Предпараграфный пример

- $(1+x)^1 = 1 + x$
- $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$
- $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$
- $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

  $\ldots$
- $(1+x)^n = ?$

§5. Биномиальная теорема. Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальная теорема

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n,$$

т. е. при $x \neq 0$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r.$$

.

Небольшая (ха) демонстрация

$$(1+x)^4 = (1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x) =$$

$$\begin{array}{rll}
= & 1\cdot(1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x) & + \\
+ & x\cdot(1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x) & = \\
= & 1\cdot 1\cdot(1+x)\cdot(1+x) & + \\
+ & 1\cdot x\cdot(1+x)\cdot(1+x) & + \\
+ & x\cdot 1\cdot(1+x)\cdot(1+x) & + \\
+ & x\cdot x\cdot(1+x)\cdot(1+x) & =
\end{array}$$

Небольшая (ха) демонстрация

$$
\begin{array}{rll}
= & 1\cdot 1\cdot 1\cdot (1+x) & + \\
+ & 1\cdot 1\cdot x\cdot (1+x) & + \\
+ & 1\cdot x\cdot 1\cdot (1+x) & + \\
+ & 1\cdot x\cdot x\cdot (1+x) & + \\
+ & x\cdot 1\cdot 1\cdot (1+x) & + \\
+ & x\cdot 1\cdot x\cdot (1+x) & + \\
+ & x\cdot x\cdot 1\cdot (1+x) & + \\
+ & x\cdot x\cdot x\cdot (1+x) & =
\end{array}
$$

Небольшая (ха) демонстрация

$$
\begin{array}{rcccl}
= & 1\cdot1\cdot1\cdot1 & + & 1\cdot1\cdot1\cdot x & + \\
+ & 1\cdot1\cdot x\cdot1 & + & 1\cdot1\cdot x\cdot x & + \\
+ & 1\cdot x\cdot1\cdot1 & + & 1\cdot x\cdot1\cdot x & + \\
+ & 1\cdot x\cdot x\cdot1 & + & 1\cdot x\cdot x\cdot x & + \\
+ & x\cdot1\cdot1\cdot1 & + & x\cdot1\cdot1\cdot x & + \\
+ & x\cdot1\cdot x\cdot1 & + & x\cdot1\cdot x\cdot x & + \\
+ & x\cdot x\cdot1\cdot1 & + & x\cdot x\cdot1\cdot x & + \\
+ & x\cdot x\cdot x\cdot1 & + & x\cdot x\cdot x\cdot x & =
\end{array}
$$

Небольшая (ха) демонстрация

$$(1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x)$$

$$\begin{array}{llllllll}
= & 1\cdot1\cdot1\cdot1 & + & & & 1\cdot1\cdot x\cdot x & + & & \\
 & & + & 1\cdot1\cdot1\cdot x & + & 1\cdot x\cdot1\cdot x & + & 1\cdot x\cdot x\cdot x & + \\
 & & + & 1\cdot1\cdot x\cdot1 & + & 1\cdot x\cdot x\cdot1 & + & x\cdot1\cdot x\cdot x & + \\
 & & + & 1\cdot x\cdot1\cdot1 & + & x\cdot1\cdot1\cdot x & + & x\cdot x\cdot1\cdot x & + \\
 & & + & x\cdot1\cdot1\cdot1 & + & x\cdot1\cdot x\cdot1 & + & x\cdot x\cdot x\cdot1 & + \\
+ & x\cdot x\cdot x\cdot x & & & & x\cdot x\cdot1\cdot1 & & &
\end{array}$$

Идеи из доказательства

- Коэффициент перед x^r после раскрытия скобок в $(1+x)^n$ равен числу раз, которые слагаемое x^r встретилось после раскрытия.
- Слагаемое x^r встречается столько раз, сколькими разными способами его можно составить,
- т. е. сколькими разными способами можно выбрать те r из n скобок, в которых берётся x (а не 1).

  (Порядок выбора скобок не важен, выбирать одну и ту же скобку нельзя.)
- Каждый такой способ выбора — это (n, r)-сочетание без повторений,
- а значит, количество этих способов равно C_n^r.

Следствие

Для любых $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
и любого $n \in \mathbb{N}$
имеет место формула

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \, x^r \, y^{n-r}.$$

Доказательство

$$(1+z)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r z^r.$$

- Подставим $z = \frac{x}{y}$ (это возможно, поскольку $y \neq 0$ и $x \neq 0$):

$$(1+\tfrac{x}{y})^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot (\tfrac{x}{y})^r.$$

- Умножим обе части на y^n и преобразуем:

$$y^n \cdot (1+\tfrac{x}{y})^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot (\tfrac{x}{y})^r \cdot y^n,$$

$$(y+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot x^r \cdot y^{n-r}.$$

Свойства биномиальных коэффициентов (из бинома)

Бином

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

1) Подставим $x = 1$:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r$$

Бином

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

2) Подставим $x = -1$:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^k \cdot C_n^k + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n$$

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \cdot C_n^r$$

x =-1 в бином

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^k \cdot C_n^k + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n$$

- В частности, отсюда:

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots C_n^{2k-1} = C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2\ell},$$

где

$2k-1$ — наибольшее нечётное число такое, что $2k-1 \leqslant n$,

2ℓ — наибольшее чётное число такое, что $2\ell \leqslant n$.

Бином

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

Продифференцируем один раз по x:

Производная

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = 0 + C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + k\, C_n^k\, x^{k-1} + \ldots + n\, C_n^n\, x^{n-1}$$

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\, C_n^r\, x^{r-1}$$

Производная

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + k\, C_n^k x^{k-1} + \ldots + n\, C_n^n x^{n-1}$$

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\, C_n^r x^{r-1}$$

3) Подставим $x = 1$:

$$n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + kC_n^k + \ldots + nC_n^n$$

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\, C_n^r$$

Производная

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + k\, C_n^k x^{k-1} + \ldots + n\, C_n^n x^{n-1}$$

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\, C_n^r x^{r-1}$$

4) Подставим $x = -1$:

$$0 = C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{k-1} k\, C_n^k + \ldots + (-1)^{n-1} n\, C_n^n$$

$$0 = -C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{k} k\, C_n^k + \ldots + (-1)^{n} n\, C_n^n$$

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r r\, C_n^r$$

Бином

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

Продифференцируем p раз по x $(1 \leqslant p \leqslant n)$:

Производная p раз

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (1+x)^{n-p} =$$

$$= \sum_{r=p}^{n} r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-p+1)\, C_n^r \cdot x^{r-p}$$

Производная p раз

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (1+x)^{n-p} =$$
$$= \sum_{r=p}^{n} r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-p+1)\, C_n^r \cdot x^{r-p}$$

Производная p раз

$$\frac{n!}{(n-p)!} \cdot (1+x)^{n-p} = \sum_{r=p}^{n} \frac{r!}{(r-p)!} \cdot C_n^r x^{r-p}$$

Производная p раз

$$\frac{n!}{(n-p)!}\cdot(1+x)^{n-p}=\sum_{r=p}^{n}\frac{r!}{(r-p)!}\cdot C_n^r x^{r-p}$$

5) Подставим $x=-1$:

$$0=\sum_{r=p}^{n}\frac{r!}{(r-p)!}\cdot C_n^r(-1)^{r-p}$$

и разделим на $p!$ $(1\leqslant p\leqslant n)$:

$$0=\sum_{r=p}^{n}\frac{r!}{p!(r-p)!}\cdot C_n^r(-1)^{r-p}$$

(Продолжение)

$$0 = \sum_{r=p}^{n} \frac{r!}{p!(r-p)!} \cdot C_n^r (-1)^{r-p}$$

$r \geqslant p$, поэтому

$$0 = \sum_{r=p}^{n} C_r^p \cdot C_n^r \cdot (-1)^{r-p}$$

Подытоживающий список 1

Из бинома:

1) $$\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$$

2) $$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \cdot C_n^r = 0$$

2') $$C_n^1 + C_n^3 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + \ldots$$

Из производной:

3) $$\sum_{r=0}^{n} r\, C_n^r = n \cdot 2^{n-1}$$

4) $$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, r\, C_n^r = 0$$

Из производной p раз:

5) $$\sum_{r=p}^{n} (-1)^{r-p} \cdot C_r^p \cdot C_n^r = 0$$

Свойства биномиальных коэффициентов (не из бинома)

Свойство симметричности

6) $C_n^r = C_n^{n-r}$

для любого r при условии $0 \leqslant r \leqslant n$.

Идея

Способов неупорядоченно и без повторений
выбрать r объектов из n
столько же, сколько
способов неупорядоченно и без повторений
не выбрать $n-r$ объектов из n.

Тождество Паскаля

7) $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$
для любого r при условии $1 \leqslant r \leqslant n$.

Идея

- Рассмотрим некоторое n-элементное множество X:
$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 1$,
и некоторый элемент этого подмножества, например, x_n.
- Каждое r-элементное подмножество Y множества X либо содержит x_n в качестве элемента, либо не содержит.
- Если $x_n \notin Y$, то r элементов берутся из оставшихся $n-1$, таких Y получается C_{n-1}^r.
- Если $x_n \in Y$, то из оставшихся $n-1$ добираются $r-1$ элементов, таких Y получается C_{n-1}^{r-1}.

Тождество Ньютона

8) $C_n^r \cdot C_r^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{r-k}$
для любых r, k при условии $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant n$.

Самостоятельно

В качестве упражнения.

Внезапное новое слово

- Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ целых неотрицательных чисел назовём унимодальной, если существует такой индекс m $(1 \leqslant m \leqslant n)$, что

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{m-1} \leqslant a_m \geqslant a_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant a_n.$$

- Строго унимодальной — если все неравенства строгие.

Почти строгая унимодальность

9) $C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} = C_n^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} > C_n^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} > \ldots > C_n^n$ для любого $n \geqslant 0$.

Идея

- Рассмотрим отношение $\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r}$,
  $0 \leqslant r \leqslant n-1$,
  и выясним, когда оно больше / меньше / равно 1.

$$\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r} = \frac{\frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!r!}} = \frac{n! \cdot (n-r)! \cdot r!}{(n-r-1)! \cdot (r+1)! \cdot n!} =$$

$$= \frac{n-r}{r+1}$$

- $\frac{n-r}{r+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-r > r+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2r < n-1$
- $\frac{n-r}{r+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-r < r+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2r > n-1$
- $\frac{n-r}{r+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-r = r+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2r = n-1$

- $\frac{n-r}{r+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{n-1}{2}$ — возможно только при нечётном n.

$= 1$

$$C_n^{r+1} = C_n^r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-r}{r+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2r = n-1$$

- $2r = \frac{n-1}{2}$ возможно только при нечётном n.

  В этой ситуации
- $r = \frac{n-1}{2}$,
- $r+1 = \frac{n+1}{2}$,
- $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

$\neq 1$

$$C_n^{r+1} > C_n^r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-r}{r+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2r < n-1$$

$$C_n^{r+1} < C_n^r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-r}{r+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2r > n-1$$

Если n чётно:

- рассмотрим $p = \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2}$.
- $p + 1 = \frac{n}{2} > \frac{n-1}{2}$,

  тогда

  $C_n^{p+1} > C_n^p$, т. е.
- $C_n^{\frac{n-2}{2}} < C_n^{\frac{n}{2}}$.

- Итак, последовательность $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$, т. е. последовательность чисел C_n^r, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$:
- строго возрастает при $r < \frac{n-1}{2}$,
- строго убывает при $r > \frac{n-1}{2}$.

Наибольшее C_n^r:

- при чётном n — $C_n^{\frac{n}{2}}$,
- при нечётном n — $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

Заметим, что если n чётно, то

- $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,

а при нечётном n выполнено:

- $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n-1}{2}$
- и $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2}$.

Почти строгая унимодальность

Таким образом,

9) $C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} = C_n^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} > C_n^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} > \ldots > C_n^n$,
для любого $n \geqslant 0$.

Сумма квадратов

10) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^k)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ для любого $n \geqslant 0$.

Идея

- На самом деле, это $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^k)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$
- Ещё на самом деле $(C_n^k)^2$ — это $C_n^k \cdot C_n^{n-k}$.
- А что такое C_{2n}^n?

Идея (простая)

- Рассмотрим множество из $2n$ элементов.
- Разобьём его на две половины по n элементов.
- Чтобы выбрать n из $2n$, необходимо и достаточно выбрать k из первой половины и $n - k$ из другой.

Идея (менее простая, но об этом подходе тоже нужно знать)

- C_{2n}^{n} — это количество кратчайших путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по сторонам целочисленной решётки.
- Любой такой путь проходит через какую-то из точек на второй диагонали: $(n,0),(n-1,1),\ldots,(n-k,k),\ldots,(0,n)$.
- Таким образом, каждый такой путь разбивается на два участка: от точки $(0,0)$ до точки $(n-k,k)$ и от точки $(n-k,k)$ до точки (n,n).

Идея (менее простая, но об этом подходе тоже нужно знать)

- Кратчайших путей из точки $(0,0)$ в точку $(n-k,k)$ имеется C_n^k.
- Кратчайших путей из точки $(n-k,k)$ в точку (n,n) имеется
  (столько же, сколько путей из $(0,0)$ в $(n-(n-k),(n-k))$, т. е. в $(k,n-k)$)
  тоже C_n^k.
- Тогда по правилу произведения,
  путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n),
  проходящих через точку $(n-k,k)$,
  имеется $(C_n^k)^2$.

  (А дальше по правилу суммы по всем возможным точкам $(n-k,k)$,
  которых k.)

Подытоживающий список 2

6) $C_n^r = C_n^{n-r}$
7) $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$
8) $C_n^r \cdot C_r^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{r-k}$
9) $C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} = C_n^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} > C_n^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} > \ldots > C_n^n$
10) $\sum\limits_{r=0}^{n} (C_n^r)^2 = C_{2n}^n$

§6. Полиномиальный коэффициент. Мультимножества и их перестановки

Полиномиальный коэффициент

Вступление

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Мы знаем, что $C_n^r = C_n^{n-r}$ — это количество способов распределить n объектов по двум отличным друг от друга группам (различным “ящикам”), внутри каждой из которых порядок объектов не важен, так, чтобы в первой было r объектов, а во второй — $n - r$.

(Потому что если мы выбираем r объектов из n, остальные $n - r$ автоматически попадают в группу “невыбранных”.)

Пусть $n \in \mathbb{N}$,
$n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
причём $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

- Обозначим через $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$
  количество способов распределить n объектов
  по k отличным друг от друга
  (например, пронумерованным)
  группам (различным "ящикам"),
  внутри каждой из которых порядок объектов не важен,
  так, чтобы для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, k$
  в i-й группе было n_i объектов.
- Назовём число $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$
  полиномиальным коэффициентом.

Иными словами

Пусть X — непустое конечное множество, $|X| = n$.
Тогда $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ — это количество способов образовать упорядоченную последовательность $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ подмножеств $X_i \subseteq X$ таких, что

- $X_i \cap X_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$,
- $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i = X$,
- $|X_i| = n_i$,
- $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$
(следует из предыдущих по правилу суммы).

Пусть $n \in \mathbb{N}$,
$n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
причём $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Теорема

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} =$$
$$= C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Доказательство

- Количество способов неупорядоченно и без повторений выбрать n_1 объектов из n для отправки в группу номер 1 равно $C_n^{n_1}$.

  (При этом если в группу номер 1 выбраны какие-то другие объекты, то всё распределение по группам считается другим.)
- Количество способов неупорядоченно и без повторений выбрать n_2 объектов из оставшихся $n - n_1$ для отправки в группу номер 2 равно $C_{n-n_1}^{n_2}$.

  (При этом если в группу номер 2 выбраны какие-то другие объекты, то всё распределение по группам считается другим.)

Доказательство

...

- Количество способов неупорядоченно и без повторений выбрать n_k объектов из оставшихся $n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}$ для отправки в группу номер k
  равно $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$.
  (При этом если в группу номер k
  выбраны какие-то другие объекты,
  то всё распределение по группам считается другим.)
- Тогда по правилу произведения количество $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ искомых распределений по k группам равно
  $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$.

Доказательство

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot (n-n_1)!} \times$$

$$\times \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdot (n-n_1-n_2)!}$$

$$\times \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3! \cdot (n-n_1-n_2-n_3)!} \times \ldots \times$$

$$\times \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}!)}{n_k! \cdot (n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! \cdot 0!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$,
$n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
причём $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Наблюдение

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} =$$

$$= \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot P_{n_3} \cdot \ldots \cdot P_{n_k}} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Мультимножество

Пусть X — непустое конечное множество,
$\alpha : X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ — отображение.
(При этом $\sum\limits_{x \in X} \alpha(x) < \infty$).

Определение

Упорядоченная пара $M = (X, \alpha)$ называется конечным мультимножеством на множестве X.

- $\alpha(x_0)$ — количество вхождений элемента $x_0 \in X$ в мультимножество M.

  Если $\alpha(x_0) = 0$, то x_0 отсутствует в M,

  а если $\alpha(x_0) > 0$, то x_0 присутствует в M ($\alpha(x_0)$ раз).
- $\sum\limits_{x \in X} \alpha(x)$ — количество элементов в мультимножестве M.

Примеры

$$X = \{1, 2, 3\},$$
$$\alpha, \beta : X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$
$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 1, \quad \alpha(3) = 1,$$
$$\beta(1) = 3, \quad \beta(2) = 0, \quad \beta(3) = 4.$$

- $M_1 = (X, \alpha) =< 1, 1, 2, 3 >$,
- $M_2 = (X, \beta) =< 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3 >$.

В общем случае будем писать

$$M = (X, \alpha) =< x_1, x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_k, \dots, x_k >=$$
$$=< y_1, y_2, \dots, y_n >,$$

где $n = \sum\limits_{x \in X} \alpha(x)$.

Перестановки мультимножеств

Пусть $M = (X, \alpha) =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$
— конечное мультимножество
на множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Определение

Перестановкой мультимножества M называется упорядоченный набор $(y_{\ell_1}, y_{\ell_2}, \ldots, y_{\ell_n})$ длины $n = \sum\limits_{x \in X} \alpha(x)$,
в котором для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$
элемент $x_i \in X$ встречается ровно $\alpha(x_i)$ раз.

Пример

$$M =< 1, 1, 2, 3 >$$

Все возможные перестановки:

- $1, 1, 2, 3$
- $1, 1, 3, 2$
- $1, 2, 1, 3$
- $1, 2, 3, 1$
- $1, 3, 1, 2$
- $1, 3, 2, 1$
- $2, 1, 1, 3$
- $2, 1, 3, 1$
- $2, 3, 1, 1$
- $3, 1, 1, 2$
- $3, 1, 2, 1$
- $3, 2, 1, 1$

Количество перестановок — 12.

Теорема

Пусть $M = (X, \alpha) =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$ *— мультимножество на множестве* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$*,*
где $\alpha(x_i) = n_i$ *для каждого* $i = 1, 2, \ldots, k$*.*

Тогда количество перестановок мультимножества M *равно* $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$*.*

Доказательство

- Пусть $(y_{\ell_1}, y_{\ell_2}, \ldots, y_{\ell_n})$ — произвольная перестановка мультимножества M,
  т. е. упорядоченный набор длины $n = \sum\limits_{x \in X} \alpha(x)$,
  в котором для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$
  элемент $x_i \in X$ встречается ровно $\alpha(x_i) = n_i$ раз.
- Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$
  рассмотрим множество $S_i = \{j \mid y_j = x_i\}$
  — множество номеров позиций элемента x_i
  в перестановке $(y_{\ell_1}, y_{\ell_2}, \ldots, y_{\ell_n})$.

Доказательство

$[(y_{\ell_1}, y_{\ell_2}, \ldots, y_{\ell_n}),$

$S_i = \{j \mid y_j = x_i\}\ ].$

Несложно заметить, что для любого $i = 1, 2, \ldots, k$:

- $S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $S_i \cap S_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$ (поскольку не могут два разных элемента x_i и x_j находиться на одной позиции в перестановке),
- $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (на каждой позиции перестановки находится хоть один элемент),
- $|S_i| = n_i$.

Доказательство

Таким образом, по указанному принципу каждой перестановке $(y_{\ell_1}, y_{\ell_2}, \ldots, y_{\ell_n})$ мультимножества M можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с описанными выше свойствами.

Несложно убедиться (это предлагается читателю проделать самостоятельно), что такое соответствие является

- отображением, притом
- инъективным
- и сюръективным.

Доказательство

- Таким образом, по правилу биекции число всевозможных перестановок мультимножества M оказывается равно числу всевозможных упорядоченных наборов $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с описанными выше свойствами,
- а последних по определению $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Тот же пример

$M = < 1, 1, 2, 3 >$

Количество перестановок — $C_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 4 \cdot 3 = 12.$

- Совпадает с количеством способов
выбрать 2 позиции для единиц,
затем 1 позицию для двоек
и потом ещё 1 позицию для троек.
- Также совпадает с количеством способов
попереставлять 4 разных объекта,
а затем вспомнить, что 2 из них одинаковы (между собой)
и неотличимы друг от друга
(а значит, их перестановка между собой ничего не меняет),
ещё 1 один из них одинаков (сам с собой),
и последний 1 из них одинаков (сам с собой).

Примеры задач

Пример 1

Задача

Сколько слов (упорядоченных цепочек символов), в которых четыре буквы ‘S’ не стоят подряд, можно составить из слова “MISSISSIPPI”?

Важная информация

- ‘M’: 1
- ‘I’ : 4
- ‘S’ : 4
- ‘P’ : 2

Всего: 11

Ответ

$$C_{11}^{1,4,4,2} - C_{8}^{1,4,1,2}.$$

Идея

Подсчитать количество всех возможных слов,

вычесть количество тех, в которых четыре S идут подряд (т. е. образуют единый блок, один объект.)

Пример 2

Задача

В коробке находятся

- 3 синих,
- 3 красных,
- и 4 зелёных шара.

Шары одного цвета неотличимы друг от друга.

Сколькими способами можно вытащить,
располагая вытаскиваемые шары последовательно в ряд,
(т. е. порядок учитывать)
8 шаров из этой коробки ?

Идея

Мы могли бы посчитать
количество расстановок этих 8 шаров в ряд,
если бы знали, сколько именно там шаров каждого цвета.

Но мы не знаем.

Но мы можем рассмотреть варианты!

Варианты набрать 8 шаров

Синих (max 3)	Красных (max 3)	Зелёных (max 4)	Перестановок
1	3	4	$C_8^{1,3,4}$
2	2	4	$C_8^{2,2,4}$
2	3	3	$C_8^{2,3,3}$
3	1	4	$C_8^{3,1,4}$
3	2	3	$C_8^{3,2,3}$
3	3	2	$C_8^{3,3,2}$

Ответ:

$$2 \cdot C_8^{1,3,4} + C_8^{2,2,4} + 3 \cdot C_8^{2,3,3}.$$

§7. Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема

Для любого $n \in \mathbb{N}$
и любых $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
имеет место равенство:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n, \\ n_i \geqslant 0}} C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}.$$

Небольшая демонстрация

$$(a+b+c)^4 = (a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c)$$

Как получается ab^2c:

$a\cdot b\cdot b\cdot c$	$b\cdot a\cdot c\cdot b$	$b\cdot c\cdot b\cdot a$	$c\cdot a\cdot b\cdot b$
$a\cdot b\cdot c\cdot b$	$b\cdot c\cdot a\cdot b$	$b\cdot b\cdot a\cdot c$	$c\cdot b\cdot a\cdot b$
$a\cdot c\cdot b\cdot b$	$b\cdot a\cdot b\cdot c$	$b\cdot b\cdot c\cdot a$	$c\cdot b\cdot b\cdot a$

Идеи из доказательства

Пусть $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$,

— слагаемое, полученное в результате раскрытия скобок в выражении $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$.

- Коэффициент перед этим слагаемым после приведения подобных равен числу раз, которые оно встретилось после раскрытия.
- Это слагаемое встречается столько раз, сколькими разными способами его можно составить.

Идеи из доказательства

- Один способ его составить
соответствует перестановке мультимножества

$$< \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n_1 \text{ раз}}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n_2 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{x_k, x_k, \ldots, x_k}_{n_k \text{ раз}} >,$$

причём такое соответствие взаимно-однозначно.

- Таким образом, коэффициент перед ним
равен числу перестановок указанного мультимножества,
т. е. $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Следствие из полиномиальной теоремы

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2=n,\\ n_1,n_2\geqslant 0}} C_n^{n_1,n_2} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{n} C_n^{n_1,n-n_1} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n-n_1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^{k} \cdot x_1^{k} \cdot x_2^{n-k}$$

Пример

Задача

Чему равен коэффициент при $a^2b^3c^2d^5$
после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых
в выражении $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$?

Пример

Задача

Чему равен коэффициент при $a^2 b^3 c^2 d^5$
после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых
в выражении $(a + 2b - 3c + 2d + 5)^{16}$?

Ответ

$C_{16}^{2,3,2,5,4} \cdot 2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 2^5 \cdot 5^4.$

Задача

$a^2b^3c^2d^5$

в $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$

Пояснение

- Проделаем замену:
  $x_1 = a, \quad x_2 = 2b, \quad x_3 = -3c, \quad x_4 = 2d, \quad x_5 = 5.$
- Тогда $(a+2b-3c+2d+5)^{16} = (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{16}$.
- Коэффициент при $x_1^2x_2^3x_3^2x_4^5x_5^{16-2-3-2-5}$ равен $C_{16}^{2,3,2,5,4}$.

$$C_{16}^{2,3,2,5,4} \cdot x_1^2x_2^3x_3^2x_4^5x_5^4 = C_{16}^{2,3,2,5,4} \cdot a^2 \cdot (2b)^3 \cdot (-3c)^2 \cdot (2d)^5 \cdot 5^4 =$$
$$= C_{16}^{2,3,2,5,4} \cdot 2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 2^5 \cdot 5^4 \cdot a^2b^3c^2d^5$$