

Вариант 12

Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x - 9u = -9(x + y)$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - 4dx dy + 13(dx)^2 = 0$$

$$D = 16(dx)^2 - 52(dx)^2 = -36(dx)^2 < 0$$

Значит, уравнение эллиптического типа

$$dy = \frac{4 \pm 6i}{2} dx \Rightarrow y - \frac{4 \pm 6i}{2} x = C$$

$$\xi = y - 2x, \xi_x = -2, \xi_y = 1$$

$$\eta = 3x, \eta_x = 3, \eta_y = 0$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -2u_\xi + 3u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{xx} = -2u_{\xi\xi}\xi_x - 2u_{\xi\eta}\eta_x + 3u_{\eta\xi}\xi_x + 3u_{\eta\eta}\eta_x = 4u_{\xi\xi} - 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = (u_y)_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x = -2u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y = u_{\xi\xi}$$

Вычислим коэффициенты:

$$u_{\xi\xi} : 4 - 8 + 13 = 9$$

$$u_{\xi\eta} : -12 + 12 = 0$$

$$u_{\eta\eta} : 9$$

$$u_\xi = -6$$

$$u_\eta = 9$$

Имеем

$$9u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 6u_\xi + 9u_\eta - 9u = -9(\xi + \eta)$$