§8. Множества.
Основные операции над множествами

Определение множества

Не определение множества

Пояснение:

Понятие множества является первичным,
т. е. на другие математические понятия не опирается
и определения не имеет.

Подход: интуитивное представление

Под множеством я понимаю
совокупность
вполне определённых попарно различных объектов
(как правило, одной природы),
рассматриваемую как единое целое.

Под множеством Юрий Леонидович понимает
совокупность или собрание
различных объектов произвольной природы,
объединяемых по какому-либо признаку.

- Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами.

Важнейшие свойства

- Элементы множества попарно различны.
- Множество — это единый объект.

Обозначения

Обозначать множества в лекциях будем заглавными латинскими буквами (возможно, с индексами): $A, B, \ldots, Z, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$.

- Некоторые специальные множества могут иметь специальные обозначения: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \varnothing$.

Элементы множества описываются или перечисляются внутри фигурных скобок.

Примеры:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$A_1 = \{\}$$

$$A_2 = \{\,\{\}\,\}$$

Элементы множеств, как правило, будем обозначать маленькими латинскими буквами (часто с индексами:) $a, b, c, \dots, z, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

- Если a является элементом множества A, будем говорить, что a принадлежит множеству A и писать $a \in A$.
- В противном случае будем говорить, что a не принадлежит множеству A и писать $a \notin A$.
- Множество, в котором нет ни одного элемента, называется пустым и имеет обозначение $\varnothing$.

Примеры:

$6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Крокодил $\notin \mathbb{N}$

$42 \notin \{\}$

$\varnothing \in \{\,\{\}\,\}$

Замечание

Если определены множество A и объект a, то записи «$a \in A$» и «$a \notin A$» являются высказываниями.

- Множество X называется бесконечным, если для любого натурального числа k во множестве X найдётся k элементов.
- Множество X называется конечным, если существует такое натуральное число k, что во множестве X не найдётся k элементов.
- Мощностью $|X|$ конечного множества X называется количество элементов в нём.

§8,25 Способы задания множеств

Способы задания множеств

Чтобы задать множество, необходимо так или иначе указать, из каких элементов оно состоит.
Это можно сделать следующими способами:

1) перечислить эти элементы
(перечисление);
2) указать свойство, которым обладают
все элементы данного множества и только они
(задание множества характеристическим свойством).

Перечисление всех элементов

Общий вид:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Примеры:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B_1 = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Плюсы:

- Хорошо подходит для небольших конечных множеств
- Сразу видно, какие объекты принадлежат множеству (и, соответственно, какие не принадлежат)

Минусы:

- Может быть не очень удобным для больших конечных множеств
- Не подходит для бесконечных множеств

Задание множества свойством

Общий вид:

- $X = \{x \mid P(x)\}$
- $Y = \{y \in X \mid Q(y)\}$
- $Z = \{z \mid R(z, a, b), S(a), T(b), \dots\}$
- A — множество всех тех $< \cdots >$, которые $< \cdots >$

Примеры:

- $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a < 5\}$
- $B_2 = \{p \mid p$ — простое число$\}$
- $C = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{уравнение } x^n + y^n = z^n \\ \text{имеет решения в натуральных числах} \end{array} \right\}$

Плюсы:

- Работает как для конечных, так и для бесконечных множеств

Минусы:

- Проверить, принадлежит ли элемент множеству, может быть затруднительно (зависит от свойства)
-

Парадокс брадобрея

Пусть в некой деревне живёт брадобрей,
который бреет всех тех и только тех жителей деревни,
которые не бреют себя сами.

Бреет ли этот брадобрей сам себя?

Парадокс брадобрея

Пусть в некой деревне живёт брадобрей,
который бреет всех тех и только тех жителей деревни,
которые не бреют себя сами.

Бреет ли этот брадобрей сам себя?

Ответ: такого брадобрея не существует.

Парадокс Рассела

Рассмотрим множество M всех множеств,
т. е. $M = \{X \mid X-$ множество$\}$.

M — множество, поэтому $M \in M$,
т. е. M является своим же элементом.

- Назовём множество, являющееся своими же элементом, самосодержащимся.

- Множество, не являющееся своим же элементом, назовём несамосодержащимся.

  Очевидно, любое множество является либо самосодержащимся, либо несамосодержащимся.

Примеры:

- Множество M всех множеств — самосодержащееся;
- Множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \varnothing, C = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \varnothing\}$ — несамосодержащиеся.

Любое множество является
либо самосодержащимся, либо несамосодержащимся.

Рассмотрим множество N
всех несамосодержащихся множеств:
$N = \{X \mid X \notin X\}$.

Каким является множество N:
самосодержащимся или несамосодержащимся?

N — множество всех несамосодержащихся множеств:
$N = \{X \mid X \notin X\}$.

Случай 1: N — самосодержащееся.

- N — самодержащееся, т. е. $N \in N$ (по определению самосодержащегося).
- Но в N имеются все несамосодержащиеся множества и только они (по заданию множества N).
- Поэтому $N \notin N$.
- Противоречие.

N — множество всех несамосодержащихся множеств:
$N = \{X \mid X \notin X\}$.

Случай 2: N — несамосодержащееся.

- N — несамодержащееся, т. е. $N \notin N$ (по определению несамосодержащегося).
- Но в N имеются все несамосодержащиеся множества и только они (по заданию множества N).
- Поэтому $N \in N$.
- Противоречие.

Любое множество является
либо самосодержащимся, либо несамосодержащимся.

Рассмотрим множество N
всех несамосодержащихся множеств:
$N = \{X \mid X \notin X\}$.

Каким является множество N:
самосодержащимся или несамосодержащимся?

Любое множество является
либо самосодержащимся, либо несамосодержащимся.

Рассмотрим множество N
всех несамосодержащихся множеств:
$N = \{X \mid X \notin X\}$.

Каким является множество N:
самосодержащимся или несамосодержащимся?

Ответ: множества N не существует.

Но почему?

(Конец подраздела.)

При работе мы обычно находимся в некотором контексте, некоторых рамках, и не рассматриваем объекты, за эти рамки выходящие.

Аналогично при составлении множеств мы обычно набираем в них объекты из некоторого другого, уже определённого множества, а не из множества всех мыслимых объектов Вселенной.

- Множество, в рамках которого мы в текущий момент работаем, будем называть универсальным и обозначать буквой U.

Примеры

- $B = \{p \mid p$ — простое число$\}$ — $U = \mathbb{N}$
- $D = \{x \mid x^2 = -1\}$ — $U = \mathbb{R}$ или $U = \mathbb{C}$
- S — множество всех текущих студентов
  1-го потока 1-го курса ФПМИ БГУ,
  U — множество всех текущих студентов
  1-го курса ФПМИ БГУ,
  или ФПМИ БГУ
  или всех текущих и бывших студентов
  или...

  В любом случае, U — множество некоторых людей, являющихся, бывших или собирающихся стать студентами ФПМИ БГУ.

При работе в определённом контексте
элементы всех множеств, с которыми мы работаем,
являются элементами универсального множества.

Соответственно, в дальнейшем
мы будем использовать слово «элемент»
для обозначения любого объекта,
который мы рассматриваем
или можем рассмотреть в соответствующих рамках.

Замечание

Пусть мы хотим задать множество X свойством P, т. е. рассмотреть $X = \{x \mid P(x)\}$.

Тогда для любого элемента x_0 $P(x_0)$ должно быть высказыванием.

Замечание

Пусть множество X определено свойством P, т. е. $X = \{x \mid P(x)\}$.

Тогда для любого элемента x_0 высказывание $x_0 \in X$ эквивалентно высказыванию $P(x_0)$.

§8,5 Понятия подмножества и равенства множеств

Определение

Множество X называется подмножеством множества Y, если каждый элемент x множества X является элементом множества Y.

Обозначение

$$X \subseteq Y$$

Примеры:

- $\{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{2, 3, 4\} \nsubseteq \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$
- $\{\} \subseteq \varnothing$
- $\varnothing \subseteq \mathbb{Z}$

Определение

Множество X называется подмножеством множества Y, если для любого элемента z выполнена импликация

$$z \in X \Rightarrow z \in Y.$$

Обозначение

$$X \subseteq Y$$

Определение

Множества X и Y называются равными,
если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение

$$X = Y$$

Определение

Множества X и Y называются равными,
если каждое из них является подмножеством другого,
т. е. $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Обозначение

$$X = Y$$

Определение

Множества X и Y называются равными,
если для любого элемента z верна эквивалентность

$$z \in X \Leftrightarrow z \in Y.$$

Обозначение

$$X = Y$$

Определение

Множество X называется
собственным подмножеством множества Y,
если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$.

Обозначение

$$X \subset Y$$

Определение

Булеаном множества X называется множество всех его подмножеств, т. е. множество $\{Y \mid Y \subseteq X\}$.

Обозначение

$$2^X$$

Пример:

Множество $X = \{a, b, c\}$.
Его подмножествами являются следующие множества:

- $\varnothing$
- $\{a\}$
- $\{b\}$
- $\{c\}$
- $\{a, b\}$
- $\{a, c\}$
- $\{b, c\}$
- $\{a, b, c\}$

Таким образом,

$$2^X = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\}\ \{b, c\}\ \{a, b, c\}\}.$$

Кстати, $|X| = 3, |2^X| = 8 = 2^3 = 2^{|X|}$. Совпадение?

§8,75 Основные операции над множествами

Стандартные операции над множествами:

- Пересечение:
  $Z = X \cap Y = \{z \mid (z \in X) \wedge (z \in Y)\}$
- Объединение:
  $Z = X \cup Y = \{z \mid (z \in X) \vee (z \in Y)\}$
- Разность:
  $Z = X \setminus Y = \{z \mid (z \in X) \wedge (z \notin Y)\}$
- Симметрическая разность:
  $Z = X \oplus Y = \{z \mid ((z \in X) \wedge (z \notin Y)) \vee ((z \notin X) \wedge (z \in Y))\}$
- Дополнение множества $Y \subseteq X$ во множестве X:
  $\overline{Y}_X = X \setminus Y$
- Дополнение в универсальном множестве U:
  $\overline{Y} = \{z \mid z \notin Y\}$

Простые свойства операций и множеств

Закон двойного дополнения:

- $\overline{\overline{A}} = A$

Свойства пустого и универсального множеств:

- $\overline{A} \cap A = \varnothing$
- $\overline{A} \cup A = U$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap U = A$
- $A \cup U = U$

Некоторые свойства операций

Идемпотентность:

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

Коммутативность:

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \oplus B = B \oplus A$

Некоторые свойства операций

Ассоциативность:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

Дистрибутивность:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Продвинутые

Законы де Моргана:

- $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$
- $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$

Законы поглощения:

- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup (A \cap B) = A$

Элементарное склеивание:

- $(A \cap \overline{X}) \cup (A \cap X) = A$

Сведение других операций

Выражение разности и симметрической разности (следует из определений):

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Важные свойства подмножеств

Для любого A:

- $\varnothing \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq U$

Для любых A, B, C:

- если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$

Для любых A, B:

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- $A \setminus B \subseteq A$

Свойства результатов операций

Следующие утверждения эквивалентны:

- $A \subseteq B$
- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$
- $A \setminus B = \varnothing$

Следующие утверждения эквивалентны:

- $A = B$
- $A \cap B = A \cup B$
- $A \oplus B = \varnothing$

Неосновные тождества для пары операций

- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Пример доказательства 1

Докажем тождество $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Зафиксируем произвольные множества A, B, C.
- Рассмотрим произвольный элемент x и высказывание $x \in A \cap (B \cup C)$.
- <Продолжение на следующем слайде>

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cap (B \cup C) \\
& \qquad \Updownarrow \text{[опр-е } \cap + \text{ задание мн-ва св-вом]} \\
& (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \\
& \qquad \Updownarrow \text{[опр-е } \cup + \text{ задание мн-ва св-вом]} \\
& (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\
& \qquad \Updownarrow \text{[дистрибут. } \wedge \text{ отн. } \vee\text{]} \\
& ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\
& \qquad \Updownarrow \text{[2 } \times \text{ опр-е } \cap + \text{ задание мн-ва св-вом]} \\
& (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
& \qquad \Updownarrow \text{[опр-е } \cup + \text{ задание мн-ва св-вом]} \\
& x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

Пример доказательства 1: конец

Докажем тождество $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Зафиксируем произвольные множества A, B, C.
- Рассмотрим произвольный элемент x и высказывание $x \in A \cap (B \cup C)$.
- $<$ Предыдущий слайд $>$
- Таким образом, высказывание $x \in A \cap (B \cup C)$ эквивалентно высказыванию $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- По одному из возможных определений равенства множеств, это означает, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- В силу того, что множества A, B, C выбирались произвольно, тождество доказано.

Пример доказательства 2

Покажем, что для любых множеств A и B выполнено: если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$.

- Зафиксируем произвольные множества A и B, такие что $A \subseteq B$.
- Чтобы доказать, что $A \cup B = B$, покажем истинность включений $A \cup B \subseteq B$ и $B \subseteq A \cup B$.

Покажем, что $B \subseteq A \cup B$.

- Действительно, для любого элемента $b \in B$, очевидно (или по правилу введения дизъюнкции), выполнено $(b \in A) \vee (b \in B)$.
- Но последнее эквивалентно $b \in (A \cup B)$ по определению* объединения множеств.
- Таким образом, для любого $b \in B$ имеет место $b \in (A \cup B)$, что по определению подмножества означает, что $B \subseteq A \cup B$.

Покажем теперь, что $A \cup B \subseteq B$.

- Рассмотрим произвольный элемент $a \in A \cup B$.
- Поскольку $a \in A \cup B$, то $a \in A$ или $a \in B$ [по определению* объединения множеств].
- Тот факт, что $A \subseteq B$, означает, что для любого $x \in A$ имеет место $x \in B$.
- В частности, если $a \in A$, то $a \in B$.
- С другой стороны, если $a \in B$, то, очевидно, $a \in B$.
- Таким образом, для любого a, такого что $a \in A$ или $a \in B$, имеем $a \in B$
  [по правилу разбора случаев].
- Отсюда заключаем, что $A \cup B \subseteq B$
  [по определению подмножества].

Пример доказательства 2: конец

Покажем, что для любых множеств A и B выполнено: если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$.

- Зафиксируем произвольные множества A и B, такие что $A \subseteq B$.
- Чтобы доказать, что $A \cup B = B$, покажем истинность включений $A \cup B \subseteq B$ и $B \subseteq A \cup B$.
- <Доказываем включения>
- Поскольку $A \cup B \subseteq B$ и $B \subseteq A \cup B$, множества $A \cup B$ и B равны по определению.
- Что и требовалось доказать.

Пример доказательства 2: не такое нужное от противного

Покажем, что для любых множеств A и B выполнено:
если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$.

- Зафиксируем произвольные множества A и B.
- Предположим противное: пусть $A \subseteq B$, но $A \cup B \neq B$.
- Последнее означает, что $A \cup B \not\subseteq B$ или $B \not\subseteq A \cup B$.
- Заметим, что случай $B \not\subseteq A \cup B$ невозможен.
- <Доказываем это>

<Доказываем это>

Заметим, что $B \not\subseteq A \cup B$ невозможен.

- Действительно, это означало бы, что существует элемент b такой, что импликация $(b \in B) \Rightarrow (b \in A \cup B)$ ложна.
- Но $(b \in B) \Rightarrow ((b \in (A \cup B))$ эквивалентно $(b \in B) \Rightarrow ((b \in A) \vee (b \in B))$ по определению* объединения множеств.
- В свою очередь,

$$
\begin{aligned}
&(b \in B) \Rightarrow ((b \in A) \vee (b \in B)) \equiv \\
\equiv &\overline{b \in B} \vee (b \in A) \vee (b \in B) \equiv \\
\equiv &\text{И},
\end{aligned}
$$

<Доказываем это>

- из чего заключаем, что такого элемента b, что $(b \in B) \Rightarrow (b \in A \cup B) = \text{Л}$, не существует,
- откуда $B \subseteq A \cup B$.

Возвращаемся к доказательству

- Последнее означает, что $A \cup B \not\subseteq B$ или $B \not\subseteq A \cup B$.
- Заметим, что случай $B \not\subseteq A \cup B$ невозможен.
- <Доказываем это>
- Следовательно, $A \cup B \not\subseteq B$.
- <Смотрим на это внимательно>

<Смотрим на это внимательно>

Следовательно, $A \cup B \not\subseteq B$.

- Это означает, что существует элемент a такой, что ложна импликация $(a \in A \cup B) \Rightarrow (a \in B)$,
- т. е. $a \in A \cup B$ и $a \notin B$.
- Но $(a \in A \cup B) \wedge (a \notin B)$ эквивалентно $((a \in A) \vee (a \in B)) \wedge (a \notin B)$ по определению* объединения множеств.
- В свою очередь,

$$
\begin{aligned}
&((a \in A) \vee (a \in B)) \wedge (a \notin B) \equiv \\
\equiv&((a \in A) \wedge (a \notin B)) \vee ((a \in B) \wedge (a \notin B)) \equiv \\
\equiv&((a \in A) \wedge (a \notin B)) \vee \text{Л} \equiv \\
\equiv&(a \in A) \wedge (a \notin B).
\end{aligned}
$$

<Смотрим на это внимательно>

$(a \in A) \wedge (a \notin B)$.

- Таким образом, существует элемент a такой, что $a \in A$ и $a \notin B$.
- Это противоречит условию о том, что $A \subseteq B$.

Пример доказательства 2: от противного, конец

Покажем, что для любых множеств A и B выполнено:
если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$.

- Предположим противное: пусть $A \subseteq B$, но $A \cup B \neq B$.
- Последнее означает, что $A \cup B \not\subseteq B$ или $B \not\subseteq A \cup B$.
- Заметим, что случай $B \not\subseteq A \cup B$ невозможен. <Доказываем>
- Следовательно, $A \cup B \not\subseteq B$. <Противоречие>
- Полученное противоречие означает, что исходное предположение неверно,
- а значит, действительно, если $A \subseteq B$, то $A \cup B \neq B$ для любых множеств A и B.

Упорядоченные пары

Пусть X и Y — два непустых множества, $x \in X$, $y \in Y$.

- Пару элементов x и y, взятых именно в таком порядке, будем называть упорядоченной парой и обозначать (x, y).
- Две упорядоченные пары (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.
- В упорядоченной паре (x, y) будем называть x первой компонентой, а y — второй.

Пусть X и Y — два множества.

Определение

Множество всевозможных упорядоченных пар,
в которых первая компонента принадлежит множеству X,
а вторая — множеству Y,
т. е. множество $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$,
называется декартовым произведением
множества X на множество Y.

Обозначение

$$X \times Y$$

Пример:

$X = \{a, b, c\}, \;\; Y = \{1, 3\}.$
Всевозможные упорядоченные пары $(x, y), x \in X, y \in Y$:

- $(a, 1)$
- $(b, 1)$
- $(c, 1)$
- $(a, 3)$
- $(b, 3)$
- $(c, 3)$

$$X \times Y = \{\,(a, 1),\; (a, 3),\; (b, 1),\; (b, 3),\; (c, 1),\; (c, 3)\,\}$$

Если $X = \varnothing$ или $Y = \varnothing$, то $X \times Y = \varnothing$.

- Если $Y = X$, то $X \times Y = X \times X$ обозначается X^2 и называется декартовым квадратом множества X.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — непустые множества,
$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots, a_n \in A_n$.

- По аналогии введём $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — упорядоченный набор, или вектор, или кортеж длины n.
- Два упорядоченных набора одной длины $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ равны тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множества.

Определение

$$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Если $A_i = \varnothing$ при некотором i, то $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \varnothing$.

- Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$ обозначается A^n и называется декартовой n-й степенью множества A.

Утверждение

Для конечных множеств X и Y

$$|X \times Y| = |X| \times |Y|.$$

Утверждение

Для конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_k|.$$