Diszkrét matematika 1

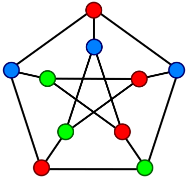
Gráfok II.

Mérai László, Takáts Marcella
merai@inf.elte.hu
takats@inf.elte.hu

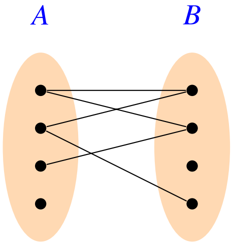
Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Gráfok



Páros gráfok



Páros gráf

- csúcsok két osztályban;
- élek csak osztályok között;
- osztályon belül nincs él.

Definíció

A $G = (V, E)$ gráf páros gráf (kétosztályú gráf, bipartite graph), ha

- $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$
- $\forall e \in E$: $e = \{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$.

Példa

- hallgatók – egyetemek
- hallgatók – kollégiumok
- telefonkészülék – adótorony

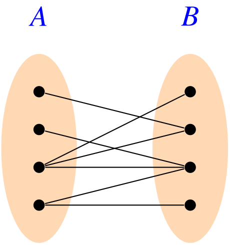
Páros gráfok

Páros gráf: $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, $\forall e \in E : e = \{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$

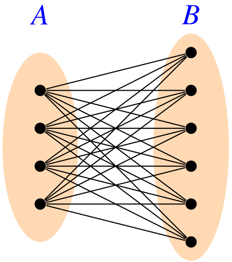
- **Állítás:** G páros $\iff$ minden kör páros hosszú (**Bizonyítás.** : NB)
- G páros gráf: csúcsai kiszínezhetőek két színnel, hogy minden él végpontjai különböző színűek.

Példa

- Minden fa páros gráf



- Teljes páros gráf



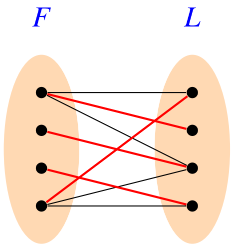
♡ Tinder ♡ – párosítás páros gráfokban

Társkeresés:

- Adott lányok L és fiúk F egy-egy csoportja.
- Szeretnénk fiú-lány párokat létrehozni.
- Milyen feltételek mellett találunk mindenkinek párt?

Páros gráfok:

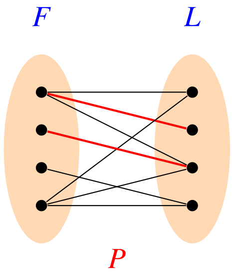
- gráf csúcsai: lányok, fiúk
- él ℓ lány és f fiú között: szívesen alkotnak párt
- fiú-lány párokat keresünk $\longrightarrow$ páros gráf
- olyan $P \subset E$ élhalmaz keresünk, melyek
  - végpontjai különbözőek
  - minden csúcs rajta van egy $p \in P$ élen



Párosítás páros gráfokban

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy véges, egyszerű gráf.
Ekkor $P \subset E$ független élhalmaz vagy párosítás, ha P éleinek nincs közös végpontja.



Megjegyzés:

- tetszőleges, nem csak páros gráfban értelmes

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy véges, egyszerű gráf, $P \subset E$ egy párosítás.

- P fedi a $v \in V$ csúcsot, ha v végpontja egy P-beli élnek.
- a P párosítás teljes párosítás, ha minden csúcsot fed.

Párosítás teljes gráfokban

Társkeresés:

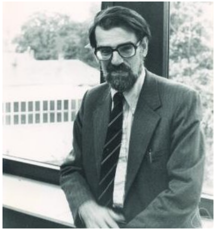
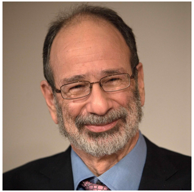
- Legyen $G = (L \cup F, E)$ páros gráf, ahol $L = \{$lányok$\}$, $F = \{$fiúk$\}$
- $\{\ell, f\} \in E$, ha ℓ és f szívesen alkotnak párt
- **Cél:** találjunk teljes párosítást
- szükséges feltétel: $|L| = |F|$

Finomítsunk a problémán:

- Legyen G egy teljes páros gráf (azaz minden lány és fiú szívesen alkot párt)
- azonban mindenki rangsorolja a másik halmazt (preferencia, 1. hely: legjobb partner, utolsó hely: legkevésbé jó partner)
- a lista teljes: minden ellenkező nemű rajta van
- a lista szigorú: nincs megosztott helyezés

Stabil párosítás

Eredeti probléma: USA ’60-as évek: rezidensek – kórházi pozíciók

- David Gale és Lloyd Stowell Shapley algoritmusa (1962)
- Alvin Eliot Roth: továbbfejlesztette és módosította az algoritmust
- 2012 **Közgazdasági Nobel-díj** (Shapley és Roth)

Alkalmazások:

- egyetemi felvételi rendszer
- New England vesecsere program (élő donor - beteg)

Stabil párosítás

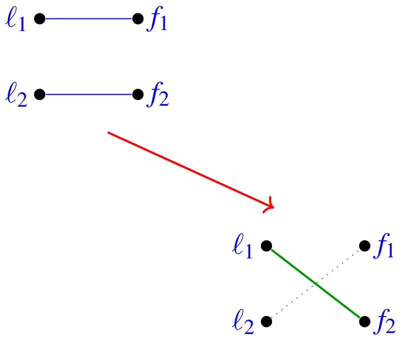
- Legyen $G = (L \cup F, E)$ egy teljes páros gráf
- minden csúcshoz tartozik egy **teljes**, **szigorú** preferencialista
- egy adott párosítás nem stabil, ha tudunk annál jobbat

Definíció

Legyen $G = (L \cup F, E)$ egy teljes páros gráf. A $P \subset E$ párosítás instabil, ha $\exists \{\ell_1, f_1\}, \{\ell_2, f_2\} \in P$, hogy

- ℓ_1 listáján f_2 előrébb van, mint f_1;
- f_2 listáján ℓ_1 előrébb van, mint ℓ_2;

Egy párosítás stabil, ha nem instabil.



Azaz, egy párosítás stabil, ha nem létezik olyan ℓ és f, hogy ők jobban kedvelik egymást mint a jelenlegi partnereiket.

Cél: találjunk stabil párosítást

Stabil párosítás: Gale–Shapley-algoritmus

1. Az F halmaz elemeit sorba rendezzük
2. Az F minden olyan eleme, amelyiknek még nincs párja, ajánlatot tesz a preferencialistáján a legerősebb ℓ-nek, aki még nem utasította vissza
3. L halmaz elemei:
   - ha még nincs párja, f-et lebegteti (nem ad végleges választ)
   - ha van már lebegtetett párja, az új jelöltet összehasonlítja, és csak az erősebbet lebegteti tovább
4. Ha van olyan eleme F-nek, aki nem lebegtetett $\rightarrow$ GOTO $2.$

5 Ha F minden eleme lebegtetett, a lebegtetett párok véglegessé válnak

Stabil párosítás: Gale–Shapley-algoritmus – Példa

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
f_1	2 / 1	3 / 2	1 / 3
f_2	1 / 2	3 / 3	2 / 2
f_3	3 / 3	2 / 1	1 / 1

Azaz

- f_1 preferenciája: $\ell_2 > \ell_1 > \ell_3$
- ℓ_3 preferenciája: $f_1 > f_2 > f_3$

1. f_1 ajánlatot tesz ℓ_2-nek

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
lebegtetett	–	f_1	–

2. f_2 ajánlatot tesz ℓ_2-nek, de ℓ_2: $f_2 > f_1$

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
lebegtetett	–	f_2	–

3. f_3 ajánlatot tesz ℓ_1-nek

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
lebegtetett	f_3	f_2	–

4. f_1 ajánlatot tesz ℓ_1-nek, de ℓ_1: $f_3 > f_1$

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
lebegtetett	f_3	f_2	–

5. f_1 ajánlatot tesz ℓ_3-nek

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
lebegtetett	f_3	f_2	f_1

Stabil párosítás: Gale–Shapley-algoritmus

Tétel

A Gale–Shapley-algoritmus véges sok lépésben véget ér és stabil párosítást ad.

Megjegyzések:

- Az algoritmus véges: legfeljebb n^2 ajánlattétel.
- $\forall f \in F$ a listáján egyre hátrébb lévő elemnek tesz ajánlatot.
- $\forall \ell \in L$ lebegtetett párja a listáján egyre előrébb van
- látszólag L elemei járnak jól, valójában F elemei

Definíció

Egy párosítás F-optimális stabil párosítás, ha $\forall f \in F$ számára legalább olyan kedvező, mint bármely más stabil párosítás.

Stabil párosítás: Gale–Shapley-algoritmus

F-optimális stabil párosítás: ha $\forall f \in F$ számára legalább olyan kedvező, mint bármely más stabil párosítás.

Állítás

A Gale–Shapley-algoritmus fenti formájában F-optimális stabil párosítást eredményez.

- Sőt: a kapott párosítás L-pesszimális, azaz L elemei számára a legkedvezőtlenebb.
- Ha L elemei tennének ajánlatot, L-optimális párosítást kapnánk.

Állítás

Minden fenti G gráfban létezik F-optimális és L-optimális párosítás is, és ezek pontosan a fenti algoritmus által meghatározott párosítások.