Вариант 12

1 Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x - 9u = -9(x + y)$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - 4dxdy + 13(dx)^2 = 0$$

$$D = 16(dx)^2 - 52(dx)^2 = -36(dx)^2 < 0$$

Значит, уравнение элиптического типа

$$dy = \frac{4 \pm 6i}{2}dx \Rightarrow y - \frac{4 \pm 6i}{2}x = C$$

$$\xi = y - 2x, \xi_x = -2, \xi_y = 1$$

$$\eta = 3x, \eta_x = 3, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -2u_\xi + 3u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{xx} = -2u_{\xi\xi}\xi_x - 2u_{\xi\eta}\eta_x + 3u_{\xi\eta}\xi_x + 3u_{\eta\eta}\eta_x = 4u_{\xi\xi} - 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = (u_y)_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi_\eta}\eta_x = -2u_{\xi\xi} + 3u_{\xi_\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi_\eta}\eta_y = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 4 - 8 + 13 = 9$$

$$u_{\xi\eta} : -12 + 12 = 0$$

$$u_{\eta\eta} : 9$$

$$u_\xi = -6$$

$$u_\eta = 9$$

Имеем

$$9u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 6u_\xi + 9u_\eta - 9u = -9(\xi + \eta)$$

2 Задание 2. Привести уравнение к каноническому виду

$$y^2 u_{xx} + 2xu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$y^2(dy)^2 - 2xdxdy + 2x^2(dx)^2 = 0$$

$$D = (4x^2 - 8x^2y^2)(dx)^2 = 4x^2(1 - 2y^2)(dx)^2$$

2.1 Случай 1. Уравнение гиперболического типа

$$D > 0 \Rightarrow 1 - 2y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 1/2$$

$$dy = \frac{2x + 2x\sqrt{1 - 2y^2}}{2y^2} dx = \frac{1 + \sqrt{1 - 2y^2}}{y^2} xdx$$

$$\xi = 1/2y - 1/2x^2 - 1/2 \int\limits_0^y \sqrt{1 - 2t^2}\, dt$$

$$\xi_x = -x$$

$$\xi_y = 1/2(1 - \sqrt(1 - 2y^2))$$

$$\eta = 1/2y - 1/2x^2 + 1/2 \int\limits_0^y \sqrt{1 - 2t^2}\, dt$$

$$\eta_x = -x$$

$$\eta_y = 1/2(1+\sqrt{1-2y^2})$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -xu_\xi - xu_\eta$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 1/2(1-\sqrt{1-2y^2})u_\xi + 1/2(1+\sqrt{1-2y^2})u_\eta$$

$$u_{xx} = -u_\xi - u_\eta - x(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - x(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = x^2u_{\xi\xi} + 2x^2u_{\xi\eta} + x^2u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta$$

$$\begin{aligned} u_x y &= -x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) \\ &= -1/2x(1-\sqrt{1-2y^2})u_{\xi\xi} - xu_{\xi\eta} - 1/2x(1+\sqrt{1-2y^2})u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y y &= (1/2(1-\sqrt{1-2y^2})u_\xi + 1/2(1+\sqrt{1-2y^2})u_\eta)_y \\ &= 1/2(-y^2 - \sqrt{1-2y^2} + 1)U_{\xi\xi} + y^2 u_{\xi\eta} \\ &+ 1/2(-y^2 + \sqrt{1-2y^2} + 1)u_{\eta\eta} \\ &+ \frac{y}{\sqrt{1-2y^2}}u_\xi - \frac{y}{\sqrt{1-2y^2}}u_\eta \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : x^2y^2 - 1/2(1-\sqrt{1-2y^2}) * 2x^2 + +2x^2 * 1/2(-y^2 - \sqrt{1-2y^2} + 1) = 0$$
$$u_{\xi\eta} : 2x^2y^2 - 2x^2 + 2x^2y^2 = 4x^2y^2 - 2x^2$$
$$u_{\eta\eta} : x^2y^2 - 2x^2 * 1/2(1+\sqrt{1-2y^2}) + 2x^2 * 1/2(-y^2 + \sqrt{1-2y^2} + 1) = 0$$
$$u_\xi : -y^2 + \tfrac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1-\sqrt{1-2y^2})$$
$$u_\eta : -y^2 - \tfrac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1+\sqrt{1-2y^2})$$

Имеем

$$\begin{aligned} &(4x^2y^2 - 2x^2)u_{\xi\eta} \\ &+ (-y^2 + \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1-\sqrt{1-2y^2}))u_\xi \\ &+ (-y^2 - \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1+\sqrt{1-2y^2}))u_\eta = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Случай 2. Уравнение параболического типа

$D = 4x^2(1-2y^2) = 0, x = 0$

$$dy = -\frac{2x}{2y^2}dx \Rightarrow 1/3y^3 = C$$

$$\xi = 1/3y^3, \xi_x = 0, \xi_y = y^2$$
$$\eta = x, \eta_x = 1, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = y^2 u_\xi$$

$$u_{xx} = u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = y^2 u_{\xi\eta}$$
$$u_{yy} = 2yu_\xi + y^2 u_{\xi\xi}\xi_y + y^2 u_{\xi\eta}\eta_y = 2yu_\xi + y^4 u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned}
&= u_{\xi\xi} : 2x^2y^4 = 0 \\
&= u_{\xi\eta} : 2xy^2 = 0 \\
&= u_{\eta\eta} : y^2 \\
&= u_\xi : 4x^2y + y^3 \\
&= u_\eta : 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Имеем

$$y^2 u_{\eta\eta} + (4x^2y + y^3)u_\xi = 0$$

2.3 Случай 3. Уравнение элиптического типа

$$D = 4x^2(1-2y^2) < 0 \Rightarrow y^2 > 1/2$$

$$dy = \frac{1 \pm \sqrt{1-2y^2}i}{y^2}xdx$$

3 Задание 3. Привести уравнение к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип уравнения

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$y(dy)^2 + x(dx)^2 = 0$$

$$D = -4xy$$

3.1 Случай 1. Уравнение гиперболического типа

$$D > 0, x < 0, y > 0$$

$$dy = \sqrt{-\frac{x}{y}}dx, dy = -\sqrt{-\frac{x}{y}}dx$$

$$\xi = 2/3y^{3/2} + 2/3(-x)^{3/2}, \xi_x = -\sqrt{-x}, \xi_y = \sqrt{y}$$
$$\eta = 2/3y^{3/2} - 2/3(-x)^{3/2}, \eta_x = \sqrt{-x}, \eta_y = \sqrt{y}$$

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\sqrt{-x}u_\xi + \sqrt{-x}u_\eta \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \sqrt{y}u_\xi + \sqrt{y}u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\eta - \sqrt{-x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + \sqrt{-x}(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\
&= -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_\eta \\
u_{xy} &= \sqrt{y}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + \sqrt{y}(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\
&= -\sqrt{-xy}u_{\xi\xi} + \sqrt{-xy}u_{\xi\eta} \\
u_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta + \sqrt{x}(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta + yu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + yu_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты

$$
\begin{aligned}
u_{\xi\xi} &: -xy + xy = 0 \\
u_{\xi\eta} &: 2xy + 2xy = 4xy \\
u_{\eta\eta} &: xy - xy = 0 \\
u_{\xi} &: -\frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}}) \\
u_{\eta} &: -\frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}})
\end{aligned}
$$

Итог:

$$4xyu_{\xi\eta} - \frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}})u_{\xi} - \frac{1}{2\sqrt{-xy}}(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}})u_{\eta} = 0$$

3.2 Случай 2. Уравнение параболического типа

$$D = 0, x = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = C$$

$$\xi = y, \xi_x = 0, \xi_y = 1$$

$$\eta = x, \eta_x = 1, \eta_y = 0$$

$$
\begin{aligned}
&u_x = u_{\eta}, u_y = u_{\xi}, \\
&u_{xx} = u_{\eta\eta}, u_{xy} = u_{\xi\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}
\end{aligned}
$$

Вычислим коэффициенты

$$
\begin{aligned}
u_{\xi\xi} &: x = 0 \\
u_{\xi\eta} &: 0 \\
u_{\eta\eta} &: y \\
u_{\xi} &: 0 \\
u_{\eta} &: 0
\end{aligned}
$$

Итог:

$$yu_{\eta\eta} = 0$$

3.3 Случай 3. Уравнение элиптического типа

$$D < 0, -4xy < 0, x > 0, y > 0$$

$$dy = \sqrt{\frac{x}{y}} i dx$$

$$\xi = 2/3y^{3/2}, \xi_x = 0, \xi_y = \sqrt{y}$$

$$\eta = 2/3x^{3/2}, \eta_x = \sqrt{x}, \eta_y = 0$$

$$\begin{aligned}
u_x &= \sqrt{x}u_\eta \\
u_y &= \sqrt{y}u_\xi \\
u_{xx} &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}u_\eta + xu_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= \sqrt{x}\sqrt{y}u_{\xi\eta} \\
u_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\xi + yu_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned}
u_{\xi\xi} &: xy & u_{\xi\eta} &: 0 \\
u_{\eta\eta} &: xy \\
u_\xi &: \frac{x}{2\sqrt{y}}; & u_\eta &: \frac{y}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Итог:

$$xyu_{\xi\xi} + xyu_{\eta\eta} + \frac{x}{2\sqrt{y}}u_\xi + \frac{y}{2\sqrt{x}}u_\eta$$

4 Задание 4. Привести уравнение к каноническому виду и упростить

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - (dx)^2 = 0$$

$D = 4(dx)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа. Нетрудно видеть, что:

$$\xi = y - x \qquad \eta = y + x$$
$$\xi_x = -1 \qquad \eta_x = 1$$
$$\xi_y = 1 \qquad \eta_y = 1$$

$$u_x = -u_\xi + u_\eta$$
$$u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : 0 \qquad u_\xi : 0$$
$$u_{\xi\eta} : -4 \qquad u_\eta : 2$$
$$u_{\eta\eta} : 0$$

Итог

$$2u_{\xi\eta} - u_\eta + 2u = 0$$

5 Задание 5. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 24u_{yy} + u_x + 4u_y = y - 4x$$

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 10dxdy + 24(dx)^2 = 0$$

$D = 4(dx)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа

$$dy = 6dx \qquad dy = 4dx$$

$$\xi = y - 6x \qquad\qquad \eta = y - 4x$$
$$\xi_x = -6 \qquad\qquad \eta_x = -4$$
$$\xi_y = 1 \qquad\qquad \eta_y = 1$$

$$u_x = -6u_\xi - 4u_\eta$$
$$u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = 36u_{\xi\xi} + 48u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -6u_{\xi\xi} - 10u_{\xi\eta} + -4u_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : 0 \qquad\qquad u_\xi : -2$$
$$u_{\xi\eta} : -4 \qquad\qquad u_\eta : 0$$
$$u_{\eta\eta} : 0$$

Получим уравнение
$$-4u_{\xi\eta} - 2u_\xi = \eta$$

Проведем замену: $v = u_\xi$

$$-4v_\eta - 2v\eta = \eta$$

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$v_{oo} = C(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного уравнения:
$$v = -\frac{1}{2}\eta + C_2(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - 4$$

Получим общее решение неоднородного уравнения:

$$v_{OH} = u_\xi = C(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2}\eta + C_2(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - 4$$

Интегрируем по ξ

$$u = C_5(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{\xi\eta}{2} - 4\xi$$

Подставим x, y:

$$u(x,y) = C_5(y-6x)e^{-\frac{y-4x}{2}} - \frac{(y-6x)(y-4x)}{2} - 4(y-6x)$$

6 Задание 6. В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнения

Задача 3.37

$$xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y = x(y+x^2)$$

6.1 Приведем к каноническому виду

Характеристическое уравнение:

$$x(dy)^2 + 4x^2dxdy + 4x^3(dx)^2 = 0$$

$D = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа

$$dy = -2xdx$$

$$\begin{aligned} &\xi = y + x^2 \qquad && \xi_x = 2x \qquad && \xi_y = 1 \\ &\eta = x && \eta_x = 1 && \eta_y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= 2xu_\xi + u_\eta \\ u_\eta &= u_\xi \\ u_{xx} &= 4x^2u_{\xi\xi} + 4xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi \\ u_{xy} &= 2xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 4x^3 - 8x^3 + 4x^3 = 0 \qquad u_{\xi} : 2x + 2x - 4x = 0$$
$$u_{\xi\eta} : 4x^2 - 4x^2 = 0 \qquad u_{\eta} : 1$$
$$u_{\eta\eta} : x$$

В результате:

$$\eta u_{\eta\eta} + u_{\eta} = \xi\eta$$

6.2 Найдем общее решение

Проведем замену: $v = u_{\eta}$ Имеем уравнение:

$$\eta v_{\eta} + v = \xi\eta$$

Найдем общее решение однородного:

$$v_{OO} = \frac{C(\xi)}{\eta}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного:

$$v_{\eta} = \frac{C_{\eta}\eta - C}{\eta^2}$$

$$C_{\eta}\eta = \xi\eta^2 \Rightarrow C_{\eta} = \xi\eta$$

$$C = \frac{1}{2}\xi\eta^2 + C_2(\xi)$$

Частное решение неоднородного:

$$v = \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{\eta}C_2(\xi)$$

Общее решение неоднородного:

$$v = u_{\eta} = \frac{C_3(\xi)}{\eta} + \frac{1}{2}\xi\eta$$

Проинтегрируем по η

$$u = C_3(\xi)ln\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2$$

Выразим через x,y:

$$u(x, y) = C_3(y + x^2)ln(x) + \frac{1}{4}(y + x^2)x^2$$

7 Задние 7. Решить задачу Гурса

Задача 12.

$$\begin{cases} u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0, \\ x > 0, y > 0, \end{cases}$$