Diszkrét matematika II.

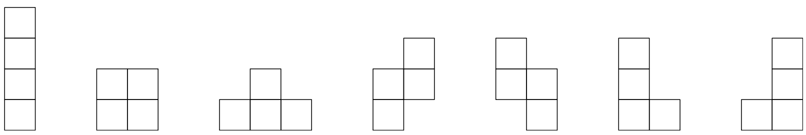
1. szorgalmi feladatsor

Összesen két szorgalmi feladatsor lesz, egyenként 8 pont értékben. Akár minden feladatra adható be megoldás, de összesen legfeljebb 10 pont szerezhető. Nincs minimum elérendő pontszám, a feladatsorral nem kötelező foglalkozni a tárgy teljesítéséhez. A kézzel írott, majd szkennelt, fényképezett vagy tabletről exportált megoldások a Canvas megfelelő feladatához tölthetők fel november 3-ig. Ha ez nem működne, november 4-én a gyakorlaton is be lehet adni papíron.

1. A Fibonacci-sorozatot az $F_1 = F_2 = 1$ kezdő elemek és az $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\forall n \geq 1)$ rekurzió definiálja. Vannak-e olyan n és k pozitiv egészek, amire $F_n = 10^k + 5$? *(2 pont)*
   Tipp: Vizsgáld az egyenlet mindkét oldalának egy ügyesen választott prímmel vett osztási maradékát.

2. Az $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ számok közül valaki kiválasztott 501 darab különbözőt. Bizonyítsd be, hogy ezek között biztosan lesz
   a) két relatív prím. *(1 pont)*
   b) két olyan, amik közül az egyik osztója a másiknak. *(1 pont)*

3. Adott 175 darab 4 egység területű dominó, az alábbi hét típus mindegyikéből 25 darab. Le lehet-e fedni velük egy 20×35 egység területű sakktáblát? A dominókat szabad elforgatni és a tábla négyzetrácsára illeszkedve átfedés nélkül kell őket elhelyezni. *(2 pont)*



4. Az $\{1, 2, 3, \ldots, 2025000000\}$ halmazból egymástól függetlenül véletlenszerűen kiválasztunk egy a és egy b számot. Bizonyítsd be, hogy annak a valószínűsége, hogy $(a, b) = 1$ legfeljebb 64%. *(2 pont)*