Глава 2.
Элементы комбинаторики

§1. Основные правила комбинаторики

Список правил

Фундаментальные:

0) правило двойного подсчёта;
1) биективное правило (правило биекции).

Основные:

2) правило сложения / суммы;
3) правило умножения / произведения;
4) правило деления?

Производные правила:

5) правило разности.

2. Правило суммы

Пример 1

Вопрос

Сколько целых чисел находится в промежутке с -73 по 42 (т. е. оба конца включены)?

Краткий ответ

Отрицательных — это с -73 по -1 — имеется 73 числа;

Положительных — это с 1 по 42 — имеется 42 числа;

Не попавших в предыдущие категории — это 0 — имеется 1 число.

Итого: $73 + 42 + 1 = 116$ чисел.

Пример 2

Вопрос

Сколькими способами можно выбрать одно целое число из промежутка с -73 по 42 (т. е. оба конца включены)?

Краткий ответ

Выбрать одно из отрицательных (их 73) — 73 способа;

одно из положительных (их 42) — 42 способа;

одно из не попавших в предыдущие категории (их 1) — 1 способ.

Итого: $73 + 42 + 1 = 116$ способов выбрать одно число.

Интуитивное представление

Если

- объект x_1 может быть выбран n_1 способами,
- объект x_2 может быть выбран n_2 способами,
  каждый из которых отличен от способа выбора объекта x_1,

  ...
- объект x_k может быть выбран n_k способами,
  каждый из которых отличен от любого из способов выбора любого из объектов $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$,

то

выбор «либо x_1, либо x_2, ..., либо x_k»
можно осуществить $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ способами.

Официальная формулировка

Правило суммы

Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *— попарно непересекающиеся конечные множества,*

т. е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для любых* i, j*, где* $1 \leqslant i < j \leqslant k$*,*

то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

1. Биективное правило

Пример 1

Вопрос

В промежутке с -73 по 42 находится 116 целых чисел.

Сколькими способами можно осуществить выбор одного из них?

Ответ

116 способами.

Часть интуитивного представления

Следующие количества равны:

- количество объектов во множестве X;
- количество способов выбрать один объект множества X;
- количество способов составить один объект множества X.

Пример 2

Вопрос

Сколько целых чисел находится в промежутке с 74 по 185?

Ответ

Столько же, сколько целых чисел находится в промежутке с $(74 - 73)$ по $(185 - 73)$,

т. е. в промежутке с 1 по 112.

Но промежутке с 1 по 112 находится 112 целых чисел,

следовательно, в промежутке с 74 по 185 также находится 112 целых чисел.

Интуитивное представление

Если

- элементы множества A
  находятся с элементами множества B
  в соответствии “один к одному”
- и количество элементов множества A равно n,

то

количество элементов множества B равно n.

Официальная формулировка

Биективное правило

Если A *и* B *— конечные множества,*

существует биекция $f : A \to B$

и $|A| = n$,

то $|B| = n$.

Иногда полезные утверждения

Утверждение 1

Пусть X и Y — непустые конечные множества,
$f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — инъекции.
Тогда
$$|X| = |Y|.$$

Утверждение 2

Пусть X и Y — непустые конечные множества,
причём $|X| = |Y|$,
$f : X \to Y$ — инъекция.
Тогда f биекция.

Утверждение 1

Пусть X *и* Y *— непустые конечные множества,*
$f : X \to Y$ *и* $g : Y \to X$ *— инъекции.*
Тогда

$$|X| = |Y|.$$

Доказательство

Проведите самостоятельно
на основе теоремы 1 из §9 главы 1.

Теорема 1 (из §9 главы 1)

Пусть X, Y *— конечные множества,* $|X| = n$, $|Y| = m$,
$f : X \to Y$ *— отображение.*
Тогда:

- *если* f *инъективно, то* $n \leqslant m$;
- *если* f *сюръективно, то* $n \geqslant m$;
- *если* f *биективно, то* $n = m$;

Утверждение 2

Пусть X и Y — непустые конечные множества,

причём $|X| = |Y|$,

$f : X \to Y$ — инъекция.

Тогда f биекция.

Доказательство

- Как мы ранее уже устанавливали, поскольку f является отображением, имеет место следующее равенство множеств:

$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}).$$

- Более того, при $y_1 \neq y_2$ выполнено

$$f^{-1}(\{y_1\}) \cap f^{-1}(\{y_2\}) = \varnothing,$$

откуда следует, что

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(\{y\})|.$$

Доказательство

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(\{y\})|$$

- Поскольку $f : X \to Y$ инъективна, для каждого $y \in Y$ выполнено
$$|f^{-1}(\{y\})| \leqslant 1.$$
- Предположим, что f не сюръективна.

  В этом случае для некоторого $y_0 \in Y$ имеет место строгое неравенство
$$|f^{-1}(\{y_0\})| < 1.$$
- Тогда
$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(\{y\})| < \sum_{y \in Y} 1 = |Y|,$$

т. е. $|X| < |Y|$.

Доказательство

$|X| < |Y|$.

- Но по условию $|X| = |Y|$.

  Противоречие.
- Следовательно, предположение о том, что f не сюръекция, неверно,

  а значит, f — сюръекция.
- Учитывая инъективность f, заключаем, что f — биекция.

Следствие из утверждений 1 и 2

Пусть X и Y — непустые конечные множества,
$f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — инъекции.
Тогда f и g биекции.

Пример использования

Вопрос

Пусть n — некоторое натуральное число.

Пусть $S = \{r \in \mathbb{N} \mid r \text{ — делитель } n, r < \sqrt{n}\}$,

а $T = \{r \in \mathbb{N} \mid r \text{ — делитель } n, r > \sqrt{n}\}$.

Верно ли, что $|S| = |T|$?

Краткое решение

Для каждого $r \in S$ рассмотрим $\frac{n}{r}$, которое обозначим $f(r)$.

Отметим, что $\frac{n}{r}$ определяется однозначно для каждого r.

Также заметим, что для каждого $r \in S$ выполнено $f(r) \in T$.

Действительно, если r — делитель числа n, то $n = r \cdot k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$,

а значит, $k = \frac{n}{r}$ — делитель числа n.

Кроме того, если $r < \sqrt{n}$, то $k = \frac{n}{r} > \sqrt{n}$,

т. к. в противном случае имели бы $k = \frac{n}{r} \leqslant \sqrt{n}$, откуда $k \cdot r < \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, т. е. $n < n$.

Таким образом, f — это отображение из S в T.

Краткое решение

$f : S \to T$.

Покажем, что f инъективна.

Пусть $f(r_1) = f(r_2)$ для некоторых $r_1, r_2 \in S$.

Тогда $\frac{n}{r_1} = \frac{n}{r_2}$, откуда $\frac{n}{r_1} \cdot r_1 \cdot r_2 = \frac{n}{r_2} \cdot r_1 \cdot r_2$,

откуда $r_2 = r_1$.

Следовательно, f инъективна (по определению).

Краткое решение

Аналогичными рассуждениями несложно получить, что если $r \in T$ и $g(r) = \frac{n}{r}$, то $g : T \to S$ — инъективное отображение.

По следствию из утверждений 1 и 2 заключаем, что f и g биекции, и что $|S| = |T|$.

5. Правило разности

Пример

Вопрос

Сколькими способами можно выбрать
одно целое число из промежутка с -100 по 100,
если нельзя брать число из промежутка с -73 по 42?

Ответ

Число способов выбрать одно число совпадает с количеством допустимых для выбора чисел.

В промежутке с -100 по 100 находится 201 целое число.

Из них в промежутке с -73 по 42 находятся 116 целых чисел.

Таким образом, для выбора допустимы только $201 - 116 = 85$ целых чисел.

Выбрать одно из них можно 85 способами.

Интуитивное представление

Если

- без учёта ограничений
  объект x мог бы быть выбран n способами,
- но по ограничениям не подходят k способов из них,

то

объект x может быть выбран $n - k$ способами.

Официальная формулировка

Правило разности

Если X и Y — конечные множества,

причём $Y \subseteq X$,

то $|X \setminus Y| = |X| - |Y|$.

0. Правило двойного подсчёта

Пример

Вопрос

Сколькими способами можно выбрать
одно целое число из промежутка с -100 по 100,
если нельзя брать число из промежутка с -73 по 42?

Ответ

$201 - 116 = 85$ способами.

Пример

Вопрос

Сколькими способами можно выбрать
одно целое число из промежутка с -100 по 100,
если нельзя брать число из промежутка с -73 по 42?

Другой ответ

- С -100 по -74 имеется 27 чисел
(столько же, сколько с 74 по 100,
что столько же, сколько с 1 по $100 - 73$);
- с 43 по 100 имеется 58 чисел
(столько же, сколько с 1 по $100 - 42$).

Итого: $27 + 58 = 85$ подходящих чисел,
способов выбрать одно из них столько же (т. е. 85).

Интуитивное представление

Если

- при правильном подсчёте некоторым правильным способом число элементов множества A получилось равным n_1,
- а при правильном подсчёте некоторым другим правильным способом число элементов того же множества A получилось равным n_2,

то

числа n_1 и n_2 равны.

Официальная формулировка?

Правило двойного подсчёта

Если A — множество,

то

$$|A| = |A|.$$

3. Правило произведения

Пример 1

Вопрос

Сколько существует трёхзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей?

Пример 1

Решение

В десятичной системе имеется 9 цифр, отличных от нуля.

- Рассмотрим двузначные числа без нулей.
- Зафиксируем первую цифру.

  На вторую есть 9 вариантов.
- То есть для каждой цифры y от 1 до 9
  имеется 9 двузначных чисел,
  начинающихся с цифры y,
  в записи которых нет 0.

  По правилу суммы получается, что всего имеется
  $\underbrace{9+9+\cdots+9}_{9 \text{ раз}} = 9 \times 9$ двузначных чисел,
  в записи которых нет 0.

Пример 1

Решение

- Рассмотрим трёхзначные числа без нулей.
- Зафиксируем первую цифру.

  На оставшиеся две есть 9×9 вариантов.
- То есть для каждой цифры z от 1 до 9
  имеется 9×9 трёхзначных чисел,
  начинающихся с цифры z,
  в записи которых нет 0.

  По правилу суммы получается, что всего имеется
  $\underbrace{(9 \times 9) + (9 \times 9) + \cdots + (9 \times 9)}_{9 \text{ раз}} = 9 \times 9 \times 9$ трёхзначных чисел,
  в записи которых нет 0.

Пример 1 (опять)

Вопрос

Сколько существует трёхзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей?

Решение

В десятичной системе имеется 9 цифр, отличных от нуля.

Следовательно, первую цифру такого числа можно выбрать
9 различными способами.

- При этом разные способы выбора первой цифры дают отличающиеся трёхзначные числа.

После выбора первой цифры вторую можно выбрать
9 различными способами.

- При этом разные способы выбора второй цифры дают отличающиеся трёхзначные числа.

После выбора первых двух цифр третью можно выбрать
9 различными способами.

- При этом разные способы выбора третьей цифры дают отличающиеся трёхзначные числа.

Решение

Количество нужных трёхзначных чисел совпадает с количеством способов последовательно выбрать три цифры одного такого трёхзначного числа (в том числе и из-за того, что другой выбор одной из цифр меняет всё число).

Решение

Это количество способов равно $9 \times 9 \times 9$,

поскольку
для каждого из 9 способов выбора первой цифры
имеется 9 способов выбора второй,
для каждого из которых, в свою очередь,
имеется 9 способов выбора третьей.

Следовательно, количество нужных трёхзначных чисел равно $9 \times 9 \times 9 = 729$.

Интуитивное представление

Если

- объект x_1 может быть выбран n_1 способами,
- после этого объект x_2 может быть выбран n_2 способами (вне зависимости от того, какой именно объект x_1 был выбран),

...

- после этого объект x_k может быть выбран n_k способами (вне зависимости от того, какие именно объекты $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ были выбраны),

то

выбор упорядоченного набора $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ можно осуществить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_k$ способами.

Официальная формулировка частного случая

Правило произведения (частный вид)

Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *— конечные множества,*

то

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_k|.$$

Пример 2

Вопрос

Сколько существует трёхзначных натуральных чисел,
в десятичной записи которых нет нулей
и все три цифры различны?

Решение

В десятичной системе имеется 9 цифр, отличных от нуля.

Следовательно, первую цифру такого числа можно выбрать
9 различными способами.

- При этом разные способы выбора первой цифры дают отличающиеся трёхзначные числа.

После выбора первой цифры вторую можно выбрать
8 различными способами
(она должна быть отлична от 0
и не повторять первую цифру).

- При этом разные способы выбора второй цифры дают отличающиеся трёхзначные числа.

Решение

После выбора первых двух цифр третью можно выбрать 7 различными способами
(она должна быть отлична от 0
и не повторять первую и вторую цифры).

- При этом разные способы выбора третьей цифры дают отличающиеся трёхзначные числа.

Решение

Количество нужных трёхзначных чисел совпадает с количеством способов последовательно выбрать три цифры одного такого трёхзначного числа (в том числе и из-за того, что другой выбор одной из цифр меняет всё число).

Решение

Это количество способов равно $9 \times 8 \times 7$,

поскольку
для каждого из 9 способов выбора первой цифры
имеется 8 способов выбора второй,
для каждого из которых, в свою очередь,
имеется 7 способов выбора третьей.

Следовательно, количество нужных трёхзначных чисел равно $9 \times 8 \times 7$.

Пример 3

Вопрос

Сколько существует способов рассадить 5 человек в ряд?

(Две рассадки в ряд считаются различными,
если есть место, на котором сидит не один и тот же человек.)

Ответ:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

- Для удобства произведение $n \times (n-1) \times \ldots 2 \times 1$, где $n \in \mathbb{N}$ т. е. произведение всех натуральных чисел с 1 по n включительно,
  называют факториалом числа n
  и обозначают $n!$.
- $0!$ полагают равным 1.

Пример:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

- Произведение $2n \times (2n-2) \times \ldots 4 \times 2$, где $n \in \mathbb{N}$ т. е. произведение всех натуральных чисел с 1 по $2n$ включительно, имеющих ту же чётность, что и $2n$, называют двойным факториалом (или полуфакториалом) числа $2n$ и обозначают $(2n)!!$.
- Произведение $(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots 3 \times 1$, где $n \in \mathbb{N}$ т. е. произведение всех натуральных чисел с 1 по $2n-1$ включительно, имеющих ту же чётность, что и $2n-1$, называют двойным факториалом (или полуфакториалом) числа $2n-1$ и обозначают $(2n-1)!!$.

Пример:

$5!! = 5 \times 3 \times 1 = 15.$

4. Правило деления

Пример 3

Вопрос

Сколько существует способов рассадить 5 человек за круглым столом?

(Две рассадки за круглым столом
в данной задаче считаются одинаковыми,
если у каждого человека сосед справа тот же.)

Решение

Будем превращать рассадки 5 человек в ряд в рассадки за круглым столом следующим образом.

Пусть $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ — рассадка в ряд.

По ней строим рассадку $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_1]$ за круглым столом:

- для каждого человека его сосед справа в рассадке в ряд остаётся его соседом справа в рассадке за круглым столом;
- человек, сидевший последним в ряду, становится соседом справа для человека, сидевшего в ряду первым.

(По сути, просто располагаем этот ряд за столом по часовой стрелке.)

Решение

Заметим, что каждая возможная рассадка за круглым столом может быть получена описанным образом из некоторой рассадки в ряд.

Кроме того, заметим, что в одну и ту же рассадку $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_1]$ за круглым столом
переходят ровно пять следующих различных рассадок в ряд:

- $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$,
- $(p_2, p_3, p_4, p_5, p_1)$,
- $(p_3, p_4, p_5, p_1, p_2)$,
- $(p_4, p_5, p_1, p_2, p_3)$,
- $(p_5, p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Решение

Следовательно, количество искомых рассадок за круглым столом ровно в 5 раз меньше количества рассадок в ряд.

Рассадок в ряд, как мы уже знаем, 120,

а значит, рассадок за круглым столом – 24.

Интуитивное представление

Если

- элементы множества A
  находятся с элементами множества B
  в соответствии “d к одному”
- и количество элементов множества A равно n,

то

количество элементов множества B равно $\frac{n}{d}$.

Официальная формулировка

Пусть X, Y — конечные множества, $d \in \mathbb{N}$.

- Отображение $f : X \to Y$ называется *d-функцией*, если для каждого $y \in Y$ выполнено

$$|f^{-1}(\{y\})| = d.$$

Правило деления

Если A и B — конечные множества,
для некоторого $d \in \mathbb{N}$ существует d-функция $f : A \to B$
и $|A| = n$,
то $|B| = \frac{n}{d}$.

Список правил ещё раз

Фундаментальные:

0) правило двойного подсчёта;
1) биективное правило (правило биекции).

Основные:

2) правило сложения / суммы;
3) правило умножения / произведения;
4) правило деления?

Производные правила:

5) правило разности.

Пример 1

Вопрос

Пусть X — n-элементное множество.

Сколько у него различных подмножеств?

Решение

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Каждому подмножеству A множества X
поставим в соответствие
бинарный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ по следующему правилу:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in A \\ 0, & \text{если } x_i \notin A. \end{cases}$$

Отметим, что это соответствие является отображением множества 2^X во множество $\{0,1\}^n$.

Обозначим его f.

Решение

Покажем, что f — биекция.

Действительно, если A и B — разные подмножества, то в одном из них есть элемент x_i, которого нет в другом.

Тогда в одном из векторов $f(A)$ и $f(B)$ i-я компонента равна 1, а в другом — 0,

а значит, $f(A) \neq f(B)$.

Следовательно, f инъективна.

Решение

Покажем сюръективность.

Пусть $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — произвольный двоичный вектор длины n.

Рассмотрим следующее подмножество множества X:

$Y = \{x_i \in X \mid \beta_i = 1\}$.

Несложно заметить, что по определению отображения f выполнено $f(Y) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Таким образом, для любого двоичного вектора $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \{0, 1\}^n$ существует подмножество $Y \subseteq X$, такое что $f(Y) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Следовательно, f сюръективна.

Решение

Таким образом, $f : 2^X \to \{0,1\}^n$ — биекция.

По биективному правилу, $|2^X| = |\{0,1\}^n|$.

По правилу произведения, $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$.

Следовательно, $|2^X| = 2^n$,

т. е. у n-элементного множества X
имеется 2^n различных подмножеств.

Пример 2

Вопрос

Пусть X — n-элементное множество.

Сколько у него различных 2-элементных подмножеств?

Решение 1

- Посчитаем количество способов составить упорядоченную пару (a, b), где $a, b \in X$ и $a \neq b$.

  Количество способов выбрать a равно n,

  количество способов выбрать b, $b \neq a$, равно $n - 1$,

  а значит, по правилу произведения, количество способов составить упорядоченную пару (a, b) равно $n \cdot (n - 1)$.

Решение 1

Каждую упорядоченную пару (a, b), $a \neq b$, отобразим в двухэлементное подмножество $\{a, b\} \subseteq X$.

Заметим, что для каждого 2-элементного подмножества $\{c, d\}$ имеются ровно две различные упорядоченные пары (c, d) и (d, c), переходящие в него при таком отображении (поскольку $c \neq d$),

поэтому рассматриваемое отображение — это 2-функция,

а значит, по правилу деления, количество 2-элементных подмножеств в 2 раза меньше, чем количество упорядоченных пар,

т. е. равно $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Пример 2 (снова)

Вопрос

Пусть X — n-элементное множество.

Сколько у него различных 2-элементных подмножеств?

Решение 2

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,

$\{x_i, x_j\} \subseteq X$, где $i < j$.

Заметим, что количество 2-элементных подмножеств,

- в которых $j = n$, равно $n - 1$,
- в которых $j = n - 1$, равно $n - 2$,
- $\ldots$
- в которых $j = 2$, равно 1,
- в которых $j = 1$, равно 0.

Отметим, что указанные группы подмножеств являются непересекающимися, и любое двухэлементное подмножество множества X попадает в какую-то из них, поэтому

Решение 2

количество всевозможных 2-элементных подмножеств множества X равно

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1).$$

Вывод из примера 2

Вопрос

Пусть X — n-элементное множество.

Сколько у него различных 2-элементных подмножеств?

По правилу двойного подсчёта:

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Пример 3

Вопрос

Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на n пар?

(Порядок людей в паре неважен, порядок самих пар тоже неважен.)

Краткое решение 1

Расставим $2n$ человек в ряд: $(p_1, p_2, \ldots, p_{2n-1}, p_{2n})$.

Это можно сделать $2n \times 2n - 1 \times \cdots \times 2 \times 1 = (2n)!$ способами.

Образуем множество пар
$\{\{p_1, p_2\}, \ \{p_3, p_4\}, \ \ldots, \{p_{2k-1}, p_{2k}\}, \ldots, \{p_{2n-1}, p_{2n}\}\}$.
Заметим, что каждое такое множество пар образуется из

$$2^n \times n \times n - 1 \times \cdots \times 2 \times 1 = 2^n \cdot n!$$

различных расстановок в ряд.

Каждая расстановка, дающая то же множество пар, может быть получена комбинацией из:

- расстановки самих пар, что можно сделать $n \times n - 1 \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ способами,
- и расстановки элементов внутри каждой из n пар, что можно сделать 2^n способами.

Краткое решение 1

По правилу деления, количество различных разбиений на пары равно

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

Пример 3 (снова)

Вопрос

Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на n пар?

(Порядок людей в паре неважен, порядок самих пар тоже неважен.)

Краткое решение 2

Пронумеруем людей.

- Чтобы образовать пару с человеком номер 1, нужно выбрать одного из $(2n-1)$ людей.

  Это можно сделать $(2n-1)$ способами.
- Возьмём из оставшихся $(2n-2)$ людей человека с наименьшим номером.

  В пару к нему нужно выбрать одного из $(2n-3)$ оставшихся.

  $(2n-3)$ способов.
- Возьмём из оставшихся $(2n-4)$людей человека с наименьшим номером.

  Для него нужно выбрать одного из $(2n-5)$ оставшихся.

  $\ldots$

Краткое решение 2

...

- Возьмём из оставшихся 4 людей человека с наименьшим номером.

  Для него нужно выбрать одного из 3 оставшихся.

  3 способа.
- Возьмём из оставшихся 2 людей человека с наименьшим номером.

  Для него нужно выбрать одного из 1 оставшихся.

  1 способ.

Краткое решение 2

По правилу произведения, число способов составить n пар людей в таком порядке, чтобы для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ в i-й паре находился человек с наименьшим номером из $(2n - 2i + 2)$ номеров, не использованных в первых $(i - 1)$ парах, равно

$$(2n - 1) \times (2n - 3) \times (2n - 5) \times \cdots \times 3 \times 1 = (2n - 1)!!.$$

Краткое решение 2

Отметим, что для любого разбиения $2n$ людей на n пар способ расстановки этих пар в порядке с указанным свойством единствен (по сути, это просто расстановка пар в порядке возрастания наименьших номеров в каждой паре).

Поэтому количество составить n пар людей совпадает с количеством способом составить n пар людей в указанном порядке.

Следовательно, количество способов разбить $2n$ человек на n пар равно

$$(2n-1)\times(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times 3\times 1=(2n-1)!!.$$

Вывод из примера 3

Вопрос

Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на n пар?

(Порядок людей в паре неважен, порядок самих пар тоже неважен.)

По правилу двойного подсчёта:

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = (2n-1)!!.$$