10.1 [本题目改编自参考文献[88]中的习题 9.8(1)] Q 是一个 $n\times n$ 的对称正定实矩阵。给定一组 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关向量 $\{p^{(0)},\cdots,p^{(n-1)}\}$，利用格拉姆-施密特方法可以产生一组向量 $\{d^{(0)},\cdots,d^{(n-1)}\}$：

$$d^{(0)}=p^{(0)}$$

$$d^{(k+1)}=p^{(k+1)}-\sum_{i=0}^{k}\frac{p^{(k+1)\top}Qd^{(i)}}{d^{(i)\top}Qd^{(i)}}d^{(i)}$$

试证明，向量 $d^{(0)}$，…，$d^{(n-1)}$ 是关于 Q 共轭的。

证明：① $d^{(1)}$ 与 $d^{(0)}$ 共轭

$$d^{(1)}=p^{(1)}-\frac{p^{(1)T}Qd^{(0)}}{d^{(0)T}Qd^{(0)}}\cdot d^{(0)}$$

$$\begin{aligned}d^{(0)T}Qd^{(1)}&=d^{(0)T}Qp^{(1)}-\frac{p^{(1)T}Qd^{(0)}}{d^{(0)T}Qd^{(0)}}d^{(0)T}Qd^{(0)}\\&=p^{(0)T}Qp^{(1)}-\frac{p^{(1)T}Qp^{(0)}}{p^{(0)T}Qp^{(0)}}p^{(0)T}Qp^{(0)}\\&=p^{(0)T}Qp^{(1)}-p^{(1)T}Qp^{(0)}=0.\end{aligned}$$

即 $d^{(0)}$ 与 $d^{(1)}$ 共轭

② 假设 $d^{(0)},d^{(1)},\cdots,d^{(k)}$ 共轭，要证 $d^{(0)},d^{(1)},\cdots,d^{(k)},d^{(k+1)}$ 共轭

$$d^{(k+1)}=p^{(k+1)}-\sum_{i=0}^{k}\frac{p^{(k+1)T}Qd^{(i)}}{d^{(i)T}Qd^{(i)}}\cdot d^{(i)}$$

设 j 为 $0\le j\le k$，

$$\begin{aligned}d^{(j)}Qd^{(k+1)}&=d^{(j)}Qp^{(k+1)}-\frac{p^{(k+1)T}Qd^{(j)}}{d^{(j)T}Qd^{(j)}}d^{(j)T}Qd^{(j)}\\&=d^{(j)}Qp^{(k+1)}-p^{(k+1)T}Qd^{(j)}=0.\end{aligned}$$

证毕

10.5 利用如下迭代公式求解函数f的极小点：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{d}^{(k)}$$

其中，$\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(k)})$。令$\boldsymbol{g}^{(k)} = \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$。

如果函数f是二次型函数，黑塞矩阵为$\boldsymbol{Q}$，按照公式$\boldsymbol{d}^{(k+1)} = \gamma_k \boldsymbol{g}^{(k+1)} + \boldsymbol{d}^{(k)}$确定搜索方向，并希望能够保证方向$\boldsymbol{d}^{(k)}$和$\boldsymbol{d}^{(k+1)}$是$\boldsymbol{Q}$共轭的。试求出参数$\gamma_k$的表达式，用$\boldsymbol{d}^{(k)}$、$\boldsymbol{g}^{(k+1)}$和$\boldsymbol{Q}$表示。

解：要使 $d^{(k)}$ 与 $d^{(k+1)}$ 关于 Q 共轭，则应

$d^{(k)T} Q d^{(k+1)} = 0$，其中 $d^{(k+1)} = \gamma_k g^{(k+1)} + d^{(k)}$

则 $d^{(k)T} Q d^{(k+1)} = \gamma_k d^{(k)T} Q g^{(k+1)} + d^{(k)T} Q d^{(k)}$

则 $\gamma_k = -\dfrac{d^{(k)T} Q d^{(k)}}{d^{(k)T} Q g^{(k+1)}}$

10.7 二次型目标函数f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^\top > 0$。矩阵$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times r}$的秩为$r$，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，函数$\phi$: $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$定义为

$$\phi(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{a})$$

试证明函数ϕ是二次型函数，二次项正定。

证明：
$$\begin{aligned}
\phi(a) &= \tfrac{1}{2}(x_0 + Da)^T Q (x_0 + Da) - (x_0 + Da)^T b \\
&= \tfrac{1}{2}(x_0^T + a^T D^T) Q (x_0 + Da) - (x_0^T + a^T D^T) b \\
&= \tfrac{1}{2}(x_0^T Q x_0 + x_0^T Q D a + a^T D^T Q x_0 + a^T D^T Q D a) - x_0^T b - a^T D^T b \\
&= \tfrac{1}{2} a^T D^T Q D a + a^T (D^T Q x_0 - D^T b) + \tfrac{1}{2} x_0^T Q x_0 - x_0^T b.
\end{aligned}$$

其中 $Q' = D^T Q D$ $\quad b' = D^T Q x_0 - D^T b$.

$a^T D^T Q D a = (Da)^T Q (Da)$ 当 $Da \neq 0$ 时 由 $Q = Q^T > 0$ 知 $a^T D^T Q D a > 0$

又因 $\text{rank}(D) = r$，故 $Da = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 因此二次型正定 证毕