历年试题第一章

1、 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$， A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $A^*=$（ B ）

A. $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

【解答】答案选 B. A^* 为 A 的代数余子式构成的。

$$A_{11}=4,\ A_{12}=-3,\ A_{21}=-2,\ A_{22}=1,\ A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

2、n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} & & & a_{1,n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdots & & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$ 的值为（ C ）

$\frac{n(n-1)}{2}$

A. $a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$　　　　B. $-a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$

C. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$　　　　D. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$.

【解答】答案选 C.副三角行列式的公式。

3、设 A,B 均为 2 阶矩阵， A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，若 $|A|=\frac{1}{2},|B|=\frac{1}{3}$， 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} & A\\ B & \end{pmatrix}$ 的逆阵为(　　　　　　　　).

(A) $\begin{pmatrix} & 3B^*\\ 2A* & \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} & 2B^*\\ 3A* & \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} & 3A^*\\ 2B* & \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} & 2A^*\\ 3B* & \end{pmatrix}$

【解答】答案选 A. $\begin{pmatrix} & A\\ B & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & B^{-1}\\ A^{-1} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \frac{B^*}{|B|}\\ \frac{A^*}{|A|} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & 3B^*\\ 2A^* & \end{pmatrix}$

4、 设 A 为 n阶 可逆矩阵，则 $(A^*)^{-1}$ 为(　　　　　　　　) .

(A) $\frac{A}{|A|}$　(B) $\frac{A^*}{|A|}$　(C) $\frac{A}{|A^*|}$　(D) $|A^{-1}|A^{-1}$

【解答】答案选 A. $\because AA^*=|A|I\ \therefore \frac{A}{|A|}A^*=I\ \therefore (A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$.

5、设 n 阶方阵 A 的秩 $R(A)\le n-1$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $\left|A^*\right|=$ ____________ .

【解答】$\because R(A)\le n-1,\therefore |A|=0,\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=0$。

6、设 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=n$，则 $R(A^*)=$__________.

【解答】$\because R(A)=n,\therefore |A|\ne 0,\left|A^*\right|=|A|^{n-1}\ne 0,\therefore R(A^*)=n$

7、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}X+2I$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵,求矩阵 X .

【解答】$AA^*X=AA^{-1}X+2AI\to |A|IX=IX+2A\xrightarrow{|A|=4}X=\dfrac{2}{3}A$

8、 计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\-1&0&1-a&a\\-1&0&0&1-a\end{vmatrix}$

【解答】

$$D_4=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\-1&0&1-a&a\\-1&0&0&1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1-a&a&0\\0&0&1-a&a\\-a&0&0&1-a\end{vmatrix}$$

$$=1\bullet\begin{vmatrix}1-a&a&0\\0&1-a&a\\0&0&1-a\end{vmatrix}+(-a)\bullet(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1-a&a&0\\0&1-a&a\end{vmatrix}=(1-a)^3+a\bullet a^3=a^4-a^3+3a^2-3a+1$$

9、计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x_1+3&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2+3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n+3\end{vmatrix}$

【解答】

$$D_n\overset{\text{把各列加到第一列,}}{\underset{\text{然后提取公因子}}{=}}\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)\begin{vmatrix}1&x_2&\cdots&x_n\\1&x_2+3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_2&\cdots&x_n+3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)\begin{vmatrix}1&x_2&\cdots&x_n\\0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&3\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)\bullet 3^{n-1}$$

10、已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^{*}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求 B.

【解答】 $\because\left|A^{*}\right|=8\neq 0,\therefore |A|=2,$由$A^{*}ABA^{-1}=A^{*}BA^{-1}+3A^{*}$

$$|A|B\frac{A^{*}}{|A|}=A^{*}B\frac{A^{*}}{|A|}+3A^{*}\text{故}B=\frac{1}{2}A^{*}B+3I$$

$$\text{即}B=6\ \ 2I-A^{*}\ \ ^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$

历年试题第二章

1、计算 A^{2012}，其中 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$，则$A^{2012}=$(　　　　　　　　　　)。

(A) A　　(B) $6A$　　(C) $6^{2011}A$　　(D) $6^{2012}A$

【解答】答案选 C.

$$A^{2012}=A\cdot A\cdots A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}6^{2011}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}=6^{2011}A$$

2、设 A、B、C 均为可逆矩阵，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A&O\\B&O&O\\O&O&C\end{pmatrix}$ 的逆阵为 (　　　　　　　　) .

（A）$\begin{pmatrix}O&A^{-1}&O\\B^{-1}&O&O\\O&O&C^{-1}\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}O&B^{-1}&O\\A^{-1}&O&O\\O&O&C^{-1}\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}A^{-1}&&\\&B^{-1}&\\&&C^{-1}\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}C^{-1}&O&O\\O&O&B^{-1}\\O&A^{-1}&O\end{pmatrix}$

【解答】答案选 B. 令$M_{1}=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix},M_{1}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix},$

则$\begin{pmatrix} O & A & O \\ B & O & O \\ O & O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} & O \\ A^{-1} & O & O \\ O & O & C^{-1} \end{pmatrix}$

3、已知n阶矩阵A满足$A^2+2A-3I=O$，则 $A+4I\ ^{-1}=$________________.

【解答】 $A+4I\ \ (A-2I)+5I=O \Rightarrow\ A+4I\ ^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2I)$.

4、设矩阵A是n阶方阵,I为n阶单位阵，$A+I$可逆,且$f(A)=\ I-A\ \ I+A\ ^{-1}$，

证明：(1) $I+f(A)\ \ I+A\ =2I,$ (2)$f\ \ f(A)\ =A$.

【解答】(1) $I+f(A)\ \ I+A\ =\ I+\ I-A\ \ I+A\ ^{-1}\ \ I+A\ =\ I+A\ +\ I-A\ =2I.$

$$(2)f\ \ f(A)\ =\ I-f(A)\ \ I+f(A\ )^{-1}=\ I-f(A)\ \frac{1}{2}\ I+A$$

$$=\frac{1}{2}\ I-(I-A)(I+A)^{-1}\ \ I+A\ =\frac{1}{2}\ I+A\ -\frac{1}{2}\ I-A\ =A.$$

历年试题第三章

1、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$可用向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表示，记$R(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=r_1$,

$R(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)=r_2$, $R(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)=r_3$，则（ ）

A. $\min\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$ B. $r_1\le r_2\le r_3$ C. $r_1\le r_2=r_3$ D. $r_1<r_2\le r_3$.

【解答】答案选 C.

记$I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;II:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t;III:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

由I可由II线性表出，得$r_1\le r_2$，并且得出II与III相互线性表出，即等价，则$r_2=r_3$.

2、已知向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则下列说法正确的是( ).

（A）α必可由β,γ,δ 线性表示； （B）β必不可由α,γ,δ 线性表示；

（C）δ必可由α,β,γ 线性表示； （D）δ必不可由α,γ,β 线性表示 .

【解答】答案选 C.

由向量组α,β,γ线性无关，则α,β线性无关，又由α,β,δ线性相关，则δ可由α,β线性表出，当然δ必可由α,β,γ 线性表示。

3、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+k\alpha_1$,

则 $k=$______时，β_1,β_2,β_3线性相关.

【解答】利用定义，拆项重组，设有不全为零的一组数k_1,k_2,k_3使$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$$\text{即}\ k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+k\alpha_1)=0$$

$$\text{亦即}\ (k_1+kk_3)\alpha_1+(2k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，必须$\begin{cases}k_1+kk_3=0\\2k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$，由于$k_1,k_2,k_3$不全为零，即方程组由非零解，则$\begin{vmatrix}1&0&k\\2&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}.$

4、 已知向量组$\alpha_1=(0,1,1,2),\alpha_2=(3,0,4,-6),\alpha_3=(1,-1,2,1),\alpha_4=(1,-2,2,2),$试求向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组表示.

【解答】 $(\alpha_3',\alpha_1',\alpha_4',\alpha_2')=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\-1&1&-2&0\\2&1&2&4\\1&2&2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&8\\0&1&0&-2\\0&0&1&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，秩为 3，

取其一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$， 则$\alpha_2=-2\alpha_1+8\alpha_3-5\alpha_4$

或者

对$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4')$进行初等行变换,极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$则$\alpha_4=-\dfrac{2}{5}\alpha_1-\dfrac{1}{5}\alpha_2+\dfrac{8}{5}\alpha_3$

对$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_4',\alpha_3')$进行初等行变换，极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$则$\alpha_3=\dfrac{1}{4}\alpha_1-\dfrac{1}{8}\alpha_2+\dfrac{5}{8}\alpha_4$

对$(\alpha_3',\alpha_4',\alpha_2',\alpha_1')$进行初等行变换,极大无关组为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$则$\alpha_1=-\dfrac{1}{2}\alpha_2+4\alpha_3-\dfrac{5}{2}\alpha_4$