§11. Композиция отображений. Обратные отображения. Критерий обратимости

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$.

Определение

Композицией отображений f и g называется отображение вида $(g \circ f) : X \to Z$, где для каждого $x_0 \in X$

$$\big(g \circ f\big)(x_0) = g\big(f(x_0)\big).$$

Важные свойства

Важным свойством композиции отображений является её ассоциативность.

Теорема 1

Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$.

Тогда имеет место равенство

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доказательство

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$.

Тогда:

- $g \circ f : X \to Z$
- $h \circ (g \circ f) : X \to W$
- $(h \circ g) : Y \to W$
- $(h \circ g) \circ f : X \to W$

Таким образом, композиции $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ обе отображают множество X во множество W.

Доказательство

- Для любого $x_0 \in X$:
  $(h \circ (g \circ f))(x_0) = h((g \circ f)(x_0)) = h(g(f(x_0)))$
  $((h \circ g) \circ f)(x_0) = (h \circ g)(f(x_0)) = h(g(f(x_0)))$
- Таким образом, для любого $x_0 \in X$ выполнено $(h \circ (g \circ f))(x_0) = ((h \circ g) \circ f)(x_0)$.
- А значит, по определению равенства отображений, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Что и требовалось доказать.

Важные свойства

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$.

Композиция отображений в общем случае не коммутативна,

т. е. в общем случае $g \circ f \neq f \circ g$.

(Даже если $X = Y = Z$.)

Пример:

$X = \{1, 2, 3\}$

$f : X \to X$, $g : X \to X$.

x	1	2	3
$f(x)$	3	2	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	1	2

Пример:

$X = \{1, 2, 3\}$

$f : X \to X$, $g : X \to X$.

x	1	2	3
$f(x)$	3	2	1
$(g \circ f)(x)$	2	1	3

x	1	2	3
$g(x)$	3	1	2
$(f \circ g)(x)$	1	3	2

Теорема 2

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ — два отображения.
Тогда

- *если f и g оба инъективны, то $g \circ f$ инъективна;*
- *если f и g оба сюръективны, то $g \circ f$ сюръективна;*
- *если f и g оба биективны, то $g \circ f$ биективна.*

Доказательство

проводится по определениям

и не должно представлять для вас сложности.

Тождественное отображение

Пусть X — непустое множество.

Отображение $e_X : X \to X$,
такое что для каждого $x_0 \in X$ выполнено $e_X(x_0) = x_0$,
называется тождественным отображением на множестве X.

Тождественные отображения являются нейтральными относительно композиции:

- $f = e_Y \circ f = f \circ e_X$

  для любого $f : X \to Y$.

Определение

Отображение $f : X \to Y$ называется обратимым слева, если существует такое отображение $f_Л^{-1} : Y \to X$, что

$$f_Л^{-1} \circ f = e_X.$$

Определение

Отображение $f : X \to Y$ называется обратимым справа, если существует такое отображение $f_{\Pi}^{-1} : Y \to X$, что

$$f \circ f_{\Pi}^{-1} = e_Y.$$

Определение

Отображение $f : X \to Y$ называется обратимым, если существует такое отображение $f^{-1} : Y \to X$, что

$$f^{-1} \circ f = e_X \quad \text{и} \quad f \circ f^{-1} = e_Y.$$

Теорема 3

Пусть $f : X \to Y$.
Тогда имеют место следующие утверждения:

1) *f обратимо слева тогда и только тогда, когда f инъективно;*
2) *f обратимо справа тогда и только тогда, когда f сюръективно;*
3) *f обратимо тогда и только тогда, когда f биективно.*

Доказательство

Докажем утверждение 1.

Необходимость и достаточность покажем по отдельности.

Доказательство

Необходимость.

Имеем: f обратимо слева,

т. е. существует $f_{Л}^{-1} : Y \to X$ такое, что $f_{Л}^{-1} \circ f = e_X$.

- Предположим, что f не инъективно.

  Это означает, что существуют $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, такие что $f(x_1) = f(x_2)$.
- Поскольку $f(x_1), f(x_2) \in Y$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $(f_{Л}^{-1} \circ f)(x_1) = (f_{Л}^{-1} \circ f)(x_2)$.
- Но $(f_{Л}^{-1} \circ f)(x_1) = e_X(x_1) = x_1$,

  а $(f_{Л}^{-1} \circ f)(x_2) = e_X(x_2) = x_2$.
- Таким образом, $x_1 = x_2$.
- Противоречие с $x_1 \neq x_2$.
- Следовательно, f инъективно.

Доказательство

Достаточность.

Имеем: f инъективно,

т. е. $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$.

Хотим доказать:

существует отображение $g : Y \to X$, такое что $g \circ f = e_X$.

Идея доказательства: построим его!

Доказательство

Достаточность.

- Заметим, что в силу инъективности отображения f для каждого элемента $y_0 \in Y$ верно одно из двух следующих утверждений:

1) существует единственный $x_0 \in X$, такой что $f(x_0) = y_0$;
2) $y_0 \notin f(X)$.

- Зафиксируем произвольный элемент $x_1 \in X$.
- Определим отображение $g : Y \to X$ следующим образом:

$$g(y_0) = \begin{cases} x_0, & \text{если } f(x_0) = y_0 \\ x_1, & \text{если } y_0 \notin f(X). \end{cases}$$

Доказательство

Определим отображение $g : Y \to X$ следующим образом:

$$g(y_0) = \begin{cases} x_0, & \text{если } f(x_0) = y_0 \\ x_1, & \text{если } y_0 \notin f(X). \end{cases}$$

- Тогда для каждого $x_0 \in X$:

$$(g \circ f)(x_0) = g\big(f(x_0)\big) = [\text{Пусть } f(x_0) = y_0] = g(\,y_0\,) = x_0,$$

- т. е. $g \circ f = e_X$.
- Таким образом, существует отображение $g : Y \to X$ такое, что $g \circ f = e_X$,
- а значит, функция f является обратимой слева.
- Утверждение 1 доказано.

Доказательство

Доказательство утверждения 2
проводится похожим образом
и предлагается оставить для практических занятий
или самостоятельного рассмотрения.

Доказательство

Докажем утверждение 3.

Необходимость и достаточность покажем по отдельности.

Доказательство

Необходимость.

Имеем: f обратимо,

т. е. существует отображение $f^{-1} : Y \to X$ такое, что $f^{-1} \circ f = e_X$ и $f \circ f^{-1} = e_Y$.

- Это означает, что f обратимо слева и справа.
- Согласно утверждениям 1 и 2 для этого необходимо, чтобы f было инъективным и сюръективным, т. е. биективным, отображением.

Доказательство

Достаточность.

Имеем: f биективно,

т. е. f инъективно и сюръективно.

Согласно утверждениям 1 и 2 это означает, что f обратимо слева и справа,

т. е. существуют $f_{\text{Л}}^{-1} : Y \to X$ и $f_{\text{П}}^{-1} : Y \to X$ такие, что $f_{\text{Л}}^{-1} \circ f = e_X$ и $f \circ f_{\text{П}}^{-1} = e_Y$.

- Рассмотрим композиции $f_{\text{Л}}^{-1} \circ (f \circ f_{\text{П}}^{-1})$ и $(f_{\text{Л}}^{-1} \circ f) \circ f_{\text{П}}^{-1}$.

Доказательство

Рассмотрим композиции $f_{Л}^{-1} \circ (f \circ f_{П}^{-1})$ и $(f_{Л}^{-1} \circ f) \circ f_{П}^{-1}$.

- Поскольку композиция отображений ассоциативна, $f_{Л}^{-1} \circ (f \circ f_{П}^{-1}) = (f_{Л}^{-1} \circ f) \circ f_{П}^{-1}$.
- Но $f_{Л}^{-1} \circ (f \circ f_{П}^{-1}) = f_{Л}^{-1} \circ e_Y = f_{Л}^{-1}$,
- а $(f_{Л}^{-1} \circ f) \circ f_{П}^{-1} = e_X \circ f_{П}^{-1} = f_{П}^{-1}$.
- Таким образом, $f_{Л}^{-1} = f_{П}^{-1} = g$.
- Поскольку $g : Y \to X$, $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$, заключаем, что f обратима.
- Утверждение 3 доказано.

Следствие 1

Если $f : X \to Y$ — биекция, то

1) *f^{-1} единственна;*
2) *$f^{-1} : Y \to X$ — биекция.*

Намёки на доказательство

1) От противного, рассмотрите композицию $f_1^{-1} \circ f \circ f_2^{-1}$.
2) Следует из построения обратной и п. 1).
   Или от противного.

Следствие 2

Если $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to Z$ *— биекции, то* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Намёки на доказательство

Следует из единственности обратной.