Solucionaro de Control Automático de Procesos

Ever Vino

9/1/23

Un solucionario para Control Automático

Este es un Solucionario de Control Automático

Part I

Sistemas físicos de primer orden

1 Un calentador que deja de funcionar

Problema 5.1 (Process Dynamics, Modelling and Control - Babatunde, Harmon)

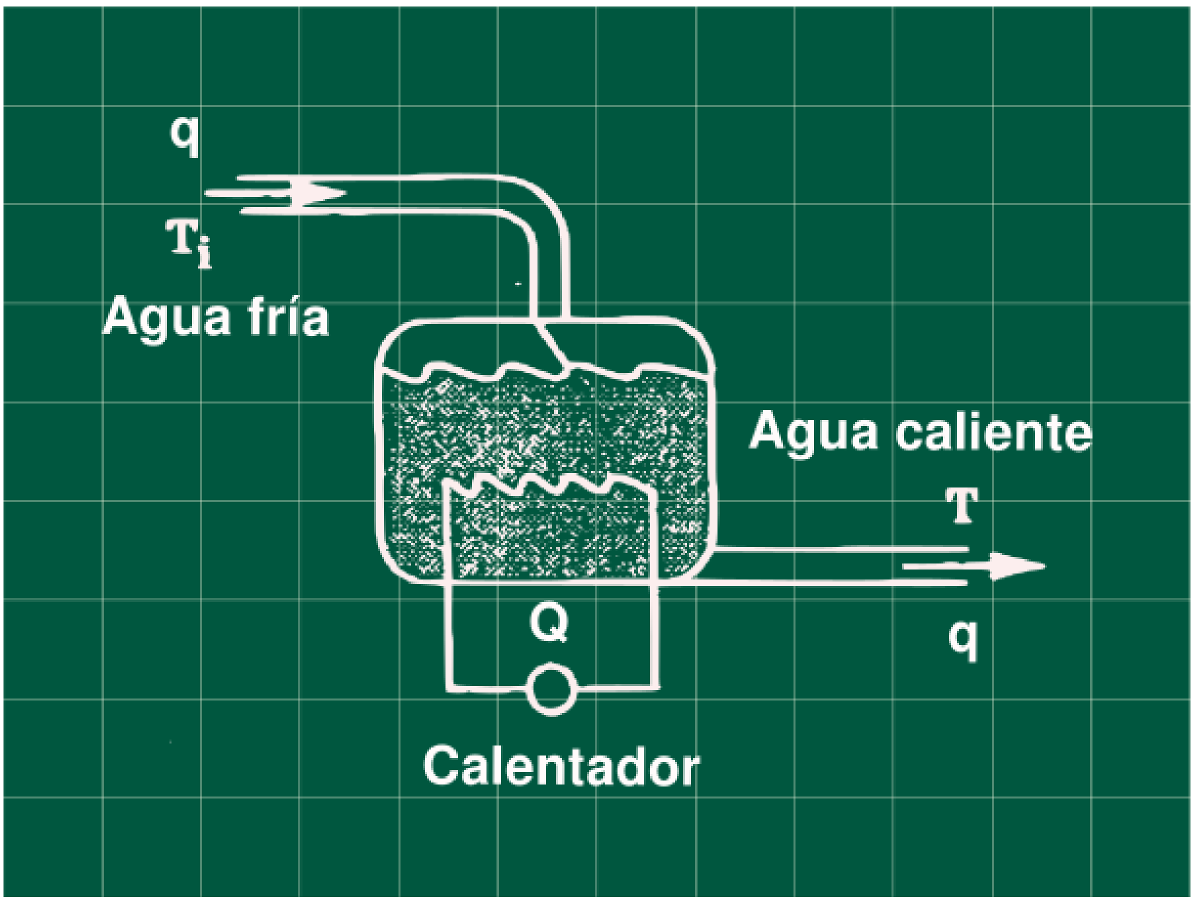

Figure 1.1: Sistema de calentador de agua

Para el proceso mostrado en la figura, un calentador electrico de agua. En un día particular el tanque trabajaba a temperatura de 80 °C, y de repente el calentador se rompe y dejar de suministrar calor, a este tiempo el tanque con 100 L de capacidad operaba con un caudal 10

L/min, la temperatura del agua fria es de 30 °C. Esto pasa durante 5 minutos, luego el calentador detiene el flujo de agua(debido al diseño del calentador). Desarrolle un apropiado modelo matemático para este proceso, y resolviendo la ecuación diferencial encuentre la temperatura del tanque a los 5 minutos

Resolución

Escribiendo nuestro balance de energía

$$\rho C_p V \frac{dT}{dt} = q\rho C_p (T_i - T) + Q \;\; \textbf{....} \;\; \textbf{(1)}$$

Balance en estado estacionario

$$0 = q\rho C_p (T_{is} - T_s) + Q_s \;\; \textbf{....} \;\; \textbf{(2)}$$

Calculamos la ecuación (2) el valor de Q_s que nos a servir luego

$$0 = q\rho C_p (30 - 80) + Q_s$$

$$Q_s = 50 q\rho C_p$$

Restando (1) con (2) y tranformando a variables desviación

$$\rho C_p V \frac{d(T - T_s)}{dt} = q\rho C_p [(T_i - T_{is}) - (T - T_s)] + Q - Q_s$$

$$\rho C_p V \frac{dT'}{dt} = q\rho C_p [T_i' - T'] + Q'$$

Aplicando la transformada de Laplace y despejando la función transferencia

$$\rho C_p V s T'(s) = q\rho C_p [T_i'(s) - T'(s)] + Q'(s)$$

$$\frac{T'(s)}{Q'(s)} = \frac{1}{V\rho C_p s + q\rho C_p} \;\; \textbf{....} \;\; \textbf{(3)}$$

Describimos la perturbación del enunciado sabemos que el calor suministrado baja cero cuando t>0.

$$Q'(t) = Q(t) - Q_s \begin{cases} Q_s - Q_s & \text{si } t < 0 \\ 0 - Q_s & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$Q'(t) = \begin{cases} & \text{si } t < 0 \\ -Q_s & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$Q'(t) = -Q_s$$

Aplicando al transformada de Laplace

$$Q'(s) = -\frac{Q_s}{s}$$

Reemplazando en la ecuacion (3) y sabiendo que $Q_s = 50q\rho C_p$

$$T'(s) = -\frac{50q\rho C_p}{s(V\rho C_p s + q\rho C_p)}$$

Operando y reemplazando valores conocidos $V = 100$ y $q = 10$

$$T'(s) = -\frac{50}{s(Vs + q)} = -\frac{50}{s(10s + 1)}$$

Antitransformando, recuerde $T'(t) = T(t) - T_s$

$$T'(t) = 50(e^{-t/10} - 1)$$

$$T(t) = 50(e^{-t/10} - 1) + 80$$

Hallando la temperatura a t = 5 min

$$T(t = 5) = 50(e^{-5/10} - 1) + 80$$

$$\mathbf{T(t = 5min) = 60.33\ °C}$$

Referencias

- Babatunde, A. O.; Harmon, W. R. (1994). *process dynamics, modeling, and control.* OXFORD UNIVERSITY PRESS. ISBN 0-19-509119-1

2 Un sistema con un tanque, una bomba y una válvula

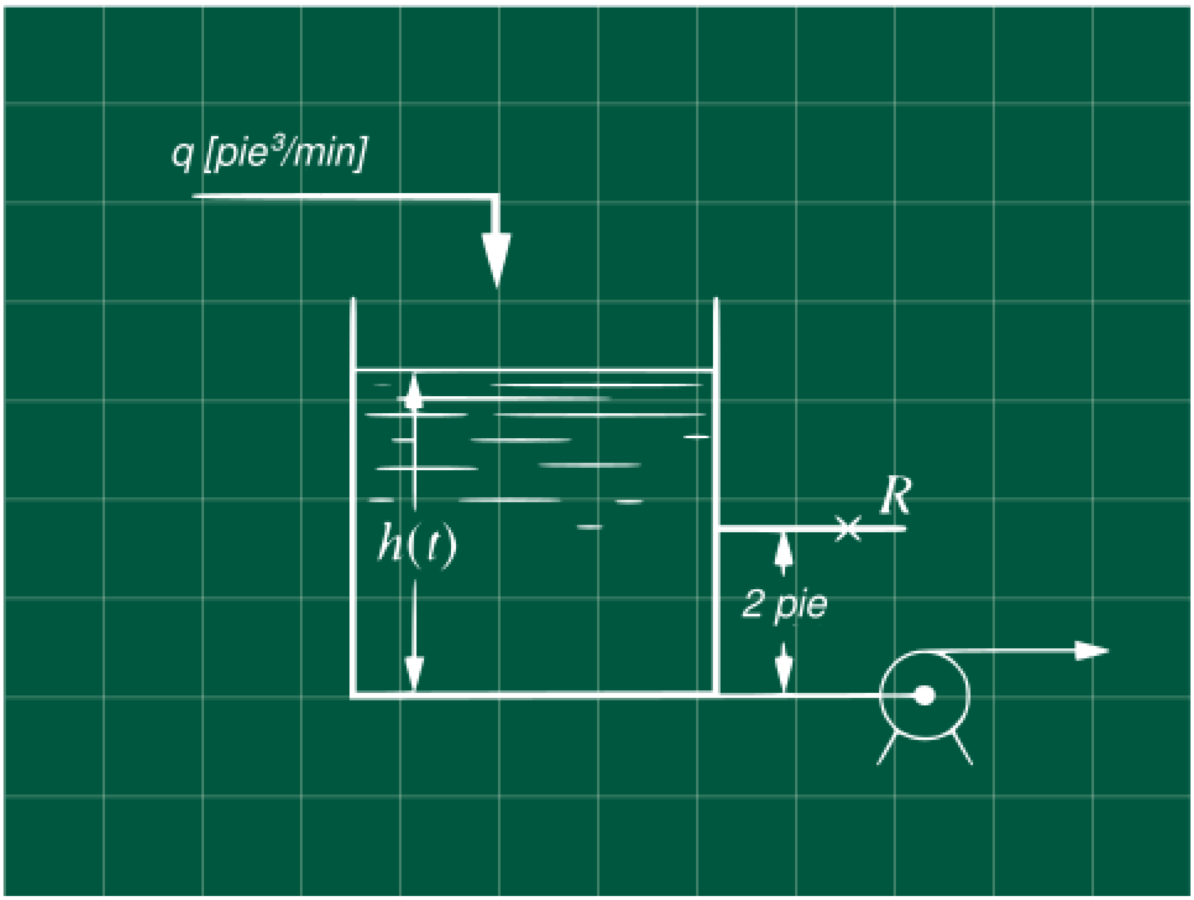

Figure 2.1: Grafico de prob 5.1

Derive la ecuación transferencia H(s)/Q(s) para el nivel del líquido del sistema mostrado en la figura, cuando el tanque opera en estado estacionario a:

- a) $h_s = 1$ pie
- b) $h_s = 3$ pie

La bomba extrae agua a caudal constante de 10 pie^3/min y es independiente del la altura h, El área seccional es $A = 1.0$ pie^2 y la resistencia es $R = 0.5$ pie^3/min.

Resolución

Resolviendo para $h_s = 1$pie

Cuando la altura $h_s = 1$ podemos notar que no existe flujo posible por la válvula, por lo que no lo consideramos en la ecuación transferencia.

Escribiendo las ecuaciones de balance

$$q - q_b = \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}\mathbf{(1)}$$

Ecuacion en estado estacionario

$$q_s - q_b = 0\mathbf{(2)}$$

Restando (1) con (2) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

$$Q = A\frac{dH}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplace, sabiendo que $H(t = 0) = h - h_s = h_s - h_s = 0$ y $A = 1$ pie.

$$Q(s) = A(sH(s) - H(t = 0))$$
$$\frac{\mathbf{H(s)}}{\mathbf{Q(s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}$$

Resolviendo para $h_s = 3$ pie

Cuando $h_s = 3$ el sistema se encuentra operando sobre el nivel de la válvula, por lo que si existe un flujo q_0 que pasa por este.

Aplicando un balance del sistema y sabiendo que $q_0 = h - h_v/R$, donde h_v es la altura de la válvula

$$q - q_0 - q_b = A\frac{dh}{dt}$$
$$q - \frac{h - h_v}{R} - q_b = A\frac{dh}{dt}\mathbf{(3)}$$

Balance en estado estacionario

$$q_s - \frac{h_s - h_v}{R} - q_b = 0\mathbf{(4)}$$

Restando (3) con (4) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s - \frac{h - h_s}{R} = A\frac{d(h - h_s)}{dt}$$

$$Q - \frac{H}{R} = A\frac{dH}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplace, sabiendo que $H(t = 0) = h - h_s = h_s - h_s = 0$, $A = 1$ pie y $R = 0.5$ pie/(pie^3/min).

$$Q(s) - \frac{H(s)}{R} = A(sH(s) - H(t = 0))$$
$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1}$$

$$\mathbf{\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{0.5}{0.5s + 1}}$$

Referencias

- Coughanowr, D. R.; LeBlanc, S. E. (2009). *Process Systems Analysis and Control* (3rd edition). McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-339789-4.

Part II

Sistemas físicos de segundo orden

3 Dos reactores en serie con un perturbación tipo impulso unitario

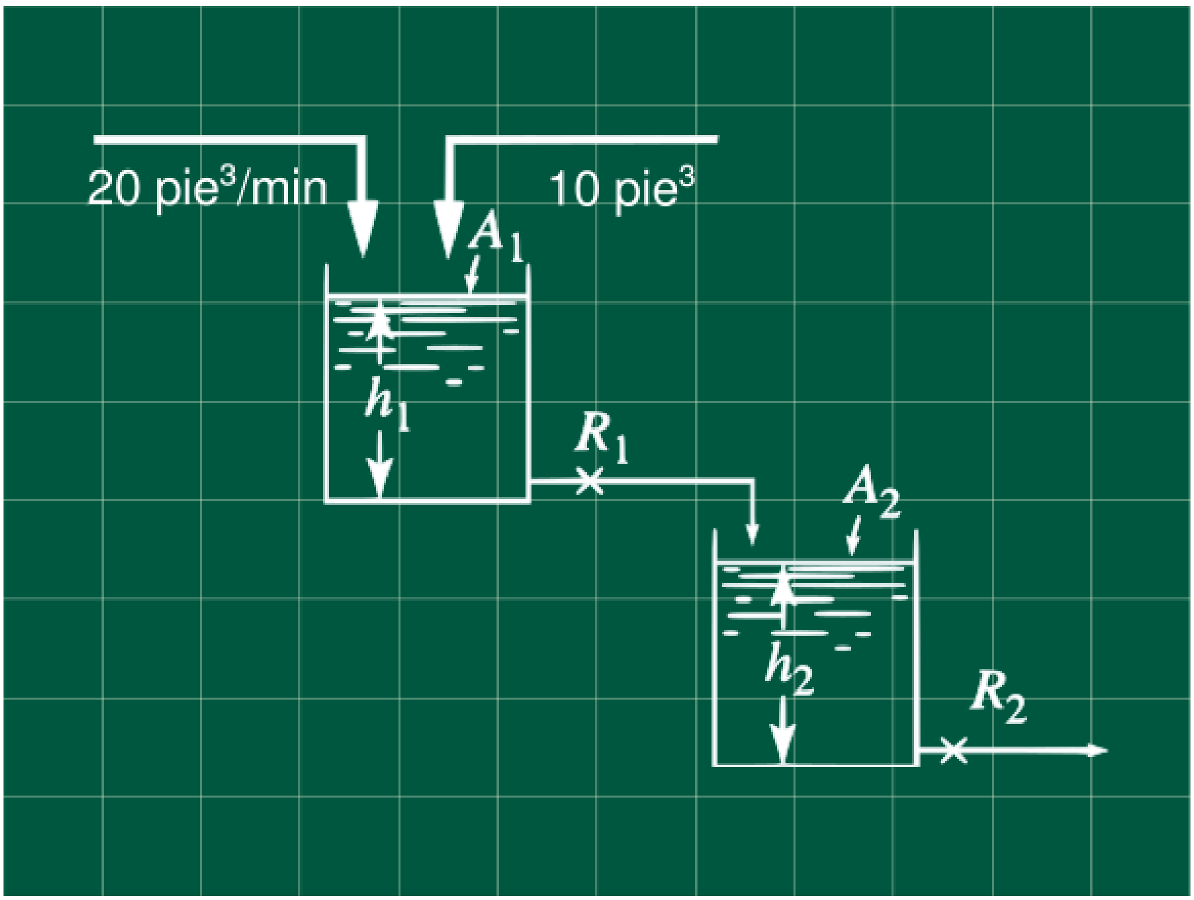

Figure 3.1: diagrama p7.2

Dos tanques mostrados en la figura, operan en estado estacionario. At t=0 se agregan al primer tanque, 10 pie^3 de agua de manera repentina. Usando apropiadamente las figuras y ecuaciones, determine la máxima desviación del nivel del líquido en ambos tanques del estado estacionario y el tiempo en el cuál ocurre.

$$A_1 = A_2 = 10pie^2$$
$$R_1 = 0.1pie/(pie^3/min)$$
$$R_2 = 0.35pie/(pie^3/min)$$

Escribiendo las ecuaciones de balance

Obtención de la ecuación en transferencia

Pero $q_1 = h_1/R_1$ y $dV_1 = A_1 dh_1$

$$q - \frac{h_1}{R} = A\frac{dh_1}{dt}(1)$$

Escribiendo el balance en estado estacionario

$$q_s - \frac{h_{1s}}{R_1} = 0(2)$$

Restando (1) con (2) para obtener las variables desviación y recordando que $dh = d(h - h_s)$, por ser h_s constante.

$$q - q_s - \frac{h_1 - h_{1s}}{R_1} = A\frac{d(h_1 - h_{1s})}{dt}$$

$$Q - \frac{H_1}{R_1} = A\frac{dH_1}{dt}$$

Aplicando la tranformada de Laplacey sabiendo que $H_1(t = 0) = h_1 - h_{1s} = h_{1s} - h_{1s} = 0$

$$Q(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} = A_1\left[sH_1(s) - H_1(t = 0)\right]$$

$$Q(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} = A_1 sH_1(s)$$

Reordenando obtenemos la ecuación de tranferencia del primer tanque

$$\frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_1}{A_1R_1s + 1}\textbf{... (3)}$$

Reemplazando datos $R_1 = 0.1$;$A_1 = 10$ obtenemos la ecuación de tranferencia del primer tanque.

$$\frac{\mathbf{H_1(s)}}{\mathbf{Q(s)}} = \frac{\mathbf{0.1}}{\mathbf{1s+1}} \textbf{...} \; (\,)$$

De similar manera podemos obtener la ecuación de transferencia para el segundo tanque

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{A_2 R_2 s + 1} \textbf{... (4)}$$

Recuerde que tambien se cumple

$$Q_1(s) = \frac{H_1(s)}{R_1}$$

Reemplazando en (4)

$$\frac{H_2(s) \cdot R_1}{H_1(s)} = \frac{R_2}{A_2 R_2 s + 1} \textbf{... (5)}$$

Multipicando las ecuaciónes (3) con (5) y simplificando obtenemos la ecuación de transferencia del segundo tanque.

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{(A_2 R_2 s + 1)(A_1 R_1 s + 1)} \textbf{... (6)}$$

Reemplazando con los datos $R_1 = 0.1$;$A_1 = A_2 = 10$;$R_2 = 0.35$

$$\frac{\mathbf{H_2(s)}}{\mathbf{Q(s)}} = \frac{\mathbf{0.35}}{\mathbf{(3.5s+1)(s+1)}} \textbf{...} \; (\,)$$

Ahora describamos la perturbación

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 10 \; pie^3/min(\infty) & \text{si } t = 0min \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Entonces

$$Q(t) = 10\delta(t)$$

Aplicando la transformada

$$Q(s) = 10$$

Para el primer tanque reemplazanado en la ecuación (α)

$$H_1(s) = \frac{0.1Q(s)}{s+1} = \frac{0.1 \times 10}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

Antitransformando

$$H_1(t) = e^{-t}$$

Notamos que la función es decreciente el máximo valor que toma es al inicio. Por lo que el máximo valor de la desviación es cuando t=0. Puede confirmar esto reemplazando cualquier valor de t>0, ó graficando la función.

$$H_1(t = 0) = e^{-0} = 1$$

Entonces el la desviación máxima es **1 pie** en el nivel del líquido del primer tanque a $\mathbf{t = 0}$ **min**.

Para el segundo tanque reemplazando $Q(s) = 10$ en la ecuación β

$$H_2(s) = \frac{0.35 \times Q(s)}{(3.5s+1)(s+1)} = \frac{3.5}{(3.5s+1)(s+1)}$$

Expandiendo el termino del lado derecho en fracciones parciales (Puede obtener el mismo resultado si usa las tablas)

$$\frac{3.5}{(3.5s+1)(s+1)} = \frac{A}{(3.5s+1)} + \frac{B}{(s+1)}$$

$$3.5 = A(s+1) + B(3.5s+1)$$

Recuerde que es una ecuación y cumple para cualquier valor de s. Eligiendo el valor conveniente de s podemos hallar las constantes.

Cuando $s = -1$ entonces $B = -0.35/2.5$

para $s = -1/3.5$ el valor $A = 0.35 \times 3.5/2.5$

En nuestra ecuación original y reorganizando para la antitransformada

$$H_2(s) = \frac{0.35}{2.5}\left(\frac{1}{s+1/3.5} - \frac{1}{s+1}\right)$$

Aplicando la transformada inversa

$$H_2(t) = \frac{0.35}{2.5}\left(e^{-t/3.5} - e^{-t}\right)$$

Derivando e igualando a cero para hallar el máximo.

$$\frac{dH_2(t)}{dt} = \frac{0.35}{2.5}\left(-\frac{e^{-t/3.5}}{3.5} - (-1)e^{-t}\right) = 0$$

Operando

$$3.5e^{-t} = e^{-t/3.5}$$

Despejando t

$$t = \frac{3.5 \times ln(3.5)}{2.5} = 1.7539 \text{ min}$$

Reemplazandoen H_2(t)

$$H_2(t = 1.7539) = \frac{0.35}{2.5}\left(e^{-1.7539/3.5} - e^{-1.7539}\right) = 0.0606 \text{ pie}$$

Entonces la máxima desviación para el segundo tanque se da cuando **t = 1.7539 min** con una desviación del nivel del líquido de **0.0606 pie**.

Nótese que no se nos pide hallar el nivel del liquido (h) cuando la desviación es máxima si no solamente la desviación máxima (H). Si se quisiera hallar el nivel del liquido utilice la ecuación $H(t) = h(t) - h_s$ *y despeje* h_s *de las ecuaciones del balance en estado estacionario.*

Es interesante analizar los estados de este sistema mediante gráficos, así que lo incluyo por si alguien desea verlo.

Referencias

- Coughanowr, D. R.; LeBlanc, S. E. (2009). *Process Systems Analysis and Control* (3rd edition). McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-339789-4.

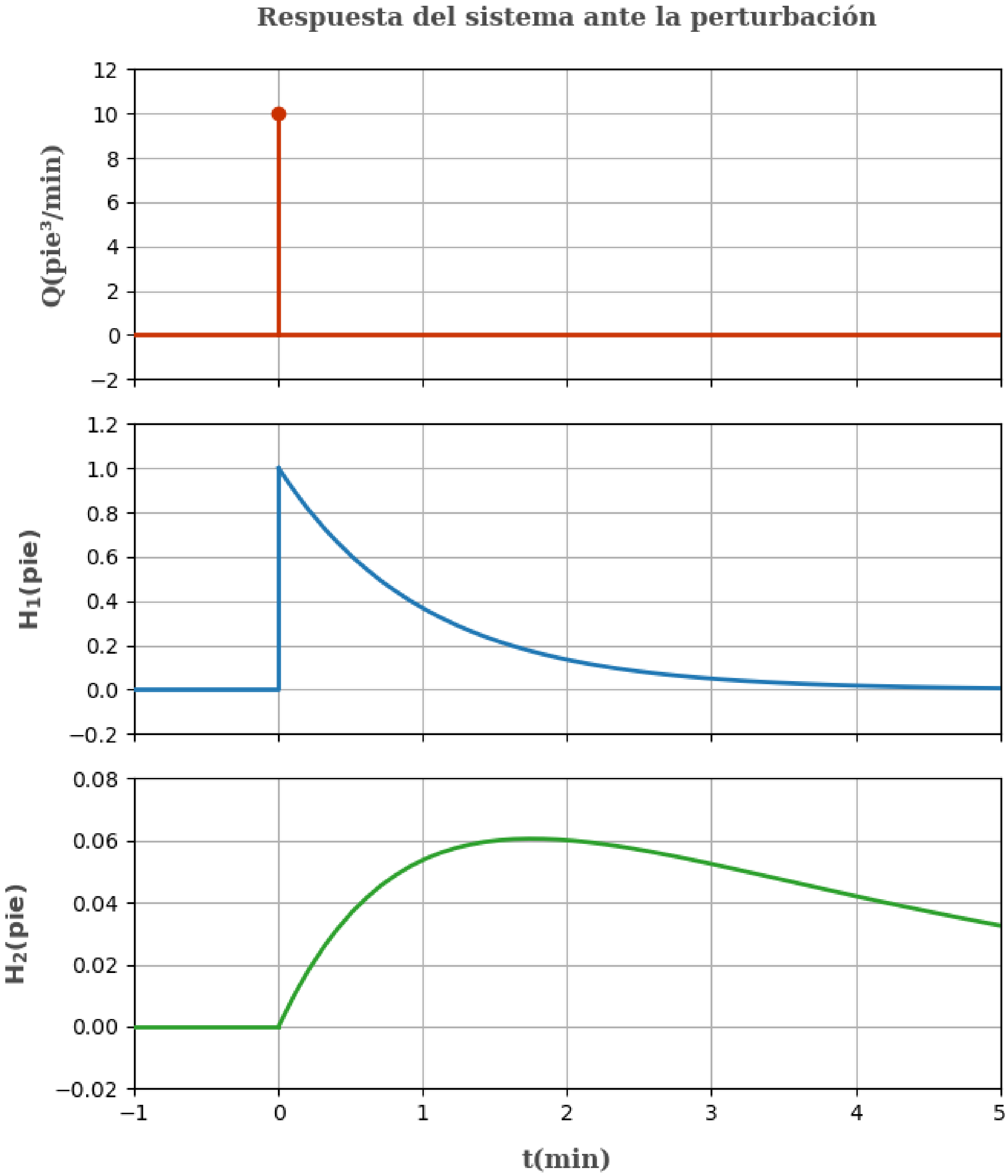

Figure 3.2: respuesta del sistema p7.2