

Diszkrét matematika 1

Gráfok

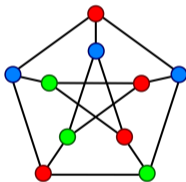
Mérai László

`merai@inf.elte.hu`

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Gráfok

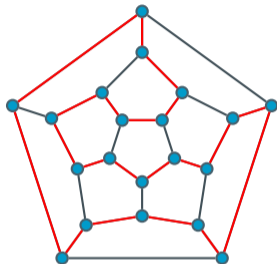


Hamilton-út, Hamilton-kör

Definíció

Legyen G egy véges egyszerű gráf.

- A G gráfban egy út **Hamilton-út**, ha minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz.
- A G gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz.
- minden **élet** pontosan egyszer tartalmaz
→ Euler-séta
- minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz
→ Hamilton-út



Hamilton-kör
a dodekaéderen

Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére

Tétel (Dirac)

Legyen $G = (V, E)$ egy véges, egyszerű gráf $n = |V| \geq 3$ csúccsal. Ha minden $v \in V$ csúcsra $d(v) \geq n/2$, akkor G -ben létezik Hamilton-kör.

Bizonyítás.

A tétel adott n -re **indirekt** bizonyítjuk.

- Tfh adott n -re **nem** igaz az állítás.
- Ekkor vannak ellenpéldák. Legyen G egy **maximális** élszámú ellenpélda.
- Mivel G maximális élszámú ellenpélda, behúзва egy (eddig nemlétező) élt v és v' között, az új gráf már **nem** lesz ellenpélda. \implies az új gráfban **van** Hamilton-kör.
- Ekkor G -ben **van** Hamilton-út.

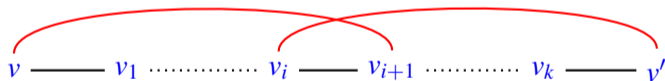
Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére

Tétel (Dirac)

Legyen $G = (V, E)$ egy véges, egyszerű gráf $n = |V| \geq 3$ csúccsal. Ha minden $v \in V$ csúcsra $d(v) \geq n/2$, akkor G -ben létezik Hamilton-kör.

Bizonyítás. (folyt.)

- G maximális élszámú ellenpélda, amiben van Hamilton-út.
- **Állítás:** $\exists i : \{v_i, v'\} \in E \wedge \{v, v_{i+1}\} \in E$



Biz.: Tfh nincs ilyen

- $d(v) \geq n/2 \Rightarrow$ ezek bal szomszédja nincs összekötve v' -vel \Rightarrow marad $\leq n - 1 - n/2 = n/2 - 1$ lehetséges szomszédja v' , ez **ellentmond** $d(v') \geq n/2$ fokszámnak
- Hamilton-kör: $v_1, \dots, v_i, v', \dots, v_{i+1}, v$