–го наименьшего элемента на отрезке $[q, p - 1]$.



<u>Случай 3.</u>

Если $k > p - q + 1$, то продолжаем рекурсивно поиск k–го наименьшего элемента на отрезке $[p + 1, r]$, полагая $k = k - (p - q + 1)$.



Время работы детерминированного алгоритма в худшем случае $\boldsymbol{\Omega(n^2)}$ (например, на каждом шаге в качестве опорного элемента выбирался максимальный элемент рассматриваемой области, что приводило к тому, что каждый раз рассматриваемая область уменьшалась только на один элемент).

Рандомизированный алгоритм в среднем алгоритм работает хорошо за время $\mathbf{O}(\boldsymbol{n})$.

Алгоритм 3. BFPRT- алгоритм (1973 г. Manual **B**lum, Robert W. **F**loyd, Vaughan R. **P**ratt, Ronald L. **R**ivest и Robert Endre **T**arjan)

1. Разбиваем исходный массив A из n элементов на $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ групп по 5 элементов в каждой и ещё одну группу, в которой оставшиеся $n \bmod 5$ элементов (если число элементов кратно 5, то эта группа – пустая). Каждую группу сортируем и находим её медиану. Это требует времени $C_1 \cdot n$.
2. Из найденных на шаге 1 медиан строим последовательность M длины $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ (жёлтая заливка) и этим же алгоритмом рекурсивно находим её медиану x. Время – $T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right)$.
3. Элемент x выбираем в качестве опорного элемента и выполняем процесс разделения исходного массива A из n элементов. Это требует времени $C_2 \cdot n$.

   Для простоты рассуждений будем считать, что все элементы различны. Тогда количество элементов, которые $< x$ (зелёная область) :

   $$\geq 3 \cdot \left(\left\lceil \frac{1}{2} \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6,$$

   аналогично, в синей области, имеется $\geq \frac{3n}{10} - 6$ элементов, величины которых $> x$.
4. По аналогии с алгоритмом 2, либо завершаем алгоритм, либо отбрасываем одну из частей и решаем рекурсивно задачу поиска искомого элемента за время, не превышающее величины $\mathrm{T}\left(\frac{7 \cdot n}{10} + 6\right)$.

20	25	15	6	1	7	14	27	
21	26	18	8	2	14	16	29	9
34	28	24	10	3	23	17	30	11
37	38	36	13	4	24	35	31	12
46	39	42	44	5	25	40	41	33

1	6		14	7	15	25	27	20
2	8	9	16	14	18	26	29	21
3	**10**	**11**	**17**	$x = 23$	**24**	**28**	**30**	**34**
4	13	12	35	24	36	38	31	37
5	44	33	40	25	42	39	41	46

$$T(n) \leq C_1 \cdot n + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + C_2 \cdot n + \mathrm{T}\left(\frac{7 \cdot n}{10} + 6\right)$$

Время работы алгоритма в худшем случае $\mathrm{O}(\boldsymbol{n})$.

Алгоритм
лексикографической сортировки
(сортировка «вычёрпыванием»)

Определения

Задано некоторое конечное непустое множество символов Σ, называемое алфавитом ($|\Sigma|$ − мощность алфавита).

Строка − произвольная конечная последовательность символов из алфавита:
$\mathrm{T} = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}), t_i \in \Sigma$.

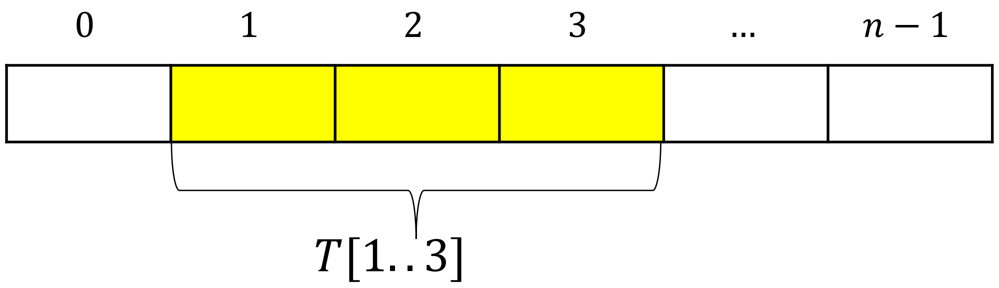
Пусть Σ– множество букв латинского алфавита, тогда, например,

$$\mathrm{T} = (a, b, a, c, a, b, a).$$

Латинский алфавит

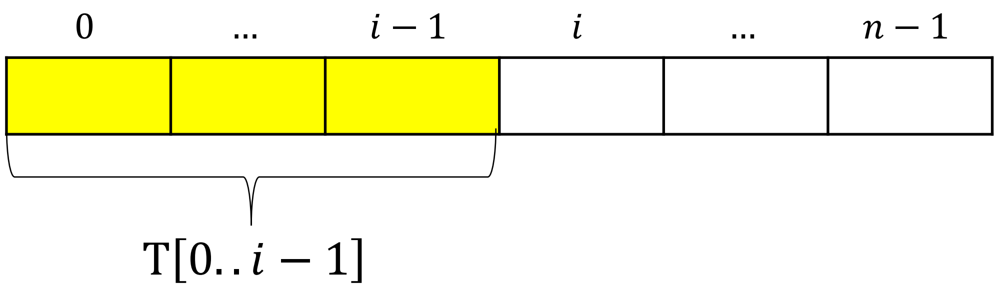
A a а	B b бэ	C c цэ	D d дэ	E e е/э	F f эф	G g гэ/жэ
H h ха/аш	I i и	J j йот/жи	K k ка	L l эль	M m эм	N n эн
O o о	P p пэ	Q q ку	R r эр	S s эс	T t тэ	U u у
V v вэ	W w дубль-вэ	X x икс	Y y игрек/ ипсилон	Z z зед		

Подстрока – непрерывная последовательность строки $\mathrm{T}[i..j] = (t_i, t_1, \ldots, t_j), t_i \in \Sigma$.

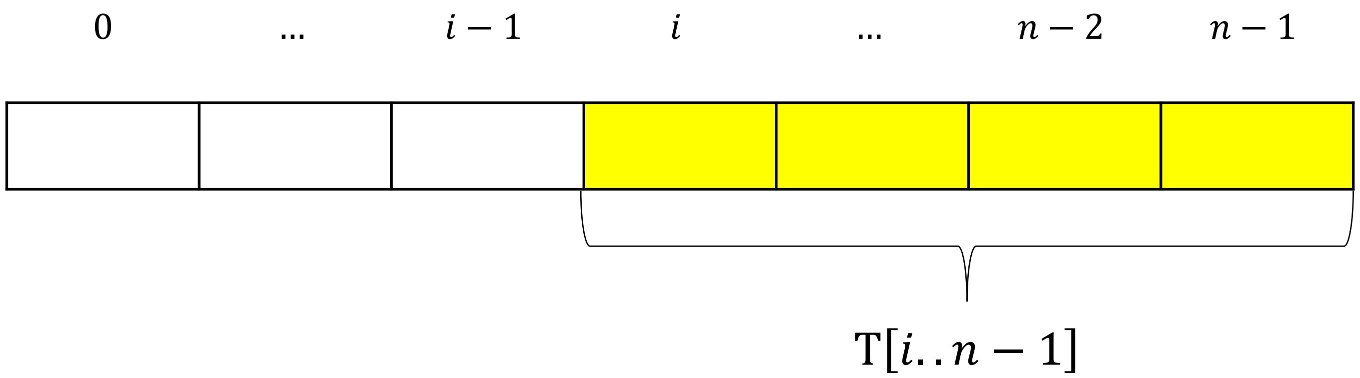


Если не оговорено иное, то при $i > j$ считаем, что подстроки $\mathrm{T}[i..j]$ не существует.

Подстрока $\mathrm{T}[0..i-1]$, которая состоит из первых i символов строки, называется **префиксом** ($\mathrm{T}[0..i-1]$ - префикс длины i).



Подстрока $\mathrm{T}[i..n-1]$, которая состоит из последних $n-i$ символов строки, называется i-ым **суффиксом**.



Собственный суффикс/префикс - не совпадающий со всей строкой.

Пусть C – некоторое множество, на котором задан $\prec$ - линейный порядок.

Лексикографическим порядком на множестве C называют такое продолжение отношения $\prec$ (предшествования) на кортежи (списки) элементов из C, при котором $(s_1, s_2, \dots, s_p) \prec (t_1, t_2, \dots, t_q)$ означает выполнение одного из условий:

1) существует такое целое j, что $s_j \prec t_j$ и для всех $i < j$ справедливо $s_i = t_i$;

2) $p \leq q$ и $s_i = t_i$ при $1 \leq i \leq p$.

Предположим, что элементы кортежей заключены в интервале от ‘a’ до ‘z’, т.е. C – множество букв латинского алфавита Σ и

$$(a \prec b \prec \mathrm{c} \prec \cdots \prec z).$$

Тогда лексикографический порядок кортежей: $aaaa \prec aab \prec b \prec ba \prec baa \prec baaab \prec \mathrm{c}$.

Предположим, что все **кортежи имеют одинаковую длину** k, число кортежей равно n, а индексы элементов кортежей изменяются от 0 до $k-1$:

$$T^j = \left(t_0^j, t_2^j, \dots, t_{k-1}^j\right), j = 0, .., n-1.$$

1. Создадим **очередь для сортировки**, куда добавим все рассматриваемые кортежи.

2. Организуем количество очередей («**черпаков»**), равное количеству букв в алфавите, предположим, что число «черпаков” $- m$.

3. Выполним $\boldsymbol{k}$ **итераций**:
   - на i-ой итерации идет сортировка по $(k-i) - \text{ой}$ компоненте каждого кортежа, т.е. некоторый кортеж t^j удаляется из исходной очереди для сортировки и добавляется в «черпак», который соответствует символу t_{k-i}^j;
   - после того, как очередь для сортировки станет пустой, формируем новую очередь для сортировки, путём переписывания (удаления и добавления) элементов всех непустых «черпаков2, начиная с «черпака2, который соответствует символу ‘a’, и заканчивая - ‘z’.

aab aaa baa bab bbb cab

1-я итерация

*aa**b** aa**a** ba**a** ba**b** bb**b** ca**b***

a	aa**a**	ba**a**		
b	aa**b**	ba**b**	bb**b**	ca**b**
c	-			

2-я итерация

*a**a**a b**a**a a**a**b b**a**b b**b**b c**a**b*

a	a**a**a	b**a**a	a**a**b	b**a**b	c**a**b
b	b**b**b				
c	-				

3-я итерация

***a**aa **b**aa **a**ab **b**ab **c**ab **b**bb*

a	**a**aa	**a**ab			
b	**b**aa	**b**ab	**b**bb		
c	**c**ab				

Итог:

$$aaa \prec aab \prec baa \prec bab \prec bbb \prec cab$$

Время работы алгоритма лексикографической сортировки кортежей одинаковой длины:

$$\Theta(\underbrace{k \cdot n}_{\text{сумма длин всех кортежей}} + \underbrace{k \cdot |\Sigma|}_{\text{склеивание очередей}}) = \Theta\big(k \cdot (n + |\Sigma|)\big), \text{где}$$

n – число кортежей одинаковой длины k ,
$|\Sigma|$ – число различных симолов в кортежах.

Предположим, что **кортежи имеют разную длину**, число кортежей $-\ n$, а индексы элементов j-го кортежа изменяются от 0 до $\left|T^j\right| - 1$:

$$T^j = \left(t_0^j, t_1^j, \dots, t_{\left|T^j\right|-1}^j\right), j = 0, .., n-1.$$

Пусть l_{max} $-$ длина самого длинного кортежа:

$$l_{max} = \max_{0 \le j \le n-1} \left|T^j\right|,$$

тогда число итераций алгоритма равно l_{max}.

На первой итерации в очередь для сортировки помещаются кортежи длины l_{max} и выполняется сортировка вычёрпыванием только по компоненте $l_{max} - 1$ рассматриваемых кортежей.

После этого в исходную очередь для сортировки заносятся сначала кортежи длины $l_{max} - 2$, а затем добавляются элементы непустых сгенерированных «черпаков», начиная с элементов «черпака» который соответствует символу ‘a’, и заканчивая $-$ ‘z’.

На последующих этапах происходит сортировка по компоненте $l_{max} - 2, l_{max} - 3, \dots, 0$ аналогичным образом.

$aab\quad ba\quad baa\quad bab\quad ab\quad cab\ \mathrm{c}$

1-я итерация

$aab\ \ baa\ \ bab\ \ cab$

a	baa			
b	aab	bab	cab	
c				

2-я итерация

$ba\ \ ab\ \ baa\ \ aab\ \ bab\ \ cab$

a	ba	baa	aab	bab	cab
b	ab				
c					

3-я итерация

$c\ \ ba\ \ baa\ \ aab\ \ bab\ \ cab\ \ ab$

a	aab	ab			
b	ba	baa	bab		
c	c	cab			

$$aab \prec ab \prec ba \prec baa \prec bab \prec \mathrm{c} \prec cab$$

Время работы алгоритма лексикографической сортировки кортежей разной длины:

сумма длин всех кортежей

склеивание очередей

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|t^{j}\right| + l_{max}\cdot|\Sigma|\right),$$

где

n – число кортежей,

l_{max} – длина самого длинного кортежа,

$|\Sigma|$ – число различных символов в кортежах.

Для сортировки n кортежей можно использовать, например, сортировку слиянием (***merge sort***).
Время работы алгоритма сортировки будет зависеть от того, как будут сравниваться два кортежа.

Пусть l_{max} – длина самого длинного кортежа.
Тогда непосредственное сравнение двух кортежей приведет к тому, что время работы алгоритма сортировки:

$$O(l_{max} \cdot n \cdot \log n).$$

Сортировка «вычёрпыванием»:

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left|t^j\right| + l_{max} \cdot |\Sigma|\right),$$

где

n – число кортежей,
l_{max} – длина самого длинного кортежа,
$|\Sigma|$ – число различных символов в кортежах.

Внешняя сортировка

Предположим, что объем входных такой, что все данные не могут одновременно поместиться в основную (оперативную) память машины.

Сортировка данных, хранящихся во вторичной памяти, называется **внешней сортировкой**.

В различных языках программирования предусмотрен **файловый тип данных**, предназначенный для представления **данных, хранящихся во вторичной памяти**.

Операционная система делит вторичную память на блоки одинакового размера, а файл можно рассматривать, как связанный список блоков (размер блока зависит от ОС и обычно находится в пределах от 512 до 4 096 байт).

Базовая операция для файла – перенос одного блока в буфер, находящийся в основной памяти.

Буфер – зарезервированная область **в основной памяти, размер которой соответствует размеру блока** (может резервироваться память под несколько буферов – *буферный пул*).

Блоки считываются в том порядке, в котором они появляются в списке блоков: считывается в буфер первый блок, затем он заменяется на второй блок (при этом предыдущее содержимое буфера теряется) и т.д.

Процесс записи файла также можно рассматривать, как процесс создания файла в буфере: когда записи «заносятся» в файл, фактически они помещаются в буфер для этого файла – непосредственно за записями, которые находятся там. Если очередная запись не помещается в буфер целиком, то содержимое буфера копируется в свободный блок вторичной памяти, который присоединяется к списку блоков для данного файла.

Природа устройств вторичной памяти такова, что время, необходимое для поиска блока и считывания его в основную память , достаточно велико в сравнении со временем, которое требуется для обработки данных, содержащихся в этом блоке.

Под «*бездействием*» компьютера будем понимать периоды ожидания, пока блок будет прочитан в основную память или записан из основной памяти во внешнюю.

Поэтому, оценивая время работы алгоритмов, в которых используются данные, хранящиеся в виде файлов, в первую очередь надо учитывать количество обращений к блокам, т.е. сколько раз мы считываем в основную память или записываем блок во вторичную память. При этом размер блока в ОС фиксирован и мы не можем его изменить для ускорения алгоритма.

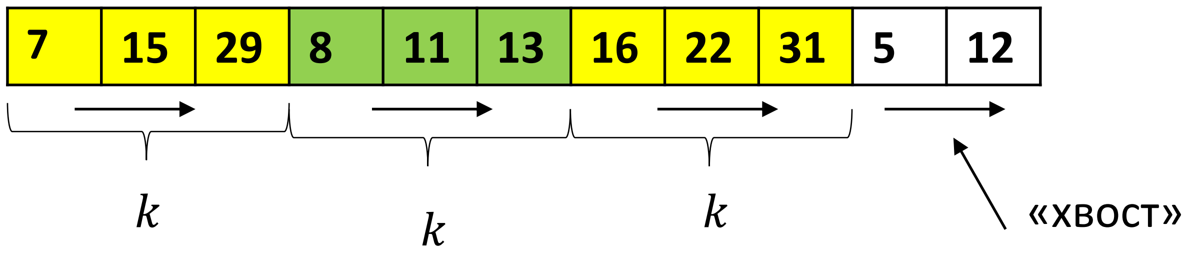
Мера качества алгоритма, работающего с внешней памятью – количество обращений к блокам памяти.

Алгоритм внешней сортировки слиянием (двухпутёвое слияние)

Предположим, что нужно отсортировать n записей .

Файл организуется в виде постепенно увеличивающихся серий, т.е. последовательностей записей $r_1, r_2, \dots, r_k$, таких, что $r_i \leq r_{i+1}, 1 \leq i < k$.

В примере последовательность целых чисел организована в виде серий длины $k = 3$.



Предположим, что заданы два файла f_1 и f_2 , которые организованы в виде серий длины k и для которых выполняются следующие условия:

1) количество «серий», включая «хвосты» в f_1 и f_2 отличаются не больше, чем на 1;
2) только один из файлов f_1 или f_2 может иметь «хвост»;
3) файл с «хвостом» имеет не меньше серий, чем другой файл.

Первоначально можно разделить все n записей, которые надо отсортировать, на два исходных файла f_1 и f_2 (желательно, чтобы записей в этих файлах было поровну), считаем, что каждый файл состоит из серий длины $k = 1$.

В последующем, когда будем говорить про <u>объединение серий длины k,</u> то при этом предполагается, что выполняется слияние двух серий длины k в серию длины $2 \cdot k$ (т.е. из двух упорядоченных последовательностей длины k получаем упорядоченную последовательность длины $2 \cdot k$).

3, 5, 10, 28, 31, 40, 93, 96
9, 13, 30, 39, 54, 65, 85, 90

$k = 8$

$\longrightarrow$

3, 5, 9, 10, 13, 28, 30, 31, 39, 40, 54, 65, 85, 90, 93, 96

$k = 16$

АЛГОРИТМ

$i = 0$ число фаз (итераций) алгоритма
$k = 1$ длина серии
f_1 и f_2 исходные файлы
g_1 и g_2 результирующие файлы пустые

пока $2^i < n$ выполнять следующие действия:

- ✓ пока не закончится один из исходных файлов, считываем из f_1 и f_2 серии длины k, объединяем их в серию длины $2 \cdot k$ и записываем её в один из результирующих файлов g_1 или g_2 (переключаясь последовательно между результирующими файлами, можно добиться того, что они будут удовлетворять условиям (1-3);
- ✓ если оба файла f_1 и f_2 одновременно стали пустыми, то ничего не делать, иначе переписать «хвост» у оставшегося непустого файла в тот результирующий файл, куда бы шла запись очередной серии длины $2 \cdot k$;
- ✓ $k = 2 \cdot k$;
- ✓ $i = i + 1$;
- ✓ в качестве исходных рассматриваем результирующие файлы, а в качестве результирующих – исходные.

Если $n = 2^k$, то после k-й фазы один из результирующих файлов будет пустым, а второй будет содержать единственную серию длины n, т.е. будет отсортирован.	Если $n < 2^k$, то после k-й фазы один из результирующих файлов будет пустым, а второй будет содержать «хвост» длины n, т.е. будет отсортирован.

$n = 16$ (=2^4)

начальная фаза
$k = 2^0$(длина серии)

f_1	28	3	93	10	54	65	30	90
f_2	31	5	96	40	85	9	39	13

первая фаза
$k = 2^1$

g_1	28, 31	93, 96	54, 85	30, 39
g_2	3, 5	10, 40	9, 65	13, 90

вторая фаза
$k = 2^2$

f_1	3, 5, 28, 31	9, 54, 65, 85
f_2	10, 40, 93, 96	13, 30, 39, 90

третья фаза
$k = 2^3$

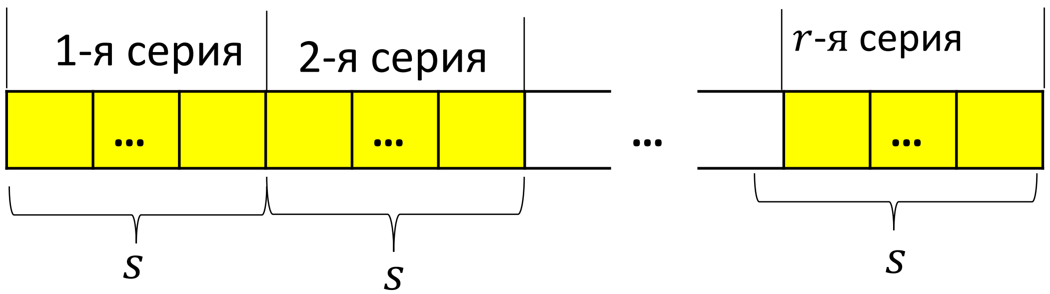
g_1	3, 5, 10, 28, 31, 40, 93, 96
g_2	9, 13, 30, 39, 54, 65, 85, 90

четвёртая фаза
$k = 2^4$

f_1	3, 5, 9, 10, 13, 28, 30, 31, 39, 40, 54, 65, 85, 90, 93, 96
f_2	

Для ускорения можно **начинать работу не с серий длины 1, а с серий длины $\boldsymbol{s > 1}$**.

Серии длины s можно сформировать на начальном этапе: считывать в оперативную память сразу по s элементов (некоторое разумное число элементов, которое можно одновременно хранить в памяти), сортировать их алгоритмом внутренней сортировки за $\mathrm{O}(s \cdot \log s)$, поочерёдно сохранять серии длины s в файлы f_1 и f_2.



Так как общее число серий на начальном этапе: $r = [n/s]$, то время выполнения этапа:

$$\mathrm{O}(r \cdot s \cdot \log s) = \boldsymbol{O(n \cdot \log s)}.$$

$r = [n/s] < n/s + 1, s \cdot r < n + s < 2 \cdot n$
$r = [n/s] \geq n/s, s \cdot r \geq n$

Количество фаз алгоритма внешней сортировки слиянием $-\lceil \mathbf{\log_2 r} \rceil$, так как после каждой фазы число серий уменьшается в двое (изначально r серий).

Подсчитаем общее число сравнений алгоритма, учитывая, что при объединении двух серий длины k выполняется $(\mathbf{2 \cdot k - 1})$ сравнение:

на первой фазе объединялись серии длины s, число объединений не более, чем $r/_{2^1}$, поэтому надо выполнить не более, чем

$$\frac{r}{2^1} \cdot (2^1 \cdot s - 1) \text{ сравнений}$$

на второй фазе объединялись серии длины $2^1 \cdot s$, число объединений не более, чем $r/_{2^2}$, поэтому надо выполнить не более, чем

$$\frac{r}{2^2} \cdot (2^2 \cdot s - 1) \text{ сравнений}$$

и так далее ….

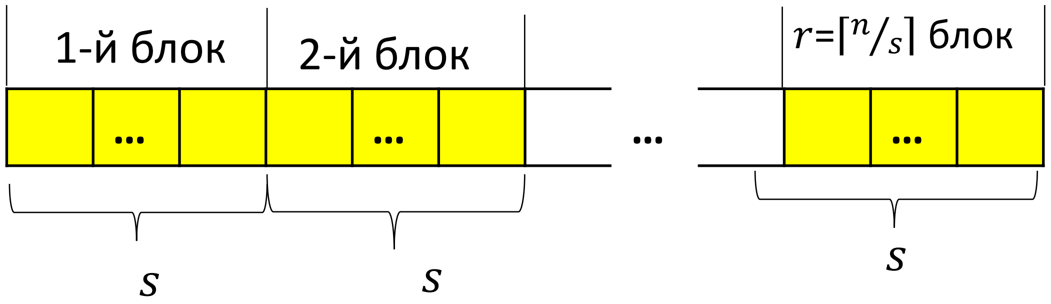
$$\sum_{i=1}^{\lceil \log_2 r \rceil} \left(r \cdot s - \frac{r}{2^i} \right) = r \cdot s \cdot \lceil \log_2 r \rceil - r \cdot \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 r \rceil} \frac{1}{2^i} \approx \boxed{n \cdot \log_2 r - r.}$$

Тогда время алгоритма в целом, включая начальный этап:

$$\mathrm{O}(n \cdot \log s) + \mathrm{O}(n \cdot \log r) = \mathrm{O}(n \cdot \log(s \cdot r)) = \boldsymbol{O(n \cdot log\, n)}.$$

Мера качества алгоритма, работающего с внешней памятью – количество обращений к блокам памяти, поэтому подсчитаем **общее число чтения блоков.**

Предположим, что максимальное число элементов, которые могу одновременно храниться в оперативной памяти, равно $\boldsymbol{s}$ и на начальном этапе мы прочитали $\boldsymbol{r}$ таких блоков.



На каждой фазе при объединении двух серий мы могли считывать из каждого файла только блоки размера ${}^{\boldsymbol{s}}/_{\boldsymbol{2}}$, а так как считать нужно все данные, то общее число считываний блоков на одной фазе:

$$\frac{\boldsymbol{n}}{{}^{\boldsymbol{s}}/_{\boldsymbol{2}}} = \boldsymbol{2 \cdot r}.$$

Так как количество фаз $-\lceil \log_2 r \rceil$, то общее число чтения блоков:

$$2 \cdot r \cdot \lceil \log_2 r \rceil = \boldsymbol{O(r \cdot log\, r)}.$$

Минимизация полного времени

Предположим, что файлы организованы в виде серий размер которых намного превышает размер блока (буфера оперативной памяти), поэтому, чтобы объединить две такие серии, надо прочитать несколько блоков из каждого файла.

Каков порядок считывания блоков из файлов?

> Порядок считывания блоков из фалов можно организовать так: определить, у какой из двух серий будут первой выбраны все её записи, находящиеся в данный момент в основной памяти (для каждого файла будем хранить ключ последней записи последнего блока, считанного из файла), и пополнять запас записей именно для этой серии.
> Если какая-то серия себя исчерпала, то очередной блок считывается из не исчерпавшей себя серии.

Наличие одного канала по обмену данными между основной памятью и внешними устройствами – «узкое место», которое будет тормозить работу системы в целом.

Увеличим число каналов связи?

Предположим, что существует $2 \cdot m$ дисководов, каждый из которых имеет свой канал доступа к основной памяти:

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$$
$$g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$$

Многоканальная сортировка

Для выполнения $2 \cdot m-$ *канальной сортировки* разместим на m дисководах m файлов, организованных в виде серий длины k:

$$f_1, f_2\,, f_3\,, \dots, f_m.$$

Тогда можно прочитать m серий (по одной из каждого файла) и объединить их в одну серию длиной $m \cdot k$ (для объединения серий можно использовать такие структуры данных, как «бинарная куча» или поисковые деревья и выполнить объединение за время $\mathrm{O}(\log m)$ на одну запись).

Затем серия помещается в один из выходных файлов:

$$g_1, g_2\,, g_3\,, \dots, g_m.$$

Если у нас имеется первоначально n записей, а после каждой фазы длина серии увеличивается в m раз, то после i-ой фазы серии будут иметь длину m^i.

Предположим, что

$$m^{i-1} < n \le m^i,$$

тогда

$$\log_m n \le i < \log_m n + 1,$$

следовательно, после $[\log_m n]$ фаз все записи будут отсортированы.

ЗАДАНИЯ

Выполнить общую задачу в iRunner

Структуры данных

0.1. Бинарный поиск (уметь см. реализовать BinarySearch, LowerBound, UpperBound)

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Реализация сортировок в С++ и Python (подготовлено студентами 2 курса ПИ, 2020 г.)

Спасибо за внимание!