2018-2019 学年第 1 学期《离散数学》B 试卷答案

一、选择题每题(2 分，共 20 分）

1. A　2. D　3. C　4. C　5. A　6. D　7. B　8. A　9. D　10. C

二、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1．p,q 均为 0；2. $\left((p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)\right)\uparrow\left(r\uparrow r\right)$；3. 011,111; Σ (0,1,2,4,5,6)；

4. $(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$；

5. $\{<a,c>,<a,f>,<c,f>,<b,d>,<b,f>,<d,f>\}\cup I_A, f$;

6. $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$, 或$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$；7. $(P(a)\vee P(b)\vee P(c))\wedge(Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c))$；

8. 10,48；9. {2, 3, 4}，{1, 2, 3, 4}；10. {2, 3}, {<1, 3>}.

三、解答题（本大题共 3 小题，共计 23 分）

1. $(p\leftrightarrow q)\to r\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)\vee r$　　2 分

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee r$　　3 分

$\Leftrightarrow m_{01X}\vee m_{10X}\vee m_{XX1}$

$\Leftrightarrow m_{010}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$\Leftrightarrow\sum(1,2,3,4,5,7)$（主析取范式）　　5 分

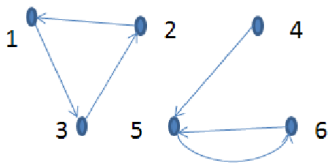
$\Leftrightarrow\prod(0,6)$（主合取范式）　　7 分

2. $\forall x(P(x)\to\forall y(Q(x,y)\to\neg\exists zR(y,z)))\Leftrightarrow\forall x(P(x)\to\forall y(Q(x,y)\to\forall z\neg R(y,z)))$　　2 分

$\Leftrightarrow\forall x(P(x)\to\forall y\forall z(Q(x,y)\to\neg R(y,z)))$　　4 分

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z\,(P(x)\to(Q(x,y)\to\neg R(y,z)))$　　6 分

3. （1）关系 R 的关系矩图为



2 分

（2）关系 R 的关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$　　4 分

（3）关系 R 的自反闭包为

r(R)=R∪I_A={<1,3>,<2,1>,<3,2>,<4,5>,<5,6>,<6,5>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>} 6 分

关系 R 的对称闭包为

s(R) =R∪R^{-1}={<1,3>,<3,1>,<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<4,5>,<5,4>,<5,6>,<6,5>}　　8 分

关系 R 的传递闭包为

$R^2=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<4,6>,<5,5>,<6,6>\}$，$R^3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,5>,<5,6>,<6,5>\}$

$R^4=\{<1,3>,<2,1>,<3,2>,<4,6>,<5,5>,<6,6>\}$，$R^5=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,5>,<5,6>,<6,5>\}=R^3$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,<4,5>,$
$<4,6>,<5,5>,<5,6>,<6,5>,<6,6>\}$ 10 分

五、证明题（本大题共 4 小题，共计 27 分）

1.（1）先将命题 0 元谓词化

设 $Q(x)$：x 是有理数，$N(x)$：x 是无理数，$R(x)$：x 是实数, $C(x)$: x 是虚数。

前提：$\forall x(Q(x)\to R(x))$, $\forall x(N(x)\to R(x))$, $\forall x(C(x)\to\neg R(x))$

结论：$\forall x(C(x)\to(\neg Q(x)\wedge\neg N(x)))$ 2 分

（2）证明:

① $\forall x(Q(x)\to R(x))$ 前提引入

② $\forall x(N(x)\to R(x))$ 前提引入

③ $\forall x(C(x)\to\neg R(x))$ 前提引入

④ $Q(y)\to R(y)$ ①∀-

⑤ $C(y)\to\neg R(y)$ ③∀-

⑥ $N(y)\to R(y)$ ②∀-

⑦ $\neg R(y)\to\neg Q(y)$ ④置换

⑧ $\neg R(y)\to\neg N(y)$ ⑥置换

⑨ $C(y)\to\neg Q(y)$ ⑤⑦假言三段论

⑩ $C(y)\to\neg N(y)$ ⑤⑧假言三段论

(11) $(C(y)\to\neg Q(y))\wedge(C(y)\to\neg N(y))$ ⑨⑩合取

(12) $C(y)\to(\neg Q(y)\wedge\neg N(y))$ (11)置换

(13) $\forall x(C(x)\to(\neg Q(x)\wedge\neg N(x)))$ (12)∀+ 7 分

2．证明:

由 R 是 X 上的偏序关系，且 $A\subseteq X$,可得 $I_A\subseteq I_X\subseteq R$, $I_A\subseteq A\times A$,由此可得 $I_A\subseteq R\cap(A\times A)$, 即关系 $R\cap(A\times A)$是 A 上的自反关系． 2 分

$\forall x,y\in A$, 若$\langle x,y\rangle\in R\cap(A\times A)$且$\langle y,x\rangle\in R\cap(A\times A)$，得$\langle x,y\rangle\in R$ 且$\langle y,x\rangle\in R$,由 R 是偏序关系可知，R 为反对称的，由此可得 x=y,所以 $R\cap(A\times A)$为 A 上的反对称的关系． 4 分

$\forall x,y,z\in A$, 若$\langle x,y\rangle\in R\cap(A\times A)$且$\langle y,z\rangle\in R\cap(A\times A)$，得$\langle x,y\rangle\in R$ 且$\langle y,z\rangle\in R$,由 R 是偏序关系可知，R 为传递的，由此可得$<x,z>\in R$,又$<x,z>\in A\times A$, 故$\langle x,z\rangle\in R\cap(A\times A)$,所以 $R\cap(A\times A)$为 A 上的传递的关系． 6 分

综合以上可知，$R\cap(A\times A)$ 是 A 上的偏序关系． 7 分

3. **证明：(1)对任意** y**,若**

$$
\begin{aligned}
y\in f(A\cup B) &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cup B\wedge y=f(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x((x\in A\vee x\in B)\wedge y=f(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge y=f(x))\vee(x\in B\wedge y=f(x)))\\
&\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y=f(x))\vee\exists x(x\in B\wedge y=f(x))\\
&\Leftrightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B)\\
&\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)
\end{aligned}
$$

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ 3 分

(2)对任意 y**,若**

$$
\begin{aligned}
y\in f(A\cap B) &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cap B\wedge y=f(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge x\in B)\wedge y=f(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge y=f(x))\wedge(x\in B\wedge y=f(x)))\\
&\Rightarrow \exists x(x\in A\wedge y=f(x))\wedge\exists x(x\in B\wedge y=f(x))
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$
$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

所以 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ **7 分**

4. 证明：(1) 对任意 $x_1, x_2 \in A$，若 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$，即 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，又 $g: B \to C$ 是双射，所以 $f(x_1) = f(x_2)$，又由 $f: A \to B$ 是双射，从而得 $x_1 = x_2$，故 $f \circ g: A \to C$ 是单射的。 3 分

（**2**）对任意 $z \in C$，由于 $g: B \to C$ 是双射的，所以存在 $y \in B$, 使得 $g(y) = z$，又 f 为 $A \to B$ 的双射，存在 $x \in A$, 使得 $y = f(x) \in B$，从而有，存在 $x \in A$, 使得 $f \circ g(x) = g(f(x)) = g(y) = z$，所以，$f \circ g: A \to C$ 是满射的。

故 $f \circ g: A \to C$ 是双射的.