南京农业大学试题纸

本试卷适应范围 管理类、工科类

2018-2019 学年 第一学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH2115-02 课程名 概率论与数理统计A 学分 4

学号 ______ 姓名 ______ 班级 ______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											
阅卷人											
核分人											

附表：

$\Phi(1.244)=0.890$ $\Phi(1.5)=0.933$ $Z_{0.025}$或$u_{0.025}=1.96$ $Z_{0.05}$或$u_{0.05}=1.65$

$F_{0.05}(1,10)=4.964$ $F_{0.05}(10,1)=241.882$

$t_{0.025}(9)=2.262$ $t_{0.025}(8)=2.306$ $t_{0.05}(9)=11.833$ $t_{0.05}(8)=1.86$

$\chi^2_{0.025}(9)=19.02$ $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$ $\chi^2_{0.975}(9)=2.7$ $\chi^2_{0.975}(8)=2.18$

$\chi^2_{0.05}(9)=16.92$ $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$ $\chi^2_{0.95}(9)=3.33$ $\chi^2_{0.95}(8)=2.733$

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设事件 A 与 B 满足: $P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$，则下列结论正确的是【　　】

A. A 与 B 相互独立　　B. A 与 B 互斥

C. $B\supset A$　　D. $P(A+B)=P(A)+P(B)$

2. 在假设检验中，显著性水平 α 表示为【　　】

A. 犯第 II 类错误的概率　　B. $P(\text{接受}H_0 \mid H_0\text{为假})$

C. $P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真})$　　D. 无具体含义

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$，则 $P\left(|X-EX|\geq 2\sqrt{DX}\right)$ 等于【　　】

A. $\dfrac{9-8\sqrt{2}}{9}$　　B. $\dfrac{6+4\sqrt{2}}{9}$　　C. $\dfrac{6-4\sqrt{2}}{9}$　　D. $\dfrac{9+8\sqrt{2}}{9}$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是【　　】

A. $F_Z(z)=F_X(z)$　　B. $F_Z(z)=F_Y(z)$

C. $F_Z(z)=\min\left(F_X(z),F_Y(z)\right)$　　D. $F_Z(z)=1-\left(1-F_X(z)\right)\left(1-F_Y(z)\right)$

5. 设总体 X~ N(μ,σ^2),其中σ^2未知，若样本容量 n 和置信度 1-α 均不变，则对于不同的样本观测值，总体均值 μ 的置信区间的长度与样本标准差 S 的关系为【　　】

A. 当 S 较大时，区间长度也较大　　B. 当 S 较大时，区间长度应较小

C. 区间长度与 S 无关　　D. 不能确定

二、填空题 (每题 3 分，共 15 分)

1. 非退化随机变量 $X_i(i=1,2,\ldots,n)$ 独立同分布，方差为σ^2，$\overline{X}$ 是样本均值，则 $D(X_1-\overline{X})=$ ________

2. 设随机变量 $X\sim t(10)$，已知 $P(X^2\le C)=0.05$，则 $C=$ ________________.

3. 10 个球中有 3 个红球 7 个绿球，随机地分给 10 个小朋友，每人一球，则最后三个分到球的小朋友中恰有一个得到红球的概率为________________.

4. 设某种清漆干燥时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ (单位: 小时)，取 $n=9$ 的样本，得样本均值和方差分别为 $\overline{X}=6.3$，$S^2=0.36$，则 μ 的置信度为 95%的双侧置信区间为____________________,σ 的置信度为 95%的双侧置信区间为________________________.

5. 已知 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1\sim N(1,2),X_2\sim N(0,3),X_3\sim N(2,1)$，则 $P(0\le X_1+X_2+X_3\le 6)=$

________________.

三、计算题 (共 70 分)

1. (8 分) 一种新方法对某种特定疾病的诊断准确率为 90%. 如果群体中这种病的发病率为 0.1%，甲在身体普查中被诊断患有这种病，问甲的确患有这种疾病的概率是多少?

2. (8 分) 某螺丝钉厂的废品率为 0.01，利用中心极限定理，问一盒中应装多少只螺丝钉才能使其中至少含有 100 个合格品的概率不小于 95%?

3.(10 分) 已知炼铁厂在生产正常情况下，铁水含碳量均值为 7，方差为 0.03，现测了 10 炉铁水，测得其平均含碳量为 6.97，方差为 0.0375，设铁水含碳量服从正态分布，试问生产是否正常($\alpha = 0.05$)?

4.(12 分) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，X_1，X_2，...，X_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，求

(1) λ 的矩估计. (2) λ 的最大似然估计.

(3) 试证：对任意常数 k，统计量 $k\overline{X}+(1-k)S^2$ 是 λ 的无偏估计量.

5.(16 分)设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases} k, 0<x<1, 0<y<x \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，求

(1)常数 k. (2) X 和 Y 的边缘概率密度. (3)判断 X 和 Y 是否独立. (4) $E(XY), D(XY)$

6.(16分) 事件 A 和 B 满足 $P(A)=1/4, P(B|A)=1/3, P(A|B)=1/2$，令

$$X=\begin{cases}1, A\text{发生},\\ 0, A\text{不发生},\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, B\text{发生},\\ 0, B\text{不发生},\end{cases}$$

求 (1) (X,Y) 的联合分布律．(2) ρ_{XY}．(3) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布．

系主任 李 强　　　　出卷人 温阳俊

2018-2019-1-AMATH2115-02 概率论与数理统计 A

一．选择题(15 分，每题 3 分)1.A　2. C　3. C　4. D　5. A

二．填空题（15 分，每题 3 分，第 4 题，只对一个空得 2 分）

1. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\sigma^2$

2. $F_{0.95}(1,10)=\dfrac{1}{F_{0.05}(10,1)}$=0.00413

3. $\dfrac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}$=0.525

4. $(5.839,6.761)$，$(0.374,1.060)$

5. $2\Phi(\dfrac{\sqrt{6}}{2})-1=0.779$

三．解答题(70 分)

1. (8 分)解：设 A:甲患有这种疾病，B：甲被诊断患有这种疾病.

则 $P(A)=0.001, P(B\mid A)=0.9, P(B\mid\bar{A})=1-P(\bar{B}\mid\bar{A})=1-0.9=0.1$　(2 分)

由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)\times P(A)}{P(B\mid A)\times P(A)+P(B\mid\bar{A})\times P(\bar{A})}=\frac{0.9\times0.001}{0.9\times0.001+0.1\times0.999}=0.89\%$$ (6 分)

2. (8 分)解：设一盒中装有 n 只螺丝钉，其中合格品数为 X，则 $X\sim b(n,0.99)$　(2 分)

$$P(X\geq100)\geq0.95, P\left(\frac{X-n\times0.99}{\sqrt{n\times0.99\times0.01}}<\frac{100-n\times0.99}{\sqrt{n\times0.99\times0.01}}\right)<0.05=\Phi(-1.65)$$ (2 分)

由中心极限定理得

$\dfrac{100-n\times0.99}{\sqrt{n\times0.99\times0.01}}\leq-1.65, n\geq102.69$，所以每盒中至少装 103 个螺丝钉　(4 分)

3. (10 分)解：(1) 假设检验：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$　(1 分)

拒绝域为 C：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　(1 分)

其中，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times 0.0375}{0.03}=11.25$，

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=\chi^2_{0.025}\left(9\right)=19.02$ $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=\chi^2_{0.975}\left(9\right)=2.7$

因为 $2.7<11.25<19.02$ (2 分)

所以落在接受域里，接受 H_0，认为方差为 0.03. (1 分)

(2) 假设检验：$H_0:\mu=\mu_0=7, H_1:\mu\neq\mu_0$ (1 分)

拒绝域 $C:|Z|=\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ (1 分)

其中，$|Z|=\left|\dfrac{6.97-7}{\sqrt{0.03}/\sqrt{10}}\right|=0.548$，$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$，

因为 $0.548<1.96$ (2 分)

故落在接受域里，接受 H_0，认为均值为 7，故认为生产正常. (1 分)

4. (12 分)解：

(1)由 $\bar{X}=E\left(X\right)=\lambda$，所以 $\lambda_1=\bar{X}$ (4 分)

(2)由 X 的概率密度 $f\left(x,\lambda\right)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,\ldots$，得到 λ 的似然函数为

$$L\left(\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\lambda\right)=e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$\ln L=-n\lambda+(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

.

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$$

$\therefore \lambda_2=\bar{X}$

(4 分)

(3)因为 $E\left(\bar{X}\right)=E\left(X\right)=\lambda, D(S^2)=D(X)=\lambda, \therefore E(k\overline{X}+(1-k)S^2)=\lambda$，

所以 $k\overline{X}+(1-k)S^2$ 是 λ 的无偏估计量. (4 分)

5.(16 分)(1) $k=2$ (4 分)

(2) $f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ (4 分)

(3) $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以 X 和 Y 不独立. (4 分)

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^x 2ydy=0.25$$

(4) $$E(XY)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_0^x 2y^2dy=\frac{1}{9}$$ (4 分)

$$D(XY)=E(XY)^2-E^2(XY)=0.049$$

6. (16 分)解：

(1) X,Y 的分布律分别如下表(6 分)：

$X\backslash Y$	0	1	$P_{\bullet j}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$P_{i\bullet}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	

(2) $\rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{15}}$ (5 分)

(3) $Z=X^2+Y^2$ 分布律为(5 分)：

$Z=X^2+Y^2$	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$