历年试题第四章

一．选择题

1、已知 $R(A_{m\times n})=n-1$， α_1,α_2 是 $AX=b(b\neq 0)$ 的两个不同解，记 k 为任意常数，则 $AX=b$ 的通解为（　　　）

（A） $\alpha_1+k(\alpha_1+\alpha_2)$　　　　　　（B） $\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}+k(\alpha_1-\alpha_2)$

（C） $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$　　　　　　　（D）$\alpha_1+k_2\alpha_2$ ．

【解答】答案选（B）.　非齐次线性方程组的通解为其一个特解+其对应的齐次的通解 .

（A）$\alpha_1+k(\alpha_1+\alpha_2)$中$(\alpha_1+\alpha_2)$不是齐次的解，　（$B$） $\alpha_1+k_2\alpha_2$中α_2不是齐次的解，

（C）中的$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$形式是齐次的通解形式.

2、非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ ax_1+bx_2=c\\ a^2x_1+b^2x_2=c^2\end{cases}$，在$a$、$b$、$c$互不相等时是否有解？（　　）

（A）　无解　　　　　　　　　　　　（B）有唯一解

（C）有无穷多解　　　　　　　　　　（D）有解，具体情况根据a、b、c取值而定

【解答】答案选（A）.　　非齐次线性方程组解的情况是由$R(A)$与$R(A,b)$来决定的。

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)\neq 0\Rightarrow R(A,b)=3.$$

$$A=\begin{vmatrix}1&1\\a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}\quad R\left(A\right)\quad \min\left\{2,3\right\}=2$$

由于$R(A_{3\times 2})<R(A,b)$，故方程组无解.

3、设A为$m\times n$矩阵，则齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解的充分条件是(　　　)

（A） A的列向量组线性无关;　　　　（B）A的列向量组线性相关;

（C） A的行向量组线性无关;　　　　（D）A的行向量组线性相关 .

【解答】答案选（A）.

齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解的充分条件是$R(A)$=n ，而矩阵A的列向量组是n个向量，秩为n，所以矩阵A的列向量组线性无关，反之亦然;

题目中没有关于m与n的关系，故行向量组的相关性无从判定.

4、设 A 为 3 阶方阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{vmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{vmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=($　　$)$.

$(A)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$；　$(B)\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$；　$(C)\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$；　$(D)\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$.

【解答】答案选 (B).

法一：$P^{-1}AP=\begin{matrix}1&&\\&1&\\&&2\end{matrix}$　$AP=P\begin{matrix}1&&\\&1&\\&&2\end{matrix}$　$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}1&&\\&1&\\&&2\end{matrix}$

$\Rightarrow(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3)\Rightarrow A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=2\alpha_3$，

$\Rightarrow AQ=(A(\alpha_1+\alpha_2),A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}$

$=Q\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}$，故 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.

法二：$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{matrix}=P\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{matrix}$

$$Q^{-1}AQ=\left(P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}\left(P^{-1}AP\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}.$$

法三：分析可知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是 A 对应于 $1,1,2$ 的特征向量，

则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是 A 对应于 $1,1,2$ 的特征向量，

则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.

5、已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同解，其 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 2 & t & -1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$，则 $t=$______

【解答】非齐次线性方程组有两个不同解，即为有无穷多解，则 $R(A)=R(A,b)<3$，

$$\text{则}\left(A,b\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -1 & t & -1\\ 2 & t & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -5 & t+4 & -3\\ 0 & t-4 & -3 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{-5}{t-4}=\frac{-3}{-3}\Rightarrow t=-1.$$

6、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & t\\ 1 & t & 0\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，$AB=O$，则 $t=$______________ .

【解答】令 $B=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right), AB=O\Rightarrow A\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=O\Rightarrow\left(A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3\right)=O$

$\Rightarrow A\beta_i=O, i=1,2,3$.即 B 的每个列向量是 $Ax=O$ 的解向量.

由于 $B\neq O$,则至少有一个 $\beta_i\neq O$，则方程组有非零解，

由克莱姆法则可得 $|A|=0\Rightarrow t=1.$

7、已知向量组 $\alpha_1=(1,4,0,2)', \alpha_2=(2,7,1,3)', \alpha_3=(0,1,-1,a)', \beta=(3,10,b,4)'$

问：当 a,b 满足什么条件时，(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式唯一，并写出此表示式；

(2) β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；(3) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一 .

【解答】设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，

$$\text{即}\begin{cases}x_1+2x_2=3\\ 4x_1+7x_2+x_3=10\\ x_2-x_3=b\\ 2x_1+3x_2+ax_3=4\end{cases},\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 7 & 1 & 10\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 2 & 3 & a & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{pmatrix}$$

(1) $b=2$ 且 $a\neq 1$ 时，方程组有唯一解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，表示式唯一 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$

(2)当 $b\neq 2$ 时，方程组无解，β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(3)当 $b=2$ 且 $a=1$ 时，方程组有无穷多解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一 .

8、已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，其中 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，试求 a、c 的值并写出 $Ax=b$ 的通解 .

【解答】 $Ax=b$ 有无穷多解，所以 $R(A)=R(A|b)<3$，故 $|A|=0$，

即 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2(a+1)=0$，所以 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，此时 $R(A)=1\neq R(A|b)=2$，$AX=b$ 无解 .

当 $a=-1$ 时，$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & c+1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c+2 \end{array}\right)$，由于 $R(A)=R(A|b)<3$，所以 $c=-2$，

综上得 $a=-1, c=-2$ 时方程组有无穷多解，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c+2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1-x_3=\dfrac{3}{2} \\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ x=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^T+k(1,0,1)^T(k\in R)$.

备注：解的形式不唯一.

9、设矩阵 A 是 n 阶方阵，A^* 为方阵 A 的伴随阵，且 $R(A)=n-1,$，**证明** $R(A^*)=1$ **.**

【解答】 $\because R(A)=n-1, \therefore |A|=0,$ 即 $AA^*=|A|I=0.$

记 $A^*=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 α_i 为 $Ax=0$ 的解，可由基础解系表示，

而 $Ax=0$ 的基础解系中只含有 $n-R(A)=n-(n-1)=1$ 个向量，

$\therefore R(A^*)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leq 1,$

由 $R(A)=n-1$ 可知，A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，即 $R(A^*)\geq 1$，

故 $R(A^*)=1$.

历年试题第五章

1、设$\alpha=(a,b,c),\beta=(e,f,g)$,若$\alpha^T\beta$相似于$\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，则$\beta$与$2\alpha$的内积为(　　)

（A） 0　　（B） 3　　（C） 6　　（D） 9

【解答】答案选（C）.

利用相似矩阵的特征值相同，且矩阵的迹(对角线上元素之和)等于所有特征值的和.

$\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}ae & af & ag\\ be & bf & bg\\ ce & cf & cg\end{pmatrix}$,且$\alpha^T\beta$的特征值为$0,0,3$，则$ae+bf+cg=0+0+3=3.$

故$(2\alpha,\beta)=2(ae+bf+cg)=2\times3=6.$

2、设4阶矩阵A的元素全为1，则A的特征值为 (　　　　)

(A) 1，1，1，1;　(B) 4，0，0，0;　(C) 1，1，0，0;　(D) 1，0，0，0 .

【解答】答案选（B）.

法一：$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},|A|=0$，所以$A$至少有一个特征值为 0，

由于矩阵A的所有特征值的和为对角线上元素之和 4，且所有特征值的乘积是$|A|$，故答案选 B.

法二：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-\lambda)^3=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\lambda_4=4.$

故答案选 B.

3、设3阶矩阵A的特征值为$-1,1,2$，则下列矩阵中可逆阵为 (　　　　)

(A) $I-A$;　(B) $I+A$;　(C) $2I-A$;　(D) $2I+A$.

【解答】答案选（D）. 设A的特征值为λ，则$f(A)$的特征值为$f(\lambda)$.

利用方阵的行列式的值是其所有特征值的乘积，故$|I-A|=2\times0\times(-1)=0$，$|I+A|=0\times2\times3=0$，

$|2I-A|=3\times1\times0=0$，$|2I+A|=1\times3\times4=12\neq0$，

4、设 A 为 2 阶方阵，α_1,α_2 为线性无关的2维列向量，$A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为（ ）

（A）1； （B）2； （C）3； （D）4 .

【解答】答案选 A:

$A\left(2\alpha_1+\alpha_2\right)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+A\alpha_2=A\alpha_2=1\cdot\left(2\alpha_1+\alpha_2\right)$ ，所以 1为矩阵 A 的特征值.

5、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+kx_2x_3$ 为正定二次型，则 k 的取值范围为__________.

【解答】利用顺序主子式判别法比较简便.

$$A=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{k}{2}\\0&\frac{k}{2}&1\end{vmatrix},\quad 2>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0,\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{k}{2}\\0&\frac{k}{2}&1\end{vmatrix}=1-\frac{k^2}{2}>0\Rightarrow-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

6、设 4 阶方阵 A 满足条件: $\left|3E+A\right|=0, AA^T=2E, \left|A\right|<0$，则_______是 A^* 的一个特征值 .

【解答】设 A 的特征值为 λ，则 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$.

$\left|3E+A\right|=\left|A-\left(-3\right)E\right|=0,$ 得出 A 一个特征值为 -3，

$AA^T=2E,\left|A\right|<0\Rightarrow\left|AA^T\right|=\left|2E\right|\Rightarrow\left|A\right|^2=2^4,\qquad \left|A\right|<0\Rightarrow\left|A\right|=-4$,

故 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$.

7、 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}(a>0)$ 有一个特征值为1，则 $a=$_________.

【解答 1】$\left|\lambda I-A\right|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-a&-2\\0&-2&\lambda-a\end{pmatrix}=\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-a\right)\left(\lambda-a\right)-4\left(\lambda-2\right)$

$$=\left(\lambda-2\right)\left[\left(\lambda-a\right)^2-4\right]=\left(\lambda-2\right)\left[\lambda^2+a^2-2a\lambda-4\right]=0$$

有一个特征值为1，故 $1^2+a^2-2a\cdot1-4=0\Rightarrow a=3.$

【解答 2】$\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为1，

$$\left|A-I\right|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a-1&2\\0&2&a-1\end{vmatrix}=\left(a-1\right)^2-4=\left(a-1+2\right)\left(a-1-2\right)=\left(a+1\right)\left(a-3\right)=0\overset{a>0}{\Rightarrow}a=3$$

8、设实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{4\times 4}$ 满足 $A^2+A=O, R(A)=3$，求证：$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=-3$.

【证明】实对称矩阵 A 的特征值为实数，记为 λ.

由于 A 为 4 阶实对称矩阵，故特征值有 4 个.

由 $A^2+A=O$，得 $\lambda^2+\lambda=O, \lambda=0, \lambda=-1$；

由 $R(A)=3 \Rightarrow R(A-0I)=3 \Rightarrow (A-0I)x=0$ 的基础解系只有一个解向量，故 $\lambda=0$ 为单根，

则 $\lambda=-1$ 为三重根，即 $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1$，

所以. $a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=-3$

9、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y 的取值 .

【解答 1】由 $\left|A-\lambda E\right|=\left(-2-\lambda\right)\left[\left(x-\lambda\right)\left(1-\lambda\right)-2\right]=0$,由 A 的一个特征值 $\lambda=-2, \therefore y=-2$，

当 $\lambda=2$ 时，$\left[\left(x-2\right)\left(1-2\right)-2\right]=0, \therefore x=0$ （或 $\lambda=-1$，$\left[\left(x+1\right)\left(1+1\right)-2\right]=0, \therefore x=0$）

【解答 2】矩阵 A 与 B 相似，则 $\begin{cases} -2+\boldsymbol{x}+1=-1+2+\boldsymbol{y} \\ -2\boldsymbol{x}+4=-2\boldsymbol{y} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=2$，

$\boldsymbol{\lambda}=-1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\left|A+I\right|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-\left(2x+2-2\right)=-2x=0 \quad \Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=-2$

10、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+ax_2{}^2+3x_3{}^2-4x_1x_2-2bx_2x_3 (a,b>0)$ 通过正交变换 $x=Cy$ 化成标准形 $f=-y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2$. （1）求参数 a,b ；（2）求出正交矩阵 C.

【解答】 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & a & -b \\ 0 & -b & 3 \end{pmatrix}$，由 $\begin{cases} 1+a+3=-1+2+5 \\ 3a-(12+b^2)=-1\times 2\times 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

当 $\lambda_1=-1$ 时，$A+E=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore \xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=2$ 时，$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore \xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=5$ 时， $A-5E=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 0\\ -2 & -3 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\therefore\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$

令 $e_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix},e_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$，所求正交矩阵 $C=\left(e_1,e_2,e_3\right)$.

11、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=\left(1-a\right)x_1{}^2+\left(1-a\right)x_2{}^2+2x_3{}^2+2\left(1+a\right)x_1x_2$ 的秩为 2,（1）求 a 的值; （2）求正交变换 $x=Cy$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

【解答】 $A=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix};\left|A\right|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$;

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\left(2-\lambda\right)\left(1-\lambda\right)^2-1=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2,$$

当 $\lambda_1=0,\ A-0I=\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}\to\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\Rightarrow\eta_1=\begin{vmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{vmatrix},$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2,\ A-2I=\begin{matrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\to\begin{matrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\Rightarrow\eta_2=\begin{matrix}1\\ 1\\ 0\end{matrix},\eta_3=\begin{matrix}0\\ 0\\ 1\end{matrix}$

令 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{matrix}-1\\ 1\\ 0\end{matrix},e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{matrix}1\\ 1\\ 0\end{matrix},e_3=\begin{matrix}0\\ 0\\ 1\end{matrix}$，记 $C=\left(e_1,e_2,e_3\right),$

则正交变换 $x=Cy=\left(e_1,e_2,e_3\right)y=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}y$,

将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $f=2y_2^2+2y_3^2$.

12、设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $a_1=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T, a_2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，求(1) A 的特征值和特征向量；　(2)矩阵 A .

【解答】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23}\\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33}\end{pmatrix}$，根据已知条件有 $\begin{cases}\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{12}+\boldsymbol{a}_{13}=3\\ \boldsymbol{a}_{21}+\boldsymbol{a}_{22}+\boldsymbol{a}_{23}=3\\ \boldsymbol{a}_{31}+\boldsymbol{a}_{23}+\boldsymbol{a}_{33}=3\end{cases}$,

可得 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23}\\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 $\alpha_3=\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ 为矩阵A对应于特征值3的特征向量

$\because \alpha_1$，α_2 为 $Ax=0$ 的两个线性无关的解，故 $R(A)\le 3-2=1$，故 $|A|=0$,

$\because |A-0I|=0$，即 $\lambda=0$ 为 A 的特征值，且为二重特征值，α_1，α_2 为其对应的线性无关特征向量.

综上，A 的特征值 $\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_2=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$不同时为$0)$,

A 的特征值 $\boldsymbol{\lambda}_3=3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{k}_3\neq 0)$,

于是 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=(0,0,3\alpha_3)$，

$$\therefore A=(0,0,3\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{matrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\quad\begin{matrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{matrix}^{-1}$$

$$=\begin{matrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\begin{vmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}$$