Diszkrét matematika II. feladatok

Kiegészítő feladatok — öt-és-feledik alkalom :)

Lineáris kongruenciarendszerek megoldása — Kínai maradéktétel (Szun Ce tétele) segítségével

1. Oldjuk meg a következő kongruenciarendszereket:

e) $\begin{cases} 5x \equiv 2 \mod 6 \\ 7x \equiv 3 \mod 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x \equiv 3 \mod 7 \\ 3x \equiv 7 \mod 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x \equiv 2 \mod 4 \\ 4x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x \equiv 1 \mod 6 \\ 7x \equiv 9 \mod 10 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x \equiv 2 \mod 3 \\ 3x \equiv 2 \mod 7 \\ 9x \equiv 7 \mod 11 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x \equiv 1 \mod 4 \\ 7x \equiv 2 \mod 9 \\ 9x \equiv 3 \mod 13 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 5x \equiv 3 \mod 6 \\ 3x \equiv 9 \mod 10 \\ 8x \equiv 9 \mod 15 \end{cases}$

2. Keressük meg a kínai maradéktétel alkalmazásával azokat az egész számokat, amelyek 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at adnak maradékul.

3. Adjuk meg azt a legkisebb természetes számot, amely 28-as alapú számrendszerben felírva 3-ra, 19-es alapú számrendszerben felírva pedig 4-re végződik. Oldjuk meg a feladatot kongruenciák segítségével.

Oszthatósággal kapcsolatos feladatok — használhatjuk a középiskolában tanultakat is:

4. Bizonyítsuk be, hogy 6 osztója az $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$-nek, ahol n egész szám.

5. Jelöljön m egész számot. Bizonyítsuk be, hogy $m^5 - m$ osztható 30-cal.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a 4-gyel nem osztható páros szám, akkor
   $a \cdot (a^2 - 1) \cdot (a^2 - 4)$ osztható 960-nal.

7. Bizonyítsuk be, hogy három egymás után következő egész szám köbének összege osztható
   a) a középső szám 3-szorosával; b) 9-cel.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a tizes számrendszerben ábrázolt bármelyik háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írjuk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal.

9. Lássuk be, hogy két páratlan szám négyzetének különbsége mindig osztható 8-cal.

10. Bizonyítsuk be, hogy
    a) $n^6 - 1$ osztható 7-tel, ha $\gcd(n, 7) = 1$;
    b) $n^{12} - 1$ osztható 7-tel, ha $\gcd(n, 7) = 1$;
    c) $n^{6k} - 1$ osztható 7-tel, ha $\gcd(n, 7) = 1$.

11. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész x-re $x^7 \equiv x \mod 42$.

12. Bizonyítsuk be, hogy $n^{13} - n$ minden n egészre osztható a $2, 3, 5, 7$ és 13 számokkal.

13. Mutassuk meg, hogy $a^{1729} \equiv a \mod 1729$, habár az $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ NEM prím.