Diszkrét matematika II. feladatok

2.

Bemelegítő feladatok

1. Az euklideszi algoritmussal számolja ki az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és adja meg a legkisebb közös többszörösüket is.

   a) $a = 13, b = 14$; b) $a = 16, b = 37$; c) $a = 90, b = 111$; d) $a = 168, b = 219$;
   e) $a = 180, b = 219$; f) $a = 756, b = 795$; g) $a = 1440, b = 1587$; h) $a = 3048, b = 4611$.

Gyakorló feladatok

2. Milyen $x \in \mathbb{Z}$ egészek elégítik ki a következő kongruenciákat:

   a) $x \equiv 1 \mod 3$; b) $2x \equiv 1 \mod 3$; c) $2x \equiv 1 \mod 4$; d) $2x \equiv 2 \mod 4$
   e) $x(x-2) \equiv 0 \mod 8$; f) $x^2 \equiv 1 \mod 5$; g) $x^2 \equiv 1 \mod 6$; h) $x^4 \equiv 1 \mod 5$

Érdekes feladatok

3. Legyenek $z = i$ és $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex számok. Mely n egészekre teljesül, hogy $z^n = w^n = 1$? Válaszát indokolja!

4. Mutassa meg, hogy $(ca, cb) = c(a, b)$ ill. $(a, b) = (a - b, b)$. Az összefüggések segítségével számolja ki a $(2^{13} - 1, 2^8 - 1)$ ill. $(2^{15} - 1, 2^9 - 1)$ legnagyobb közös osztókat!

5. Legyen $F_1 = F_2 = 1$ és $n \geq 1$ esetén $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Ekkor az F_n sorozatot *Fibonacci sorozatnak* hívjuk, első néhány eleme: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... Mutassa meg, hogy $(F_{n+1}, F_n) = 1$

Szorgalmi feladatok

9. Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám! Mi lesz (F_{n+2}, F_n) ill. (F_{n+3}, F_n)?