

## Деревья: основные свойства, степенная последовательность, код Прюфера.

1. Найдите все попарно неизоморфные:

- (а) деревья шестого порядка;
- (б) деревья, которые имеют пять вершин степени 1 и не содержат вершин степени 2;
- (в) самодополнительные деревья;
- (г) графы, в которых каждый порождённый подграф порядка 3 является деревом.

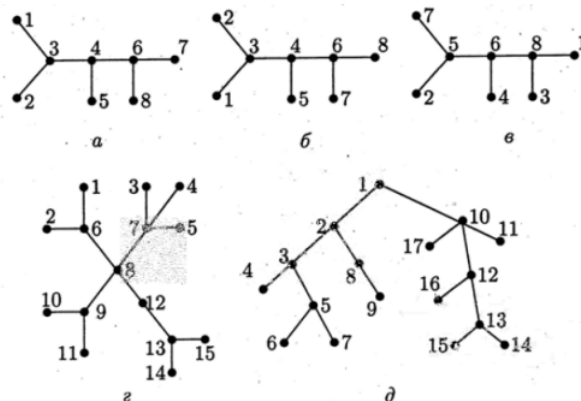
2. Докажите, что каждое дерево является двудольным графом. Какие полные двудольные графы являются деревьями?

3. Пусть  $S$  — произвольное конечное множество натуральных чисел, содержащее 1. Докажите, что существует дерево  $T$ , степенное множество которого совпадает с  $S$ .

4. Пусть  $T$  — дерево порядка  $n \geq 2$  и  $V(T) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Покажите, что число концевых вершин дерева  $T$  вычисляется по формуле  $1 + \sum_{i=1}^n |\deg v_i - 2|/2$ .

5. Докажите, что максимальная степень вершины в дереве не превосходит количества листьев.

6. Постройте коды Прюфера для каждого дерева, изображённого на рисунке:



7. Восстановите дерево по его коду Прюфера  $P(T)$ :

- (а)  $P(T) = (4, 5, 6, 7, 2, 1, 1, 6, 6, 7)$ ;
- (б)  $P(T) = (6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 8, 12, 13, 12)$ ;
- (в)  $P(T) = (i, i, \dots, i)$ , где  $i \in \{1, 2, \dots, n\} = V(T)$ .

8. Найдите все остовы следующих помеченных графов:

- (а)  $K_4$ ;
- (б)  $P_6$ ;

9. Докажите, что в любом нетривиальном связном графе имеется остов, после удаления всех рёбер которого граф становится несвязным.

10. Докажите, что в дереве  $T$  все вершины имеют нечётные степени тогда и только тогда, когда для каждого ребра  $e \in E(T)$  обе компоненты связности графа  $T - e$  имеют нечётный порядок.