Рассмотрим следующие высказывания:

1) «Если у вас нет собаки, её не отравит сосед»;
2) «Нарушение непрерывности функции $f_1(x)$ в точке x_0 влечёт нарушение её дифференцируемости в этой точке».

Структура:

$$(\neg A \Rightarrow \neg B)$$

§3. Формулы логики высказываний. Основные типы формул

Конструктивное индуктивное определение

Определение

1) Любая пропозициональная переменная является формулой.
2) Если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\neg\mathfrak{A}$ — формула.
3) Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то
$$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$$
— формулы.
4) других формул нет.

Обозначать формулы логики высказываний в лекциях при необходимости будем
готическими заглавными латинскими буквами:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G},$$
$$\mathfrak{H}, \mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}, \mathfrak{P},$$
$$\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W},$$
$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}.$$

Примеры:

1) $\mathfrak{A} = \neg(A \vee \neg B)$;
2) $\mathfrak{B} = \neg A \vee \neg B$;
3) $\mathfrak{C} = (\wedge ABC \Rightarrow)$;
4) $\mathfrak{D} = A$;
5) $\mathfrak{E} = (A \Rightarrow B) \wedge C$;
6) $\mathfrak{F} = (A \wedge B \Rightarrow C)$;
7) $\mathfrak{G} = A \wedge B \vee C \wedge D$;

1) ФЛВ;
2) не ФЛВ;
3) не ФЛВ;
4) ФЛВ;
5) не ФЛВ;
6) не ФЛВ;
7) не ФЛВ.

Введём договорённости

Будем считать, что у конъюнкции наивысший приоритет среди операций над двумя высказываниями.

Для упрощения записей договариваемся опускать:

- внешние скобки;
- скобки, которые можно восстановить по принятому приоритету операций.

Те же примеры:

*С учётом договорённостей:

1) $\mathfrak{A} = \neg(A \vee \neg B)$;	1) ФЛВ;
2) $\mathfrak{B} = \neg A \vee \neg B$;	2) ФЛВ*;
3) $\mathfrak{C} = (\wedge ABC \Rightarrow)$;	3) не ФЛВ;
4) $\mathfrak{D} = A$;	4) ФЛВ;
5) $\mathfrak{E} = (A \Rightarrow B) \wedge C$;	5) ФЛВ*;
6) $\mathfrak{F} = (A \wedge B \Rightarrow C)$;	6) ФЛВ*;
7) $\mathfrak{G} = A \wedge B \vee C \wedge D$;	7) ФЛВ*.

Формула логики высказываний отражает:

- структуру некоторого высказывания, т. е. порядок его «сборки» из других при помощи логических связок;
- порядок выполнения логических операций для вычисления его значения.

Пример:

$$\mathfrak{G} = A \overset{1}{\wedge} B \overset{3}{\vee} C \overset{2}{\wedge} D.$$

Теорема о единственности декомпозиции

Для любой формулы $\mathfrak{A}$ логики высказываний имеет место ровно один из следующих трёх случаев:

1) *$\mathfrak{A}$ — некоторая пропозициональная переменная;*
2) *существует единственная формула $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathfrak{A} = \neg\mathfrak{B}$;*
3) *существуют единственная логическая операция $\diamond$ из списка $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и единственная пара формул логики высказываний $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, взятых именно в таком порядке, такие что $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{C})$.*

Пример декомпозиции формулы

$$\mathfrak{A} = (\underbrace{(A \Rightarrow (\neg B \vee C))}_{\mathfrak{A}_0} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \vee \neg A)}_{\mathfrak{A}_1})$$

$$\mathfrak{A}_0 = (\underbrace{A}_{\mathfrak{A}_{00}} \Rightarrow \underbrace{(\neg B \vee C)}_{\mathfrak{A}_{01}})$$

- $\mathfrak{A}_{00} = A$

  $$\mathfrak{A}_{01} = (\underbrace{\neg B}_{\mathfrak{A}_{010}} \vee \underbrace{C}_{\mathfrak{A}_{011}})$$

$\mathfrak{A}_{010} = \neg B$

- $\mathfrak{A}_{0100} = B$

- $\mathfrak{A}_{011} = C$

$$\mathfrak{A}_1 = (\underbrace{\neg C}_{\mathfrak{A}_{10}} \vee \underbrace{\neg A}_{\mathfrak{A}_{11}})$$

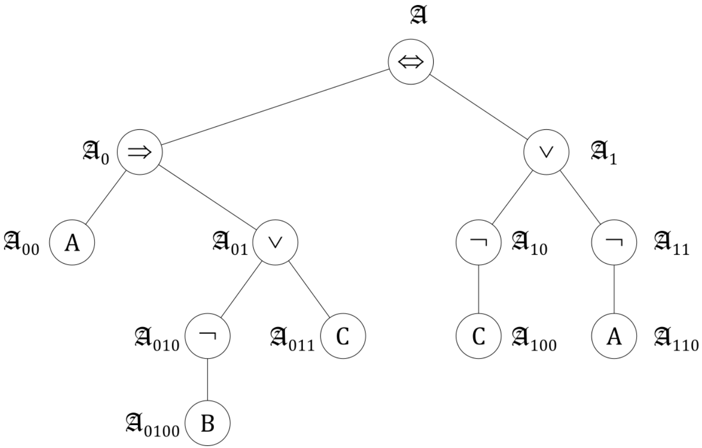
$\mathfrak{A}_{10} = \neg C$

- $\mathfrak{A}_{100} = C$

$\mathfrak{A}_{11} = \neg A$

- $\mathfrak{A}_{110} = A$

Дерево декомпозиции



Некоторые типы формул

Формула $\mathfrak{A}$ называется тавтологией, если на любом наборе значений входящих в неё пропозициональных переменных она принимает значение «Истина».

Пример:

$$\mathfrak{A} = A \vee \neg A$$

Обозначается:

$$\models \mathfrak{A}$$

Некоторые типы формул

Формула $\mathfrak{A}$ называется противоречием, если на любом наборе значений входящих в неё пропозициональных переменных она принимает значение «Ложь».

Пример:

$$\mathfrak{A} = A \wedge \neg A$$

Некоторые типы формул

Формула $\mathfrak{A}$ называется выполнимой, если существует набор значений входящих в неё пропозициональных переменных, на котором она принимает значение «Истина».

Пример:

$$\mathfrak{A} = A$$

Некоторые типы формул

Формула $\mathfrak{A}$ называется опровержимой, если существует набор значений входящих в неё пропозициональных переменных, на котором она принимает значение «Ложь».

Пример:

$$\mathfrak{A} = A$$

Определение

Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются равносильными, если на любом наборе значений всех входящих в них пропозициональных переменных эти формулы принимают одинаковые значения.

Обозначается:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$$

Пример:

Пример:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Таблицы истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
Л	Л	И	И
Л	И	И	И
И	Л	Л	Л
И	И	И	И

Связь равносильности и эквивалетности

Теорема

Формулы логики высказываний $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *равносильны тогда и только тогда, когда формула* $(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ *является тавтологией, т. е. для любых ФЛВ* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$*:*

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

План доказательства

- Покажем необходимость и достаточность по отдельности,
- каждую — методом «прямых следствий» (это тот, который не от противного).

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Доказательство

- Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n \geqslant 1$, — это полный список пропозициональных переменных, входящих в формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.
- Покажем необходимость и достаточность по отдельности.
- Для этого в обоих случаях рассмотрим произвольный набор $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$ значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно.

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Доказательство

Докажем необходимость, т. е. что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ влечёт $\models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$.

- Тот факт, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, означает, что на любом наборе значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ значения формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают.
- В частности, $\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = \mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)$.

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Доказательство

- Так как $\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = \mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)$, нетрудно проверить по определению операции «эквивалентность», что $(\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) \Leftrightarrow \mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)) = И$.
- Поскольку набор $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$ является произвольным, заключаем, что формула $(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ принимает значение «Истина» на любом наборе значений входящих в неё пропозициональных переменных,

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Доказательство

- т. е. является тавтологией.
- Необходимость доказана.

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \vDash (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Доказательство

Докажем достаточность, т. е. что из $\vDash (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

- Тот факт, что $\vDash (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$, означает, что на любом наборе значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формула $(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ принимает значение «Истина».
- В частности, $(\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) \Leftrightarrow \mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)) = \text{И}$.
- По определению операции «эквивалетность», отсюда следует, что $\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = \mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)$.

Теорема

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Доказательство

- Поскольку набор $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$ значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно является произвольным, заключаем, что формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ принимают равные значения на любом наборе значений входящих в них переменных,
- т. е. являются равносильными.
- Достаточность доказана,
- необходимость была доказана ранее,
- доказательство теоремы завершено.

Оглядываемся на пройденный параграф

- Ввели понятие формулы логики высказываний (по индукции, потому что иначе никак).
- Ввели договорённости для упрощения записей.
- ФЛВ отражает структуру (порядок сборки) некоторого высказывания, притом однозначно.
- Эту структуру можно изобразить деревом.

Оглядываемся на пройденный параграф

- Ещё ФЛВ отражает порядок вычислений для нахождения значения высказывания.
- По тому, какие значения может / не может возвращать ФЛВ, ввели типы:
  - тавтология;
  - противоречие;
  - выполнимая;
  - опровержимая.

Оглядываемся на пройденный параграф

- Две разные ФЛВ могут всегда
(на любом наборе значений всех входящих в них пропозициональных переменных)
возвращать одно и то же, назвали такие равносильными.
- Не путать равносильность с эквивалентностью!
(Хотя некоторая связь есть.)

§4. Основные равносильности

Договорённости

В этом параграфе:

- опущены внешние скобки в формулах,
- в паре равносильностей опущены скобки на основе другой пары равносильностей (по ассоциативности);
- однако оставлены в формулах скобки, которые можно было бы опустить по договорённости о приоритете операций.

Договорённости

В этом и последующем параграфах:

- отрицание $\neg A$ часто записывается как $\overline{A}$;
- мы позволяем себе
  использовать логические константы «Л» и «И»
  в записях, касающихся равносильности формул,
  несмотря на то, что под введённое нами
  определение формулы логики высказываний
  они не попадают.

Простые свойства операций и логических констант

Закон двойного отрицания:

- $\overline{\overline{A}} \equiv A$

Закон непротиворечивости и закон исключённого третьего:

- $\overline{A} \cdot A \equiv Л$
- $\overline{A} \vee A \equiv И$

Свойства логических констант:

- $A \wedge Л \equiv Л$
- $A \wedge И \equiv A$
- $A \vee Л \equiv A$
- $A \vee И \equiv И$

Основные свойства конъюнкции и дизъюнкции, 2 из 4

Идемпотентность:
(*лат. idem* — тот же самый, *анг. potent* — обладающий силой)

- $A \wedge A \equiv A$
- $A \vee A \equiv A$

Коммутативность:
(*анг.* $\longleftarrow$ *фр.* $\longleftarrow$ *лат. commuto* — меняю; меняюсь; обмениваюсь)

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \vee B \equiv B \vee A$

Основные свойства конъюнкции и дизъюнкции, 4 из 4

Ассоциативность:
(*анг.* $\longleftarrow$ *лат. associo* — присоединяюсь)

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

Дистрибутивность
конъюнкции относительно дизъюнкции
и дизъюнкции относительно конъюнкции:
(*анг.* $\longleftarrow$ *фр.* $\longleftarrow$ *лат. distribuo* — раздаю, распределяю)

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Продвинутые

Законы де Моргана:

- $\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n} \equiv \overline{A}_1 \vee \overline{A}_2 \vee \dots \vee \overline{A}_n$
- $\overline{A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n} \equiv \overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge \dots \wedge \overline{A}_n$

Законы поглощения:

- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Элементарное склеивание:

- $(A \wedge \overline{X}) \vee (A \wedge X) \equiv A$

Обобщённое склеивание:

- $(A \wedge X) \vee (B \wedge \overline{X}) \equiv (A \wedge X) \vee (B \wedge \overline{X}) \vee (A \wedge B)$

Сведение других операций

Выражение импликации и эквivалетности
через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

- $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$
- $A \Leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B)$

Важное для доказательств представление эквивалентности:

- $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Секретные неосновные

Не основные, но полезные на практике:

- $\overline{A \Rightarrow B} \equiv A \wedge \overline{B}$
- $A \vee (\overline{A} \wedge B) \equiv A \vee B$

- Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — ФЛВ, причём $\mathfrak{A}$ содержит пропозициональную переменную A.
- Обозначим за $S_{\mathfrak{B}}^{A}(\mathfrak{A})$ формулу, которая получается в результате подстановки формулы $\mathfrak{B}$ всюду вместо переменной A в формулу $\mathfrak{A}$.

Пример:

$$\mathfrak{A} = (A \Rightarrow (B \wedge C)) \vee (A \wedge B)$$

$$\mathfrak{B} = B \Leftrightarrow D$$

$$S_{\mathfrak{B}}^{A}(\mathfrak{A}) = ((B \Leftrightarrow D) \Rightarrow (B \wedge C)) \vee ((B \Leftrightarrow D) \wedge B)$$

Теорема

Если $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
и обе ФЛВ $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$
содержат пропозициональную переменную A,
то

$$S^A_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{A}) \equiv S^A_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$$

для любой ФЛВ $\mathfrak{D}$.

Полезный вывод

Следствие из теоремы

Несмотря на то, что $A, B, C, X, A_1, \ldots, A_n$ — это обозначения пропозициональных переменных,

все приведённые равносильности остаются справедливыми и в том случае, если $A, B, C, X, A_1, \ldots, A_n$ в них являются обозначениями некоторых формул логики высказываний.

Оглядываемся на пройденный параграф

Ввели основные равносильности:

- закон двойного отрицания,
- закон непротиворечивости
  и закон исключённого третьего,
- свойства логических констант,
- свойства конъюнкции и дизъюнкции:
  - идемпотентность,
  - коммутативность,
  - ассоциативность,
  - дистрибутивность относительно друг друга,

Оглядываемся на пройденный параграф

- законы де Моргана,
- законы поглощения,
- элементарное и обобщённое склеивание,
- выражения импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание,

и пару неосновных.
И ещё сформулировали теорему и наблюдение из неё!

- «Если $2+2=5$, то $2+2\neq 5$»$=$ И
- Но рассуждение «Если $\mathfrak{A}$, то не $\mathfrak{A}$» выглядит неправильным.
- Правильным выглядит рассуждение «Если $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$».
- Какие рассуждения мы вообще считаем правильными?

§5. Логическое следствие.
Теорема о логическом следствии

- Рассмотрим некоторые ФЛВ: $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$, где $m \geqslant 1$.
- Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — полный список пропозициональных переменных, входящих в эти формулы ($n \geqslant 1$).

Определение

Формула $\mathfrak{B}$ называется

логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$,

если

на каждом наборе $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$

значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно,

при котором все формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$

принимают значение «Истина»,

формула $\mathfrak{B}$ также принимает значение «Истина».

Обозначение факта логического следования

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B}$$

Обозначение того, что формула является тавтологией

$$\vDash \mathfrak{C}$$

Пример:

$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \Rightarrow C$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
Л	Л	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	И	Л	И	И
И	И	Л	И	Л	Л
И	И	И	И	И	И

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$

Лемма 1

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формулы $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда формула $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ является тавтологией,

т. е.

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}).$$

План доказательства

- Необходимость и достаточность покажем по отдельности,
- каждую — методом от противного.

Лемма 1

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

Доказательство

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n \geqslant 1$, — полный список пропозициональных переменных, входящих в формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Докажем, что $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$ влечёт $\models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$,
т. е. докажем необходимость.

- От противного. Пусть $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$, но $\not\models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$.

Лемма 1

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

Доказательство

- $\not\models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$ означает, что существует такой набор $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$ значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, что $\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) \Rightarrow \mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = Л$.
- Последнее равносильно тому, что $\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = И$, а $\mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = Л$.

Лемма 1

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

Доказательство

- Итак, существует такой набор $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$ значений переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, что $\mathfrak{A}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = \text{И}$, а $\mathfrak{B}(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*) = \text{Л}$.
- Это противоречит тому, что $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$.
- Следовательно, наше предположение о том, что $\not\models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$, неверно.
- Необходимость доказана.

Лемма 1

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \Leftrightarrow \models (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

Доказательство

Достаточность покажите сами в качестве упражнения.

Лемма 2

Пусть $m \geqslant 2$.
Формула $\mathfrak{B}$ *является логическим следствием формул* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$
тогда и только тогда, когда
формула $\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}$ *является логическим следствием формул* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1}$,
т. е.

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \vDash (\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}).$$

Лемма 2

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \models (\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}).$$

Намёки на доказательство

Аналогично доказательству леммы 1.

Теорема о логическом следствии

Пусть $m \geqslant 1$.
Формула $\mathfrak{B}$ *является логическим следствием формул* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$
тогда и только тогда, когда
является тавтологией формула
$(\mathfrak{A}_1 \Rightarrow (\mathfrak{A}_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (\mathfrak{A}_{m-1} \Rightarrow (\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}))\ldots)))$,
т. е.

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$$
$$\Updownarrow$$
$$\models (\mathfrak{A}_1 \Rightarrow (\mathfrak{A}_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (\mathfrak{A}_{m-1} \Rightarrow (\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}))\ldots))).$$

Теорема о логическом следствии

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B}$$
$$\Updownarrow$$
$$\vDash (\mathfrak{A}_1 \Rightarrow (\mathfrak{A}_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (\mathfrak{A}_{m-1} \Rightarrow (\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}))\ldots))).$$

Намёки на доказательство

Лемма 2

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \vDash (\mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B}).$$

Лемма 1

$$\mathfrak{A} \vDash \mathfrak{B} \Leftrightarrow \vDash (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

Следствие

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B}$
2) $\vDash (\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{B})$
3) $\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B}$

Намёки на доказательство

Обычно в таких ситуациях предлагают схему
1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

Я бы предложил 1 $\Leftrightarrow$ 2 (через $\equiv$)
и 2 $\Leftrightarrow$ 3 (сообразите, как).

Оглядываемся на пройденный параграф

- Ввели понятие логического следования,
  которое лучше подходит
  для проверки рассуждений на правильность,
  чем импликация,
- и установили его связи с импликацией и тавтологиями.

§6. Важнейшие правила следования

Договорённость

- В этом параграфе следование $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$ будем записывать в формате

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m}{\mathfrak{B}}$$

- Приведённый в этом параграфе список правил не является исчерпывающим, самих правил можно куда больше придумать.

Рассуждение от противного

1) Рассуждение от противного
(не путать с методом от противного!):

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B},\ \overline{\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{A}}}$$

Пример:

- «Если число 107 делится на 4, то оно делится на 2»
- «Число 107 не делится на 2»

- «Число 107 не делится на 4»

«Правило вывода»

2) «Правило вывода»:

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B},\ \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

Пример:

- «Если число 123123 делится на 1001, то оно делится на 7»
- «Число 123123 делится на 1001»

- «Число 123123 делится на 7»

Силлогизм

3) Правило силлогизма:

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{C}}$$

Пример:

- «Если первые три цифры числа 123125 повторяют его последние три цифры, то оно делится на 1001»
- «Если число 123125 делится на 1001, то оно делится на 7»

- «Если первые три цифры числа 123125 повторяют его последние три цифры, то оно делится на 7»

Разбор случаев

4) Правило разбора случаев:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{C},\ \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}$$

Пример:

- «Число a равно 2 или 4»
- «Если a равно 2, то число $3a$ является чётным»
- «Если a равно 4, то число $3a$ является чётным»

- «Число $3a$ является чётным»

Контрапозиция

5) Правило контрапозиции:

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}}$$

Пример:

- «Если числа a и b оба положительны, то $a \times b > 0$»

- «Если неверно, что $a \times b > 0$, то неверно, что числа a и b оба положительны»

Удаление конъюнкции

6) Правило удаления конъюнкции:

$$\frac{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$$

Пример:

- «Число 24 делится на 3 и на 2»

- «Число 24 делится на 2»

Введение дизъюнкции

7) Правило введения дизъюнкции:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$$

Пример:

- «Число 24 делится на 3»

- «Число 24 делится на 3 или 5»

Удаление дизъюнкции

8) Правило удаления дизъюнкции:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}}$$

Пример:

- «Число 24 делится на 3 или 5»
- «Число 24 не делится на 5»

- «Число 24 делится на 3»

Неверные следования, не являются правилами:

Следующие схемы рассуждений ошибочны:

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$$

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B},\ \overline{\mathfrak{A}}}{\overline{\mathfrak{B}}}$$

Пусть Γ — произвольный конечный список формул (возможно, пустой),

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$ — формулы ($m \geqslant 1$).

Утверждение

Пусть $\Gamma \models \mathfrak{A}_1,\ \Gamma \models \mathfrak{A}_2, \ldots, \Gamma \models \mathfrak{A}_m$

и $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$.

Тогда $\Gamma \models \mathfrak{B}$.

Следствие из утверждения

Несмотря на то, что в начале параграфа мы договорились под записью

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m}{\mathfrak{B}}$$

понимать следование $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vDash \mathfrak{B}$,

все приведённые правила остаются справедливыми и в том случае, если под этой записью понимать более общее утверждение вида

«Если $\Gamma \vDash \mathfrak{A}_1,\ \Gamma \vDash \mathfrak{A}_2, \ldots, \Gamma \vDash \mathfrak{A}_m$, то $\Gamma \vDash \mathfrak{B}$ для любого конечного списка формул Γ».

Оглядываемся на пройденный параграф

Ввели основные правила следования:

- рассуждение от противного
  (не путать с методом от противного!),
- «правило вывода»,
- правило силлогизма,
- правило разбора случаев,
- правило контрапозиции,

Оглядываемся на пройденный параграф

- правило удаления конъюнкции,
- правило введения дизъюнкции,
- правило удаления дизъюнкции.

и утверждение, которое позволяет применять эти правила в несколько более общем случае.