Dimat Beugró 2025/2

1. Definiálja a *predikátum* fogalmát! Az alábbiak közül melyik perdikátum: **a)** $P(x)$ **b)** $P(x) \wedge O(x)$. Mindkét részben adott x egész esetén $P(x)$ és $O(x)$ jelentése, hogy x prím, ill. x páratlan.

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő kijelentések, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik:
igaz (I, ↑), **hamis** (H,↓), és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

Mindkettő, az a) és b) is predikátum.

2. Írja fel az *és* és a *vagy* igazságtábláját! Mi lesz az $I \wedge (H \vee I)$ igazságértéke?

és, jele $A \wedge B$

$A \wedge B$	I	H
I	I	H
H	H	H

vagy (megengedő), jele $A \vee B$

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

I∧(H∨I) igazságértéke Igaz.

3. Írja fel a *tagadás* és az *implikáció* igazságtábláját! Mi lesz az $A \Rightarrow B$ tagadása?

tagadás, jele $\neg A$

$\neg A$	I	H
	H	I

ha . . . , akkor . . .
(implikáció), jele $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

A⇒B tagadása ¬(A⇒B) = A∧¬B

4. Mik az *egzisztenciális* és *univerzális* kvantorok? Mutasson példát olyan $H(x,y)$ kétváltozós predikátumra, melyre $\forall x \exists y H(x,y) \neq \exists y \forall x H(x,y)$!

- egzisztenciális kvantor: ∃ ,,létezik", ,,van olyan"
- univerzális kvantor: ∀ ,,minden"

Példa: H(x,y) := x < y

5. Definiálja logikai jelek segítségével halmazok *metszetét* és *unióját*! Mutasson egy-egy példát olyan A, B, C halmazokra melyekre $(A \cup B) \cap C$ megegyezik, ill. nem egyezik meg $A \cup (B \cap C)$ halmazzal!

Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B metszete,
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Általában: legyen $\mathcal{A}$

egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B uniója,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Általában: legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

Pl : A két halmaz megegyezik: Legyenek A={1} B={2} C={1,2,3}. Ekkor (A ∪ B) ∩ C = {1,2} ∩ {1,2,3} = {1,2} és A ∪ (B ∩ C) = {1} ∪ ({2} ∩ {1,2,3}) = {1} ∪ {2} = {1,2}

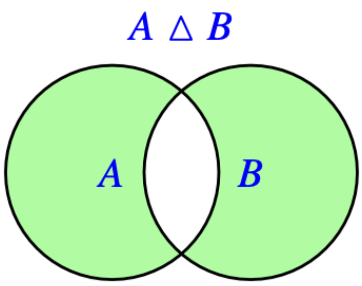
Pl : A két halmaz nem egyezik: Legyenek A={1} B={2} C={2}. Ekkor (A ∪ B) ∩ C = {1,2} ∩ {2} = {2} és A∪(B∩C) = {1} ∪ ({2} ∩ {2}) = {1} ∪ {2} = {1,2}

6. Definiálja halmazok *szimmetrikus differenciáját*! Mi lesz az $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{b, c, d\}$ halmazok szimmetrikus differenciája?

Definíció

Két A, B halmaz szimmetrikus differenciája

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



A és B halmaz szimmetrikus differenciája: {a,d}

1. Definiálja a *binér reláció* fogalmát! Mutasson *két* példát relációra az $X = \{a, b, c\}$ és $Y = \{1, 2, 3\}$ halmazok között!

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) reláció az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) reláció X-en.

pl.:

R_1={(a,1), (b,2), (c,3)}

R_2={(a,2), (b,2), (c,2)}

2. Definiálja relációk *értelmezési tartományát* és *értékkészletét*! Mi lesz az

$$R = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,4)\} \subset \{a,b,c,d\} \times \{1,2,3,4\}$$

reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

- R éretelmezési tartománya ('domain'): $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x,y) \in R\}$.
- R értékkészlete ('range'): $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x,y) \in R\}$.

dmn(R) = {a,b}

rng(R) = {1,2,4}

3. Definiálja relációk *kompozícióját*! Legyen

$$R = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,4)\} \quad \text{és} \quad S = \{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\alpha),(3,\gamma)\}.$$

Mi lesz az $S \circ R$ kompozíció?

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x,y) : \exists z : (x,z) \in S, (z,y) \in R\}.$$

S∘R = {(a,α), (a,β), (b,α), (b,β)}

4. Definiálja a *szimmetrikus* relációkat! Szimmetrikus-e az

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

reláció?

Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x,y \in X : xRy \Rightarrow yRx$

  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <$

Nem szimmetrikus mert nincs benne a (2,1) és a (3,2)

5. Definiálja a *reflexív* relációkat! Reflexív-e az

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

reláció?

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$

Nem reflexív mert nincsenek benne az (1,1) (2,2) (3,3) párok.

6. Definiálja a *tranzitív* relációkat! Tranzitív-e az

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

reláció?

Definíció (tranzitivitás)

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, <$ ellenpélda: K

Nem tranzitív mert hiányzik belőle az (1,1) (2,1) (3,2) (3,3) párok.

7. Definiálja az *ekvivalencia reláció* fogalmát! Adjon *két* különböző példát ekvivalencia relációra az $X = \{1,2,3\}$ halmazon!

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha reflexív, tranzitív és szimmetrikus.

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

8. Definiálja az *osztályozás* fogalmát! Adjon *két* különböző példát osztályozásra az $X = \{1,2,3\}$ halmazon!

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.

$P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$P_2 = \{\{1,2\}, \{3\}\}$

1. Definiálja komplex számok *trigonometrikus alakját*! Mi lesz a $z = 1 + i \in \mathbb{C}$ szám trigonometrikus alakja?

Definíció

Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{ahol } a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \text{ és } b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

$z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$

2. Mondja ki a *szorzásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ és $w = 7(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6))$ számok szorzatának *trigonometrikus* alakja?

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$

$zw = 21(\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6))$

3. Mondja ki az *osztásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ és $w = 7(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6))$ számok hányadosának *trigonometrikus* alakja?

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$

$z/w = 3/7(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$

4. Mondja ki a *hatványozásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ szám tizenkettedik hatványának *trigonometrikus* alakja?

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$z^{12} = 3^{12}(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi))$

5. Adott $w \neq 0$ komplex szám és $n \geq 1$ egész esetén mik lesznek a $z^n = w$ komplex megoldásai? Mondja ki a megfelelő tételt! Hány megoldása van a $z^3 = -1$ egyenletnek komplex számok körében?

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k): \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

A tételből következik, hogy az egyenletnek n db azaz 3 megoldása van!

1. Hányféleképpen lehet n különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet a polcra felrakni?

2. Hányféleképpen lehet n, nem feltételen különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 8 hosszú szót képezni három darab 'a', két darab 'b' és három darab 'c' segítségével?

3. Hányféleképpen lehet k elemet választani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet többször is felhasználhatunk? Hány 7 hosszú szót képezhetünk az 'a', 'b' és 'c' karakterek felhasználásával?

4. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet csak egyszer választhatunk? Hány 5 hosszú szót képezhetünk az 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f' és 'g' karakterek felhasználásával, ha egy karaktert csak egyszer használhatunk?

5. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet csak egyszer választhatunk? Hányféleképpen tudunk kiválasztani 2 könyvet az 5-ből, amit nyaralásra viszünk magunkkal?

6. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet többször is választhatunk? Hányféleképpen tudunk kiválasztani 3 gombócot az 5-féle fagylaltból, ha a választás sorrendje nem számít?

Összefoglaló

Feladat: n elemből lehetséges sorrendje.

különböző elemek	vannak azonos típusú elemek
$n!$	$\frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$

Feladat: n elemből k darabot választunk.

	ismétléssel választunk	ismétlés nélkül választunk
sorrend számít	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
sorrend nem számít	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

4

1. 5! = 120
2. 8! / 3! x 2! x 3! = 560
3. 3^7 = 2178
4. 7! / (7 – 5)! = 2520
5. 5 alatt a 2 = 10
6. 5+3-1 alatt a 3 = 7 alatt a 3 = 35

1. Mondja ki a gráf csúcsainak *fokszáma* és a gráf *élszáma* közötti összefüggést! Van-e olyan egyszerű gráf, mely csúcsainak fokszámai 1,2,2,2,2,4? Válaszát indokolja!

Minden $G = (V, E)$ gráfra $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Tehát egy gráf csúcsainak fokszámainak összege az élek számának kétszere, ezért mindig páros szám. Ez zárja ki, hogy létezzen az 1,2,2,2,2,4 fokszámsorozatú gráf.

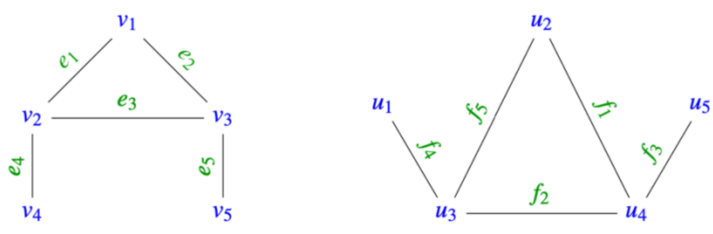
2. Definiálja gráfok *izomorfiáját*! Mutasson példát két gráfra melyek izomorfak, és adja meg a közöttük lévő izomorfiát is!

Definíció

Két $G = (V, E)$ és $H = (U, F)$ gráf izomorfak, ha léteznek olyan $f : V \to U$ és $g : E \to F$ bijekciók (egyértelmű hozzárendelések), hogy

$$\forall v \in V \wedge e \in E : \quad v \in e \iff f(v) \in g(e)$$

Példa



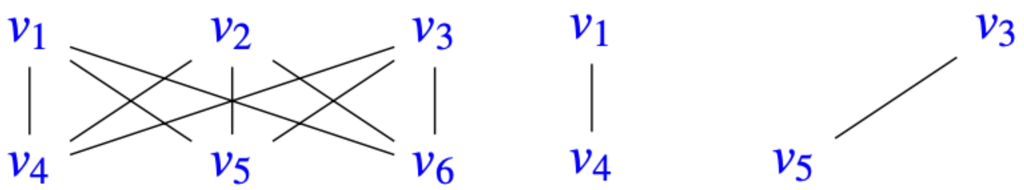
$G = (V, E)$ $\qquad$ $H = (U, F)$

3. Definiálja a *részgráf* és *feszített részgráf* fogalmát! Mutasson *két* példát G ill. H gráfokra, melyekre H részgráfja, de nem feszített részgráfja G-nek!

Definíció

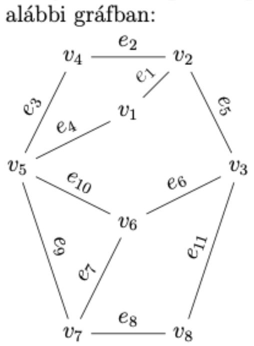
Egy $G = (V, E)$ gráfnak a $H = (U, F)$ gráf részgráfja, ha $\quad U \subset V \quad \wedge \quad F \subset E$

Példa



$G_1 = (V_1, E_1)$ $\qquad$ $G_3 = (V_3, E_3)$

4. Definiálja a *séta* fogalmát gráfokra! Adjon példát *két* különböző sétára v_1 és v_8 között az alábbi gráfban:

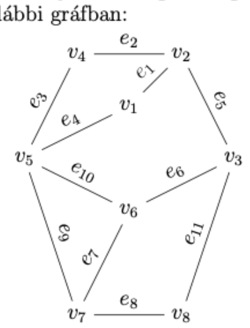


Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú sétának nevezünk, ha

- $v_i \in V$ $(0 \leq i \leq k)$, $\quad e_i \in E$ $(1 \leq i \leq k)$
- $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(1 \leq i \leq k)$

5. Definiálja az *út* fogalmát gráfokra! Adjon példát *két* különböző útra v_1 és v_8 között az alábbi gráfban:



Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú útnak nevezünk, ha

- ez egy séta
- $v_i \neq v_j$ $(i \neq j)$

6. Definiálja az *összefüggő* gráfok fogalmát! Mutasson *egy-egy* példát összefüggő és nem összefüggő gráfra!

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráf összefüggő, ha $\forall u, v \in V$, $u \neq v$ van u és v között séta.

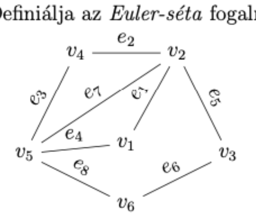
7. Definiálja a *fa* fogalmát gráfok körében! Mutasson *egy-egy* példát fa és nem fa gráfra!

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráfot fának hívunk, ha

- összefüggő;
- körmentes.

8. Definiálja az *Euler-séta* fogalmát! Mutasson példát Euler-sétára az alábbi gráfban:

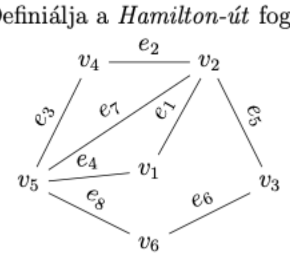


Definíció

Egy G gráfban a $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta egy Euler-séta, ha

- $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$.
- a séta G minden élét tartalmazza.
- zárt Euler-séta: $v_0 = v_k$

9. Definiálja a *Hamilton-út* fogalmát! Mutasson példát Hamilton-útra az alábbi gráfban:



Definíció

Legyen G egy véges egyszerű gráf.

- A G gráfban egy út Hamilton-út, ha minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.