Solucionaro de Control Automático de Procesos

Ever Vino

9/1/23

Un solucionario para Control Automático

Este es un Solucionario de Control Automático

Part I

Sistemas físicos de primer orden

1 Un calentador que deja de funcionar

Problema 5.1 (Process Dynamics, Modelling and Control - Babatunde, Harmon)

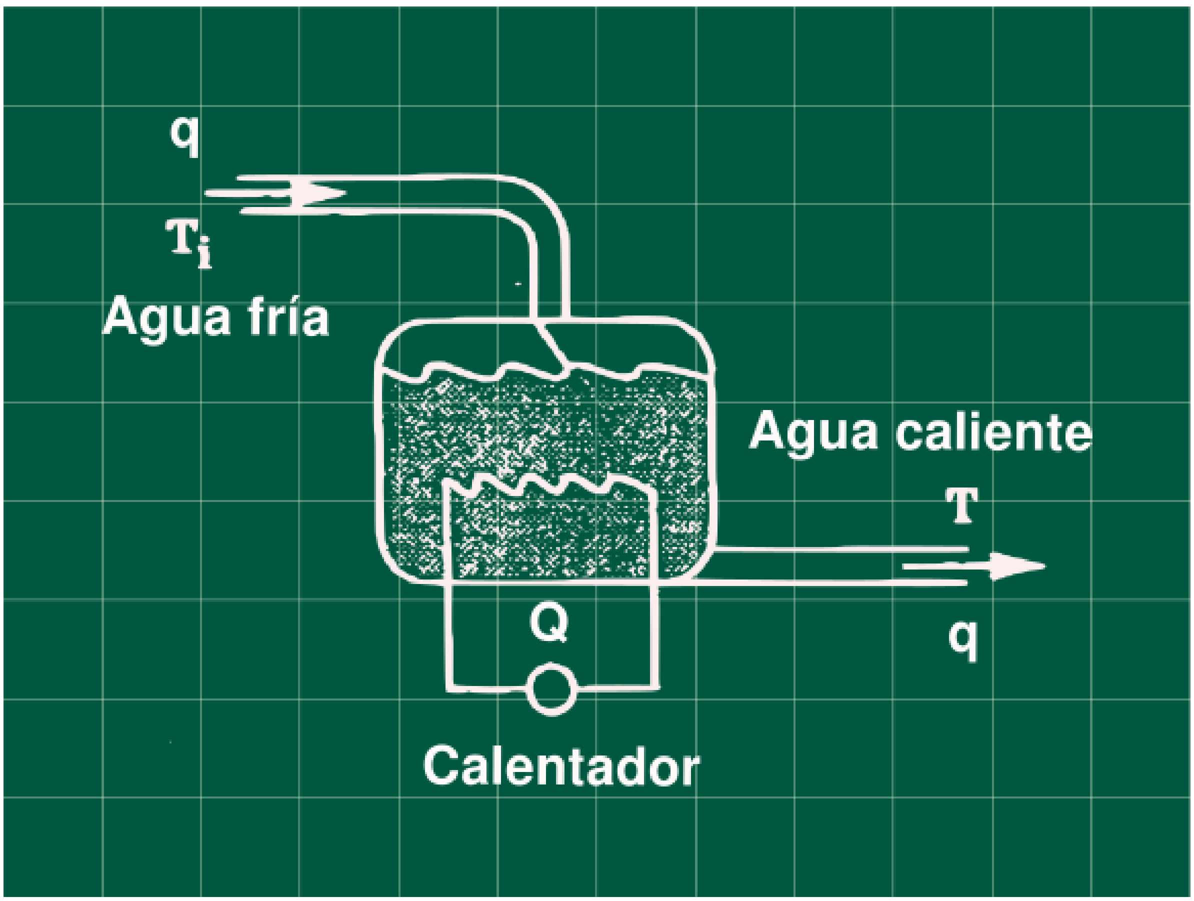


Figure 1.1: Sistema de calentador de agua

Para el proceso mostrado en la figura, un calentador electrico de agua. En un día particular el tanque trabajaba a temperatura de 80 °C, y de repente el calentador se rompe y dejar de suministrar calor, a este tiempo el tanque con 100 L de capacidad operaba con un caudal 10

L/min, la temperatura del agua fria es de 30 °C. Esto pasa durante 5 minutos, luego el calentador detiene el flujo de agua(debido al diseño del calentador). Desarrolle un apropiado modelo matemático para este proceso, y resolviendo la ecuación diferencial encuentre la temperatura del tanque a los 5 minutos

Resolución

Escribiendo nuestro balance de energía

$$\rho C_p V \frac{dT}{dt} = q\rho C_p (T_i - T) + Q \textbf{ .... (1)}$$

Balance en estado estacionario

$$0 = q\rho C_p (T_{is} - T_s) + Q_s \textbf{ .... (2)}$$

Calculamos la ecuación (2) el valor de Q_s que nos a servir luego

$$0 = q\rho C_p (30 - 80) + Q_s$$

$$Q_s = 50 q\rho C_p$$

Restando (1) con (2) y tranformando a variables desviación

$$\rho C_p V \frac{d(T - T_s)}{dt} = q\rho C_p [(T_i - T_{is}) - (T - T_s)] + Q - Q_s$$

$$\rho C_p V \frac{dT'}{dt} = q\rho C_p [T_i' - T'] + Q'$$

Aplicando la transformada de Laplace y despejando la función transferencia

$$\rho C_p V s T'(s) = q\rho C_p [T_i'(s) - T'(s)] + Q'(s)$$

$$\frac{T'(s)}{Q'(s)} = \frac{1}{V\rho C_p s + q\rho C_p} \textbf{ .... (3)}$$

Describimos la perturbación del enunciado sabemos que el calor suministrado baja cero cuando t>0.

$$Q'(t) = Q(t) - Q_s \begin{cases} Q_s - Q_s & \text{si } t < 0 \\ 0 - Q_s & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$Q'(t) = \begin{cases} & \text{si } t < 0 \\ -Q_s & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$Q'(t) = -Q_s$$

Aplicando al transformada de Laplace

$$Q'(s) = -\frac{Q_s}{s}$$

Reemplazando en la ecuacion (3) y sabiendo que $Q_s = 50q\rho C_p$

$$T'(s) = -\frac{50q\rho C_p}{s(V\rho C_p s + q\rho C_p)}$$

Operando y reemplazando valores conocidos $V = 100$ y $q = 10$

$$T'(s) = -\frac{50}{s(Vs + q)} = -\frac{50}{s(10s + 1)}$$

Antitransformando, recuerde $T'(t) = T(t) - T_s$

$$T'(t) = 50(e^{-t/10} - 1)$$

$$T(t) = 50(e^{-t/10} - 1) + 80$$

Hallando la temperatura a t = 5 min

$$T(t = 5) = 50(e^{-5/10} - 1) + 80$$

$$\mathbf{T(t = 5min) = 60.33\ °C}$$

Referencias

- Babatunde, A. O.; Harmon, W. R. (1994). *process dynamics, modeling, and control.* OXFORD UNIVERSITY PRESS. ISBN 0-19-509119-1

2 Un sistema con un tanque, una bomba y una válvula

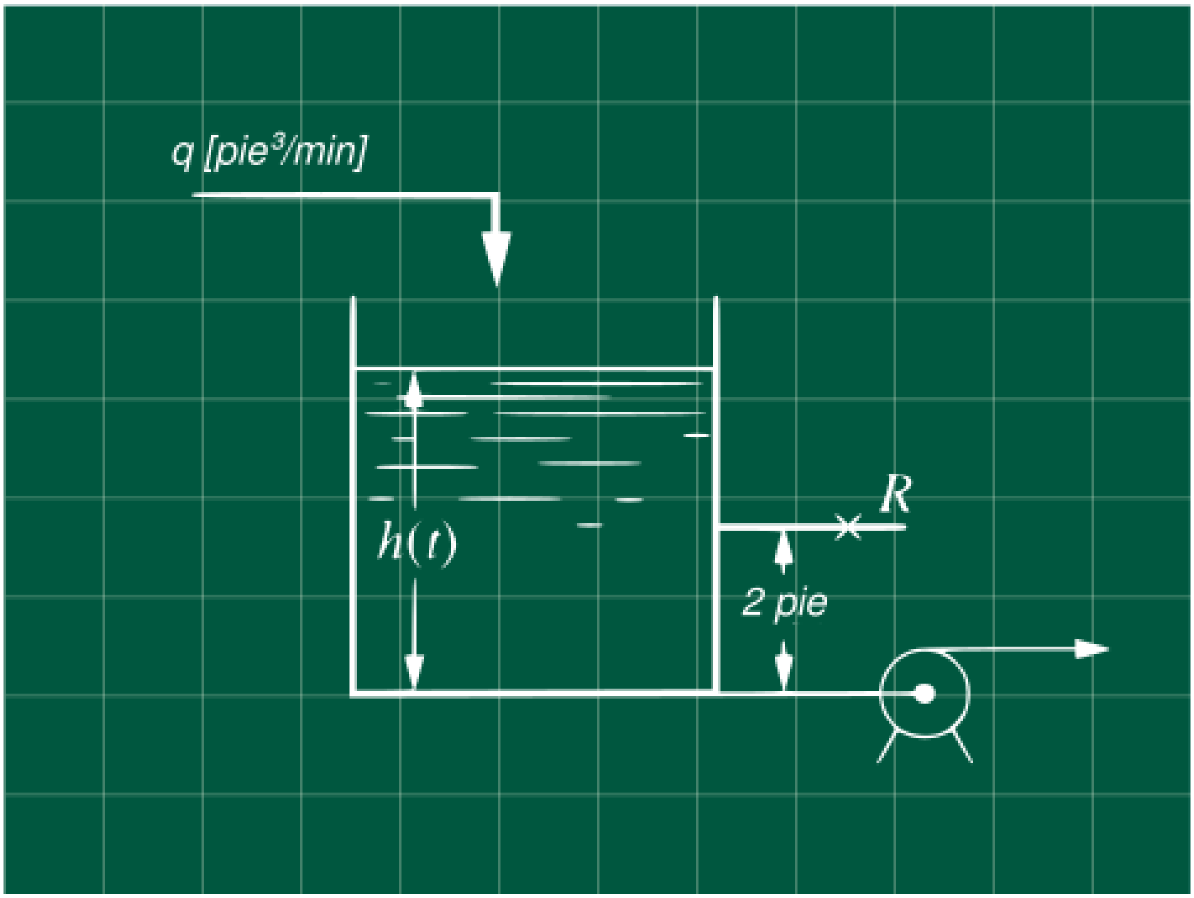


Figure 2.1: Grafico de prob 5.1

Derive la ecuación transferencia H(s)/Q(s) para el nivel del líquido del sistema mostrado en la figura, cuando el tanque opera en estado estacionario a:

- a) $h_s = 1$ pie
- b) $h_s = 3$ pie

La bomba extrae agua a caudal constante de 10 pie^3/min y es independiente del la altura h, El área seccional es $A = 1.0$ pie^2 y la resistencia es $R = 0.5$ pie^3/min.

Resolución

Resolviendo para $h_s = 1$pie

Cuando la altura $h_s = 1$ podemos notar que no existe flujo posible por la válvula, por lo que no lo consideramos en la ecuación transferencia.

Escribiendo las ecuaciones de balance

$$q - q_b = \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}\mathbf{(1)}$$

Ecuacion en estado estacionario

$$q_s - q_b = 0\mathbf{(2)}$$

Restando (1) con (2) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

$$Q = A\frac{dH}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplace, sabiendo que $H(t = 0) = h - h_s = h_s - h_s = 0$ y $A = 1$ pie.

$$Q(s) = A(sH(s) - H(t = 0))$$
$$\frac{\mathbf{H(s)}}{\mathbf{Q(s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}$$

Resolviendo para $h_s = 3$ pie

Cuando $h_s = 3$ el sistema se encuentra operando sobre el nivel de la válvula, por lo que si existe un flujo q_0 que pasa por este.

Aplicando un balance del sistema y sabiendo que $q_0 = h - h_v/R$, donde h_v es la altura de la válvula

$$q - q_0 - q_b = A\frac{dh}{dt}$$
$$q - \frac{h - h_v}{R} - q_b = A\frac{dh}{dt}\mathbf{(3)}$$

Balance en estado estacionario

$$q_s - \frac{h_s - h_v}{R} - q_b = 0\mathbf{(4)}$$

Restando (3) con (4) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s - \frac{h - h_s}{R} = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

$$Q - \frac{H}{R} = A\frac{dH}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplace, sabiendo que $H(t = 0) = h - h_s = h_s - h_s = 0$, $A = 1$ pie y $R = 0.5$ pie/(pie^3/min).

$$Q(s) - \frac{H(s)}{R} = A(sH(s) - H(t = 0))$$
$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1}$$

$$\frac{\mathbf{H(s)}}{\mathbf{Q(s)}} = \frac{\mathbf{0.5}}{\mathbf{0.5s + 1}}$$

Referencias

- Coughanowr, D. R.; LeBlanc, S. E. (2009). *Process Systems Analysis and Control* (3rd edition). McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-339789-4.

3 Un tanque con una bomba y una válvula de resistencia variable

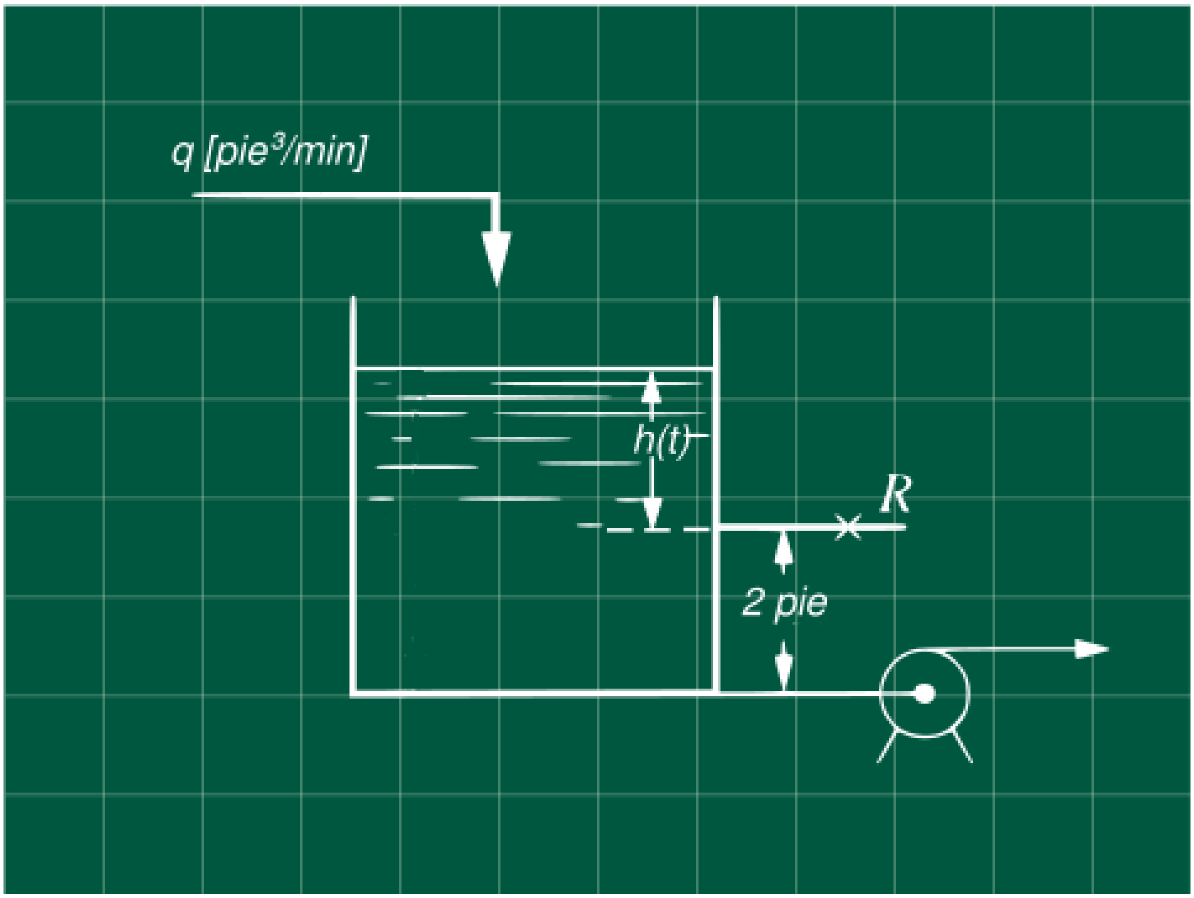


Figure 3.1: p5.9

El sistema mostrado en la figura tienen un área seccional $A = 3$ pie², la ecuación de la válvula es $q = 8\sqrt{h}$. Con q en [pie³/min] y h (altura desde encima de la válvula) en [pie].

Calcule la constante del tiempo τ para cuando la altura por encima de la válvula en estado estacionario es **a)** 3 pie y **b)** 9 pie.

Resolviendo

$$\begin{aligned}&Datos\\&A = 3 \text{ pie}^2\\&q_0 = 8\sqrt{h}\end{aligned}$$

Linealizando $q_0 = 8\sqrt{h}$

La expandimos usando las serie de Taylor al rededor del estado estacionario.

$$f(x) = f(x_s) + \frac{df}{dt}\bigg|_{x=x_s}(x - x_s)$$

$$q_0 = 8\sqrt{h_s} + \frac{4}{sqrth_s}(h - hs)$$

$$q_0 = q_{0s} + \frac{4}{sqrth_s}(h - hs)$$

$$q_0 - q_{0s} = \frac{4}{\sqrt{h_s}}(h - hs)$$

Hagamos $R = \frac{\sqrt{h_s}}{4}$ **(A)**

$$q_0 - q_{0s} = \frac{(h - hs)}{R}\mathbf{(1)}$$

Realizando el balance en el sistema

$$q - q_0 - q_b = \frac{dV}{dt}(2)\mathbf{(2)}$$

Escribiendo el balance en estado estacionario

$$q_s - q_s0 - q_b = 0\mathbf{(3)}$$

Restando (2) con (1) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s - (q_s - q_s0) = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

Reemplazando con la ecuación (1)

$$q - q_s - \frac{(h - hs)}{R} = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

Transformando a variables desviación

$$Q - \frac{H}{R} = A\frac{dH}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplace y sabiendo que $H(t = 0) = h - h_s = h_s - h_s = 0$

$$Q(s) - \frac{H(s)}{R} = A\left[sH(s) - H(t = 0)\right] Q(s) - \frac{H(s)}{R} = AsH(s)$$

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1}$$

Por comparación con el modelo de primer orden $\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{Kp}{\tau s+1}$ y sabiendo que $A = 3$ y $R = \sqrt{h_s}/4$

Notamos que

$$\tau = AR = 3\frac{\sqrt{h_s}}{4}$$

Para a) $h_s = 3$

$$= \mathbf{1.2990min}$$

Para b) $h_s = 9$

$$= \mathbf{2.25min}$$

Referencias

- Coughanowr, D. R.; LeBlanc, S. E. (2009). *Process Systems Analysis and Control* (3rd edition). McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-339789-4.

4 Sistema de tanque con una válvula de resistencia descrita por un gráfico

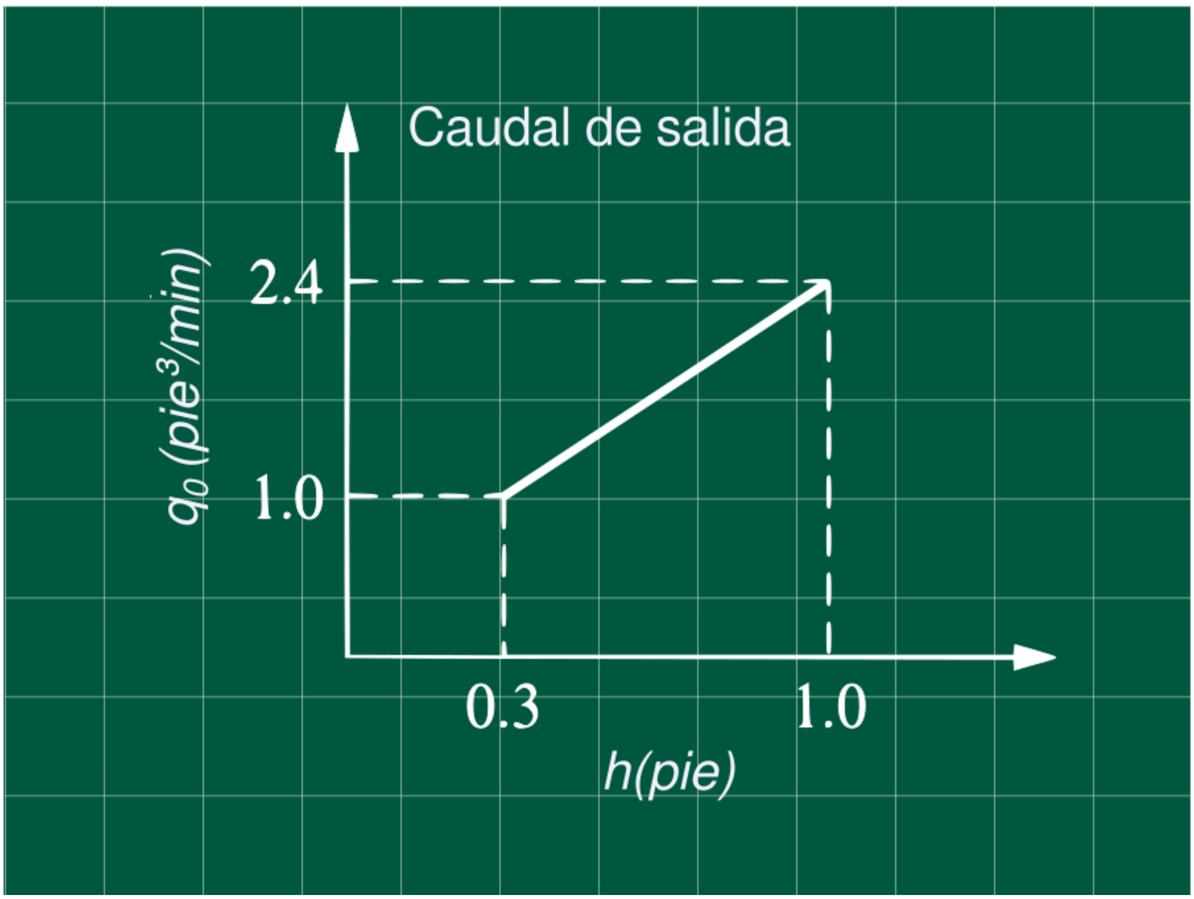


Figure 4.1: Grafico de prob 5.3

Un tanque con un área seccional de 2 pie^2 opera en estado estacionario con un flujo de entrada de 2 pie^3/min. El flujo de salida vs la altura del sistema son representados en la figura.

Encuentre:

- La función transferencia $H(s)/Q(s)$.

- Si el flujo hacia el tanque se incrementa en de 2.0 a 2.2 pie^3/min (paso unitario), calcule el nivel h, 2 minutos después del cambio.

$$\begin{aligned}
&Datos\\
&A = 2pie^2\\
&q_s = 2pie^3/min
\end{aligned}$$

Obtención de la ecuación q_0

Como se observa en la gráfica q_0 es función de la altura y es una recta. Usando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos tenemos $(h_1 = 0.3, q_{01} = 1)$ y $(h_2 = 1, q_{02} = 2.4)$:

$$\frac{q_0 - q_{01}}{h - h_1} = \frac{q_{02} - q_{01}}{h_2 - h_1}$$

$$\frac{q_0 - 1}{h - 0.3} = \frac{2.4 - 1}{1 - 0.3}$$

$$q_0 = 2h + 0.4$$

Escribiendo las ecuaciones de balance

$$q - q_0 = \frac{dV}{dt}$$

Pero $q_0 = 2h + 0.4$ y $dV = Adh$

$$q - (2h + 0.4) = A\frac{dh}{dt}(1)$$

Escribiendo el balance en estado estacionario

$$q_s - (2h_s + 0.4) = 0(2)$$

Restando (1) con (2) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s - 2(h - h_s) + = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

$$Q - 2 \cdot H = A\frac{dH}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplacey sabiendo que $H(t=0) = h - h_s = h_s - h_s = 0$

$$Q(s) - 2H(s) = A(sH(s) - H(t=0))$$
$$Q(s) - 2H(s) = AsH(s)$$

Despejando

$$\frac{\mathbf{H(s)}}{\mathbf{Q(s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2s+2}}(3)$$

Descripción de la perturbación

La perturbación sólo va a afectar el caudal de ingreso, esta puede ser representado por la variable desviación $Q(t)$

$$Q(t) = q - q_s = \begin{cases} 2.0 - 2.0 & \text{si } t < 0 \\ 2.2 - 2.0 \; pie^3/min & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2 \; pie^3/min & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Expresando la misma función con impulsos unitarios y aplicando la transformada de Laplace

$$Q(t) = 0.2 \cdot u(t)$$

Entonces

$$Q(s) = \frac{0.2}{s}$$

Resolviendo para $h(t=2)$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (3)

$$H(s) = Q(s) \cdot \tfrac{1}{2s+2}$$

$$H(s) = \tfrac{0.2}{s(2s+2)}$$

Operando para realizar la antitransformada

$$H(s) = \frac{0.2 + 0.2s - 0.2s}{s(2s+2)} = \frac{0.1(2s+2)}{s(2s+2)} - \frac{0.2s}{s(2s+2)}$$

$$H(s) = \frac{0.1}{s} - \frac{0.1}{(s+1)}$$

Aplicando la antitransformada $L^{-1}\{\}$

Recuerde $L^{-1}\{\frac{1}{s+k}\} = e^{-kt}$

$$H(t) = 0.1 - 0.1 \cdot e^{-t}$$

Calculando h(t=2)

De la ecuación en estado estacionario

$$q_s - (2h_s + 0.4) = 0 => h_s = 0.8$$

Entonces

$$h(t=2) = H(t=2) + h_s$$

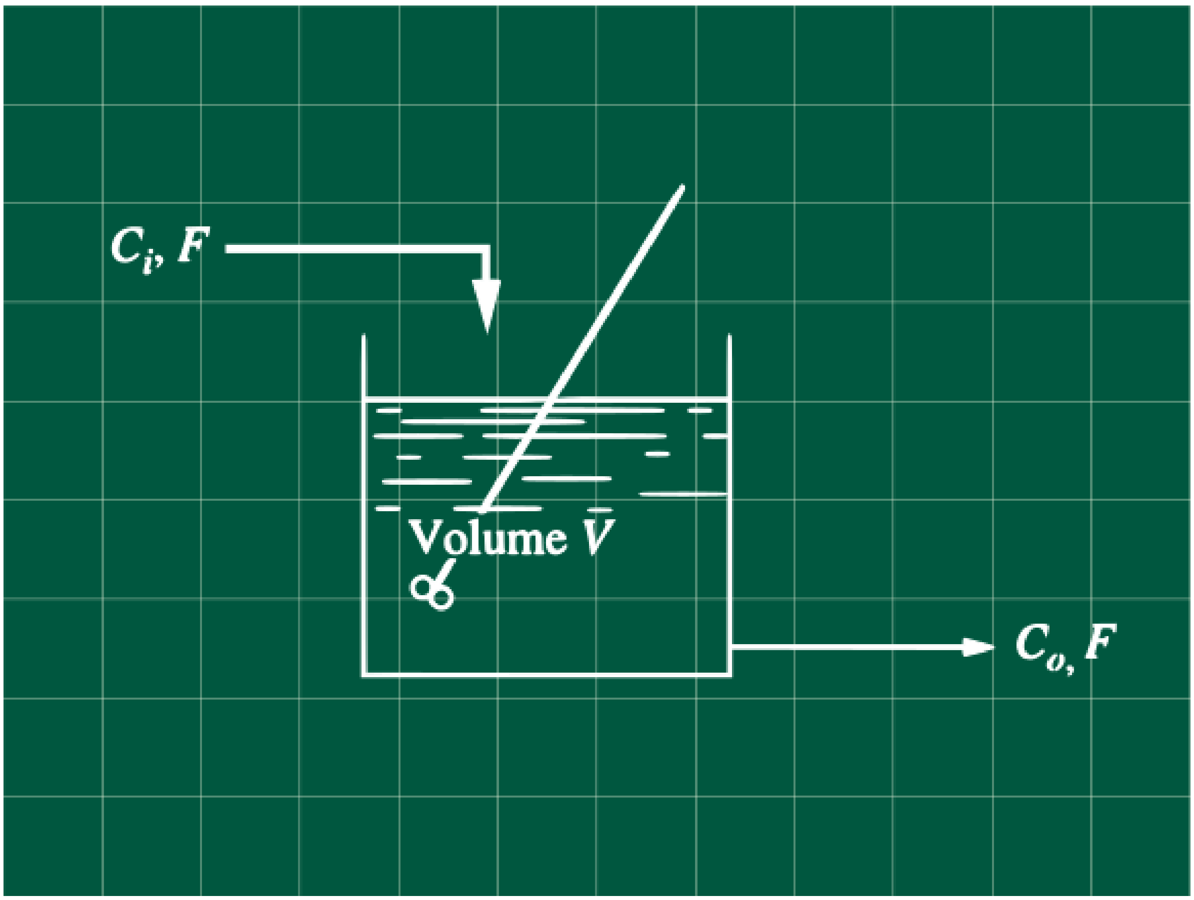
$$h(t=2) = 0.1 \cdot (1 - e^{-2}) + 0.8$$

$$\mathbf{h(t=2) = 0.8865} \text{ pie}$$

Referencias

- Coughanowr, D. R.; LeBlanc, S. E. (2009). *Process Systems Analysis and Control* (3rd edition). McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-339789-4.

5 Respuesta de una reactor químico a un cambio de concentración de entrada



Considere el tanque agitado mostrado en la figura. La reacción que ocurrre es:

$$A \rightarrow B$$

Con una velocidad de reacción igual a:

$$r = kC_0$$

Donde

r = (mol A)/(volumen)/(tiempo)
k = constante de velocidad de reacción
$C_0(t)$ = concentración de A en el reactor en el tiempo t $(molA)/(volumen)$
V = volumen de la mezcla en el reactor
F = caudal de alimentación constante (volumen)/(tiempo)
$C_i(t)$concentración de A en la entrada (mol A)/(volumen)

Asumiendo densidad y volumen constante V, derive la función de tranferencia, relacionando la concentración en el reactor y la concentración de entrada. Dibuje la respuesta del reactor para un cambio tipo paso unitario en la concentración de entrada.

Resolviendo

Escribiendo nuestro balance de materia, sabiendo que $n_o = C_0V$

$$C_iF - C_0F - kC_0V = \frac{dn_o}{dt} = \frac{d(C_0V)}{dt}$$

$$C_iF - C_0F - kC_0V = V\frac{d(C_0)}{dt}\mathbf{(1)}$$

Realizando el balance en estado estacionario

$$C_{is}F - C_{0s}F - kC_{0s}V = 0\mathbf{(2)}$$

Restado (2) de (1) y tranformando a variables desviación

$$C_iF - C_{is}F - (C_0F - C_{0s}F) - k(C_0V - C_{0s}V) = V\frac{d(C_0 - C_{0s})}{dt}$$

$$C_i'F - C_0'F - kC_0'V = V\frac{d(C_0')}{dt}$$

Aplicando la transformada de Laplace y despejando y sabiendo que $C_0'(t=0) = 0$

$$C_i'(s)F - C_0'(s)F - kC_0'(s)V = V(sC_0'(s) - C_0'(t=0))$$

$$C_i'(s)F - C_0'(s)F - kC_0'(s)V = VsC_0'(s)$$

Obteniendo nuestra función transferencia

$$\frac{\mathbf{C_0'(s)}}{\mathbf{C_i'(s)}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{Vs + F + kV}}$$

Para poder hacer la gráfica con la variación de la concentración de entrada, reordenemos nuestra función.

$$\frac{C_0'(s)}{C_i'(s)} = \frac{F/(F + kV)}{Vs/(F + kV) + 1}$$

Haciendo un cambio de variable

$$K_p = F/(F + kV)\tau = V/(F + kV)$$

$$\frac{C_0'(s)}{C_i'(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

Para un cambio en la concentración de entrada tipo paso unitario Con A como una constante cualquiera $C_i' = A/s$.

$$C_0'(s) = \frac{A}{s}\frac{K_p}{\tau s + 1}$$

Reordenando para realizar la antitransformada

$$C_0'(s) = \frac{A \cdot K_p + A \cdot K_p \cdot \tau s - A \cdot K_p \cdot \tau s}{s(\tau s + 1)}$$

$$C_0'(s) = \frac{A \cdot K_p}{s} - \frac{A \cdot K_p \cdot \tau}{\tau s + 1}$$

$$C_0'(s) = \frac{A \cdot K_p}{s} - \frac{A \cdot K_p}{s + 1/\tau}$$

Antitransformando

$$C_0'(t) = A \cdot K_p(1 - e^{-t/\tau})$$

Graficando esta respuesta

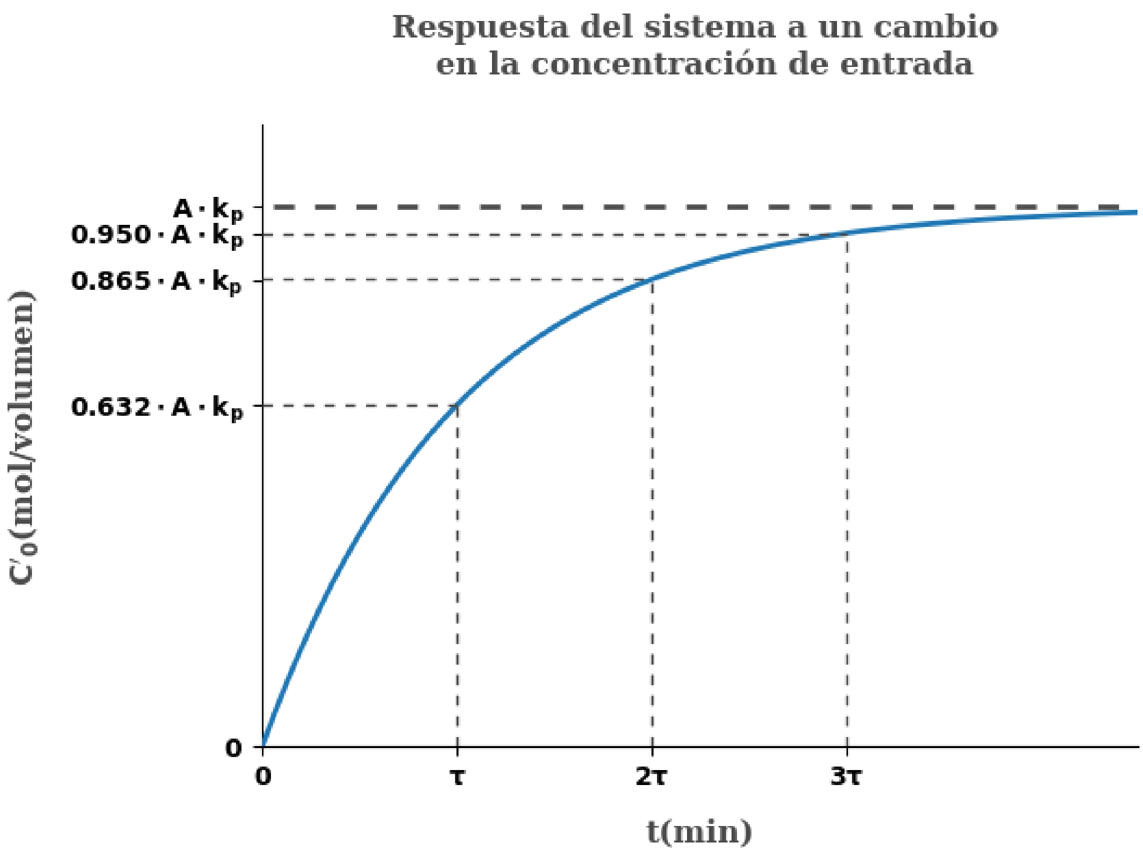


Figure 5.1: respuesta del sistema a un cambio en la concentración de entrada

Referencias

- Coughanowr, D. R.; LeBlanc, S. E. (2009). *Process Systems Analysis and Control* (3rd edition). McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-339789-4.