

Diszkrét matematika II. feladatok

11.

Bemelegítő feladatok

1. Tekintsük az alábbi kódokat. Ellenőrizze, hogy lineáris-e a kód, és abban az esetben írja fel a kód generátor és ellenőrzőmátrixát! Adja meg az n, k paramétereit!

- a) $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1 + c_2 + c_3), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{F}_2$;
- b) $(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2, c_1 + c_2, \max\{c_1, c_2\}), c_1, c_2 \in \mathbb{F}_2$;
- c) $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, 2c_1 + 3c_2, c_1 + 4c_3), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{F}_5$;
- d) $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1, 1 - c_2c_3), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{F}_5$;
- e) $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1 + 2c_2, c_2 + 3c_3, 4c_1 + c_3, 3c_2 + c_3), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{F}_5$.

2. Tekintsük a kódszavak következő halmazát:

$$\mathcal{C} = \{(c_1, c_2, \dots, c_7) \in \mathbb{F}_7 : \{c_1, c_2, \dots, c_7\} = \{1, 2, \dots, 7\}\}.$$

Lineáris-e a kód? Mi lesz a kódtávolság?

3. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük az adott mátrixokhoz, mint generátormátrixokhoz tartozó (n, k) lineáris kódokat. Adja meg az n, k és a kódtávolság értékeit! Add meg valamelyik ellenőrző mátrixát!

Gyakorló feladatok

4. Tekintsük az 1. feladatban szereplő kódokat! Ellenőrizze, hogy a kódok MDS ill. perfekt kódok-e!
5. Tekintsük az alábbi lineáris kódolást: $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1 + c_2, c_3, c_1 + c_3)$.
Adja meg a kód két-két különböző generátor- és ellenőrző mátrixát!

Érdekes feladatok

6. Tekintsünk a $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1 + c_2, c_1 + c_3, c_2 + c_3)$ bináris kódolást! Mennyi lesz a kód távolsága? Hány olyan *tetszőleges* szó (azaz nem feltétlenül kódszó) van \mathbb{F}_2^5 -ben, ami minden kódszótól legalább 2 távolságra van?
7. Döntse el, hogy az alábbi n, k, d választással létezik-e \mathbb{F}_q feletti $[n, k, d]$ lineáris kód! Ha nem, indokoljon, ha igen, mutasson példát!
- a) $[7, 6, 2], q = 5$ b) $[8, 6, 3], q = 2$ c) $[8, 6, 3], q = 9$ d) $[6, 4, 3], q = 2$ e) $[6, 4, 3], q = 5$
8. Legyen $n = 5, k = 2, d = 4$. Milyen q esetén létezik $[n, k, d]$ paraméterű lineáris kód \mathbb{F}_q fölött? Válaszát indokolja!

Szorgalmi feladatok

9. Írjon programot, mely egy adott szisztematikus kódoláshoz tartozó G generátormátrix esetén meghatározza a kód minimális távolságát!