求证共轭梯度法构造的方向是共轭的.

证明：① $d^{(1)T}Qd^{(0)}=(-g^{(1)}+\beta_0 d^{(0)})Qd^{(0)}$

$=-g^{(1)}Qd^{(0)}+\beta_0 d^{(0)T}Qd^{(0)}$

其中 $\beta_0=\dfrac{g^{(1)T}Qd^{(0)}}{d^{(0)T}Qd^{(0)}}$，代入得

$d^{(1)T}Qd^{(0)}=-g^{(1)T}Qd^{(0)}+\dfrac{g^{(1)T}Qd^{(0)}}{d^{(0)T}Qd^{(0)}}\cdot d^{(0)T}Qd^{(0)}=0.$

②假设 $d^{(0)},d^{(1)},\cdots,d^{(k)}$ 共轭，只需证 $d^{(k+1)}$ 与 $d^{(0)},d^{(1)},\cdots,d^{(k)}$ 也共轭即可；即证 $d^{(k+1)T}Qd^{(i)}=0,\forall i\in[0,k]$

$\because d^{(k+1)}=-g^{(k+1)}+\beta_k d^{(k)}$ 则证 $-g^{(k+1)T}Qd^{(i)}+\beta_k d^{(k)T}Qd^{(i)}=0$

I. 对于 $0\le i<k$，只需证 $-g^{(k+1)T}Qd^{(i)}=0$ 即可.

由 $g^{(i+1)}=g^{(i)}+\alpha_i Qd^{(i)}$ 则 $Qd^{(i)}=\dfrac{g^{(i+1)}-g^{(i)}}{\alpha_i}$，代回得

证 $-g^{(k+1)T}\cdot\dfrac{(g^{(i+1)}-g^{(i)})}{\alpha_i}=0.\Rightarrow g^{(k+1)T}g^{(i)}-g^{(k+1)T}g^{(i+1)}=0.$ 即可.

由 $g^{(k+1)T}d^{(i)}=0.\Rightarrow g^{(k+1)T}[-g^{(i)}+\alpha_{i-1}d^{(i-1)}]=0.$

$\Rightarrow -g^{(k+1)T}g^{(i)}+\alpha_{i-1}g^{(k+1)T}d^{(i-1)}=0.$

$\Rightarrow g^{(k+1)T}g^{(i)}=0.$

则证得 $g^{(k+1)T}g^{(i)}-g^{(k+1)T}g^{(i+1)}=0.$，即对 $0\le i<k$ 成立

II. $i=k$ 时，应证 $-g^{(k+1)T}Qd^{(k)}+\beta_k d^{(k)T}Qd^{(k)}=0.$

其中 $\beta_k=\dfrac{g^{(k+1)T}Qd^{(k)}}{d^{(k)T}Qd^{(k)}}$ 代入可得

$-g^{(k+1)T}Qd^{(k)}+\beta_k d^{(k)T}Qd^{(k)}=0$ 得证

综上所述，共轭梯度法构造的方向均共轭.