Предпараграфные примеры

Все люди смертны.
Сократ — человек.

Сократ смертен.

Вопросы:

1) Верно ли это рассуждение?
2) Как оно выражается логическим следствием в логике высказываний?

Верное рассуждение на предыдущем слайде
не может быть выражено
логическим следствием в логике высказываний.

Существуют верные рассуждения,
которые не могут быть выражены
логическим следствием в логике высказываний.

Вопросы:

1) Верно ли это рассуждение?
2) Как оно выражается логическим следствием в логике высказываний?
3) Как тогда обосновать его правильность?

§15. Понятие предиката. Примеры предикатов

Примеры предикатов

Примеры:

1) «$x > 3$»

— обращается в высказывание при подстановке вместо x любого числа из $\mathbb{R}$.

Если обозначить $P(x)$=«$x > 3$»,

и сказать, что $x \in \mathbb{R}$, то

- $P(1) =$ Л,
- $P(3) =$ Л,
- $P(4) =$ И.

Примеры:

2) «$x < x + 1$»

— обращается в высказывание при подстановке вместо x любого числа из $\mathbb{R}$,

притом каждое такое высказывание является истинным.

Если обозначить $P(x)$=«$x < x + 1$»,

и сказать, что $x \in \mathbb{R}$, то

$P(a) = \text{И}$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Примеры:

3) «Преподаватель A находится в аудитории N в момент времени t»

— обращается в высказывание при подстановке

вместо A — конкретного преподавателя БГУ;

вместо N — номера аудитории главного корпуса БГУ;

вместо t — конкретного момента времени.

Если обозначить исходный объект за $R(A, N, t)$,

то $R(\text{Ловеров Я.А.}, 605, 9:55:00\ 20.10.2021) = \text{И}$,

а $R(\text{Орлович Ю.Л.}, 605, 9:55:00\ 20.10.2021) = \text{Л}$.

Интуитивное представление

Интуитивное представление

- Предикат — это функция,
  значениями которой являются высказывания.

Строгие определения

Официальное определение

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — непустые множества, $n \geqslant 1$.

Определение

n-Местным предикатом $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется отображение вида

$$P^n : M_1 \times M_2 \times \ldots M_n \to \{\text{Л}, \text{И}\}.$$

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — непустые множества, $n \geqslant 1$.

- Пусть также $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$.

Определение

n-Местным предикатом $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданным на множестве M, называется отображение вида

$$P^n : M^n \to \{\text{Л}, \text{И}\}.$$

Замечание:

В дальнейшем для удобства введения определений будем считать, что $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$.

Более общие определения строятся, надеюсь, понятным образом.

Связанные понятия

Пусть $P^n(x_1, x_2, \dots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M.

- Множество M называется предметной областью предиката P^n.
- Элементы множества M называются индивидуальными предметами или просто предметами,
- а переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые принимают значения из множества M, — предметными переменными.
- Значение предиката P^n на конкретном наборе предметов $a_1, a_2, \dots, a_n$ (а точнее, высказывание $P^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$) называют индивидуальным предикатом.

Обозначения

Конкретные предметы (т. е. элементы множества M) в лекциях будем обозначать строчными (маленькими) буквами из начала латинского алфавита (возможно, с индексами):

- $a_1, a_2, \ldots, a_k, b, c, \ldots$

Предметные переменные — строчными (маленькими) буквами из конца латинского алфавита (возможно, с индексами):

- $\ldots, x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z$

Обозначения

Обозначать предикаты в лекциях будем заглавными латинскими буквами; как правило, из части алфавита P–R, и, возможно, с индексами.

Кроме того, мы часто будем указывать местность предиката (обычно перечислением всех входящих в него предметных переменных):

- $P(x, y)$
- Q^2
- $R^k(y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{\text{Л}, \text{И}\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Определение

Множество

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^n \mid P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{И}\}$$

называется областью истинности предиката P.

Обозначение

$$P^+$$

Воспоминания из параграфа о множествах

Чтобы задать множество, необходимо так или иначе указать, из каких элементов оно состоит.
Это можно сделать следующими способами:

2) указать свойство, которым обладают
все элементы данного множества и только они
(задание множества характеристическим свойством).

Замечание

Пусть мы хотим задать множество X свойством P,
т. е. рассмотреть $X = \{x \mid P(x)\}$.

Тогда для любого элемента x_0
$P(x_0)$ должно быть высказыванием.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{\text{Л}, \text{И}\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Определение

Множество

$$P^+\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^n \mid P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{И}\}$$

называется областью истинности предиката P.

Наблюдение

Любое множество, заданное характеристическим свойством, — это область истинности предиката, который взят в качестве этого свойства.

Некоторые типы предикатов

Пусть $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Предикат P называется

- тождественно-истинным на множестве M, если для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ выполнено

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И.$$

Пример:

Предикат $P(x) =$ «x — нечётное число» на множестве нечётных целых чисел является тождественно-истинным.

Пусть $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{\text{Л}, \text{И}\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Предикат P называется

- тождественно-ложным на множестве M, если для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ выполнено

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{Л}.$$

Пример:

Предикат $P(x) =$ «x — нечётное число» на множестве чётных целых чисел является тождественно-ложным.

Пусть $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Предикат P называется

- выполнимым на множестве M, если существуют такие предметы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, что выполнено

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И.$$

Пример:

Предикат $P(x) =$ «x — нечётное число» на множестве целых чисел является выполнимым.

Пусть $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Предикат P называется

- опровержимым на множестве M, если существуют такие предметы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, что выполнено

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = Л.$$

Пример:

Предикат $P(x) =$ «x — нечётное число» на множестве целых чисел является опровержимым.

Замечание

Пусть $P_1 : \mathbb{N} \to \{Л, И\}$, $P_2 : \mathbb{Z} \to \{Л, И\}$ — предикаты, притом $P_1 =$ «x — нечётное число», $P_2 =$ «x — нечётное число».

- Строго говоря, $P_1 \neq P_2$.

Замечание

Рассмотрим фразы:

1) «предикат $P(x)$, заданный на множестве A»
2) «предикат P называется опровержимым на множестве M».

В них обеих под предикатом понимается будто бы только само правило P,

но в первой это можно списать на недостаточность языковых средств для выражения необходимой информации,

вторая же порядком слов намекает на то, что тот же предикат P мог бы быть задан и на каком-то другом множестве.

- Это, по-видимому, говорит о непоследовательности определений и отсутствии у разных авторов договорённости о том, что именно называть предикатом, и, как следствие, какие предикаты считать различными.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M.

Наблюдения:

- P — тождественно-истинный $\Leftrightarrow P^+ = M^n$;
- P — тождественно-ложный $\Leftrightarrow P^+ = \varnothing$;
- P — выполнимый $\Leftrightarrow P^+ \neq \varnothing$;
- P — опровержимый $\Leftrightarrow P^+ \neq M^n$.

Пусть два предиката
$P(x_1, x_2, \dots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$
и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$
заданы на множестве M.

Предикат Q называются следствием предиката P
на множестве M,

если для любых предметов $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ выполнено

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = И \quad \Rightarrow \quad Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = И.$$

Наблюдение:

Это равносильно тому, что $P^+ \subseteq Q^+$.

Пусть два предиката
$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$
и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{Л, И\}$
заданы на множестве M.

Предикаты P и Q называются равносильными
на множестве M,

если для любых предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ выполнено

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И \quad \Leftrightarrow \quad Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И.$$

Наблюдение:

Это равносильно тому, что $P^+ = Q^+$.

§16. Логические операции над предикатами

Пример 1:

- $P(x) : \mathbb{R} \to \{Л, И\}$,
  $P(x) =$ «$x \geqslant 3$».
- $Q(x) : \mathbb{R} \to \{Л, И\}$,
  $Q(x) =$ «$x < 3$».

Пример 2:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P^1 : A \to \{Л, И\}$.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	И	И	Л	И	Л
$\neg P(x)$	Л	Л	И	Л	И

Определение

Отрицание — это

операция, в результате применения которой к произвольному предикату $P^n : M^n \to \{Л, И\}$ получается

предикат, обозначаемый $\overline{P}^n$ (или $\neg P^n$), той же местности и заданный на том же множестве M, обладающий следующим свойством:

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ высказывание $\overline{P}^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ложно.

Наблюдение

Иными словами, предикат $\overline{P}$ таков, что

- для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$,
  $\overline{P}^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \overline{P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$.

Утверждение

Пусть $P : M^n \to \{Л, И\}$ — *n-местный предикат.*

Тогда

$$(\neg P)^+ = M^n \setminus P^+ = \overline{P^+}_{M^n}.$$

Пример 1:

- $P(x) : \mathbb{R} \to \{Л, И\}$,
  $P(x) =$ «$x \geqslant 3$».
- $Q(x) : \mathbb{R} \to \{Л, И\}$,
  $Q(x) =$ «$x < 3$».
- $R(x) =$ «$x \geqslant 3$ и $x < 3$».

Пример 2:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{\bigcirc, \triangle, \square\},$

$P(x) : A \to \{Л, И\}, R(z) : B \to \{Л, И\}$ — предикаты.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	И	И	Л	И	Л

z	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$
$R(z)$	И	И	Л

		z	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$
		$R(z)$	И	И	Л
x	$P(x)$	$P(x)\&R(z)$			
1	И		И	И	Л
2	И		И	И	Л
3	Л		Л	Л	Л
4	И		И	И	Л
5	Л		Л	Л	Л

Определение

Конъюнкция — это

операция, в результате применения которой к паре произвольных предикатов $P^n : M^n \to \{Л, И\}$ и $Q^k : N^n \to \{Л, И\}$ получается

предикат, обозначаемый $P \wedge Q$ (или $P \& Q$), действующий из $M^n \times N^k$, обладающий следующим свойством:

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M,\ b_1, b_2, \ldots, b_k \in N$

высказывание $(P \wedge Q)(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $Q(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Наблюдение

Иными словами, предикат $(P \wedge Q)$ таков, что

- для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, $b_1, b_2, \ldots, b_k \in N$

$(P \wedge Q)(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k) =$
$= P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \wedge Q(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Утверждение

Пусть $P : M^n \to \{Л, И\}$, $Q : N^k \to \{Л, И\}$ *— предикаты.*

Тогда

$$(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+.$$

Замечание

Если предикаты
$P : M_1 \times M_2 \times \ldots M_n \to \{Л, И\}$
и $Q : N_1 \times N_2 \times \ldots N_k \to \{Л, И\}$
имеют общие переменные,

т. е. таковы, что, без ограничения общности, выполнено:

- $M_1 = N_1,\ M_2 = N_2,\ \ldots,\ M_\ell = N_\ell,$
- $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_\ell, y_{\ell+1}, \ldots, y_n),$
- и $Q = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\ell, z_{\ell+1}, \ldots, z_k),$

то в определение их конъюнкции вносятся соответствующие правки:

Замечание

$M_1 = N_1,\ M_2 = N_2,\ \ldots,\ M_\ell = N_\ell,$

$P = P(x_1, x_2, \ldots, x_\ell, y_{\ell+1}, \ldots, y_n),$

и $Q = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\ell, z_{\ell+1}, \ldots, z_k),$

- $P \wedge Q : M_1 \times \cdots \times M_\ell \times M_{\ell+1} \times \cdots \times M_n \times N_{\ell+1} \times \cdots \times N_k \to$ $\to \{Л, И\}$, т. е. $P \wedge Q$ — $(n + m - \ell)$-местный;
- для любых $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \ldots, a_\ell \in M_\ell$,

  любых $b_{\ell+1} \in M_{\ell+1}, \ldots, b_n \in M_n$,

  и любых $c_{\ell+1} \in N_{\ell+1}, \ldots, c_k \in M_k$

  высказывание
  $(P \wedge Q)(a_1, a_2, \ldots, a_\ell, b_{\ell+1}, \ldots, b_n, c_{\ell+1}, \ldots, c_k)$
  истинно тогда и только тогда,
  когда истинны оба высказывания
  $P(a_1, a_2, \ldots, a_\ell, b_{\ell+1}, \ldots, b_n)$
  и $Q(a_1, a_2, \ldots, a_\ell, c_{\ell+1}, \ldots, c_k)$.

Пример:

$P : \mathbb{R}^2 \to \{Л, И\}$, $Q : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \{Л, И\}$,

$P(x, y) =$ «$x < y$»,

$Q(x, y) =$ «$x = y$».

- $P(x, y) \wedge Q(x, y)$ не определён;
- $P(x, y) \wedge Q(z, t) =$ «$x < y$ и $z = t$» $= R(x, y, z, t)$;
- $P(x, y) \wedge Q(z, y) =$ «$x < y$ и $z = y$» $= S(x, y, z)$.

Определения остальных известных вам логических операций :

- дизъюнкции,
- импликации,
- эквивалентности

но над предикатами, вводится по аналогии с определением конъюнкции предикатов.

Пример:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\bigcirc, \triangle, \square\}$,

$P(x) : A \to \{Л, И\}, R(z) : B \to \{Л, И\}$ — предикаты.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	И	И	Л	И	Л

z	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$
$R(z)$	И	И	Л

		z	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$
		$R(z)$	И	И	Л
x	$P(x)$	$P(x) \to R(z)$			
1	И		И	И	Л
2	И		И	И	Л
3	Л		И	И	И
4	И		И	И	Л
5	Л		И	И	И

§17. Кванторные операции над предикатами

Квантор всеобщности (для одноместных предикатов)

Интуитивное представление

Пусть $P : M \to \{Л, И\}$ — одноместный предикат на множестве M.

Рассмотрим высказывание

- «для всех $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно».

Обозначим его $\forall x P(x)$.

Неофициальные примеры:

$\forall x P(x) =$ «для всех $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно».

$B = \{\bigcirc, \triangle, \square\}$,

$R(z) : B \to \{Л, И\}$, $S(z) : B \to \{Л, И\}$, $T(z) : B \to \{Л, И\}$

— предикаты.

z	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$
$R(z)$	И	И	И
$S(z)$	Л	Л	Л
$T(z)$	Л	И	Л

$\forall z R(z)$	И
$\forall z S(z)$	Л
$\forall z T(z)$	Л

Официальное определение

$$\forall x P(x) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если для каждого } a \in M \\ & \text{высказывание } P(a) \text{ истинно;} \\ \text{Л}, & \text{если для некоторого } b \in M \\ & \text{высказывание } P(b) \text{ ложно.} \end{cases}$$

Или, что то же самое:

$$\forall x P(x) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(x) \text{ — тождественно-истинный на } M; \\ \text{Л}, & \text{если } P(x) \text{ — опровержимый на } M \text{ предикат.} \end{cases}$$

Официальные примеры

1) $P : \mathbb{R} \to \{Л, И\}$, $P(x) =$ «$|x| \geqslant 0$».
   $\forall x P(x) =$ И.
2) $Q_1 : \mathbb{N} \to \{Л, И\}$, $Q_1(x) =$ «x — простое число».
   $\forall x Q_1(x) =$ Л.
3) $Q_2 : \mathbb{P} \to \{Л, И\}$, где $\mathbb{P}$ — множество простых чисел;
   $Q_2(x) =$ «x — простое число».
   $\forall x Q_2(x) =$ И.

- Значок $\forall$ называется квантором (все)общности.
  (*от лат. quantus* — сколько)
- Высказывание $\forall x P(x)$ могут называть универсальным высказыванием о предикате $P(x)$.

Замечания

$\forall x P(x) =$ «для всех $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно».

- $\forall x P(x) =$ Л равносильно тому, что не для всех $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно, т. е. для некоторого(!) $b \in M$ высказывание $P(b)$ ложно.
- Высказывание «для всех $a \in M$ высказывание $P(a)$ ложно» записывается в виде $\forall x \overline{P}(x)$.

Квантор существования (для одноместных предикатов)

Интуитивное представление

Пусть $P : M \to \{Л, И\}$ — одноместный предикат на множестве M.

Рассмотрим высказывание

- «для некоторого $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно».

Обозначим его $\exists x P(x)$.

Неофициальные примеры:

$\exists x P(x) =$ «для некоторого $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно».

$B = \{\bigcirc, \triangle, \square\}$,

$R(z) : B \to \{Л, И\}$, $S(z) : B \to \{Л, И\}$, $T(z) : B \to \{Л, И\}$ — предикаты.

z	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$
$R(z)$	И	И	И
$S(z)$	Л	Л	Л
$T(z)$	Л	И	Л

$\exists z R(z)$	И
$\exists z S(z)$	Л
$\exists z T(z)$	И

$\forall z R(z)$	И
$\forall z S(z)$	Л
$\forall z T(z)$	Л

Официальное определение

$$\exists x P(x) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если для некоторого } a \in M \\ & \text{высказывание } P(a) \text{ истинно;} \\ \text{Л}, & \text{если для всех } b \in M \\ & \text{высказывание } P(b) \text{ ложно.} \end{cases}$$

Или, что то же самое:

$$\exists x P(x) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(x) \text{ — выполнимый на } M \text{ предикат;} \\ \text{Л}, & \text{если } P(x) \text{ — тождественно-ложный на } M. \end{cases}$$

Официальные примеры

1) $P^1 : \mathbb{R} \to \{Л, И\}$, $P^1(x) =$ «$|x| \geqslant 5$».
   $\exists x P^1(x) = И$.
2) $Q_1^1 : \mathbb{N} \to \{Л, И\}$, $Q_1^1(x) =$ «x — простое число».
   $\exists x Q_1^1(x) = И$.
3) $Q_2^1 : \mathbb{N} \setminus \mathbb{P} \to \{Л, И\}$, где $\mathbb{P}$ — множество простых чисел;
   $Q_2^1(x) =$ «x — простое число».
   $\exists x Q_2^1(x) = Л$.

- Значок $\exists$ называется квантором существования.
- Высказывание $\exists x P(x)$ могут называть экзистенциональным высказыванием о предикате $P(x)$.

Замечания

$\exists x P(x) =$ «для некоторого $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно».

- $\exists x P(x) =$ Л равносильно тому, что нет такого $a \in M$, что высказывание $P(a)$ истинно, т. е. для всех(!) $b \in M$ высказывание $P(b)$ ложно.
- Высказывание «для некоторого $a \in M$ высказывание $P(a)$ ложно» записывается в виде $\exists x \overline{P}(x)$.

Квантор всеобщности (общий случай)

Интуитивное представление

Пусть $P : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M, т. е. $P = P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим объект $Q(x_2, x_3, \ldots, x_n) =$

- =«для всех $a \in M$ "высказывание" $P(a, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ истинно».

Обозначим его $\forall x_1\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В общем случае, $Q(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — это $(n-1)$-местный предикат на множестве M.

(Высказывания для удобства считаем 0-местными предикатами.)

Неофициальный пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{a, b, c, d\},$$
$$P : A \times B \to \{Л, И\} \text{ — предикат.}$$

	y	a	b	c	d	
x	$P(x, y)$	$P(x, a)$	$P(x, b)$	$P(x, c)$	$P(x, d)$	$\forall y P(x, y)$
1	$P(1, y)$	И	Л	И	Л	Л
2	$P(2, y)$	Л	Л	И	Л	Л
3	$P(3, y)$	И	Л	И	И	Л
4	$P(4, y)$	И	Л	И	И	Л
5	$P(5, y)$	И	И	И	И	И
	$\forall x P(x, y)$	Л	Л	И	Л	

Официальное определение

$\forall x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — $n-1$-местный предикат, обладающий следующим свойством:
при любых предметах $c_2, c_3, \ldots, c_n \in M$:

$$\forall x_1 P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если для каждого } a \in M \\ & \text{высказывание } P(a, c_2, c_3, \ldots, c_n) \\ & \text{истинно;} \\ \text{Л}, & \text{если для некоторого } b \in M \\ & \text{высказывание } P(b, c_2, c_3, \ldots, c_n) \\ & \text{ложно.} \end{cases}$$

Официальное определение

Иными словами, $\forall x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — $n-1$-местный предикат, обладающий следующим свойством:
при любых предметах $c_2, c_3, \ldots, c_n \in M$:

$$\forall x_1 P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \text{ — предикат,} \\ & \text{тождественно-истинный} \\ & \text{по переменной } x_1 \\ & \text{ на } M; \\ \text{Л}, & \text{если } P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \text{ — предикат,} \\ & \text{опровержимый} \\ & \text{по переменной } x_1 \\ & \text{ на } M. \end{cases}$$

Тот же неофициальный пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{a, b, c, d\},$$

$P : A \times B \to \{Л, И\}$ — предикат.

	y	a	b	c	d	
x	$P(x,y)$	$P(x,a)$	$P(x,b)$	$P(x,c)$	$P(x,d)$	$\forall y P(x,y)$
1	$P(1,y)$	И	Л	И	Л	Л
2	$P(2,y)$	Л	Л	И	Л	Л
3	$P(3,y)$	И	Л	И	И	Л
4	$P(4,y)$	И	Л	И	И	Л
5	$P(5,y)$	И	И	И	И	И
	$\forall x P(x,y)$	Л	Л	И	Л	

Квантор существования (общий случай)

Интуитивное представление

Пусть $P : M^n \to \{Л, И\}$ — n-местный предикат на множестве M,
т. е. $P = P^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим объект $Q(x_2, x_3, \dots, x_n) =$

- =«для некоторого $a \in M$ "высказывание" $P(a, x_2, x_3, \dots, x_n)$ истинно».

Обозначим его $\exists x_1 P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

В общем случае, $Q(x_2, x_3, \dots, x_n)$ — это $(n-1)$-местный предикат на множестве M.

(Высказывания для удобства считаем 0-местными предикатами.)

Другой неофициальный пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{a, b, c, d\},$$
$$Q : A \times B \to \{Л, И\} \text{ — предикат.}$$

	y	a	b	c	d	
x	$Q(x, y)$	$Q(x, a)$	$Q(x, b)$	$Q(x, c)$	$Q(x, d)$	$\exists y Q(x, y)$
1	$Q(1, y)$	И	Л	И	Л	И
2	$Q(2, y)$	Л	Л	И	Л	И
3	$Q(3, y)$	И	Л	И	И	И
4	$Q(4, y)$	Л	Л	Л	Л	Л
5	$Q(5, y)$	И	Л	И	Л	И
	$\exists x Q(x, y)$	И	Л	И	И	

Официальное определение

$\exists x_1 P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — $n-1$-местный предикат, обладающий следующим свойством:
при любых предметах $c_2, c_3, \dots, c_n \in M$:

$$\exists x_1 P(x_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если для некоторого } a \in M \\ & \text{высказывание } P(a, c_2, c_3, \dots, c_n) \\ & \text{истинно;} \\ \text{Л}, & \text{если для всех } b \in M \\ & \text{высказывание } P(b, c_2, c_3, \dots, c_n) \\ & \text{ложно.} \end{cases}$$

Официальное определение

Иными словами, $\exists x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — $n-1$-местный предикат, обладающий следующим свойством:
при любых предметах $c_2, c_3, \ldots, c_n \in M$:

$$\exists x_1 P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \text{ — предикат,} \\ & \text{выполнимый} \\ & \text{по переменной } x_1 \\ & \text{ на } M; \\ \text{Л}, & \text{если } P(x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \text{ — предикат,} \\ & \text{тождественно-ложный} \\ & \text{по переменной } x_1 \\ & \text{ на } M. \end{cases}$$

Тот же другой неофициальный пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{a, b, c, d\},$$
$$Q : A \times B \to \{Л, И\}$$ — предикат.

	y	a	b	c	d	
x	$Q(x, y)$	$Q(x, a)$	$Q(x, b)$	$Q(x, c)$	$Q(x, d)$	$\exists y Q(x, y)$
1	$Q(1, y)$	И	Л	И	Л	И
2	$Q(2, y)$	Л	Л	И	Л	И
3	$Q(3, y)$	И	Л	И	И	И
4	$Q(4, y)$	Л	Л	Л	Л	Л
5	$Q(5, y)$	И	Л	И	Л	И
	$\exists x Q(x, y)$	И	Л	И	И	

Официальные примеры

1) $P^2 : \mathbb{R}^2 \to \{\text{Л}, \text{И}\}$, $P^2(x, y) = «|x| \geqslant y»$.
   $\forall x P^2(x, y) = F^1(y)$.
   $F^1(1) = \forall x(|x| \geqslant 1) = \text{Л}$;
   $F^1(0) = \forall x(|x| \geqslant 0) = \text{И}$.
2) $Q^2 : \mathbb{R}^2 \to \{\text{Л}, \text{И}\}$, $Q^2(x, y) = «|x| < y»$.
   $\exists x Q^2(x, y) = G^1(y)$.
   $G^1(1) = \exists x(|x| < 1) = \text{И}$;
   $G^1(0) = \exists x(|x| < 0) = \text{Л}$.

Официальные примеры

3) $R^2 : \mathbb{N}^2 \to \{Л, И\}$,

$R^2(x, y) =$ «$x < y$».

- $\exists y R^2(x, y) = \exists y(x < y)$ — тождественно-истинный предикат, поэтому
  $\forall x \exists y R^2(x, y) = \forall x \exists y(x < y) = И$.
- $\forall y R^2(x, y) = \forall y(x < y)$ — тождественно-ложный предикат, поэтому
  $\exists x \forall y R^2(x, y) = Л$.