

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра биомедицинской информатики

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

Лабораторная работа

Снежко Льва Владимировича
студента 3-го курса

Преподаватель:
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

Вариант 12

1 Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x - 9u = -9(x + y)$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - 4dxdy + 13(dx)^2 = 0$$

$$D = 16(dx)^2 - 52(dx)^2 = -36(dx)^2 < 0$$

Значит, уравнение эллиптического типа

$$dy = \frac{4 \pm 6i}{2} dx \Rightarrow y - \frac{4 \pm 6i}{2} x = C$$

$$\xi = y - 2x, \xi_x = -2, \xi_y = 1$$

$$\eta = 3x, \eta_x = 3, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -2u_\xi + 3u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{xx} = -2u_{\xi\xi}\xi_x - 2u_{\xi\eta}\eta_x + 3u_{\xi\xi}\xi_x + 3u_{\eta\eta}\eta_x = 4u_{\xi\xi} - 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = (u_y)_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x = -2u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 4 - 8 + 13 = 9$$

$$u_{\xi\eta} : -12 + 12 = 0$$

$$u_{\eta\eta} : 9$$

$$u_\xi = -6$$

$$u_\eta = 9$$

Имеем

$$9u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 6u_\xi + 9u_\eta - 9u = -9(\xi + \eta)$$

2 Задание 2. Привести уравнение к каноническому виду

$$y^2 u_{xx} + 2x u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$y^2(dy)^2 - 2xdxdy + 2x^2(dx)^2 = 0$$

$$D = (4x^2 - 8x^2y^2)(dx)^2 = 4x^2(1 - 2y^2)(dx)^2$$

2.1 Случай 1. Уравнение гиперболического типа

$$D > 0 \Rightarrow 1 - 2y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 1/2$$

$$dy = \frac{2x + 2x\sqrt{1 - 2y^2}}{2y^2}dx = \frac{1 + \sqrt{1 - 2y^2}}{y^2}xdx$$

$$\xi = 1/2y - 1/2x^2 - 1/2 \int_0^y \sqrt{1 - 2t^2} dt$$

$$\xi_x = -x$$

$$\xi_y = 1/2(1 - \sqrt{1 - 2y^2})$$

$$\eta = 1/2y - 1/2x^2 + 1/2 \int_0^y \sqrt{1 - 2t^2} dt$$

$$\eta_x = -x$$

$$\eta_y = 1/2(1 + \sqrt{1 - 2y^2})$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -xu_\xi - xu_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 1/2(1 - \sqrt{1 - 2y^2})u_\xi + 1/2(1 + \sqrt{1 - 2y^2})u_\eta$$

$$u_{xx} = -u_\xi - u_\eta - x(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - x(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = x^2u_{\xi\xi} + 2x^2u_{\xi\eta} + x^2u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta$$

$$u_{xy} = -x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y)$$

$$= -1/2x(1 - \sqrt{1 - 2y^2})u_{\xi\xi} - xu_{\xi\eta} - 1/2x(1 + \sqrt{1 - 2y^2})u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = (1/2(1 - \sqrt{1 - 2y^2})u_\xi + 1/2(1 + \sqrt{1 - 2y^2})u_\eta)_y$$

$$= 1/2(-y^2 - \sqrt{1 - 2y^2} + 1)U_{\xi\xi} + y^2u_{\xi\eta}$$

$$+ 1/2(-y^2 + \sqrt{1 - 2y^2} + 1)u_{\eta\eta}$$

$$+ \frac{y}{\sqrt{1 - 2y^2}}u_\xi - \frac{y}{\sqrt{1 - 2y^2}}u_\eta$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : x^2y^2 - 1/2(1 - \sqrt{1 - 2y^2}) * 2x^2 + + 2x^2 * 1/2(-y^2 - \sqrt{1 - 2y^2} + 1) = 0$$

$$u_{\xi\eta} : 2x^2y^2 - 2x^2 + 2x^2y^2 = 4x^2y^2 - 2x^2$$

$$u_{\eta\eta} : x^2y^2 - 2x^2 * 1/2(1 + \sqrt{1 - 2y^2}) + 2x^2 * 1/2(-y^2 + \sqrt{1 - 2y^2} + 1) = 0$$

$$u_{\xi} : -y^2 + \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 - \sqrt{1 - 2y^2})$$

$$u_{\eta} : -y^2 - \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 + \sqrt{1 - 2y^2})$$

Имеем

$$\begin{aligned} & (4x^2y^2 - 2x^2)u_{\xi\eta} \\ & + (-y^2 + \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 - \sqrt{1 - 2y^2}))u_{\xi} \\ & + (-y^2 - \frac{2x^2y}{\sqrt{1-2y^2}} + y/2(1 + \sqrt{1 - 2y^2}))u_{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 Случай 2. Уравнение параболического типа

$$D = 4x^2(1 - 2y^2) = 0, x = 0$$

$$dy = -\frac{2x}{2y^2}dx \Rightarrow 1/3y^3 = C$$

$$\xi = 1/3y^3, \xi_x = 0, \xi_y = y^2$$

$$\eta = x, \eta_x = 1, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = u_{\eta}$$

$$u_y = u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y = y^2u_{\xi}$$

$$u_{xx} = u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = y^2u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = 2yu_{\xi} + y^2u_{\xi\xi}\xi_y + y^2u_{\xi\eta}\eta_y = 2yu_{\xi} + y^4u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$= u_{\xi\xi} : 2x^2y^4 = 0 \quad (2)$$

$$= u_{\xi\eta} : 2xy^2 = 0$$

$$= u_{\eta\eta} : y^2$$

$$= u_{\xi} : 4x^2y + y^3$$

$$= u_{\eta} : 0$$

Имеем

$$y^2u_{\eta\eta} + (4x^2y + y^3)u_{\xi} = 0$$

2.3 Случай 3. Уравнение эллиптического типа

$$D = 4x^2(1 - 2y^2) < 0 \Rightarrow y^2 > 1/2$$

$$dy = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2y^2}i}{y^2} x dx$$

3 Задание 3. Привести уравнение к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип уравнения

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$y(dy)^2 + x(dx)^2 = 0$$

$$D = -4xy$$

3.1 Случай 1. Уравнение гиперболического типа

$$D > 0, x < 0, y > 0$$

$$dy = \sqrt{-\frac{x}{y}} dx, dy = -\sqrt{-\frac{x}{y}} dx$$

$$\xi = 2/3y^{3/2} + 2/3(-x)^{3/2}, \xi_x = -\sqrt{-x}, \xi_y = \sqrt{y}$$

$$\eta = 2/3y^{3/2} - 2/3(-x)^{3/2}, \eta_x = \sqrt{-x}, \eta_y = \sqrt{y}$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\sqrt{-x} u_\xi + \sqrt{-x} u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \sqrt{y} u_\xi + \sqrt{y} u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\eta - \sqrt{-x} (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) + \sqrt{-x} (u_{\xi\eta} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x)$$

$$= -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\xi - \frac{1}{2\sqrt{-x}} u_\eta$$

$$u_{xy} = \sqrt{y} (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) + \sqrt{y} (u_{\xi\eta} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x)$$

$$= -\sqrt{-xy} u_{\xi\xi} + \sqrt{-xy} u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}} u_\eta + \sqrt{x} (u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\xi\eta} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{y}} u_\eta + y u_{\xi\xi} + 2y u_{\xi\eta} + y u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : -xy + xy = 0$$

$$u_{\xi\eta} : 2xy + 2xy = 4xy$$

$$u_{\eta\eta} : xy - xy = 0$$

$$u_\xi : -\frac{1}{2\sqrt{-xy}} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right)$$

$$u_\eta : -\frac{1}{2\sqrt{-xy}} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}} \right)$$

Итог:

$$4xyu_{\xi\eta} - \frac{1}{2\sqrt{-xy}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)u_{\xi} - \frac{1}{2\sqrt{-xy}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)u_{\eta} = 0$$

3.2 Случай 2. Уравнение параболического типа

$$D = 0, x = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = C$$

$$\xi = y, \xi_x = 0, \xi_y = 1$$

$$\eta = x, \eta_x = 1, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_{\eta}, u_y = u_{\xi},$$

$$u_{xx} = u_{\eta\eta}, u_{xy} = u_{\xi\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : x = 0$$

$$u_{\xi\eta} : 0$$

$$u_{\eta\eta} : y$$

$$u_{\xi} : 0$$

$$u_{\eta} : 0$$

Итог:

$$yu_{\eta\eta} = 0$$

3.3 Случай 3. Уравнение эллиптического типа

$$D < 0, -4xy < 0, x > 0, y > 0$$

$$dy = \sqrt{\frac{x}{y}} dx$$

$$\xi = 2/3y^{3/2}, \xi_x = 0, \xi_y = \sqrt{y}$$

$$\eta = 2/3x^{3/2}, \eta_x = \sqrt{x}, \eta_y = 0$$

$$u_x = \sqrt{x}u_{\eta}$$

$$u_y = \sqrt{y}u_{\xi}$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}u_{\eta} + xu_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}u_{\xi} + yu_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{array}{ll} u_{\xi\xi} : xy & u_{\xi\eta} : 0 \\ u_{\eta\eta} : xy & \\ u_{\xi} : \frac{x}{2\sqrt{y}}; & u_{\eta} : \frac{y}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

Итог:

$$xyu_{\xi\xi} + xyu_{\eta\eta} + \frac{x}{2\sqrt{y}}u_{\xi} + \frac{y}{2\sqrt{x}}u_{\eta}$$

4 Задание 4. Привести уравнение к каноническому виду и упростить

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - (dx)^2 = 0$$

$D = 4(dx)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа. Нетрудно видеть, что:

$$\begin{array}{ll} \xi = y - x & \eta = y + x \\ \xi_x = -1 & \eta_x = 1 \\ \xi_y = 1 & \eta_y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u_x = -u_{\xi} + u_{\eta} \\ u_y = u_{\xi} + u_{\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{array}{ll} u_{\xi\xi} : 0 & u_{\xi} : 0 \\ u_{\xi\eta} : -4 & u_{\eta} : 2 \\ u_{\eta\eta} : 0 & \end{array}$$

Итог

$$2u_{\xi\eta} - u_{\eta} + 2u = 0$$

5 Задание 5. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 24u_{yy} + u_x + 4u_y = y - 4x$$

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 10dxdy + 24(dx)^2 = 0$$

$D = 4(dx)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа

$$dy = 6dx$$

$$dy = 4dx$$

$$\xi = y - 6x$$

$$\eta = y - 4x$$

$$\xi_x = -6$$

$$\eta_x = -4$$

$$\xi_y = 1$$

$$\eta_y = 1$$

$$u_x = -6u_\xi - 4u_\eta$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = 36u_{\xi\xi} + 48u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = -6u_{\xi\xi} - 10u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты

$$u_{\xi\xi} : 0$$

$$u_\xi : -2$$

$$u_{\xi\eta} : -4$$

$$u_\eta : 0$$

$$u_{\eta\eta} : 0$$

Получим уравнение

$$-4u_{\xi\eta} - 2u_\xi = \eta$$

Проведем замену: $v = u_\xi$

$$-4v_\eta - 2v = \eta$$

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$v_{oo} = C(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$v = -\frac{1}{2}\eta + C_2(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - 4$$

Получим общее решение неоднородного уравнения:

$$v_{oH} = u_\xi = C(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2}\eta + C_2(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - 4$$

Интегрируем по ξ

$$u = C_5(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{\xi\eta}{2} - 4\xi$$

Подставим x, y :

$$u(x, y) = C_5(y - 6x)e^{-\frac{y-4x}{2}} - \frac{(y-6x)(y-4x)}{2} - 4(y-6x)$$

6 Задание 6. В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнения

Задача 3.37

$$xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y = x(y + x^2)$$

6.1 Приведем к каноническому виду

Характеристическое уравнение:

$$x(dy)^2 + 4x^2dxdy + 4x^3(dx)^2 = 0$$

$D = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа

$$dy = -2xdx$$

$$\xi = y + x^2$$

$$\xi_x = 2x$$

$$\xi_y = 1$$

$$\eta = x$$

$$\eta_x = 1$$

$$\eta_y = 0$$

$$u_x = 2xu_\xi + u_\eta$$

$$u_\eta = u_\xi$$

$$u_{xx} = 4x^2u_{\xi\xi} + 4xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi$$

$$u_{xy} = 2xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 4x^3 - 8x^3 + 4x^3 = 0$$

$$u_\xi : 2x + 2x - 4x = 0$$

$$u_{\xi\eta} : 4x^2 - 4x^2 = 0$$

$$u_\eta : 1$$

$$u_{\eta\eta} : x$$

В результате:

$$\eta u_{\eta\eta} + u_\eta = \xi\eta$$

6.2 Найдем общее решение

Проведем замену: $v = u_\eta$ Имеем уравнение:

$$\eta v_\eta + v = \xi\eta$$

Найдем общее решение однородного:

$$v_{OO} = \frac{C(\xi)}{\eta}$$

Методом Лагранжа найдем частное решение неоднородного:

$$v_\eta = \frac{C_\eta\eta - C}{\eta^2}$$

$$C_\eta \eta = \xi \eta^2 \Rightarrow C_\eta = \xi \eta$$

$$C = \frac{1}{2} \xi \eta^2 + C_2(\xi)$$

Частное решение неоднородного:

$$v = \frac{1}{2} \xi \eta + \frac{1}{\eta} C_2(\xi)$$

Общее решение неоднородного:

$$v = u_\eta = \frac{C_3(\xi)}{\eta} + \frac{1}{2} \xi \eta$$

Проинтегрируем по η

$$u = C_3(\xi) \ln \eta + \frac{1}{4} \xi \eta^2$$

Выразим через x, y :

$$u(x, y) = C_3(y + x^2) \ln(x) + \frac{1}{4} (y + x^2) x^2$$

7 Задание 7. Решить задачу Гурса

Задача 12.

$$\begin{cases} u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0, \\ x > 0, y > 0, \\ u(x, 2x) = e^x, u(x, 4x) = xe^x, \end{cases}$$

7.1 Приведем уравнение к каноническому виду

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 6dx dy + 8(dx)^2 = 0$$

$D = 36 - 32 = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа

$$dy = 4dx$$

$$\xi = y - 4x$$

$$\xi_x = -4$$

$$\xi_y = 1$$

$$dy = 2dx$$

$$\eta = y - 2x$$

$$\eta_x = -2$$

$$\eta_y = 1$$

$$u_x = -4u_\xi - 2u_\eta$$

$$u_{xx} = 16u_{\xi\xi} + 16u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xy} = -4u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta}$$

Вычислим коэффициенты:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} : 16 - 24 + 8 &= 0 & u_{\xi} : -4 + 1 &= -3 \\ u_{\xi\eta} : 16 - 36 + 16 &= -4 & u_{\eta} : -2 + 1 &= -1 \\ u_{\xi\eta} : 4 - 12 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Имеем:

$$-4u_{\xi\eta} - 3u_{\xi} - u_{\eta} = 0$$

7.2 Найдём общее решение

Проведём замену: $v = ue^{-\frac{1}{8}\xi - \frac{3}{4}\eta}$

Получим уравнение:

$$-4v_{\xi\eta} - v_{\eta} = 0$$

Проведём замену $z = -4v_{\xi} - v$

Получим уравнение:

$$z_{\eta} = 0 \Rightarrow z = -4v_{\xi} - v = C_1(\xi)$$

Найдём общее решение однородного уравнения:

$$v_{OO} = C(\eta)e^{\frac{\xi}{4}}$$

Методом Лагранжа найдём частное решение неоднородного уравнения

$$v_{\xi} = C_{\xi}e^{\frac{\xi}{4}} - \frac{1}{4}Ce^{\frac{\xi}{4}} \Rightarrow C_{\xi} = -\frac{1}{4}C_2(\xi)e^{\frac{\xi}{4}}$$

Частное решение:

$$v = \left(-\frac{1}{4}C_3(\xi) + C_4(\eta)\right)e^{-\frac{\eta}{4}}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} v &= C(\eta)e^{-\frac{\eta}{4}} + \left(-\frac{1}{4}C_3(\xi) + C_4(\eta)\right)e^{-\frac{\eta}{4}} = ue^{-\frac{1}{8}\xi - \frac{3}{4}\eta} \\ &= (C_5(\eta) - \frac{1}{4}C_3(\xi))e^{-\frac{\eta}{4}} \\ u &= (C_5(\eta) - \frac{1}{4}C_3(\xi))e^{-\frac{1}{8}\xi - \frac{1}{2}\eta} \\ &= (C_5(y - 2x) - \frac{1}{4}C_3(y - 4x))e^{-\frac{1}{8}(y-4x) - \frac{1}{2}(y-2x)} \\ &= (C_5(y - 2x) - \frac{1}{4}C_3(y - 4x))e^{-\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y} \end{aligned}$$

7.3 Используем начальные условия

$$u(x, 2x) = e^{\frac{1}{4}x}(C_5(2x) + C_3(0)) = e^x \Rightarrow C_5(2x) + C_3(0) = xe^{-\frac{1}{2}x}$$

$$u(x, 4x) = xe^x = e^{\frac{3}{2}x}(C_5(2x) + C_3(0)) \Rightarrow C_5(0) + C_3(-2x) = e^{\frac{3}{4}x}$$

Имеем:

$$\begin{cases} C_5(2x) + C_3(0) = xe^{-\frac{1}{2}x} \\ C_5(0) + C_3(-2x) = e^{\frac{3}{4}x} \end{cases}$$

$$C_5(2x) = xe^{-\frac{1}{2}x} - C_3(0) \Rightarrow C_5(t) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{4}t} - C_3(0)$$

$$C_5(0) = -C_3(0)$$

$$C_3(-2x) = e^{\frac{3}{4}x} - C_5(0) \Rightarrow C_3(t) = e^{-\frac{3}{8}t} + C_3(0)$$

Тогда

$$u = e^{-\frac{1}{8}\xi + \frac{3}{4}\eta} \left(\frac{1}{2}\eta e^{-\frac{1}{4}\eta} - C_3(0) + e^{-\frac{3}{8}\xi} + C_3(0) \right) = e^{-\frac{1}{8}\xi + \frac{3}{4}\eta} \left(\frac{1}{2}\eta e^{-\frac{1}{4}\eta} + e^{-\frac{3}{8}\xi} \right)$$

Учтём, что $\xi = y - 4x$ и $\eta = y - 2x$:

$$u(x, y) = e^{-\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}y} \left(\left(\frac{1}{2}y - x \right) e^{-2y+x} + e^{-3y+3x} \right)$$

8 Задание 8. Привести уравнение к каноническому виду и упростить

Задача 2.12

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + u_y = 0$$

$$\begin{aligned} a_1a_2 - 2a_1a_3 + a_2a_3 &= [a_1 = t_1 - t_2, a_2 = t_1 + t_2, a_3 = t_3] \\ (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) - 2(t_1 - t_2)t_3 + (t_1 + t_2)t_3 &= \\ t_1^2 - t_2^2 - t_1t_3 + 3t_2t_3 &= (t_1 - \frac{t_3}{2})^2 - (t_2 - \frac{3}{2}t_3)^2 + 2t_3^2 \end{aligned}$$

Проведем замену $\tau_1 = t_1 - \frac{1}{2}t_3$, $\tau_2 = t_2 - \frac{3}{2}t_3$, $\tau_3 = \sqrt{2}t_3$ Выразим

$$t_1 = \tau_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tau_3 \quad t_2 = \tau_2 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\tau_3 \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3$$

Получим уравнение $\tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2 = 0$

Выразим a_i :

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_1 - \tau_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3 \\ a_2 &= \tau_1 + \tau_2 + \sqrt{2}\tau_3 \\ a_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Y = A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = x + y \\ y_2 = -x + y \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{cases}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{y_1} - u_{y_2} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_3} \\ u_y &= u_{y_1} + u_{y_2} + \sqrt{2}u_{y_3} \\ u_z &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= u_{y_1y_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_1y_3} - u_{y_2y_2} - \frac{3}{\sqrt{2}}u_{y_2y_3} - u_{y_3y_3} \\ u_{xz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_1y_3} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_2y_3} - \frac{1}{2}u_{y_3y_3} \\ u_{yz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_1y_3} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_2y_3} + u_{y_3y_3} \end{aligned}$$

Подставим в исходное уравнение и получим:

$$u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} - u_{y_3y_3} + 2u_{y_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{y_3} = 0$$

Проведем замену:

$$u = e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} v(y)$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} u_{y_1} &= (\alpha_1 v + v_{y_1})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_2} &= (\alpha_2 v + v_{y_2})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_3} &= (\alpha_3 v + v_{y_3})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_1y_1} &= (\alpha_1^2 v + 2\alpha_1 v_{y_1} + v_{y_1y_1})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_2y_2} &= (\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_{y_2} + v_{y_2y_2})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \\ u_{y_3y_3} &= (\alpha_3^2 v + 2\alpha_3 v_{y_3} + v_{y_3y_3})e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} \end{aligned}$$

Подставим в полученное уравнение и домножим на $e^{-\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \alpha_3 y_3}$

Получим коэффициенты при производных:

$$\begin{aligned} v_{y_1y_1} &: 1 & v_{y_2y_2} &: -1 & v_{y_3y_3} &: -1 \\ v_{y_1} &: 2\alpha_1 + 2 & v_{y_2} &: -2\alpha_2 & v_{y_3} &: -2\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v &: \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3 \end{aligned}$$

Возьмем следующие значения α_i :

$$\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Имеем:

$$(v_{y_1 y_1} - v_{y_2 y_2} - v_{y_3 y_3} - \frac{7}{8}v) = 0$$

9 Задание 1. №1.5

Решить задачу Коши:

$$x u_{xx} + (x + y) u_{xy} + y u_{yy} = 0, \quad x > 0, y > 0,$$

$$u \Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad u_y \Big|_{y=\frac{1}{x}} = -x^4$$

Характеристическое уравнение:

$$x (dy)^2 - 2(x + y) (dy \cdot dx) + y (dx)^2 = 0.$$

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2(x + y) \left(\frac{dy}{dx} \right) + y = 0.$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$xt^2 - 2(x + y)t + y = 0.$$

Дискриминант $D = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа.

Решение уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{y}{x} \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{y}{x} : \quad y = xC_1$$

$$t_2 = 1 : \quad y = x + C_2$$

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \xi_x = -\frac{y}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{x}, \quad \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\eta = y - x, \quad \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1$$

Преобразование производных:

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{y}{x^2}u_\xi - u_\eta \\
u_y &= \frac{1}{x}u_\xi + u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\xi \\
u_{xy} &= -\frac{y}{x^3}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\right) - u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\xi \\
u_{yy} &= \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты:

$$\begin{aligned}
u_\xi &: \frac{2y}{x^3}x - \frac{1}{x^2}(x+y) = \frac{(y-x)}{x^2} \\
u_\eta &: 0 \\
u_{\xi\xi} &: \frac{y^2}{x^3} - \frac{y(x+y)}{x^3} + \frac{y}{x^2} = 0 \\
u_{\xi\eta} &: \frac{2y}{x} + (x+y)\left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + \frac{2y}{x} = -\frac{(y-x)^2}{x^2} \\
u_{\eta\eta} &: x - (x+y) + y = 0
\end{aligned}$$

Обратная замена:

$$x = \frac{\eta}{\xi - 1}, \quad y = \frac{\xi\eta}{\xi - 1}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
-\frac{(y-x)^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{(y-x)}{x^2}u_\xi &= 0 \\
u_{\xi\eta} - \frac{1}{y-x}u_\xi &= 0 \\
u_{\xi\eta} - \frac{1}{\eta}u_\xi &= 0
\end{aligned}$$

Замена $u_\xi = v$:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\eta} &= \frac{v}{\eta} \\
v_\eta - \frac{1}{\eta}v &= 0 \\
\ln v &= \ln \eta + C \\
v &= \eta \cdot C(\xi)
\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
u_\xi &= \eta \cdot C(\xi) \\
u &= \int \eta \cdot C(\xi) d\xi + C_2(\eta) \\
u &= \eta \cdot C_1(\xi) + C_2(\eta)
\end{aligned}$$

Обратная замена:

$$u = (y-x) \cdot C_1\left(\frac{y}{x}\right) + C_2(y-x)$$

Используем начальные условия, подставим $y = \frac{1}{x}$ в выражение для $u(x, y)$:

$$\left(\frac{1}{x} - x\right) C_1\left(\frac{1}{x^2}\right) + C_2\left(\frac{1}{x} - x\right) = x^3$$

Тогда

$$\xi = y - x = \frac{1 - x^2}{x}, \quad \eta = \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\xi C_1(\eta) + C_2(\xi) = x^3$$

Из второго условия:

$$C_1(\eta) + \frac{1 - x^2}{x^2} C_1'(\eta) + C_2'(\xi) = -x^4$$

Проведем замену: $s = \xi$, $t = \eta$ и выразим x через t :

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad s = \frac{t - 1}{\sqrt{t}}$$

Запишем уравнения в терминах t :

$$\begin{aligned} C_2(s) + sC_1(t) &= \frac{1}{t^{3/2}}, \\ C_2'(s) + C_1(t) + (t - 1)C_1'(t) &= -\frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Решим систему уравнений.

1. Выразим $C_2(s)$:

$$C_2(s) = \frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t).$$

2. Подставим это выражение:

$$\left(\frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t)\right)' + C_1(t) + (t - 1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Так как $s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, имеем $ds/dt = \frac{(t-1)'\sqrt{t} - (t-1)(\sqrt{t})'}{t} = \frac{\sqrt{t} - \frac{t-1}{2\sqrt{t}}}{t}$, что упрощается до $ds/dt = \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}$.

3. Производная $C_2(s)$ будет:

$$C_2'(s) = \left(\frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t)\right)' = -\frac{3}{2}t^{-5/2} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t) - sC_1'(t).$$

Подставляя это, получаем

$$-\frac{3}{2}t^{-5/2} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t) - sC_1'(t) + C_1(t) + (t - 1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

4. Перепишем уравнение:

$$(t - 1 - s)C_1'(t) + \left(1 - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}\right)C_1(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{3}{2}t^{-5/2}.$$

Так как $s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, имеем $t - 1 - s = \frac{(t-1)(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}$.

5. Разделяем переменные и интегрируем уравнение относительно $C_1(t)$:

$$C_1'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

6. Подставляем $C_1(t)$ в уравнение для $C_2(s)$ и находим $C_2(s) = 0$.

Подставляя найденные функции, получаем решение:

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y}.$$

Ответ: $u = \frac{x^2}{y}$.