2025. 02. 10.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

I. éves
Programtervező informatikus

Analízis 1

Kovács Sándor gyakorlata

(Szerda, 8^{30} – 10^{00}: DT-0.220)
(Szerda, 12^{00} – 13^{30}: DT-0.312)
(Szerda, 14^{00} – 15^{30}: DT-0.311)

2025. tavasz

Tudnivalók

I. A tárgy követelményrendszere

II. Segédanyagok:

- A görög ábécé és a fraktúra
- Valós-valós függvények határértéke
- Hiperbolikus függvények és inverzeik
- MacTutor History of Mathematics archive

III. Ajánlott olvasmányok:

- Kovács Sándor: Matematikai alapozás
- Schipp Ferenc: Analízis I.
- Simon Péter: Bevezetés az analízisbe I.
- Szili László: Analízis feladatokban I.

IV. A félév gyakorlatainak tematikája:

„Korábbi zh-feladatok" megoldása

- **2021. tavasz**
  (a) **Az 1. zh feladatainak megoldása**.
  (b) **A 2. zh feladatainak megoldása**.
- **2022. tavasz**
  (a) **Az 1. zh feladatainak megoldása**.
  (b) **A 2. zh feladatainak megoldása**.
- **2023. tavasz**
  (a) **Az 1. zh feladatainak megoldása**.
  (b) **A 2. zh feladatainak megoldása**.
- **2024. tavasz**
  (a) **Az 1. zh feladatainak megoldása**.
  (b) **A 2. zh feladatainak megoldása**.

1. gyakorlat (2025. 02. 12.): **Egyenlőtlenségek:** háromszög-egyenlőtlenségek, a Bernoulli-egyenlőtlenség, a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség, alkalmazások.

- **Órai feladatok.**

- **Házi feladatok.**
- **Gyakorló feladatok.**
- **További feladatok.**

2. gyakorlat (2025. 02. 19.): **Számhalmazok korlátossága:** korlátos számhalmazok, számhalmaz maximuma és minimuma, a szuprémum elv, zámhalmaz szuprémumának és infimumának a meghatározása.

- **Szükséges ismeretek.**
- **Órai feladatok.**
- **Házi feladatok.**

3. gyakorlat (2025. 02. 26.): **Függvények:** halmaz függvény által létesített képe és ősképe; függvény invertálhatóságának fogalma és az inverz függvény meghatározása; függvények kompozíciója.

- **Szükséges ismeretek.**
- **Órai feladatok.**
- **Házi feladatok.**

4. gyakorlat (2025. 03. 05.): **Valós sorozatok 1.:** sorozatok divergenciája és konvergenciája; a határérték kiszámítása a definíció alapján.

- **Szükséges ismeretek.**
- **Órai feladatok.**
- **Házi feladatok.**

5. gyakorlat (2025. 03. 12.): **Valós sorozatok 2.:** sorozatok konvergenciájának igazolása a műveletekre vonatkozó tételek és a nevezetes sorozatok határértékére vonatkozó állítások alapján.

- **Szükséges ismeretek.**
- **Órai feladatok.**
- **Házi feladatok.**

6. gyakorlat (2025. 03. 19.): **Valós sorozatok 3.:** az Euler-féle szám, rekurzív sorozatok kvalitatív vizsgálata (konvergencia, monotonitás, határérték).

- **Szükséges ismeretek.**
- **Órai feladatok.**
- **Házi feladatok.**

Az 1. zárthelyi feladatai (2025. 04. xx.)

7. gyakorlat (2025. 03. 26.): **Numerikus sorok 1.:** numerikus sorok összegének kiszámitása (mértani és teleszkopikus sorok); számok p-adikus tört alakja, az Euler-féle szám approximációja.

- **Szükséges ismeretek.**

Korábbi zh-feladatok megoldása

2021 tavasz

Az 1. zh feladatai

1. **Vizsgálja** a
$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{5+2x^2}{x^2+2} \in \mathbb{R} : \ x \in (-1, +\infty) \right\}$$
halmazt korlátosság szempontjából! **Határozza meg** $\mathcal{H}$ infimumát és szuprémumát! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

2. Az
$$f(x) := \sqrt{x+3} \quad (1 \le x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x^2 - 4x + 1 \quad (1 > x \in \mathbb{R}).$$
függvények esetébn határozza mg az $f \circ g$ kompozíciót, majd **számítsa ki** a $[-1, 2]$ halmaz f által létesített ősképét!

3. A határérték definíciója alapján **lássa be**, hogy fennáll a
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} \right) = \frac{1}{3}$$
egyenlőség!

4. **Számítsa ki** az alábbi határértékeket!
   (a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n(-2)^n + 2^{2n+1}}{4^n + 3^{n+1}} \right);$
   (b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n + n} \right);$
   (c) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{2n+5}{2n+3} \right)^{4n+5} \right).$

5. **Mutassa meg**, hogy az
$$x_0 := 0, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^2 + 3}{4} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$
sorozat konvergens, és **számítsa ki** határértékét!

Útm.

1.
- Világos, hogy minden $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{5+2x^2}{x^2+2} = 2 \cdot \frac{2x^2+5}{2x^2+4} = 2 \cdot \frac{2x^2+4+1}{2x^2+4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^2+4}\right) = 2 + \frac{1}{x^2+2}.$$

- Mivel bármely $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{x^2+2} > 0, \qquad \text{ezért} \qquad \mathcal{H} \ni \frac{5+2x^2}{x^2+2} > 2,$$

azaz 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Látható, hogy az

$$\frac{1}{x^2+2}$$

tört az x^2 nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei az ilyen x-ekre 2-höz közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen 2-nél nagyobb korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in (-1, +\infty) : \qquad \mathcal{H} \ni 2 + \frac{1}{x^2+2} < 2 + \varepsilon.$$

Valóban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$2 + \frac{1}{x^2+2} < 2 + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 2,$$

és ilyen ilyen $x \in (-1, +\infty)$ szám létezik, hiszen ha $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right)$, akkor

$$x^2 > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Mivel $2 \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$\mathcal{H} \ni 2 + \frac{1}{x^2+2} \leq 2 + \frac{1}{0^2+2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = 2, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}.$$

2. Mivel

$$\mathcal{D}_f = [1, +\infty) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{D}_g = (-\infty, 1),$$

ezért

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (-\infty, 1) : \ x^2 - 4x + 1 \in [1, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in (-\infty, 1) : \ x^2 - 4x + 1 \geq 1\right\}.\end{aligned}$$

Másrészt,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 \geq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x-4) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty).\end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in (-\infty, 1) : \quad x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4\} = (-\infty, 0].$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in (-\infty, 0]$ esetén

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 4x + 1) = \sqrt{(x^2 - 4x + 1) + 3} = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \\ &= \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2| = 2 - x.\end{aligned}$$

A $\mathcal{H} := [-1, 2]$ halmaz f szerinti ősképe:

$$\begin{aligned} f^{-1}[\mathcal{H}] &= \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{H}\} = \left\{x \in [1, +\infty) : \ \sqrt{x+3} \in [-1, 2]\right\} = \\ &= \left\{x \in [1, +\infty) : \ -1 \leq \sqrt{x+3} \leq 2\right\}.\end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{x+3} \geq 0$, ezért

- $-1 \leq \sqrt{x+3} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-3, +\infty);$
- $\sqrt{x+3} \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 3 \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 1.$

Így

$$f^{-1}[\mathcal{H}] = \{x \in [1, +\infty) : \ -3 \leq x \leq 1\} = \{1\}.$$

3. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 6n + 5} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$(*) \qquad \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \left(n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon\right)$$

teljesül. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$\left|\frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n^2+12n+3-(3n^2+6n+5)}{3(3n^2+6n+5)}\right| = \left|\frac{6n-2}{3(3n^2+6n+5)}\right| =$$

$$= (\text{ha } n \geq 1,\ \text{akkor } 6n-2 > 0 \text{ és } 3n^2+6n+5 > 0) =$$

$$= \frac{6n-2}{3(3n^2+6n+5)} = \frac{6n-2}{9n^2+18n+15} < \frac{6n}{9n^2} = \frac{2}{3n} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > 2/3\varepsilon$. Ha tehát

$$N := \max\left\{1, \left[\frac{2}{3\varepsilon}\right] + 1\right\} = \left[\frac{2}{3\varepsilon}\right] + 1$$

Ekkor tetszőleges $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left|\frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

azaz $(*)$ teljesül.

4. (a) Látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n(-2)^n + 2^{2n+1}}{4^n + 3^{n+1}} = \frac{n(-2)^n + 2\cdot 4^n}{4^n + 3\cdot 3^n} = \frac{n\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2}{1 + 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n} \longrightarrow \frac{0+2}{1+0} = 2 \quad (n \to \infty),$$

hiszen ha $q \in (-1, 1)$, akkor

$$q^n \longrightarrow 0 \quad \text{és} \quad nq^n \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

(b) Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\sqrt[n]{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n + n} = \sqrt[n]{5^n\left(2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)} = 5\cdot\sqrt[n]{2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

és az

$$x_n := 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 2\cdot 0 + 3 + 0 = 3 > 0$$

(hiszen ha $q \in (-1,1)$, akkor $q^n \longrightarrow 0 \quad \text{és} \quad nq^n \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty)$),
ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n + n}\right) = \lim_{n\to\infty}(5\cdot\sqrt[n]{x_n}) = 5\cdot 1 = 5.$$

(c) Az $n\to\infty$ határátmenetben

$$\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{4n+5} = \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{4n+6}\cdot\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{2n+3+2}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{2}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{-1} \longrightarrow (e^2)^2\cdot\frac{1}{1} = e^4.$$

5. **1. lépés.** Ha az (x_n) sorozat konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = \alpha$, és így

$$\alpha = \frac{\alpha^2+3}{4} \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha^2 - 8\alpha + 3 = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha\in\{1;\,3\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 0$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x\in[0,1) \qquad (n\in\mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 0 \in [0,1)$;
- ha valamely $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $x_n\in[0,1)$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+3}{4} \in \left[0, \frac{1^2+3}{4}\right) = [0,1).$$

3. lépés. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{3}{4}, \qquad x_2 = \frac{\frac{9}{16}+3}{4}$$

az a „gyanúnk” támad, hogy (x_n) szigorúan monoton növekedő. Mivel

$$x_0 = 0 < \frac{3}{4} = x_1,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett

$$(*) \qquad 0 \leq x_n < x_{n+1},$$

akkor $0 \leq x_{n+1} < x_{n+2}$. Valóban, $(*)$-ból $x_n^2 < x_{n+1}^2$, és így

$$x_n^2 + 3 < x_{n+1}^2 + 3, \qquad \text{ahonnan} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4} < \frac{x_{n+1}^2 + 3}{4} = x_{n+2}$$

következik.

4. lépés. Az (x_n) sorozat – lévén, hogy szigorúan monoton növekedő és korlátos – konvergens és határértékére: $\lim(x_n) = 1$ teljesül.

A 2. zh feladatai

1. Konvergens-e a
$$\sum_{n=0} \left(\frac{2\cdot(-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}}\right)$$
végtelen sor? Ha igen, **számítsa ki** összegét!

2. **Döntse el**, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!
$$\text{a)}\ \sum_{n=1} \left(\frac{(2n+1)!}{3^{n^2}}\right), \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1} \left(\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1}\right), \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}}\right).$$

3. **Határozza meg** a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right) \qquad (x\in\mathbb{R})$$
hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

4. **Számítsa ki** az
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$$
határértéket! A definíció alapján is **igazolja** az állítást!

5. **Határozza meg** az
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & (x<1), \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{2-x} & (1\le x<2), \\[2ex] 1 & (x=2), \\[2ex] \dfrac{\sin(2-x)}{2x-4} & (x>2). \end{cases}$$
függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát!

Útm.

1. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{2\cdot(-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{2\cdot[(-1)^n + 2^n]}{3\cdot 3^{2n}} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\left(-\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}$$

és

$$\left|-\frac{1}{9}\right| < 1, \qquad \text{ill.} \qquad \left|\frac{2}{9}\right| < 1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, amelynek összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right\} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{9}} + \frac{1}{1-\frac{2}{9}}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{9}{10} + \frac{9}{7}\right\} = \frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{51}{35}.$$

2. (a) Ha

$$x_n := \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(2(n+1)+1)!}{3^{(n+1)^2}}\cdot\frac{3^{n^2}}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{3^{n^2}}{3^{n^2+2n+1}} =$$

$$= \frac{(2n+3)(2n+2)}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3}\cdot n^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{n}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{3}\cdot 0\cdot(2+0)\cdot(2+0) = 0.$$

Így a d'Alembert-féle hányadoskritérium felhasználásával azt kapjuk, hogy a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

(b) Ha

$$x_n := \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$x_n = \left(\frac{3n+3+1}{3n+3}\right)^{n^2+1} = \left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{n^2+1} > 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így (x_n) nem nullsorozat, következésképpen a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Megjegyezzük, hogy ennek a sornak a divergenciája a Cauchy-féle gyökkritérium felhasználásával is belátható, ui. az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n+\frac{1}{n}} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}} \longrightarrow \sqrt[3]{e} \cdot 1 = e^{1/3} > e^0 = 1,$$

hiszen

$$\frac{3n+4}{3n+3} \longrightarrow 1 > 0 \quad (n \to \infty), \qquad \text{így} \qquad \sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty),$$

továbbá

$$\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n} = \sqrt[3]{\left(\frac{3n+3+1}{3n+3}\right)^{3n+3}} \cdot \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{-1} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3}} \cdot \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{-1} \longrightarrow \sqrt[3]{e} \cdot \frac{1}{1} = \sqrt[3]{e} \quad (n \to \infty).$$

(c) Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{divergens,}$$

ezért a $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sor divergenciája miatt minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} > \frac{n}{\sqrt{n^3+n+7}} \overset{\boxed{n \geq 1}}{\geq} \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+7n^3}} = \frac{n}{\sqrt{9n^3}} = \frac{1}{3\sqrt{n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)$$

divergens, ezért a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}}\right)$$

sor a minoránskritérium alapján divergens.

3. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n = \frac{3^{-n} \cdot 3^n}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot \left(\frac{3x+1}{3}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}\left(x+\frac{1}{3}\right)^n,$$

ezért $c := -\frac{1}{3}$ középpontú és

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

együtthatójú hatványsorról van szó. Mivel az $n \to \infty$ határesetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \sqrt{\frac{(n+1)^3+(n+1)+1}{n^3+n+1}} = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{1}} = 1,$$

ezért a hatványsor konvergenciasugara: $R = 1$. Mivel

$$\left|x+\frac{1}{3}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < x+\frac{1}{3} < 12 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R}\backslash\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x = -\frac{4}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}(-1)^n\right)$$

sor a Lebniz-kritérium következtében konvergens, hiszen

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \searrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha $x = \frac{2}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

sor konvergens, hiszen

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és így a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

hiperharmonikus sor konvergens majoránsa.

Összefoglalva:

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right)\right) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

4. Bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ esetén

$$\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} = \frac{x(x^2+x-6)}{x^2-x-2} = \frac{x(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \frac{x(x+3)}{x+1},$$

így

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x(x+3)}{x+1} = \frac{2(2+3)}{2+1} = \frac{10}{3}.$$

A definíció alapján azt kell belátni, hogy

$$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0\ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}:\qquad \left(0<|x-2|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{x(x+3)}{x+1}-\frac{10}{3}\right|<\varepsilon\right).$$

Ha tehát $\varepsilon>0$ és $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, akkor $2\neq x\in(2-1,2+1)=(1,3)$ esetén

$$|x+1|>2 \qquad \text{és} \qquad |3x+5|<14,$$

hiszen

- $x\in(1,3) \quad\Longrightarrow\quad x+1\in(2,4) \quad\Longrightarrow\quad |x+1|>2;$
- $x\in(1,3) \quad\Longrightarrow\quad 3x\in(3,9) \quad\Longrightarrow\quad 3x+5\in(8,14) \quad\Longrightarrow\quad |3x+5|<14.$

Következésképpen

$$\left|\frac{x(x+3)}{x+1}-\frac{10}{3}\right| = \left|\frac{3x^2+9x-10x-10}{3(x+1)}\right| = \left|\frac{3x^2-x-10}{3(x+1)}\right| = \left|\frac{(x-2)(3x+5)}{3(x+1)}\right| =$$

$$= \frac{|3x+5|}{3\,|x+1|)}\cdot|x-2| < \frac{14}{3\cdot 2}\cdot|x-2| < 3\cdot|x-2|<\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad |x-2|<\frac{\varepsilon}{3},$$

így a

$$\delta := \min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

választás megfelelő.

5. A folytonosság és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételek alapján nyilvánvaló, hogy f folytonos a $(-\infty,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$ intervallumok mindegyikén. Látható továbbá, hogy

- f-nek másodfajú szakadása van az $\alpha := 1$ pontban, hiszen

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x} = -\infty.$$

- f-nek elsőfajú szakadása van az $a := 2$ pontban, hiszen

$$\begin{aligned}
\lim_{2-0} f &= \lim_{x\to 2-0} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x} = \lim_{x\to 2-0} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \\
&= \lim_{x\to 2-0} \frac{x+7-9}{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2-0} \frac{x-2}{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2-0} \frac{-1}{\sqrt{x+7}+3} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2+7}+3} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

és

$$\lim_{2+0} f = \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(2-x)}{2x-4} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(2-x)}{2-x} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

így $f \notin \mathfrak{C}[2]$, de $\lim_{\pm 2} f \in \mathbb{R}$.

2022 tavasz

Az 1. zh feladatai

1. **Vizsgálja** a
$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{x^2+9}{3x^2+9} \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty, 3) \right\}$$
halmazt korlátosság szempontjából! **Határozza meg** $\mathcal{H}$ infimumát és szuprémumát! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

2. **Tekintse** az alábbi függvényeket!
$$f(x) := \frac{2}{|x+1|} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x^2 - 2x - 4 \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$
   (a) **Állapítsa meg**, hogy invertálható-e az f függvény!
   (b) **Határozza meg** az $f \circ g$ függvényt!
   (c) **Számítsa ki** a $[-4, 4]$ halmaz g által létesített ősképét!

3. A határérték definíciója alapján **lássa be**, hogy fennáll a
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n^3 - n^2 + 3}{2n^2 - n + 1} \right) = +\infty$$
egyenlőség!

4. **Számítsa ki** az alábbi határértékeket!
   (a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3 - n^2}}{\sqrt{4n+1}} \right)$;
   (b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{5^{n+1} + n^2 3^n} \right)$;
   (c) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{n+5}{2n} \right)^{3n+1} \right)$.

5. **Mutassa meg**, hogy az
$$x_0 := 5, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^2 + 2x_n}{10} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$
sorozat konvergens, és **számítsa ki** a határértékét!

Útm.

1. • Világos, hogy minden $x \in (-\infty, 3)$ esetén

$$(*) \quad \frac{x^2+9}{3x^2+9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2+27}{3x^2+9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2+9+18}{3x^2+9} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{6}{x^2+3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{x^2+3}.$$

• Mivel bármely $x \in (-\infty, 3)$ esetén

$$\frac{2}{x^2+3} > 0,$$

ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{x^2+9}{3x^2+9} > \frac{1}{3},$$

azaz $\frac{1}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Látható, hogy a

$$\frac{2}{x^2+3}$$

tört az x^2 nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei az ilyen x-ekre $\frac{1}{3}$-hoz közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{1}{3}$-nál nagyobb korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists x \in (-\infty, 3): \qquad \mathcal{H} \ni \frac{1}{3} + \frac{2}{x^2+3} < \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Valóban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{x^2+3} < \frac{1}{3} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 3,$$

és ilyen $x \in (-\infty, 3)$ szám létezik, hiszen ha $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right)$, akkor

$$x^2 > \frac{2}{\varepsilon} > \frac{2}{\varepsilon} - 3.$$

Mivel $\frac{1}{3} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

• A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in (-\infty, 3)$ esetén

$$\mathcal{H} \ni \frac{1}{3} + \frac{2}{x^2+3} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{0^2+3}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1.$$

2. (a) Mivel $f(1) = 1 = f(-3)$, ezért f nem invertálható.

   (b) Világos, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in [0, +\infty) : \; x^2 - 2x - 4 \neq -1\right\} = \\ &= \left\{x \in [0, +\infty) : \; x^2 - 2x - 3 \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

   Mivel

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \in \{-1; 3\},$$

   ezért

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in [0, +\infty) : \; (x+1)(x-3) \neq 0\} = [0, +\infty)\backslash\{3\}.$$

   Tehát bármely $3 \neq x \in [0, +\infty)$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{|x^2 - 2x - 3|}.$$

   Az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f \circ g)(x) := \frac{2}{|x^2 - 2x - 3|} \qquad (3 \neq x \in [0, +\infty))$$

   függvény.

   (c) Világos, hogy

$$\begin{aligned} g^{-1}[[-4, 4]] &= \left\{x \in [0, +\infty) : \; x^2 - 2x - 4 \in [-4, 4]\right\} = \\ &= \left\{x \in [0, +\infty) : \; -4 \leq (x-1)^2 - 5 \leq 4\right\} = \\ &= \left\{x \in [0, +\infty) : \; 1 \leq (x-1)^2 \leq 9\right\} = \{x \in [0, +\infty) : \; 1 \leq |x-1| \leq 3\} = \\ &= \{x \in [0, +\infty) : \; 1 \leq x - 1 \leq 3\} \cup \{x \in [0, +\infty) : \; -3 \leq x - 1 \leq -1\} = \\ &= [2, 4] \cup \{0\}.\end{aligned}$$

3. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 + 3}{2n^2 - n + 1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall \omega \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega)$$

teljesül. Valóban, ha $0 < \omega \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3n^3 - n^2 + 3}{2n^2 - n + 1} > \frac{3n^3 - n^2}{2n^2 + 1} = \frac{2n^3 + n^3 - n^2}{2n^2 + 1} = \frac{2n^3 + n^2(n-1)}{2n^2 + 1} \geq$$

$$\overset{n\geq 1}{\geq} \frac{2n^3}{2n^2 + n^2} = \frac{2n^3}{3n^2} = \frac{2n}{3} > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{3\omega}{2},$$

így

$$N := \max\left\{1, \left[\frac{3\omega}{2}\right] + 1\right\} = \left[\frac{3\omega}{2}\right] + 1.$$

4. (a) Látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3 - n^2}}{\sqrt{4n+1}} &= \left(\frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3 - n^2}}{\sqrt{4n+1}}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3 - n^2}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3 - n^2}} = \\
&= \frac{n^2+1}{\sqrt{4n+1}\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-n^2}\right)} = \\
&= \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4} \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{1}\right)} = \\
&= \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

(b) Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\sqrt[n]{5^{n+1} + n^2 3^n} = 5 \cdot \sqrt[n]{5 + n^2 \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

és az

$$x_n := 5 + n^2 \left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = 5 + 0 = 5 > 0,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5^{n+1} + n^2 3^n}\right) = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 5 \cdot 1 = 5.$$

(c) Az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left(\frac{n+5}{2n}\right)^{3n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \cdot \left(\frac{n+5}{n}\right)^{3n+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \cdot \left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}\right]^{3} \cdot \left(1+\frac{5}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot [e^5]^3 \cdot 1 = 0.$$

5. **1. lépés.** Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = \alpha$, és így

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 - 8\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in \{0, 8\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 5$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n \in (0, 8) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 5 \in (0, 8)$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \in (0, 8)$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{10} \in \left(0, \frac{64+16}{10}\right) = (0, 8)\,.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Valóban, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 2x_n}{10} - x_n = \frac{x_n^2 - 8x_n}{10} = \frac{x_n(x_n - 8)}{10} < 0.$$

4. lépés. Mivel a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtében tehát (x_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = 0.$$

A 2. zh feladatai

1. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-3)^n+(-2)^{2n}}{5^{n+1}}\right)$$

végtelen sor? Ha igen, **számítsa ki** összegét!

2. **Döntse el**, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

$$\text{a)}\ \sum_{n=2}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}}\right),\qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}\left(\frac{n^3\cdot 3^n}{(3n)!}\right),\qquad \text{c)}\ \sum_{n=0}\left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^4+n^2+1}\right).$$

3. **Határozza meg** a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2^n}{n(4^n-1)}\cdot(x-1)^n\right)\qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

4. **Számítsa ki** az alábbi határértékeket!

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(x)}{1-\sqrt{\cos(2x)}},\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}-1}{x^3-1}\quad (\alpha\in[0,1]).$$

5. **Határozza meg** az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-x-6} & (x<-2),\\[2ex] \dfrac{e^{2x}-e^x}{2x} & (-2\le x<0),\\[2ex] 1 & (x=0),\\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & (x>0).\end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát!

Útm.

1. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{(-3)^n + (-2)^{2n}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \cdot \left\{ \left(-\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

és

$$\left|-\frac{3}{5}\right| < 1, \qquad \text{ill.} \qquad \left|\frac{4}{5}\right| < 1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, amelynek összege

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + (-2)^{2n}}{5^{n+1}} &= \frac{1}{5} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\} = \frac{1}{5} \cdot \left\{ \frac{-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} \right\} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left\{ -\frac{3}{8} + 4 \right\} = \frac{29}{40}. \end{aligned}$$

2. (a) Mivel

$$\sqrt[n]{2n^2} \leq \sqrt[n]{2n^2+1} \leq \sqrt[n]{2n^2+n^2} \leq \sqrt[n]{3n^2} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot (\sqrt[n]{n})^2 \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1 \cdot 1^2 = 1 = 1 \cdot 1^2 \overset{(n\to\infty)}{\longleftarrow} \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{3n^2},$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} \right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2n^2+1})} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0.$$

Következésképpen a

$$\sum_{n=2} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} \right)$$

sor divergens. **Megjegyezzük**, hogy tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \qquad (n \to \infty),$$

hiszen

$$x_n := 2 + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 2 > 0 \quad (n \to \infty) \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

(b) Ha

$$x_n := \frac{n^3 \cdot 3^n}{(3n)!} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)^3 \cdot 3^{n+1}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n^3 \cdot 3^n} = \frac{3(n+1)^3}{n^3(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Így a hányadoskritérium következtében a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{n^3 \cdot 3^n}{(3n)!}\right)$$

sor konvergens.

(c) Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^4+n^2+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{n^2+1+\frac{1}{n^2}} \approx \frac{1}{n^2+1} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2+1}\right) \quad \text{konvergens,}$$

ezért a majoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel

$$\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^4+n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n^4+3n^4}}{n^4} = \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{2}{n^2}\right) = 2 \cdot \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

sor konvergens, ezért a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^4+n^2+1}\right)$$

sor a majoránskritérium alapján konvergens.

3. Világos, hogy $c := 1$ középpontú és

$$a_n := \frac{2^n}{n(4^n-1)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

együtthatójú hatványsorról van szó. Mivel az $n \to \infty$ határesetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n}{n(4^n-1)} \cdot \frac{(n+1)(4^{n+1}-1)}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{4^{n+1}-1}{4^n-1} = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{4-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 = 2,$$

ezért a hatványsor konvergenciasugara 2. Mivel

$$|x-1|<2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2<x-1<2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1<x<3,$$

ezért a hatványsor $x \in (1,3)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,3]$ esetén pedig divergens. Ha $x=-1$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left((-1)^n \cdot \frac{4^n}{n(4^n-1)}\right)$$

sor a Lebniz-kritérium következtében konvergens, hiszen

$$\frac{4^n}{n(4^n-1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4^n}} \searrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha $x=3$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{4^n}{n(4^n-1)}\right)$$

sor divergens, hiszen

$$\frac{4^n}{4^n-1}>1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következtében

$$\frac{4^n}{n(4^n-1)}>\frac{1}{n}>0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és így a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

harmonikus sor divergens minoránsa.

4. (a) Bármely $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\frac{x\cdot\sin(x)}{1-\sqrt{\cos(2x)}} = \frac{x\cdot\sin(x)}{1-\sqrt{\cos(2x)}}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos(2x)}}{1+\sqrt{\cos(2x)}} = \frac{x\cdot\sin(x)\cdot\left(1+\sqrt{\cos(2x)}\right)}{1-\cos(2x)} =$$

$$= \frac{x\cdot\sin(x)\cdot(1+\sqrt{\cos(2x)})}{2\cdot\sin^2(x)} = \frac{1+\sqrt{\cos(2x)}}{2\cdot\frac{\sin(x)}{x}} \longrightarrow \frac{1+1}{2\cdot 1}=1 \quad (x\to 0).$$

(b) Mivel alkalmas $r > 0$, illetve $1 \neq x \in (1-r, 1+r)$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} - 1}{x^3 - 1} &= \frac{\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} + 1}{\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} + 1} = \\
&= \frac{\alpha \cdot (x^2 - 1)}{(x^3 - 1) \cdot \left(\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} + 1\right)} = \\
&= \frac{\alpha \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot \left(\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} + 1\right)} = \\
&= \frac{\alpha \cdot (x + 1)}{(x^2 + x + 1) \cdot \left(\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} + 1\right)},
\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{\alpha x^2 - \alpha + 1} - 1}{x^3 - 1} = \frac{\alpha \cdot 2}{3 \cdot \left(\sqrt{1} + 1\right)} = \frac{\alpha}{3}.$$

5. A folytonosság és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételek alapjány nyilvánvaló, hogy f folytonos a $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$ intervallumok mindegyikén. Látható továbbá, hogy

- f-nek másodfajú szakadása van az $a := -2$ pontban, hiszen

$$\lim_{-2-0} f = \lim_{x \to -2-0} \frac{x}{(x+2)(x-3)} = \left(\lim_{x \to -2-0} \frac{x}{x-3}\right) \cdot \left(\lim_{x \to -2-0} \frac{1}{x+2}\right) = \frac{2}{5} \cdot (-\infty) = -\infty;$$

- f-nek megszüntethető szakadása van az $a := 0$ pontban, hiszen

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x \to 0-0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

és

$$\begin{aligned}
\lim_{0+0} f &= \lim_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \\
&= \lim_{x \to 0+0} \frac{x^2}{x^2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + 1\right)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\lim_{0} f = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \qquad \text{de} \qquad f(0) = 1 \neq \frac{1}{2}.$$

2023 tavasz

Az 1. zh feladatai

1. Feladat. Vizsgálja a

$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{3n+2}{2n+1} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából! **Határozza meg** $\mathcal{H}$ infimumát és szuprémumát! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

Útm.

- Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(*) \quad \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6n+4}{6n+3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6n+3+1}{6n+3} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{6n+3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4n+2}.$$

- Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{1}{4n+2} > 0,$$

ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{3n+2}{2n+1} > \frac{3}{2},$$

azaz $\frac{3}{2}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Látható, hogy a

$$\frac{1}{4n+2}$$

tört az n nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei az ilyen n-ekre $\frac{3}{2}$-hez közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{3}{2}$-nél nagyobb korlátja:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \mathcal{H} \ni \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4n+2} < \frac{3}{2} + \varepsilon.$$

Valóban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{4n+2} < \frac{3}{2} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1,$$

és ilyen $n \in \mathbb{N}_0$ szám létezik, hiszen ha $n \in \mathbb{N}_0$ olyan, amelyre $n > \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$, akkor

$$2n > \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 2 > \frac{1}{2\varepsilon} - 1.$$

Mivel $\dfrac{3}{2} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\mathcal{H} \ni \frac{3}{2} + \frac{1}{4n+2} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{4 \cdot 0 + 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 2$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{3}{2}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 2.$$

2. Feladat. Tekintse az alábbi függvényeket.

$$f(x) := \frac{x^2}{x^2 - 9} \quad (x \in (-3, 3)), \qquad g(x) := \sqrt{x+4} \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$

1. **Határozza meg** az $f \circ g$ függvényt!

2. **Igazolja**, hogy g invertálható, és **határozza meg** az inverzét!

Útm.

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g :\ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in [0, +\infty) :\ -3 < \sqrt{x+4} < 3\right\} = \\ &= \left\{x \in [0, +\infty) :\ 0 \leq \sqrt{x+4} < 3\right\} = \{x \in [0, +\infty) :\ -4 \leq x < 5\} = [0, 5).\end{aligned}$$

Így bármely

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{(g(x))^2}{(g(x))^2 - 9} = \frac{x+4}{x+4-9} = \frac{x+4}{x-5} \qquad (x \in [0, 5)).$$

2. Látható, hogy

(a) bármely $x, y \in \mathcal{D}_g = [0, +\infty)$ esetén

$$g(x) = g(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x+4} = \sqrt{y+4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$$

(b) $\mathcal{R}_g = [2, +\infty)$, hiszen

- $x \in [0, +\infty)$ következtében $\sqrt{x+4} \geq 2$, ahonan $\mathcal{R}_g \subset [2, +\infty)$ következik;
- bármely $y \in [2, +\infty)$, illetve alkalmas $x \in [0, +\infty)$ esetén

$$g(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{y+4} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y^2 - 4.$$

Mindez azt jelenti, hogy $\mathcal{D}_{g^{-1}} = \mathcal{R}_g = [2, +\infty)$ és

$$g^{-1}(y) = y^2 - 4 \qquad (y \in [2, +\infty)).$$

3. Feladat. A határérték definíciója alapján **lássa be**, hogy fennáll a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4n^2 - n - 15}{2n^2 - 7} \right) = 2$$

egyenlőség!

Útm. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{4n^2 - n - 15}{2n^2 - 7} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - 2| < \varepsilon)$$

teljesül. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$\left| \frac{4n^2 - n - 15}{2n^2 - 7} - 2 \right| = \left| \frac{-n - 1}{2n^2 - 7} \right| \overset{n \geq 2}{=} \frac{n+1}{2n^2 - 7} \leq \frac{n+n}{2n^2 - 7} \overset{n \geq 3}{\leq} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

így tetszőleges $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ esetén az

$$N := \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 3$$

szám jó lesz.

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}\right)$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\dfrac{7n^5+3^{n+1}}{2^{2n}+9^{1-n}}}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{2n-3}{2n+1}\right)^{3n+2023}\right)$.

Útm.

1. Látható, hogy bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{n^2+2}-n} = \frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{\sqrt{n^2+3}+n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+3}+n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1} \longrightarrow \frac{3}{2}\qquad (n\to\infty).$$

2. Mivel tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\sqrt[n]{\frac{7n^5+3^{n+1}}{2^{2n}+9^{1-n}}} = \sqrt[n]{\frac{7n^5+3\cdot 3^n}{4^n+9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n}} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[n]{\frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n}}$$

és az

$$x_n := \frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozatra

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \frac{7\cdot 0+3}{1+9\cdot 0} = 3 > 0,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{7n^5+3^{n+1}}{2^{2n}+9^{1-n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

3. Az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{3n+2023} &= \left(\frac{2n+1-4}{2n+1}\right)^{3n+2023} = \left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{3n}\cdot\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{2023} = \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{6n+3}\cdot\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{-3}}\cdot\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{2023} = \\
&= \sqrt{\left(\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{-3}}\cdot\left(1+\frac{-4}{2n+1}\right)^{2023} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \sqrt{(e^{-4})^3\cdot 1^{-3}}\cdot 1^{2023} = e^{-6}.
\end{aligned}$$

5. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$x_0 := 0, \qquad x_{n+1} := \sqrt{3x_n+4} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens, és **számítsa ki** a határértékét!

Útm.

1. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = \alpha$, és így

$$\alpha = \sqrt{3\alpha+4} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in \{-1; 4\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 0$ és $x_1 = \sqrt{4} = 2$, ezért kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n \in [0,4) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad (x_n) \nearrow.$$

Valóban, egyrészt

- $n = 0$ esetén $x_0 = 0 \in [0,4)$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \in [0,4)$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n+4} \in \left[0, \sqrt{16}\right) = [0,4);$$

másrészt pedig

- $n = 0$ esetén $x_0 = 0 \leq 2 = x_1$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq x_{n+1}$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \leq \sqrt{3x_{n+1} + 4} = x_{n+2}.$$

3. lépés. Mivel a sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtében tehát $\lim(x_n) = 4$.

A 2. zh feladatai

1. Feladat. Konvergens-e a

$$\sum_{n=0}\left(\frac{3\cdot(-2)^n-3^{n+2}}{4^{n-1}}\right)$$

végtelen sor? Ha igen, **számítsa ki** összegét!

Útm. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{3\cdot(-2)^n-3^{n+2}}{4^{n-1}}=12\cdot\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-36\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

és

$$\left|-\frac{1}{2}\right|<1,\qquad \text{ill.}\qquad \left|\frac{3}{4}\right|<1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, amelynek összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-2)^n-3^{n+2}}{4^{n-1}}=12\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-3\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=8-144=-136.$$

2. Feladat. Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{n^2+n+6}{\sqrt{n^5+8n^3}}\right)$, b) $\displaystyle\sum_{n=2}\left(\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2+4n}\right)$, c) $\displaystyle\sum_{n=3}\left(\frac{n^{20}\cdot 23^n}{n!}\right)$.

Útm.

a) Mivel tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2+n+6}{\sqrt{n^5+8n^3}}>\frac{n^2}{\sqrt{n^5+8n^5}}=\frac{n^2}{\sqrt{9n^5}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

sor divergens, ezért a minoránskritérium felhasználásával azt kapjuk, hogy a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{n^2+n+6}{\sqrt{n^5+8n^3}}\right)$$

sor divergens.

b) Ha

$$x_n := \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2+4n} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+4} = \left(\frac{2n+5-2}{2n+5}\right)^{n+4} = \sqrt{\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{2n+8}} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{2n+5} \cdot \left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{3}} \longrightarrow \sqrt{e^{-2}} = \frac{1}{e} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Így a gyökkritérium következtében a

$$\sum_{n=2}\left(\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2+4n}\right)$$

sor (abszolút) konvergens.

c) Ha

$$x_n := \frac{n^{20} \cdot 23^n}{n!} \qquad (3 \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \longrightarrow \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)^{20} \cdot 23^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{20} \cdot 23^n} = \frac{23}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{20} \longrightarrow 0 \cdot 1^{20} = 0 < 1.$$

Így a hányadoskritérium következtében a

$$\sum_{n=3}\left(\frac{n^{20} \cdot 23^n}{n!}\right)$$

sor (abszolút) konvergens.

3. Feladat. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2\cdot 4^n}\cdot(2x-3)^n\right)\qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

Útm. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$, ill. $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{n^2\cdot 4^n}\cdot(2x-3)^n=\frac{1}{n^2\cdot 2^n}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^n,$$

ezért $c:=\frac{3}{2}$ középpontú és

$$a_n:=\frac{1}{n^2\cdot 2^n}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

együtthatójú hatványsorról van szó. Mivel az $n\to\infty$ határesetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}{n^2\cdot 2^n}=2\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2}\longrightarrow 2,\quad \text{ill.}\quad \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\sqrt[n]{n^2\cdot 2^n}=2\cdot(\sqrt[n]{n})^2\longrightarrow 2,$$

ezért a hatványsor konvergenciasugara 2. Mivel

$$\left|x-\frac{3}{2}\right|<2\qquad\Longleftrightarrow\qquad -2<x-\frac{3}{2}<2\qquad\Longleftrightarrow\qquad -\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2},$$

ezért a hatványsor $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ esetén konvergens, $x\in\mathbb{R}\backslash\left[-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x=-\frac{1}{2}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2\cdot 2^n}\cdot(-2)^n\right)=\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

sor a Lebniz-kritérium következtében konvergens. Ha $x=\frac{7}{2}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2\cdot 2^n}\cdot 2^n\right)=\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

hiperharmonikus sor konvergens. A hatványsor konvergenciahalmaza tehát a

$$\left[-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$$

intervallum.

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x+2}-3}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\sqrt{\cos(2x)}}{1-\exp(3x)}.$$

Útm.

1. Mivel bármely $7\neq x\in(-2,+\infty)$ esetén

$$\frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x+2}-3}=\frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x+2}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3}=\frac{(x-7)(x-1)(\sqrt{x+2}+3)}{x+2-9}=(x-1)(\sqrt{x+2}+3),$$

ezért

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x+2}-3}=(7-1)(\sqrt{7+2}+3)=6\cdot 6=36.$$

2. Mivel tetszőleges $0\neq x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ esetén

$$\frac{\sin(x)\cdot\sqrt{\cos(2x)}}{1-\exp(3x)}=-\frac{\frac{\sin(x)}{x}\cdot\sqrt{\cos(2x)}}{\frac{\exp(3x)-\exp(0x)}{x}}$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\sqrt{\cos(2x)}}{1-\exp(3x)}=-\frac{1\cdot\sqrt{1}}{3-0}=-\frac{1}{3}.$$

5. Feladat. Határozza meg az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5-x}-4}{x^2-2x+1} & (x<1),\\[2ex] \dfrac{\sin(2x-10)}{x^2-25} & (1<x<5),\\[2ex] \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10} & (x>5),\\[2ex] 0 & (x\in\{1;5\})\end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát!

Útm. A folytonosság és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételek alapjány nyilvánvaló, hogy f folytonos a $(-\infty, 1)$, $(1, 5)$, $(1, +\infty)$ intervallumok mindegyikén. Látható továbbá, hogy

- f-nek másodfajú szakadása van az $a := 1$ pontban, hiszen

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sqrt{5-x}-4}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sqrt{5-x}-4}{(x-1)^2} = (-2) \cdot (+\infty) = -\infty;$$

- f-nek elsőfajú szakadása (ugrása) van az $a := 5$ pontban, ui.

$$\lim_{5-0} f = \lim_{x \to 5-0} \frac{\sin(2x-10)}{x^2-25} = \lim_{x \to 5-0} 2 \cdot \frac{\sin(2x-10)}{2x-10} \cdot \frac{1}{x+5} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

és

$$\lim_{5+0} f = \lim_{x \to 5+0} \frac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10} = \lim_{x \to 5+0} \frac{(x-3)(x-5)}{(x+2)(x-5)} = \lim_{x \to 5+0} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2}{7}.$$

2024 tavasz

Az 1. zh feladatai

1. Feladat. Vizsgálja a
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{4x-3}{6x+1} \in \mathbb{R} :\ 1 \leq x \in \mathbb{R}\right\}$$
halmazt korlátosság szempontjából! **Határozza meg** $\mathcal{H}$ infimumát és szuprémumát! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

Útm.

- Világos, hogy minden $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$(*)\quad \frac{4x-3}{6x+1} = \frac{4}{6} \cdot \frac{24x-18}{24x+4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{24x+4-22}{24x+4} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{22}{24x+4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1}.$$

- Mivel bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1} > 0,$$
ezért
$$\mathcal{H} \ni \frac{4x-3}{6x+1} < \frac{2}{3},$$
azaz $\frac{2}{3}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak. Látható, hogy a
$$\frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1}$$
tört az x nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei az ilyen x-ekre $\frac{2}{3}$-hez közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{2}{3}$-nál kisebb felső korlátja:
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in [1, +\infty) : \qquad \mathcal{H} \ni \frac{4x-3}{6x+1} = \frac{2}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon.$$
Mivel bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén
$$\frac{2}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x+1} < \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6x} < \frac{1}{x},$$

ezért van ilyen $x \in [1, +\infty)$ szám: $x := \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Mivel $\frac{2}{3} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$\mathcal{H} \ni \frac{4x-3}{6x+1} \geq \frac{2}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{6 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\min(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{7}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{7}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{2}{3}, \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

2. Feladat. Tekintse az alábbi függvényeket.

$$f(x) := \sqrt{x+4} \quad (x \in [-3, 6]), \qquad g(x) := x^2 + 4x + 1 \quad (x \in (-\infty, -3]).$$

1. **Határozza meg** az $f \circ g$ függvényt!
2. **Igazolja**, hogy g invertálható, és **határozza meg** az inverzét!

Útm.

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (-\infty, -3] : \ -3 \leq x^2 + 4x + 1 \leq 6\right\} = \\
&= \left\{x \in (-\infty, -3] : \ -3 \leq x^2 + 4x + 1\right\} \cap \left\{x \in (-\infty, -3] : \ x^2 + 4x + 1 \leq 6\right\} = \\
&= \left\{x \in (-\infty, -3] : \ 0 \leq x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2\right\} \cap \\
&\quad \cap \left\{x \in (-\infty, -3] : \ 0 \geq x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)\right\} = \\
&= (-\infty, -3] \cap [-5, 1] = [-5, -3].
\end{aligned}$$

Így bármely $x \in [-5, -3]$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) + 3} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = -x - 2.$$

2. Látható, hogy

(a) bármely $x, y \in \mathcal{D}_g = (-\infty, -3]$ esetén

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x + 1 = y^2 + 4y + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^2 - 3 = (y+2)^2 - 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad |x+2| = |y+2| \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2 = y+2 \quad \vee \quad x+2 = -(y+2)) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y, \end{aligned}$$

hiszen

$$x + 2 = -(y+2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + y = -4 \geq -6 \quad ⚡$$

(b) $\mathcal{R}_g = [-2, +\infty)$, hiszen

- $x \in (-\infty, -3]$ következtében $(x+2)^2 - 3 \geq -2$, ahonan $\mathcal{R}_g \subset [-2, +\infty)$ következik;
- bármely $y \in [-2, +\infty)$, illetve alkalmas $x \in (-\infty, -3]$ esetén

$$g(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+2)^2 - 3 = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2 - \sqrt{y+3} \in (-\infty, -3],$$

hiszen

$$x = -2 + \sqrt{y+3} \in [-1, +\infty) \qquad (y \in [-2, +\infty)).$$

Mindez azt jelenti, hogy $\mathcal{D}_{g^{-1}} = \mathcal{R}_g = [-2, +\infty)$ és

$$g^{-1}(y) = -2 - \sqrt{y+3} \qquad (y \in [-2, +\infty)).$$

3. Feladat. A határérték definíciója alapján **lássa be**, hogy fennáll a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 3n + 2} \right) = 2$$

egyenlőség!

Útm. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 3n + 2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \left(n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 3n + 2} - 2 \right| < \varepsilon \right)$$

teljesül. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$\left|\frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2}-2\right| = \left|\frac{-2n-3}{n^2+3n+2}\right| = \frac{2n+3}{n^2+3n+2} \overset{n\geq 1}{\leq} \frac{2n+3n}{n^2} = \frac{5}{n},$$

így tetszőleges $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ esetén az

$$N := \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1.$$

szám jó lesz.

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+4n}\right)$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3^{n+2}+2^{n-1}}{n^5\cdot 4^{-n}+3^{n+1}}\cdot\sqrt[n]{n^6+5n^2}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{24n+5}{24n+4}\right)^{18n+20}\right)$.

Útm.

1. Látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+4n} &= \left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+4n}} = \\
&= \frac{(n^2+3)-(n^2+4n)}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+4n}} = \frac{3-4n}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+4n}} = \\
&= \frac{\frac{3}{n}-4}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}} \longrightarrow \frac{0-4}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \\
&= \frac{-4}{1+1} = -2 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

2. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3^{n+2}+2^{n-1}}{n^5\cdot 4^{-n}+3^{n+1}} = \frac{9\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 2^n}{n^5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+3\cdot 3^n} = \frac{9+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^5\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^n+3} \longrightarrow \frac{9+\frac{1}{2}\cdot 0}{0+3} = \frac{9}{3} \qquad (n\to\infty)$$

és

$$\sqrt[n]{n^6+5n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^6 \cdot \sqrt[n]{1+\frac{5}{n^4}} \longrightarrow 1^6 \cdot 1 = 1,$$

hiszen

$$1+\frac{5}{n^4} \longrightarrow 1+0=1>0 \qquad \text{és így} \qquad \sqrt[n]{1+\frac{5}{n^4}} \longrightarrow 1,$$

ezért

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{n+2}+2^{n-1}}{n^5\cdot 4^{-n}+3^{n+1}} \cdot \sqrt[n]{n^6+5n^2}\right) = 3\cdot 1 = 3.$$

Megjegyezzük, hogy az $n \to \infty$ határátmenetben

$$1 = 1^6 \longleftarrow \left(\sqrt[n]{n}\right)^6 = \sqrt[n]{n^6} \leq \sqrt[n]{n^6+5n^2} \leq \sqrt[n]{n^6+5n^6} = \sqrt[n]{6}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^6 \longrightarrow 1\cdot 1^6 = 1.$$

3. Az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left(\frac{24n+5}{24n+4}\right)^{18n+20} = \left(\frac{24n+4+1}{24n+4}\right)^{18n+20} = \left(1+\frac{1}{24n+4}\right)^{18n+3} \cdot \left(1+\frac{1}{24n+4}\right)^{17} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{1/4}{6n+1}\right)^{6n+1}\right)^3 \cdot \left(1+\frac{1}{24n+4}\right)^{17} \longrightarrow e^{3/4}\cdot 1 = e^{3/4}.$$

5. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \sqrt{5x_n-4} \quad (n\in\mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens, és **számítsa ki** a határértékét!

Útm.

1. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = \alpha$, és így

$$\alpha = \sqrt{5\alpha-4} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2-5\alpha+4=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\in\{1;4\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 2$ és $x_1 = \sqrt{6} > 2$, ezért kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n \in [2,4) \quad (n\in\mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad (x_n)\nearrow.$$

Valóban, egyrészt

- $n = 0$ esetén $x_0 = 2 \in [2, 4)$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \in [2, 4)$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 4} \in \left[\sqrt{6}, \sqrt{16}\right) \subset \left[\sqrt{4}, \sqrt{16}\right) = [2, 4)\,;$$

másrészt pedig

- $n = 0$ esetén $x_0 = 2 \leq \sqrt{6} = x_1$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq x_{n+1}$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 4} \leq \sqrt{5x_{n+1} - 4} = x_{n+2}.$$

3. lépés. Mivel a sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtében tehát $\lim(x_n) = 4$.

A 2. zh feladatai

1. Feladat. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{3^{n-1}+5\cdot(-1)^n}{(-2)^{2n}}\right)$$

végtelen sor? Ha igen, **számítsa ki** összegét!

Útm. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3^{n-1}+5\cdot(-1)^n}{(-2)^{2n}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

és

$$\left|\frac{3}{4}\right| < 1, \qquad \text{ill.} \qquad \left|-\frac{1}{4}\right| < 1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, amelynek összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+5\cdot(-1)^n}{(-2)^{2n}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} + 5\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\cdot 3 + 5\cdot\frac{-1}{5} = 1-1 = 0.$$

2. Feladat. Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{n^{2024}+2^n}{3n^3+3^{n+1}}\right)$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}\left(\frac{5^n\cdot n!\cdot(n+1)!}{(2n)!}\right)$.

Útm.

1. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} &= \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2} \neq 0,\end{aligned}$$

ezért a

$$\sum_{n=1}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

sor divergens.

2. Ha
$$x_n := \frac{n^{2024} + 2^n}{3n^3 + 3^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor az $n \longrightarrow \infty$ határátmenetben
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^{2024} + 2^n}{3n^3 + 3^{n+1}}} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{\frac{n^{2024}}{2^n} + 1}{\frac{n^3}{3^n} + 3}} =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{n^{2024} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{n^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}} \longrightarrow \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{0+1}{0+3}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} < 1.$$
Így a Cauchy-féle gyökkritérium következtében a $\sum_{n=1}(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

3. Ha
$$x_n := \frac{5^n \cdot n! \cdot (n+1)!}{(2n)!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$
akkor az $n \longrightarrow \infty$ határátmenetben
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (n+1+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{5^n \cdot n! \cdot (n+1)!}{(2n)!} =$$
$$= \frac{5(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5n+10}{4n+2} \longrightarrow \frac{5}{4} > 1.$$
Így a d'Alembert féle hányadoskritérium következtében
$$\sum_{n=3}\left(\frac{n^{20} \cdot 23^n}{n!}\right)$$
a $\sum_{n=1}(x_n)$ sor divergens.

3. Feladat. Határozza meg a
$$\sum_{n=0}\left(\frac{3^n}{\sqrt{4n^2+1}} \cdot (x+1)^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

Útm. Világos, hogy $c := -1$ középpontú és

$$a_n := \frac{3^n}{\sqrt{4n^2+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

együtthatójú hatványsorról van szó. Mivel az $n \to \infty$ határesetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^n}{\sqrt{4n^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{4(n+1)^2+1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{4+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1}{3},$$

ezért a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{3}$. Mivel

$$|x+1| < \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x = -\frac{4}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n^2+1}}\right)$$

sor a Lebniz-kritérium következtében konvergens, ui.

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} \searrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha $x = -\frac{2}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}\right)$$

sor a minoránskritérium következtében divergens, ui.

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n^2+12n^2}} = \frac{1}{4n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A hatványsor konvergenciahalmaza tehát a

$$\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

intervallum.

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{-x}}{\sin(2x)-\sin(-x)}.$$

Útm.

1. Mivel bármely $1\neq x\in(0,+\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1-x^3}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}} &= \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}} = \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)}{x^2-3x+2} = \\ &= -\frac{\cancel{(x-1)}(1+x+x^2)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)}{\cancel{(x-1)}(x-2)},\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}} = -\lim_{x\to 1}\frac{(1+x+x^2)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)}{x-2} = -\frac{3\cdot(2+2)}{-1} = 12.$$

2. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{-x}}{\sin(2x)-\sin(-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{5x}-e^{-x}}{x}}{\frac{\sin(2x)-\sin(-x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{5x}-e^{-x}}{x}}{2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}+\frac{\sin(-x)}{-x}} = \frac{5-(-1)}{2+1} = 2,$$

hiszen bármely $0\neq a, b, \vartheta\in\mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\vartheta x)}{\vartheta x} = 1.$$

5. Feladat. Határozza meg az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}\dfrac{\sin(2-x)}{\sqrt{6-x}-2} & (x<2),\\[2ex] \dfrac{x^2-8x+12}{x^2-5x+6} & (2<x<3),\\[2ex] \dfrac{\sin(\pi x/3)}{x} & (x>3),\\[2ex] 0 & (x\in\{2;3\})\end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát!

Útm. A folytonosság és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételek alapjány nyilvánvaló, hogy f folytonos a $(-\infty,2)$, $(2,3)$, $(3,+\infty)$ intervallumok mindegyikén. Látható továbbá, hogy

- f-nek elsőfajú szakadása (speciálisan ugrása) az $a:=2$ pontban, hiszen $f(2)=0$ és

$$\begin{aligned}\lim_{2-0} f &= \lim_{x\to 2-0}\frac{\sin(2-x)}{2-x}\cdot\frac{2-x}{\sqrt{6-x}-2}\cdot\frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2}=\\ &= \lim_{x\to 2-0}\frac{\sin(2-x)}{2-x}\cdot\lim_{x\to 2-0}(\sqrt{6-x}+2)=1\cdot(2+2)=4\end{aligned}$$

  és

$$\lim_{2+0} f=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-8x+12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-6}{x-3}=\frac{-4}{-1}=4.$$

- f-nek elsőfajú msodfajú szakadása van az $a:=3$ pontban, ui.

$$\lim_{3-0} f=\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-8x+12}{x^2-5x+6}\lim_{x\to 3-0}\frac{x-6}{x-3}=\frac{-3}{-0}=+\infty.$$

1. gyakorlat (2025. február 12.)

Órai feladatok

Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám **abszolútértékén**, ill. **előjelén** az

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0), \end{cases} \qquad \text{ill.} \qquad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0) \end{cases}$$

valós számot értjük.

Nyilván igaz, hogy

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel (háromszög-egyenlőtlenségek). Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ szám esetén fennállnak az az alábbi becslések.

$$\text{i) } |a + b| \leq |a| + |b|, \qquad \text{ii) } \big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \tag{1}$$

Bizonyítás.

1. lépés. Az abszolútérték definíciója alapján

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad \text{és} \qquad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|. \tag{2}$$

Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ esetén

$$|x| \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad -y \leq x \leq y, \tag{3}$$

ezért ennek felhasználásával (2)-ből i) adódik.

2. lépés. Az i) egyenlőtlenség alapján

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \qquad \Longrightarrow \qquad |a|-|b| \leq |a-b|,$$

$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a| \qquad \Longrightarrow \qquad |b|-|a| \leq |a-b|.$$

Tehát

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|,$$

és így (3) felhasználásával kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget: ii)-t.

Emlékeztető. Tetszőleges n pozitív egész szám és a, b valós szám esetén az $a^n - b^n$ különbség szorzattá alakítható, pontosabban:

$$\forall n \in \mathbb{N}\; \forall a, b \in \mathbb{R}: \qquad a^n - b^n = (a-b)\cdot \underbrace{\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}_{n\text{-tagú összeg}}. \tag{4}$$

Következmények.

1. Ha $a, b \in \mathbb{R}$: $0 < b < a$, továbbá $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$a^n\left[a-(n+1)(a-b)\right] < b^{n+1}, \tag{5}$$

hiszen

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n) < \\ &< (a-b)(a^n + a^{n-1}a + \ldots + aa^{n-1} + a^n) = (a-b)(n+1)a^n. \end{aligned}$$

2. Az $a = 1$ és $b =: q$ speciális esetben

$$1 - q^{n+1} = 1^{n+1} - q^{n+1} = (1-q)(1+q+\ldots+q^{n-1}+q^n),$$

ahonnan – a $0^0 := 1$ megállapodással azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & (q=1), \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & (q \neq 1). \end{cases} \tag{6}$$

3. Az $a =: x$ és $b = 1$ speciális esetben

$$x^n - 1 = x^n - 1^n = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1). \tag{7}$$

Tétel ((Barrow-)Bernoulli-egyenlőtlenség). Ha $n \in \mathbb{N}_0$ és $h \in [-2, +\infty)$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $h = 0$ vagy $n \in \{0; 1\}$.

Bizonyítás.

0. lépés. Világos, hogy ha $n = 0$, akkor igaz az egyenlőtlenség: egyenlőség áll fenn, ui.

$$(1+h)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot h.$$

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $1 \leq n \in \mathbb{N}_0$, azaz $n \in \mathbb{N}$.

1. lépés. Legyen $h = -2$. Ekkor a

$$(-1)^n \geq 1 - 2n$$

egyenlőtlenséget kell belátnunk. Ez nyilvánvalóan teljesül, ui. $n = 1$ esetén

$$(-1)^1 = -1 = 1 - 2 \cdot 1,$$

ill. ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor $1 - 2n < -1$, hiszen ez a $2 < 2n$ egyenlőtlenséggel egyenértékű.

2. lépés. Legyen $h \in (-2, -1)$. Világos, hogy ha $n = 1$, akkor teljesül a becslés, sőt egyenlőség van. Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor legyen

$$\epsilon := -h - 1 \qquad (\leftrightarrow \quad \epsilon \in (0, 1)).$$

Így

$$(1+h)^n = (-\epsilon)^n > -1 > 1 - n - n\epsilon = 1 + n(-1-\epsilon) = 1 + nh.$$

3. lépés. Legyen $h \in [-1, +\infty)$. Ha $x := 1 + h$, akkor az (4) egyenlőség, ill. annak (7) következményét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^n - 1 - n(x-1) &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) - n(x-1) = \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - n), \end{aligned}$$

ezért, ha

- $h \geq 0$, azaz $x \geq 1$, akkor

$$x - 1 \geq 0 \qquad \text{és} \qquad x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \geq n,$$

- ha pedig $-1 \leq h \leq 0$, azaz $0 \leq x \leq 1$, akkor

$$x - 1 \leq 0 \qquad \text{és} \qquad x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \leq n.$$

Ennélfogva

$$x^n - 1 - n(x-1) \geq 0, \qquad \text{azaz} \qquad x^n \geq 1 + n(x-1), \qquad \text{így} \qquad \boxed{(1+h)^n \geq 1 + nh}. \quad \checkmark$$

4. lépés. A

$$h = 0 \qquad \text{vagy} \qquad n = 1$$

esetben nyilván teljesül az egyenlőség. Tegyük fel, hogy alkalmas $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1+h)^n = 1 + nh.$$

Ekkor $h = 0$, ugyanis ismét az (4) egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(1+h)^n = 1 + nh \iff (1+h)^n - 1^n = nh \iff h \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+h)^{n-k} = h \cdot n$$

miatt sem $h > 0$ sem pedig $h < 0$ nem lehetséges, mert különben

$$\sum_{k=1}^{n} (1+h)^{n-k} > n, \qquad \text{ill.} \qquad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} (1+h)^{n-k} < n$$

teljesülne, ami nyilvánvalóan nem igaz.

Megjegyzések.

1. A Bernoulli-egyenlőtlenségről Jakob Bernoulli egy könyvéből latinul (1670), és Isaac Barrow-tól angolul (1669) olvashatunk.
2. Megmutatható, hogy a $h < -2$ esetben már nem igaz az egyenlőtlenség.
3. Alkalmazás: az
$$f(x) := (1+x)^n \qquad (-2 \leq x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$$

függvény grafikonja nem megy a 0-beli érintője alá, ui.

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + n(1 + 0)^{n-1}x = 1 + nx \leq (1 + x)^n = f(x).$$

Definíció. Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **számtani** vagy **aritmetikai középét** az alábbi módon értelmezzük:

$$A_n := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k;$$

2. az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **négyzetes** vagy **kvadratikus középét** így értelmezzük:

$$Q_n := \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2};$$

3. a $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **mértani** vagy **geometriai középét** az alábbi módon értelmezzük:

$$G_n := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k};$$

4. a $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **harmonikus középét** így értelmezzük:

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}.$$

Megjegyezzük, hogy

1. a fenti definícióban a közép elnevezés jogos, hiszen egyszerű becsléssel belátható, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és

   (a) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq A_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\};$$

   (b) $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq Q_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\};$$

(c) $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq G_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\};$$

(d) $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq H_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

2. ha $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor igaz a

$$H_n \leq G_n \leq A_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad H_n^n \leq G_n^n \leq A_n^n,$$

azaz a

$$H_n \leq G_n \leq A_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}\right)^n \leq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n$$

ekvivalencia.

Tétel (a mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség).
Bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{G_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \boxed{\leq} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \boxed{A_n},$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = \ldots = x_n$ esetben teljesül.

Bizonyítás. Több lépésben bizonyítunk.

0. lépés. Ha $n = 1$, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, sőt egyenlőség van:

$$G_1 = \sqrt[1]{x_1} = x_1 = \frac{x_1}{1} = A_1.$$

1. lépés. Ha $n = 2$, akkor

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 \cdot x_2 = \frac{x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2,$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = x_2$ esetben áll fenn.

2. lépés. Legyen $2 < n \in \mathbb{N}$. Ha valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k = 0$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Tegyük fel tehát, hogy bármely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k > 0$. Mivel

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0, \qquad \text{azaz} \qquad \underbrace{\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1}_{:=h} > -1,$$

ezért alkalmazható a Bernoulli-egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh = 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} =$$

$$= \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{x_n}{A_{n-1}},$$

azaz

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1}.$$

Így

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot A_{n-2}^{n-2} \geq \dots \geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot A_1^1 = x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot x_1 = G_n^n.$$

3. lépés. **Ha** $x_1 = \dots = x_n =: \alpha$, akkor

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha = \frac{n\alpha}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = A_n.$$

Ha $2 < n \in \mathbb{N}$ és bizonyos $0 \leq x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az $A_n = G_n$ egyenlőség, továbbá az $x_1, \dots, x_n$ számok nem mind egyenlők egymással, azaz van közöttük legalább két különböző:

$$\exists i, j \in \{1, \dots, n\}: \qquad x_i \neq x_j,$$

akkor az **1. lépés**ben belátottak alapján

$$\sqrt{x_i x_j} < \frac{x_i + x_j}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad x_i x_j < \left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2 = \frac{x_i + x_j}{2} \cdot \frac{x_i + x_j}{2}.$$

Ezért

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} < \sqrt[n]{\frac{x_i+x_j}{2}\cdot\frac{x_i+x_j}{2}\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\notin\{i,j\}}}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{x_i+x_j}{2}+\frac{x_i+x_j}{2}+\sum_{\substack{k=1\\k\notin\{i,j\}}}^{n} x_k\right)$$

$$= \; = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = A_n,$$

ami nem lehetséges, mert ellentmond az $A_n = G_n$ feltételnek.

Tétel (a harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenség).
Tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$, ill. $0 < x_1, x_2 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{G_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\boxed{\geq}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} = \boxed{H_n},$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = \ldots = x_n$ esetben van.

Bizonyítás. A mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$H_n^n = \left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^n} \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} = \prod_{k=1}^{n} x_k = G_n^n,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\frac{1}{x_1} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, azaz ha $x_1 = \ldots = x_n$ teljesül.

Megjegyzés. A

- Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, +\infty)$ számok nem mind egyenlők egymással, akkor

$$G_n < A_n, \qquad \text{azaz} \qquad \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} < \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

- Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$ számok nem mind egyenlők egymással, akkor

$$H_n < G_n, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} < \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $-\frac{1}{2} \leq a \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség! Mely esetben van itt egyenlőség?

Útm.

1. lépés. Ha $a \geq 1$, akkor

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 0 \leq 1.$$

2. lépés. Ha $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, és $a \neq 0$, akkor

$$1-a, \qquad 1+a, \qquad \text{ill.} \qquad 1+2a$$

különböző nem-negatív számok, ha pedig $a = 0$, akkor egyenlőség áll fenn: $1 = 1$. Így $0 \neq a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ esetén

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 < \left(\frac{5(1-a)+1+a+2(1+2a)}{8}\right)^8 = \left(\frac{8}{8}\right)^8 = 1.$$

Tétel (a teljes indukció elve.) Legyen $m \in \mathbb{Z}$. Tegyük fel, hogy minden $m \leq n \in \mathbb{Z}$ számra adott valamely $\mathcal{A}(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy

- $\mathcal{A}(m)$ igaz,
- ha $\mathcal{A}(n)$ igaz, akkor $\mathcal{A}(n+1)$ is igaz.

Ekkor az $\mathcal{A}(n)$ állítás igaz minden $m \leq n \in \mathbb{Z}$ számra.

A teljes indukció módszerével (is) könnyen belátható a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

állítás. Valóban, ha

- $n = 1$, akkor
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2}. \quad \checkmark$$
- valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a (8) állítás, akkor
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{(8)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}. \quad \checkmark$$

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ számra fennáll a

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Teljes indukcióval igazoljuk a fenti egyenlőtlenséget.

- Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, ui.
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 > 2\sqrt{1+1} - 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 > 2\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9 > 8. \quad \checkmark$$
- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$
teljesül (indukciós feltevés). Mivel
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

ezért ha belátjuk, hogy

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+1+1}-2,$$

akkor igazoltuk az állítást. A fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(n+1)+1 > 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}.$$

Ez utóbbi pedig nem más, mint

$$2n+3 > 2\sqrt{n^2+3n+2} \quad \Longleftrightarrow \quad 4n^2+12n+9 > 4n^2+12n+8 \quad \Longleftrightarrow \quad 9>8. \quad \checkmark$$

Feladat. Teljes indukció felhasználásával mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}_0$ és $h \in [-1,+\infty)$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Útm.

- Ha $n=1$, akkor
$$(1+h)^1 = 1+h = 1+1\cdot h. \quad \checkmark$$

- Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad (1+h)^n \geq 1+nh,$$

akkor

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n\cdot(1+h) \overset{(*),\,1+h\geq 0}{\geq} (1+nh)\cdot(1+h) = 1+h+nh+nh^2 = \\ &= 1+(n+1)h+nh^2 \overset{nh^2\geq 0}{\geq} 1+(n+1)h. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Házi feladatok

Feladat. Mi a hiba az alábbi okoskodásban?
„**Tétel.** Létezünk. (A marslakók egzisztencia-tétele.)
Bizonygatás. A teljúti indukció felhasználásával annak az állításnak az igazságát fogjuk belátni, hogy ha bolygók valamely n-elemű halmazának egyikén van élet, akkor mindegyikén van ($n \in \mathbb{N}$). Innen már következik, hogy egzisztenciánk nem megalapozatlan. Világos, hogy $n = 1$ esetén igaz az állítás. Tegyük fel most, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, és legyen adott $n+1$ darab bolygó: $B_1, \ldots, B_{n+1}$. Tegyük fel, hogy valamelyiken van élet. Az általánosság megszorítása nélkül ezt választhatjuk B_1-nek. Ekkor az n darab $B_1, \ldots, B_n$ bolygó közül egyen van élet, így az indukciós feltevés értelmében mindegyiken, pl. B_2-n is. Tekintsük a következő n bolygót: $B_2, \ldots, B_{n+1}$. Egyikükön van élet (B_2-n), így ismét az indukciós feltevés értelmében mindegyiken van élet. Így tehát a $B_1, \ldots, B_{n+1}$ bolygók mindegyikén van élet. Q. E. D.”

Útm. Ha $\mathcal{A}(n)$ jelöli azt az állítást, hogy

a bolygók valamely n-elemű halmazának egyikén van élet, akkor mindegyikén van,

akkor a következőt láttuk be:

- $\mathcal{A}(1)$ igaz;
- ha valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}(n)$ igaz, akkor $\mathcal{A}(n+1)$ is igaz.

Innen nem következik, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}(n)$ igaz, hiszen nem láttuk be az

$$\mathcal{A}(1) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}(2)$$

implikáció igazságát, sem pedig azt, hogy $\mathcal{A}(2)$ igaz.

Feladat. Igazoljuk az abszolútértékre vonatkozó ún. **sokszög-egyenlőtlensé**get, azaz mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. $n = 1$ esetén igaz az állítás: $|x_1| \leq |x_1|$.

2. lépés. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$$

teljesül, majd legyen $x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Ekkor (vö. (1))

$$\begin{aligned} |x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}| &= |(x_1 + \ldots + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \leq \\ &\leq |x_1| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}|. \end{aligned}$$

Feladat. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén számítsuk ki az

$$S := 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ darab}}$$

összeget!

Útm. Mivel

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ darab}} &= 1 + (10+1) + (10^2 + 10 + 1) + \ldots + \\ &\quad +(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1), \end{aligned}$$

továbbá (6) következtében

$$\underbrace{1\ldots1}_{k \text{ darab}} = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{10 - 1} \qquad (k \in \{2, \ldots, n\}),$$

így (??) Kozgaz felhasználásával

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{10^k - 1}{10 - 1} = 1 + \frac{1}{9} \cdot \left\{ \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - 10 - 1 - (n-1) \right\} = \\ &= 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10^{n+1} - 1 - 99 - 9n + 9}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Feladat. Alkalmazzuk a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget az alábbi számokra!

1. $x_k := 1 + \frac{1}{n} \quad (k \in \{1, \ldots, n\}), \qquad x_{n+1} := 1;$
2. $x_k := 1 + \frac{1}{n} \quad (k \in \{1, \ldots, n\}), \qquad x_{n+1} := x_{n+2} := \frac{1}{2}.$

Útm. Ha $n \in \mathbb{N}$,

1. akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n \cdot (1+\frac{1}{n}) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2. akkor $n > 1$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 4 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < 4 \cdot \left(\frac{n \cdot (1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = 4 \cdot \left(\frac{n+1+1}{n+2}\right)^{n+2} = 4.$$

A következő feladatbeli egyenlőtlenségek fontos szerepet játszanak az

$$x_n := \sqrt[n]{\alpha} \quad (n \in \mathbb{N},\ \alpha \in (0, +\infty)), \qquad \text{ill. az} \qquad x_n := \sqrt[n]{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergenciájának tárgyalásakor.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

1. $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in (1, +\infty)$, akkor
$$\frac{\alpha - 1}{\alpha n} \leq \sqrt[n]{\alpha} - 1 \leq \frac{\alpha - 1}{n};$$
2. $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in (0, 1)$, akkor
$$\frac{1 - \alpha}{n} \leq 1 - \sqrt[n]{\alpha} \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha n};$$
3. $n \in \mathbb{N}$, akkor
$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

teljesül!

Útm.

1. Felhasználva a mértani közép és a számtani közép, ill. a harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{1 \cdots 1 \cdot \alpha} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + \alpha}{n} = 1 + \frac{\alpha - 1}{n}$$

   és

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\alpha} &= \sqrt[n]{1 \cdots 1 \cdot \alpha} \geq \frac{n}{(n-1) \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha n}{\alpha n - \alpha + 1} = \frac{\alpha n - \alpha + 1 + \alpha - 1}{\alpha n - \alpha + 1} = \\ &= 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha n - \alpha + 1} > 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha n}. \end{aligned}$$

2. Ha $\alpha \in (0, 1)$, akkor
$$\frac{1}{\alpha} \in (1, +\infty),$$
   így az $1.$ felhasználásával adódik a két becslés.

3. Az első egyenlőtlenség triviális. A második:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{2\sqrt{n} + (n-2) \cdot 1}{n} = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Gyakorló feladatok

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in [0, +\infty)$: $a \leq b$, akkor fennáll a

$$\sqrt{\frac{a}{b+1}} + \sqrt{\frac{b}{a+1}} < \frac{a+b+1}{a+1}$$

egyenlőtlenség!

Útm. A mértani éls a számtani közép közötti egyenlőtlenség következményeként azt kapjuk, hogy bármely $x \in [0, +\infty)$: $x \neq 1$ számra

$$\sqrt{x} = \sqrt{x \cdot 1} < \frac{1}{2}(x+1).$$

Mivel

$$0 \leq a \leq b \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq \frac{a}{b+1} < 1,$$

ezért

$$\sqrt{\frac{a}{b+1} \cdot 1} + \sqrt{\frac{b}{a+1} \cdot 1} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+1} + 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}\right).$$

Világos, hogy

$$0 \leq a \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a}{b+1} \leq \frac{b}{a+1},$$

ennélfogva

$$\sqrt{\frac{a}{b+1}} + \sqrt{\frac{b}{a+1}} < 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}\right) \leq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+1} + \frac{b}{a+1}\right) = \frac{a+b+1}{a+1}.$$

Emlékeztető (binomiális tétel). Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor bármely $a, b \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \qquad (9)$$

Feladat. A (9) binomiális tétel és az (5) egyenlőtlenség felhasználásával lássuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$1.\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad 2.\quad 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3. \tag{10}$$

Útm.

1. Legyen

$$a := 1+\frac{1}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad b := 1+\frac{1}{n+1}.$$

Ekkor $a > b > 0$, így (5) alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}-(n+1)\left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n+1}\right)\right)}_{=1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalon a második tényező 1, így a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

2. **1. lépés.** $n = 1$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2,$$

és az előző egyenlőtlenség alapján minden $2 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2. lépés. A (9) binomiális tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $3 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$$

$$= 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= 2+\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2+1-\frac{1}{n} = 3-\frac{1}{n} < 3.$$

Feladat. Döntsük el, hogy melyik szám nagyobb!

1. $(1,000001)^{1000000}$ vagy 2 2. 1000^{1000} vagy 1001^{999}.

Útm. Mivel

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad 2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \Longleftrightarrow \quad n = 1,$$

ezért

$$(1,000001)^{1000000} = \left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6} > 2$$

ill.

$$1001^{999} = \frac{1001^{999}}{1000^{1000}} \cdot 1000^{1000} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1000^{1000}}{1001} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1000^{1000}}{1001} <$$

$$< 3 \cdot \frac{1000^{1000}}{1001} < 1000^{1000}.$$

További feladatok

Feladatok.

1. Feladatok teljes indukcióra (59-65. old.)

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

   (a) $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n < \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}$; (b) $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n < 27 \cdot \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}$.

3. Igazoljuk, hogy bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$$

   egyenlőtlenség!

4. Legyen

$$x \in [-1, +\infty), \qquad \text{ill.} \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

   Igazoljuk, hogy ha

   (a) $0 \leq r \leq 1$, úgy

$$(1+x)^r \leq 1 + rx;$$

   (b) $r \geq 1$, úgy

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

5. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

   (a) $\frac{1}{2} \leq \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n < \frac{2}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$;

   (b) $n^n > (n+1)^{n-1} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$;

   (c) $\sqrt[n]{(n!)^3} \leq \frac{n(n+1)^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N})$.

6. Lássuk be, hogy bármely $a, b, c \in (0, +\infty)$ fennáll az

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) > 7$$

   becslés!

Útm.

1. Vö. 59-65. old.

2. (a) **1. módszer** Legyen

$$a := 1 + \frac{3}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad b := 1 + \frac{3}{n+1}.$$

Ekkor $a > b > 0$, így az

$$a^n\left[a - (n+1)(a-b)\right] < b^{n+1}$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{3}{n}-(n+1)\left(1+\frac{3}{n}-1-\frac{3}{n+1}\right)\right)}_{=1} < \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalon a második tényező 1, így a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

2. módszer A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+n+3}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

(b) A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = 27\cdot\frac{1}{27}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = 27\cdot\overbrace{\frac{1}{3}}^{1}\cdot\overbrace{\frac{1}{3}}^{2}\cdot\overbrace{\frac{1}{3}}^{3}\cdot\overbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)}^{1}\cdot\ldots\cdot\overbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)}^{n} <$$

$$< 27\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+n\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n+3}\right)^{n+3} = 27\cdot\left(\frac{1+n+3}{n+3}\right)^{n+3} =$$

$$= 27\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}.$$

3. Kétféleképpen is belátjuk az egyenlőtlenség fennállását.

1. módszer. A mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{2^n-1}{n} = \frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+4+2+1}{n} > \sqrt[n]{2^{n(n-1)/2}} = \sqrt{2^{n-1}},$$

ahonnan átrendezéssel

$$2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

adódik.

2. módszer. (Teljes indukcióval.)

- Ha $n=2$, akkor

$$2^2=4>1+2\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3>2\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9>8.$$

- Ha valamely $2\le n\in\mathbb{N}$ esetén

$$2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}},$$

akkor

$$2^{n+1}=2\cdot 2^n > 2(1+n\sqrt{2^{n-1}}).$$

Ha belátjuk, hogy

$$2(1+n\sqrt{2^{n-1}}) > 1+(n+1)\sqrt{2^n},$$

akkor igazoltuk az állítást. Mivel a

$$2(1+n\sqrt{2^{n-1}}) > 1+(n+1)\sqrt{2^n}$$

egyenlőtlenség a

$$2+2n\sqrt{2^{n-1}} = 2+\sqrt{2}n\sqrt{2^n} > 1+(n+1)\sqrt{2^n},$$

azaz a

$$(*) \qquad 1+\sqrt{2}n\sqrt{2^n} > (n+1)\sqrt{2^n}$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű, és az iménti egyenlőtlenségben $\sqrt{2^n}$ együtthatóira:

$$\sqrt{2}n > n+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\sqrt{2}-1)n > 1,$$

azaz

$$n > \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1,$$

ezért a $(*)$ egyenlőtlenség minden $3 \leq n \in \mathbb{N}$ szám esetén fennáll. Ha pedig $n = 2$, akkor

$$1+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2^2} > 3\cdot\sqrt{2^2} \quad\Longleftrightarrow\quad 4\cdot\sqrt{2} > 5 \quad\Longleftrightarrow\quad 32 > 25.$$

4. **A $0 \leq r \leq 1$ eset bizonyítása.** Mivel $r \in \mathbb{Q}$, ezért alkalmas $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$ esetén $r = \dfrac{p}{q}$. Tekintsük az

$$\underbrace{1,\ldots,1}_{q-p \text{ darab}}, \underbrace{(1+x),\ldots,(1+x)}_{p \text{ darab}}$$

q-darab valós számot. Ezeknek a számoknak a mértani közepe, ill. számtani közepe:

$$(1+x)^{p/q}, \qquad \text{ill.} \qquad 1+\frac{p}{q}x.$$

Így tehát

$$(1+x)^{p/q} \leq 1+\frac{p}{q}x, \qquad \text{azaz} \qquad (1+x)^r \leq 1+rx.$$

Az $r \geq 1$ eset bizonyítása. Mivel $x \in [-1, +\infty)$, ezért a $0 \leq r \leq 1$ esetben

$$(1+x)^r \leq 1+rx \qquad\Longleftrightarrow\qquad 1+x \leq \left(1+\frac{p}{q}x\right)^{q/p}.$$

Ha most $y := \dfrac{p}{q}x$, akkor $x \geq -1$ következtében $y \geq -\dfrac{p}{q} \geq -1$. Innen $x = \dfrac{q}{p}y$, ill.

$$1+\frac{q}{p}y \leq (1+y)^{q/p}$$

következik. Mivel $s := \dfrac{q}{p} \geq 1$, ezért a fentiek következtében

$$(1+y)^s \geq 1+sy.$$

5. (a) Külön-külön igazoljuk az alsó, ill. a felső becslést.

- Az alsó becslés a következő módon látható be. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $-\dfrac{1}{2n} \geq -2$, ezért Bernoulli-egyenlőtlenségből

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n \geq 1-\frac{n}{2n}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

következik.

- A felső becsléshez azt használjuk fel, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n},$$

továbbá $\frac{1}{2n-1} \geq -2$, így a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n} \leq \frac{1}{1+\frac{n}{2n-1}}=\frac{2n-1}{3n-1}<\frac{2}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6n-3<6n-2.$$

(b) Világos, hogy bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n^n > (n+1)^{n-1} \qquad \Longleftrightarrow \frac{n^n}{(n+1)^n} > \frac{1}{n+1}.$$

Így a nyilvánvaló

$$\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

állítást és a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n > 1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

azaz igaz az állítás.

(c) Az egyenlőtlenség a mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség, ill. a **??**/3. gyakorló feladat triviális következménye:

$$\sqrt[n]{(n!)^3}=\sqrt[n]{(1\cdot\ldots\cdot n)^3}=\sqrt[n]{1^3\cdot\ldots\cdot n^3} \leq \frac{1^2+\ldots+n^3}{n}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n}=\frac{n(n+1)^2}{4}.$$

Jól látható, hogy egyenlőség csak az $n=1$ esetben van.

Megjegyzés. Ha

$$a_n := \frac{n^n(n+1)^{2n}}{4^n(n!)^3} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az (a_n) sorozatra tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq 1$ teljesül, hiszen $a_1 = 1$, továbbá az

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{2n+2}}{4^{n+1}[(n+1)!]^3} \cdot \frac{4^n(n!)^3}{n^n(n+1)^{2n}} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

egyenlőségből, ill. a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásából

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)(1+2)(1+1) = \\ &= \frac{6}{4}\cdot\frac{n+2}{n+1} > \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1\end{aligned}$$

következik, ami azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő.
Látható, hogy

$$a_2 = \frac{81}{32} > \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

sőt teljes indukcióval az is megmutatható (**Házi feladat.**), hogy

$$a_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

6. A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következménye, hogy bármely $a, b, c \in (0, +\infty)$ számra

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}, \qquad b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{c}}, \qquad c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{a}}.$$

Így

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}\cdot b\cdot\frac{1}{c}\cdot c\cdot\frac{1}{a}} = 8 > 7.$$

2. gyakorlat (2025. február 19.)

Szükséges ismeretek.

- Mit mond ki a Dedekind-axióma vagy szétválasztási axióma?
- Írja le pozitív formában azt, hogy valamely $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos!
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy valamely $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos!
- Fogalmazza meg a szuprémum-elvet!
- Mi a szuprémum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup \mathcal{H} \in \mathbb{R}$!
- Mi az infimum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf \mathcal{H} \in \mathbb{R}$!
- Mi a kapcsolat egy halmaz maximuma és szuprémuma között?
- Mi a kapcsolat egy halmaz minimuma és infimuma között?

Órai feladatok

Emlékeztető. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy

1. a $\mathcal{H}$ halmaz **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \geq k$. Az ilyen k számot a $\mathcal{H}$ halmaz **alsó korlát**jának neveztük.
2. a $\mathcal{H}$ halmaz **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \leq K$. Az ilyen K számot a $\mathcal{H}$ halmaz **felső korlát**jának neveztük.
3. a $\mathcal{H}$ halmaz **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzések.

1. Valamely számhalmazt megadó kifejezésből az esetek többségében nehéz látni a halmaz szerkezetét, ezért a korlátosságának vizsgálata általában nem egyszerű feladat. Ennek megoldásához gyakran használhatjuk a következő ötletet: valamilyen „alkalmas” módon átalakítjuk a szóban forgó kifejezést (ilyen átalakításokra példákat fogunk mutatni). Ezután már számos esetben könnyen megfogalmazható sejtés az alsó, ill. a felső korlátokra vonatkozóan. Ezek bizonyításához (sokszor triviális) egyenlőtlenségek fennállását kell majd belátnunk.

2. Sok esetben hasznos lehet halmazok szerkezetének feltárására az alábbi átalakítás ismerete: bármely $(a, b, c, d, x \in \mathbb{R}\colon c \neq 0, x \neq -d/c)$ esetén

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{x+\dfrac{b}{a}}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{x+\dfrac{d}{c}+\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\left[1+\frac{\dfrac{bc-ad}{ac}}{x+\dfrac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}} =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}$$

vagy

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{acx+bc}{acx+ad} = \frac{a}{c}\cdot\frac{acx+ad+bc-ad}{acx+ad} = \frac{a}{c}\cdot\left(1+\frac{bc-ad}{acx+ad}\right) =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{bc-ad}{cx+d} = \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}.$$

Példák.

1. A

$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n}\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

2. A

$$\mathcal{H} := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 2, ill. a 3 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

3. A

$$\mathcal{H} := \left\{a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : \ 0 < a \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. csak pozitív számokat tartalmaz. A 2 is alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$a + \frac{1}{a} = 2 \cdot \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \qquad (0 < a \in \mathbb{R}).$$

4. A

$$\mathcal{H} := \left\{\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \in \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: ha $ab > 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} > 0$, így

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2;$$

ha pedig $ab < 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} < 0$, így

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$$

5. A

$$\mathcal{H} := \left\{\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: az

$$a := |x+1|, \qquad \text{ill.} \qquad b := |x-1|$$

helyettesítéssel látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ esetén

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

6. A

$$\mathcal{H} := \left\{\text{tg}(\alpha) + \text{ctg}(\alpha) \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{ctg}(\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha)+\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}\geq 2 \qquad \left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

7. A

$$\mathcal{H}:=\left\{\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

1. módszer. tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2;$$

2. módszer. bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x^2+1+1\geq 2\sqrt{x^2+1} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2\geq 0.$$

8. A

$$\mathcal{H}:=\left\{\frac{x^2}{1+x^4}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

halmaz felülről korlátos, ui. az $\frac{1}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:

1. módszer. ha $x=0$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ha pedig pedig $0\neq x\in\mathbb{R}$, akkor

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\leq\frac{1}{2};$$

2. módszer. minden $x\in\mathbb{R}$ számra

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leq\frac{1}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad 2x^2\leq 1+x^4 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(x^2-1\right)^2\geq 0.$$

9. A

$$\mathcal{H}:=\left\{2x^4-2x^3-x^2+1\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 0 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$2x^4-2x^3-x^2+1\geq 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad (x^2-1)^2+(x^2-x)^2\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

10. A
$$\mathcal{H} := \{a + b - ab \in \mathbb{R} : \; a, b \in \mathbb{R}\}$$
halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, hiszen ha $b \in (0, 1)$, akkor $1 - b > 0$, így bármely $a \in (0, 1)$ esetén
$$0 < a(1 - b) < 1 - b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < a + b - ab < 1.$$

11. A
$$\mathcal{H} := \left\{ab - 5a^2 - 3b^2 \in \mathbb{R} : \; a, b \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz felülről korlátos, ui. a 0 felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$ab - 5a^2 - 3b^2 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -ab - 4a^2 - 4b^2 - (a - b)^2 \leq 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

12. A
$$\mathcal{H} := \left\{a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \in \mathbb{R} : \; a, b \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz felülről alulról, ui. a 0 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

13. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{(a + b)(b + c)(a + c)}{abc} \in \mathbb{R} : \; 0 < a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. a $\dfrac{128}{65}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$\begin{aligned}
\frac{(a + b)(b + c)(a + c)}{abc} &= \frac{a + b}{a} \cdot \frac{b + c}{b} \cdot \frac{a + c}{c} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + 1 = \\
&= 2 + \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}_{\geq 2} \geq 8,
\end{aligned}$$
és
$$8 \geq \frac{128}{65} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 520 \geq 128.$$

14. A

$$\mathcal{H} := \left\{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2 + \left(1+\frac{y}{z}\right)^2 + \left(1+\frac{z}{x}\right)^2 \in \mathbb{R} :\ 0 < x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 12 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: bármely $a, b \in (0, +\infty)$ esetén

$$\frac{1+\frac{a}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ezért

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{a}{b}.$$

A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlnség felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^2 + \left(1+\frac{y}{z}\right)^2 + \left(1+\frac{z}{x}\right)^2 \geq 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 12. \quad \blacksquare$$

Feladat. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy a $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról, ill. felülről nem korlátos!

Útm. A definíció szerint valamely $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz

- **alulról nem korlátos**, ha

$$\neg\left(\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \geq k\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathcal{H}: \qquad x < k\right);$$

- **felülről nem korlátos**, ha

$$\neg\left(\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \leq K\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathcal{H}: \qquad x > K\right).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mathcal{H} := \left\{\frac{x^2+2x+3}{x+1} \in \mathbb{R} :\ 1 \leq x \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz felülről nem korlátos!

Útm. Mivel bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} \overset{\boxed{x \geq 1}}{\geq} \frac{x^2}{x+1} \overset{\boxed{x \geq 1}}{\geq} \frac{x^2}{x+x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2},$$

ezért tetszőleges $0 < K \in \mathbb{R}$ esetén igaz az

$$\frac{x}{2} > K \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2+2x+3}{x+1} > K$$

implikáció. Következésképpen az

$$x := 2K+1 \in [1, +\infty)$$

jó választás.

Emlékeztető. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaznak **van**

- **maximuma**, ha
$$\exists \alpha \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \leq \alpha.$$
Ekkor α-t a H halmaz **maximumának** nevezzük és a $\max(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.

- **minimuma**, ha
$$\exists \beta \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \geq \beta.$$
Ekkor β-t a $\mathcal{H}$ halmaz **minimumának** nevezzük és a $\min(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzések.

1. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma, akkor $\max(\mathcal{H})$ egyben felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

2. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak van minimuma, akkor $\min(\mathcal{H})$ egyben alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

3. A $\mathcal{H}$ halmaznak pontosan akkor **nincsen maximuma**, ha bármely $\mathcal{H}$-beli eleménél van nagyobb $\mathcal{H}$-beli elem:
$$\forall \alpha \in \mathcal{H}\ \exists x \in \mathcal{H}: \qquad x > \alpha.$$

4. A $\mathcal{H}$ halmaznak pontosan akkor **nincsen minimuma**, ha bármely $\mathcal{H}$-beli eleménél van kisebb $\mathcal{H}$-beli elem:
$$\forall \beta \in \mathcal{H}\ \exists x \in \mathcal{H}: \qquad x < \beta.$$

Példák.

1. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmazn esetén $\max(\mathcal{H}) = 1$, ui. $1 \in \mathcal{H}$ $(n = 1)$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{n} \leq 1$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen minimuma, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(n+1)$-re
$$\mathcal{H} \ni \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \in \mathcal{H} \qquad (\text{ui.} \quad \Longleftrightarrow \quad n+1 > n)\,.$$

2. A
$$\mathcal{H} := \left\{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmaz esetén $\min(\mathcal{H}) = 0$, ui. $0 \in \mathcal{H}$ $(n = 1)$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq 1 - \frac{1}{n}$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen maximuma, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(n+1)$-re
$$\mathcal{H} \ni 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} \in \mathcal{H} \qquad (\text{ui.} \quad \Longleftrightarrow \quad n+1 > n)\,. \quad \blacksquare$$

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy minden (nem-üres)

- felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb, azaz a **felső korlátok halmazának van minimuma**;
- alulról korlátos halmaz alsó korlátai között van legnagyobb, azaz az **alsó korlátok halmazának van maximuma**.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz

1. felülről korlátos, akkor, akkor felső korlátai között van legkisebb: az
$$\mathcal{F} := \{K \in \mathbb{R} : \quad K \text{ felső korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$
halmaznak van minimuma.
2. alulról korlátos, akkor, akkor alsó korlátai között van legnagyobb: az
$$\mathcal{A} := \{k \in \mathbb{R} : \quad k \text{ alsó korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$
halmaznak van maximuma.

Emlékeztető.

1. A felülről korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját a számhalmaz **felső határ**ának, más szóval **szuprémum**ának vagy **lényeges felső korlát**jának neveztük és a $\sup(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöltük: $\sup(\mathcal{H}) := \min(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}$.

2. Az alulról korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a számhalmaz **alsó határ**ának, más szóval **infimum**ának vagy **lényeges alsó korlát**jának neveztük és az $\inf(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöltük: $\inf(\mathcal{H}) := \max(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}$.

Példák.

1. A $\mathcal{H} := [-1, 1]$ halmaz esetében
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -1, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1;$$

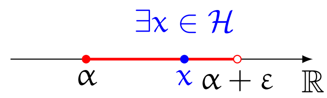
2. A $H := (-1, 1]$ halmaz esetében
$$\inf(\mathcal{H}) = -1, \ \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1.$$

   Megjegyezzük, hogy a $\nexists \min(\mathcal{H})$ állítás a következőképpen látható be. Ha lenne $\mathcal{H}$-nak minimuma: $\xi \in \mathcal{H} \in (-1, 1]$, akkor az
$$\eta := \frac{-1+\xi}{2} < \xi$$
   számra $\eta \in (-1, 1] = \mathcal{H}$ teljesülne, ami nem lehetséges.

Megjegyzések.

1. Világos, hogy
   (a) $\exists \min(\mathcal{H}) \quad \Longleftrightarrow \quad \inf(\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H})$.
   (b) $\exists \max(\mathcal{H}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup(\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H})$.

2. Az $\inf(\mathcal{H}) = \alpha$ állítás azt jelenti, hogy
   - α a $\mathcal{H}$ halmaz alsó korlátja:
$$\forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \geq \alpha,$$
   - bármely α-nál nagyobb szám már nem alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$(\forall a > \alpha \ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < \alpha + \varepsilon).$$



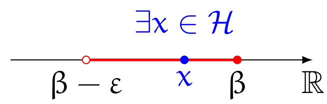
3. A $\sup(\mathcal{H}) = \beta$ állítás azt jelenti, hogy

   - β a $\mathcal{H}$ halmaz ferlső korlátja:

$$\forall x \in \mathcal{H} \qquad x \leq \beta,$$

   - bármely β-nál kisebb szám $\mathcal{H}$-nak már nem felső korlátja:

$$(\forall b < \beta\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > \beta - \varepsilon).$$



Feladat. Vizsgáljuk az $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság szempontjából! Határozzuk meg $\inf \mathcal{H}$-t és $\sup \mathcal{H}$-t! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

1. $\mathcal{H} := \left\{\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} : \ x \in (0,1]\right\};$

2. $\mathcal{H} := \left\{\dfrac{5n+3}{8n+1} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\right\};$

3. $\mathcal{H} := \left\{\dfrac{x+1}{2x+3} \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x \in \mathbb{R}\right\};$

4. $\mathcal{H} := \left\{\dfrac{2x+3}{3x+1} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{Z}\right\};$

5. $\mathcal{H} := \left\{\dfrac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x \in \mathbb{R}\right\};$

6. $\mathcal{H} := \left\{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x \in \mathbb{R}\right\}.$

Útm.

1. • $\mathcal{H}$ alulról korlátos, ugyanis 0 nyilván alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak, sőt minden $x \in (0,1]$ esetén

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1} = 1,$$

ezért 1 is alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Mivel $x = 1$ esetén

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{H},$$

ezért $\mathcal{H}$-nak van legkisebb eleme (minimuma):

$$\min \mathcal{H} = 1, \qquad \text{így} \qquad \inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1.$$

- Ha x elég közel van 0-hoz, akkor $\frac{1}{x}$ értéke igen nagy. Így sejthető, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos. Ennek megmutatásához azt kell belátni, hogy

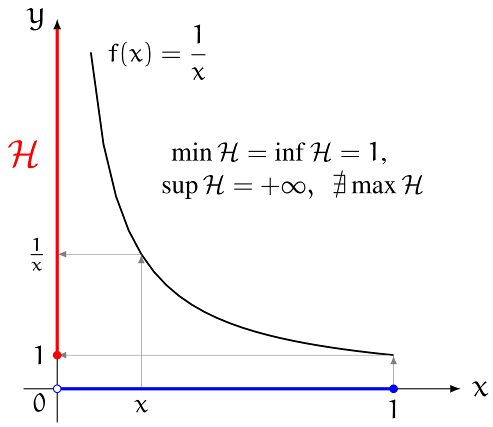
$$\forall K \in \mathbb{R}\text{-hoz } \exists x \in (0,1]: \quad \frac{1}{x} > K.$$

Legyen $K > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Ekkor

$$\frac{1}{x} > K, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < \frac{1}{K}.$$

Így pl. az $x := \frac{1}{K+1} < 1$ megfelelő, ami azt mutatja, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos.

Megjegyzés. A kapott eredmények az $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény grafikonjáról is leolvashatók:



Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem,

$$\inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1, \qquad \sup \mathcal{H} = +\infty.$$

2. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{5n+3}{8n+1}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{n+\frac{3}{5}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{n+\frac{1}{8}+\frac{3}{5}-\frac{1}{8}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}$$

vagy

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{40n+24}{40n+5} = \frac{5}{8} \cdot \frac{40n+5+19}{40n+5} = \frac{5}{8} \cdot \left(1 + \frac{19}{40n+5}\right) =$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{40n+5} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}.$$

- Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} \leq \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8 \cdot 0 + 1} = 3,$$

ezért

$$\max \mathcal{H} = \sup \mathcal{H} = 3,$$

ui. 3 felső korlát és $3 \in \mathcal{H}$.

- $\inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}$, ui. $\frac{5}{8}$ alsó korlát és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$\frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8N+1} < \frac{5}{8} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad N > \frac{1}{8}\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)$$

és

$$N := \max\left\{0, \left[\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{8}\right] + 1\right\}$$

ilyen. Világos, hogy $\nexists \min \mathcal{H}$, mivel

$$\forall a \in \mathcal{H}: \quad a > \inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem,

$$\inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}, \qquad \max \mathcal{H} = \sup \mathcal{H} = 3.$$

3. - Világos, hogy bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+3-1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3}.$$

- Mivel
$$\mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 0+6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$
ezért
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}.$$
- Mivel bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{1}{2x+3} > 0,$$
ezért
$$\mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{2},$$
azaz $\frac{1}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.
- Mivel nagy x-ekre $\frac{1}{2x+3}$ igen kicsi, ezért sejthető, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{1}{2}$-nél kisebb felső korlátja:
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in [0,+\infty): \qquad \mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$
Ez azzal egyenértékű, hogy $\frac{1}{4x+6} < \varepsilon$, azaz hogy $\frac{1}{\varepsilon} - 6 < 4x$. Ilyen $x \geq 0$ nyilván létezik. Következésképpen $\sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$. Világos, hogy $\nexists \max(\mathcal{H})$, mivel $\frac{1}{2} \notin \mathcal{H}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}, \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

4. - Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén
$$\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+9}{6x+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+2+7}{6x+2} = \frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{7}{6x+2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6x+2} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}.$$
- Ha $x < 0$, akkor $\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+1} < 0$, míg $x \geq 0$ esetén
$$0 \leq \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+1} \leq \frac{7}{3}.$$
Ezért
$$\frac{2x+3}{3x+1} \leq \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$$

és $x = 0$-ra
$$\frac{2\cdot 0+3}{3\cdot 0+1} = 3.$$
Tehát a $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma és $\max(\mathcal{H}) = 3$, következésképpen $\sup(\mathcal{H}) = 3$.

- Ha $x = -1$, akkor
$$\frac{2(-1)+3}{3(-1)+1} = -\frac{1}{2}.$$
Lássuk be, hogy
$$\frac{2x+3}{3x+1} \geq -\frac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{Z})$$
teljesül. Ui. ez azzal ekvivalens, hogy
$$\frac{2x+3}{3x+1} + \frac{1}{2} = 7\cdot\frac{x+1}{3x+1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{Z}),$$
ami igaz. Tehát
$$\min(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = -1/2.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

5. - Világos, hogy bármely $-2 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6|x|+9}{6|x|+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6|x|+2+7}{6|x|+2} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{7}{6|x|+2}\right) = \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1}.$$

- Mivel tetszőleges $-2 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1} > 0,$$
ezért
$$\mathcal{H} \ni \frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1} > \frac{2}{3},$$
azaz a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, és $\frac{2}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Látható, hogy az
$$\frac{1}{3|x|+1}$$
tört az x nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei nagy x-ekre $\frac{2}{3}$-

hoz közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{2}{3}$-nál nagyobb alsó korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in [-2, +\infty): \qquad \mathcal{H} \ni \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Valóban, a tetszőleges $x \in [-2, +\infty)$ esetén fennálló

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1} < \frac{2}{3}+\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1} < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{\varepsilon} < 9|x|+3 \quad\Longleftrightarrow\quad |x| > \frac{7}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$$

ekvivalencia-lánc következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $h \in \mathcal{H}$, amelyre

$$h < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Így

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{2}{3} \qquad \text{és} \qquad \nexists\min(\mathcal{H}), \quad \text{ui.} \quad \frac{2}{3} \notin \mathcal{H}.$$

- Mivel bármely $x \in [-2, +\infty)$ esetén

$$\mathcal{H} \ni \frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} \le \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|0|+1} = \frac{2|0|+3}{3|0|+1} = \frac{3}{1},$$

ezért $\mathcal{H}$-nak van legnagyobb eleme: $\max(\mathcal{H}) = 3$. Következésképpen

$$\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{2}{3}, \quad \nexists\min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

Megjegyezzük, hogy az $y := |x|$ helyettesítéssel jól látható, hogy

$$\left\{\frac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R}:\ -2 \le x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{2y+3}{3y+1} \in \mathbb{R}:\ 0 \le y \in \mathbb{R}\right\}$$

ami némileg egyszerűsíti a megoldást.

6. - Mivel bármely $0 \le x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot 1 = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

és

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1 \qquad (0\leq x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$0<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\leq 1 \qquad (0\leq x\in\mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz korlátos, továbbá 0, ill. 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Mivel $x=0$ esetén $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=1$ ezért $1\in\mathcal{H}$, következésképpen $\max(\mathcal{H})=1$, és így $\sup(\mathcal{H})=1$.
- Látható, hogy ha x elég nagy, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

igen kicsi. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen 0-nál nagyobb alsó korlátja:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists x\in[0,+\infty): \qquad \mathcal{H}\ni\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<0+\varepsilon=\varepsilon.$$

Mivel tetszőleges $0\leq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}<\varepsilon \qquad\Longleftrightarrow\qquad x>\frac{1}{4\varepsilon^2},$$

ezért $\inf(\mathcal{H})=0$. Mivel $0\notin\mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H})=0, \quad \nexists\min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H})=\max(\mathcal{H})=1.$$

Házi feladatok

Feladat. Van-e a

$$\mathcal{H} := \left\{2 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmaznak maximuma, ill. minimuma?

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy

$$\sup \mathcal{H} = 2 \qquad \text{és} \qquad \inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1.$$

Valóban,

- a 2 szám felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $2 - \frac{1}{n} < 2$. A 2 a legisebb felső korlát, ui. ha $\varepsilon > 0$, akkor van a $2 - \varepsilon$ számnál nagyobb H-beli elem, azaz alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n.$$
Ez pedig igaz, hiszen $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos.
- az 1 szám alsó korlátja H-nak, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$1 \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq 1 - \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{n} \leq 1.$$
Mivel $1 \in H$ (hiszen $n = 1$ esetén $2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$), ezért
$$\inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1.$$

2. lépés. Mivel $2 \notin \mathcal{H}$ (nincsen olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

$$2 - \frac{1}{n} = 2$$

volna), ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen maximuma.
Megjegyezzük, hogy ez így is belátható: ha $h \in \mathcal{H}$ tetszőleges, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$h = 2 - \frac{1}{n}.$$

Ha most $m := n+1$ akkor a $k := 2 - \dfrac{1}{m} \in \mathcal{H}$ elemre

$$k = 2 - \frac{1}{m} > 2 - \frac{1}{n} = h.$$

Feladat. Vizsgáljuk az $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság szempontjából! Határozzuk meg $\inf \mathcal{H}$-t és $\sup \mathcal{H}$-t! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

1. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{x^2+1}{4x^2+3} \in \mathbb{R} : \; x \in [2, +\infty) \right\};$
2. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0 \right\};$
3. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{\sqrt{x}-1}{5\sqrt{x}+2} \in \mathbb{R} : \; x \in [4, +\infty) \right\};$
4. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{x}{y} \in \mathbb{R} : \; x \in (0,1), y \in (0,x) \right\};$
5. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} \in \mathbb{R} : \; x \in [1/9, +\infty) \right\}.$
6. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{5x-1}{2x+3} \in \mathbb{R} : \; x \in [3, +\infty) \right\}.$

Útm.

1. • Mivel minden $x \in [2, +\infty)$ esetén

$$(*) \qquad \frac{x^2+1}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2+4}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2+3+1}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4x^2+3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2+12}$$

és

$$\frac{1}{16x^2+12} > 0,$$

ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{x^2+1}{4x^2+3} > \frac{1}{4},$$

azaz $\dfrac{1}{4}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

• Megmutatjuk, hogy $\dfrac{1}{4}$ a legnagyobb alsó korlát: $\inf(\mathcal{H}) = \dfrac{1}{4}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h < \dfrac{1}{4} + \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [2, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{4} + \varepsilon > h := \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2+12} \iff \varepsilon > \frac{1}{16x^2+12} \iff x^2 > \frac{1}{16\varepsilon} - \frac{3}{4}.$$

Világos, hogy pl. az

$$x := \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon}} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} + 2 > 2$$

szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{4} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [2, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2+12} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{16\cdot 2^2+12} = \frac{5}{19} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{19}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{4}, \qquad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{19}.$$

2. - Mivel minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5\cdot 5^n+1}{2\cdot 5^n+3} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10\cdot 5^n+2}{10\cdot 5^n+15} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10\cdot 5^n+15-13}{10\cdot 5^n+15} = \frac{5}{2}\cdot\left(1-\frac{13}{10\cdot 5^n+15}\right) =$$

$(*)$

$$= \frac{5}{2} - \frac{13}{4\cdot 5^n+6}$$

és

$$\frac{13}{4\cdot 5^n+6} > 0,$$

ezért

$$\frac{5\cdot 5^n+1}{2\cdot 5^n+3} < \frac{5}{2},$$

azaz $\frac{5}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{5}{2}$ a legkisebb felső korlát: $\sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > \frac{5}{2} - \varepsilon$, ha alkalmas $n \in \mathbb{N}_0$ számra

$$\frac{5}{2} - \varepsilon < a := \frac{5}{2} - \frac{13}{4\cdot 5^n+6} \iff \varepsilon > \frac{13}{4\cdot 5^n+6} \iff 5^n > \frac{13}{4\varepsilon} - \frac{6}{4}.$$

Nem nehéz belátni, hogy van ilyen n.

- Mivel $\frac{5}{2} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \geq \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^0 + 6} = \frac{6}{5} \in \mathcal{H}.$$

  Ez azt jelenti, hogy $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \dfrac{6}{5}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{6}{5}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}, \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

3. - Mivel minden $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$(*) \qquad \frac{\sqrt{x}-1}{5\sqrt{x}+2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{x}-5}{5\sqrt{x}+2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{x}+2-7}{5\sqrt{x}+2} = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{7}{5\sqrt{x}+2}\right) = \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10}$$

  és

$$\frac{7}{25\sqrt{x}+10} > 0,$$

  ezért

$$\frac{\sqrt{x}-1}{5\sqrt{x}+2} < \frac{1}{5},$$

  azaz $\dfrac{1}{5}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\dfrac{1}{5}$ a legkisebb felső korlát: $\sup(\mathcal{H}) = \dfrac{1}{5}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > \dfrac{1}{5} - \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [4, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{5} - \varepsilon < h := \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} > \frac{7}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}.$$

  Világos, hogy pl. az

$$x := \left(\frac{7}{25\varepsilon}\right)^2 + 4 = \frac{49}{225\varepsilon^2} + 4 > 4$$

  szám ilyen.

- Mivel $\dfrac{1}{5} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \geq \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{4}+10} = \frac{1}{12} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \dfrac{1}{12}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{12}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{5}, \quad \nexists\max(\mathcal{H}).$$

4.
- A $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos, ugyanis tetszőleges $K \geq 1$ számhoz van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > K$, hiszen $h := \dfrac{x}{y}$:

$$x := \frac{1}{2}, \quad y \in \left(0, \frac{1}{2K}\right) \qquad \text{esetén} \qquad h = \frac{\frac{1}{2}}{y} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2K}} = K.$$

Ezért

$$\sup(\mathcal{H}) = +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \nexists\max(\mathcal{H}).$$

- A $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, ugyanis 0 alsó korlátja, sőt minden $x \in (0,1)$ esetén $\dfrac{x}{y} > \dfrac{x}{x} = 1$, ezért az 1 is alsó korlát.
- $\inf(\mathcal{H}) = 1$, ugyanis minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in (0,1)$, $y \in (0,x)$, hogy $\dfrac{x}{y} < 1+\varepsilon$, hiszen

$$\frac{x}{y} < 1+\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad y > \frac{x}{1+\varepsilon}$$

és $\dfrac{x}{1+\varepsilon} < x$, ezért tetszőleges $x \in (0,1)$ esetén y legyen olyan, hogy $\dfrac{x}{1+\varepsilon} < y < x$.
- $\nexists\min(\mathcal{H})$, mivel $\inf(\mathcal{H}) = 1 \notin \mathcal{H}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = 1, \quad \nexists\min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = +\infty.$$

5.
- Mivel minden $x \in [1/9, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x}+6}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1+5}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{3\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3}$$

és

$$\frac{5}{9\sqrt{x}+3} > 0,$$

ezért

$$\frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} > \frac{1}{3},$$

azaz $\frac{1}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{3}$ a legnagyobb alsó korlát: $\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h < \frac{1}{3} + \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [1/9, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{3}+\varepsilon > h := \frac{1}{3}+\frac{5}{9\sqrt{x}+3} \quad\Longleftrightarrow\quad \varepsilon > \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{x} > \frac{1}{9}\left(\frac{5}{\varepsilon}-3\right) = \frac{5}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}.$$

Világos, hogy pl. az

$$x := \frac{25}{81\varepsilon^2} + \frac{1}{9}$$

szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{3} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [1/9, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{1/9}+3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \in A.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{6}.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \qquad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{6}.$$

6.
- Világos, hogy bármely $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10x-2}{10x+15} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10x+15-17}{10x+15} = \frac{5}{2}\cdot\left(1-\frac{17}{10x+15}\right) = \frac{5}{2}-\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$

- Mivel tetszőleges $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{14}{9} = \frac{5}{2} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3+3} \leq \frac{5}{2} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3},$$

ezért
$$\inf(A) = \min(A) = \frac{14}{9}.$$

- Látható, hogy $\frac{5}{2}$ felső korlát. Belátjuk, hogy $\sup(A) = \frac{5}{2}$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in [3, +\infty) : \quad \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} > \frac{5}{2} - \varepsilon.$$
Ez azzal egyenértékű, hogy
$$\frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} < \varepsilon, \qquad \text{azaz hogy} \qquad \frac{17}{2\varepsilon} - 3 < 2x.$$
Ilyen $x \in \mathcal{H} := [3, +\infty)$ nyilván létezik, hiszen $\mathcal{H}$ felülrőlnem korlátos.
- $\nexists \max(A)$, mivel $\frac{5}{2} \notin A$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = \frac{14}{9}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

3. gyakorlat (2025. február 26.)

Szükséges ismeretek.

- Értelmezze a függvény fogalmát!
- Mit jelent az $f \in A \to B$ szimbólum?
- Mit jelent az $f : A \to B$ szimbólum?
- Definiálja a halmaznak függvény által létesített képét!
- Definiálja a halmaznak függvény által létesített ősképét!
- Mikor nevez egy függvényt invertálhatónak (vagy injektívnek)?
- Értelmezze az inverz függvény fogalmát!
- Mi a definíciója az összetett függvénynek?

Órai feladatok

Emlékeztető.

- Ha $\emptyset \neq A, B$ halmaz, akkor az A halmazból a B halmazba leképező függvényt úgy adunk meg, hogy A bizonyos elemeihez hozzárendeljük a B valamelyik elemét. Jelölés: $f \in A \to B$. Például
$$\sqrt{} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sin \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Az f függvény **értelmezési tartományá**n, ill. **értékkészleté**n: a
$$\mathcal{D}_f := \{x \in A : \ \exists y \in B : \ y = f(x)\}, \qquad \text{ill. az} \qquad \mathcal{R}_f := \{y \in B : \ \exists x \in A : \ y = f(x)\}$$
halmazt értjük. B neve: **képhalmaz**. Ha $\mathcal{D}_f = A$, akkor azt írjuk, hogy $f : A \to B$. Valamely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén az $f(x)$ elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési érték**ének nevezzük.
- Ha f és g függvény, akkor
$$f = g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \left(\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g =: \mathcal{D} \qquad \text{és} \qquad f(x) = g(x) \quad (x \in \mathcal{D})\right).$$

Példa.

$$\mathcal{D}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{R}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{R}_{\sin} = [-1, 1].$$

Definíció. Legyen A, B, C halmaz, $C \subset A$, továbbá $f\colon A \to B$ és $g\colon C \to B$ olyan függvények, amelyekre

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in C).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a g függvény az f függvény C halmazra való **leszűkítés**e. Jelben: $g =: f|_C$.

Emlékeztető. Valamely $f \in A \to B$ függvény

- és $\mathcal{H}$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **kép**én az

  $$f[\mathcal{H}] := \{f(x) \in B : \ x \in \mathcal{H}\} = \{y \in B \mid \exists x \in \mathcal{H} : y = f(x)\}$$

  halmazt értettük (speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$).

- és $\mathcal{H}$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **őskép**én az

  $$f^{-1}[\mathcal{H}] := \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{H}\}$$

  halmazt értettük (speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$).

Megjegyezések.

1. Szóhasználat:

   - $f[\mathcal{H}]$ az a B-beli halmaz, amelyet az $f(x)$ függvényértékek „befutnak”, ha x „befutja” a $\mathcal{H}$ halmaz elemeit;
   - az $f[\mathcal{H}]$ a B azon y elemeit tartalmazza, amelyekhez van olyan $x \in \mathcal{H}$, hogy $y = f(x)$.

2. Az f függvény értékkészlete értelmezási tartománynak f által létesített képe és f értelmezési tartománya az értékkészletének f által létesített ősképe:

   $$f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f.$$

3. Adott $f \in A \to B$ függvény és $b \in B$ esetén az

   $$f(x) = b \quad (x \in A) \tag{11}$$

egyenlet megoldásainak nevezzük az $f^{-1}[\{b\}]$ halmaz elemeit. Azt mondjuk továbbá, hogy

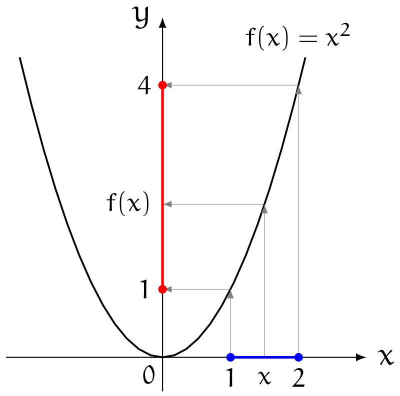
- a (11) egyenletnek **nincsen megoldása** ((11) **nem oldható meg**), ha $f^{-1}[\{b\}] = \emptyset$;
- (11) **megoldása egyértelmű**, ha $f^{-1}[\{b\}]$ egyelemű halmaz.

Példa. Meghatározzuk a $\mathcal{H} := [1,2]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét. Az ábrából sejthető, hogy

$$f\big[[1,2]\big] = [1,4].$$



Biz. A definíció alapján

$$f\big[[1,2]\big] = \big\{x^2 \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2\big\} = \big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [1,2] : y = x^2\big\}.$$

Azt kell tehát meghatározni, hogy x^2 milyen értékek vesz fel, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait. Mivel

$$1 \le x \le 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \le x^2 \le 4, \quad \text{azaz} \quad x^2 \in [1,4],$$

ezért

$$f\big[[1,2]\big] \subset [1,4]. \tag{12}$$

A kérdés ezek után az, hogy az x^2 függvényértékek vajon teljesen „befutják-e” az egész $[1,4]$ intervallumot, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait, vagyis igaz-e a fordított irányú

$$[1,4] \subset f\big[[1,2]\big] \tag{13}$$

tartalmazás is. Az előzőek alapján ez azzal egyenértékű, hogy

$$\forall y \in [1,4] \text{ számhoz } \exists x \in [1,2]: \quad \text{hogy} \quad y = x^2. \tag{14}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x_\pm = \pm\sqrt{y}$. Mivel $1 \le y \le 4$, ezért $1 \le \sqrt{y} \le 2$, így $x_+ \in [1,2]$. Ez pedig azt jelenti, hogy a (14) állítás, tehát a vele egyenértékű (13) tartalmazás is igaz. (12) és (13) alapján a két halmaz egyenlő, azaz $f\big[[1,2]\big] = [1,4]$. ■

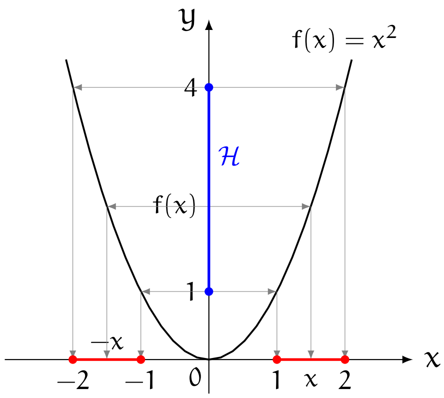
Példa. Meghatározzuk a $\mathcal{H} := [1,4]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét. Az ábrából sejthető, hogy $f^{-1}\big[[1,4]\big] = [-2,-1] \cup [1,2]$.

Biz. A definíció alapján

$$f^{-1}\big[[1,4]\big] = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [1,4]\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x^2 \le 4\big\}.$$



Így

$f^{-1}\big[[1,4]\big]$ az $1 \le x^2 \le 4$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel

$$1 \le x^2 \le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 \le |x| \le 2 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 \le x \le 2 \ \text{ vagy } \ -2 \le x \le -1 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in [-2,-1] \cup [1,2],$$

ezért beláttuk azt, hogy

$$f^{-1}\big[[1,4]\big] = [-2,-1] \cup [1,2]. \quad \blacksquare$$

Példa. Az

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := \{0\}$ halmaz esetében meghatározzuk az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazt. Mivel $0 \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért

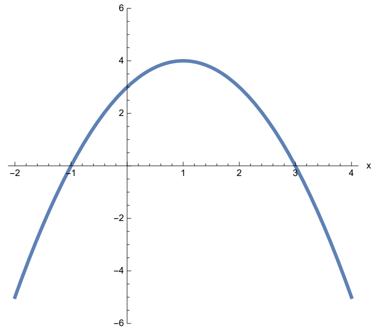
$$f[\{0\}] = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \ x \in \{0\}\big\} = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \ x = 0\big\} = \{3\},$$

továbbá

$$f^{-1}[\{0\}] = \big\{x \in \mathbb{R} : \ 3 + 2x - x^2 \in \{0\}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : \ 3 + 2x - x^2 = 0\big\} = \{-1; 3\},$$

hiszen

$$3 + 2x - x^2 = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = 1 \pm \sqrt{1+3}. \quad \blacksquare$$



1. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3 + 2x - x^2$ függvény grafikonja.

Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{H} := [-2, 2]$ halmaz

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

Útm. A definíció alapján

$$f\big[[-2,2]\big] = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} \mid x \in [-2,2]\big\} = \big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2,2] \colon y = 3 + 2x - x^2\big\}.$$

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 4,$$

továbbá

$$-2 \leq x \leq 2 \implies -3 \leq x - 1 \leq 1 \implies 0 \leq (x-1)^2 \leq 9 \implies -9 \leq -(x-1)^2 \leq 0 \implies$$

$$\implies -5 \leq -(x-1)^2 + 4 \leq 4,$$

ezért tetszőleges $x \in [-2,2]$ esetén $-(x-1)^2 + 4 \in [-5,4]$, azaz

$$f\big[[-2,2]\big] \subset [-5,4]. \tag{15}$$

Megmutatjuk, hogy a fordított irányú

$$[-5,4] \subset f\big[[-2,2]\big] \tag{16}$$

tartalmazás is igaz, azaz

$$y \in [-5,4] \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in [-2,2] \colon y = -(x-1)^2 + 4. \tag{17}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$x_- = 1 - \sqrt{4-y} \qquad \text{és} \qquad x_+ = 1 + \sqrt{4-y}.$$

Mivel

$$y \in [-5,4] \iff -5 \le y \le 4 \iff -4 \le -y \le 5 \iff 0 \le 4-y \le 9 \iff$$

$$\iff 0 \le \sqrt{4-y} \le 3,$$

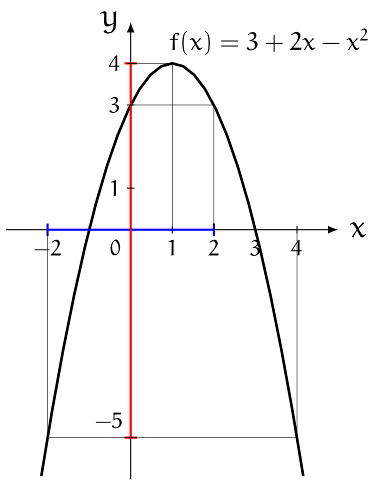
ezért

$$-2 = 1-3 \le x_- = 1 - \sqrt{4-y} \le 1+0 = 1 \quad \iff \quad x_- \in [-2,1] \subset [-2,2].$$

Így a (17) állítást, következésképpen a (16) tartalmazást bebizonyítottuk. (Ezek után az x_+ megoldással már nem is kell foglalkoznunk. Ennek ellenére megjegyezzük, hogy az előzőekhez hasonlóan adódik az, hogy $x_+ \in [1,4]$, ha $y \in [-5,4]$, de $x_+ \in [-2,2]$ is igaz, ha $y \in [3,4]$.) (15) és (16) alapján a szóban forgó halmazok egyenlők, így beláttuk, hogy

$$f\big[[-2,2]\big] = [-5,4].$$

A megoldást szemlélteti a mellékelt ábra:



Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{H} := [1,2]$ halmaz

$$f(x) := |x-1|-1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét!

Útm. Mivel

$$\begin{aligned} f^{-1}[[1,2]] &= \{x \in \mathbb{R} :\ |x-1|-1 \in [1,2]\} = \{x \in \mathbb{R} :\ 1 \leq |x-1|-1 \leq 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ 2 \leq |x-1| \leq 3\}, \end{aligned}$$

ezért a

$$2 \leq |x-1| \leq 3 \tag{18}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazának meghatározása a feladat.

- A $\leq$ megoldása. Mivel

  $$2 \leq |x-1| \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1 \geq 2 \text{ vagy } x-1 \leq -2) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \geq 3 \quad \text{vagy} \quad x \leq -1),$$

  ezért

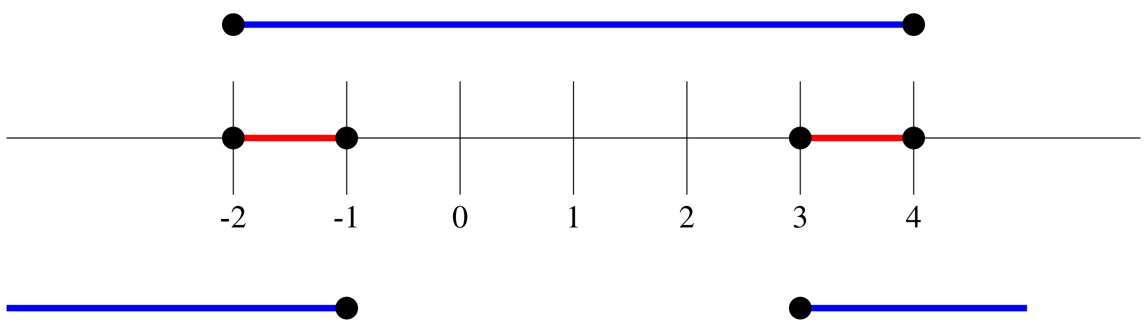
  $$2 \leq |x-1| \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty) =: \mathcal{B}$$

- A $\leq$ megoldása. Mivel

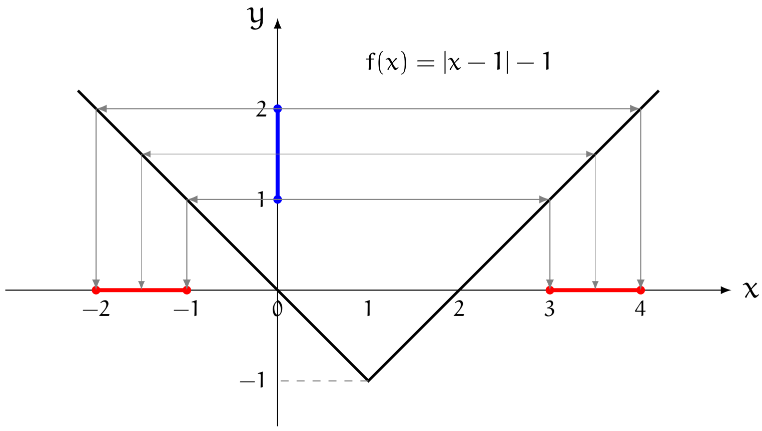
  $$|x-1| \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \leq x-1 \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-2,4] =: \mathcal{J}.$$

Az (18) egyenlőtlenség megoldáshalmaza és egyben a keresett őskép:

$$\begin{aligned} f^{-1}[[1,2]] &= \mathcal{B} \cap \mathcal{J} = \{(-\infty,-1] \cup [3,+\infty)\} \cap [-2,4] = \\ &= \{(-\infty,-1] \cap [-2,4]\} \cup \{[3,+\infty) \cap [-2,4]\} = [-2,-1] \cup [3,4]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



A megoldást szemlélteti az alábbi ábra.



Emlékeztető. Valamely $f \in A \to B$ függvény

- **invertálható** (**injektív** vagy **egy-egyértelmű**), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f: \qquad (x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)).$$

  Ekkor az
$$f^{-1}: \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f, \quad f^{-1}(y) = x: \quad f(x) = y$$
  függvényt f **inverz**ének nevezzük.

- **szürjektív**, ha $\mathcal{R}_f = B$.

- **bijektív** vagy **kölcsönösen egyértelmű**, ha injektív és szürjektív.

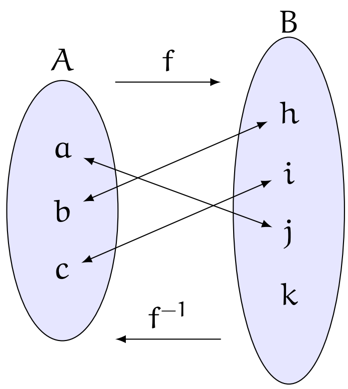
Példa. Az ábrán látható

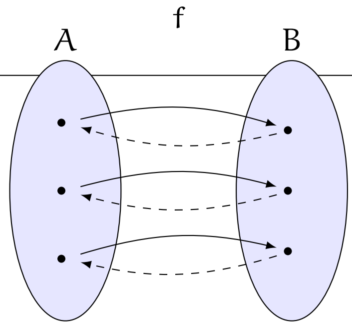
$$f := \{(a, j), (b, h), (c, i)\}$$

függvény invertálható, és inverze az

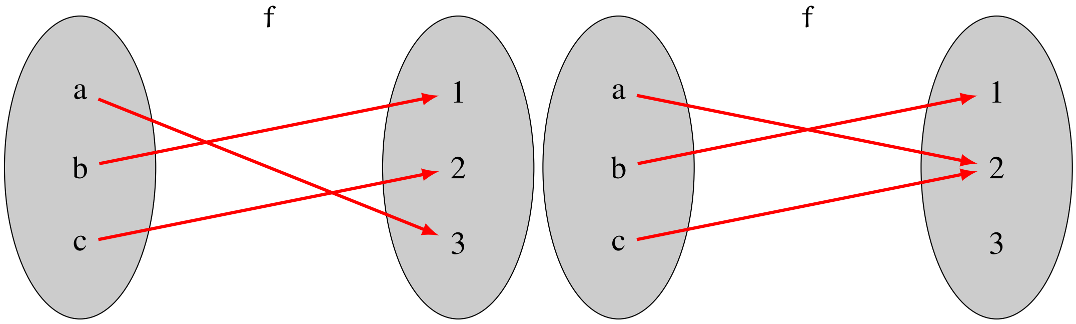
$$f^{-1} := \{(j, a), (h, b), (i, c)\}$$

függvény, de az $f: A \to B$ függvény nem bijektív.





Egy $f : A \to B$ bijektív leképezés párba állítja az A és B halmaz elemeit: a két halmaz elemszáma megegyezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **azonos számosságú**.



A fenti ábra bal oldala példa injektív függvényre, a jobb oldalán lévő f pedig nem injektív.

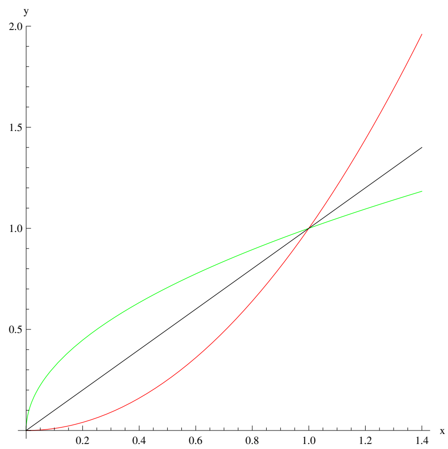
Megjegyzések.

1. Valamely $f \in A \to B$ függvény esetében f invertálhatóságát több különböző módon is le lehet írni:
   - f invertálható $\iff$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}_f$ esetén $u \neq v \implies f(u) \neq f(v)$;
   - f invertálható $\iff$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(u) = f(v) \implies u = v$;
   - f invertálható $\iff$ $\forall\, y \in \mathcal{R}_f$-hez pontosan egy olyan $x \in \mathcal{D}_f$ van, amelyre $f(x) = y$.
2. Ha alkamas $u, v \in \mathcal{D}_f$, $u \neq v$ esetén $f(u) = f(v)$, akkor f nem invertálható (nem injektív).
3. Ha $\mathcal{D}_f$ nem egyelemű, viszont $\mathcal{R}_f$ egyelemű (valódi konstans függvény), akkor f nem invertálható, hiszen
$$\exists x, y \in \mathcal{D}_f,\ x \neq y : \quad f(x) = f(y).$$
4. A definícióból látható, hogy
$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f.$$
5. Ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton (növekvő/csökkenő), akkor invertálható, és f^{-1} is szigorúan monoton (növekvő/csökkenő). Mindez fordítva nem igaz, ui. pl. az
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x & \left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \\ \frac{3}{2} - x & \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) \end{cases}$$
függvény ugyan injektív, de nem szigorúan monoton.

6. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor f és az f^{-1} grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükörképei (vö. (2). ábra), hiszen ha valamely $(x, y) \in \mathbb{R}$ pont rajta van f grafikonján:

$$(x, y) \in \text{graph}\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u \in \mathcal{D}_f,\ v = f(u)\right\},$$

akkor az (y, x) pont rajta van az f^{-1} inverz grafikonján, és ha egy $\mathbb{R}^2$-beli pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pontot az $y = x$ egyenesre tükrözzük.



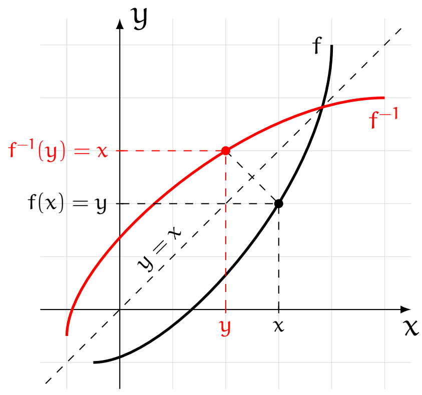
2. ábra. Az $x \mapsto \sqrt{x}, \quad x, \quad x^2$ függvények grafikonjai.

7. Felhívjuk a figyelmet egy, a jelölésekkel kapcsolatos látszólagos következetlenségre. Az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ szimbólum tetszőleges f függvény esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített ősképét jelölte. Azonban, ha f invertálható függvény, akkor ugyanezzel jelöltük – a fogalmilag igencsak különböző dolgot, nevezetesen – a $\mathcal{H}$ halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képét. Ez azért nem vezet félreértéshez – sőt némiképp egyszerűsíti a bevezetett jelelöléseket –, mert minden invertálható f függvény és minden $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}_f$ esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{H}\}$ halmaz – megegyezik a $\mathcal{H}$ halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az

$$\left\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} : \ y \in \mathcal{H}\right\}$$

halmazzal.

Megjegyezzük, hogy „átlátszó” papír felhasználásával a tükrözés elkerülhető. Az f grafikonjának megrajzolása után rögtön láthatóvá válik inverzének grafikonja is, ha először elforgatjuk a papírt 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányban, majd függőlegesen megforgatjuk a papírt. Az az ábra, ami a papíron át látható, pont az f^{-1} inverz grafikonja.



Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény injektív, majd kiszámítjuk inverzét. Mivel minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = 3 \cdot \frac{3x+2}{3x-3} = 3 \cdot \frac{3x-3+5}{3x-3} = 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{3x-3}\right) = 3 + \frac{5}{x-1}, \tag{19}$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = 3 + \frac{5}{y-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. (19) alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $3 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{5}{x-1} \neq 0$, így (19) alapján $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{3\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{5}{y-3} = \frac{y+2}{y-3}$$

  és $x \neq 1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{y+2}{y-3}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók!

1. $f(x) := 3x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := \sqrt{9 - x^2} \quad (x \in [-3, 3])$;
4. $f(x) := \left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 \ (x \in (-1, 1))$.

Útm.

1. f invertálható, hiszen szigorúan monoton (növekedő):
$$\forall u, v \in \mathbb{R},\ u < v: \qquad 3u < 3v \quad \Longleftrightarrow \quad 3u + 2 < 3v + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(u) < f(v).$$
2. f nem invertálható, hiszen $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$.
3. f nem invertálható, hiszen $f(-3) = \sqrt{9 - (-3)^2} = \sqrt{9 - 3^2} = f(3)$.
Megjegyzés. Ha f (nemtrivi) páros függvény, akkor f nyilvánvalóan nem invertálható.
4. f invertálható, hiszen tetszőleges $x, y \in (-1, 1)$ esetén
$$f(x) = f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{y-1}{1+y}\right)^2 - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \left|\frac{y-1}{1+y}\right|.$$
Mivel $x, y \in (-1, 1)$, ezért
$$\left|\frac{x-1}{1+x}\right| = -\frac{x-1}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} \quad (>0) \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{y-1}{1+y}\right| = -\frac{y-1}{1+y} = \frac{1-y}{1+y} \quad (>0).$$
Következésképpen
$$f(x) = f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y} \quad \Longleftrightarrow \quad (1-x)(1+y) = (1-y)(1+x) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 1 + y - x - xy = 1 + x - y - yx \quad \Longleftrightarrow \quad 2y = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x = y,$$
azaz f invertálható.

Feladat. Invertálhatóak-e az alábbi fügvények? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

1. $f(x) := \dfrac{1}{1+|x-1|} \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2} \quad (2 \neq x \in \mathbb{R});$
4. $f(x) := \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 \quad (x \in (-1, 1)).$

Útm.

1. Az f függvény nem injektív, ui.

$$0 \neq 2 \qquad \text{és} \qquad f(0) = \frac{1}{1+|0-1|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+|2-1|} = f(2).$$

2. Ha

- $a = 0$, akkor $\mathcal{R}_f = \{b\}$, de $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, így f nem invertálható.
- $a \neq 0$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ és

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax + b = ay + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható és

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a},$$

hiszen

$$ax + b = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{y-b}{a}.$$

3. Mivel minden $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(*) \qquad f(x) = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2},$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{y-2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani.

$(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $1 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\dfrac{3}{x-2} \neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{1\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, akkor

$$f(x) = y \quad\Longleftrightarrow\quad 1 + \frac{3}{x-2} = y \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2 + \frac{3}{y-1} = \frac{2y+1}{y-1}$$

  és $x \neq 2$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{2y+1}{y-1}.$$

4. Korábbról tudjuk, hogy f invertálható. Világos, hogy bármely $x \in (-1,1)$ estén $f(x) > -1$, azaz

$$\mathcal{R}_f \subset (-1,+\infty). \tag{20}$$

Mivel $f(x)$ a (-1)-hez közeli x pontokban tetszőlegesen nagy értéket felvesz, ezért sejthető, hogy a fordított irányú

$$\mathcal{R}_f \supset (-1,+\infty). \tag{21}$$

tartalmazás is igaz, azaz

$$\forall y \in (-1,+\infty)\ \exists x \in (-1,1): \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 = y.$$

Ha tehát $y \in (-1,+\infty)$, akkor

$$f(x) = y \iff \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 = y \iff \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \sqrt{y+1} \overset{x\in(-1,1)}{\iff}$$

$$\overset{x\in(-1,1)}{\iff} \frac{1-x}{x+1} = \sqrt{y+1} \iff x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}.$$

Mivel $y \in (-1, +\infty)$, ezért

$$-1 < x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1-\sqrt{y+1} < 1-\sqrt{y+1} < 1+\sqrt{y+1},$$

ez utóbbi egyenlőtlenség-rendszer pedig nyilvánvaló. Így (20), ill. (21) alapján $\mathcal{R}_f = (-1, +\infty)$. Így $x = f^{-1}(y)$ következtében az inverz függvény:

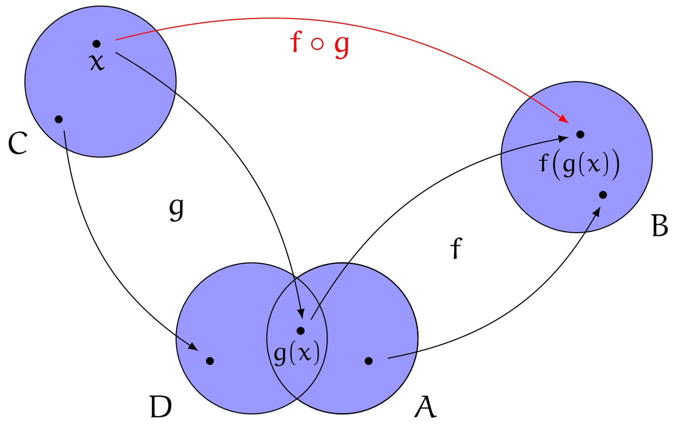
$$f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} \qquad (y \in (-1, +\infty))\,.$$

Emlékeztető. Legyen $f \in A \to B$, $g \in C \to D$, ill.

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ekkor az f (külső) és a g (belső) függvény **összetett függvény**nek (**kompozíció**jának) nevezzük az alábbi függvényt:

$$f \circ g : \mathcal{H} \to B, \qquad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$



Megjegyzések.

1. A definícióból nyilvánvaló, hogy $\mathcal{D}_{f\circ g} = g^{-1}[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f]$, illetve $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ esetén $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g$.

2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_f), \qquad\qquad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in \mathcal{R}_f).$$

3. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan invertálható függvények, amelyekre $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$ és $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_g$ teljesül, akkor $f \circ g$ is invertálható és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

4. A kompozíció-képzés nem kommutatív, hiszen pl. az

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \text{és a} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében $f \circ g \neq g \circ f$. Valóban,

- a
$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1] \neq \emptyset$$
halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$, akkor
$$(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = \sqrt{1 - g(x)} = \sqrt{1-x^2},$$
azaz az f és a g kompizíciója:
$$f \circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2};$$

- a
$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1] \neq \emptyset$$
halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$, akkor
$$(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x,$$
azaz a g és az f függvény kompozíciója pedig
$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = 1 - x.$$

Feladat. Írjuk fel az $f \circ g$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := \sqrt{x+1}$ $(-1 \leq x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 - 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$ $\left(-\frac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right)$, $g(x) := x^2 + 3x + \frac{3}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 1 \in [-1, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 1 \geq -1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 \geq 0\right\}.\end{aligned}$$

Mivel

$$x^2 - 3x + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \in \{1; 2\},$$

ezért

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)(x-2) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty).$$

Tehát

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty),$$

és bármely $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) + 1} = \sqrt{(x^2 - 3x + 1) + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f \circ g)(x) := \sqrt{x^2 - 3x + 2} \qquad (x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty))$$

függvény.

2. Látható, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x + \frac{3}{2} \in \mathbb{R}\backslash\{-1/2\}\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x + \frac{3}{2} \neq -\frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x + 2 \neq 0\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \ (x+1)(x+2) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1; -2\}.\end{aligned}$$

Így tetszőleges $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{2g(x) + 1} = \frac{1}{2\left(x^2 + 3x + \frac{3}{2}\right) + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Mindez azt jelenti, hogy az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f\circ g)(x) := \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3x+2} \qquad (x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;-2\})$$

függvény.

Feladat. Írjuk fel az $f\circ g$ és a $g\circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := \sqrt{2x+1}$ $\left(\frac{1}{2}\leq x\in\mathbb{R}\right)$, $g(x) := \dfrac{1}{x^2-2}$ $(2<x\in\mathbb{R})$;
2. $f(x) := 1-x^2$ $(x\in\mathbb{R})$, $g(x) := \sqrt{x}$ $(0\leq x\in\mathbb{R})$;
3. $f(x) := x^2$ $(x\in\mathbb{R})$, $g(x) := 2^x$ $(x\in\mathbb{R})$;
4. $f(x) := -x^2$ $(0<x\in\mathbb{R})$, $g(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(0<x\in\mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel

$$\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\} = \left\{x\in(2,+\infty):\ \frac{1}{x^2-2}\geq\frac{1}{2}\right\} = \emptyset,$$

ui. $x\in(2,+\infty)$ következtében $x^2-2>0$, így

$$\frac{1}{x^2-2}\geq\frac{1}{2} \qquad\Longrightarrow\qquad 2\geq x^2-2 \qquad\Longrightarrow\qquad 4\geq x^2 \qquad\Longrightarrow\qquad |x|\leq 2.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f\circ g \quad \text{nem képezhető.}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{g\circ f} &= \{x\in\mathcal{D}_f:\ f(x)\in\mathcal{D}_g\} = \left\{x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right):\ \sqrt{2x+1}\in(2,+\infty)\right\} = \\
&= \left\{x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right):\ 2x+1\in(4,+\infty)\right\} = \left\{x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right):\ x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)\right\} = \\
&= \left(\frac{3}{2},+\infty\right)\neq\emptyset,
\end{aligned}$$

ezért tetszőleges $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$ esetén

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f^2(x) - 2} = \frac{1}{(\sqrt{2x+1})^2 - 2} = \frac{1}{2x-1}.$$

Mindez azt jelenti, hogy a g és az f függvény kompozíciója így a

$$(g \circ f)(x) := \frac{1}{2x-1} \qquad \left(x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right)$$

függvény.

2. Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in [0, +\infty) : \ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = [0, +\infty),$$

ill.

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ 1 - x^2 \in [0, +\infty)\right\} = [-1, 1],$$

ezért

$$f \circ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 - (g(x))^2 = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x,$$

ill.

$$g \circ f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

3. Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 2^x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

ill.

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R},$$

ezért

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x};$$

ill.

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}.$$

4. Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (0, +\infty) : \ \frac{1}{x^2} \in (0, +\infty)\right\} = (0, +\infty),$$

ill.

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (0, +\infty) : \ -x^2 \in (0, +\infty)\right\} = \emptyset,$$

ezért

$$f \circ g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(g(x))^2 = -\frac{1}{x^4},$$

ill.

$$g \circ f \quad \text{nem képezhető.}$$

Házi feladatok

Feladat. Az

$$f(x) := 3x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := [0, 1]$ halmaz esetén határozzuk meg az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazokat! Milyen A halmaz esetén áll fenn az $f[A] = \emptyset$ vagy az $f^{-1}[A] = \emptyset$ egyenlőség?

Útm.

- Világos, hogy

  $$f[\mathcal{H}] = \left\{ 3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| \, x \in [0, 1] \right\}.$$

  Mivel minden $x \in [0, 1]$ számra

  $$3 \cdot 0^2 - 2 = -2 \le 3x^2 - 2 \le 3 \cdot 1^2 - 2 = 1,$$

  ezért

  $$\left\{ 3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| \, x \in [0, 1] \right\} \subset [-2, 1],$$

  azaz

  $$f[\mathcal{H}] \subset [-2, 1].$$

  Tegyük fel, hogy $y \in [-2, 1]$. Ekkor $3x^2 - 2 = y$, ha $x = \pm\sqrt{\frac{y+2}{3}}$. Mivel

  $$\sqrt{\frac{y+2}{3}} \in [0, 1] \qquad \text{és} \qquad f\left(\sqrt{\frac{y+2}{3}}\right) = y,$$

  ezért $y \in f[\mathcal{H}]$, azaz

  $$[-2, 1] \subset f[\mathcal{H}].$$

Megjegyzés. Mivel

$$f[\mathcal{H}] = \left\{3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} = 3 \cdot \left\{x^2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} - 2,$$

és nem nehéz megmutatni, hogy

$$\left\{x^2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} = [0,1],$$

ezért

$$f[\mathcal{H}] = [-2, 1].$$

- Világos, hogy
$$f^{-1}[\mathcal{H}] = \left\{x \in \mathbb{R} | \, 3x^2 - 2 \in [0,1]\right\}.$$
Az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmaz tehát a
$$0 \le 3x^2 - 2 \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} \le x^2 \le 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza, ezért
$$\begin{aligned} f^{-1}[\mathcal{H}] &= \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)\right) \cap [-1,1] = \\ &= \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cap [-1,1]\right) \cup \left(\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \cap [-1,1]\right) = \\ &= \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right]. \end{aligned}$$

- A definíció alapján világos, hogy
$$f[A] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap \mathbb{R} = \emptyset \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[A] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap [-2, +\infty) = \emptyset.$$

Feladat. Invertálhatóak-e az alábbi függvények?

1. $f(x) := |x-1| + |x+2| \quad (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^3 + 6x^2 + 12x \quad (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel
$$f(x) = \begin{cases} 1-x-x-2 = -1-2x & (x \in (-\infty, -2)), \\ 1-x+x+2 = 3 & (x \in [-2, 1)), \\ x-1+x+2 = 2x+1 & (x \in [1, +\infty)), \end{cases}$$
ezért f nem invertálható.

2. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 2^3 - 6 = (x+2)^3 - 8,$$
ezért f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható. Sőt, az is könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$, hiszen bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, hogy
$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^3 - 8 = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+8} - 2.$$
Az f inverze:
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \sqrt[3]{y+8} - 2$$

3. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 5 = (x-1)^3 + 5,$$
ezért f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható. Sőt, az is könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$, hiszen bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, hogy
$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^3 + 5 = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-5} + 1.$$

Az f inverze:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f^{-1}(y):=\sqrt[3]{y-5}+1.$$

Feladat. Invertálható-e az

$$f(x):=\frac{3x+2}{x-1}\qquad (1\neq x\in\mathbb{R})$$

függvény? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

Útm. Mivel minden $1\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$(*)\qquad f(x)=3\cdot\frac{3x+2}{3x-3}=3\cdot\frac{3x-3+5}{3x-3}=3\cdot\left(1+\frac{5}{3x-3}\right)=3+\frac{5}{x-1},$$

ezért

$$f(x)=f(y)\quad\Longleftrightarrow\quad 3+\frac{5}{x-1}=3+\frac{5}{y-1}\quad\Longleftrightarrow\quad x=y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f=\mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $3\notin\mathcal{R}_f$, hiszen bármely $1\neq x\in\mathbb{R}$ esetén $\dfrac{5}{x-1}\neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f\subset\mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f\supset\mathbb{R}\backslash\{3\}$, azaz bármely $y\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$ esetén van olyan $x\in\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$, hogy $f(x)=y$. Valóban, ha $y\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$, akkor

$$f(x)=y\quad\Longleftrightarrow\quad 3+\frac{5}{x-1}=y\quad\Longleftrightarrow\quad x=1+\frac{5}{y-3}=\frac{y+2}{y-3}$$

  és $x\neq 1$ miatt $x\in\mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1}:\mathbb{R}\backslash\{3\}\to\mathbb{R}\backslash\{1\},\qquad f^{-1}(y):=\frac{y+2}{y-3}.$$

Feladatok.

1. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót az

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (c \in (-\infty, 1]), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

   függvények esetében!

2. Írjuk fel az $f \circ g$ kompozíciót a következő függvények esetében!

   (a) $f(x) := 2x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 - 3x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases}$ $g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty); \end{cases}$

   (c) $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$ $(-1/2 \neq x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 + 3x - 10$ $(x \in \mathbb{R})$.

3. Tekintsük az alábbi függvényeket!

$$f(x) := \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \quad (x \in [0,1]), \qquad g(x) := -x^2 - 4x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   (a) Határozzuk meg az $f \circ g$ függvény!

   (b) Invertálható-e az f függvény? Ha igen, akkor határozzuk meg az f^{-1} inverzet!

Útm.

1. Mivel

$$\{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1]$$

   ill.

$$\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1],$$

   ezért

$$f \circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x^2};$$

   ill.

$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x.$$

2. (a) Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R},$$

továbbá

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 2) + 1 = 2x^2 - 6x + 5 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

továbbá

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 0 & (-\infty < g(x) \leq 0), \\ \\ g(x) & (0 < g(x) < +\infty). \end{cases}$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_g$ esetén $-\infty < g(x) \leq 0$, ezért

$$(f \circ g)(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(c) Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x - 10 \in \mathbb{R} \backslash \{-1/2\}\right\} =$$

$$\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{-3 - \sqrt{47}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{47}}{2} \right\},$$

továbbá

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{2(x^2 + 3x - 10) + 1} = \frac{1}{2x^2 + 6x - 19} \qquad (x \in \mathcal{D}_{f \circ g}).$$

3. (a) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$g(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} \in \{-1; -3\},$$

ezért

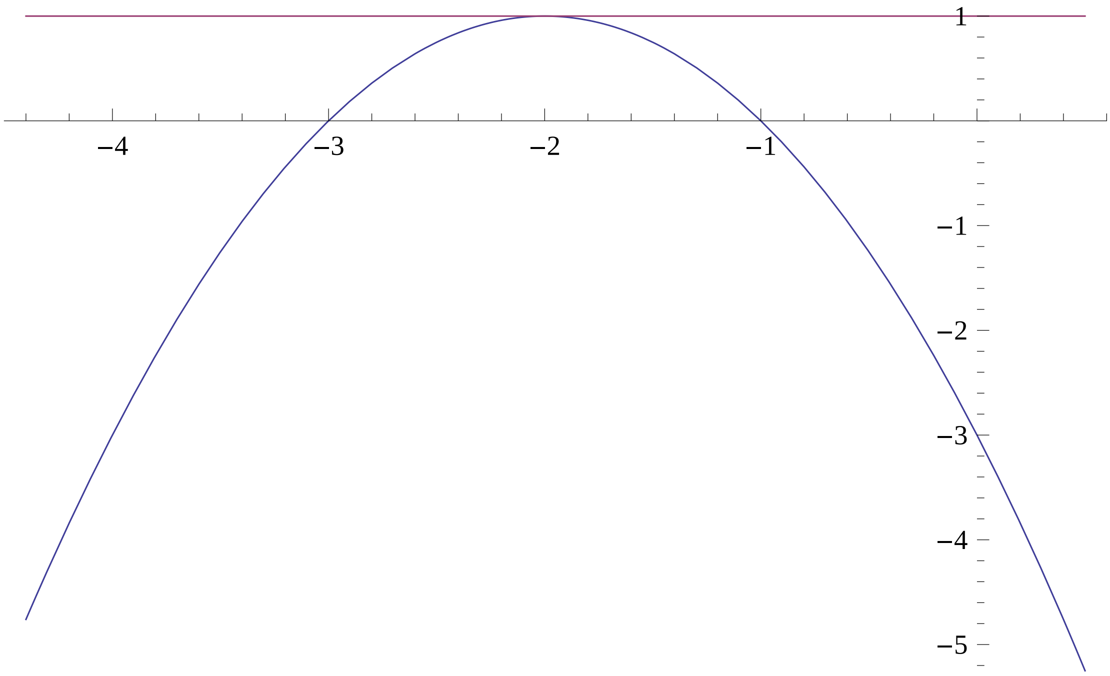
$$g(x) = -(x+1)(x+3) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(vö. 3. ábra). Így

$$\{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ -(x+1)(x+3) \in [0, 1]\} = [-3, -1] \neq \emptyset$$

következtében

$$f \circ g : [-3, -1] \to \mathbb{R},$$



3. ábra. A g függvény grafikonja.

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{\frac{1+x^2+4x+3}{-x^2-4x-3+2}} = \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{-x^2-4x-1}} = \\
&= \sqrt{\frac{(x+2)^2}{3-(x^2+4x+4)}} = \frac{|x+2|}{\sqrt{3-(x+2)^2}}.
\end{aligned}
$$

(b) Mivel

$$
(*) \qquad \frac{1-x}{x+2} = -\frac{x-1}{x+2} = -\frac{x+2-3}{x+2} = -1+\frac{3}{x+2} \qquad (x\in[0,1]),
$$

ezért bármely $x, y \in [0,1]$ esetén

$$
f(x)=f(y) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{-1+\frac{3}{x+2}} = \sqrt{-1+\frac{3}{y+2}} \quad\Longrightarrow\quad \ldots \quad\Longrightarrow\quad x=y.
$$

Mindez azt jelenti, hogy f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$
\mathcal{R}_f = [f(1), f(0)] = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
$$

Biz.:

- $\mathcal{R}_f \subset [f(1), f(0)]$, ui. bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$x+2 \in [2,3] \implies \frac{1}{x+2} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \implies \frac{3}{x+2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \implies -1 + \frac{3}{x+2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\implies f(x) = \sqrt{-1 + \frac{3}{x+2}} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

- $[f(1), f(0)] \subset \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $y \in [f(1), f(0)]$ van olyan $x \in \mathcal{D}_f = [0,1]$, hogy $f(x) = y$, ui.

$$f(x) = y \iff \sqrt{-1 + \frac{3}{x+2}} = y \iff x+2 = \frac{3}{y^2+1} \iff x = \frac{3}{y^2+1} - 2 = \frac{1-2y^2}{y^2+1}$$

és

$$0 \leq \frac{1-2y^2}{y^2+1} = -\frac{2y^2-1}{y^2+1} = -2 \cdot \frac{2y^2-1}{2y^2+2} = -2 \cdot \frac{2y^2+2-3}{2y^2+2} = -2 + \frac{3}{y^2+1} \leq 1$$

miatt $x \in [0,1] = \mathcal{D}_f$.

Tehát f invertálható és inverzére

$$f^{-1} : \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{1-2y^2}{y^2+1}.$$

4. gyakorlat (2025. március 5.)

Szükséges ismeretek.

- Mit ért azon, hogy egy számsorozat konvergens?
- Mit ért azon, hogy egy számsorozat divergens?
- Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy számsorozat divergens!
- Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?
- Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $+\infty$ a határértéke?
- Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $-\infty$ a határértéke?
- Környezetekkel fogalmazza meg azt, hogy az (x_n) valós számsorozatnak (tágabb értelemben) van határértéke!
- Hogyan definiálja egy sorozat részsorozatát?

Órai feladatok

Az alábbiakban a természetes számok halmazán értelmezett függvényekkel: sorozatokkal foglalkozunk.

Definíció. Legyen $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Ekkor az

$$x : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{H}$$

függvényt $\mathcal{H}$**-beli sorozat**nak nevezzük. Ha

$$\mathcal{H} = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{H} = \{f : \ f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

akkor valós vagy komplex számsorozatról, illetve valós-valós függvények sorozatáról beszélünk.

Megjegyzések.

1. Az $x(n)$ helyettesítési értéket az x sorozat n**-edik tag**jának vagy n**-indexű tag**jának nevezzük.
2. Az

$$x(n) =: x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

indexes jelölés bevezetésével az x sorozatra az alábbi jelölések használatosak:

$$x =: (x_n, \ n \in \mathbb{N}_0), \qquad x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad x =: (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \qquad (x_n),$$

ill.

$$x =: (x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

3. Sok esetben tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}_0$ szám esetén az

$$x : \mathbb{N}_k \to \mathcal{H}$$

függvény is sorozatnak tekintendő, ahol

$$\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N}_0 : \ n \geq k\} \qquad\qquad /\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}/.$$

4. A továbbiakban csak valós számsorozatokkal foglalkozunk, azaz feltesszük, hogy $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

5. A függvények közötti összeadás, ill. a függvények számmal való szorzására vonatkozóan a sorozatok vektorteret (lineáris teret) alkotnak, melynek nulleleme a

$$\theta := (0, 0, 0, \ldots)$$

sorozat. A számsorozatok lineáris terét az $\mathcal{S}$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Példák.

1. Legyen $c \in \mathbb{R}$, $x_n := c$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (**konstans sorozat** vagy **állandó sorozat**),

$$x_0 = c, \quad x_1 = c, \quad x_2 = c, \quad x_3 = c, \quad x_4 = c, \quad \ldots$$

2. $x_n := n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (**identikus sorozat**),

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad \ldots$$

3. $x_n := \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ (**harmonikus sorozat**),

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{1}{5}, \quad \ldots$$

A név eredete:

$$x_n = \frac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n+1}}} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}),$$

ui. tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n+1}}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} = x_n.$$

4. $x_n := \alpha + nd$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ahol $\alpha, d \in \mathbb{R}$ (**számtani sorozat**),

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha + d, \quad x_2 = \alpha + 2d, \quad x_3 = \alpha + 3d, \quad x_4 = \alpha + 4d, \quad \ldots$$

A név eredete:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ui. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = \frac{\alpha + (n-1)d + \alpha + (n+1)d}{2} = \frac{2\alpha + 2nd}{2} = \alpha + nd = x_n.$$

5. $x_n := \beta q^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ahol $\beta, q \in \mathbb{R}$ (**mértani sorozat**),

$$x_0 = \beta, \quad x_1 = \beta q, \quad x_2 = \beta q^2, \quad x_3 = \beta q^3, \quad x_4 = \beta q^4, \quad \ldots$$

A név eredete: ha $\beta, q > 0$, akkor

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ui. tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}} = \sqrt{\beta \cdot q^{n-1} \cdot \beta \cdot q^{n+1}} = \sqrt{\beta^2 \cdot q^{2n}} = \beta \cdot q^n = x_n.$$

6. $x_n := (-1)^n \dfrac{4n^2 + 2n + 1}{3n^3 + 6}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$,

$$x_0 = \frac{1}{6}, \quad x_1 = -\frac{7}{9}, \quad x_2 = \frac{21}{30}, \quad x_3 = -\frac{43}{87}, \quad x_4 = \frac{73}{198}, \quad x_5 = -\frac{211}{381}, \quad \ldots$$

7. $x_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \quad x_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \quad \ldots$$

8. $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$ (**harmonikus sor**),

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

9. $x_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$ (**alternáló harmonikus sor**),

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad x_4 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

10. $x_n := \sum_{k=0}^{n} q^k$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (**mértani sor**), ahol $q \in \mathbb{R}$,

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + q, \quad x_2 = 1 + q + q^2, \quad x_3 = 1 + q + q^2 + q^3, \quad \ldots$$

11. $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{4}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}, \quad \ldots$$

12. $x_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + 1, \quad x_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad x_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}, \quad \ldots$$

13. $x_0 := c$,

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

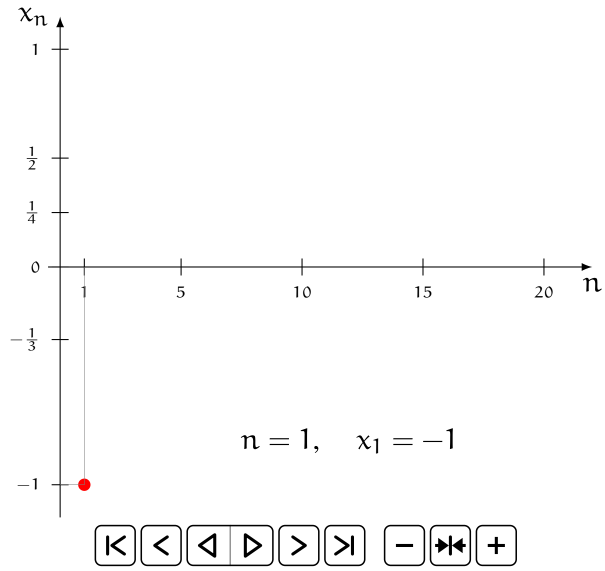
ahol $0 < c \in \mathbb{R}$. Ha $c = 2$, akkor

$$x_1 = 1.5, \qquad x_2 \approx 1.416 \qquad \text{és} \qquad (x_2)^2 \approx 2.$$

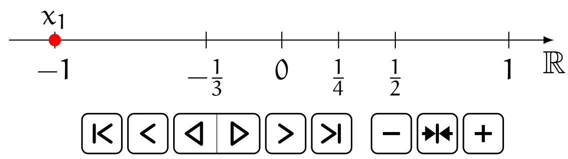
A valós számsorozatokat kétféle módon is szemléltethetjük. Mivel ezek speciális valós-valós függvények, ezért a különálló pontokból álló grafikonjukat ábrázolhatjuk a koordináta-rendszerben. Másrészt a sorozat tagjait – értékei szerint – elhelyezhetjük a számegyenesen. Mindkét szemléltetési módot megmutatjuk az

$$x_n := \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében:



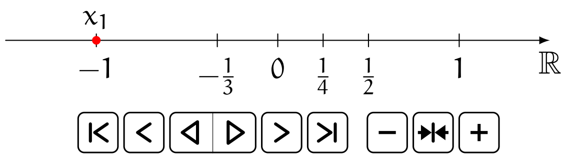
Koordináta-rendszerben

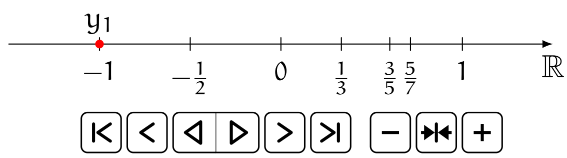


Számegyenesen

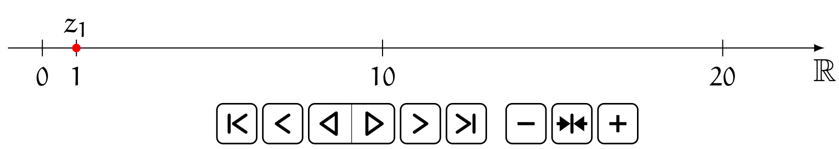
A matematikai analízis egyik legfontosabb fogalma a határérték. A következőkben a határérték legegyszerűbb típusával, a sorozatok határértékével foglalkozunk. Elsőként ábrázoljuk a számegyenesen a következő sorozatokat:

$$x_n := \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad\qquad y_n := (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$





$$z_n := n \quad (n \in \mathbb{N})$$



A fenti három animációból jól látható, hogy

- az (x_n) sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik: tagjai a 0 körül „sűrűsödnek”, azaz a 0 szám bármely K_ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak véges számú (legfeljebb $[1/\varepsilon]$[1]) tagja van.

- az (y_n) sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik: a tagok egy része -1 körül, a másik része pedig 1 körül „sűrűsödik”, továbbá bármely számnak van olyan környezete, amelyen kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van.
- a (z_n) sorozat esetében egyetlen valós szám sincsen, amely körül „sűrűsüdne”. Itt is elmondható, hogy bármely számnak van olyan környezete, amelyen kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van. Viszont igaz, hogy a $+\infty$ bármely K_ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak véges számú (legfeljebb $[1/\varepsilon]$) tagja van.

Definíció. Legyen $x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ekkor

- az (x_n) sorozat **konvergens** (jelben $(x_n) \in \mathfrak{c}$), ha

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - A| < \varepsilon);$$

  Ekkor az A számot az (x_n) sorozat **határértéké**nek vagy **limeszé**nek nevezzük és az

$$A =: \lim(x) =: \lim(x_n) := \lim_{n\to\infty}(x_n) \qquad \text{vagy az} \qquad x_n \longrightarrow A \quad (n \to \infty)$$

  jelölést használjuk.

- az (x_n) sorozat **divergens**, ha nem konvergens, azaz

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \wedge \quad |x_n - A| \geq \varepsilon);$$

- az (x_n) sorozat **határértéke** $+\infty$ ($\lim(x_n) = +\infty$), ha

$$\forall \omega \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega);$$

- az (x_n) sorozat **határértéke** $-\infty$ ($\lim(x_n) = -\infty$), ha

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n < \alpha);$$

- az (x_n) sorozatnak **van határértéke** ($\lim(x_n) \in \overline{\mathbb{R}}$), ha

$$(x_n) \quad \text{konvergens} \qquad \text{VAGY} \qquad \lim(x_n) \in \{-\infty, +\infty\}.$$

[1]Valamely $x \in \mathbb{R}$ szám **egészrészé**nek nevezzük az $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \leq x\}$ számot.

Példák.

1. Legyen $c \in \mathbb{R}$. Az
$$x_n := c \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
sorozat konvergens és $\lim(x_n) = c$, hiszen ha $\varepsilon > 0$, akkor
$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$
következtében minden $N \in \mathbb{N}_0$ esetén
$$|x_n - c| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

2. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az
$$x_n := \frac{1}{n^k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 0$, hiszen ha $\varepsilon > 0$, akkor
$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} < n$$
következtében az
$$N := \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right] + 1$$
választás[2] megfelelő: bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $|x_n - 0| < \varepsilon$.

3. Ha ha $q \in (-1, 1]$, akkor az
$$x_n := q^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat konvergens, és fennáll a
$$\lim(x_n) = \begin{cases} 0 & (q \in (-1,1) \quad \Longleftrightarrow \quad |q| < 1), \\ \\ 1 & (q = 1) \end{cases}$$
határérték-reláció, hiszen
   - ha $q = 1$, akkor $x_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$;
   - ha $q = 0$, akkor $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$;

[2]Valamely $x \in \mathbb{R}$ szám **egészrész**ének nevezzük az $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \leq x\}$ számot.

- ha $q \neq 0$, $|q| < 1$, akkor $\dfrac{1}{|q|} > 1$, következésképpen alkalmas van olyan $0 < p \in \mathbb{R}$ számmal

$$\frac{1}{|q|} = 1 + p,$$

ahonnan a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n \geq 1 + np > np, \qquad \text{azaz} \qquad |q|^n < \frac{1}{np}$$

adódik. Így, ha $\varepsilon > 0$, akkor

$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon p}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon p}$$

mellett az $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq N$ egyenlőtlenségből

$$|x_n - 0| = |q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{np} < \varepsilon$$

következik.

Megjegyzések.

1. Mivel

$$|x_n - A| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - A < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

ezért a konvergencia fogalma pl. az alábiakkal egyenértékű:

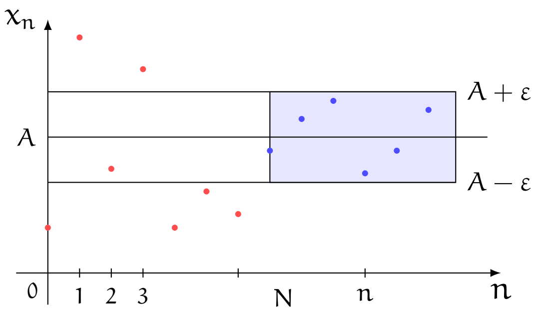
- $\exists\, A \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N}_0$:

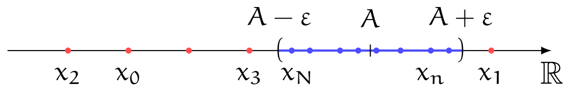
$$N = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \; x_n \notin K_\varepsilon(A)\}.$$

- $\exists\, A \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon > 0 : \quad \{n \in \mathbb{N}_0 : \; x_n \notin K_\varepsilon(A)\}$ (legfeljebb) véges halmaz (minden $\varepsilon > 0$ esetén a sorozatnak csak véges sok tagja esik a $K_\varepsilon(A)$ környezeten kívülre).
- $\exists\, A \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N}_0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$(n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n \in K_\varepsilon(A)).$$

A határérték fogalmát szemléltetik az alábbi ábrák:





A N indexet szokás **küszöbindex**nek is nevezni.

2. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor nyilván tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$y_n := x_{n+k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ún. **elcsúsztatott sorozat** is konvergens, és $\lim(y_n) = \lim(x_n)$.

3. Mit jelent az, hogy (x_n) divergens? Pl.:

   - $\forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N}$:

   $$(n \geq N \quad \wedge \quad x_n \notin K_\varepsilon(A)),$$

   azaz minden $A \in \mathbb{R}$számnak van olyan $K_\varepsilon(A)$ környezete, hogy a sorozat tetszőlegesen nagy N indexű tagjánál van olyan nagyobb n indexű tag, amelyik nincsen benne a $K_\varepsilon(A)$ környezetben.
   - $\forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0: \quad \{n \in \mathbb{N}: \; x_n \notin K_\varepsilon(A)\}$ végtelen halmaz.

   Példa. Az

   $$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   sorozat divergens, hiszen, ha $A \in \mathbb{R}$, akkor az

   $$\varepsilon := \max\{|A+1|, |A-1|\}$$

   pozitív valós számmal $K_\varepsilon(A)$-n kívülre végtelen sok tagja esik a sorozatnak, ui. tetszőleges $N \in \mathbb{N}_0$ esetén

   - $\varepsilon = |A-1|, n := 2N \quad \Longrightarrow \quad n \geq N$ és $|(-1)^n - A| = |1-A| = |A-1| \geq \varepsilon$;
   - $\varepsilon = |A+1|, n := 2N+1 \quad \Longrightarrow \quad n \geq N$ és $|(-1)^n - A| = |-1-A| = |A+1| \geq \varepsilon$.

4. A fentiek következtében elmondható, hogy ha egy sorozat véges sok tagját megváltoztatjuk, akkor a konvergencia minősége nem változik: a konvergens sorozat konvergens, a divergens sorozat pedig divergens marad.

5. A mértani sor konvergenciája. Ha $q \in (-1, 1)$, akkor az

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{1}{1-q},$$

hiszen

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(vö. (6)), ennélfogva

$$x_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad (n \to \infty).$$

Feladat. Sejtsük meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján igazoljuk sejtésünket!

1. $x_n := \dfrac{3n+4}{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \dfrac{n}{2n-3} \qquad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \dfrac{1}{n^2-3} \qquad (n \in \mathbb{N});$
4. $x_n := \sqrt{n^2+1} - n \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$
5. $x_n := \dfrac{1+n^2}{2+n+2n^2} \qquad (n \in \mathbb{N});$
6. $x_n := \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$
7. $x_n := \dfrac{3n^2-1}{2n^2+n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$

Útm.

1. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3n+4}{2n-1} = \frac{3+\frac{4}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n}$ igen kicsi”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{3n+4}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4n-2} < \frac{11}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{11}{\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a

$$N := \left[\frac{11}{\varepsilon}\right] + 1$$

választás megfelelő.

2. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2-\frac{3}{n}}$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n}$ igen kicsi”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Valóban, ha $6 < n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$\left|\frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4n-6} < \frac{3}{3n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

hiszen

$$4n-6 > 3n \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 6.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \max\left\{7, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$$

választás megfelelő.

3. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén x_n „igen nagy n esetén igen kicsi”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = 0.$$

Valóban, ha $3 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{1}{n^2-3}-0\right| = \frac{1}{n^2-3} < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

hiszen ekkor

$$\frac{1}{n^2-3} < \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n < n^2-3$$

és

$$n^2-3-n = n^2-n-3 = n(n-1)-3 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 3.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \max\left\{3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$$

választás megfelelő.

4. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\sqrt{n^2+1}-n = \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

és az utóbbi tört számlálója korlátos, nevezője edig nem, ezért azt sejtjük, hogy $\lim(x_n) = 0$. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-0\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

5. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1+n^2}{2+n+2n^2} = \frac{\frac{1+n^2}{n^2}}{\frac{2+n+2n^2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}+2},$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n^k}$ igen kicsi, ahol $k \in \{1;2\}$”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{1+0}{0+0+2} = \frac{1}{2}.$$

Valóban,

$$\left|\frac{1+n^2}{2+n+2n^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|-n|}{2(2n^2+n+2)}<\frac{n}{4n^2}=\frac{1}{4n}<\varepsilon\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{4\varepsilon}<n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén

$$N:=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]+1.$$

6. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}=\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}=\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

és az utóbbi tört számlálója korlátos, nevezője edig nem, ezért azt sejtjük, hogy $\lim(x_n)=0$. Valóban, ha $n\in\mathbb{N}$, akkor

$$\left|\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}-0\right|=\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\qquad\Longleftrightarrow\qquad n>\frac{1}{\varepsilon^2},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén az

$$N:=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$$

választás megfelelő.

7. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3n^2-1}{2n^2+n+3}=\frac{\frac{3n^2-1}{n^2}}{\frac{2n^2+n+3}{n^2}}=\frac{3-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}},$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n^k}$ igen kicsi, ahol $k\in\{1;2\}$”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n)=\frac{3-0}{2+0+0}=\frac{3}{2}.$$

Valóban,

$$\left|\frac{3n^2-1}{2n^2+n+3}-\frac{3}{2}\right|=\frac{|-3n-11|}{4n^2+2n+6}<\frac{3n+11}{4n^2}<\frac{14n}{4n^2}=\frac{7}{2n}<\varepsilon\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{7}{2\varepsilon}<n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén az

$$N:=\left[\frac{7}{2\varepsilon}\right]+1$$

választás megfelelő.

Feladat. A határérték definíciója alapján lássuk be, hogy igaz a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}\right)=2$$

állítás!

Útm. Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}-2\right|=\left|\frac{2n^2+14n+19}{n^2+6n+10}-\frac{2(n^2+6n+10)}{n^2+6n+10}\right|=\frac{2n-1}{1+(n+3)^2}\le\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n},$$

és

$$\frac{2}{n}<\varepsilon \qquad\Longleftrightarrow\qquad \frac{2}{\varepsilon}<n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén, ha

$$N:=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1,$$

akkor elmondható, hogy bármely $N\le n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\left|\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}-2\right|<\varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}\right)=2.$$

Feladat. Konvergens-e az $(x_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat, ha

1. $\exists A\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}:\quad |x_n-A|<\varepsilon;$
2. $\exists A\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\quad |x_N-A|<\varepsilon;$
3. $\exists A\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall N\le n\in\mathbb{N}\ \forall\varepsilon>0:\quad |x_n-A|<\varepsilon.$

Útm.

1. Nem, ui. az

   $$x_n:=(-1)^n\quad(n\in\mathbb{N}),\qquad A:=0,\qquad \varepsilon:=2$$

   választással tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén $|x_n-A|<\varepsilon$, de (x_n) divergens. Az állításból csak annyi következik, hogy (x_n) korlátos, ui. a feltétel szerint

   $$\exists A\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0:\qquad A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon\quad(n\in\mathbb{N}).$$

2. Nem, hiszen a megadott feltételeknek minden sorozat eleget tesz, ui. válaszzuk meg az A valós számot úgy, hogy
$$A \in \{x_n \in \mathbb{N} : \; n \in \mathbb{N}\}$$
teljesüljön. Ekkor ui. alkalmas $N \in \mathbb{N}$ insdexre $x_N - A = 0$.

3. Igen, ui. ez a felétel azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat **kvázikonstans**: egy bizonyos indextől kezdve tagjai egyenlők.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az (x_n) sorozat konvergens és $A := \lim(x_n) \in \mathbb{R}$, akkor $(|x_n|)$ is konvergens és fennáll a
$$\lim(|x_n|) = |A|$$
határérték-reláció!

Útm. Mivel
$$\lim(x_n) = A,$$
ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n - A| < \varepsilon$, ahonnan
$$0 \leq \big||x_n| - |A|\big| \leq |x_n - A| < \varepsilon,$$
következik. Mindez azt jelenti, hogy
$$\lim(|x_n| - |A|) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim(|x_n|) = |A|.$$

Megjegyezzük, hogy

1. a fenti feladatbeli állítás megfordítása nem igaz:
$$(1) \in \mathfrak{c}, \qquad \text{de} \qquad ((-1)^n) \notin \mathfrak{c}.$$

2. ha $\mathfrak{c}_0$ jelöli a nullsorozatok halmazát, akkor igaz az
$$(x_n) \in \mathfrak{c}_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (|x_n|) \in \mathfrak{c}_0$$
ekvivalelcia, hiszen
$$||x_n| - 0| = |x_n - 0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Feladat. Legyen

$$x_n \in [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor igazak az alábbi állítások.

1. $\lim(x_n) =: A \in [0, +\infty)$;
2. $(\sqrt{x_n})$ konvergens és $\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{A}$.

Útm.

1. A határérték és a rendezés kapcsolatáról szóló tétel (vö. EA) következtében

$$\lim(x_n) =: A \in [0, +\infty).$$

2. Ha

   - $A = 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

   $$|x_n - 0| < \varepsilon^2,$$

   azaz a sorozat nemnegativitása következtében

   $$x_n < \varepsilon^2, \qquad \text{ill.} \qquad \sqrt{x_n} < \varepsilon,$$

   ahonnan

   $$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} < \varepsilon$$

   következik. Mindez azt jelenti, hogy $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$.

   - $A > 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

   $$|x_n - A| < \varepsilon\sqrt{A},$$

   ahonnan

   $$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{A}\right| = \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{A}\right| \cdot \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{A}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{A}} = \frac{|x_n - A|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{A}} \leq \frac{|x_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon$$

   következik, ami azt jelenti, hogy

   $$\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{A}.$$

Megjegyezzük, hogy ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$, akkor hasonló mondható el a $(\sqrt[k]{x_n})$ sorozat határértékéről; a bizonyítás második fele egy kicsit összetettebb számolás:

$$\left|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{A}\right| = \left|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{A}\right| \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} \sqrt[k]{x_n^{k-i} \cdot A^{i-1}}}{\sum_{i=1}^{k} \sqrt[k]{x_n^{k-i} \cdot A^{i-1}}} = \frac{|x_n - A|}{\sum_{i=1}^{k} \sqrt[k]{x_n^{k-i} \cdot A^{i-1}}} \leq \frac{|x_n - A|}{\sqrt[k]{A^{k-1}}},$$

ui. (vö. (4))

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}b + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}).$$

Feladat. A definíció a alapján lássa be, hogy igazak az alábbi határéreték-relációk!

2. $\lim_{n\to\infty} (n^2+3) = +\infty$ 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+3} = +\infty$ 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{n+1} = -\infty$.

Útm.

1. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := n^2 + 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall \omega \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0: \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega)$$

teljesül. Valóban, ha $3 \leq \omega \in \mathbb{R}$, akkor

$$n^2 + 3 = x_n > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 > \omega - 3.$$

Így az

$$N := [\sqrt{\omega - 3}] + 1$$

választás megfelelő.

2. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{n^2+3n+1}{n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall\omega\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}_0\ \forall n\in\mathbb{N}_0: \qquad (n\geq N \quad\Longrightarrow\quad x_n>\omega)$$

teljesül. Valóban, ha $0<\omega\in\mathbb{R}$, akkor bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3}>\frac{n^2}{n+3}\overset{n\geq 1}{\geq}\frac{n^2}{n+3n}=\frac{n}{4}>\omega \qquad\Longleftrightarrow\qquad n>4\omega,$$

így

$$N:=\max\{1,[4\omega]+1\}=4[\omega]+1.$$

3. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n:=\frac{2-3n^2}{n+1}\qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}_0\ \forall n\in\mathbb{N}_0: \qquad (n\geq N \quad\Longrightarrow\quad x_n<\alpha)$$

teljesül. Valóban, ha $0>\alpha\in\mathbb{R}$, akkor bármely $n\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{2-3n^2}{n+1}<\alpha \qquad\Longleftrightarrow\qquad \frac{3n^2-2}{n+1}>-\alpha,$$

így tetszőleges $2\leq n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n^2-2}{n+1}=\frac{2n^2+(n^2-2)}{n+1}\geq\frac{2n^2}{n+n}=\frac{2n^2}{2n}=n$$

következtében

$$N:=\max\{2,[-\alpha]+1\}.$$

Feladat. Lássuk be, hogy ha bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén $x_n\in(0,+\infty)$, akkor igaz a

$$\lim(x_n)=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right)=+\infty$$

implikáció!

Útm. Mivel

$$\lim(x_n)=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}_0\ \forall N\leq n\in\mathbb{N}_0: \quad x_n=|x_n|=|x_n-0|<\varepsilon$$

és

$$x_n < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} =: \omega,$$

ezért elmondható, hogy tetszőleges $0 < \omega \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indxre

$$\frac{1}{x_n} > \omega, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty.$$

Feladat. Igaz-e, hogy az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\lim(x_n) = +\infty$, ha

$$\exists\, \omega \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega) \tag{22}$$

teljesül?

Útm. Nem, ui. pl. az

$$x_n := 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat teljesíti az (22) feltételt, de határértéke nem $+\infty$.

Házi feladatok

Feladat.

1. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy fennáll a

$$\lim\left(2-n^3\right)=-\infty$$

határérték-reláció!

2. Sejtsük meg az

$$x_n := \frac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be sejtését!

3. Lássuk be, hogy ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in (-\infty, 0)$, akkor igaz a

$$\lim(x_n)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right)=-\infty$$

implikáció!

Útm.

1. Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := 2-n^3 \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}_0\ \forall n\in\mathbb{N}_0: \qquad (n\geq N \quad\Longrightarrow\quad x_n<\alpha)$$

teljesül. Valóban, ha $3 \leq \alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$2-n^3<\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2-\alpha<n^3.$$

Így az

$$N := \max\left\{0, [\sqrt[3]{2-\alpha}]+1\right\}$$

választás megfelelő.

,,

2. Sejthető", hogy $\lim(x_n) = +\infty$. Valóban, ha $0 < \omega \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} > \frac{n^4}{n^2+1} \geq \frac{n^4}{n^2+n^2} = \frac{n^4}{2n^2} = \frac{n^2}{2} > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \sqrt{2\omega},$$

így

$$N := \max\left\{1, [\sqrt{2\omega}]+1\right\} = [\sqrt{2\omega}]+1.$$

Megjegyezzük, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\frac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} = \frac{(n^2+1)^2}{n^2+1} = n^2+1 > n^2 > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \sqrt{\omega}.$$

3. Mivel

$$\lim(x_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}_0 \; \forall N \leq n \in \mathbb{N}_0 : \quad -x_n = |x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon$$

és

$$-x_n < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x_n} < -\frac{1}{\varepsilon} =: \alpha,$$

ezért elmondható, hogy tetszőleges $0 > \alpha \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indxre

$$\frac{1}{x_n} < \alpha, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\infty.$$

5. gyakorlat (2025. március 12.)

Szükséges ismeretek.

- Mit tud mondani nullsorozatok összegéről?
- Mit tud mondani korlátos sorozat és nullsorozat szorzatáról?
- Mondjon példát olyan $(x_n), (y_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra, amelyekre $\lim(x_n) = 0 = \lim(y_n)$ és a $\lim(x_n/y_n)$ határérték nem létezik!
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok összegéről?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben vett) határértékkel bíró sorozatok összegéről?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben vett) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben vett) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?
- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?

Órai feladatok

Emlékeztető. Az alábbi nevezetes határéertékeket ismertnek tételezzük fel.

1. Ha $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített, akkor

$$\text{(a) } \lim\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0, \qquad \text{(b) } \lim\left(n^k\right) = +\infty, \qquad \text{(c) } \lim\left(\sqrt[k]{n}\right) = +\infty.$$

2. Ha $m \in \mathbb{N}$ és az $x_n \in [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(x_n) =: A$, akkor

$$\lim\left(\sqrt[m]{x_n}\right) = \sqrt[m]{A}.$$

3. Ha $q \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim(q^n) \begin{cases} = 0 & (|q| < 1), \\ = 1 & (q = 1), \\ = +\infty & (q > 1), \\ \nexists & (q \leq -1). \end{cases}$$

4. Ha $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, illetve $x_n \in [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in (0, +\infty)$, akkor

$$\text{(a) } \lim\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 1, \qquad \text{(b) } \lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1, \qquad \text{(c) } \lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1.$$

5. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\lim\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = e^x.$$

6. További nevezetes nullsorozatok:

   (a) $x_n := n^k \cdot q^n \quad (n \in \mathbb{N},\ q \in (-1, 1),\ k \in \mathbb{N})$;

   (b) $x_n := \dfrac{a^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$;

   (c) $x_n := \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Emlékeztető. A határértékszámítás során felhasználható eredmények.

1. **A műveletek és a határéerték kapcsolata.** Tegyük fel, hogy az

$$x := (x_n), y := (y_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sorozatoknak van határértéke. Ha

$$* \in \{+, -, \cdot, /\} \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) * \lim(y_n) \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor az $x * y$ sorozatnak is van határértéke és

$$\lim(x * y) = \lim(x_n) * \lim(y_n).$$

2. **Sandwich-tétel.** Tegyük fel, hogy az $u, v, w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra teljesülnek a következők:

(i) van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre $u_n \leq v_n \leq w_n$;

(ii) $\exists \lim(u_n) = \lim(w_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor a közrefogott (v_n) sorozatnak is van határértéke: $\lim(v_n) = A$.

3. **A határéreték és a rendezés közötti kapcsolat.** Tegyük fel, hogy az $(u_n), (v_n)$ sorozatoknak van határértékük és

$$\lim(u_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(v_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(1) Ha $A > B$, akkor $\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall N \leq n \in \mathbb{N}$-re $u_n > v_n$.

(2) Ha $\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall N \leq n \in \mathbb{N}$-re $u_n \geq v_n$, akkor $A \geq B$.

4. **Monoton sorozatok határértéke (mozgólépcső-elv).** Minden monoton sorozatnak van határértéke. Ha

- $(x_n) \nearrow$, akkor $\lim(x_n) = \sup(x_n)$;
- $(x_n) \searrow$, akkor $\lim(x_n) = \inf(x_n)$.

Megjegyezzük, hogy a határértékekre vonatkozó tételek és műveleti szabályok nagy része a tágabb értelemben vett határértékekre is érvényes. Ezek egyszerű megfogalmazásához kiterjesztjük az algebrai műveleteket az $\overline{\mathbb{R}}$ számhalmazra az alábbiak szerint:

$$a + (-\infty) := (-\infty) + a := -\infty \quad (a \in [-\infty, +\infty)),$$

$$a + (+\infty) := (+\infty) + a := +\infty \quad (a \in (-\infty, +\infty]),$$

$$a \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot a := +\infty \quad (a \in (0, +\infty]),$$

$$a \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot a := -\infty \quad (a \in [-\infty, 0)),$$

$$a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := -\infty \quad (a \in (0, +\infty]),$$

$$a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := +\infty \quad (a \in [-\infty, 0)),$$

$$\frac{a}{+\infty} := \frac{a}{-\infty} := 0 \quad (a \in (-\infty, +\infty)),$$

$$\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} \quad ((a, b) \in (-\infty, +\infty) \times \{-\infty, +\infty\} \cup [-\infty, +\infty] \times (\mathbb{R} \backslash \{0\}))\,.$$

Nem értelmezzük

- a $+\infty$ és a $-\infty$, ill. a $-\infty$ és a $+\infty$ elemek összegét,
- a 0-nak a $+\infty$-nel és a $-\infty$-nel való szorzatát,
- az a/b hányadost, ha $b = 0$, vagy, ha $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$.

<table>
<tr><th>összeg</th><th>$a > 0$</th><th>$a = 0$</th><th>$a < 0$</th><th>$a = +\infty$</th><th>$a = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$b > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$a + b$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = +\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>$b = -\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>szorzat</th><th>$a>0$</th><th>$a=0$</th><th>$a<0$</th><th>$a=+\infty$</th><th>$a=-\infty$</th></tr>
<tr><td>$b>0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$a\cdot b$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b=0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b<0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$b=+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td rowspan="2"></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b=-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>hányados</th><th>$a>0$</th><th>$a=0$</th><th>$a<0$</th><th>$a=+\infty$</th><th>$a=-\infty$</th></tr>
<tr><td>$b>0$</td><td colspan="3">a/b</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b=0$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b<0$</td><td colspan="3">a/b</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$b=+\infty$</td><td colspan="3">0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b=-\infty$</td><td colspan="3">0</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Feladat. Igazoljuk hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, továbbá

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_d x^d = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor igaz az alábbi állítás!

$$\lim(p(n)) = \begin{cases} +\infty & (a_d > 0), \\ -\infty & (a_d < 0). \end{cases}$$

Útm. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} p(n) &= a_0 + a_1 n + \ldots + a_{d-1} n^{d-1} + a_d n^d = n^d \cdot \left(\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + \frac{a_{d-1}}{n} + a_d \right) \longrightarrow \\ &\overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} (+\infty)^d \cdot (0 + 0 + \ldots + 0 + a_d) = \\ &= (+\infty) \cdot \operatorname{sgn}(a_d) = \begin{cases} +\infty & (a_d > 0), \\ -\infty & (a_d < 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az (x_n) sorozat határértékét!

1. $x_n := \dfrac{n^3 - 3n^2 + n - 1}{1 - 2n^3 + n} \quad (n \in \mathbb{N})$;
2. $x_n := \dfrac{(2-n)^7 + (2+n)^7}{(n^2 + n + 1)(2n+1)^5} \quad (n \in \mathbb{N})$;
3. $x_n := \dfrac{2n^2 - n + 2}{1 - n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$;
4. $x_n := \dfrac{n^2 + 1}{2n + 1} - \dfrac{3n^2}{6n - 1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Útm. Ha a sorozat n-edik tagja két, n pokinomjának hányadosaként írható fel, akkor a törtet érdemes úgy átalakítani, hogy a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabbb kitevjű hatványait.

1. Világos, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{1}{n^3} - 2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 2 + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1 - 0 + 0 - 0}{0 - 2 + 0} = -\frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

2. Bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre az $n \to \infty$ határátmenetben

$$x_n = \frac{n^7}{n^7} \cdot \frac{\frac{(2-n)^7 + (2+n)^7}{n^7}}{\frac{(n^2+n+1)(2n+1)^5}{n^7}} = \frac{\left(\frac{2}{n} - 1\right)^7 + \left(\frac{2}{n} + 1\right)^7}{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^5} \longrightarrow \frac{(0-1)^7 + (0+1)^7}{(1 + 0 + 0) \cdot (2 + 0)^5} = 0.$$

3. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre az $n \to \infty$ határátmenetben
$$x_n = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{0 - 1} = -2.$$

4. Közös nevezőre hozva, majd az imént alkalmazott technikát alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre az $n \to \infty$ határátmenetben
$$x_n = \frac{(n^2+1)(6n-1) - 3n^2(2n+1)}{(2n+1)(6n-1)} = \frac{-4n^2 + 6n - 1}{12n^2 + 4n - 1} =$$
$$= \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{-4 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{12 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{-4 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{12 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Feladat. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$1.\ \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \right); \qquad 2.\ \lim \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right),\ \text{ahol } P, Q \text{ polinom.}$$

Útm.

1. $$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + 1/n}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

2. Legyen
$$P(x) := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i, \quad Q(x) := \sum_{j=0}^{l} \beta_j x^j \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ahol
$$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad (i \in \{0, 1, \ldots, k\};\ j \in \{0, 1, \ldots, l\}): \qquad \alpha_k \cdot \beta_l \neq 0.$$
Legyen
$$x_n := \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} = \frac{n^k}{n^l} \cdot \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
$$y_n := n^{k-l} \quad \text{és} \quad z_n := \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim{(z_n)} = \frac{\alpha_k}{\beta_l} \qquad \text{és} \qquad \lim{(y_n)} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ +\infty & (k > l) \\ 0 & (k < l). \end{cases}$$

Így

$$\lim{(x_n)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_k}{\beta_l} & (k = l), \\ 0 & (k < l), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{\alpha_k}{\beta_l}\right)\infty & (k > l). \end{cases}$$

Feladat. Számítsuk ki az (x_n) sorozat határértékét!

1. $x_n := \dfrac{n^4 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n - 4} \quad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \dfrac{n^4 - 2n^3 + n + 1}{n^3 - 4n + 3} \quad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \dfrac{n^7 + n - 12}{1 - n^2 + 3n} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Útm. A fentiek következtében

1. $\lim(x_n) = 0;$ 2. $\lim(x_n) = +\infty;$ 3. $\lim(x_n) = -\infty.$

Emlékeztető. Tudjuk, hogy tetszőleges $0 < a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot 1 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

ill.

$$\sqrt{a} - b = (\sqrt{a} - b) \cdot 1 = (\sqrt{a} - b) \cdot \frac{\sqrt{a} + b}{\sqrt{a} + b} = \frac{a - b^2}{\sqrt{a} + b},$$

továbbá

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \cdot 1 = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}.$$

Feladat. Számítsuk ki az lábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := n^2 \cdot \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_n := \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - n + 1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$
3. $x_n := \sqrt{\alpha \cdot n^2 + 2n + 1} - 2n \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in [0, +\infty));$
4. $x_n := \sqrt{n^2 + n + 1} - \alpha n \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathbb{R});$
5. $x_n := \sqrt[3]{n + 2} - \sqrt[3]{n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$

Útm.

1. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = n^2 \cdot \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right) \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = n^2 \cdot \frac{n^2 - (n^2 + 1)}{n + \sqrt{n^2 + 1}} =$$

$$= \frac{-n^2}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{-n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-\infty}{1 + \sqrt{1 + 0}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty \quad (n \to \infty).$$

2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = \left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+3)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \frac{\frac{3n+2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}}{n}} = \frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{3}{2} \quad (n \to \infty).$$

3. Látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \left(\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1} - 2n\right) \cdot \frac{\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1}+2n}{\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1}+2n} =$$

$$= \frac{(\alpha-4)n^2+2n+1}{\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1}+2n} = \frac{\frac{(\alpha-4)n^2+2n+1}{n}}{\frac{\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1}+2n}{n}} = \frac{(\alpha-4)n+2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\alpha+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Világos, hogy

$$\alpha - 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 4.$$

Következésképpen

- $0 \leq \alpha < 4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1} - 2n\right) = \frac{(-\infty)+2+0}{\sqrt{\alpha+0+0}+2} = -\infty;$$

- $\alpha = 4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1} - 2n\right) = \frac{2+0}{\sqrt{4+0+0}+2} = \frac{1}{2};$$

- $\alpha > 4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)=\frac{(+\infty)+2+0}{\sqrt{\alpha+0+0}+2}=+\infty.$$

4. Világos, hogy

- $\alpha < 0$ esetén

$$\lim(x_n)=(+\infty)-\alpha\cdot(+\infty)=(+\infty)-(-\infty)=+\infty.$$

- $\alpha = 0$ esetén

$$\lim(x_n)=\lim(\sqrt{n^2+n+1})=+\infty.$$

Ha viszont $\alpha > 0$, akkor

$$x_n = \left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}=\frac{n^2+n+1-\alpha^2n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}=$$

$$=\frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}=\frac{\frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}{n}}=\frac{(1-\alpha^2)n+1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\alpha}.$$

Világos, hogy ekkor

$$1-\alpha^2=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha=1.$$

Következésképpen

- $0 < \alpha < 1$ esetén

$$\lim(x_n)=\frac{(+\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}+\alpha}=+\infty;$$

- $\alpha = 1$ esetén bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\lim(x_n)=\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

- $\alpha > 1$ esetén

$$\lim(x_n)=\frac{(-\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}+\alpha}=-\infty.$$

5. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$0 \quad < \quad x_n = \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)n} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)n} + \sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \quad \frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)n} + \sqrt[3]{n^2}} < \frac{2}{\sqrt[3]{n^2}} < \frac{2}{\sqrt[3]{n}}.$$

Így a Sandwich-tétel értelmében $\lim(x_n) = 0$.

Feladat. Igazoljuk, hogy fennáll a

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

hatrérték-reláció!

Útm. A Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával

$$1 - \frac{1}{n} = 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

adódik, így a Sandwich-tétel következtében az igazolandó állítást kapjuk.

Feladat. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in (0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a

$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$$

határérték-reláció!

Útm. Legyen

$$\lim(x_n) =: \alpha \in (0, +\infty).$$

Ekkor

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq n \in \mathbb{N}: \quad |x_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}.$$

Így

$$|x_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\alpha}{2} < x_n - \alpha < \frac{\alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\alpha}{2} < x_n < \frac{3\alpha}{2}$$

következtében, ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}},$$

tehát a Sandwich-tétel értelmében

$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1.$$

Feladat. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \quad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n+3}} \quad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n!} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$
4. $x_n := \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (n \in \mathbb{N});$
5. $x_n := \sqrt[n]{1 + 3^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Mivel

$$\sqrt[n]{3n^5} \leq \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \leq \sqrt[n]{3n^5 + 2n^5 + n^5} = \sqrt[n]{6n^5} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{3n^5} = \sqrt[n]{3} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \xrightarrow{(n\to\infty)} 1 \cdot 1^5 = 1 = 1 \cdot 1^5 \xleftarrow{(n\to\infty)} \sqrt[n]{6} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^5,$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = 1.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \sqrt[n]{3n^5+2n+1} = \sqrt[n]{n^5\left(3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \sqrt[n]{3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}} \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1^5 \cdot 1 = 1,$$

hiszen

$$\lim\left(3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right) = 3+0+0 = 3 \in (0,+\infty).$$

2. Világos, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5}} = \sqrt[n]{\frac{n}{5n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{2n+3n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+n}{2n}} = \sqrt[n]{1},$$

így

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{5}}\right) = 1 = \lim\left(\sqrt[n]{1}\right)$$

következtében

$$\lim(x_n) = 1.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2},$$

így (vö. fenti feladat)

$$\lim(x_n) = 1.$$

3. Mivel $\lim\left(\frac{3^n}{n!}\right) = 0$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre $\frac{3^n}{n!} < 1$, így az ilyen n-ekre

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n} \leq \sqrt[n]{1+2^n} \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{2^n} = 2\cdot\sqrt[n]{2}.$$

Ennélfogva

$$\lim\left(\sqrt[n]{2}\right) = 1$$

következtében
$$\lim\left(x_n\right)=2.$$

Megjegyzés. Mivel tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$x_n=2\cdot\sqrt[n]{\frac{(3/2)^n}{n!}+1}$$

és
$$\lim\left(\frac{(3/2)^n}{n!}+1\right)=0+1=1>0,$$

ezért (vö. korábbi feladat)
$$\lim(x_n)=2\cdot 1=2.$$

4. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\max\{a,b\}=\sqrt[n]{\max\{a,b\}^n}\leq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2\cdot\max\{a,b\}^n}=\sqrt[n]{2}\cdot\max\{a,b\}$$

és
$$\sqrt[n]{2}\longrightarrow 1\qquad(n\to\infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim\left(x_n\right)=\max\{a,b\}.$$

5. Mivel
$$9=\sqrt[n]{3^{2n}}\leq\sqrt[n]{1+3^{2n}}\leq\sqrt[n]{3^{2n}+3^{2n}}=\sqrt[n]{2}\cdot 9$$

és
$$\lim\left(\sqrt[n]{2}\right)=1,$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim\left(\sqrt[n]{1+3^{2n}}\right)=9.$$

A a későbbiek szempontjából is nagyon fontos az alábbi

Tétel (sorozatokra vonatkozó hányados- és gyökkritérium). Tegyük fel, hogy az

$$x_n \in (0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat esetében

$$0 \leq \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1 \qquad \text{vagy} \qquad 0 \leq \lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) < 1$$

teljesül. Ekkor fennál a

$$\lim (x_n) = 0$$

határérték-reláció.

Bizonyítás.

1. lépés. Legyen

$$\alpha := \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right).$$

Ekkor $0 \leq \alpha < 1$. Legyen

$$q \in (\alpha, 1) \qquad \text{és} \qquad \varepsilon := q - \alpha.$$

Ekkor $\varepsilon > 0$, így a konvergencia következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \alpha\right| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad -\varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} - \alpha < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + \alpha = q.$$

Ezért

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_N} = \prod_{k=N}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} < q^{n-N+1} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$0 < x_{n+1} < x_N \cdot q^{n-N+1}.$$

Mivel

$$\lim \left(x_N \cdot q^{n-N+1}\right) = x_N \cdot \lim \left(q^{n-N+1}\right) = 0,$$

ezért a Sandwich-tétel következtében $\lim (x_n) = 0$.

2. lépés. Legyen

$$\beta := \lim \left(\sqrt[n]{x_n}\right).$$

Ekkor $0 \leq \beta < 1$. Legyen

$$q \in (\beta, 1) \qquad \text{és} \qquad \varepsilon := q - \beta.$$

Ekkor $\varepsilon > 0$, így a konvergencia következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$|\sqrt[n]{x_n} - \beta| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad -\varepsilon < \sqrt[n]{x_n} - \beta < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sqrt[n]{x_n} < \beta + \varepsilon = q.$$

Ezért

$$0 < x_n < q^n \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

ahonnan a Sandwich-tétel felhasználásával $\lim(x_n) = 0$ adódik.

Példák.

1. Ha $k \in \mathbb{N}$, $q \in (-1, 1)$, azaz $|q| < 1$ és

$$x_n := n^k \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az

$$(y_n) := (|x_n|)$$

sorozatra

$$0 < \sqrt[n]{y_n} = (\sqrt[n]{n})^k \cdot |q| \longrightarrow 1^k \cdot |q| = |q| < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Kövezkezésképpen

$$\lim(y_n) = 0, \qquad \text{így} \qquad \lim(n^k \cdot q^n) = \lim(x_n) = 0.$$

2. Ha $a \in \mathbb{R}$ és

$$x_n := \frac{a^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az

$$(y_n) := (|x_n|)$$

sorozatra $a \neq 0$ esetén

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Kövezkezésképpen ($a = 0$ esetén meg különösképp)

$$\lim(y_n) = 0, \qquad \text{így} \qquad \lim\left(\frac{a^n}{n!}\right) = \lim(x_n) = 0.$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \dfrac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \dfrac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \sqrt{\dfrac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}} \quad (n \in \mathbb{N});$
4. $x_n := \dfrac{(-2)^n + n}{n! + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Az 5^n számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \frac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}} = \frac{5 + (2/5)^n}{3 - (25)^{-n}} \longrightarrow \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3} \qquad (n \to \infty).$$

2. A 4^n számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \frac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n} = \frac{n^2 \cdot (3/4)^n + 1}{4 + (1/2)^n} \longrightarrow \frac{0+1}{4+0} = \frac{1}{4} \qquad (n \to \infty).$$

3. A 7^n számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \sqrt{\frac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}} = \sqrt{\frac{(-5/7)^n + 1}{7 + n^7(1/7)^n}} \longrightarrow \sqrt{\frac{0+1}{7+0}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \qquad (n \to \infty).$$

4. Az $n!$ számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \frac{(-2)^n + n}{n! + 3^n} = \frac{\frac{(-2)^n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}}{1 + \frac{3^n}{n!}} \longrightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0 \qquad (n \to \infty).$$

Házi feladatok

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Számítsuk ki $\lim(x_n)$-et az alábbi esetekben!

1. $x_n := \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$;

2. $x_n := \sqrt{n^3+1}-n$;

3. $x_n := \sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}$;

4. $x_n := \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt[5]{n^4+1}}$;

5. $x_n := \dfrac{\sqrt[5]{n^7+3}+\sqrt[4]{2n^3-1}}{\sqrt[6]{n^8+n^7+1}-n}$;

6. $x_n := \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3}-\sqrt[5]{n^3+4}}{\sqrt[3]{n^7+1}}$;

7. $x_n := \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt[5]{n^4+1}}$;

8. $x_n := \dfrac{(n+1)^{10}+(n+2)^{10}+\ldots+(n+100)^{10}}{n^{10}+10^{10}}$;

9. $x_n := \sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}$;

10. $x_n := \phi(n)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$,

$\phi(n) \in \left\{\sqrt[3]{n^2}, \sqrt{n^3}\right\}$;

11. $x_n := n^3\cdot\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$;

12. $x_n := \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$;

13. $x_n := \sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

14. $x_n := \dfrac{\sqrt[3]{n+1}-1}{n}$.

Útm.

1. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-1} \longrightarrow \frac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1} = -1 \qquad (n \to \infty).$$

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \left(\sqrt{n^3+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}+n}{\sqrt{n^3+1}+n} = \frac{n^3+1-n^2}{\sqrt{n^3+1}+n} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n}\right)}{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= n^{3/2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n}}} \longrightarrow +\infty\cdot 1 = +\infty \quad (n \to \infty).$$

3. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}} =$$

$$= \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}} =$$

$$= \frac{4n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}} =$$

$$= \frac{4n}{n^{4/3}\cdot\left\{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}} \longrightarrow 0\cdot\frac{4}{3} = 0 \quad (n \to \infty).$$

4. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\right)}{n\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}}\right)} == \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad (n\to\infty).$$

5. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n \to \infty$ határátmenetben

$$x_n = \frac{n^{7/5}\cdot\left(\sqrt[5]{1+\frac{3}{n^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{n^{13/5}}-\frac{1}{n^{21/5}}}\right)}{n^{4/3}\cdot\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^8}-\frac{1}{n^{1/3}}}\right)} = n^{1/15}\cdot\frac{\sqrt[5]{1+\frac{3}{n^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{n^{13/5}}-\frac{1}{n^{21/5}}}}{\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^8}-\frac{1}{n^{1/3}}}} \longrightarrow (+\infty)\cdot\frac{1+0}{1-0} = +\infty.$$

6. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n \to \infty$ határátmenetben

$$x_n = \frac{n^{4/3}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n^{11/3}}+\frac{4}{n^{20/3}}}\right)}{n^{7/3}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^7}}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n^{11/3}}+\frac{4}{n^{20/3}}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^7}}} \longrightarrow 0\cdot\frac{1-0}{1} = 0.$$

7. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\right)}{n\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad (n\to\infty).$$

8. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{10}+\ldots+\left(1+\frac{100}{n}\right)^{10}}{1+\left(\frac{10}{n}\right)^{10}} \longrightarrow \frac{100\cdot 1}{1+0} = 100 \quad (n\to\infty).$$

9. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2-7n+3}}{\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2-7n+3}} = \\ &= \frac{n^2-2n-1-n^2+7n-3}{\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2-7n+3}} = \frac{5n-4}{\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2-7n+3}} = \\ &= \frac{5-\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}} \longrightarrow \frac{5-0}{1+1} = \frac{5}{2} \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

10. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
x_n &= \phi(n) \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right) = \\
&= \phi(n) \cdot \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \frac{n-1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) = \\
&= \phi(n) \cdot \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})} = \\
&= \phi(n) \cdot \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})} \cdot \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} = \\
&= \phi(n) \cdot \frac{n-1-n-1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}.
\end{aligned}$$

Ha

- $\phi(n) = \sqrt[3]{n^2}$, akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{-2n^{2/3}}{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \\
&= n^{-5/6}\cdot\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} \longrightarrow \\
&\longrightarrow 0\cdot\frac{-2}{8} = 0;
\end{aligned}$$

- $\phi(n)=\sqrt{n^3}$, akkor az $n\to\infty$ határátmenetben

$$x_n = \frac{-2n^{3/2}}{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{-2}{(1+1)(1+1)(1+1)} = -\frac{1}{4}.$$

11. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén az $n\to\infty$ határátmenetben

$$x_n = n^3\cdot\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}} =$$

$$= n^3\cdot\frac{n^2+\sqrt{n^4+1}-2n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}} = n^3\cdot\frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2} =$$

$$= n^3\cdot\frac{n^4+1-n^4}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)} =$$

$$= \frac{n^3}{n^3\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1\right)} \longrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)(1+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

12. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \longrightarrow \frac{2}{1+1} = 1 \qquad (n\to\infty).$$

13. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \sqrt[3]{n^2}\cdot\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} = \sqrt[3]{n^2}\cdot\frac{n^3+1-n^3+1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} =$$

$$= \sqrt[3]{n^2}\cdot\frac{2}{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)} = \frac{2}{n^{5/6}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{2}{(+\infty)\cdot(1+1)} = 0 \quad (n\to\infty).$$

14. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n} \longrightarrow 0-0=0 \quad (n\to\infty).$$

Feladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $x_n := \dfrac{n^3 - 2n - 1}{-3n^3 + n + 3} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$; (b) $x_n := \dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

2. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

   (a) $x_n := \sqrt{n^2 + 3n + 1} - 2n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$; (b) $x_n := n \cdot \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

3. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $x_n := \sqrt[n]{n^2 + 100} \quad (n \in \mathbb{N})$; (b) $x_n := \sqrt[n]{2 \cdot 5^n + 7^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Számítsuk ki az

$$x_n := \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   sorozat határértékét!

5. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $x_n := \sqrt{\dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$; (b) $x_n := \dfrac{n - \sqrt{n} - 1}{n + \sqrt{n} + 1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

   (c) $x_n := \dfrac{2^n + 2^{-n}}{2^{-n} + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$; (d) $x_n := \dfrac{n \cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1} + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

   (e) $x_n := \sqrt{\dfrac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} + n^5}} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$; (f) $x_n := \dfrac{(-3)^n + n^3}{n! + 5^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Útm.

1. (a) Világos, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n^3-2n-1}{-3n^3+n+3} = \frac{\frac{n^3-2n-1}{n^3}}{\frac{-3n^3+n+3}{n^3}} = \frac{1-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{-3+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}} \longrightarrow \frac{1-0-0}{-3+0+0} = -\frac{1}{3} \quad (n \to \infty).$$

(b) Bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1} = \frac{\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3}}{\frac{n^3+1}{n^3}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{1+\frac{1}{n^3}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{(1+0)^3+(1-0)^3}{1+0} = \frac{2}{1} = 2 \quad (n \to \infty).$$

2. (a) Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = (\sqrt{n^2+3n+1}-2n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+2n}{\sqrt{n^2+3n+1}+2n} = \frac{-3n^2+3n+1}{\sqrt{n^2+3n+1}+2n} =$$

$$= \frac{\frac{-3n^2+3n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+2n}{n}} = \frac{-3n+3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2} \longrightarrow \frac{(-\infty)+3+0}{\sqrt{1+0+0}+2} = -\infty \qquad (n \to \infty).$$

(b) Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = n\cdot\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = n\cdot\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

3. (a) Mivel

$$(\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+100} \le \sqrt[n]{n^2+100n^2} = \sqrt[n]{101n^2} = \sqrt[n]{101}\cdot(\sqrt[n]{n})^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1 = 1 \overset{(n\to\infty)}{\longleftarrow} \sqrt[n]{101},$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = 1.$$

(b) Mivel

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 7^n + 7^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 7 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{3} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = 7.$$

4. Az x_n-beli összeg minden tagját alulról, ill. felülről becsülhetjük az összeg legkisebb, ill. legnagyobb tagjával, azaz tetszőleges n indexre

$$\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1}.$$

Mivel

$$\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$$

és

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $\lim(x_n) = 1$.

5. (a) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+2}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1+0+0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1 \qquad (n \to \infty).$$

(b) Bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \frac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1} = \frac{\frac{n-\sqrt{n}-1}{n}}{\frac{n+\sqrt{n}+1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1-0-0}{1+0+0} = 1 \qquad (n\to\infty).$$

(c) A 3^n számmal egyszeűsítve

$$x_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n + 1} \longrightarrow \frac{0+0}{0+1} = 0 \qquad (n\to\infty).$$

(d) A 9^n számmal egyszeűsítve

$$x_n = \frac{n\cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1}+3^n} = \frac{2n\cdot 2^n + 9^n}{\frac{9^n}{9}+3^n} = \frac{2n\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n + 1}{\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{3}\right)^n} \longrightarrow \frac{0+1}{\frac{1}{9}+0} = 9 \qquad (n\to\infty).$$

(e) Az 5^n számmal egyszeűsítve

$$x_n = \sqrt{\frac{(-2)^n+5^n}{5^{n+1}+n^5}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^n+1}{5+\frac{n^5}{5^n}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{0+1}{5+0}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \qquad (n\to\infty).$$

(f) Az $n!$ számmal egyszeűsítve

$$x_n = \frac{(-3)^n+n^3}{n!+5^n} = \frac{\frac{(-3)^n}{n!}+\frac{n^3}{n!}}{1+\frac{5^n}{n!}} = \frac{\frac{(-3)^n}{n!}+\frac{n^2}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}}{1+\frac{5^n}{n!}} \longrightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0 \qquad (n\to\infty).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$x_n := \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat konvergens, majd számítsuk ki határértékét!

Útm. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n^n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{2n(2n-1)}{n\cdot n}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1} =$$

$$= 4\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot 4\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 4^n\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2},$$

ezért

$$\frac{4^n}{2n} = 4^n \cdot \frac{2n-2}{2n} \cdot 4 \cdot \frac{2n-4}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} < \binom{2n}{n} < 4^n.$$

Következésképpen

$$\frac{4}{\sqrt[n]{2n}} < x_n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így a Sandwich-téelből azt kapjuk, hogy $\lim(x_n) = 4$.

6. gyakorlat (2025. március 19.)

Szükséges ismeretek.

- Adja meg az e számot definiáló sorozatot!
- Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet!
- Milyen tételt ismer monoton sorozatok határértékével kapcsolatban?
- Igaz-e az, hogy ha az (x_n) és a (y_n) sorozatoknak van határértéke és $x_n > y_n$ minden n-re, akkor $\lim(x_n) > \lim(y_n)$?
- Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt, és adjon olyan eljárást, amivel ezek a számok nagy pontossággal előállíthatók!
- Hogyan szól a Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel?
- Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?
- Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?

Órai feladatok

Az analízisben alapvető jelentőségű az az állítás, miszerint „egymásba skatulyázott kompakt intervallumok[3] közös része nem üres.” Ezt pontosítja a következő tételben megfogalmazott állítás.

Emlékeztető (Cantor-tétel). Minden $n \in \mathbb{N}$ szám esetén legyenek adottak az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ (kompakt) intervallumok, és tegyük fel, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

[3] Ha valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq b$, akkor az $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ számhalmazt szokás **kompakt intervallum**nak vagy **korlátos és zárt intervallum**nak nevezni.

Megjegyezzük, hogy ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $b_n - a_n < \varepsilon$, akkor az is igaz, hogy

$$\exists!\, c \in [a_n, b_n] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Példa. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{ill.} \qquad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ekkor az (a_n) és a (b_n) sorozat teljesíti teljesítik a Cantor-féle közöspont-tétel feltételeit, hiszen

- bármely $n \in \mathbb{N}$ indxre $a_{n+1} - a_n > 0$, $b_{n+1} - b_n < 0$, ui. egyrészt (a_n) monoton növekedő (vö. 1. **GY**), másrészt pedig minden $n \in \mathbb{N}$ indexre a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében

$$\frac{1}{b_n} = 1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1+n}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{b_{n+1}}.$$

- tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n;$$

- ha $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \frac{3}{\varepsilon}$, akkor

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Így

$$\exists!\, e \in \mathbb{R}: \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyezzük, hogy

1. mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n < e < b_n$, azaz tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ index esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

   ezért

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{6}\right)^7 = \frac{823543}{279936} < 3;$$

2. az e szám[4] bevezetése nem így szokásos, hanem a mozgólépcső-elv felasználásával:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e \qquad (n\to\infty).$$

3. az

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat első néhány tagja:

$$e_1 = 2; \qquad e_2 = \frac{9}{4} = 2,25; \qquad e_3 = \frac{64}{27} = 2,\dot{3}7\dot{0}; \qquad e_4 = \frac{625}{256} = 2,44140625.$$

Később látni fogjuk, hogy

$$2,71825 < e < 2,71829.$$

4. nagy hiba lenne arra gondolni, hogy mivel

$$1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty), \qquad \text{ezért} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1^n = 1 \quad (n\to\infty),$$

hiszen egyrészt a határérték független n-től, másrészt pedig a szorzás művelet és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel nem használható, hiszen az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-szer}}$$

szorzatban a tényezők száma nem állandó, függ n-től.

5. belátható (később megmutatjuk), hogy e irracionális, sőt **transzcendens szám**.[5]

[4] A e-t Leonhard Euler (1707-1783) tiszteletére **Euler-szám**nak is nevezik.

[5] Ez azt jelenti, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom, aminek ez a szám gyöke lenne. A $\sqrt{2}$ például irracionális, de nem transzcendens, mert $\sqrt{2}$ megoldása az $x^2-2=0$ egyenletnek. Azokat a valós számokat, amelyek valamely egész együtthatós polinomnak a gyökei **algebrai számnak** nevezzük ($\sqrt{2}$ tehát algebrai szám).

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$; 2. $x_n := \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n} \quad (n \in \mathbb{N})$; 3. $x_n := \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

4. $x_n := \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} \quad (n \in \mathbb{N})$; 5. $x_n := \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow e \cdot 1 = e \ (n \to \infty)$.

2. Világos, hogy

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \longrightarrow \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e} \quad (n \to \infty).$$

3. Mivel

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e > 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty).$$

4. A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty).$$

Innen a Sandwich-tétel felhasználásával $\lim(x_n) = +\infty$ következik.

5. Tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$0 \leq x_n = \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n}-1+1}{\sqrt{n}-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}-1}\right)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{1+\frac{n}{\sqrt{n}-1}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Így a Sandwich-tétel következtében azt kapjuk, hogy $\lim(x_n) = 0$.

Tétel. Legyen (x_n) olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor fennáll a

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \longrightarrow e \qquad (n \to \infty).$$

határérték-reláció.

Bizonyítás.

1. lépés. Ha $x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor legyen

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq 1\} \qquad \text{és} \qquad y_n := [x_n] \quad (n \in \mathcal{N}).$$

Ekkor $\lim(y_n) = +\infty$ és

$$y_n \leq x_n \leq y_n + 1, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{1}{y_n} \geq \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{y_n+1},$$

azaz

$$e \longleftarrow \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n}\right) = \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1} \geq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \geq \left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{-1} \longrightarrow e$$

2. lépés. Ha $x_n < 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor legyen

$$y_n := -x_n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1-\frac{1}{y_n+1}\right)^{-y_n-1} = \left(\frac{y_n+1}{y_n}\right)^{y_n+1} = \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n}\right) \longrightarrow e.$$

Tétel. Legyen $A \in \mathbb{R}$, (x_n) olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = +\infty$. Ekkor fennáll a

$$\left(1+\frac{A}{x_n}\right)^{x_n} \longrightarrow e^A \qquad (n \to \infty).$$

határérték-reláció.

Bizonyítás. Ha

- $A = 0$, akkor a tétel nyilvánvalóan igaz.
- Ha $A \neq 0$, akkor minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, amelyre $x_n > |A|$, fennáll az $1 + \dfrac{A}{x_n} > 0$ becslés, és így
$$\left(1+\frac{A}{x_n}\right)^{x_n} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x_n}{A}}\right)^{\frac{x_n}{A}}\right]^A \longrightarrow e^A \quad (n \to \infty).$$

Megjegyezzük, hogy az
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$
határérték-relációnak fontos pénzügyi alkalmazása is van. Ha T forintot (kezdőtőkét) évi p%-os kamatra helyezünk el a bankban, akkor egy év után

$$T \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$$

forintot tőkénk lesz. Ha havi kamattal számítjuk az évi p%-os kamatot, akkor a tőke nagysága

$$T \cdot \left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$$

forint lesz egy év után. Megpróbálhatunk napi kamattal számolni, vagy akár még jobban növelni a kamatfizetési gyakoriságot. Ha a betett összegünk egy évben egyenletesen n-szer kamatozik p%-os évi kamattal, akkor az év végén
$$T \cdot \left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^{n}$$

forintot kapunk vissza. Elég nagy n esetén az előbbi képlet helyet használhatjuk az

$$T \cdot e^{p/100}$$

képletet, ami a sorozat határértéke. Ez olyan, mint ha a kamatfizetés technikailag minden időpillanatban történne. Ezért ezt **folytonos kamatozásnak** nevezik.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_n := \left(\frac{4n+3}{n}\right)^{5n} \quad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$
4. $x_n := \left(\frac{2n^2+3}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Világos, hogy

$$x_n = \left(\frac{6n+4-11}{6n+4}\right)^{3n+2} = \left(1-\frac{11}{6n+4}\right)^{3n+2} = \sqrt{\left(1+\frac{-11}{6n+4}\right)^{6n+4}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{e^{11}}} \quad (n \to \infty).$$

2. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\frac{4n+3}{5n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{n+3/4}{n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(1+\frac{3/4}{n}\right)^n,$$

ezért

$$x_n \longrightarrow 0 \cdot e^{3/4} = 0 \qquad (n \to \infty).$$

3. Mivel

$$\frac{3n+1}{n+2} \longrightarrow 3 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n+1}{n+2} \in (3-1, 3+1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3n+1}{n+2} > 2.$$

Következésképpen az ilyen n-ekre

$$x_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} > 2^{2n+3} \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty),$$

$$\lim(x_n) = +\infty$$

következik.

4. Világos, hogy az $n \to \infty$ határátmenetben

$$x_n = \left(\frac{2n^2-2+5}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} = \left(1+\frac{5}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} = \sqrt{\left(1+\frac{5}{2n^2-2}\right)^{2n^2-2}} \longrightarrow \sqrt{e^5}.$$

A matematika egyes ágaiban (diszkrét matematika, differenciaegyenletek), de az informatikában is nagy jelentőséggel bírnak az olyan sorozatok, amelyek tagjait az „előttük lévő” tag(ok) ismeretében értelmezzük. Az ilyen sorozatokat szokás **rekurzív megadású sorozat**oknak nevezni.

Példák.

1. A legenda szerint Hanoiban egy kolostorban a lámák egy falapból felfelé kiálló három rudacska egyikére fűzve $n = 64$ darab különböző méretű, közepén lyukas korongot kaptak Buddhától. Legalul volt a legnagyobb, felette a többi, egyre kisebb és kisebb (vö. 4. ábra).

4. ábra. Buddha korongjai

Azt a feladatot adta nekik, hogy juttassák a korngokat valamelyik másik rudacskára úgy, hogy közben csak egyet tehetnek át és semelyiket sem szabad nála kisebbre helyezni. Mire befejezik eljön a világ vége.

Feladat. Határozzuk meg azoknak a lépéseknek a minimális l_n számát, amelyek n korong $(n \in \mathbb{N})$ átrakásához szükségesek!

Útm. Ha $n = 1$, akkor nyilván $l_1 = 1$. Ha $n = 2$, akkor ahhoz, hogy az első korongot átrakhassuk az első rudacskáról a másikra, előbb a felső korongot át kell tenni egy harmadikra. Ezután átrakhatjuk az első korongot a második rúdra és a tetejére a másik korongot. Eszerint tehát $l_2 = 3$. Hasonló módon három korong közül a legalsó átrakásához előbb a két felsőt kell áttenni a harmadik rúdra, amihez az előbbi gondolatmenet alapján $l_2 = 3$ áthelyezést kell végrehajtanunk. Ezután átrakhatjuk a legalsó korongot a második rúdra, majd ismét két korongot kell áthoznunk a harmadik rúdról a másodikra, újabb $l_2 = 3$ lépésben. Látható tehát, hogy

$$l_3 = 2 \cdot l_2 + 1 = 7.$$

Ugyanilyen módon látható be, hogy

$$l_4 = 2 \cdot l_3 + 1 = 15, \qquad l_5 = 2 \cdot l_4 + 1 = 31,$$

és általában

$$l_n = 2 \cdot l_{n-1} + 1 \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}). \tag{23}$$

Az (l_n) sorozat első néhány tagjának felírásával nem nehéz megsejteni, majd teljes indukcióval igazolni, hogy

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így tehát

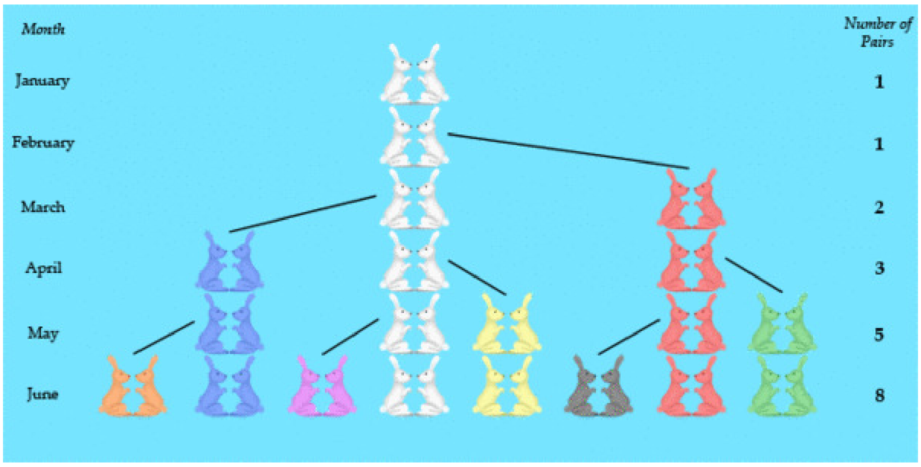
$$l_{64} = 18446744073709551615 > 1.8 \cdot 10^{19}$$

lépés szükséges 64 korongnak a fenti feltételek mellett az egyik rúdról a másikra való átpakolásához. Ha meggondoljuk, hogy l_{64} másodperc 585 milliárd év körül van, és a Naprendszer kb. 4,6 milliárd éves, akkor a világvégével kapcsolatos jóslat nem is annyira elképzelhetetlen. ☺

Játék: Hanoi tornyai

2. Leonardo Pisano – ismert nevén Fibonacci – olasz matematikusnak 1202-ben megjelent **Liber Abaci** című könyvében szerepel a következő

Feladat. Egy ivarérett nyúlpár minden hónapban egy új nyúlpárnak ad életet: egy hímnek és egy nősténynek. A nyulak két hónapos korukra válnak ivaréretté. Egy ivarérett nyúlpártól származó nemzetségnek mekkora lesz a létszáma egy év múlva?



5. ábra. Fibonacci nyulai

Útm. Kezdjük az összeszámlálást egy újszülött nyúlpárból kiindulva és tételezzük fel, hogy közben egyetlen nyúl sem pusztul el. Az első hónapban egyetlen pár nyulunk van, a másodikban szintén. A harmadik hónapban már nyilván két pár nyulunk lesz: az eredeti pár és ezeknek két hónapos korukban született újszülött párja. A negyedik hónapban az eredeti nyúlpár újabb nyúlpárnak ad életet, az elsőszülött ivadékaik még nem szülnek, így három nyúlpárunk lesz összesen. Az ötödik hónapban meglesz a negyedik hónap három nyúlpárja, valamint az újszülöttek, és ezek pontosan annyian lesznek, ahány nyúlpár a harmadik hónapban volt, hiszen a negyedik hónap újszülöttei még nem szülnek, de a harmadik hónap újszülöttei (az öregekkel együtt) már igen. E gondolatsort folytatva az n -edik hónapban lévő nyúlpárok F_n száma adódik egyrészt az $(n-1)$-edik hónapban meglévő nyúlpárok F_{n-1} számából, másrészt az újszülöttekből. Az újszülöttek száma viszont megegyezik az $(n-2)$-dik hónapban levő nyúlpárok számával, ugyanis pontosan azok fognak az n-edik hónapban szülni, amelyek (akár öreg, akár újszülött nyulak) az $(n-2)$-dik hónapban megvoltak.

A létszám alakulását a következő áblázat mutatja:

hónap	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
megszületett párok:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Megjegyzések.

(a) Az F_n számokat **Fibonacci-számok**nak, az

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}_0) \tag{24}$$

rekurzív sorozatot **Fibonacci-sorozat**nak nevezzük. Az (F_n) sorozat tagjainak explicit alakja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(b) **Aranymetszés**nek nevezzük egy szakasz olyan kettéosztását, ahol a nagyobbik rész hossza úgy aránylik a kisebbik rész hosszához, mint a szakasz hossza a nagyobbik rész hosszához. Könnyen megmutatható, hogy egységnyi hosszú szakasz esetében ez az arány nem más, mint a

$$\lim \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$$

határérték. Ha ui. ha a nagyobbik rész x, akkor egységnyi hosszú szakaszra:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \qquad \text{amiből} \qquad x^2 + x - 1 = 0,$$

és ennek az egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

amire

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Az

$$u := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad v := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

számokkal

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u^n - v^n} = \frac{u - v \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^n}{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^n} \longrightarrow \frac{u-0}{1-0} = u \qquad (n \to \infty).$$[6]

3. Ha $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor az

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := \alpha x_n + \beta \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{25}$$

[6]**HF**. Mutassuk meg, hogy fennáll a $|v/u| < 1$ egyenlőtlenség!

sorozat $\alpha = 1$ esetén **számtani sorozat**:

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := x_n + \beta \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$\beta = 0$ esetén pedig **mértani sorozat**:

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := \alpha x_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

4. A Mézga-család a bankban az $n = 0$ időpontban K összegű kölcsönt vesz fel, amit időszakosan (havi vagy negyedéves vagy éppen éves időszakonként) törleszt. A törlesztés egy része a kamat, másik része a K tőkét csökkenti. Jelölje t_n az n-edik fizetés utáni tőketartozás nagyságát, az n-edik alkalommal befizetett összeget pedig jelölje b_n. Tegyük fel, hogy az egy periódusra eső $p\%$ kamatláb rögzített. Ekkor az $(n+1)$-edik periódus elteltével, azaz az $(n+1)$-edik fizetés megtörténte után a fennmaradó t_{n+1} tőketartozás összetevődik az n-edik periódus utáni t_n tőketartozásból, annak $t_n p/100$ egységkamatából, csökkentve ezek összegét a befizetett b_n összeggel:

$$t_{n+1} = t_n + t_n \cdot \frac{p}{100} - b_n, \qquad \text{vagyis} \qquad t_{n+1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot t_n - b_n, \quad t_0 = K.$$

Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén k**-lépéses rekurzió**ról beszélünk, ha a sorozat tagjait az előtte lévő k tag függvényében adjuk meg. Egylépéses rekurzó pl. a (23)-beli és a (25)-beli sorozat, kétlépéses rekurzió pl. a (24)-beli Fibonacci-sorozat. Az egylépéses rekurzió esetében a fentiket pontosítja a következő

Definíció. Legyen valamely $\mathcal{H} \neq \emptyset$ halmaz esetén adott az $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ függvény az $a \in \mathcal{H}$ elem. Ekkor az

$$x_0 := a, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív összefüggésnek eleget tévő $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{H}$ sorozatot a **kezdőtagú rekurzív megadású sorozat**nak nevezzük.

Felmerül a kérdés, hogy adott $a \in \mathcal{H}$ pont, ill. $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ függvény esetén van-e ilyen sorozat. Teljes indukcióval belátható, hogy a válasz: igen, sőt pontosan egy ilyen sorozat van (vö. A Függelék).

Példa. Legyen $2 \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < A \in \mathbb{R}$, továbbá

$$\mathcal{H} := (0, +\infty), \qquad f(t) := \frac{1}{m}\left((m-1)t + \frac{A}{t^{m-1}}\right) \quad (t \in \mathcal{H}).$$

Látható, hogy $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, ui. a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében bármely

$t \in \mathcal{H}$ esetén

$$f(t) = \frac{\overset{1}{\smile}{t} + \ldots + \overset{m-1}{\smile}{t} + \frac{A}{t^{m-1}}}{m} \geq \sqrt[m]{\overset{1}{\smile}{t} \cdot \ldots \cdot \overset{m-1}{\smile}{t} \cdot \frac{A}{t^{m-1}}} = \sqrt[m]{t^{m-1} \cdot \frac{A}{t^{m-1}}} = \sqrt[m]{A} > 0,$$

azaz $f(t) > 0$. Tehát tetszőleges $\alpha, A \in (0, +\infty)$ esetén pontosan egy olyan $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to (0, +\infty)$ sorozat van, amelyre

$$x_0 = \alpha, \qquad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{A}{x_n^{m-1}}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{26}$$

Az alábbi feladatban megmutatjuk, hogy a (26) sorozat konvergens.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $0 < A \in \mathbb{R}$, akkor a (26)-beli sorozat konvergens, majd számítsuk ki határértékét!

Útm.

1. lépés. A sorozat értelmezéséből teljes indukcióval következik (**HF**), hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n > 0$.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy a sorozat kvázi-monoton fogyó. Valóban, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{m} \cdot \left(m - 1 + \frac{A}{x_n^m}\right) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{x_n^m} = 1 - \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{A}{x_n^m}\right),$$

így az

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A \leq x_n^m \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalencia igaz voltát, illetve a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget kihasználva azt kapjuk, hogy

$$x_{n+1}^m = \left(\frac{\overset{1}{\smile}{x_n} + \ldots + \overset{m-1}{\smile}{x_n} + \frac{A}{x_n^{m-1}}}{m}\right)^m \geq \overset{1}{\smile}{x_n} \cdot \ldots \cdot \overset{m-1}{\smile}{x_n} \cdot \frac{A}{x_n^{m-1}} = A \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

3. lépés. A fentiek azt jelentik, hogy (x_n) konvergens. Legyen $\beta := \lim(x_n)$. Ekkor a fentiek következtében $0 < A \leq \beta^m$, és így $\beta > 0$. Az is igaz továbbá, hogy

$$\beta = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{A}{x_n^{m-1}}\right)\right) = \frac{1}{m}\left((m-1)\beta + \frac{A}{\beta^{m-1}}\right),$$

azaz

$$m\beta = m\beta - \beta + \frac{A}{\beta^{m-1}}$$

Innen áterendezéssel azt kapjuk, hogy $\beta^m = A$.

Rekurzív sorozatok határértékét sok esetben bizonyos leképezések fixpontjaként kaphatjuk meg. Ezzel kapcsolatban utalunk a numerikus matematikában igen fontos szerepet játszó fogalmakra, ill. tételekre (vö. B Függelék).

Megjegyzzük, hogy az $m := 2$, $A := 2$, ill. $x_0 := 2$ esetben a (26) rekurzió

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

alakú. Ezt a sorozatot szokás **Heron-féle** vagy **babiloni gyökkeresési algoritmus**nak nevezni.

Feladat. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

1. $a \in \mathbb{R}$, $x_0 := a$, $x_{n+1} := \dfrac{2x_n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;
2. $x_0 := 2$, $x_{n+1} := \dfrac{2x_n}{x_n + 1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;
3. $x_0 := 6$, $x_{n+1} := 5 - \dfrac{6}{x_n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;
4. $x_0 := 0$, $x_{n+1} := \dfrac{1 + x_n^2}{2}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;
5. $x_n := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots}}}$ $(n \in \mathbb{N})$ és itt n darab gyökvonás szerepel;
6. $x_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$ $(n \in \mathbb{N})$ és itt n darab gyökvonás szerepel;
7. $\alpha \in [0, +\infty)$, $x_1 := 0$, $\quad x_{n+1} := \sqrt{\alpha + x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$;
8. $x_0 := 0$, $x_{n+1} := \alpha + x_n^2$ $(n \in \mathbb{N}_0;\ 0 \le \alpha \in \mathbb{R})$;
9. $x_0 := 3$, $x_{n+1} := 3 - \dfrac{2}{x_n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;
10. $x_0 := 0$, $x_{n+1} := \dfrac{2}{1 + x_n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Útm.

1. A rekurziót „kibontva” könnyen **megsejthető**, hogy

$$x_n = \frac{2^n}{n!} \cdot a \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

hiszen

$$x_1 = \frac{2a}{1}, \quad x_2 = \frac{4a}{1 \cdot 2}, \quad x_3 = \frac{8a}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad x_4 = \frac{16a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad x_5 = \frac{32a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Ezután ezt az összefüggést a következőképpen igazoljuk. Ha

(a) $a = 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n = 0$, hiszen

- $n = 0$ esetén $x_0 = 0$, továbbá
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n = 0$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{n+1} = \frac{2 \cdot 0}{n+1} = 0.$$

(b) $a \neq 0$, akkor persze bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \neq 0$ (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), és így

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot a}{\dfrac{2^n}{n!} \cdot a} = \frac{2}{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Tudjuk, hogy $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim \left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \right) = \lim \left(\frac{2}{n+1} \right) = 0 < 1,$$

következésképpen (vö. 5. $\boxed{\textbf{GY}}$)

$$\lim (x_n) = \lim (|x_n|) = 0.$$

2. Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy

$$x_n > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

A sorozat első néhány tagja:

$$x_0 = 2, \qquad x_1 = \frac{4}{3} = 1.\dot{3}, \qquad x_2 = \frac{8}{7} = 1.142857.$$

Az (x_n) sorozat pontosan akkor monoton csökkenő, ha

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n}{x_n+1} = x_n \cdot \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz, ha fennáll az

$$x_n \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenség. Ez viszont igaz, ui.

- $x_0 = 2 \geq 1$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \geq 1$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x_n}} \geq \frac{2}{1+\frac{1}{1}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Az (x_n) sorozat tehát monoton csökkenő, alulról korlátos, így konvergens is. Legyen $A := \lim(x_n)$. Az

$$x_{n+1} := \frac{2x_n}{x_n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív összefüggésben az $n \to \infty$ határátmenet elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{2A}{A+1}, \qquad \text{azaz} \qquad A(A-1) = 0.$$

Világos, hogy $A = 0$ nem lehet a sorozat határértéke, ezért $A = 1$.

3. **1. lépés.** Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $A := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = 5 - \frac{6}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 - 5A + 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \in \{2, 3\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 6$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n > 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 6 > 3$;

- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n > 3$, akkor

$$x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n} > 5 - \frac{6}{3} = 5 - 2 = 3.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ezt teljes is indukcióval igazoljuk. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén

$$x_0 = 6 > 4 = x_1;$$

- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $3 < x_{n+1} < x_n$, akkor

$$x_{n+2} = 5 - \frac{6}{x_{n+1}} < 5 - \frac{6}{x_n} = x_{n+1}.$$

4. lépés. Mivel a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtában tehát (x_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = 3.$$

4. A sorozat első néhány tagját meghatározva –

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{5}{8}$$

– az a „gyanúnk" támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_0 = 0 < \frac{1}{2} = x_1,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett

$$0 \le x_n < x_{n+1},$$

akkor $0 \le x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $0 \le x_n < x_{n+1}$-ből $x_n^2 < x_{n+1}^2$, és így

$$1 + x_n^2 < 1 + x_{n+1}^2, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2} < \frac{1 + x_{n+1}^2}{2} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \le A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Egy ilyen A

„megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor $\lim(x_{n+1}) = A$, így

$$\lim\left(\frac{1+x_n^2}{2}\right) = \frac{1+A^2}{2}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt

$$A = \frac{1+A^2}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 2A + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A-1)^2 = 0,$$

amiből $A = 1$ adódik. Lássuk be tehát, hogy fennáll az $x_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_0 = 0 \leq 1$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \leq 1$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} \leq 1.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 1$.

5. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}\sqrt{2}, \qquad x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

látható, hogy

$$x_n = \sqrt{\ldots\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$x_1 := \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{2x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt[4]{2}\sqrt{2} = x_2,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$0 < x_n < x_{n+1}, \qquad \text{akkor} \qquad 0 < x_{n+1} < x_{n+2}$$

is igaz. Valóban, a $0 < x_n < x_{n+1}$ egyenlőtlenségpárból $2x_n < 2x_{n+1}$ és így

$$\sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \leq A$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim(\sqrt{2x_n}) = \sqrt{2A}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt $A = \sqrt{2A}$, amiből $A \in \{0; 2\}$ adódik. Mivel $0 < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért az $A = 0$ eset nem lehetséges, legfeljebb csak $A = 2$. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az

$$x_n \leq A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_1 = \sqrt{2} \leq 2 = A$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N} \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2A} = A.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 2$.**Megjegyzések.**

(a) A sorozat első néhány

$$x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2}}, \qquad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{1-\frac{1}{4}},$$

$$x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{128} = 2^{\frac{7}{8}} = 2^{1-\frac{1}{8}}$$

tagjának meghatározásával sejthető, hogy

$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

a mi teljes indučióval könnyen igazolható. Valóban,

- $n = 1$ esetén

$$x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2^1}};$$

- ha pedig valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}},$$

akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^n}}} = 2^{\frac{2-\frac{1}{2^n}}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

(b) Mivel

$$\lim\left(\sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

ezért

$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}} \longrightarrow 2 \cdot 1 = 2 \qquad (n \to \infty)$$

6. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

látható, hogy

$$x_n = \sqrt{\ldots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$x_1 := \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{2+x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < 2+\sqrt{2},$$

így

$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$0 < x_n < x_{n+1}, \qquad \text{akkor} \qquad 0 < x_{n+1} < x_{n+2}$$

is igaz. Valóban, az $0 < x_n < x_{n+1}$ egyenlőtlenségpárból $2 + x_n < 2 + x_{n+1}$ és így

$$\sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens

és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \leq A$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim(\sqrt{2+x_n}) = \sqrt{2+A}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt $A = \sqrt{2+A}$, amiből $A \in \{-1; 2\}$ adódik. Mivel $0 < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért az $A = -1$ eset nem lehetséges, legfeljebb csak $A = 2$. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az

$$x_n \leq A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_1 = \sqrt{2} \leq 2 = A$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N} \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{2+A} = A.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 2$.

Megjegyzések.

(a) Ha tudnánk, mi a cos, ill. a π jelentése, akkor elmondhatnánk, hogy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{2} && = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \\
x_2 &= \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]} && = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \\
x_3 &= \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]} && = 2\cos\left(\frac{\pi}{16}\right),
\end{aligned}$$

hiszen

$$\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \qquad \boxed{1+\cos(\alpha)} = 1+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Így, ha valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n-1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

akkor

$$\boxed{x_n} = \sqrt{2 + x_{n-1}} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Ha tudnánk, hogy a cos függvény folytonos, és ismernénk az átviteli elvet, akkor a következő kijelentést tehetnénk:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 2\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos(0) = 2\cdot 1 = 2.$$

7. Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy $\alpha = 0$ esetén $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így $\lim(x_n) = 0$. Tegyük fel most, hogy $\alpha > 0$ és határozzuk meg a sorozat első néhány tagját! Mivel

$$0 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_1 < x_2 < x_3,$$

így az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Lévén, hogy $x_1 = 0 < \sqrt{\alpha} = x_2$, ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $x_n < x_{n+1}$-ből $\alpha + x_n < \alpha + x_{n+1}$ és így

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} < \sqrt{\alpha + x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy (x_n) felülről korlátos. Olyan $K \in \mathbb{R}$ számot kellene keresni, amelyre $x_1 < K$ és

$$x_n < K \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} < K \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ehhez az

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} < \sqrt{\alpha + K}$$

egyenlőtlenség alapján – elég, ha

$$\sqrt{\alpha + K} < K$$

fennáll. Ez a feltétel az

$$\alpha + K < K^2, \qquad \text{azaz az} \qquad \alpha < K^2 - K$$

alakba írható, így a

$$K := 1 + \sqrt{\alpha}$$

választás megfelelő. A sorozat tehát konvergens. Legyen $A := \lim(x_n)$, ekkor

$$\alpha = \lim(x_{n+1}) = \sqrt{\alpha + A}\,,$$

ahonnan $\alpha > 0$ miatt

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$$

következik.

Megjegyzés. A sorozat n-edik tagjának és határértékének eltérésére a következő, ún. hibabecslést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\left|x_n - A\right| &= \left|\sqrt{\alpha + x_{n-1}} - \sqrt{\alpha + A}\right| = \left|\sqrt{\alpha + x_{n-1}} - \sqrt{\alpha + A}\right| \cdot \frac{\sqrt{\alpha + x_{n-1}} + \sqrt{\alpha + A}}{\sqrt{\alpha + x_{n-1}} + \sqrt{\alpha + A}} = \\
&= \frac{|x_{n-1} - A|}{\sqrt{\alpha + x_{n-1}} + \sqrt{\alpha + A}} < \frac{|x_{n-1} - A|}{\sqrt{\alpha + A}} = \frac{|x_{n-1} - A|}{A} < \\
&< \frac{\left|x_{n-2} - A\right|}{A^2} < \quad \ldots \quad < \frac{\left|x_1 - A\right|}{A^n} = \frac{1}{A^{n-1}}.
\end{aligned}$$

8. Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy ha $\alpha = 0$, akkor bármel $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n = 0$, így $\lim\,(x_n) = 0$. Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \alpha < \alpha + \alpha^2 = x_2$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel $x_0 = 0 < \alpha = x_1$, ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $x_n < x_{n+1}$-ből

$$0 < x_n^2 < x_{n+1}^2 \qquad \text{és így} \qquad x_{n+1} = \alpha + x_n^2 < \alpha + x_{n+1}^2 = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n < A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n < A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim\left(\alpha + x_n^2\right) = \alpha + A^2.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt

$$A = \alpha + A^2,$$

amiből A-ra

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

adódik. Nyilvánvaló, hogy

$$A \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért a fenti A-k esetén csak az

$$A = \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

érték jön szóba. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$x_0 = 0 < \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2} = A$$

triviálisan igaz. Ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \alpha + x_n^2 \leq \alpha + A^2 = A.$$

Összefoglalva tehát, $\alpha \leq \dfrac{1}{4}$ esetén az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ esetben (x_n) nem kornvergens, így (szigorú) monotonitása miatt nem is korlátos, következésképen $\lim(x_n) = +\infty$.

9. **1. lépés.** Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = \alpha$, és így

$$\alpha = 3 - \frac{2}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \in \{2, 1\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 3$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n > 2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 3 > 2$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n > 2$, akkor

$$x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n} > 3 - \frac{2}{2} = 3 - 1 = 2.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ezt teljes is indukcióval igazoljuk. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = 3 > \frac{7}{3} = x_1;$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $2 < x_{n+1} < x_n$, akkor

$$x_{n+2} = 3 - \frac{2}{x_{n+1}} > 3 - \frac{2}{x_n} = x_{n+1}.$$

4. lépés. Mivel a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtában tehát (a_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = 2.$$

Megjegyzés. A sorozat első néhány

$$x_1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}, \quad x_2 = 3 - \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{15}{7}, \quad x_3 = 3 - \frac{2}{\frac{15}{7}} = \frac{31}{15}, \quad x_4 = 3 - \frac{2}{\frac{31}{15}} = \frac{63}{31}, \quad x_5 = 3 - \frac{2}{\frac{63}{31}} = \frac{127}{63}.$$

tagjának meghatározásával sejthető, hogy

$$x_n = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ami teljes indukcióval könnyen igazolható. Valóban,

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = 3 = \frac{4-1}{2-1} = \frac{2^{0+2}-1}{2^{0+1}-1};$$
- ha pedig valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén
$$x_n = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1},$$
akkor
$$x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n} = 3 - 2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}-1} = \frac{3\cdot 2^{n+2}-3-2^{n+2}+2}{2^{n+2}-1} = \frac{2\cdot 2^{n+2}-1}{2^{n+2}-1} = \frac{2^{n+3}-1}{2^{n+2}-1}.$$

10. A sorozat első néhány tagját meghatározva –

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 2, \qquad x_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 0,\dot{6}, \qquad x_3 = \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

–látható, hogy (x_n) nem monoton. További tagokat kiszámítva –

$$\begin{aligned}
x_4 &= \tfrac{2}{1+\frac{6}{5}} &= \tfrac{10}{11} &= 0,\dot{9}\dot{0},\\
x_5 &= \tfrac{2}{1+\frac{10}{11}} &= \tfrac{22}{21} &\approx 1,0476,\\
x_6 &= \tfrac{2}{1+\frac{22}{21}} &= \tfrac{42}{43} &\approx 0,9767,\\
x_7 &= \tfrac{2}{1+\frac{42}{43}} &= \tfrac{86}{85} &\approx 1,0118,\\
x_8 &= \tfrac{2}{1+\frac{86}{85}} &= \tfrac{170}{171} &\approx 0,9942,\\
x_9 &= \tfrac{2}{1+\frac{170}{171}} &= \tfrac{342}{341} &\approx 1,0029
\end{aligned}$$

– sejthető, hogy

1° a páros indexű tagok 1-nél kisebbek, a páratlan indexűek pedig 1-nél nagyobbak:

$$x_n = x_{2k} < 1 \quad \text{és} \quad x_n = x_{2k+1} > 1 \qquad (k \in \mathbb{N});$$

2° a páros indexű (x_{2k}) részsorozata szigorúan monoton növekedő, a páratlan indexű (x_{2k+1}) részsorozat pedig szigorúan monoton csökkenő:

$$(x_{2k}) \uparrow \qquad \text{és} \qquad (x_{2k+1}) \downarrow .$$

Biz. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_{n+2} = \frac{2}{1 + x_{n+1}} = \frac{2}{1 + \frac{2}{1+x_n}} = 2 \cdot \frac{x_n + 1}{x_n + 3}, \tag{27}$$

ezért

$$x_{n+2} - x_n = 2 \cdot \frac{x_n + 1}{x_n + 3} - x_n = \frac{(x_n + 2)(1 - x_n)}{x_n + 3}.$$

Ha tehát

- n páros: $n = 2k$, akkor (27) következtében $1 - x_{2k} > 0$, tehát

$$(x_{2k}) \uparrow \ \text{és felülről korlátos} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergens;} \quad A := \lim(x_{2k});$$

- n páratlan: $n = 2k + 1$, akkor (27) következtében $1 - x_{2k+1} < 0$, tehát

$$(x_{2k+1}) \downarrow \ \text{és alulról korlátos} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergens;} \quad B := \lim(x_{2k+1}).$$

Mindez azt jelenti (vö. (27)), hogy

$$A = 2 \cdot \frac{A + 1}{A + 3} \qquad \text{és} \qquad B = 2 \cdot \frac{B + 1}{B + 3}.$$

Mivel valamely $\xi \in \mathbb{R}$ számra

$$\xi = 2 \cdot \frac{\xi + 1}{\xi + 3} \iff \xi^2 + 3\xi = 2\xi + 2 \iff \xi^2 + \xi - 2 = 0 \iff \xi_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \in \{-2; 1\}$$

és (x_n) nemnegatív tagú sorozat (**HF**. bizonyítani teljes indukcióval), ezért $A = B = 1$, azaz $(x_n$ konvergens és $\lim(x_n) = 1$.

Házi feladatok

Feladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $x_n := \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} \quad (n \in \mathbb{N});$

   (b) $x_n := \left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^{n-5} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

   (c) $x_n := \left(\dfrac{3n+3}{2n+4}\right)^{n} \quad (n \in \mathbb{N});$

   (d) $x_n := \left(\dfrac{2n+3}{3n+4}\right)^{n} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

   (e) $x_n := \left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)^{2n^2+4n} \quad (n \in \mathbb{N});$

   (f) $x_n := \left(1+\dfrac{1}{2^n-1}\right)^{2^{n+2}+3} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

2. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $x_0 := \sqrt{3},\ \ x_{n+1} := \sqrt{3+2x_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

   (b) $x_0 := 0,\ \ x_{n+1} := \dfrac{x_n^3+1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

3. Igazoljuk, hogy bármely $\alpha \in [0,1]$ esetén az

$$x_0 := \frac{\alpha}{2}, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^2+\alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   sorozat konvergens, majd számítsuk ki a határértékét!

Útm.

1. (a) Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $n \longrightarrow \infty$ határátmenetben

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+4+1} = \\
&= \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+4} \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) = \left(\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) = \\
&= \left(\left(\frac{3n+2-1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) = \left(\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) \longrightarrow \\
&\longrightarrow \frac{1}{e^2} \cdot 1 = \frac{1}{e^2}.
\end{aligned}
$$

(b) Mivel az $n \longrightarrow \infty$ határátmenetben

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{3}{2}}{n+\frac{1}{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}{n+\frac{1}{3}}\right)^n = \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}}{n+\frac{1}{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(1+\frac{7}{6n+2}\right)^n = \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sqrt[6]{\left(1+\frac{7}{6n+2}\right)^{6n+2} \cdot \left(1+\frac{7}{6n+2}\right)^{-2}} \longrightarrow 0 \cdot \sqrt[6]{e^7 \cdot 1^{-2}} = 0
\end{aligned}
$$

és

$$
\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^{-5} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \qquad (n \longrightarrow \infty),
$$

ezért

$$
\lim(x_n) = 0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = 0.
$$

(c) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \left(\frac{3n+3}{2n+4}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-2} \longrightarrow +\infty \qquad (n\to\infty).$$

(d) Minden n indexre

$$x_n = \left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{n+3/2}{n+4/3}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1+\frac{1/6}{n+4/3}\right)^{n+4/3} \left(1+\frac{1/6}{n+4/3}\right)^{-4/3} \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

(e) Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)^{2n^2+4n} = \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} \longrightarrow e \qquad (n\to\infty)$$

(f) Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$2^{n+2}+3 = 2^2\cdot 2^n + 3 = 4\cdot 2^n - 4 + 7 = 4\cdot(2^n-1)+7,$$

ezért

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^{2^{n+2}+3} = \left(\left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^{2^n-1}\right)^4 \cdot \left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^7 \longrightarrow e^4\cdot 1^7 \quad (n\to\infty).$$

2. (a) **1. lépés.** A sorozat első két tagját meghatározva:

$$x_0 = \sqrt{3} < \sqrt{3+2\sqrt{3}} = x_1,$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Az iméntiek miatt elég azt igazolnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is teljesül. Valóban $x_n < x_{n+1}$-ből

$$3 + 2x_n < 3 + 2x_{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n} < \sqrt{3 + 2x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik.

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \sqrt{3 + 2A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 - 2A - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1 + \sqrt{1 + 3} = 3.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért ha felülről korlátos, akkor a 3 egy felső korlátja is. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén $x_0 = \sqrt{3} < 3$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n < 3$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n} < \sqrt{3 + 2 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3.$$

4. lépés. Midez azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 3$.

(b) **1. lépés.** A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{9}{16}$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_0 < \frac{1}{2} = x_1,$$

ezért elég azt igazolnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is teljesül. Valóban $x_n < x_{n+1}$-ből

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{2} < \frac{x_{n+1}^3 + 1}{2} = x_{n+2}$$

következik.

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^3 + 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0.$$

Felhazsnálva az 1. gyakorlaton tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ számokra bizonyított (**??**) azonosság

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

speciális esetét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A^3 - 2A + 1 &= A^3 - 1 - 2A + 2 = A^3 - 1^3 - 2(A-1) = \\ &= (A-1)(A^2 + A + 1) - 2(A-1) = (A-1)(A^2 + A - 1), \end{aligned}$$

következésképpen

$$A = \frac{A^3+1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \left\{1, \; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Mivel $x_0 = 0$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért a $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ szám nem lehet (x_n) határértéke.

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az

$$A = 1 \qquad \text{és} \qquad A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

értékek közül

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$$

miatt csak az

$$A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

érték jöhet szóba. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$x_0 = 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = A$$

triviálisan igaz. Ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3+1}{2} \leq \frac{A^3+1}{2} = A.$$

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. **1. lépés.** Mivel

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}+\alpha\right) = \frac{\alpha^2+4\alpha}{8} > \frac{4\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2} = x_0,$$

ezért sejthető, hogy (x_n) szigorúan monoton növekedő. Az iméntiek miatt elég belátni, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor $0 < x_{n+1} < x_{n+2}$. Valóban, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_n^2+\alpha}{2} < \frac{x_{n+1}^2+\alpha}{2} = x_{n+2}.$$

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^2+\alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2-2A+\alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = A_\pm := 1 \pm \sqrt{1-\alpha}.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az A_+ és A_- értékek közül $0 \leq A_- \leq A_+$ miatt miatt csak az

$$A_- = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

érték jöhet szóba ($\alpha = 1$ esetén persze $A_- = A_+$). Világos, hogy

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha + A_-^2}{2} = A_-;$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq A_-$, akkor
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+\alpha}{2} \leq \frac{(A_-)^2+\alpha}{2} = A_-.$$

Következésképpen (x_n) felülről korlátos.

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = 1 - \sqrt{1 - \alpha}.$$

7. gyakorlat (2025. március 26.)

Szükséges ismeretek.

- Mi a végtelen sor definíciója?
- Mit jelent az, hogy a $\sum(a_n)$ végtelen sor konvergens, és hogyan értelmezzük az összegét?
- Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}(q^n)$ geometriai sor konvergenciájáról?
- Mi a teleszkopikus sor, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?
- Mi a harmonikus sor, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?
- Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum(a_n)$ sor konvergens? (A válaszát indokolja meg!)

Órai feladatok

Feladat. Egy labdát $a > 0$ méter magasból a földre ejtünk. Tudjuk, hogy ha a labdát $h > 0$ magasságból ejtjük le, akkor rh magasságig pattan vissza, ahol $0 < r < 1$. Határozzuk meg a labda által megtett teljes függőleges irányú távolságot!

Útm. Az első visszapattanásig a labda tömegközéppontja a függőleges irányú távolságot, a másodikig $a + 2ra$ függőleges irányú távolságot, a harmadikig, $a + 2ra + 2r^2a$ függőleges irányú távolságot, ill. az n-edig visszapattanásig a labda

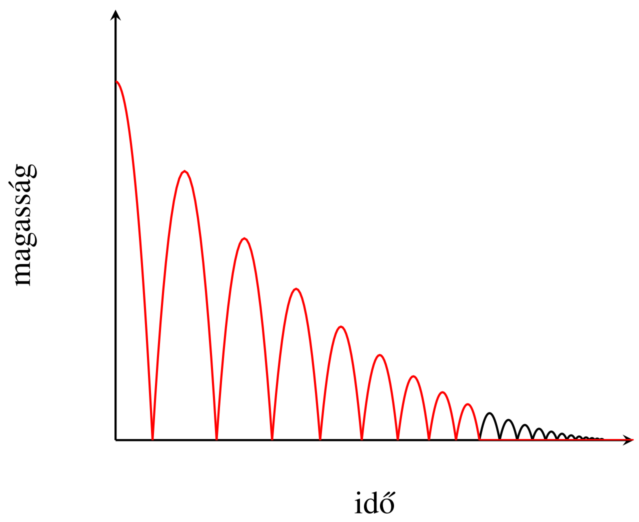
$$s_n := a + 2ar + 2ar^2 + \ldots + 2ar^{n-1}$$

függőleges irányú távolságot tesz meg. Mivel

$$s_n = a + 2a \cdot \left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right) \overset{(7)}{=} a + 2a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az (s_n) sorozat konvergens, így labda által megtett teljes függőleges irányú távolság:

$$\lim(s_n) = a + 2a \cdot \frac{r}{1 - r} = a \cdot \frac{1 + r}{1 - r}.$$

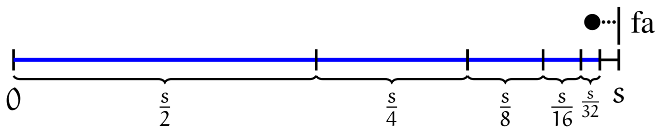


Az összeadást eddig véges sok tag esetén értelmeztük. Mint ahogy azt a fenti feladatok is mutatják, célszerű mindkét műveletet kiterjeszteni végtelen sok tagra. A követezőkben – a határérték fogalmára támaszkodva – elvégezzük ezt a kiterjesztést, bevezetve a végtelen sor fogalmát, és megvizsgáljuk, hogy a véges összegekre ismert számolási szabályok igazak-e a kiterjesztett esetekben.

A végtelen fogalma és ehhez kapcsolódva a végtelen összegek problémaköre hosszú időn át épült be a matematikába. Végtelen összegek már az ókori görögöknél is megjelentek, pl.

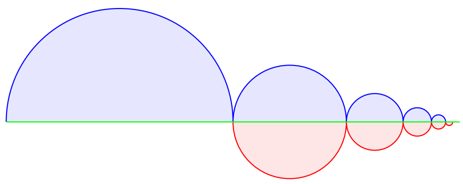
- Zénón (i.e. 490 — 430) híres paradoxonjai:

    1. a fának hajított kő:

    A megtett távolság tart s-hez

    2. Akhilleusz és a teknős:

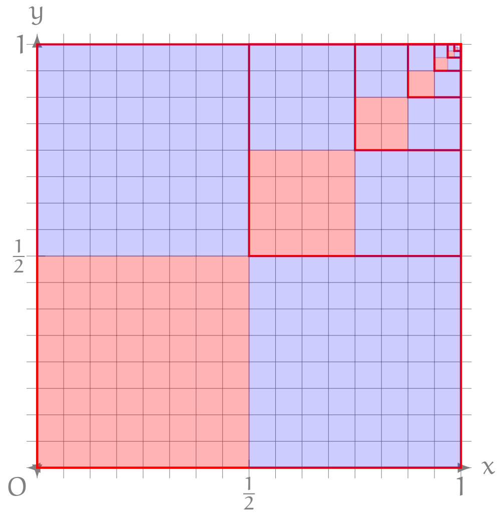
- Archimédesz (i.e. 287-252) összegzett először végtelen sort a matematika történetében. Az alábbi ábrán a piros színnel megjelölt négyzetek területének összege:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots,$$

aminek eredményeképp az

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

értéket kapta.



Emlékeztető.

1° Adott $(x_n):\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ sorozat esetén az

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n}x_k \qquad (n\in\mathbb{N}_0),$$

azaz az

$$\begin{aligned}
s_0 &:= x_0,\\
s_1 &:= x_0+x_1,\\
s_2 &:= x_0+x_1+x_2,\\
&\ \vdots\\
s_n &:= x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n \quad (n\in\mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

sorozatot **végtelen numerikus sor**nak vagy végtelen számsornak (röviden: **végtelen sor**nak vagy egyszerűen csak **sor**nak) neveztük, és a $\sum\limits_{n=0}(x_n):=\sum(x_n):=(s_n)$ szimbólummal jelöltük. Az s_n a $\sum(x_n)$ végtelen sor n**-edik részletösszege**, x_n pedig a $\sum(x_n)$ végtelen sor n**-edik tag**ja.

2° Azt mondtuk, hogy a $\sum(x_n)$ konvergens, ha részletösszegeinek a sorozata konvergens, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n:=\lim(s_n)=A\in\mathbb{R}.$$

Az A számot a $\sum(x_n)$ **végtelen sor összegé**nek neveztük.

3° Ha $\sum(x_n)$ divergens, azaz (s_n) divergens, akkor $\lim(s_n)\in\{-\infty,+\infty\}$ esetén azt mondtuk, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sor összege $+\infty$, ill. $-\infty$, és erre a

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n:=+\infty, \qquad \text{ill. a} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}x_n:=-\infty$$

jelölést használtuk.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorösszegeket, amennyiben azok léteznek!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$.

Útm.

1. Mivel

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right), \end{aligned}$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2n+1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

3. Mivel

$$\frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right\} = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3n+1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2} = \frac{1}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti feladatok megoldása során többször alkalmaztuk a parciális törtekre való bontás módszerének alábbi speciális esetét: adott $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ számokhoz meghatároztunk olyan $p, q \in \mathbb{R}$

számokhoz, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{a, b\}$ estén

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)} = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b}$$

teljesül. Ez többféleképpen is megtehető:

1. módszer. Mivel

$$(x-a)-(x-b) = b-a,$$

ezért bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{a, b\}$ estén

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{b-a}\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{b-a}\cdot\frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{b-a}\cdot\left\{\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right\},$$

tehát

$$p := -\frac{A}{b-a} = \frac{A}{a-b}, \qquad \text{ill.} \qquad q := \frac{A}{b-a}$$

jó választás. Ez a módszernek előnyei közé sorolható az, hogy lényegesen kevesebb számolással jár, kisebb az esélye a számolási hibának, továbbá néhány példa megoldása után igen könnyű arra rájönni, hogy a felbontást hogyan lehet akár számolás nélkül „ránézésre" elvégezni.

2. módszer. Bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{a, b\}$ estén

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)} =: \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} = \frac{p(x-b)+q(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{(p+q)x-pb-qa}{(x-a)(x-b)},$$

így

$$0 = p+q \quad \text{és} \quad A = -pb-qa, \qquad \text{azaz} \qquad p = \frac{A}{a-b},\ q = \frac{A}{b-a}.$$

Emlékeztető. A $\sum_{k=0}\left(\frac{1}{k!}\right)$ konvergens sor összegére

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\} = e$$

teljesül.

Feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=0}\left(\frac{n^2+3n}{(n+2)!}\right)$$

sor konvergens, majd számítsuk ki összegét!

Útm. Mivel

$$n^2+3n=n^2+3n+2-2=(n+1)(n+2)-2 \qquad (n\in\mathbb{N}_0),$$

ezért

$$\frac{n^2+3n}{(n+2)!}=\frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+2)!}=\frac{1}{n!}-\frac{2}{(n+2)!} \qquad (n\in\mathbb{N}_0).$$

Következésképpen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n}{(n+2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=e-2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)=e-2\cdot(e-2)=4-e.$$

Emlékeztető. Ha $a, q\in\mathbb{R}$, úgy

- a
$$\sum_{n=0}(a\cdot q^n)$$
sor pontosan akkor konvergens, ha $|q|<1$ vagy $a=0$:
$$\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot q^n\in\mathbb{R} \qquad\Longleftrightarrow\qquad (q\in(-1,1)\quad\text{vagy}\quad a=0),$$

- $|q|<1$ vagy $a=0$ esetén
$$\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot q^n=a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}q^n=a\cdot\frac{1}{1-q},$$

hiszen az

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n}a\cdot q^k=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+aq^n=a\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n\right) \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

sorozatra (vö. **4. GY**)

$$s_n=a\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\longrightarrow\frac{a}{1-q} \qquad (n\to\infty).$$

Megjegyzés. Ha $q\in(-1,1)$, akkor bármely $m\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$\sum_{n=m}^{\infty}q^n=q^m+q^{m+1}+q^{m+2}+\ldots=q^m(1+q+q^2+\ldots)=q^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}q^n=q^m\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{q^m}{1-q}.$$

Emlékeztető. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra $\alpha A + \beta B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha A + \beta B.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy a következő sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket!

1. $\displaystyle\sum_{n=0} \left(\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{(-3)^n + 4}{5^n}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$;
5. $\displaystyle\sum_{n=10} \left(\frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}}\right)$;
6. $\displaystyle\sum_{n=2} \left(\frac{(-5)^n}{3^{2n}}\right)$.

Útm.

1. Mivel
$$\sum_{n=0} \left(\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}}\right) = 18 \cdot \sum_{n=0} \left(\left(\frac{-3}{8}\right)^n\right),$$
ezért konvergens geometriai sorról van szó:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}} = \frac{18}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 18}{11}.$$

2. Mivel
$$\sum_{n=1} \left(\frac{(-3)^n + 4}{5^n}\right) = \sum_{n=1} \left(\left(\frac{-3}{5}\right)^n\right) + 4 \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right),$$

ezért a sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + 4}{5^n} = \frac{\frac{-3}{5}}{1 + \frac{3}{5}} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8}.$$

3. Világos, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} + \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

4. Látható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{-1/2}{1 + 1/2} = -\frac{1}{3}.$$

5. Világos, hogy

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}} = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1 + 2 \cdot (-2)^n + 4^n}{5^{n+2}} =$$

$$= \sum_{n=10}^{\infty} \left\{ \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^n + \frac{2}{25} \cdot \left(-\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n + \frac{2}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{(1/5)^{10}}{1 - 1/5} + \frac{2}{25} \cdot \frac{(-2/5)^{10}}{1 + 2/5} + \frac{1}{25} \cdot \frac{(4/5)^{10}}{1 - 4/5} =$$

$$= \left(\frac{1}{5} \right)^{12} \cdot \left\{ \frac{5}{4} + 2048 \cdot \frac{5}{7} + 4^{10} \cdot 5 \right\} = \left(\frac{1}{5} \right)^{11} \cdot \frac{7 + 2^{13} + 4^{11} \cdot 7}{28}.$$

6. Mivel

$$\sum_{n=2} \left(\frac{(-5)^n}{3^{2n}} \right) = \sum_{n=2} \left(\left(-\frac{5}{9} \right)^n \right),$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{3^{2n}} = \frac{\left(-\frac{5}{9}\right)^2}{1+\frac{5}{9}} = \frac{5^2}{9^2} \cdot \frac{9}{14} = \frac{25}{126}.$$

Feladat. Tetszőleges $q \in (-1, 1)$ esetén határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$ sorösszeget!

Útm. Legyen $q \in (-1, 1)$ és

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^k = q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \ldots + n \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^k - \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k+1} = \\ &= (q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \ldots + n \cdot q^n) - (q^2 + 2 \cdot q^3 + \ldots + (n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n+1}) = \\ &= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - n \cdot q^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k - n \cdot q^{n+1} = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - n \cdot q^{n+1}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$s_n = q \cdot \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{n}{1-q} \cdot q^{n+1} \longrightarrow \frac{q}{(1-q)^2} \qquad (n \to \infty),$$

ui.

$$\lim(q^n) = 0 = \lim(n \cdot q^n).$$

Igaz tehát a

$$q \in (-1, 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

implikáció.

Például.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3}{4}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(-3)^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{-\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$

Feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum(x_n)$ sor?

1. $x_n := \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0;\ 0 \leq x \in \mathbb{R});$
2. $x_n := (\ln(x))^n \quad (n \in \mathbb{N};\ 0 < x \in \mathbb{R});$
3. $x_n := \left(\dfrac{x^2+1}{3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0;\ x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. A $\sum\limits_{n=0}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (0, 16),$$

és minden $x \in (0, 16)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{x}}{2}} = \frac{2}{4 - \sqrt{x}}.$$

2. A $\sum\limits_{n=1}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$|\ln(x)| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\frac{1}{e}, e\right),$$

és minden $x \in \left(\dfrac{1}{e}, e\right)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}.$$

3. A $\sum_{n=0} (x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{x^2+1}{3}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

és minden $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1-\frac{x^2+1}{3}} = \frac{3}{2-x^2}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $2 \leq p \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in [0,1]$, akkor van olyan

$$x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(együttható)sorozat, hogy

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} =: (0, x_1 x_2 \ldots)_p \,, \tag{28}$$

teljesül!

Útm. Ha

- $\alpha = 1$, akkor az $x_n := p-1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ választás megfelelő:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = (p-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = (p-1) \cdot \frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{p}{p-1} = 1.$$

- $\alpha \in [0,1)$, akkor pl. az

$$x_1 := [p\alpha], \ \ldots, \ x_{n+1} := \left[p^{n+1}\alpha - (p^n x_1 + \ldots + p x_n)\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív megadású sorozatra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} = \alpha.$$

Biz. Ha $x_1 := [p\alpha]$, akkor $x_1 \in \{0, \ldots, p-1\}$ és a $x_1 \leq p\alpha < x_1 + 1$ egyenlőtlenségrendszerből

$$\frac{x_1}{p} \leq \alpha < \frac{x_1+1}{p};$$

ha pedig $x_2 := [p^2\alpha - px_1]$, akkor $x_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$ és a $x_2 \leq p^2\alpha - px_1 < x_2 + 1$ egyenlőtlenségrendszerből

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq \alpha < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2+1}{p^2};$$

így az eljárást folytatva, ha az $x_n \in \{0, \ldots, p-1\}$ számot meghatároztuk, úgy legyen

$$x_{n+1} := \left[p^{n+1}\alpha - p^n x_1 - \ldots - px_n\right].$$

Ekkor $x_{n+1} \in \{0, \ldots, p-1\}$ és

$$s_n := \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \ldots + \frac{x_n}{p^n} \leq \alpha < \frac{x_1}{p} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{x_n+1}{p^n},$$

azaz

$$0 \leq \alpha - s_n \leq \frac{1}{p^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\lim(s_n) = \alpha, \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} = \alpha$$

következik.

Példa. A $(0,1\dot{2}\dot{4})_{10}$ sor reprezentálta szám tehát nem más, mint

$$\begin{aligned}(0,1\dot{2}\dot{4})_{10} &= 0,1 + 0,024 + 0,00024 + 0,0000024 + \ldots = \\ &= 0,1 + 0,024 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{10} + \frac{24}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{123}{990}.\end{aligned}$$

Definíció. A $p := 2$, a $p := 3$, ill. a $p := 10$ esetben a (28) előállítást az x szám **diadikus tört**, **triadikus tört**, ill. **tizedes tört** alakjának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy

1. a padikus törteket a következőképpen szokás osztályozni: az $(0,x_1x_2\ldots)_p$

   - **véges p-adikus tört**, ha alkalmas $M \in \mathbb{N}$ esetén minden $M \leq n \in \mathbb{N}$ inxere $x_n = 0$;
   - **szakaszos végtelen p-adikus tört**, ha alkalmas $M, k \in \mathbb{N}$ esetén minden $M \leq n \in \mathbb{N}$ inxere $x_{n+k} = x_n$:

   $$(0, a_1a_2\ldots a_M b_1b_2\ldots b_k b_1b_2\ldots b_k b_1b_2\ldots b_k\ldots)_p =: (0, a_1a_2\ldots a_M\dot{b}_1b_2\ldots\dot{b}_k)_p.$$

   Pl. $1/3 = (0,\dot{3})_{10}$

- **nemszakaszos végtelen p-adikus tört**, ha végtelen, de nem szakaszos p-adikus tört.

2. Az $\alpha \in (0,1)$ szám pontosan akkor racionális, ha p-adikus tör alakja (véges vagy) végtelen szakaszos.

3. A diadikus törtek fontos szerepet játszanak az informatikában, például a **lebegőpontos számábrázolás**nál. Ennek lényege, hogy a számot egyértelműen felírjuk

$$e \cdot M \cdot 2^k$$

alakban, ahol e a szám előjele, $1/2 \leq M < 1$ és $k \in \mathbb{Z}$. Az M számot (**mantisszát**) úgy tároljuk, hogy a diadikus tört alakjából vesszük az első néhány bitet a legmagasabb helyérték kivételével, mert az úgyis 1. A tárolt bitek száma függ az alkalmazott pontosságtól. Ezzel általában csak egy M-hez közeli diadikus racionális számot tudunk tárolni. Például az $1/10$ számot nem tudjuk pontosan tárolni.

4. ha $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ olyan számok, amelyre $a < b$, akkor az

$$\frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} \tag{29}$$

előállítás a következő algoritmus alkalmazásával könnyen megkapható:

1. lépés. Legyen $x_1 := \left[p \cdot \frac{a}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{a}{b} = x_1 + \frac{m_1}{b}$$

(pa-ban a b megvan x_1-szer és marad m_1).

2. lépés. Legyen $x_2 := \left[p \cdot \frac{m_1}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{m_1}{b} = x_2 + \frac{m_2}{b}$$

(pm_1-ben a b megvan x_2-ször és marad m_2).

3. lépés. Legyen $x_3 := \left[p \cdot \frac{m_2}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{m_2}{b} = x_3 + \frac{m_3}{b}$$

(pm_2-ben a b megvan x_3-szor és marad m_3).

$\vdots$

n. lépés. Legyen $x_n := \left[p \cdot \frac{m_{n-1}}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{m_{n-1}}{b} = x_n + \frac{m_n}{b}$$

(pm_{n-1}-ben a b megvan x_n-szer és marad m_n).

Ha mind az n egyenlőséget rendre az

$$\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots \frac{1}{p^n}$$

számokkal szorozzuk, majd az elsőhöz adjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{x_3}{p^3} + \dots \frac{x_n}{p^n} + \frac{m_n}{p^n b}$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $1 \leq m_n \leq b$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{m_n}{p^n b}\right) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Példák.

1. $\frac{1}{7} = (0,\dot{0}0\dot{1})_2$, ui.

$$\frac{1}{7} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{7} < 1 \ (x_1 := 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{7} < 1 \ (x_2 := 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \ (x_3 := 1) \longrightarrow \frac{1}{7} \text{ (ismétlés)}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$(0,\dot{0}0\dot{1})_2 = \left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6}\right) + \left(\frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{1}{2^9}\right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{7}.$$

2. $\frac{2}{3} = (0,2\dot{0})_3$, ui.

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{6}{3} = 2 + 0 \ (x_1 := 2) \xrightarrow{\times 3} 0 \ (x_2 := 0) \xrightarrow{\times 3} 0 \text{ (ismétlés)}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$(0,2\dot{0})_3 = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}.$$

3. $\frac{2}{11} = (0,\dot{1}\dot{8})_{10}$, ui.

$$\frac{2}{11} \xrightarrow{\times 10} \frac{20}{11} = 1 + \frac{9}{11} \ (x_1 := 1) \xrightarrow{\times 10} \frac{90}{11} = 8 + \frac{2}{11} \ (x_2 := 8) \longrightarrow \frac{2}{11} \text{ (ismétlés)}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$(0,\dot{1}\dot{8})_{10} = \left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)+\left(\frac{1}{10^3}+\frac{8}{10^4}\right)+\left(\frac{1}{10^5}+\frac{8}{10^6}\right)+\ldots =$$

$$= \frac{18}{10^2}+\frac{18}{10^4}+\frac{18}{10^6}+\ldots = 18\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n = 18\cdot\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} =$$

$$= 18\cdot\frac{1}{10^2}\cdot\frac{10^2}{99} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

Feladat. Adjuk meg a $(0,1\dot{4})_6$ szám diadikus tört alakját!

Útm. Mivel

$$(0,1\dot{4})_6 = \frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}+\frac{4}{6^3}+\frac{4}{6^4}+\ldots = \frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}\cdot\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}\cdot\frac{6}{5} = \frac{1}{6}+\frac{4}{30} = \frac{90}{30} = \frac{3}{10},$$

és

$$\frac{3}{10} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{10} = \frac{3}{5} < 1\ (x_1 := 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{5} = 1+\frac{1}{5}\ (x_2 := 1) \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{5} < 1\ (x_3 := 0) \xrightarrow{\times 2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \frac{4}{5} < 1\ (x_4 := 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{8}{5} = 1+\frac{3}{5}\ (x_5 := 1)\ \text{(ismétlés)},$$

ezért

$$(0,1\dot{4})_6 = (0,0\dot{1}00\dot{1})_2.$$

Házi feladatok

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorösszegeket, amennyiben azok léteznek!

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$;
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}$.
12. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{4-5n+n^2}$;
13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$;
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n(n+1)(n+2)}$;
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!}$.

Útm.

1. Mivel
$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2},$$
ezért
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= 1-\frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

2. Mivel

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

3. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} &= \frac{1}{k(k^2+3k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right), \end{aligned}$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{1}{4}.$$

4. Világos, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots +$$

$$+ (\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$

$$\overset{\text{HF}}{=} \sqrt{n+1} - 1 \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty),$$

így a sor divergens, pontosabban

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim(s_n) = +\infty.$$

5. Nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)= \\
&= (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1})+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\ldots+ \\
&\quad +(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})= \\
&\overset{\text{HF}}{=} 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \quad (n\in\mathbb{N})
\end{aligned}$$

és tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

így a sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\lim(s_n)=1-\sqrt{2}+0=1-\sqrt{2}.$$

6. Mivel

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$\stackrel{\text{HF}}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

7. Mivel

$$(-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} = (-1)^k \frac{k+(k+1)}{k(k+1)} = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}+1\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) =$$

$$\stackrel{\text{HF}}{=} -1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \longrightarrow -1 \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = -1.$$

8. Mivel

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} =$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$\overset{\text{HF}}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}} = 1.$$

9. Mivel

$$\frac{3}{4-5k+k^2} = \frac{3}{(k-1)(k-4)} = \frac{(k-1)-(k-4)}{(k-1)(k-4)} = \frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-1},$$

ezért

$$s_n = \; = \sum_{k=5}^{n} \frac{3}{4-5k+k^2} = \sum_{k=5}^{n} \left(\frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-1} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \ldots +$$

$$= \left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-3}\right) + \left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{4-5n+n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

10. Ha $2^k =: x$, akkor

$$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{(2x+1)-(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1},$$

ezért

$$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1}.$$

Így

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{n-2}+1} - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}\right) + \left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}+1} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

ahonnan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

következik.

11. Mivel

$$\frac{2k-2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2 \cdot \{(k+1)-(k+2)+k\}}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)} - \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} - \frac{2}{k} + \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} = -\frac{1}{k} + \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k+2},$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k} + \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k+2}\right) \overset{\text{HF}}{=} \frac{n^2-n}{2(n+1)(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$$

következik.

12. Mivel
$$\frac{k^2-k-1}{k!}=\frac{k(k-1)-1}{k!}=\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!},$$
ezért
$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k-1}{k!}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!}\right)=\\
&= \left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)+\ldots+\\
&\quad+\left(\frac{1}{(k-4)!}-\frac{1}{(k-2)!}\right)+\left(\frac{1}{(k-3)!}-\frac{1}{(k-1)!}\right)+\left(\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!}\right)=\\
&= \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\longrightarrow 1+1 \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$
ahonnan
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}=2$$
következik.

Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek, és határozzuk meg összegüket!

1. $\displaystyle\sum_{n=10}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^{2n}}\right)$;   2. $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{2\cdot(-1)^n+2^{n+1}}{3^{2n+1}}\right)$;   3. $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2+4n+3}\right)$.

Útm.

1. Mivel
$$\left|\frac{1}{2}\right|<1 \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{1}{3^2}\right|=\left|\frac{1}{9}\right|<1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, melynek összeg:

$$\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^{2n}}\right) = \sum_{n=10}^{\infty}\frac{5}{2^n}+\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{3^{2n}} = 5\cdot\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n =$$

$$= 5\cdot\frac{(1/2)^{10}}{1-1/2}+\frac{(1/9)^{10}}{1-1/9} = \frac{5}{2^9}+\frac{1}{8\cdot 9^9}.$$

2. Mivel

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2\cdot(-1)^n+2^{n+1}}{3^{2n+1}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}\left(\left(\frac{-1}{9}\right)^n\right)+\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

és

$$\left|-\frac{1}{9}\right|<1, \qquad \text{ill.} \qquad \left|\frac{2}{9}\right|<1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, melynek összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n+2^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{-1/9}{1+\frac{1}{9}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2/9}{1-\frac{2}{9}} = -\frac{2}{30}+\frac{4}{21} = \frac{13}{105}.$$

3. Ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+3)-(k+1)}{(k+1)(k+3)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2+4n+3} \right) = (s_n),$$

így $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2+4n+3} \right)$ konvergens, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = \lim(s_n) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 - 0 \right\} = \frac{5}{12}.$$

Feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum (x_n)$ sor?

1. $x_n := (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R});$
2. $x_n := \dfrac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ 1 \neq x \in \mathbb{R});$
3. $x_n := \dfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. A $\sum(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x = 0$ vagy

$$\frac{1}{|1+x|} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty).$$

A sor összege pedig:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \\ x \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = x + 1 & (x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)). \end{cases}$$

2. Világos, hogy $x = 0$ esetén a sor konvergens. Legyen most $x \neq 0$, így

$$(x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) = x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

tehát a sor pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$ és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0), \\ \\ -1 & (x = 0). \end{cases}$$

3. Mivel bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} = (x+1) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n,$$

ezért a $\sum(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x = -1$ vagy

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 0).$$

Tetszőleges $x \in (-\infty, 0)$ esetén a sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} = (x+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = (x+1) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1-x^2}{2}.$$

4. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{n=1} \left(\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}\right) = (1+x^2) \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n\right)$$

konvergens mértani sor, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}} = (1+x^2) \cdot \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = x^2 \cdot (1+x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0} \left(\frac{1}{k!}\right)$ konvergens sor összegére

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\} = e$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Tudjuk, hogy a

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

sorozatok konvergensek és $\lim(e_n) = e$.

2. lépés. Világos, hogy

$$e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 = 1 + 1 = s_1, \qquad e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = s_2,$$

továbbá tetszőleges $3 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén és a binomiális tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
e_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}=\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}=\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left\{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\}=\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=s_n,
\end{aligned}
$$

ezért

$$
e_n\le s_n \qquad (n\in\mathbb{N}),
$$

ahonnan

$$
e=\lim(e_n)\le\lim(s_n)
$$

következik.

3. lépés. Ha $m,n\in\mathbb{N}$: $2\le m<n$, akkor

$$
\begin{aligned}
e_n &= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)>2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\\
&\xrightarrow{n\to\infty} 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{j}{n}\right)=2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}1=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}=s_m,
\end{aligned}
$$

így a fentiek figyelembevételével azt kapjuk, hogy tetszőleges $m\in\mathbb{N}$ esetén $e>e_n\ge s_m$, ahonnan

$$
e\ge\lim_{m\to\infty}(s_m)
$$

következik. Ez pedig a korábbiak fényében azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\lim(s_n)=e.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy $e\notin\mathbb{Q}$, továbbá fennáll a

$$2.71825<e<2.71829$$

becslés!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy ha

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\qquad (n\in\mathbb{N}_0),$$

akkor bármely $n\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned}
e-s_n &= e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{k!}=\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\right)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\prod_{j=n+2}^{k}\frac{1}{j}\right)\leq\\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\prod_{j=n+2}^{k}\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left\{1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-n-1}\right\}=\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\\
&= \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Így

$$0 < \theta_n := n{\cdot}n!{\cdot}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \leq \frac{(n+2)\cdot n\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n\cdot n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik.

2. lépés. Ha $e \in \mathbb{Q}$, akkor alkalmas $m, n \in \mathbb{N}$ számokkal $e = \frac{m}{n}$. Így a fentiek alapján van olyan

$$0 < \theta_n < 1,$$

hogy

$$\frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n\cdot n!}.$$

Innen

$$\theta_n = \frac{m\cdot n\cdot n!}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot n!}{k!} = m\cdot n! - n\cdot \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=k+1}^{n} j \in \mathbb{Z}$$

ami nem lehetséges. Következésképpen $e \notin \mathbb{Q}$.

3. lépés. Az $n = 7$ esetben

$$0 < e - s_7 < \frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{7\cdot 5040} < 0.00003,$$

azaz

$$s_7 < e < s_7 + 0,00003.$$

Mivel

$$s_7 = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} =$$

$$= \frac{5040+5040+2520+840+210+42+7+1}{5040} = \frac{13700}{5040} = \frac{685}{252} = 2.71825\ldots$$

így

$$2.71825 < s_7 < e < s_7 + 0.00003 < 2.71826 + 0.00003 = 2.71829.$$

Emlékeztető. Tegyük fel, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in (0, +\infty)$. Ekkor igaz az

$$\sum (x_n) \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (s_n) \text{ korlátos}$$

ekvivalencia, hiszen ebben az esetben (s_n) szigorúan monoton növekedő:

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+1} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen

- a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n}\right)$$
harmonikus sor divergens, hiszen, ha $\nu_n := 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor
$$\begin{aligned} s_{\nu_n} &= s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+n}{2}, \end{aligned}$$
azaz a részletösszegek
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozata nem korlátos.

- a
$$\sum_{n=0} \left(\frac{1}{n!}\right)$$
sor konvergens, hiszen a részletösszegek
$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozata (vö. 4. **GY**) korlátos:
$$2 \leq s_n < 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha

1. $\alpha > 1$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \boxed{<} \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} = \boxed{\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}};$$

2. $\alpha \leq 1$, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy igaz a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} > c$$

becslés!

Útm.

1. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Ha $n \in \mathbb{N}$: $n < 2^{m+1}$, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad &\leq \quad 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right) < \\
&< \quad 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^\alpha}\right) = \\
&= \quad 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^{\alpha-1}} =
\end{aligned}$$

$$= \quad 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m}=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}=$$

$$= \quad \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}\left\{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}\right\}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $n < 2^{m+1}$, ezért

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\alpha}}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

2. Ha $N \in \mathbb{N}$ és $n := 2^{2N+1}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} \quad = \quad 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\left(\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{5^{\alpha}}+\frac{1}{6^{\alpha}}+\frac{1}{7^{\alpha}}+\frac{1}{8^{\alpha}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{N}+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(2^{N}+1)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(2^{N+1})^{\alpha}}\right)\geq$$

$$\geq \quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{N}+1}+\frac{1}{2^{N}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{N+1}}\right)\geq$$

$$\geq \quad 1+\frac{1}{2}+\left\{2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{N}\cdot\frac{1}{2^{N+1}}\right\}=\frac{3}{2}+\frac{N}{2}=\frac{3+N}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor van olyan N, ill. $n := 2^{2N+1}$, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\alpha}}>\frac{3+N}{2}>c.$$

Mivel $\frac{1}{n^\alpha} > 0$, ezért igaz az

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1}.$$

ekvivalencia (pozitív tagú sorozat generálta sor pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata korlátos).

8. gyakorlat (2025. április 2.)

Szükséges ismeretek.

- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumokat!
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritériumot!
- Mit jelent az, hogy a Cauchy-féle gyökkritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt!
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó d'Alembert-féle hányadoskritériumot!
- Mit jelent az, hogy a d'Alembert-féle hányadoskritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt!
- Mik a Leibniz-típusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?
- Mit értünk egy $[0, 1]$-beli szám diadikus tört alakján?

Órai feladatok

Emlékeztető (végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium. A $\sum(x_n)$ sor pontosan akkor konverens, ha

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,N\in\mathbb{N}\,\forall\,m,n\in\mathbb{N}: \qquad \left(m>n\geq N \quad\Longrightarrow\quad |s_m-s_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}x_k\right|<\varepsilon\right).$$

Példák.

1. Az
$$s_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \qquad (n\in\mathbb{N})$$
sorozat esetében ha $m,n\in\mathbb{N}$: $m>n$, akkor

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m-1}\right)+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ $\Big/ N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Big/$, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$, akkor $|s_m - s_n| < \varepsilon$, azaz (s_n) Cauchy-féle. Következésképpen a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

sor konvergens.

2. Az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében

$$|s_{2n} - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

így, ha $\varepsilon := \frac{1}{2}$, akkor minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$, hogy

$$|s_m - s_n| \geq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy (s_n) nem Cauchy-féle. Következésképpen az

$$\sum\left(\frac{1}{n}\right)$$

sor divergens.

Feladat. A Cauchy-kritériumban alkalmazásával vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

1. $\sum_{n=1}\left(\frac{n-1}{n!}\right)$;
2. $\sum_{n=1}\left(\frac{2n-1}{(2n)!}\right)$;
3. $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Útm.

1. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

következtében

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{k-1}{k!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right)\right| = \left|\frac{1}{n!} - \frac{1}{m!}\right| < \frac{1}{n!}.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n! > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát (s_n) Cauchy-féle, így a $\sum_{n=1}\left(\frac{n-1}{n!}\right)$ sor konvergens.

2. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$\frac{2k-1}{(2k)!} = \frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{(2k)!} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

következtében

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{2k-1}{(2k)!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{(2k)!}\right)\right| < \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2n+1)! > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát (s_n) Cauchy-féle, így a $\sum_{n=1}\left(\frac{2n-1}{(2n)!}\right)$ sor konvergens.

3. Mivel bármely $k, n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt{n+1} < n+k$, így $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n+k}$, és ha $m := 2n > n$,

akkor tetszőleges $N \in \mathbb{N}$, illetve $N \le n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|s_{2n} - s_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}\right| > \left|\frac{1}{n+1+\ldots+\frac{1}{2n}}\right| > \frac{1}{2}.$$

Következésképpen (s_n) nem Cauchy-féle, így a $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sor divergens.

Megjegyezzük, hogy ha a Cauchy-kritériumban $n := m-1$ akkor azt kapjuk, hogy $|s_m - s_n| = |x_m|$. Így a $\sum(x_n)$ sor konvergenciájának szükséges feltételét kapjuk:

$$\sum(x_n) \quad \text{konvergens} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(x_n) = 0$$

vagy

$$(x_n) \quad \text{nem nullsorozat} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum(x_n) \quad \text{divergens}.$$

Megjegyezzük, hogy ez csak szükséges, de nem ekégséges feltétele a konvergenciának, azaz abból, hogy $\lim(x_n) = 0$ **nem következik**, hogy $\sum(x_n)$ konvergens:

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad \text{de} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok divergensek!

1. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n}{3n-1}\right)$;
2. $\sum\limits_{n=1}(\sqrt[n]{a}) \quad (a \in (0,+\infty))$;
3. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)$;
4. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right)$;
5. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n}{a^n}\right) \quad (0 < |a| \le 1)$;
6. $\sum\limits_{n=1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}\right)$.

Útm.

1. $\lim\left(\frac{n}{3n-1}\right) = \frac{1}{3} \neq 0$, így a kérdéses sor divergens.
2. $\lim(\sqrt[n]{a}) = 1 \neq 0$, így a kérdéses sor divergens.

3. Mivel

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad (n\in\mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{n^n} < \frac{4}{(n+1)^n} \quad (n\in\mathbb{N}),$$

ezért az

$$x_n := \frac{4^n n!}{n^n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozatra tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$x_n = 4^n\cdot n!\cdot\frac{1}{n^n} < \frac{4\cdot 4^n\cdot n!}{(n+1)^n} = \frac{4^{n+1}n!\cdot(n+1)}{(n+1)^n\cdot(n+1)} = \frac{4^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = x_{n+1},$$

tehát (x_n) pozitív tagú, szigorúan monoton növekedő sorozat, következésképpen nem nullsorozat. Így a kérdéses sor divergens.

4. Az

$$(x_n) := \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right)$$

sorozat nem nullasorozat, sőt nem is konvergens, hiszen

- ha $n=2k$, akkor

$$x_{2k} = \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}} \longrightarrow 1 \qquad (k\to\infty),$$

- ha $n=2k+1$, akkor

$$x_{2k+1} = \frac{-1}{\sqrt[2k+1]{2k+1}} \longrightarrow -1 \qquad (k\to\infty).$$

Ez az jelenti, hogy a kérdéses sor divergens.

5. Mivel

$$\frac{n}{|a|^n} \geq 1 \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

ezért

$$\left(\frac{n}{|a|^n}\right)$$

nem nullsorozat, tehát a kérdéses sor divergens.

6. Világos, hogy

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}\neq 0 \qquad (n\to\infty),$$

tehát a kérdéses sor divergens.

Emlékeztető (öszehasonlító kritérium). Legyen $x, y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

- Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $|x_n| \leq y_n$ és a $\sum\limits_{n=0} (y_n)$ sor konvergens, akkor $\sum\limits_{n=0} (x_n)$ abszolút konvergens (**majoránskritérium**), továbbá
$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$
- Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 \leq y_n \leq x_n$ és a $\sum (y_n)$ sor divergens, akkor $\sum (x_n)$ is divergens (**minoránskritérium**).

Példák.

1. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$2n + 1 \leq 2n + n = 3n, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1}{3n} < \frac{1}{2n+1},$$
ezért a $\sum\left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} \cdot \sum\left(\frac{1}{n}\right)$ sor a $\sum\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ sornak divergens minoránsa.

2. Mivel
$$n^2 - n + 1 \overset{n \in \mathbb{N}}{\geq} n^2 - n \overset{2 \leq n \in \mathbb{N}}{\geq} \frac{n^2}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1}{n^2 - n + 1} < \frac{2}{n^2},$$
ezért a $\sum\left(\frac{2}{n^2}\right) =$ sor a $\sum\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right)$ sornak konvergens majoránsa.

Feladat. Az összehasonlító kritérium segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sorok!

1. $\sum_{n=1} \left(\frac{n^2}{n^3+1} \right)$;
2. $\sum_{n=1} \left(\frac{2n^3-16}{n^5+n} \right)$;
3. $\sum_{n=1} \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \right)$;
4. $\sum_{n=1} \left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n} \right)$;
5. $\sum_{n=0} \left(\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n} \right)$;
6. $\sum_{n=1} \left(\frac{n+2}{\sqrt{n^4+3n^2+2}} \right)$;
7. $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$;
8. $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \right)$.
9. $\sum_{n=1} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} \right)$.

Útm.

1. Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \approx \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{divergens,}$$

ezért a minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n}$$

és a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n} \right)$$

sor divergens, ezért a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

2. Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} = \frac{2-\frac{16}{n^3}}{n^2+\frac{1}{n^2}} \approx \frac{2}{n^2} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \left(\frac{2}{n^2} \right) \quad \text{konvergens,}$$

ezért a majoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2}{n^2}\right)=2\cdot\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

3. Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})}=\frac{1}{2n^{3/2}}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n^{3/2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

4. Mivel nagy $n\in\mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}\approx\frac{2}{\sqrt{n}}$$

ezért a minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni (vö. hiperharmonikus sor konvergencia-kérdése). Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}=\frac{2}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}>\frac{1}{n}\qquad\Longleftrightarrow\qquad 2>\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1},$$

és ez utóbbi igaz, hiszen

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}<\frac{2}{1}=2\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

5. Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}<\frac{4^n+4^n}{5^n}=2\left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

így a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

6. Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n+2}{\sqrt{n^4+3n^2+2}}>\frac{n+2}{\sqrt{(n+2)^4}}=\frac{1}{n+2},$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

7. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n},$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

8. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

így a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

9. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} > \frac{n}{\sqrt{n^3+n+7}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+7n^3}} = \frac{n}{\sqrt{9n^3}} = \frac{1}{3\sqrt{n}} \geq \frac{1}{3n},$$

ezért a harmonikus sor a kérdéses sor divergens minoránsa.

Emlékeztető (Leibniz-kritérium). Legyen

$$0 \leq x_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad (x_n) \searrow .$$

Ekkor

1. igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim(x_n) = 0$$

ekvivalencia;

2. a $\lim(x_n) = 0$ esetben

$$\sum_{n=0}^{2q-1} (-1)^n x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \leq \sum_{n=0}^{2p} (-1)^n x_n \qquad (p, q \in \mathbb{N});$$

és fennáll a

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n x_n \right| \leq x_m \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

hibabecslés.

Feladat. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

$$1.\ \sum_{n=0}\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n^2+1}\right);\qquad 2.\ \sum_{n=0}\left((-1)^{n}\cdot\frac{n}{5n-2}\right).$$

Útm.

1. Ha
$$x_n := \frac{n}{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$
akkor (**HF**) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x_{n+1} < x_n$ és nyilván $\lim(x_n) = 0$, így a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

2. Ha
$$x_n := \frac{n}{5n-2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$
akkor (**HF**) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x_{n+1} < x_n$, de $\lim(x_n) = \frac{1}{5} \neq 0$, így a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Emlkékeztető. Tekintsük az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot.

1. Ha valamely $K \in \mathbb{R}$ és $q \in [0, 1)$ esetén majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ indexre
$$|x_n| \leq K \cdot q^n,$$
akkor a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens (**Cauchy-féle gyökkritérium**).

2. Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \neq 0$ és alkalmas $q \in (0, 1)$ esetén majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ indexre
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q,$$
akkor a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens (**D'Alembert-féle hányadoskritérium**).

Megjegyezzük, hogy

1. a gyök-, ill. hánydoskritérium kiegészítéseként elmondható, hogy ha alkalmas $K > 0$, ill. $q \geq 1$

számok, illetve $N \in \mathbb{N}$ index esetén

$$|x_n| \geq Kq^n \quad (N \leq n \in \mathbb{N}) \qquad \text{vagy} \qquad \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \quad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor a $\sum(x_n)$ sor divergens.

2. sok helyütt gyök-, ill. hányadoskritériumon az alábbi erősebb feltételt szokás érteni. Ha

$$A := \lim(\sqrt[n]{|x_n|}) \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \text{ill.} \qquad A := \lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) \in \overline{\mathbb{R}},$$

úgy

- $A < 1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens;
- $A > 1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Feladat. Vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

1. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\right)$;
2. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$;
3. $\sum\limits_{n=1}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$;
4. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n+3^n}\right)$;
5. $\sum\limits_{n=1}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right)$
6. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^{n}\right)$;
7. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n!}{2^n+1}\right)$;
8. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{(-1)^n\cdot n!}{3n+2}\right)$;
9. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{2n+1}{(-3)^n}\right)$.
10. $\sum\limits_{n=0}\left(\frac{(2n+1)!}{3^{n^2}}\right)$;
11. $\sum\limits_{n=0}\left(\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1}\right)$;
12. $\sum\limits_{n=1}\left(n!\cdot 2^{1-n}\right)$;
13. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{(3n+4)\cdot 5^n}\right)$;
14. $\sum\limits_{n=1}\left(\left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n}\right)$;
15. $\sum\limits_{n=1}\left(\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1}\right)$;
16. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{(2n)!}{n^n}\right)$;
17. $\sum\limits_{n=1}\left(n^{2023}\cdot 2^{-2n}\right)$;
18. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{3^n}{n^n}\right)$;
19. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{n\cdot 3^n}\right)$.

Útm.

1. Legyen

$$x_n := \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)=\frac{1}{3}\cdot\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{3}<1,$$

így a gyökkritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

2. Legyen

$$x_n:=\frac{n^2}{2^n}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

1. módszer a hányadoskritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\longrightarrow\frac{1}{2}<1\qquad(n\to\infty).$$

2. módszer a gyökkritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen

$$\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}<1\qquad(n\to\infty).$$

3. Mivel

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right|}\right)=\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1,$$

ezért a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

4. Mivel

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n+3^n}}\right)=\lim\left(\frac{\sqrt[n]{n}^2}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}\right)=\frac{1^2}{\max\{2,3\}}=\frac{1}{3}<1,$$

ezért a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

5. Mivel

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right|}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^1\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}\longrightarrow\frac{1}{e}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{e}<1\quad(n\to\infty),$$

ezért a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

6. Ha
$$x_n := \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
akkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \frac{1}{e-1}\cdot\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{e-1} > 1,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

7. Ha
$$x_n := \frac{n!}{2^n+1} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
akkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \lim\left((n+1)\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}\right) = \lim\left((n+1)\frac{1+\dfrac{1}{2^n}}{2+\dfrac{1}{2^n}}\right) = +\infty,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

8. Legyen
$$x_n := \frac{(-1)^n\cdot n!}{3n+2} \qquad (n\in\mathbb{N}_0).$$
Ekkor
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)!}{3(n+1)+2}\cdot\frac{3n+2}{n!} = \frac{(n+1)(3n+2)}{3n+2} = n+1 > 1,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

9. Ha
$$x_n := \frac{2n+1}{(-3)^n} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
akkor
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2n+3}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (n\to\infty).$$
Így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

10. Az
$$x_n := \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(2(n+1)+1)!}{3^{(n+1)^2}} : \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{3^{n^2}}{3^{n^2+2n+1}} =$$

$$= \frac{(2n+3)(2n+2)}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \left(2+\frac{3}{n}\right) \cdot \left(2+\frac{2}{n}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (2+0) \cdot (2+0) = 0 \quad (n \to \infty).$$

Mindez a hányadoskritérium következtében azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

11. Legyen

$$x_n := \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n+\frac{1}{n}} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^n \cdot \sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}} \longrightarrow \sqrt[3]{e} \cdot 1 = \sqrt[3]{e} > 1 \qquad (n \to \infty),$$

hiszen

- egyrészt az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^n = \left(\frac{3n+3+1}{3n+3}\right)^n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3} \cdot \left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{-3}} \longrightarrow \sqrt[3]{e \cdot 1}$$

- másrészt pedig

$$\lim\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right) = 1 > 0 \qquad \text{így} \qquad \lim\left(\sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}}\right) = 1.$$

Ezért a gyökkritérium következtében a $\sum(x_n)$ sor divergens.
Megjegyezzük, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n+4}{3n+3} = \frac{3n+3+1}{3n+3} = 1 + \frac{1}{3n+3} > 1, \qquad \text{így} \qquad x_n > 1,$$

ezért $(x_n) \notin \mathfrak{c}_0$, következésképpen a $\sum(x_n)$ sor divergens.

12. Ha
$$x_n := n! \cdot 2^{1-n} = 2 \cdot \frac{n!}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor a sorozatokra vonatkozó hányadoskritérium következtében
$$\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0, \qquad \text{így} \qquad \lim(x_n) = +\infty.$$
Mindez azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor divergens.

13. Ha
$$x_n := \frac{2^{n-1}}{(3n+4)\cdot 5^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2}{5\cdot\sqrt[n]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3n+4}} \longrightarrow \frac{2}{5} < 1 \qquad (n \to \infty),$$
hiszen
$$\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{3n+4} \leq \sqrt[n]{3n+4n} = \sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
következtében
$$\lim(\sqrt[n]{|x_n|}) = \frac{2}{5} < 1.$$
Ez a gyökkritérium következtében azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

14. Ha
$$x_n := \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{n+1}{3n} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1 \qquad (n \to \infty).$$
Következésképpen a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

15. Ha
$$x_n := \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4n} \cdot \left(\frac{n+1/2}{n+1/3}\right)^{4n} \cdot \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor az $n \to \infty$ határátmenetben
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{n+1/3+1/6}{n+1/3}\right)^4 \cdot \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3n+1}} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 1 \cdot 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 < 1.$$
Ez azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

16. Ha

$$x_n := \frac{(2n)!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow (+\infty) \cdot \frac{1}{e} = +\infty > 1.$$

Következésképpen a $\sum(x_n)$ sor divergens.

17. Ha

$$x_n := n^{2024} \cdot 2^{-2n} = n^{2024} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{2024} \cdot \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

A $\sum(x_n)$ sor tehát a gyökkritérium szerint (abszolút) konvergens.

18. Ha

$$x_n := \frac{3^n}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{3}{n} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Így a gyökkritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

19. Ha

$$x_n := \frac{1}{n \cdot 3^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 3} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Így a gyökkritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

Feladat. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum(x_n)$ sor?

1. $x_n := \dfrac{\alpha^n n!}{n^n} \quad (n \in \mathbb{N};\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-e; e\});$
2. $x_n := \dfrac{(\alpha-2)^n}{n+\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N};\ \alpha \in \mathbb{R});$
3. $x_n := \dfrac{n \cdot 2^n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(3\alpha^2+8\alpha+6)^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0;\ \alpha \in \mathbb{R});$
4. $x_n := \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N};\ -2 \neq \alpha \in \mathbb{R});$
5. $x_n := \dfrac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}} \quad (n \in \mathbb{N};\ \alpha \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Legyen
$$x_n := \frac{\alpha^n n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor az $\alpha = 0$ esetén a sor nyilván konvergens, sőt összege: 0. Ha $\alpha \neq 0$, akkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = |\alpha| \cdot \lim\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \frac{|\alpha|}{e}.$$
így a hányadoskritérium erősebb változata szerint a $\sum(x_n)$ sor
   - $|\alpha| < e$, azaz $\alpha \in (-e, e)$ esetén konvergens,
   - $|\alpha| > e$, azaz $\alpha \in (-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$ esetén divergens.

2. Világos, hogy $\alpha = 2$ esetén a sor konvergens és összege 0. Legyen most $2 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor az $n \longrightarrow \infty$ határesetben
$$\begin{aligned}\left|\frac{(\alpha-2)^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n+\sqrt{n}}{(\alpha-2)^n}\right| &= |\alpha-2| \cdot \frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}} = \\ &= |\alpha-2| \cdot \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow |\alpha-2|.\end{aligned}$$

Mivel

$$|\alpha-2|<1 \quad\Longleftrightarrow\quad -1<\alpha-2<1 \quad\Longleftrightarrow\quad 1<\alpha<3,$$

ezért $\alpha\in(1,3)$ esetén a sor konvergens és $\alpha\in\mathbb{R}\setminus[1,3]$ esetén pedig divergens. Az $\alpha=3$ esetén a sor minorálható a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

divergens sorral, hiszen

$$\frac{(3-2)^n}{n+\sqrt{n}}=\frac{1}{n+\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

így a sor divergens. Az $\alpha=1$ esetben pedig a sor a Leibniz-tétel miatt konvergens, hiszen

$$\frac{(1-2)^n}{n+\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}\qquad\text{és}\qquad\frac{1}{n+\sqrt{n}}\searrow 0\quad(n\to\infty).$$

A sor tehát pontosan az $\alpha\in[1,3)$ esetben konvergens.

3. Világos, hogy

$$\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}}\cdot\frac{1}{|3\alpha^2+8\alpha+6|}\longrightarrow\frac{2}{|3\alpha^2+8\alpha+6|}\qquad(n\to\infty)$$

és

$$\frac{2}{|3\alpha^2+8\alpha+6|}<1\qquad\Longleftrightarrow\qquad\alpha\in(-\infty,-2)\cup(-2/3,+\infty).$$

Ha $\alpha\in\{-2;-2/3\}$, akkor

$$\sum(x_n)=\sum\left(\frac{n2^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}\right)=\sum\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

ami divergens. Tehát $\sum(x_n)$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha\in(-\infty,-2)\cup(-2/3,+\infty)$.

4. Ha $\alpha=2$, akkor a sor konvergens. Ha $\alpha\neq 2$, akkor

$$\lim\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\cdot\left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^{n+1}\right|\cdot\left|\frac{2n-1}{(-1)^n}\cdot\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n\right|\right)=\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right|\lim\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)=\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right|.$$

Ha

$$\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right|<1\qquad\Longleftrightarrow\qquad-1<\frac{2-\alpha}{2+\alpha}<1\qquad\Longleftrightarrow\qquad0<\frac{4}{2+\alpha}<2\qquad\Longleftrightarrow\qquad\alpha>0,$$

akkor a sor abszolút konvergens. Ha

$$\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right| > 1, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0),$$

akkor a sor divergens. Ha

$$\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right| = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha = 0,$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1}\right)$$

Leibniz-sort kapjuk, amely konvergens.

5. A konvergencia vizsgálatát a gyökkritérium segítségével végezzük. Mivel bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|} = \frac{|\alpha|^2}{\sqrt[n]{|1+\alpha^{4n}|}} \le \frac{|\alpha|^2}{\sqrt[n]{1}} = |\alpha|^2,$$

így

$$\lim \left(\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|}\right) \le |\alpha|^2 < 1,$$

ha $|\alpha| < 1$. Tehát $|\alpha| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens. Legyen most $|\alpha| > 1$, és alakítsuk át a törtet a következőképpen:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{|\alpha|^{2n}}}{\left|\frac{1}{\alpha^{4n}}+1\right|}} = \frac{\frac{1}{|\alpha|^2}}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\alpha^{4n}}+1\right|}} < \frac{\frac{1}{|\alpha|^2}}{\sqrt[n]{1}} = \frac{1}{|\alpha|^2} < 1,$$

így $|\alpha| > 1$ esetén is

$$\lim \left(\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|}\right) < 1,$$

azaz a sor abszolút konvergens. Ha $|\alpha| = 1$, akkor $\alpha = 1$, ill.$\alpha = -1$. Ebben az esetben a sor nem más mint

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2}\right),$$

ami divergens.

Megjegyezzük, hogy véges összegeket úgy szorzunk össze, hogy az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik minden tagjával és a kapott szorzatokat összeadjuk:

$$(x_0 + \ldots + x_n) \cdot (y_0 + \ldots + y_m) = x_0 y_0 + x_0 y_1 + \ldots + x_0 y_m + x_1 y_0 + \ldots + x_n y_m.$$

Emlékeztető.

- (**Binomiális tétel.**) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

  ahol $0^0 := 1$.

- A $\sum_{n=0} (a_n)$ és a $\sum_{n=0} (b_n)$ sorok **Cauchy-szorzat**ának vagy **diszkrét konvolúció**jának nevezzük a

$$\sum_{n=0} (c_n) =: \sum_{n=0} (a_n) \times \sum_{n=0} (b_n)$$

  sort, ahol

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\
y_0 & x_0y_0 & x_1y_0 & x_2y_0 & x_3y_0 & \ldots \\
y_1 & x_0y_1 & x_1y_1 & x_2y_1 & x_3y_1 & \ldots \\
y_2 & x_0y_2 & x_1y_2 & x_2y_2 & x_3y_2 & \ldots \\
y_3 & x_0y_3 & x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Cauchy-szorzat: c_n olyan $x_i y_j$ szorzatok összege, amelyeknél a két index összege n.

Tétel. Legyen $\sum(x_n)$ és $\sum(y_n)$ konvergens sor,

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Ha

1. (Mertens) valamelyikük abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = A \cdot B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

2. mindegyikük abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk abszolút konvergens.

Példák.

1. Ha $z \in \mathbb{R}$: $|z| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1-2z+z^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Megjegyezzük, hogy ha $z \in \mathbb{R}$: $|z| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

2. Világos, hogy

$$
\begin{aligned}
e\cdot\frac{1}{e} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+1)^n}{n!}=1.
\end{aligned}
$$

3. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{3}{2}\cdot 2=3.$$

Valóban

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}\cdot 2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[3-\frac{2^{n+1}}{3^n}\right]=\\
&=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=3\cdot 2-2\cdot\frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

következésképpen

$$2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}=3\cdot 2\qquad\Longleftrightarrow\qquad 2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

Házi feladatok

Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

(a) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$; (b) $\sum\limits_{n=1} \left(\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}\right)$; (c) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5}\right)$;

(d) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{1}{n^{1+1/n}}\right)$; (e) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{100^n}{n!}\right)$; (f) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}\right)$;

(g) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{3^n\cdot(n+2)!}{(n+1)^n}\right)$; (h) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Útm.

1. Mivel
$$\lim\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)=\frac{1}{3}\neq 0,$$
ezért a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$$
sor divergens.

2. Mivel
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-2}\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\quad e\cdot\frac{1}{(1+0)^2}=e\neq 0\quad (n\to\infty),$$
ezért a
$$\sum_{n=1}\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}\right)$$
sor divergens.

3. Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5} = \frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^4+1}+n^5}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+n^3} \approx \frac{1}{n^3}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

sor konvergens, ezért a majoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5} \leq \frac{3n^2}{n^5} = \frac{3}{n^3}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{3}{n^3}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

4. Mivel $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$, ezért alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexre

$$\sqrt[n]{n} \leq 2 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen

$$\frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2},$$

így a minoránskritérium alkalmazásával látható, hogy a kérdéses sor divergens.

5. Ha

$$x_n := \frac{100^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty),$$

így a hányadoskritérium következményeként a kérdéses sor konvergens.

6. Legyen

$$x_n := \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor hányadoskritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot (n^2+2n+1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 < 1.$$

7. Legyen

$$x_n := \frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor hányadoskritérium következtében a kérdéses sor divergens, hiszen

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{3^{n+1} \cdot (n+3)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot (n+2)!} = 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \\
&= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^n = \\
&= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-2} \longrightarrow 3 \cdot 1 \cdot e^{-1} \cdot 1^{-2} = \frac{3}{e} > 1.
\end{aligned}$$

8. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ezért a kérdéses sor a minoránskritérium következtében divergens.

Feladatok.

1. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(\alpha-2)^n}{n}\right)$$
sor?

2. Igazoljuk, hogy fennáll a
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$$
egyenlőség!

3. Számítsuk ki a
$$\sum_{n=0}\frac{2^n}{n!}\times\sum_{n=0}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$$
Cauchy-szorzatot, majd annak összegét!

4. Adjunk becslést a
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \qquad (n\in\mathbb{N})$$
maradékra!

$$1.\ \ x_k:=\frac{1}{k(k+1)} \quad (k\in\mathbb{N}); \qquad 2.\ \ x_k:=\frac{1}{k^2} \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Útm.

1. Ha $\alpha=2$, akkor a sor nyilvánvalóan konvergens, és az összege 0. Legyen $2\neq\alpha\in\mathbb{R}$ és
$$x_n:=\frac{(\alpha-2)^n}{n} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)=\lim\left(\left|\frac{(\alpha-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(\alpha-2)^n}\right|\right)=|\alpha-2|\cdot\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)=|\alpha-2|.$$

Mindez azt jelenti, hogy a sor

$$|\alpha-2|<1 \quad\iff\quad -1<\alpha-2<1 \quad\iff\quad x\in(1,3)$$

esetén konvergens,

$$|\alpha-2|>1 \quad\iff\quad \alpha\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$$

esetén pedig divergens. Ha $|\alpha-2|=1$, azaz $\alpha\in\{1;3\}$, akkor a következőképpen járunk el:

- $\alpha=1$ esetén a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(\alpha-2)^n}{n}\right)=\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
sor nem más, mint az alternáló harmonikus sor (vö. 4. $\boxed{\textbf{GY}}$), így a Lebniz-kritérium (vö. 10. $\boxed{\textbf{GY}}$) következtében konvergens;
- $x=3$ esetén a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(\alpha-2)^n}{n}\right)=\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)$$
sor nem más, mint a harmonikus sor (vö. 4. $\boxed{\textbf{GY}}$), így divergens.

Következésképpen a kérdéses sor pontosan az $\alpha\in[1,3)$ esetben konvergens.

2. Világos, hogy

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\cdot\frac{1}{2^{n-k}(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{k!(n-k)!}=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot 4^k=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot(1+4)^n=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5/2)^n}{n!}=\sqrt{e^5}.
\end{aligned}$$

3. A Mertens-tétel következtében elmondható, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{2^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}2^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(-1+1)^n = 1.$$

4. (a) $\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1};$

(b) $\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}.$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$x_n, y_n \in (0,+\infty) \quad (n\in\mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \quad \text{korlátos,}$$

akkor igazak az alábbi implikációk!

1. $\sum(y_n)$ konvergens $\implies$ $\sum(x_n)$ konvergens;
2. $\sum(x_n)$ divergens $\implies$ $\sum(y_n)$ divergens.

Útm. Az

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

sorozat korlátossága azt jelenti, hogy van olyan $k>0$, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $x_n\leq ky_n$, így az összehasonlító-kritérium alapján adódik az állítás.

Megjegyzés. Ez a helyzet, ha

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{y_{n+1}}{y_n} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N}),$$

ugyanis ekkor

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} < \frac{x_n}{y_n} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$\frac{x_n}{y_n} < \frac{x_0}{y_0} \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}),$$

azaz $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ korlátos. Így pl., ha

- $1 < \alpha \in \mathbb{R}$ és

$$\boxed{\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N})},$$

  akkor $\sum(x_n)$ konvergens, míg

- $\alpha \leq 1$ és

$$\boxed{\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N})}$$

  esetén $\sum(y_n)$ divergens.

Tétel. Ha

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor a

$$\sum_{n=1}(x_n) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{n=0}(2^n x_{2^n})$$

sorok ekvikonvergensek: egyszerre konvergensek, ill. divergensek (**Cauchy-féle kondenzációs elv**).

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$t_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad S := \lim(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

és

$$T := \lim(t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n},$$

továbbá $m, n \in \mathbb{N}_0$: $m > 1$. Ha

- $n < 2^m$, akkor

$$s_n \leq x_1 + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2^m} + x_{2^m+1} + \ldots + x_{2^{m+1}-1}) \leq x_1 + 2a_2 + \ldots 2^m x_{2^m} = t_m,$$

- míg $n \geq 2^m$ esetén

$$\begin{aligned} s_n &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \ldots + (x_{2^{m-1}+1} + x_{2^{m-1}+2} + \cdots + a_{2^m}) \geq \\ &\geq x_1 + x_2 + 2x_4 + \cdots + 2^{m-1} x_{2^m} = \frac{1}{2}(x_1 + t_m). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy (s_n) és (t_n) ekvikorlátos. Mivel mindkét sorozat monoton növekvő, ezért ekvikonvergensek.

Megjegyzések.

1. Konvergencia esetén

$$S \leq T \leq 2S - x_1 \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{2}(T + y_1) \leq S \leq T.$$

2. $\alpha > 0$ esetén a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

hiperharmonikus sor konvergenciáját vizsgálhatjuk ezzel a kritériumal, ui.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} < +\infty \iff \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n < +\infty \iff 2^{1-\alpha} < 1 \iff \alpha > 1. \end{aligned}$$

Ez esetben

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2},$$

így

$$\frac{1}{2}(T+1) = \frac{1}{2}(T+1) \cdot \frac{2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} - 1}{2^{\alpha-1} - 1} = \frac{2^\alpha - 1}{2^\alpha - 2}.$$

Tehát

$$\boxed{\frac{2^\alpha-1}{2^\alpha-2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{2^\alpha}{2^\alpha-2}}\qquad(\alpha>1).$$

Ez $\alpha\to+\infty$ esetén egyre szűkülő intervallumot jelent:

- $\alpha=2$ esetén $\frac{3}{2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le 2\qquad\left(\text{hiba }\le\frac{1}{2}\right)$,
- $\alpha=3$ esetén $\frac{7}{6}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\le\frac{4}{3}=\frac{8}{6}\qquad\left(\text{hiba }\le\frac{1}{6}\right)$.

A

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^2},\qquad\sum_{n=1}\frac{1}{n^4},\qquad\text{ill. a}\qquad\sum_{n=1}\frac{1}{n^6}$$

stb. sor összege ismert[7], de a

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^3}$$

sor összege nem ismeretes. Az 1978-ban Helsinkiben tartott Matematikai Kongresszuson R. Apéry megmutatta, hogy ez az összeg irracionális.

Megjegyezzük, hogy ha a két sor közül egyik sem abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzat nem feltétlenül lesz konvergens. Divergens sorok Cauchy-szorzata is lehet konvergens, mint ahogy azt az alábbi feladat megoldása mutatja.

Feladat. Mutassuk meg, hogy

1. a $\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ sor konvergens, viszont önmagával vett Cauchy-szorzata divergens;
2. az $1-\sum_{n=1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ és az $1+\sum_{n=1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$ sorok divergensek, de Cauchy-szorzatuk konvergens!

Útm.

[7] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$.

1. A $\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens, továbbá

$$\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\times\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)=\sum_{n=0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)=:$$

$$=:\sum_{n=0}((-1)^n c_n)$$

folytán

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\geq$$

$$\geq\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}\longrightarrow 2\neq 0\quad(n\to\infty).$$

2. Világos, hogy a feladatbeli két sor Cauchy-szorzatára $\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}c_n\right)$, ahol

$$\begin{aligned}
c_n&=\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\ldots-\left(2+\frac{1}{2^2}\right)-\frac{3}{2}=\\
&=2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(1+2+\ldots+2^{n-1})-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\\
&=2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(2^n-1)-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\\
&=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{3}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}c_n\right)=\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$

9. gyakorlat (2025. április 9.)

Szükséges ismeretek.

- Írja le a hatványsor definícióját!
- Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel?
- Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum!
- Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum!
- Definiálja az exp függvényt!
- Definiálja a sin függvényt!
- Definiálja a cos függvényt!

Órai feladatok

Emlékeztető. Legyen

$$x, c \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad a_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

A

$$\sum_{n=0} \left(a_n(x-c)^n\right)$$

sort a_n **együtthatójú**, c **középpontú hatványsor**nak neveztük. A hatványsor **konvergenciahalmazá**nak neveztük a

$$KH\left(\sum \left(a_n(x-c)^n\right)\right) := \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \in \mathbb{R}\right\}$$

számhalmazt.

Megjegyzés. Tekintsük a

$$\sum \left(a_n(x-c)^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort, és legyen

$$A := \lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \text{ill.} \qquad A := \lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

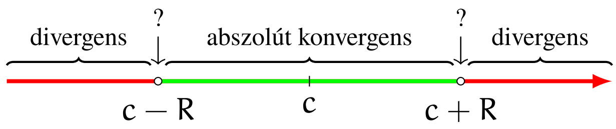
Ekkor az

$$R := \begin{cases} \dfrac{1}{A} & (A \in (0, +\infty)), \\ 0 & (A = +\infty), \\ +\infty & (A = 0) \end{cases}$$

szám nem más, mint a hatványsor konvergenciasugara. A hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:

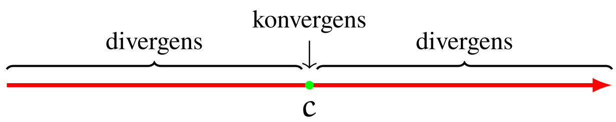
1. **ha** $0 < R < +\infty$, akkor

$$(c-R, c+R) \subset \mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-c)^n)\right) \subset [c-R, c+R]:$$



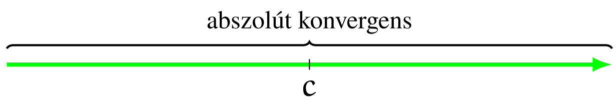
2. **ha** $R = 0$, akkor

$$\mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-c)^n)\right) = \{c\}:$$



3. **ha** $R = +\infty$, akkor

$$\mathrm{KH}\left(\sum a_n(x-c)^n)\right) = \mathbb{R}:$$



Példák.

1. Tetszőleges $r \in (0, +\infty)$ esetén a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{x^n}{r^n}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara r, konvergenciahalmaza a $(-r, r)$ intervallum.

2. Ha
$$a_n := \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \lim\left(e \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = 1,$$
így a
$$\sum\left(\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsor konvergenciasugara 1.

3. A
$$\sum (n^n \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsor konvergenciahalmaza:
$$\mathrm{KH}\left(\sum (n^n \cdot x^n)\right) = \{0\},$$
hiszen (mint ahogy fentebb is említettük) $x = 0$ esetén a $\sum (n^n \cdot x^n)$ sor konvergens, ha pedig $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor
$$\sqrt[n]{|n^n \cdot x^n|} = |x| \cdot n \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty)$$
következtében a $\sum (n^n \cdot x^n)$ sor divergens.

4. A
$$\sum\left(\frac{1}{n^n} \cdot x^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsor konvergenciahalmaza:
$$\mathrm{KH}\left(\sum\left(\frac{1}{n^n} \cdot x^n\right)\right) = \mathbb{R},$$
ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \frac{|x|}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

5. A
$$\sum\left(\frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsor konvergenciahalmaza az $[1, 3)$ intervallum (vö. Feladat/2).

6. A
$$\sum\left(\frac{x^n}{n^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum, hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow |x| \qquad (n \to \infty),$$

és a sor nyilván konvergens az $x \in \{-1, 1\}$ pontokban **HF**.

Feladat. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

1. $\sum \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $\sum \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (x+2)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $\sum \left(\frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot x^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
4. $\sum \left(\frac{2^n}{n+3} \cdot (x-3)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
5. $\sum_{n=0} \left(\frac{n!}{\alpha^{n^2}} \cdot x^n\right) \quad (\alpha \in (1, +\infty),\ x \in \mathbb{R});$
6. $\sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
7. $\sum_{n=1} \left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Legyen

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty),$$

így a hatványsor konvergenciasugara 1: $|x| < 1$ esetén konvergens, $|x| > 1$ esetén divergens. Ha $|x| = 1$, azaz $x = \pm 1$, akkor

$$\pm\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \pm e \neq 0 \quad (n \to \infty)$$

következtében $\sum(\pm a_n)$ divergens, így a hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum.

2. Legyen

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \lim\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\right) = \lim\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\right) = 4,$$

így a hatványsor konvergenciasugara 4. Mivel

$$|x+2|<4 \iff -4<x+2<4 \iff -6<x<2,$$

ezért a hatványsor $x\in(-6,2)$ esetén konvergens, $x\in\mathbb{R}\backslash[-6,2]$ esetén divergens. Ha $x\in\{-6;2\}$, akkor legyen

$$\xi_n := \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot(\pm4)^n\right| \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} > 1,$$

így $0\le\xi_n<\xi_{n+1}$, tehát a $(\xi_n)\notin c_0$ ((ξ_n) nem nullsorozat), következésképpen

$$\mathrm{KH}\left(\sum(a_nx^n)\right) = (-6,2).$$

3. Legyen

$$a_n := \frac{3^n+(-2)^n}{n} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}\right|\right) =$$

$$= \lim\left(\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\right|\right) = 3.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{3}$: $|x|<\frac{1}{3}$ esetén konvergens, $|x|>\frac{1}{3}$ esetén pedig divergens.

$$|x|=\frac{1}{3} \iff x=\pm\frac{1}{3}.$$

Világos, hogy $x = \frac{1}{3}$ esetén a sor minorálható a $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{1}{3n}\right)$ divergens sorral, így maga is divergens, $x = -\frac{1}{3}$ esetén a sor a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

konvergens sorok összege, így maga is konvergens. Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum (a_n x^n)\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

4. Legyen

$$a_n := \frac{2^n}{n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n+3}} \longrightarrow 2 \qquad (n \to \infty),$$

ui. az $n \to \infty$ határesetben

$$1 \longleftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+3} \leq \sqrt[n]{n+3n} = \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1.$$

Így a hatványsor konvergensiasugara $\frac{1}{2}$.

$$|x-3| < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} < x - 3 < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a hatványsor $x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha

- $x = \frac{5}{2}$, akkor a
$$\sum \left(\frac{(-1)^n}{n+3}\right)$$
sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens;
- $x = \frac{7}{2}$, akkor a
$$\sum \left(\frac{1}{n+3}\right)$$
sor divergens.

Mindez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{KH}\left(\sum\left(a_n(x-3)^n\right)\right)=\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right).$$

5. Legyen

$$a_n:=\frac{n!}{\alpha^{n^2}}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)=\lim\left(\frac{n!}{\alpha^{n^2}}\cdot\frac{\alpha^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\right)=\lim\left(\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1}\right)=\lim\left(\frac{1}{(n+1)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n+1}}\right)=\frac{1}{0}=+\infty,$$

így a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$, tehát konvergenciahalmaza $\mathbb{R}$.

Megjegyezzük, hogy ha

$$u_n:=\frac{n+1}{\alpha^{2n+1}}=\frac{1}{\alpha}\cdot n\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n+\frac{1}{\alpha^{2n+1}}\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

akkor $\lim(u_n)=0$, így a tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ index esetén fennálló $u_n>0$ reláció következtében

$$\lim\left(\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1}\right)=\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)=+\infty.$$

6. Látható, hogy

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}\cdot(3x-1)^n\right)=\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}\cdot 3^n}{2n-1}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Ha

$$a_n:=\frac{2^{n-1}\cdot 3^n}{2n-1}\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{2^n\cdot 3^n}{4n-2}}=\frac{6}{\sqrt[n]{4n-2}}\longrightarrow 6\qquad(n\to\infty),$$

ui. az $n\to\infty$ határesetben

$$1\longleftarrow\sqrt[n]{n}\leq\sqrt[n]{4n-2}\leq\sqrt[n]{10n}=\sqrt[n]{10}\cdot\sqrt[n]{n}\longrightarrow 1.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara: $\dfrac{1}{6}$. Mivel

$$\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{6}\quad\Longleftrightarrow\quad-\frac{1}{6}<x-\frac{1}{3}<\frac{1}{6}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x = \frac{1}{6}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{4n-2}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens. Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{1}{4n-2}\right)$$

sor divergens, hiszen

$$\frac{1}{4n-2} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}.$$

Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right)\right) = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

Megjegyezzük, hogy az

$$y := 3x - 1$$

transzformációval kapott

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot y^n\right).$$

sor konvergenciahalmaza a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ intervallum. Az eredeti sor így pontosan akkor konvergens, ha

$$-\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} \leq 3x - 1 < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{2}.$$

7. Látható, hogy

$$\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Ha

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\sqrt{(n+1)^3+(n+1)+1}}{\sqrt{n^3+n+1}} = \frac{\sqrt{n^3+3n^2+4n+3}}{\sqrt{n^3+n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} \longrightarrow \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = 1.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara: 1. Mivel

$$\left|x+\frac{1}{3}\right| < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad -1 < x+\frac{1}{3} < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R}\backslash\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x = -\frac{4}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens. Ha $x = \frac{2}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

sor konvergens, ui. a $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sor konvergens majoránsa:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right)\right) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

Emlékeztető. A

$$\sum \left(a_n(x-c)^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor összegfüggvényének neveztük az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad \left(x \in \mathrm{KH}\left(\sum \left(a_n(x-c)^n\right)\right)\right)$$

függvényt.

Példa. Ha a

$$\sum_{n=0} (x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara: R, összegfüggvénye az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in (-1,1))$$

függvény.

Tétel. Tegyük fel, hogy a

$$\sum (a_n(t-c)^n) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \sum (b_n(t-c)^n) \quad (t \in \mathbb{R})$$

hatványsorok konvergenciasugara

$$R_a \in (0, +\infty], \qquad \text{ill.} \qquad R_b \in (0, +\infty],$$

majd legyen

$$R := \min\{R_a, R_b\},$$

továbbá jelölje f, ill. g az összegfüggvényüket:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (x \in (c - R_a, c + R_a)),$$

ill

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \qquad (x \in (c - R_b, c + R_b)).$$

Ekkor bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$, $f + g$ és az $f \cdot g$ függvények felírhatók az alábbi hatványsorok összegeként:

1. $(\lambda \cdot f)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)(x-c)^n \quad (x \in (c - R, c + R));$
2. $(f + g)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-c)^n \quad (x \in (c - R, c + R));$
3. $(f \cdot g)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-c)^n \quad (x \in (c - R, c + R)).$

Feladat. Állítsuk elő a következő függvényeket vagy egy alkalmas leszűkítésüket 0-középpontú hatványsorok összegfüggvényeként:

1. $f(x) := \dfrac{1+x}{1-x^2}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\})$;
2. $f(x) := \dfrac{1-x}{1-x^2}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\})$;
3. $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$;
4. $f(x) := \dfrac{x}{x^2-5x+6}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\})$.

Útm.

1. Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{1+x}{1-x^2} = (1+x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = (1+x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

VAGY:

$$|x| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

2. Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{1-x}{1-x^2} = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = (1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

VAGY:

$$|x| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

3. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x^2| < 1$, azaz $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-0)^n,$$

ahol

$$a_n := \begin{cases} (-1)^{n/2} & (n \equiv 0 \ (2)), \\ \\ 0 & (n \equiv 1 \ (2)). \end{cases}$$

4. Mivel bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ esetén

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{3(x-2)-2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}},$$

ezért tetszőleges

$$x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < \min\{2, 3\} = 2$$

számra

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)x^n.$$

Megjegyzés. A fenti felbontást természetesen így is csinálhattuk volna:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6},$$

ahonnan

$$(A+B=1, \ -3A-2B=0) \quad \Longrightarrow \quad \ldots \quad \Longrightarrow \quad A=-2, \ B=3.$$

Vegyük észre, hogy sok esetben **kevesebb számolással jár** (és **nehezebb** azt **eltéveszteni**), ha így járunk el: $a, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$:

$$\frac{x}{(x-a)(x-(a+k))} = \frac{1}{k} \cdot \frac{kx}{(x-a)(x-(a+k))} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(a+k)(x-a)-a(x-(a+k))}{(x-a)(x-(a+k))} =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \left\{\frac{(a+k)}{x-(a+k)} - \frac{a}{x-a}\right\}$$

(fentebb az $a := 2$, ill. $k := 1$ esettel volt dolgunk).

Emlékeztető. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\begin{aligned}
\exp(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}), \\
\sin(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}), \\
\mathrm{sh}(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \mathrm{ch}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Feladat. Írjuk fel az alábbi függvényeket 0 középpontú hatványsor összegeként!

1. $f(x) := e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R})$, 2. $f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$, 3. $f(x) := \cos^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n n!} \cdot x^{2n}.$$

2. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{-2} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-4)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (-4)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-4)^{n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.
\end{aligned}$$

3. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}.
\end{aligned}$$

Házi feladatok

Feladat. Milyen $x, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$ esetén igazak az alábbi egyenlőségek?

1. $\dfrac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k;$ 2. $\dfrac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{-k};$ 3. $\dfrac{x}{x^2-x-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x-1)^k.$

Útm.

1. Bármely $x \in \mathbb{K}$: $|x| < 2$ esetén

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^k.$$

2. Tetszőleges $x \in \mathbb{K}$: $|x| > 2$ esetén

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{-1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -2^k x^{-(k+1)}.$$

3. Ha $x \in \mathbb{K}$: $|x-1| < \min\{1, 2\} = 1$, akkor

$$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=$$

$$=\frac{(A+B)x+A-2B}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1+2}=$$

$$=\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{1-(x-1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2-(1-x)}=$$

$$=\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{1-(x-1)}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-x}{2}}=$$

$$=\frac{-2}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k+\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{6\cdot 2^k}-\frac{2}{3}\right)(x-1)^k.$$

Feladat. Legyen a

$$\sum_{n=0}(a_n x^n)\qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara: ρ, összegfüggvénye f. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a következő egyenlőség!

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+\ldots+a_n)\,x^n\qquad \left(x\in\mathbb{R}:\ |x|<\min\{1,\rho\}\right).$$

Útm. Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < \min\{1, \rho\}$, akkor

$$\frac{f(x)}{1-x} = f(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \cdot x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + \ldots + a_n)\, x^n.$$

Megjegyzés. Ezek alapján könnyen belátható, hogy ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{\sin(x)}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + \ldots.$$

Feladat. Adjunk meg olyan $R > 0$ valós számot és (u_n) sorozatot, amelyekkel

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot x^n \qquad (x \in (-R, R))$$

teljesül!

Útm. testzőleges $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1/3; 3\}$ esetén

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \frac{(3x+1)-(x-3)}{(x-3)(3x+1)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3x+1}$$

és

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n \qquad (x \in (-3, 3)),$$

ill.

$$\frac{1}{3x+1} = \frac{1}{1-(-3x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n \qquad \left(|x| < \frac{1}{3}\right).$$

Így bármely

$$x \in (-3, 3) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

esetén

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3^{n+1}} - (-3)^n \right) x^n.$$

Ennélfogva

$$R = \frac{1}{3} \qquad \text{és} \qquad u_n = -\frac{1}{3^{n+1}} - (-3)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Feladat. Lássuk be, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
3. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;
4. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$;
5. $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$;
6. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
7. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Útm.

1. Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} k! \cdot \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l \cdot y^{k-l} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y).
\end{aligned}$$

2. Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x+(-x)) = \exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 = 1.$$

3. Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$
\begin{aligned}
2\sin(x)\cos(x) &= 2\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}\cdot(-1)^{(k-l)}\frac{x^{2(k-l)}}{(2(k-l))!} = \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\sum_{l=0}^{k}(2k+1)!(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2l+1)!\cdot(2k-2l)!} = \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+1}{2l+1}x^{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}2^{2k}x^{2k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(2x),
\end{aligned}
$$

hiszen

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+1}{2l+1} &= \binom{2k+1}{1} + \sum_{l=1}^{k-1}\left\{\binom{2k}{2l+1} + \binom{2k}{2l}\right\} + \binom{2k+1}{2k+1} = \\
&= 2k+1+\sum_{l=2}^{2k-1}\binom{2k}{l} + 1 = \\
&= 2k+2+\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k}{l} - \binom{2k}{2k} - \binom{2k}{1} - \binom{2k}{0} = \\
&= 2k+2+2^{2k}-1-2k-1 = 2^{2k}.
\end{aligned}
$$

4. Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\cos^2(x) = \cos(x)\cos(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}(-1)^{k-l}\frac{x^{2(k-l)}}{(2(k-l))!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\sum_{l=0}^{k}(2k)!(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2l)!\cdot(2(k-l))!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot 2^{2k-1} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot 2^{2k} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

hiszen

$$\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} = \binom{2k}{0} + \sum_{l=1}^{k-1}\binom{2k}{2l} + \binom{2k}{2k} = 1 + \sum_{l=1}^{k-1}\left\{\binom{2k-1}{2l} + \binom{2k-1}{2l-1}\right\} + 1 =$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{2k-2}\binom{2k-1}{l} + 1 = \sum_{l=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{l} = 2^{2k-1}.$$

5. Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sin^2(x) = \sin(x)\sin(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^{k-l}\frac{x^{2(k-l)+1}}{(2(k-l)+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+2)!}\sum_{l=0}^{k}(2k+2)!(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2l+1)!\cdot(2(k-l)+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+2}{2l+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}2^{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}2^{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2} = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$

hiszen

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+2}{2l+1} &= \binom{2k+2}{1}+\sum_{l=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2l+1}+\binom{2k+2}{2k+1}= \\
&= 2k+2+\sum_{l=1}^{k-1}\left\{\binom{2k+1}{2l+1}+\binom{2k+1}{2l}\right\}+2k+2= \\
&= 4k+4+\sum_{l=2}^{2k-1}\binom{2k+1}{l}=4k+4+ \\
&\quad +\sum_{l=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{l}-\binom{2k+1}{0}-\binom{2k+1}{1}-\binom{2k+1}{2k}-\binom{2k+1}{2k+1}= \\
&= 4k+4+2^{2k+1}-1-(2k+1)-(2k+1)-1=2^{2k+1}.
\end{aligned}
$$

6. Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}+\frac{1-\cos(2x)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

7. Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\cos^2(x)-\sin^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}-\frac{1-\cos(2x)}{2}=\frac{2\cos(2x)}{2}=\cos(2x).$$

10. gyakorlat (2025. április 23.)

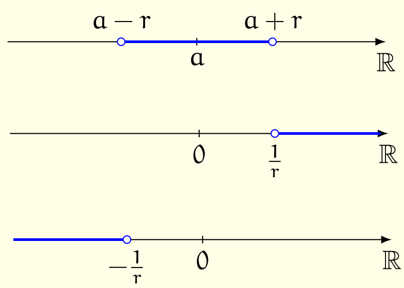
Szükséges ismeretek.

- Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?
- Környezetek segítségével adja meg a függvényhatárérték egységes definícióját!
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a végesben vett véges határérték definícióját!
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a plusz végtelenben vett véges határérték definícióját!
- Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet!
- Hogyan szól a függvények hányadosának a határértékére vonatkozó tétel?
- Definiálja függvény jobb oldali határértékét!

Órai feladatok

Emlékeztető. Legyen $0 < r \in \mathbb{R}$. Ekkor valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ kibővített értelemben vett valós szám r**-sugarú környezet**ének neveztük az alábbi halmazt:

$$K_r(a) := \begin{cases} (a-r, a+r), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{1}{r}, +\infty\right), & \text{ha } a = +\infty \\ \left(-\infty, -\dfrac{1}{r}\right), & \text{ha } a = -\infty. \end{cases}$$



Emlékeztető. Legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem a $\mathcal{H}$ halmaz

- **torlódási pont**ja (jelben: $a \in \mathcal{H}'$), ha a minden környezetében van $\mathcal{H}$-nak a-tól különböző eleme:
$$\forall r > 0: \qquad (K_r(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset.$$
- **izolált pont**ja, ha nem torlódási pontja $\mathcal{H}$-nak.

Megjegyzések.

1. Valamely $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz, ill. $a \in \mathbb{R}$ esetén igaz az

$$a \in \mathcal{H}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in \mathcal{H}: \quad \underbrace{0 < |x - a| < \varepsilon}_{a \neq x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)}$$

   ekvivalencia.

2. Ha $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$, akkor

   - $-\infty$ pontosan abban az esteblen torlódási pontja a $\mathcal{H}$ halmaznak, ha $\mathcal{H}$ alulról nem korlátos:

$$-\infty \in \mathcal{H}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathcal{H}: \quad x < \alpha;$$

   - $+\infty$ pontosan abban az esteblen torlódási pontja a $\mathcal{H}$ halmaznak, ha $\mathcal{H}$ felülről nem korlátos:

$$+\infty \in \mathcal{H}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathcal{H}: \quad x > \omega.$$

Példák.

1. $\left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}: \; n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\};$
2. $(0,1)' = [0,1];$
3. $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$: $\mathcal{H}$ véges $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}' = \emptyset;$
4. $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$ és $\mathbb{Z}' = \{-\infty\} \cup \{+\infty\};$
5. $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}};$
6. Ha az $(x_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra, illetve az $A \in \mathbb{R}$ számra $\lim(x_n) = A$, akkor

$$\{x_n \in \mathbb{R}: \; n \in \mathbb{N}\}' = \{A\},$$

   ui. minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $N \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$|x_n - A| < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondtuk, hogy az f függvénynek az a pontban $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a határértéke, jelben:

$$\lim_a f = A \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \longrightarrow A \quad (x \to a),$$

ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, x \in \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad (x \in K_\delta(a) \setminus \{a\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)).$$

Megjegyzések.

1. Ez a pontos megfogalmazása annak, hogy „az a-hoz közeli helyeken $f(x)$ az A-hoz van közel”.
2. Vö. sorozat határértéke: $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$ és $\lim_{+\infty} f$ ugyanaz, mint a sorozat határértéke.
3. Attól függően, hogy a, illetve A valós szám vagy $\pm\infty$, ezt a definíciót többféleképpen fogalmazhatjuk meg:

   (a) **végesben vett véges határérték.** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor

   $$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \ (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon).$$

   (b) **végesben vett végtelen határérték:**

   - Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor

     $$\lim_a f = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, P > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > P).$$

   - Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor

     $$\lim_a f = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, N < 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N).$$

   (c) **végtelenben vett véges határérték.**

   - Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, ill. $A \in \mathbb{R}$. Ekkor

     $$\lim_{+\infty} f = A \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon|).$$

   - Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $-\infty \in \mathcal{D}_f'$, ill. $A \in \mathbb{R}$. Ekkor

     $$\lim_{-\infty} f = A \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon|).$$

(d) **végtelenben vett végtelen határérték.**

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, P > 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad f(x) > P)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

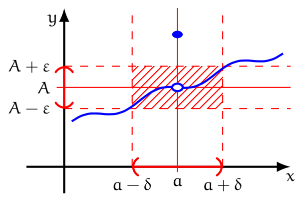
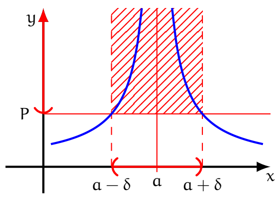
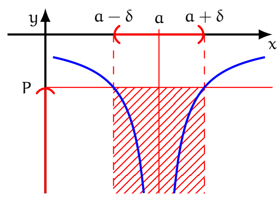
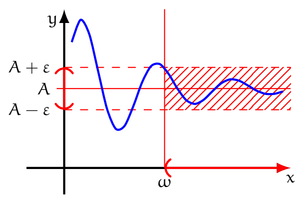
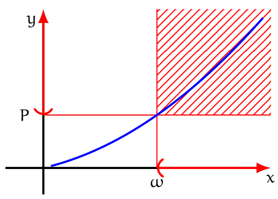
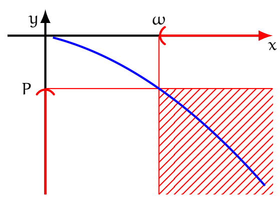
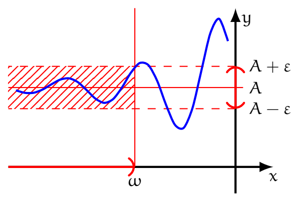
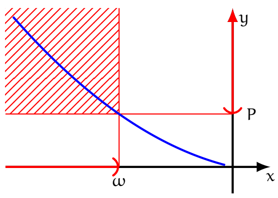
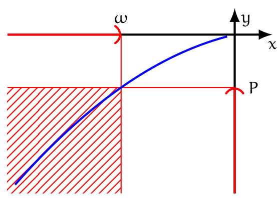
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, N < 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad f(x) < N)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $-\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, P > 0 \quad \exists\, \alpha < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) > P)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $-\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, N < 0 \quad \exists\, \alpha < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) < N)\,.$$

$A = \lim\limits_{a} f$	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < \lvert x-a \rvert < \delta:\quad \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < \lvert x-a \rvert < \delta:\quad f(x) > P$	 $\forall N < 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < \lvert x-a \rvert < \delta:\quad f(x) < N$
$a = +\infty$	 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \omega > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \omega:\quad \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0\ \exists \omega > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \omega:\quad f(x) > P$	 $\forall N < 0\ \exists \omega > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \omega:\quad f(x) < N$
$a = -\infty$	 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha < 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < \alpha:\quad \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0\ \exists \alpha < 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < \alpha:\quad f(x) > P$	 $\forall N < 0\ \exists \alpha < 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < \alpha:\quad f(x) < N$

Feladat. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

Útm.

1. Legyen

$$f(x) := \sqrt{2x+5} \qquad (-5/2 \leq x \in \mathbb{R}),$$

így $2 \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy „ha x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\sqrt{9} = 3$-hoz". Sejtés: $\lim\limits_{2} f = 3$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x)-3| = \left|\sqrt{2x+5}-3\right| \cdot \frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{|2x-4|}{\sqrt{2x+5}+3} \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\cdot|x-2| < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad |x-2| < \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Így a

$$\delta := \frac{3\varepsilon}{2}$$

választás megfelelő.

2. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R}),$$

így $0 \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy ha „x közel van 0-hoz, akkor $f(x)$ közel van 1-hez". Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$|f(x)-1| = \left|\frac{1}{1+x}-1\right| = \left|\frac{-x}{1+x}\right| = \frac{1}{|1+x|}\cdot|x-0|.$$

Ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} < |1+x|$, így

$$|f(x) - 1| < 2|x| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

3. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$, hiszen $\mathcal{D}_f$ sem alulról, sem pedig felülről nem korlátos. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(x) = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2+1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}}, \qquad \text{így sejthető, hogy} \qquad \lim_{\pm\infty} f = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|-3|}{4x^2 + 2} = \frac{3}{4x^2 + 2} < \frac{3}{4x^2} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{3}{4\varepsilon}.$$

Tehát az

$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}$$

választás megfelelő.

4. Legyen

$$f(x) := \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}),$$

így $1 \in \mathcal{D}_f'$. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2} = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x - 2},$$

ezért „ha x közel van 1-hez, akkor $f(x)$ közel van (-8)-hoz”. Sejtés: $\lim_{1} f = -8$.
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x) - (-8)| = \left|\frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x - 2} + 8\right| = \left|\frac{x^3 + x^2 + 11x - 13}{x - 2}\right| = \frac{|x^2 + 2x + 13|}{|x - 2|} \cdot |x - 1|.$$

Megjegyzés. A harmadik egyenlőség a Horner-módszer következménye (vö. Matematikai alapozás, 7-10. oldal):

	1	1	11	−13
1	1	2	13	0

Könnyen belátható (**HF**), hogy ha

$$0<|x-1|<\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{3}{2}<x-2<-\frac{1}{2},$$

akkor

$$|x-2|=2-x>\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad |x|<\frac{3}{2}.$$

Következésképpen

$$\frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|}\leq\frac{|x|^2+2|x|+13}{1/2}<\frac{(3/2)^2+2\cdot(3/2)+13}{\frac{1}{2}}=\frac{47}{2}<24.$$

Innen már látható, hogy a $\delta:=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{24}\right\}$ választás megfelelő.

Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

határérték-reláció!

Útm. Legyen

$$f(x):=\sqrt[n]{x} \qquad (x\in[0,+\infty)).$$

Így $a\in\mathcal{D}_f'$ és két eset van:

- $a>0$: legyen $\varepsilon>0$ adott és $\delta:=\min\left\{a,\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}\right\}$. Ekkor minden $0<|x-a|<\delta$ valós számra

$$\left|f(x)-\sqrt[n]{a}\right|=\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|\overset{(4)}{=}\frac{|x-a|}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{x^{n-k}a^{k-1}}}\leq\frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}<\begin{cases}\dfrac{\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}=\varepsilon & (\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}\leq a),\\[2ex] \dfrac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}<\varepsilon & (\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}>a),\end{cases}$$

tehát $\lim_{a} f = \sqrt[n]{a}$.

- $a = 0$: tegyük fel, hogy $\lim_{a} f \neq \sqrt[n]{a}$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ (így pl. $\delta := \varepsilon^n$) esetén $\exists x \in (0, \delta)$: $\sqrt[n]{x} \geq \varepsilon$, azaz $\exists x \in (0, \varepsilon^n)$: $\sqrt[n]{x} \geq \varepsilon$, azaz $x \geq \varepsilon^n$, ami nem igaz.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. tegyük fel, hogy valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \in (\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a))'$, azaz minden $\delta > 0$ esetén az $(a - \delta, a)$ intervallum végtelen sok pontjában f értelmezve van). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van baloldali határértéke, jelben

$$\exists \lim_{a-0} f, \qquad \exists \lim_{x \to a-0} f(x), \qquad \exists f(a-0)$$

ha a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a - \delta, a))$$

függvénynek van a-ban határértéke, azaz

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}}\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in \mathcal{D}_f: \qquad (a - \delta < x < a \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)).$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. tegyük fel, hogy valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$, azaz minden $\delta > 0$ esetén az $(a, a + \delta)$ intervallum végtelen sok pontjában f értelmezve van). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van jobboldali határértéke, jelben

$$\exists \lim_{a+0} f, \qquad \exists \lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \exists f(a+0)$$

ha a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a, a + \delta))$$

függvénynek van a-ban határértéke, azaz

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}}\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in \mathcal{D}_f: \qquad (a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)).$$

Példák.

1. $\lim_{0 \pm 0} \operatorname{sgn} = \pm 1$.

2. Ha

$$f(x) := [x] \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\lim_{m-0} f = m-1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{m+0} f = m.$$

3. Ha

$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\lim_{m-0} f = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{m+0} f = 0.$$

4. Ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{0-0} f = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{0+0} f = +\infty.$$

Tétel. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\exists \lim_{a} f \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\exists \lim_{a\pm 0} f \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f \right)$$

Tétel (átviteli elv). Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor igaz a

$$\lim_{a} f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \backslash \{a\}, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n) = a \quad \text{esetén} \quad \lim_{n\to\infty} (f(x_n)) = A.$$

ekvivalencia.

Feladat. Mutassuk meg, hogy nem léteznek az $\lim\limits_{\pm\infty} f$ határértékek, ahol $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem állandó, periodikus függvény!

Útm. Ha f nem állandó függvény, akkor van olyan $a, b \in \mathcal{D}_f$, hogy $f(a) \neq f(b)$. Ha f még periodikus is, akkor van olyan $p \in (0, +\infty)$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \pm np, b \pm np \in \mathcal{D}_f$, továbbá

$$f(a \pm np) = f(a), \quad f(b \pm np) = f(b) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen

$$x_n := a \pm np, \quad y_n := b \pm np \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \pm\infty, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = f(a) \neq f(b) = \lim(f(y_n)).$$

Tétel. (Sandwich-tétel). Legyen $f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h)'$ és tegyük fel, hogy van olyan $r > 0$, hogy

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (x \in K_r(a) \cap (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h)) \ ,$$

továbbá

$$\exists \lim_a f \quad \exists \lim_a h \qquad \text{és} \qquad \lim_a f = \lim_a h =: A.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a g \qquad \text{és} \qquad \lim_a g = A.$$

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \leq x\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egészrész-függvényre

$$\lim_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

teljesül.[8] Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $x - 1 < [x] \leq x$, ezért minden $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}.$$

Ha

- $x \in (-\infty, 0)$, akkor

$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) > x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \geq x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

A Sandwich-tétel értelmében létezik a bal oldali haártérték, és

$$\lim_{x \to 0-0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

[8] Pál Jenő megoldása.

- $x \in (0, +\infty)$, akkor
$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$
A Sandwich-tétel értelmében létezik a jobb oldali határérték, és
$$\lim_{x \to 0+0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Mindez azt jelenti, hogy létezik 0-ban a határérték, és
$$\lim_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Tétel. Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ és tegyük fel, hogy
$$\exists \lim_a f =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \exists \lim_a g =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. $\exists \lim_a (f+g)$ és $\lim_a (f+g) = A + B$, ha az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van;
2. $\exists \lim_a (fg)$ és $\lim_a (fg) = AB$, ha az $AB \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van;
3. $\exists \lim_a \left(\frac{f}{g}\right)$ és $\lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$, ha az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

Megjegyzés. Kritikus határertekek vizsgálata. Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben” alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára fentebb megfogalmazott állításokat. Ezek az eredmenyek akkor használhatók, ha a tételben szereplő $\overline{\mathbb{R}}$-beli
$$A \pm B; \qquad AB; \qquad \frac{A}{B}$$
műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs ertelmezve, akkor a megfelelő függvenyek határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a kritikus határertekeket röviden a
$$(+/-\infty) + / - (+/-\infty), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{1}{0}$$
szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert” követhetjük:

a kritikus határértéket „valamilyen módon” (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékre átalakítani.

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $a_n \neq 0$. Mutassuk meg, hogy a

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinom határértékéről a következők állíthatók!

1. bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{\alpha} p = p(\alpha)$;
2. $\lim\limits_{+\infty} p = \operatorname{sgn}(a_n)(+\infty)$;
3. $\lim\limits_{-\infty} p = (-1)^n \operatorname{sgn}(a_n)(+\infty)$.

Útm.

1. Mivel bármely $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\lim\limits_{x\to\alpha} x^n = \alpha^n$, ezért a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel következményeként

$$\lim_{\alpha} p = \lim_{x\to\alpha} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = p(\alpha).$$

2. Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n \right),$$

továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért az állítás a határéerték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján nyilvánvaló.

3. Az előbbihez hasonlóan igazolható.

Megjegyzések.

1. A fenti feladatban az utolsó két állítás azat jelenti, hogy polinomok „viselkedését” a $\pm$ végtelen környezetében a polinom a_n főegyütthatója és n fokszámának paritása határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik az $a_n x^n$ főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

2. Világos, hogy

$$\lim_{-\infty} p = \lim_{x\to+\infty} p(-x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k = \operatorname{sgn}((-1)^n a_n)(+\infty) = (-1)^n \operatorname{sgn}(a_n)(+\infty).$$

Példák.

1. $\lim_{x\to+\infty} (-3x^2+2x+7) = -\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} (x^3-x+2) = -\infty$

Feladat. Legyen $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$: $a_m b_n \neq 0$ és

$$\mathcal{H} := \{\xi \in \mathbb{R} : \ b_0 + b_1\xi + \ldots + b_n\xi^n = 0\}.$$

Mutassuk meg, hogy az

$$r(x) := \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H})$$

racionális függvény esetében ha $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$, akkor

$$\lim_{\alpha} r = r(\alpha),$$

továbbá

$$\lim_{+\infty} r = \begin{cases} 0 & (m<n), \\ \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{a_m}{b_m} & (m=n), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_m}{b_n}\right)(+\infty) & (m>n), \end{cases} \quad \text{és} \quad \lim_{-\infty} r = \begin{cases} 0 & (m<n) \\ \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{a_m}{b_m} & (m=n), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_m}{b_n}\right)(-1)^{m-n}(+\infty) & (m>n). \end{cases}$$

Útm. Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$ esetén

$$r(x) = x^{m-n} \cdot \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n},$$

ezért $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{H}$ esetén a a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{\alpha} r = \lim_{x\to\alpha} \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n} = \frac{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_m\alpha^m}{b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_n\alpha^n} = r(\alpha).$$

Igaz továbbá, hogy

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{a_m}{b_n},$$

ill.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ 1 & (m = n), \\ +\infty & (m > n), \end{cases}$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n), \\ (-1)^{m-n}(+\infty) & (m > n), \end{cases}$$

ezért az állítás nyilvánvaló.

Példák. A fentiek alapján világos, hogy

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = 1;$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 7x^2 + 5x - 1} = 0;$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 23}{-3x^3 - 5x^2 + 31x + 1} = -\frac{2}{3};$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 11x + 2}{x^2 + 3x + 2} = +\infty.$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2};$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10};$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1};$

4. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 2x + 1};$ 5. $\displaystyle\lim_{x\to2+0} \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 - 5x + 6};$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to2-0} \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 - 5x + 6}.$

Útm.

1. Legyen
$$f(x) := \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{x^3 - x + 1}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^3 - x + 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 1},$$
ezért $\lim_{1\pm 0} f = \pm\infty$ következtében $\nexists \lim_1 f$.

2. Legyen
$$f(x) := \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{2; 5\}).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$
ezért $\lim_2 f = \frac{1}{3}$.

3. Legyen
$$f(x) := \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)} = \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1},$$
ezért $\lim_1 f = \dfrac{m}{n}$.

4. Legyen
$$f(x) := \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 2x + 1} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R}).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 + x - 3}{(x+1)^2} = (x^2 + x - 3) \cdot \frac{1}{(x+1)^2},$$
ezért $\lim_1 f = (-3) \cdot (+\infty) = -\infty$.

5. Legyen
$$f(x) := \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{x^2+2x-7}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2+2x-7}{x-3} \cdot \frac{1}{x-2},$$
ezért $\lim\limits_{2+0} f = (-1)\cdot(+\infty) = -\infty$.

6. Legyen
$$f(x) := \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{x^2+2x-7}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2+2x-7}{x-3} \cdot \frac{1}{x-2},$$
ezért $\lim\limits_{2-0} f = (-1)\cdot(-\infty) = +\infty$.

Feladat. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$. A gyöktelenítés technikájával határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Útm.

1. Legyen
$$f(x) := \sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1} \qquad (x \in \mathbb{R}:\ |x| \geq 1).$$
Mivel minden $x \in (-\infty,-1)$ esetén
$$f(x) = \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2-x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{-\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{\frac{2}{x}-1}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},$$
ezért $\lim\limits_{-\infty} f = 1/2$.

2. Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \qquad (0 \neq x \in [-1,1]).$$

Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$$

$$= \frac{(1+x-1+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}},$$

ezért $\lim_0 f = 1$.

3. Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \qquad (0 \neq x \in (-1,+\infty)).$$

Ekkor (vö. (**??**)) bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) \overset{(??)}{=} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+1} =$$

$$= \frac{1+x-1^n}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+1)} = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+1},$$

ezért $\lim_0 f = 1/n$.

Tétel. Legyen

$$f,g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad a \in \mathcal{D}_g', \qquad \mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f.$$

Ha

$$\lim_a g =: b \in \mathcal{D}_f', \qquad g(x) \neq b \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_g), \qquad \lim_b f =: c \in \mathbb{R},$$

akkor

$$\lim_a (f \circ g) = c.$$

A fenti tétel eredményét szokás a

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y) \qquad (y := g(x) \to b, \quad \text{ha} \quad x \to a)$$

alakban írni, ami úgy tekinthető, mint a $\lim_{x\to a} f(g(x))$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}{x^2-1}$; 2. $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1}$; 3. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. Az

$$y := \sqrt[6]{x+2}$$

helyettesítést alkalmazva azt kapjuk, hogy bármely

$$-1 \neq x \in (-2, 0), \qquad \text{azaz} \qquad 1 \neq y \in (0, \sqrt[6]{2})$$

esetén

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}{x^2-1} = \frac{y^3-y^2}{(y^6-2)^2-1} = \frac{y^3-y^2}{y^{12}-4y^6+3} = \frac{y^2(y-1)}{(y^6-1)(y^6-3)} =$$

$$= \frac{y^2\cancel{(y-1)}}{\cancel{(y-1)}(y^5+y^4+y^3+y^2+1)(y^6-3)} =$$

$$= \frac{y^2}{(y^5+y^4+y^3+y^2+1)(y^6-3)} \longrightarrow \frac{1}{-12} \quad (y \to 1).$$

2. $$\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1} = \lim_{y\to-1} \frac{\sqrt[3]{y^{15}}+1}{\sqrt[5]{y^{15}}+1} = \lim_{y\to-1} \frac{y^5+1}{y^3+1} = \lim_{y\to-1} \frac{\cancel{(y+1)}(y^4-y^3+y^2-y+1)}{\cancel{(y+1)}(y^2-y+1)} = \frac{5}{3}.$$

3. $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{y\to1} \frac{\sqrt[m]{y^{mn}}-1}{\sqrt[n]{y^{mn}}-1} = \lim_{y\to1} \frac{y^n-1}{y^m-1} = \frac{n}{m}.$$

Házi feladatok

Feladat. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$;
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)}$;
6. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x^2}{1+x^2}$.

Útm.

1. A nevező gyöktényezős felbontásához a Horner-módszert használva:

	1	-2	-1	2
1	1	-1	-2	0

jól látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x+1)(x-2).$$

Legyen tehát

$$f(x) := \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1;2\}),$$

így $2 \in \mathcal{D}'_f$. Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-3}{x^2-1},$$

ezért látható, hogy ha „x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\left(-\frac{1}{3}\right)$-hoz”. Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2} = -\frac{1}{3}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$\left|f(x) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{x-3}{x^2-1} + \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{x^2+3x-10}{3(x^2-1)}\right| = \left|\frac{(x+5)(x-2)}{3(x^2-1)}\right| = \frac{|x+5|}{3|x^2-1|} \cdot |x-2|.$$

Ha most

$$2 \neq x \in \left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

akkor

$$\frac{13}{2} < |x+5| < \frac{15}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{5}{4} < |x^2-1| < \frac{21}{4},$$

így

$$\frac{|x+5|}{3|x^2-1|} \cdot |x-2| < \frac{\frac{15}{2}}{3 \cdot \frac{5}{4}} \cdot |x-2| = 2 \cdot |x-2| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

2. Legyen

$$f(x) := \frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} = \frac{x(x^2+x-6)}{x^2-x-2} = \frac{x(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(x+3)}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}).$$

Látható, hogy ha „x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\left(\frac{10}{3}\right)$-hoz”. Így sejthető, hogy

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} = \frac{10}{3}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$\left|f(x) - \frac{10}{3}\right| = \left|\frac{x(x+3)}{x+1} - \frac{10}{3}\right| = \left|\frac{3x^2+9x-10x-10}{3(x+1)}\right| = \left|\frac{3x^2-x-10}{3(x+1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-2)(3x+5)}{3(x+1)}\right| = \frac{|3x+5|}{3 \cdot |x+1|} \cdot |x-2|.$$

Világos, hogy

$$|x-2| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < x-2 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < x < 3,$$

és

- $1<x<3 \quad\Longrightarrow\quad 3<3x<9 \quad\Longrightarrow\quad 8<3x+5<14 \quad\Longrightarrow\quad |3x+5|<14,$
- $1<x<3 \quad\Longrightarrow\quad 2<x+1<4 \quad\Longrightarrow\quad |x+1|>2.$

Így tetszőleges $x\in\mathcal{D}_f$, $|x-2|<1$ esetén

$$\frac{|3x+5|}{3\cdot|x+1|}\cdot|x-2|<\frac{14}{3\cdot 2}\cdot|x-2|<\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad |x-2|<\frac{6\varepsilon}{14},$$

azaz

$$\delta:=\min\left\{1,\frac{6\varepsilon}{14}\right\}$$

megfelelő választás.

3. Legyen

$$f(x):=\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}=\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x^2-x+1}{x-3} \qquad (x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,3\}).$$

Ekkor $-1\in\mathcal{D}_f'$, és sejthető, hogy

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}=\frac{3}{-4}=:A.$$

Azt kell tehát megmutatni, hogy

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\in\mathcal{D}_f:\quad \left(0<|x+1|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{x^2-x+1}{x-3}-A\right|<\varepsilon\right).$$

Világos, hogy bármely $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,3\}$ esetén

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-3}-A\right|=\left|\frac{4x^2-4x+4+3x-9}{4(x-3)}\right|=\frac{|4x^2-x-5|}{4|x-3|}=\frac{|(x+1)(4x-5)|}{4|x-3|}=\frac{|4x-5|}{4|x-3|}\cdot|x+1|.$$

Ha most $-1\neq x\in(-1-1,-1+1)=(-2,0)$, akkor

$$5<|4x-5|<13, \qquad \text{ill.} \qquad 3<|x-3|<5.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x\in\mathbb{R}$: $0<|x+1|<1$ esetén

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-3}-A\right|<\frac{13}{4\cdot 3}\cdot|x+1|.$$

Ekkor valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\frac{13}{12}\cdot|x+1|<\varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x+1|<\frac{12\varepsilon}{13}.$$

Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta := \min\left\{1, \frac{12\varepsilon}{13}\right\} > 0$ szám, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ elemre

$$0<|x+1|<\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}-A\right|<\frac{13}{12}\cdot|x+1|<\varepsilon.$$

4. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}=\frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x+7}{x^2+1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$, és sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}=\frac{8}{2}=4=: A.$$

Azt kell tehát megmutatni, hogy

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\in\mathcal{D}_f: \quad \left(0<|x-1|<\delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{x+7}{x^2+1}-A\right|<\varepsilon\right).$$

Világos, hogy bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1}-A\right|=\left|\frac{4x^2-x-3}{x^2+1}\right|=\frac{|(x-1)(4x+3)|}{x^2+1}=\frac{|4x+3|}{x^2+1}\cdot|x+1|.$$

Ha most $1 \neq x \in (1-1, 1+1) = (0,2)$, akkor

$$\frac{|4x+3|}{x^2+1}=\frac{4x+3}{x^2+1}<\frac{4\cdot 2+3}{1}=11.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$: $0<|x-1|<1$ esetén

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1}-A\right|<11\cdot|x-1|.$$

Ekkor valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$11 \cdot |x-1| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{11}.$$

Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\} > 0$ szám, hogy bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ elemre

$$0 < |x-1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} - A\right| < 11 \cdot |x-1| < \varepsilon.$$

5. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2 - \sin(x)}{x^2 + \sin(x)} \qquad (1 < x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos, így $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy ha „x elég nagy”, akkor $f(x) \approx 1$, innen sejthető, hogy $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f = (1+, \infty)$ esetén $x^2 + \sin(x) > 0$ és így

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x^2 - \sin(x)}{x^2 + \sin(x)} - 1\right| = \left|\frac{-2\sin(x)}{x^2 + \sin(x)}\right| = \frac{2 \cdot |\sin(x)|}{x^2 + \sin(x)} \leq \frac{2}{x^2 - 1},$$

ill.

$$\frac{2}{x^2-1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Így az

$$\omega := \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}$$

választás megfelelő.

6. Legyen

$$f(x) := \frac{3x^2}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$. Sejtés: $\lim\limits_{\pm\infty} f = 3$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és

$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Ekkor minden $x > \omega$ ill. $x < \alpha$ valós számra

$$|f(x) - 3| = \frac{|-3|}{1+x^2} = \frac{3}{1+x^2} < \frac{3}{x^2} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy nem léteznek az alábbi határértékek!

(a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$; (b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{5}{2-x}$; (c) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Útm.

1. Legyen
$$x_n := -\frac{1}{n}, \quad y_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = -1 \neq 1 = \lim(f(y_n)).$$

2. Legyen
$$x_n := 1 + \frac{n}{n+1}, \quad y_n := 2 + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 2, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = +\infty \neq -\infty = \lim(f(y_n)).$$

3. Legyen
$$x_n := \frac{1}{n\pi}, \quad y_n := \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = 0 \neq 1 = \lim(f(y_n)). \quad \blacksquare$$

Feladatok.

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right); \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}; \qquad \text{(c)} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{x^2-x}{x+1}\right).$$

2. Adott $m, n \in \mathbb{N}$, ill. $0 < a, b \in \mathbb{R}$ esetén számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}-\frac{b}{x^3-1}\right); \ \text{(b)} \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right); \ \text{(c)} \lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b}\right).$$

3. Számítsuk ki a

$$\text{(a)} \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right); \ \text{(b)} \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right); \ \text{(c)} \lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

4. Számítsuk ki a

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}; \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}.$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

5. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki a

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to \alpha}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

6. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ esetén teljesül a

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0$$

határértékreláció?

7. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

8. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}};$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}; \qquad \text{(d)} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}.$$

Útm.

1. (a) Legyen
$$f(x) := \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$
Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$ és minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x-2}{x^3-1} =$$
$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1},$$
ezért
$$\lim_1 f = \frac{3}{3} = 1.$$
(b) Legyen
$$f(x) := \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \qquad (5 \neq x \in (1,+\infty)).$$
Ekkor $5 \in \mathcal{D}_f'$ és minden $5 \neq x \in (1,+\infty)$ esetén
$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{x-5}{(x-5)\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2},$$
ezért
$$\lim_5 f = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$
(c) Mivel bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ esetén
$$\frac{x^2+x}{x-1} - \frac{x^2-x}{x+1} = \frac{(x^2+x)(x+1)-(x^2-x)(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$
$$= \frac{x^3+2x^2+x-x^3+2x^2-x}{x^2-1} = \frac{4x^2}{x^2-1},$$
ezért
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1} - \frac{x^2-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2-1} = 4.$$

2. (a) Legyen

$$f(x) := \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}'_f$ és minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a(x^2+x+1)-b}{x^3-1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(x+2)}{x^2+x+1} & (b = 3a), \\[2ex] \dfrac{ax^2+ax+a-b}{x^3-1} & (b \neq 3a), \end{cases}$$

ezért

- $b = 3a$ esetén $\lim\limits_{1} f = a$;
- $b \neq 3a$ esetén $\nexists \lim\limits_{1} f$, ui.

$$\lim_{1\pm 0} f = \operatorname{sgn}(3a-b) \cdot (\pm\infty).$$

(b) Legyen

$$f(x) := \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

- Ha $m = n = 1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = 0,$$

így

$$\lim_{1} f = 0 = \frac{1-1}{2}.$$

- Ha $m = 1$, $n > 1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n} = \frac{1}{1-x} - \frac{n}{(1-x)\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k - n}{1-x^n} =$$

$$= \frac{-(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)x^k}{(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}x^k} = \frac{-\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\cdot x^k}{\sum_{k=0}^{n-1}x^k} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -\frac{(n-1)n-\frac{(n-2)(n-1)}{2}-n+1}{n} = -\frac{2n^2-2n-n^2+3n-2-2n+2}{2n} =$$

$$= -\frac{n^2-n}{2n} = \frac{1-n}{2} \quad (x\to 1).$$

- Ha $m>2$, $n=1$, akkor a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy $\lim_1 f = \dfrac{m-1}{2}$.
- Tegyük fel, hogy $2\leq m,n\in\mathbb{N}$. Ekkor az $x=: 1+h$ helyettesítést alkalmazva bármely $1\neq x\in\mathbb{R}$, azaz $0\neq h\in\mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n} = \frac{m}{1-(1+h)^m}-\frac{n}{1-(1+h)^n} =$$

$$= \frac{m}{1-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}h^k}-\frac{n}{1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k} = \frac{m}{-\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k}-\frac{n}{-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k} =$$

$$= \frac{-m\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k+n\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k}{\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\right)} = \frac{-mnh-m\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k+nmh+n\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^k}{\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\right)} =$$

$$= \frac{n\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^k-m\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k}{\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} = \frac{h^2n\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^{k-2}-h^2m\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}}{\left(h\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(h\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} =$$

$$= \frac{n\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^{k-2} - m\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}}{\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} \longrightarrow \frac{n\binom{m}{2} - m\binom{n}{2}}{\binom{m}{1}\binom{n}{1}} = \frac{n\frac{m(m-1)}{2} - m\frac{n(n-1)}{2}}{mn} =$$

$$= \frac{m-n}{2} \quad (h \to 0).$$

(c) Felhasználva, hogy bármely $\mu \in \mathbb{R}$, ill. $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$x^{\mu} = \exp(\mu \cdot \ln(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \cdot \ln(x))^n}{n!}$$

teljesül, a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy tetszőleges $0 < a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right) = \frac{a-b}{2}.$$

3. (a) Világos, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

(b) A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right) \cdot \frac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}+3x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = 0.$$

(c) Egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy bármely $1 \neq x \in (0, +\infty)$ számra

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})} = \frac{x(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{x\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+\sqrt{x})} \longrightarrow \frac{1\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)}{1+1} = 3 \quad (x \to 1).$$

4. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4} = \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = 4.$$

(b) Mivel bármely $2 \neq x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{x^2-4}{x-2}(\sqrt{x-1}+1) =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}(\sqrt{x-1}+1) = (x+2)(\sqrt{x-1}+1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x-1}+1) = 4\cdot 2 = 8.$$

(c) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(1-x^2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} = -\frac{1}{8}.$$

5. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1} = \frac{x^2 \cdot (\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{1+\alpha x-(x^2+2x+1)} = \frac{x^2 \cdot (\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{-x^2+(\alpha-2)x} = \frac{x \cdot (\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{-x+\alpha-2},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \left(-(\sqrt{1+2x}+x+1)\right) = -2 & (\alpha = 2), \\ \\ \dfrac{0}{\alpha-2} = 0 & (\alpha \neq 2). \end{cases}$$

(b) Világos, hogy

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \lim_{x\to\alpha} \frac{1+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}}{\sqrt{x+\alpha}} = \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{\sqrt{x+\alpha}} \cdot \lim_{x\to\alpha} \left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \lim_{x\to\alpha} \left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \lim_{x\to\alpha} \left(1+\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})\sqrt{x-\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \lim_{x\to\alpha} \left(1+\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

6. Világos, hogy $a \leq 0$ esetén a keresett határérték $+\infty$. Tegyük fel most, hogy $a > 0$. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b) = \frac{x^2-x+1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} = \frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b},$$

ezért két esetet különböztetünk meg:

1. eset ($a^2 \neq 1$):

$$\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\frac{x}{x}\cdot\frac{(1-a^2)x-(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}=:\frac{g(x)}{h(x)}\qquad(x\neq 0),$$

ahol

$$\lim_{+\infty} g=\begin{cases}+\infty & (a^2<1),\\ -\infty & (a^2>1)\end{cases}\qquad \lim_{+\infty} h=1+a\ (\neq 0).$$

Így

$$\lim_{+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b))=\begin{cases}+\infty & (a<1),\\ -\infty & (a>1).\end{cases}$$

2. eset ($a^2=1$, azaz $a=1$): $\lim\limits_{+\infty} g=-2b-1$; $\lim\limits_{+\infty} h=2$. Így

$$\lim_{+\infty} f=-\frac{1+2b}{2}=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad b=-\frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\lim_{+\infty} f=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad \boxed{a=1,\ b=-\frac{1}{2}}.$$

7. (a) Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)^3}+(x+1)^2}{\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)^3}+(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)^3}+(x+1)^2\right]}{(1+5x)-(x+1)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)^3}+(x+1)^2\right]}{1+5x-x^3-3x^2-3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)^3}+(x+1)^2}{-x^2-3x+2}=0\cdot\frac{3}{2}=0.$$

(b) Mivel bármely $0\neq x\in(-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}&=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\\&=\frac{2x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}},\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{2}{3}.$$

8. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1}=-1.$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right\}}{\cancel{x}\left\{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right\}} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7}\left\{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt[5]{13}}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}}\right\}}{\sqrt[3]{x^4}\left\{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\}} = (+\infty)\cdot\frac{1+0}{1-0} = +\infty.$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\left\{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{x^{11}}}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^{20}}}}\right\}}{\sqrt[3]{x^7}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} = 0\cdot\frac{1-0}{1} = 0.$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

Útm.

1. Mivel tetszőleges $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$= \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{7+x^3}}{x-1} - \frac{\sqrt{3+x^2}}{x-1} =$$

$$= \frac{7+x^3-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{(7+x^3)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} - \frac{3+x^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{(7+x^3)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} - \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1} = \frac{1+1+1}{4+4+4} - \frac{1+1}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

2. Világos, hogy bármely $x \in (1, +\infty)$ számra

$$\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) = \sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{x^3+1-(x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[6]{x^5}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)},$$

így

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) = \frac{2}{(+\infty)(1+1)} = 0.$$

3. Mivel bármely $x \in (0, +\infty)$ számra

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1},$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+x}-\sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Mivel bármely $x \in (0, +\infty)$ számra

$$x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = x^3\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} =$$

$$= x^3\cdot\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} = x^3\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} =$$

$$= x^3\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2} =$$

$$= \quad x^3 \cdot \frac{x^4+1-x^4}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)} =$$

$$= \quad \frac{x^3}{x^3\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)},$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot(1+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

5. Mivel tetszőleges $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} \quad = \quad \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1} =$$

$$= \quad \frac{(1+2x+1)\left(\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(2+x+x^3)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)} =$$

$$= \quad \frac{2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x^3}+\sqrt[3]{x^6}\right)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+2)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)},$$

ezért

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} = \frac{2\cdot(1+1+1)}{(1+1+2)\cdot(1+1+1)} = \frac{1}{2}.$$

6. Világos, hogy

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+2^3} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{x-6+8}{(x+2)(x^2-2x+4)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}-\sqrt[3]{(x-6)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}-\sqrt[3]{(x-6)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(4+4+4)\cdot(4+4+4)} = \frac{1}{144}.$$

Feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és tegyük fel, hogy $\lim_a f =: A \in (0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$x \in \mathcal{D}_f \cap (K_\delta(a)\backslash\{a\}) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > 0$$

teljesül!

Útm. A határérték definíciója alapján van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f \cap (K_\delta(a)\backslash\{a\})$ esetén $|f(x) - A| < A$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha

$$-A < f(x) - A < A, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < f(x) < 2A.$$

Megjegyzés. Az állítás nem fordítható meg, ui. az

$$f(x) := \begin{cases} |x| & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény csak pozitív értéket vesz fel, de $\lim_a f = 0$. Igaz viszont a következő (az átviteli elvvel könnyen bebizonyítható) állítás:

Ha f-nek van a-ban határértéke és

$$f(x) \geq 0 \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_f \cap ((a-\delta, a+\delta))),$$

akkor $\lim\limits_a f \geq 0$.

Feladat. Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ határértéket!

1. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

2. $f(x) := \sqrt{x^3+1}-x$;

3. $f(x) := \sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

4. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

5. $f(x) := \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$;

6. $f(x) := \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$;

7. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

8. $f(x) := \dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$;

9. $f(x) := \sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$;

10. $f(x) := \phi(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$,

$\phi(x) \in \left\{\sqrt[3]{x^2}, \sqrt{x^3}\right\}$;

11. $f(x) := x^3\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$;

12. $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$;

13. $f(x) := \sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$;

14. $f(x) := \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$.

Útm.

1. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1} \longrightarrow \frac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1} = -1 \qquad (x \to +\infty).$$

2. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{x^3+1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^3+1}+x}{\sqrt{x^3+1}+x} = \frac{x^3+1-x^2}{\sqrt{x^3+1}+x} = \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \\ &= x^{3/2}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} \longrightarrow +\infty\cdot 1 = +\infty \quad (x \to +\infty). \end{aligned}$$

3. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \\ &= \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \\ &= \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \\ &= \frac{4x}{x^{4/3}\cdot\left\{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right\}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}} \longrightarrow 0\cdot\frac{4}{3} = 0 \quad (x \to +\infty). \end{aligned}$$

4. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x \cdot \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad (x \to +\infty).$$

5. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén az $x \to \infty$ határátmenetben

$$f(x) = \frac{x^{7/5} \cdot \left(\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}} + \sqrt[4]{\frac{2}{x^{13/5}} - \frac{1}{x^{21/5}}}\right)}{x^{4/3} \cdot \left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{1/3}}}\right)} = \frac{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}} + \sqrt[4]{\frac{2}{x^{13/5}} - \frac{1}{x^{21/5}}}}{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{1/3}}}} \longrightarrow (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1-0} = +\infty.$$

6. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén az $x \to \infty$ határátmenetben

$$f(x) = \frac{x^{4/3} \cdot \left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x^{11/3}} + \frac{4}{x^{20/3}}}\right)}{x^{7/3} \cdot \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}\right)} = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x^{11/3}} + \frac{4}{x^{20/3}}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{1-0}{1} = 0.$$

7. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x \cdot \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad (x \to +\infty).$$

8. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10} + \left(1+\frac{2}{x}\right)^{10} + \ldots + \left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}}{1+\left(\frac{10}{x}\right)^{10}} \longrightarrow \frac{100 \cdot 1}{1+0} = 100 \quad (x \to +\infty).$$

9. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}}{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}} = \\ &= \frac{x^2-2x-1-x^2+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}} = \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}} = \\ &= \frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} \longrightarrow \frac{5-0}{1+1} = \frac{5}{2} \quad (x \to +\infty). \end{aligned}$$

10. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= \phi(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right) = \\
&= \phi(x)\cdot\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right) = \\
&= \phi(x)\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)} = \\
&= \phi(x)\cdot\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \\
&= \phi(x)\cdot\frac{x-1-x-1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}.
\end{aligned}$$

Ha

- $\phi(x) = \sqrt[3]{x^2}$, akkor az $x \longrightarrow +\infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-2x^{2/3}}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \\
&= x^{-5/6}\cdot\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \longrightarrow \\
&\longrightarrow 0\cdot\frac{-2}{8} = 0;
\end{aligned}$$

- $\phi(x)=\sqrt{x^3}$, akkor az $x\to+\infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-2x^{3/2}}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\\
&= \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\longrightarrow\\
&\longrightarrow \frac{-2}{(1+1)(1+1)(1+1)}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

11. Tetszőleges $0<x\in\mathbb{R}$ esetén az $x\to+\infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}=\\
&= x^3\cdot\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}=x^3\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\\
&= x^3\cdot\frac{x^4+1-x^4}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}=\\
&= \frac{x^3}{x^3\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)}\longrightarrow\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)(1+1)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

12. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}= \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}\longrightarrow\frac{2}{1+1}=1 \qquad (x\to+\infty). \end{aligned}$$

13. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{x^3+1-x^3+1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}= \\ &= \sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{2}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)}=\frac{2}{x^{5/6}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)}\longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{2}{(+\infty)\cdot(1+1)}=0 \quad (x\to+\infty). \end{aligned}$$

14. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\longrightarrow 0-0=0 \quad (x\to+\infty). \qquad \blacksquare$$

Definíció. Legyenek $f, g \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre

$$\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g =: \mathcal{D}\neq\emptyset \qquad \text{és} \qquad f(x)>0 \quad (x\in\mathcal{D})$$

teljesül. Ekkor

$$(f^g)(x) := f(x)^{g(x)} := \exp\left(g(x)\cdot\ln(f(x))\right) \qquad (x\in\mathcal{D}).$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

határértékeket!

Útm. Mivel minden $x \in (0,+\infty)$ esetén $x-1<[x]\leq x$, ezért

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

így a Sandwich-tétel alapján

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

11. gyakorlat (2025. április 30.)

Szükséges ismeretek.

- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?
- Mit tud mondani monoton függvények határértékéről?
- Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát!
- Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?
- Írja le a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet!
- Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?
- Milyen tételt ismer a folytonos függvények előjeltartásáról?
- Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt!

Órai feladatok

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $0 \notin \mathcal{R}_f$, ill. $\lim_a f = 0$, akkor

$$\lim_a \frac{\sin \circ f}{f} = 1$$

teljesül!

Útm. Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^5 \cdot \varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{(2n+5)!},$$

így

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+5)!}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

és

$$|\varphi(x)|<1\quad (|x|<1),$$

ui. a teljes indukcióval könnyen belátható

$$n!>2^n\qquad (4\leq n\in\mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenség következtében tertszőleges $x\in(-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+5)!}\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n+5)!}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)!}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+5}}=\\ &= \frac{1}{32}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{32}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{24}<1.\end{aligned}$$

A fentiek alapján bármely $a\neq x\in\mathcal{D}_f$ esetén

$$\left(\frac{\sin\circ f}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot\left(f(x)-\frac{f^3(x)}{6}+f^5(x)\cdot\varphi(f(x))\right).$$

Mivel $\lim\limits_a f=0$, ezért az $\varepsilon:=1$ számhoz van olyan $\delta>0$, hogy bármely $x\in(K_\delta(a)\backslash\{a\})\cap\mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x)|=|f(x)-0|<1,\qquad \text{azaz}\qquad |\varphi(f(x))|<1.$$

Így

$$\lim_a\frac{\sin\circ f}{f}=1-\frac{(0)^2}{6}+0=1.$$

Emlékeztető. Ha a

$$\sum (a_n(x-c)^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara $R >$ és

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (x \in K_R(c)),$$

akor bármely $b \in K_R(c)$ esetén

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-c)^n.$$

Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $b \neq 0$. Számítsuk ki a következő határértékeket, amennyiben azok léteznek!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$; 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$; 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$.

Útm.

1. Világos, hogy

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{\frac{\sin(ax)}{ax}}{\frac{\sin(bx)}{bx}} \cdot \frac{ax}{bx} \longrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} \qquad (x \to 0).$$

2. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x \to 0$ határátmenetben

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \longrightarrow 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x \to 0$ határátmenetben

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} =$$

$$= \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \longrightarrow 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot x \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \qquad (x \to 0).$$

4. Némi átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)}}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\sqrt{\alpha x^2+1}-1}$ $(\alpha > 0)$.

Útm.

1. Gyökteleníve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})}{1+x\sin(x)-\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}\right)}{x^2 \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} + x^2 \cdot \frac{\sin(x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}}{\frac{1-\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1+1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3}.$$

2. A fenti módszert ismét alkalmazva

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\sqrt{\alpha x^2+1}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)\left(\sqrt{\alpha x^2+1}+1\right)}{\alpha x^2+1-1} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\left(\sqrt{\alpha x^2+1}+1\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha}\cdot 1\cdot\left(\sqrt{0+1}+1\right) = \frac{2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$. A hatványsorokra vonatkozó ismeretek alkalmazásával határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x$; 3. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Útm.

1. Felhasználjuk, hogy

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ekor ui.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!} > x,$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

3. Legyen $x = -y$. Ekkor

$$x \to -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad y \to +\infty,$$

így

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

4. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - 2x}{x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-1)^n x^n}{n!} - 2x}{x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 2x}{x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n+1)!} - 2}{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3!} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} \right)}{\frac{1}{3!} + \left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} \right)} = \frac{2\left(\frac{1}{3!} - 0\right)}{\frac{1}{3!} + 0} = 2.$$

5. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(bx)^n}{n!}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n!}\cdot x^n}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n!}\cdot x^n}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n!}\cdot x^{n-1}}{1} = \lim_{x\to 0}\left\{a-b+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n!}\cdot x^{n-1}\right\} = a-b.$$

Házi feladatok

Feladat.

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(ax)}{\operatorname{tg}(bx)}\ (a,b\in\mathbb{R}:\ b\neq 0);\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin(x)};$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cos(2x)+\sin(3x)}.$$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cdot\cos(2x)}{1-\cos(x)};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(2x)}{\sin(3x)}.$$

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^3+x^2};$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{\sin(2x)};\qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x-\pi}.$$

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos(x)-\sin(x)+1}{\cos(x)+\sin(x)-1};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)+\sin^2(2x)}{2x^2-\sin^2(x)}.$$

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\cos(x)-e^{-x}};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)+\sqrt{\cos(2x)}-1}{(e^x-1)^2}.$$

6. Számítsuk ki a

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{x})-\dfrac{1}{1-x}}{x+\sin(2x)};\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x-1}$$

határértékeket, amennyiben azok létezik!

Útm.

1. (a) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(ax)}{\mathrm{tg}(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\frac{\cos(bx)}{\cos(ax)}=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin(bx)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(bx)}{\cos(ax)}=\frac{a}{b}.$$

(b) Három módszerrel is kiszámítjuk az adott határértéket.

1. módszer. Trigonometrikus összefüggéseket alkalmazva (vö. Mat. alapok, 38-39. old.) látható, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(4x)}{\sin(x)}=2\cdot\lim_{x\to 0}\cos(4x)=2\cdot 1=2.$$

2. módszer. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{\sin(5x)}{5x}-3\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{5-3}{1}=2.$$

3. módszer. Fehasználva a sin függvény definícióját látható, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(5x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}-3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5-3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}-3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}=\frac{5-3}{1}=2.$$

(c) Mivel

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=5-2=3,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cos(2x)+\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)+\frac{\sin(3x)}{x}}3\cdot\frac{1}{1+3}=\frac{3}{4}.$$

2. (a) Mivel bármely $0\neq x\in(-\pi,\pi)$ esetén

$$\frac{1-\cos(x)\cdot\cos(2x)}{1-\cos(x)}=\frac{1-\cos(x)+\cos(x)\cdot(1-\cos(2x))}{1-\cos(x)}=1+\cos(x)\cdot\frac{1-\cos(2x)}{1-\cos(x)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cdot\cos(2x)}{1-\cos(x)}=1+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x)}{2\sin^2(x/2)}=1+\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}{2\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2}\cdot 4=5.$$

(b) Mivel bármely $0\neq x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(2x)}{\sin(3x)}=\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(2x)}{\sin(3x)}=\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot x-\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x}=\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}-\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2}{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3}$$

és

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1,\qquad \text{ill.}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1\quad(0\neq a\in\mathbb{R}),$$

ezért – felhasználva a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételt –, ezt kapjuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(2x)}{\sin(3x)}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}.$$

3. (a) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}\cdot\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

(b) Mivel bármely $0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén

$$\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^3+x^2} = \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{\cos(2x)}}{\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{\cos(2x)}} =$$

$$= \frac{1+\sin^2(x)-\cos(2x)}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{\cos(2x)}\right)} =$$

$$= \frac{1+\sin^2(x)-\cos(2x)}{x^2} \cdot \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{\cos(2x)}\right)} =$$

$$= \left\{4 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{4x^2} + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{\cos(2x)}\right)} =$$

$$= \left\{4 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{\cos(2x)}\right)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^3+x^2} = \left\{4 \cdot \frac{1}{2} + 1^2\right\} \cdot \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{3}{2}.$$

(c) Ha $k \in \mathbb{Z}$ és $k\pi \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}{\sin(2x)} &= \frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}{\sin(2x)} \cdot \frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}} = \\
&= \frac{-2\,\mathrm{tg}(x)}{2\sin(x)\cos(x)\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}\right)} = \\
&= \frac{-1}{\cos^2(x)\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}\right)},
\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}{\sin(2x)} = \frac{-1}{(-1)^2(1+1)} = -\frac{1}{2}.$$

(d) Az $y := x - \pi$ jelölés bevezetésével a sin függvény páratlan volta és a tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén fennálló $\sin(y+\pi) = -y\sin(y)$ egyenlőség következtében azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(\sin(\sin(y)))}{\sin(\sin(y))} \cdot \frac{\sin(\sin(y))}{\sin(y)} \cdot \frac{\sin(y)}{y} = -1.$$

4. (a) Elemi átalakítások segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos(x)-\sin(x)+1}{\cos(x)+\sin(x)-1} &= = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1.
\end{aligned}$$

(b) Korábbi eredményeink tükrében

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)+\sin^2(2x)}{2x^2-\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\left(1+\cos(x)+\cos^2(x)\right)+\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\cdot 4}{2-\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2}\cdot 3+1\cdot 4}{2-1} = \frac{11}{2}.$$

5. (a) Mivel bármely $x\in\mathbb{R}$: $\cos(x)-e^{-x}\neq 0$ (pl. $x\neq 0$) esetén

$$\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\cos(x)-e^{-x}} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}-x-1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}-\dfrac{x^n}{n!}\right\}} =: \frac{\sqrt{x^2\cdot f(x)}}{x\cdot g(x)},$$

és

$$\frac{\sqrt{x^2\cdot f(x)}}{x\cdot g(x)} = \frac{|x|}{x}\cdot\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)},$$

ill.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{f(0)} = \sqrt{\frac{1}{2!}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1,$$

továbbá

$$\nexists \lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x) \qquad \Big/ \lim_{x\to 0\pm 0}\operatorname{sgn}(x) = \pm 1 \Big/,$$

ezért

$$\nexists \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\cos(x)-e^{-x}}.$$

(b) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sin^2(x) + \sqrt{\cos(2x)} - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{\sin^2(x) + \frac{\cos(2x)-1}{\sqrt{\cos(2x)+1}}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 - 4x^2 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}+1}}{x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right)^2},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) + \sqrt{\cos(2x)} - 1}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}+1}}{\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(1+0)^2} = 0.$$

6. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{e^{-x} - e^{3x}}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left\{e^{-x} - e^{3x}\right\} = \frac{1}{x} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}\right\} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \cdot \{(-1)^n - 3^n\} =$$

$$= -4 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \cdot \{(-1)^n - 3^n\},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}=-4+0=-4.$$

(b) Jól látható, hogy ha $x\in(0,1)$, akkor

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{x})-\dfrac{1}{1-x}}{x+\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}x^n}{\displaystyle x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}-1\right)x^n}{\displaystyle 3x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle -\frac{3}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}-1\right)x^{n-1}}{\displaystyle 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2)^{2n+1}\cdot(x)^{2n}}{(2n+1)!}} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Világos, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{1+(+\infty)} = 0.$$

12. gyakorlat (2025. április 30.)

Szükséges ismeretek.

- Definiálja a megszüntethető szakadási hely fogalmát!
- Definiálja az elsőfajú szakadási hely fogalmát!
- Mit tud mondani korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?
- Hogyan szól a Weierstraß-tétel?
- Mit mond ki a Bolzano-tétel?
- Mit jelent az, hogy egy függvény Darboux-tulajdonságú?
- Hogy szól az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel?

Órai feladatok

Emlékeztető. Azt mondtuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $f \in \mathfrak{C}[a]$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \qquad (|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Megjegyezzük, hogy ha f az **állandófüggvény**, akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$, ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz minden $\delta > 0$ jó választás.

Feladat. A definíció alapján mutassuk meg, hogy folytonosak az alábbi függvények!

$$1.\ f(x) := |x^2 - 4| \quad (x \in [-3, 5]); \qquad 2.\ f(x) := x^2 + 2x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Útm.

1. Legyen $a \in [-3,5]$, $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor bármely $x \in [-3,5]$ esetén (vö. háromszög-egyenlőtlenség)

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= \big||x^2-4|-|a^2-4|\big| \leq \big|(x^2-4)-(a^2-4)\big| = \big|x^2-a^2\big| = |x+a|\cdot|x-a| \leq \\ &\leq (|x|+|a|)\cdot|x-a| \leq 10\cdot|x-a| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-a| < \varepsilon/10. \end{aligned}$$

Ha tehát $\delta := \frac{\varepsilon}{10}$, akkor bármely $x \in [-3,5]$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

2. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ adott. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= |x^2+2x-3-(a^2+2a-3)| = |x^2-a^2+2x-2a| = \\ &= |x+a+2|\cdot|x-a|. \end{aligned}$$

Ha $x \in (a-1, a+1)$, akkor

$$|x+a+2| = |x-a+2a+2| \leq |x-a|+|2a|+2 \leq 2|a|+3,$$

így

$$|f(x)-f(a)| \leq (2|a|+3)\cdot|x-a| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-a| < \varepsilon/(2|a|+3).$$

A

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|a|+3}\right\}$$

választás tehát megfelelő, azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$. Milyen tulajdonságát fejezi ki az f függvénynek az alábbi állítás?

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f: \qquad (|x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon).$$

Útm. A fenteél azt jelenti, hogy f állandó az a pont δ-sugarú környezetében:

$$f(x) = f(a) \qquad (x \in (a-\delta, a+\delta)).$$

Feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor az a pontnak van olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel!

Útm. Az f függvény a pontbeli folytonossága következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz, így az $\varepsilon := f(a)$-hoz is van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, azaz

$$|f(x) - f(a)| < f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -f(a) < f(x) - f(a) < f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < f(x) < 2f(a).$$

Emlékeztető (folytonosságra vonatkozó átviteli elv). Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\,(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n) = a \quad \text{esetén} \quad \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(a).$$

ekvivalencia.

Megjegyzés. Az, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **nem folytonos** valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, azt jelenti, hogy

$$f \notin \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\,\varepsilon > 0\;\forall\,\delta > 0\;\exists\,x \in \mathcal{D}_f : \quad (|x - a| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon).$$

Sorozatokkal ugyanez megfogalmazva:

$$\exists\,x_n \in \mathcal{D}_f\ (n \in \mathbb{N}) : \ \lim(x_n) = a \qquad \text{és} \qquad (\nexists\,\lim(f(x_n)) \quad \vee \quad \lim(f(x_n)) \neq f(a)).$$

Példa. Az

$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény, ill. $a \in \mathbb{Z}$ esetén $f \notin \mathfrak{C}[a]$, ui. ha

$$x_n := a - \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\lim(x_n) = a$ és

$$\lim(f(x_n)) = \lim\left(a - \frac{1}{n} - \left[a - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim\left(a - \frac{1}{n} - (a-1)\right) = 1 \neq 0 = f(a).$$

Emlékeztető (a határérték és a folytonosság kapcsolata). Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_a f = f(a)$$

ekvivalencia.

Megjegyezzük, hogy ha $a \in \mathcal{D}_f$, de $a \notin \mathcal{D}_f'$, akkor az a pont a $\mathcal{D}_f$ izolált pontja, így a folytonosság definíciója alapján $f \in \mathfrak{C}[a]$.

Feladat. Jelölje $r > 0$ egy $m > 0$ tömegű testnek a Föld középpontjától vett távolságát. A Föld nehézségi, ill. gravitációs erőtere által a testre gyakorolt erő nagysága:

$$F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad F(r) := \begin{cases} \dfrac{\gamma m M r}{R^3} & (r < R), \\[2ex] \dfrac{\gamma m M}{r^2} & (r \geq R), \end{cases}$$

ahol M a Föld tömege, R a Föld sugara, $\gamma > 0$ pedig a gravitációs állandó. Folytonosan függ-e a gravitációs erő az r távolságtól, azaz folytonos-e fenti függvény?

Útm. Világos, hogy $F|_{(0,R)}$ és $F|_{(R,+\infty)}$ folytonos. Mivel

$$R \in \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_F' \qquad \text{és} \qquad \lim_{r \to R} F(r) = \frac{\gamma m M}{R^2} = F(R),$$

ezért F folytonos.

Tételek.

1. Ha $f, g \in \mathfrak{C}[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor
$$\lambda f \in \mathfrak{C}[a], \qquad f+g \in \mathfrak{C}[a], \qquad f \cdot g \in \mathfrak{C}[a], \qquad \frac{f}{g} \in \mathfrak{C}[a] \ \ (\text{ha } g(a) \neq 0).$$

2. Ha $g \in \mathfrak{C}[a]$ és $f \in \mathfrak{C}[g(a)]$, akkor $f \circ g \in \mathfrak{C}[a]$.

3. A hatványfüggvények folytonosak. Következésképpen a polinomok, ill. a racionális függvények is folytonosak.

4. Minden hatványsor összefüggvénye folytonos. Következésképpen az exp, a sin, a cos, az sh és a ch függvények folytonosak.

5. Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, valamint $a \in \mathcal{D}_g'$. Ha $\lim_{x\to a} g(x) =: b \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathcal{D}_f$ és $f \in \mathfrak{C}[b]$, akkor
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

Feladat. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén folytonos az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény?

1. $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1 & (x \leq 1), \\ 3 - x & (x > 1); \end{cases}$

2. $f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) & (x > 0), \\ \alpha - 2x & (x \leq 0). \end{cases}$

Útm.

1. Világos (vö. fenti tételek), hogy f folytonos a $(-\infty, 1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumok minden pontjában, azaz az $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ halmazon. Mivel
$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} (\alpha x^2 + 4x - 1) = \alpha x^2 + 4 - 1 = \alpha + 3 = f(1)$$
és
$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} (3 - x) = 3 - 1 = 2,$$
ezért
$$f \in \mathfrak{C}[1] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha + 3 = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -1.$$

2. A korábbiak fényében látható, hogy f folytonos a $(-\infty, 0)$ és az $(0, +\infty)$ intervallumok minden pontjában, azaz az $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ halmazon. Mivel

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x\to 0-0}(\alpha - 2x) = \alpha = f(0)$$

és

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x\to 0+0} \exp\left(-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0+0}\left(-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp(-\infty) = 0,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{C}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 0.$$

Feladat. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén lesz az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} & (x \in (0,1)), \\ \\ 3\alpha x^2 + \alpha^2 & (x \in [1, +\infty)) \end{cases}$$

folytonos az $a := 1$ pontban?

Útm. Mivel

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{(1-x^2)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2(x-1)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1-0} \frac{(1+x)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2} = -2$$

és

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0}(3\alpha x^2 + \alpha^2) = 3\alpha + \alpha^2 = f(1)\,,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{C}[1] \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 = 3\alpha + \alpha^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{-2; -1\}.$$

Definíció (szakadási helyek osztályozása). Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \in \mathcal{D}_f$ az f függvény **szakadási hely**e, ha $f \notin \mathfrak{C}[a]$. A szakadás

- **elsőfajú**, ha $\exists\, f(a \pm 0) \in \mathbb{R}$, speciálisan
  1. **megszüntethető szakadás**ról beszélünk, ha $f(a-0) = f(a+0)$;
  2. **ugrás**ról beszélünk, ha $f(a-0) \neq f(a+0)$. Az $|f(a+0) - f(a-0)|$ számot az f függvény a **pontbeli ugrás**ának nevezzük.
- **másodfajú**, ha nem elsőfajú.

Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} & (x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}), \\[2ex] \alpha & (x=2), \\[2ex] 0 & (x=5). \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Útm. Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}$ esetén

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim\limits_{2} f = \dfrac{1}{3}$, tehát

$$f \in \mathfrak{C}[2] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3},$$

egyébként f-nek 2-ben megszüntethető szakadása van. Mivel

$$\lim_{5\pm0} f = \pm\infty,$$

ezért f-nek 5-ben másodfajú szakadása van.

Feladat. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint azok típusait!

1. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} & (x<1), \\ \sqrt{x+3} & (1 \le x \le 6), \\ \dfrac{\sin(2x-12)}{x-6} & (x>6); \end{cases}$ 2. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\alpha x)}{x^2} & (x<0), \\ \alpha - \beta x^3 & (0 \le x \le 1), \\ \dfrac{\alpha x+\beta}{x^2-1} & (x>1). \end{cases}$

Útm.

1. Nyilvánvaló, hogy f folytonos a $(-\infty, 1)$, $(1, 6)$, $(6, +\infty)$ intervallumok mindegyikén (vö. korábbi tételek). Mivel tetszőleges $x \in (-\infty, 1)$ esetén

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2},$$

ezért

- $f \in \mathfrak{C}[1]$, hiszen

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-3}{x-2} = 3 = f(1) = \lim_{x \to 1+0} \sqrt{x+3} = \lim_{1+0} f.$$

- $f \notin \mathfrak{C}[6]$, hiszen

$$\lim_{6-0} f = \lim_{x\to 6-0} \sqrt{x+3} = 3 = f(6)$$

és

$$\lim_{6+0} f = \lim_{x\to 6+0} \frac{\sin(2x-12)}{x-6} = 2 \cdot \lim_{x\to 6+0} \frac{\sin(2x-12)}{2x-12} = 2 \cdot \lim_{y \to y+0} \frac{\sin(y)}{y} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ez azt is jelenti, hogy f-nek elsőfajú szakadása van az $a := 6$ pontban.

2. Látható (vö. korábbi tételek), hogy f folytonos a $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ intervallumok mindegyikén. Ha

- $a := 0$, akkor

(a) $\alpha = 0$ esetén $\lim_{0-0} f = 0 = f(0) = \lim_{0+0} f$, azaz $f \in \mathfrak{C}[0]$.

(b) $\alpha \neq 0$ esetén

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2} = \alpha^2 \cdot \lim_{x\to 0-0} \left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\right)^2 = \alpha^2 \cdot 1 = \alpha^2$$

és

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x\to 0+0} (\alpha - \beta x^3) = \alpha.$$

Ez azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{C}[0]$ pontosan akkor teljesül, ha $\beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $\alpha^2 = \alpha$, azaz $\alpha = 1$.

(c) $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$, akkor tetszőleges $\beta \in \mathbb{R}$ esetén f-nek elsőfajú szakadása van az $a := 0$ pontban.

- $a := 1$, akkor

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} (\alpha - \beta x^3) = \alpha - \beta$$

és

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\alpha(x-1) + \alpha + \beta}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1+0} \left(\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\alpha + \beta}{(x-1)(x+1)}\right).$$

Így

(a) $\alpha + \beta = 0$ esetén

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} \frac{\alpha}{x+1} = \frac{\alpha}{2}.$$

Tehát $f \in \mathfrak{C}[1]$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha - \beta = \alpha/2$, azaz $\beta = \alpha/2$. Az $\alpha + \beta = 0$ egyenlőség így csak $\alpha\beta = 0$ esetben áll fenn. Ha $\alpha = -\beta \neq 0$, akkor f-nek elsőfajú szakadása van az $a := 1$ pontban.

(b) $\alpha + \beta \neq 0$ esetén

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} \frac{\alpha}{x+1} + \lim_{x\to 1+0} \frac{\alpha + \beta}{(x-1)(x+1)} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & (\alpha + \beta > 0), \\ -\infty & (\alpha + \beta < 0). \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek másodfajú szakadása van az $a := 1$ pontban.

Emlékeztető (Bolzano-Darboux-tétel). Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, továbbá az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor f **Darboux-tulajdonságú**: minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz, azaz

- $f(a) < f(b)$, akkor bármely $\eta \in (f(a), f(b))$ esetén van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $f(\xi) = \eta$;
- $f(a) > f(b)$, akkor bármely $\eta \in (f(b), f(a))$ esetén van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $f(\xi) = \eta$.

Tétel (Bolzano-tétel). Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, továbbá az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor f-nek van **zérushelye**, azaz alkalmas $\xi \in (a, b)$ számra $f(\xi) = 0$.

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\ln(x) + 3 = e^x$$

egyenletnek van megoldása a $(0, +\infty)$ intervallumon. Valóban, ha

$$f(x) := \ln(x) + 3 - e^x \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}[1, 2]$, továbbá

$$f(1) \cdot f(2) = (\ln(1) + 3 - e) \cdot \left(\ln(2) + 3 - e^2\right) < 0,$$

ui.

$$\ln(1) + 3 - e = 3 - e > 0 \qquad \text{és} \qquad \ln(2) + 3 - e^2 < \ln(e) + 3 - e^2 = 4 - e^2 < e^2 - e^2 = 0.$$

Következésképpen van olyan $\xi \in (1, 2)$, amelyre

$$f(\xi) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(\xi) + 3 = e^{\xi}.$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van legalább egy valós gyöke!

Útm. Legyen

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

páratlan (n-ed)fokú polinom. Ekkor, mint tudjuk,

$$\lim_{+\infty} p = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0), \\ -\infty & (a_n < 0) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{-\infty} p = \begin{cases} -\infty & (a_n > 0), \\ +\infty & (a_n < 0). \end{cases}$$

Így van olyan $a < b$, hogy

$$\operatorname{sgn}(p(a) \cdot p(b)) = -1.$$

Mivel p folytonos, ezért van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $p(\xi) = 0$.

A Bolzano-téel bizonyítása során (vö. 11. $\boxed{\textbf{EA}}$)valójában egy közelítő eljárást alkalmaztunk az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására. Ez az ún. **intervallumfelezési eljárás** (vö. numerikus analízis). Ez a közelítő eljárás (**iterációs módszer**) a következő: legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) \cdot f(b) < 0$, valamint $x_0 := a$, $x_1 := b$ és

$$x_{n+1} := \frac{x_n + x_{s_n}}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$s_n := \max\{k \in \{0, \ldots, n\} : \ f(x_n) \cdot f(x_k) \leq 0\}$$[9]

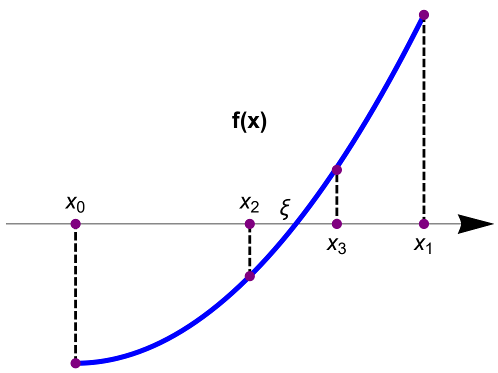
Ekkor teljes indukcióval

$$|x_m - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n} \qquad (n \leq m \in \mathbb{N}),$$

így létezik a

$$\xi := \lim(x_n) \in [a, b].$$

határérték. Az f folytonossága és az átviteli elv miatt $f(\xi) = 0$.



6. ábra. Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása: ξ.

[9]Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $s_n = n$, azaz $f(x_n)^2 \leq 0 \iff f(x_n) = 0$, akkor $x_k = x_n$ $(n \leq k \in \mathbb{N})$.

Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$p(x) := x^3 + x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak pontosan egy valós gyöke van, és számítsuk ki ezt a gyököt 10^{-1} pontossággal!

Útm. Mivel

$$p(0) = -1 < 0, \qquad p(1) = 1 > 0,$$

ezért Bolzano-tétel következtében van olyan $\xi \in (0,1)$, hogy $p(\xi) = 0$. Mivel bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén

$$\begin{aligned} p(x) - p(y) &= x^3 + x - 1 - (y^3 + y - 1) = x^3 - y^3 + x - y = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = \\ &= (x-y)\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1\right) < 0, \end{aligned}$$

ezért egyetlen ilyen ξ létezik, melynek közelítése:

n	x_n	$h_n = \dfrac{b-a}{2^n}$	$\operatorname{sgn}(f(x_n))$
0	0	1	-1
1	1	$5 \cdot 10^{-1}$	1
2	$1/2$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	-1
3	$3/4$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	1
4	$5/8$	$0.625 \cdot 10^{-1} < 10^{-1}$	-1
5	$11/16$		

Így a keresett közelítő érték: $\xi \approx 11/16$.

Emlékeztető (Weiertrsaß-tétel). Ha $f \in \mathfrak{C}[a, b]$, akkor f-nek van abszolút minimuma és abszolút maximuma, azaz alkalmas $\alpha, \beta \in [a, b]$ esetén fennáll az

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \qquad (x \in [a, b])$$

egyenlőtlenségpár.

Feladat. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = +\infty$. Mutassuk meg, hogy f-nek van abszolút minimuma.

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy f alulról korlátos. A $\lim\limits_{x\to-\infty} f = +\infty$ határérték-reláció következtében a $P := 1$ választással alkalmas $0 > a \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) > 1 \qquad (\mathbb{R} \ni x < a).$$

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$ határérték-reláció következtében az $P := 1$ választással alkalmas $0 < b \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) > 1 \qquad (b < x \in \mathbb{R}).$$

Mindez azt jelenti, hogy f alulról korlátos az $\mathbb{R}\backslash[a, b]$ halmazon. Vizszont f folytonossága (így $f \in \mathfrak{C}[a, b]$) következtében f (alulról) korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy f alulról korlátos.

2. lépés. Legyen

$$m := \inf(\mathcal{R}_f) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ekkor f alulról való korlátossága következtében $m \in \mathbb{R}$. Ha most $P := m + 1$ akkor alkalmas $0 > \xi \in \mathbb{R}$, ill. $0 < \eta \in \mathbb{R}$ számokkal

$$f(x) > m + 1 \qquad (x \in (-\infty, \xi) \cup (\eta, +\infty)).$$

Következésképpen

$$m = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [\xi, \eta]\}.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}[\xi, \eta]$, hiszen f folytonos, ezért alkalmas $\alpha \in [\xi, \eta]$ esetén $f(\alpha) = m$. Mindez azt jelenti, hogy α az f abszolút minimumhelye, $f(\alpha)$ pedig abszolút minimuma.

Házi feladatok

Feladat. Folytonos-e az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

1. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f$:
$$0 < |x - a| < \delta \qquad \text{és} \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$
2. $\exists\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f$:
$$(|x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon);$$
3. $\forall\, \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f$:
$$(|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |x - a| < \delta);$$
4. $\forall\, \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f$:
$$(|x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon);$$
5. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f$:
$$(|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |x - a| < \delta);$$
6. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists \delta_n > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f$:
$$(|x - a| < \delta_n \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < 1/n);$$
7. minden $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozat esetén az $n \to \infty$ határátmenetben
$$f(x_n) \longrightarrow f(a) \qquad \Longrightarrow \qquad x_n \longrightarrow a.$$

Útm.

1. Nem folytonos. Legyen ui. f a **Dirichlet-függvény** (Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

német matematikus(, azaz

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Ekkor teljesülnek a feladat feltételei (tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum esetén $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ és $I \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, azaz minden (valódi) intervallumban van racionális és irracionális szám). Megmutatjuk, hogy f egyetlen $a \in \mathbb{R}$ pontban sem folytnos:

- ha $a \in \mathbb{Q}$ és $\varepsilon := 1/2$, akkor tetszőleges $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, hogy $|x - a| < \delta$. Ekkor $|f(x) - f(a)| = 1 > \varepsilon$, azaz $f \notin \mathfrak{C}[a]$.
- ha $a \notin \mathbb{Q}$, akkor a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy $f \notin \mathfrak{C}[a]$.

2. Nem folytonos. Legyen ui. f a Dirichlet-függvény. Megjegyezzük, hogy a feltételből csak az következik, hogy f lokálisan korlátos, pontosabban korlátos a $\mathcal{D}_f \cap (a - \delta, a + \delta)$ halmazon.
3. Nem folytonos. Legyen ui. f az előjelfüggvény:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \left\{ \begin{matrix} \frac{|x|}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{matrix} \right\} = \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy f az $a := 0$ pontban nem folytonos. Valóban, ha $\varepsilon := 1/2$, akkor bármely $\delta > 0$ számhoz van olyan $0 \neq x \in (-\delta, \delta)$, hogy $|f(x) - f(0)| = 1 > \varepsilon$.

4. Nem folytonos. A feltételből csak az következik, hogy f korlátos.
5. Nem folytonos. A feltételnek minden olyan függvény eleget tesz, amelynek értelmezési tartománya korlátos.
6. Folytonos, hiszen $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$.
7. Nem folytonos. Legyen például f az előjelfüggvény és $a := 0$.

Feladatok.

1. Mutassuk meg, hogy az
$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény az $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ pontokban folytonos!

2. Igazoljuk, hogy az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & (x \in (-\infty, 1)), \\ -\sqrt{x-1} - 1 & (x \in [1, +\infty)) \end{cases}$$
függvény folytonos!

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!
$$1.\ \lim_{0+0} \ln\,; \quad 2.\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}; \quad 3.\ \lim_{x \to 0+0} x \cdot \ln(x); \quad 4.\ \lim_{x \to 0+0} x^x; \quad 5.\ \lim_{+\infty} \ln; \quad 6.\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

4. Mutassuk meg, hogy $\mu \in \mathbb{R}$ esetén fennáll a
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x = e^{\mu}$$
határértékreláció!

5. Döntsük el, hogy van-e az
$$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$
függvénynek folytonos kiterjesztése, azaz van-e olyan folytonos $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függggvény, amelyre
$$f(x) = \widetilde{f}(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$
teljesül!

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tegyük fel hogy tetszőleges $0 < a \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(na) = 0.$$
Igazoljuk, hogy ekkor fennáll a $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ határérték-reláció!

Útm.

1. Világos, hogy ha $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, akkor
$$a < 1 + [a] \qquad \text{és} \qquad [a] < a.$$
Következésképpen, ha $\varepsilon > 0$, akkor a
$$\delta := \{\varepsilon, a - [a], 1 + [a] - a\}$$
számra $\delta > 0$. Ha pedig $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|x - a| < \delta$, akkor
$$x - a < \delta \leq 1 + [a] - a \qquad \text{és} \qquad a - x < \delta \leq a - [a],$$
ahonnan $[a] < x < [a] + 1$ következik. Ennélfogva $[x] = [a]$, és így
$$|f(x) - f(a)| = |x - [x] - (a - [a])| = |x - a| < \delta \leq \varepsilon.$$

2. Nyilvánvaló, hogy ha $1 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta := \min\{\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon^2\}$. Ha $x \in (-\infty, 1)$ olyan, hogy $|x - 1| < \delta$, akkor
$$|f(x) - f(1)| = (x - 1)^2 < \delta^2 \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$
Ha pedig $x \in [1, +\infty)$ olyan, hogy $|x - 1| < \delta$, akkor
$$|f(x) - f(1)| = \sqrt{x - 1} < \sqrt{\delta} \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

3. (a) Világos, hogy
$$\lim_{0+0} \ln = \lim_{x \to 0+0} \ln(x) = \lim_{y \to -\infty} \ln(e^y) = \lim_{y \to -\infty} y = -\infty.$$
   (b) Mivel
$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}} \leq \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\frac{y^2}{2}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{y} = 0,$$
   ezértígy a Sandwich-tétel értelmében $\lim\limits_{0+0} \ln = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0+0} x\ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}(\ln(1)-\ln(y)) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0.$

(d) Az exp folytonosságát kihasználva látható, hogy

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} \exp(x\ln(x)) = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} x\ln(x)\right) = \exp(0) = 1.$$

(e) $\lim_{+\infty} \ln = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \ln(e^y) = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty.$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{\ln(y)}{y-1} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(e^z)}{e^z-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}} = 1.$

4. Ha

$$y := \ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right),$$

akkor az $x \to +\infty$ határátmenetben $y \to 0$, így (vö. korábban)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{y\to 0} \frac{\mu y}{e^y-1}\right) = \exp\left(\mu\cdot\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y-1}\right) = \exp(\mu\cdot 1) = e^\mu.$$

5. Mivel a sin korlátos függvény, ezért

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

így az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény megfelelő.

6. Vö. Bessenyei Ádám írása (5. oldal).

Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén van olyan (ϵ_n) sorozat, hogy $\lim(\epsilon_n) = 0$ és

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\epsilon_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy a

$$\delta_n := n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right) - \alpha \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(\delta_n) = 0$. Mivel

$$\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\alpha} - 1\right) = 0$$

(ui. a hatványfüggvény folytonos), ezért

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\alpha\cdot\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\ln\left(1+(1+x)^{\alpha}-1\right)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x} = \\
&= \alpha\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\ln\left(1+(1+x)^{\alpha}-1\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \\
&= \alpha\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.
\end{aligned}$$

Így a határértékre vonatkozó átvitel miatt $\lim(\delta_n) = 0$.

2. lépés. Mivel

$$\lim(\delta_n) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim\left(n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)-\alpha\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim\left(n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)\right) = \alpha$$

és $\alpha = \lim(\alpha)$, ezért

$$\left(n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)-\alpha\right)$$

nullasorozat, azaz van olyan (ϵ_n) nullasorozat, hogy

$$n \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1 \right) - \alpha = \epsilon_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\epsilon_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Feladat. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és f monoton. Mutassuk meg, hogy f-nek legfeljebb megszámlálható sok szakadása (mégpedig elsőfajú) van! Adjunk példát a megszámlálható sok szakadásra!

Útm. Legyen például f monoton növekvő, $x, y \in I$ és $x < y$. Mivel

$$f(x+0) = \inf\{f(t) |\ t \in (x, \sup(I))\} = \inf\{f(t) |\ t \in (x, y)\}$$

és

$$f(y-0) = \sup\{f(t) |\ t \in (\inf(I), y)\} = \sup\{f(t) |\ t \in (x, y)\} ,$$

ezért $f(x+0) \leq f(y-0)$. (Ha f monoton csökkenő, akkor $f(x+0) \geq f(y-0)$.) Jelölje $S \subset I$ az f szakadási helyeinek halmazát, majd tegyük fel, hogy $a \in S \neq \emptyset$. Ekkor $f(a-0) < f(a+0)$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $r \in \mathbb{Q} \cap (f(a-0), f(a+0))$ esetén a

$$g : S \to \mathbb{Q}, \qquad g(a) := r$$

leképezés injektív. Valóban, ha $\alpha, \beta \in S$: $\alpha < \beta$, akkor tetszőleges $x \in (\alpha, \beta)$ esetén

$$g(\alpha) < f(\alpha + 0) \leq f(x) \leq f(\beta - 0) < g(\beta) .$$

Így $|S| \leq \aleph_0$. **Példa.** $f(x) := [x]$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor $f \notin \mathfrak{C}[a] \Leftrightarrow a =: n \in \mathbb{Z}$ és $\lim_{n-0} f = n - 1$ és $\lim_{n+0} f = n$.

Házi (gyakorló) feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozzuk meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} & (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}), \\ 0 & (x=-1), \\ \alpha & (x=2). \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Útm.

1. Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ esetén

$$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+4}{x+1},$$

ezért $\lim\limits_{2} f = 2$. Tehát f pontosan akkor folytonos 2-ben, ha $\alpha = 2$. Ha $\alpha \neq 2$, akkor f-nek megszüntethető szakadása van a 2 helyen. Mivel

$$\lim_{-1\pm0} f = \pm\infty, \qquad \text{ezért} \qquad \nexists \lim_{-1} f.$$

Következésképpen tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén f-nek másodfajú szakadása van (-1)-ben.

Feladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáját!

   (a) $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-\alpha^2}{x+3} & (x<-3), \\ \alpha\sqrt{x+7} & (x\geq -3) \end{cases} \qquad (\alpha\in\mathbb{R});$$

   (b) $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x-\alpha)}{(x-1)^2} & (x<1), \\ \beta+\alpha+2 & (x=1), \\ \dfrac{\beta^2x+\beta}{x^2+1} & (x>1) \end{cases} \qquad (\alpha\in[0,1],\ \beta\in\mathbb{R}).$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáját!

   (a) $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} & (x\in\mathbb{R}\backslash\{2;5\}), \\ \alpha(\in\mathbb{R}) & (x\in\{2;5\}) \end{cases};$$ (b) $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|} & (0\neq x\in\mathbb{R}), \\ 1 & (x=0). \end{cases};$$

   (c) $$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & (0\neq x\in\mathbb{R}) \\ 1 & (x=0) \end{cases};$$ (d) $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\sqrt[3]{x}-\alpha} & (x\neq\alpha^3), \\ \alpha\in\mathbb{R} & (x=\alpha^3) \end{cases} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Útm.

1. (a) Világos, hogy

$$f\in\mathfrak{C}(-\infty,-3)\cap\mathfrak{C}(-3,+\infty),$$

sőt

$$\lim_{-3+0} f = \alpha\sqrt{-3+7} = 2\alpha.$$

Mivel bármely $x \in (-\infty, -3)$ esetén

$$\frac{x^2 - \alpha^2}{x+3} = \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x+3},$$

ezért

$$\lim_{-3-0} f \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{-3, 3\}.$$

Látható, hogy $\alpha \in \{-3, 3\}$ esetén $\lim\limits_{-3-0} f = -6$. Így

$$f \in \mathfrak{C}[-3] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{-3+0} f = \lim_{-3-0} f = f(-3) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\alpha = -6 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -3.$$

Ha $\alpha = 3$, akkor

$$f(-3) = \lim_{-3+0} f = 6 \neq -6 = \lim_{-3-0} f,$$

azaz f-nek elsőfajú szakadása van a -3 pontban.

(b) Világos, hogy

$$f \in \mathfrak{C}(-\infty, 1) \cap \mathfrak{C}(1, +\infty),$$

továbbá

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sin^2(x-\alpha)}{(x-1)^2} = \begin{cases} +\infty & (\alpha \in [0,1)), \\ \lim\limits_{x \to 1-0} \left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^2 = 1 & (\alpha = 1). \end{cases}$$

Tehát $\alpha \in [0, 1)$ esetén f-nek 1-ben másodfajú szakadása van. Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x \to 1+0} \frac{\beta^2 x + \beta}{x^2 + 1} = \frac{\beta^2 + \beta}{2},$$

ill.

$$f(1) = \beta + 3$$

következtében

$$f \in \mathfrak{C}[1] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{1-0} f = \lim_{1+0} f = f(1) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = \frac{\beta^2 + \beta}{2} = \beta + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = -2.$$

Ha $\alpha = 1 = \beta$, akkor

$$\lim_{1+0} f = \lim_{1-0} f = 1 \neq 4 = f(1),$$

azaz f-nek 1-ben megszüntethető szakadása van. Ha $\alpha = 1$ és $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$,

$$\lim_{1-0} f = 1 \neq \lim_{1+0} f = \frac{\beta^2+\beta}{2} \neq 1,$$

így f-nek 1-ben elsőfajú szakadása van.

2. (a) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{2; 5\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{2; 5\}$ esetén

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim_{2} f = 1/3$. Tehát $f \in \mathfrak{C}[2]$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = 1/3$, egyébként f-nek 2-ben megszüntethető szakadása van. Mivel $\lim_{5\pm0} f = \pm\infty$, ezért tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén f-nek 5-ben másodfajú szakadása van.

(b) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

és

$$f(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \qquad (0 > x \in \mathbb{R}),$$

ezért $\lim_{0\pm0} f = \pm1$, azaz f-nek 0-ban ugrása van.

(c) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel $\lim_{0+0} f = 1$ és $\lim_{0-0} f = +\infty$, azért f-nek 0-ban másodfajú szakadása van.

(d) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha^3\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Ha $a = \alpha^3$, akkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset ($\alpha^3 = \alpha$). Ekkor $\alpha \in \{-1; 0; 1\}$, továbbá

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt[3]{x}-\alpha} = \frac{(\sqrt[3]{x})^3-\alpha^3}{\sqrt[3]{x}-\alpha} = (\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x\alpha}+\alpha^2 \longrightarrow 3\alpha^2 \begin{cases} = \alpha & (\alpha = 0) \\ \neq \alpha & (\alpha \in \{-1; 1\}) \end{cases} \qquad (x \to \alpha^3),$$

azaz $\alpha = 0$ esetén $f \in \mathfrak{C}$, $\alpha \in \{-1; 1\}$ esetén f-nek α-ban megszüntethető szakadása van.

2. eset ($\alpha^3 \neq \alpha$):

$$\lim_{x\to\alpha^3} (x-\alpha) = \alpha^3 - \alpha \neq 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\alpha^3} (\sqrt[3]{x}-\alpha) = 0,$$

így

$$\lim_{x\to\alpha^3}\left|\frac{x-\alpha}{\sqrt[3]{x}-\alpha}\right| = +\infty.$$

Ekkor tehát f-nek α^3-ben másodfajú szakadása van.

Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletek megoldhatók az I intervallumon!

1. $\cos(x) = x$, $I := (0,1)$;
2. $\ln(x) = e^{-x}$, $I := (1,3)$;
3. $e^x = 2 - x$, $I := \mathbb{R}$;
4. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$, $I := \mathbb{R}$;
5. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} = e^{x^2}$, $I := (0,2)$.

Útm.

1. Ha

$$f(x) := \cos(x) - x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = \cos(1) - 1 < 0,$$

hiszen

$$\cos(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!} = 1 + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}\right) + \ldots < 1.$$

Ezért alkalmas $\xi \in I := (0,1)$ esetén $f(\xi) = 0$.

2. Ha

$$f(x) := \ln(x) - e^{-x} \qquad (x \in (0,+\infty)),$$

akkor f folytonos,

$$f(1) = -\frac{1}{e} < 0, \qquad f(3) = \ln(3) - \frac{1}{e^2} > 0,$$

ezért alkalmas $\xi \in I := (1,2)$ esetén $f(\xi) = 0$.

3. Ha

$$f(x) := e^x - 2 + x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(1) = e - 2 + 1 > 0, \qquad f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0,$$

ezért alkalmas $\xi \in I := (-1, 0)$ esetén $f(\xi) = 0$.

4. Ha

$$f(x) := x^5 - x^2 + 2x + 3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(0) = 3 > 0, \qquad f(-1) = -1 < 0,$$

ezért alkalmas $\xi \in I := (-1, 0)$ esetén $f(\xi) = 0$.

5. Ha

$$f(x) := \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - e^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}),$$

akkor f folytonos. Mivel

$$\lim_{0+0} f = +\infty - \frac{1}{2} - e^0 = +\infty, \qquad \text{és} \qquad \lim_{2-0} f = \frac{1}{2} + (-\infty) - e^4 = -\infty,$$

ezért alkalmas $a \in (0, 1)$, illetve $b \in (1, 2)$ esetén $f(a) > 0$, ill. $f(b) < 0$. Mivel $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, ezért a Bolzano-tétel következtében van olyan

$$\xi \in (a, b) \subset (0, 2) = I,$$

hogy $f(\xi) = 0$:

$$\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - 2} - e^{\xi^2} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - 2} = e^{\xi^2}.$$

Feladatok. Lássuk be, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + x^3 + 6x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\})$$

függvénynek van zérushelye!

Útm. Világos, hogy f folytonos, továbbá

$$f(0) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{8} + 3 - 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} > 0.$$

Mivel
$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\},$$
ezért alkalmas
$$c \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \mathcal{D}_f$$
számra $f(c) = 0$.

Gyakorló (házi) feladatok.

1. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha \in [0, +\infty)$ esetén fennáll a
$$2\cos(\pi\alpha) \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}} = e^{\alpha}$$
egyenlőség!

2. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha \in (0, \pi)$ esetén fenáll a
$$\ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+\alpha+1}\right) = \frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}$$
egyenlőség!

3. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ esetén fenáll az
$$\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha) + x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = 0$$
egyenlőség!

Útm.

1. Az
$$f(x) := 2\cos(\pi x) \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} - e^x \qquad (x \in [0, +\infty))$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = 2\cos(0)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{0}}} - e^0 = 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = 2\cos(\pi)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1}}} - e^1 = -\frac{2}{\sqrt{2}} - e < 0.$$

2. Az
$$f(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\right) - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \qquad (x \in [0,\pi])$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = \ln(1) - \frac{\cos(0)}{1+\sin(0)} = -1 < 0$$
és
$$f(\pi) = \ln\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2+\pi+1}\right) - \frac{\cos(\pi)}{1+\sin(\pi)} = \ln\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2+\pi+1}\right) + 1 > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e\cdot\pi^2+e > \pi^2+\pi+1,$$
és ez igaz, hiszen
$$e\cdot\pi^2 + e > 2\pi^2 + e = \pi^2 + \pi^2 + e > \pi^2 + \pi + e > \pi^2 + \pi + 1.$$

3. Az
$$f(x) := \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + x\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = -\frac{\pi}{6} < 0 \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} > 0.$$

Gyakorló (házi) feladatok.

1. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{D}_f$ intervallum, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_f$ és A véges. Mutassuk meg, hogy van olyan $t \in \mathcal{D}_f$, amellyel fennál az
$$f(t) = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{x \in A} f(x)$$
egyenlőség!

2. Igazoljuk, hogy ha valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén a
$$\varphi : [a, b] \to [a, b]$$
függvény folytonos, akkor alkalmas $u \in (a, b)$ esetén $\varphi(u) = u$ teljesül (**Brouwer-féle fixponttétel**)!

3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről azt tudjuk, hogy folytonos és
$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$
(**Cauchy-féle függvényegyenlet**). Mutassuk meg, hogy f vagy azonosan nulla vagy fennáll az $f = \exp_{f(1)}$ egyenlőség!

Útm.

1. Legyen
$$\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix} \{f(x)|\ x \in A\}.$$
Ekkor $m, M \in \mathcal{R}_f$ és
$$m \leq \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{x \in A} f(x) \leq M$$
(számtani közép). Mivel $\mathcal{R}_f$ intervallum, ezért $f^{-1}[[m, M]] \subset \mathcal{D}_f$, így a Bolzano-tétel alkalmazásával van olyan $t \in \mathcal{D}_f$, amellyel
$$f(t) = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{x \in A} f(x).$$

2. Világos, hogy a
$$\psi(x) := \varphi(x) - x \qquad (x \in [a, b])$$

függvény folytonos, továbbá

$$\psi(a) = \varphi(a) - a \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \psi(b) = \varphi(b) - b \leq 0,$$

hiszen

$$\varphi(a) \geq a \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) \leq b.$$

A

$$\psi(a) = 0, \qquad \text{ill. a} \qquad \psi(b) = 0$$

egyenlőség csak a

$$\varphi(a) = a, \qquad \text{ill. a} \qquad \varphi(b) = b$$

esetben fordul elő. Ez azt jelenti, hogy vagy az

$$u := a, \qquad \text{ill.} \qquad u := b$$

fixpontja φ-nek, vagy

$$\psi(a) > 0, \qquad \text{ill.} \qquad \psi(b) < 0.$$

Így a Bolzano-tétel következtében va olyan $u \in (a, b)$, amelyre

$$0 = \psi(u) = \varphi(u) - u,$$

azaz

$$\varphi(u) = u.$$

3. **1. lépés.** Megmutatjuk, hogy, ha van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(c) = 0$, akkor

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Valóban, ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(c) = 0$, akkor

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) \cdot f(c) = f(x - c) \cdot 0 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés. $f(0) \in \{0, 1\}$, ui. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$, ezért $f(0) \cdot (f(0) - 1) = 0$.

3. lépés. Így tehát, ha $f(0) = 1$, akkor – lévén $1 > 0$ – azt kapjuk, hogy $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Legyen ebben az esetben $a := f(1) > 0$.

4. lépés. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n \cdot x) = (f(x))^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Speciálisan $x := 1$ esetén tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $f(n) = a^n$.

5. lépés. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 < a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \qquad \text{ezért} \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}.$$

6. lépés. Tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$ indexre

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{a} = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\exp\left(q \cdot \frac{\ln(a)}{q}\right)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\exp\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\ln(a)}{q}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\prod_{k=1}^{q} \exp\left(\frac{\ln(a)}{q}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \exp\left(\frac{\ln(a)}{q}\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\ln(a)}{q}\right) = \exp\left(\frac{p}{q} \ln(a)\right) = a^{p/q} =: a^r$$

Megjegyzés. Tetszőleges $\alpha \in (0, +\infty)$, ill. $0 < r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$\alpha^0 = \exp(0 \cdot \ln(\alpha)) = \exp(0) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \alpha^{-r} = \exp(-r \cdot \ln(\alpha)) = \frac{1}{\exp(r \cdot \ln(\alpha))} = \frac{1}{a^r}.$$

7. lépés. Mivel minden $0 < r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$1 = f(0) = f(r - r) = f(-r) \cdot f(r), \qquad \text{ezért} \qquad f(-r) = \frac{1}{f(r)} = \frac{1}{a^r} = a^{-r}.$$

Így beláttuk, hogy bármely $r \in \mathbb{Q}$ számra $f(r) = a^r$.

8. lépés. Mivel f folytonos és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $r_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\lim(r_n) = x$, ezért

$$f(x) = f \lim(r_n)) = \lim(f(r_n)) = \lim\left(\exp_a(r_n)\right) = \exp_a(\lim(r_n)) = \exp_a(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{C}$ és tegyük fel, hogy $\lim_{+\infty} f =: A \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy f korlátos függvény!

Útm. A feltétel szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz létezik olyan $\omega \in (0, +\infty)$, hogy minden $x \in (\omega, +\infty)$ esetén $|f(x) - A| < 1$, azaz

$$(*) \qquad A - 1 < f(x) < A + 1 \quad (x \in (\omega, +\infty)) \,.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}[a, \omega]$, ezért Weierstraß tétele alapján minden $x \in [a, \omega]$ esetén van olyan $x_m, x_M \in [a, \omega]$, hogy

$$f(x) \geq f(x_m) =: m \qquad \text{és} \qquad f(x) \leq f(x_M) =: M,$$

így

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (x \in [a, \omega]).$$

Ebből és $(*)$-ból következik, hogy

$$k := \min\{m, A - 1\} \leq f(x) \leq \max\{M, A + 1\} =: K \qquad (x \in \mathcal{D}_f = [a, +\infty)).$$

A fentiek alapján $k \leq K$ is igaz, ami azt jelenti, hogy f korlátos.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **egyenletesen folytonos** valamely $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_f$ halmazon (jelben $f \in \mathfrak{EC}(\mathcal{H})$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x, y \in \mathcal{H}: \qquad (|x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \,.$$

Megjegyzések.

1. Ha f egyenletesen folytonos, akkor minden $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f|_H$ is egyenletesen folytonos.
2. Ha $\mathcal{D}_f$ intervallum: $\mathcal{D}_f = A \cup B$, ahol A, B olyan intervallumok, amelyre $A \cap B \neq \emptyset$ és $f|_A$ valamint $f|_B$ egyenletesen folytonos, akkor f is egyenletesen folytonos.
3. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f egyenletresen folytonos (**Heine-tétel**).

Feladat. Igaz-e, hogy egyenletesen folytonosak az alábbi függvények?

1. $f(x) := x^2 \quad (x \in (0, 1))$;
2. $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in (0, +\infty))$;
3. $f(x) := x\sqrt{x} \quad (x \in (0, +\infty))$;
4. $f(x) := \dfrac{x+3}{x-1} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. A Heine-tétel miatt a $[0, 1]$ intervallumon egyenletesen folytonos, így még inkább a szűkebb $(0, 1)$ intervallumon.
2. A Heine-tétel miatt a $[0, 1]$ intervallumon egyenletesen folytonos, így a $(0, 1]$ intervallumon is. Az $(1, +\infty)$ intervallumon pedig

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq |x - y|$$

alapján a $\delta := \varepsilon$ választás megfelelő.

3. Nem egyenletesen folytonos, ui. ha $\varepsilon, \delta > 0$ és $y \in (0, +\infty)$: $y > \dfrac{4\varepsilon^2}{\delta^2}$ valamint $x := y + \dfrac{\delta}{2}$, akkor $|x - y| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ és

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x\sqrt{x} - y\sqrt{y}| = |x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (x-y)\sqrt{y}| = \left|x\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{y}(x-y)\right| = \\
&= |x-y|\left|\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right| > \sqrt{y}|x-y| \geq \frac{\delta}{2}\sqrt{y} > \varepsilon.
\end{aligned}$$

4. Ha $1 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x-1}$, következésképpen bármely $1 \neq x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x) - f(y)| = 4 \cdot \left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1}\right| = 4 \cdot \frac{|x-y|}{|x-1| \cdot |y-1|}.$$

Legyen

$$\delta > 0, \qquad x := 1 + \frac{3\delta}{2}, \qquad y := 1 + 2\delta.$$

Ekkor

$$|f(x) - f(y)| = 4 \cdot \frac{3\delta}{4\delta^2} = \frac{3}{\delta}.$$

Így, ha $\varepsilon > 0$ és $\delta < \dfrac{3}{\varepsilon}$, akkor $|x - y| < \delta$, de $f(x) - f(y) > \varepsilon$, következésképpen f nem egyenletesen folytonos.

Házi feladatok.

1. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén lesz egyenletesen folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^5 - 16x}{x^2 - 4} & (|x| \neq 2) \\ \\ ax + b & (|x| = 2) \end{cases} \qquad (x \in [-5, 5])$$

függvény?

2. Igaz-e, hogy egyenletesen folytonosak az alábbi függvények?

$$1.\ f(x) := x \quad (x \in (-\infty, +\infty)); \quad 2.\ f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (1, 2));$$

$$3.\ f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1)); \qquad 4.\ f(x) := \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad (x \in (0, 1)).$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$, $\exists \lim\limits_{+\infty} f =: A \in \mathbb{R}$, akkor f egyenletesen folytonos!

Útm.

1. Mivel bármely $\pm 2 \neq x \in [-5,5]$ esetén

$$\frac{x^5-16x}{x^2-4} = \frac{x(x^4-2^4)}{x^2-4} = \frac{x\cdot(x^2-2^2)\cdot(x^2+2^2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{x\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x^2+2^2)}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+2)}} = x\cdot(x^2+2^2),$$

ezért $\lim\limits_{\pm 2} f = 16$, így az $a=8$, ill. $b=0$ választással $f \in \mathfrak{C}$, Heine tétele szerint pedig $f \in \mathfrak{EC}$.

2. (a) Egyenletesen folytonos, ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta(:= \varepsilon)$, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$: $|x-y| < \delta$ esetén $|f(x)-f(y)| = |x-y| < \varepsilon$.

   (b) A Heine-tétel miatt az $[1,2]$ intervallumon egyenletesen folytonos, így még inkább a szűkebb $(1,2)$ intervallumon.

   (c) Nem egyenletesen folytonos, ui. lásd jegyzet.

   (d) Nem egyenletesen folytonos, ui.

$$\varepsilon := 1, \qquad x := \frac{1}{n}, \qquad y := \frac{2}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{n} < \delta$$

esetén

$$|x-y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{n} < \delta$$

és

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Megjegyezzük, hogy itt az **egyenletes folytonosságra vonatkozó átviteli elv**et használtuk: $f \in \mathfrak{EC}(\mathcal{H})$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\forall (x_n), (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{H} : \quad (\lim |x_n - y_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim |f(x_n) - (y_n)| = 0)\,.$$

3. A határérték definíciója miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\omega > \max\{a; 0\}$, hogy minden $x > \omega$ esetén

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így minden $x, y \in (\omega, +\infty)$, $|x-y| < 1$ esetén

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-A| + |A-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $f|_{(\omega,+\infty)}$ egyenletesen folytonos. A Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos az $[a,\omega]$ halmazon, így f egyenletesen folytonos.

Feladat. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint azok típusait!

1. $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0); \end{cases}$$

2. $$f(x) := \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0); \end{cases}$$

3. $$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \end{cases}$$

4. $$f(x) := \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}), \\ -x & (x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \end{cases}$$

5. $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \left(x = \dfrac{p}{q},\ 0 \neq p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} : \right. \\ & \left. (p, q) = 1\right), \\ 1 & (x = 0), \\ 0 & (x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \end{cases}$$

6. $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} & (x < 1), \\ \sqrt{x + 3} & (1 \leq x \leq 6), \\ \dfrac{\sin(2x - 12)}{x - 6} & (x > 6); \end{cases}$$

7. $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & (x < 1), \\ \dfrac{\sqrt{x + 7} - 3}{2 - x} & (1 \leq x < 2), \\ 1 & (x = 2), \\ \dfrac{\sin(2 - x)}{2x - 4} & (x > 2); \end{cases}$$

8. $$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\alpha x)}{x^2} & (x < 0), \\ \alpha - \beta x^3 & (0 \leq x \leq 1), \\ \dfrac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1} & (x > 1). \end{cases}$$

Útm.

1. Ha

   - $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor nyilván (vö. korábbi tételek) $f \in \mathfrak{C}[a]$.
   - $a = 0$, akkor f-nek a-ban megszüntethető szakadása van, ui.

$$\lim_{0} f = 1 \neq 0 = f(0)$$

2. Ha

   - $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor nyilván (vö. korábbi tételek) $f \in \mathfrak{C}[a]$, hiszen

$$f(x) = -1 \quad (x < 0) \qquad \text{és} \qquad f(x) = 1 \quad (x > 0).$$

   - $a = 0$, akkor f-nek a-ban ugrása van, hiszen

$$\lim_{0-0} f = -1 \neq 1 = \lim_{0+0} f.$$

3. Ha

   - $a \in \mathbb{Q}$, akkor legyen

$$(x_n) : \mathbb{N} \to (a, a+1) \cap \mathbb{Q}, \qquad \text{ill.} \qquad (y_n) : \mathbb{N} \to (a, a+1) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$$

   olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a = \lim(y_n)$. Ekkor

$$\lim((f(x_n)) = 1 \neq 0 = \lim(f(y_n)), \qquad \text{azaz} \qquad \nexists \lim_{a+0} f.$$

   Hasonlóan látható be, hogy $\nexists \lim_{a-0} f$, azaz f-nek a-ban másodfajú szakadása van.

   - $a \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, akkor a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy f-nek a-ban másodfajú szakadása van.

   Tehát a Dirichlet-függvény értelmezési tartományának minden pontjában aszakadás másodfajú. **Megjegyezzük**, hogy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x)^{2m} \right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Ha

- $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor az előző függvény (Dirichlet-függvény) esetében alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy f-nek a-ban másodfajú szakadása van.
- $a = 0$ és $\varepsilon > 0$, akkor a $\delta := \varepsilon$ számmal tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - 0| = |x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(0)| = |x| < \varepsilon,$$

azaz f folytonos az a pontban.

5. A feladatbeli függvény nem más, mint a **Thomae-függvény** (Carl Johannes Thomae (1840-1921) német matematikus). Erről a függvényről – többek között- a következő tudható:

(a) f korlátos, ui. értékkészlete nyilvánvalóan az

$$\left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

halmaz.

(b) f periodikus az 1 periódussal:

$$f(x+n) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}),$$

ui. ha

- $x \in \mathbb{Q}$, akkor alkalmas $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ esetén $x = \dfrac{p}{q}$. Ekkor

$$x + n = \frac{p}{q} + n = \frac{p + nq}{q}.$$

Ha $d|p$ és $d|q$, akkor $d|(p+nq)$. Ha pedig $d|(p+nq)$ és $d|q$, akkor $d|((p+nq)-nq)$, azaz $d|p$. Következésképpen

$$(p + nq, q) = (p, q) = 1 \qquad \text{és} \qquad f(x+n) = \frac{1}{q} = f(x).$$

- $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, akkor $x + n \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ és így $f(x+n) = f(x) = 0$.

(c) Bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{a} f = 0$, ui. a periodicitás következtében feltehető, hogy $a \in [0, 1)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre $n > 1/\varepsilon$. Ekkor f értelmezése miatt tetszőleges $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, illetve tetszőleges $x = p/q \in \mathbb{Q}$: $(p, q) = 1$, $q > n$ esetén $|f(x)| < 1/n$. Ez azt jelenti, hogy az

$$|f(x) - 0| > \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenség a $(-1, 1)$ intervallum pontjai közül kizárólag a

$$0, \ \pm\frac{1}{2}, \ \pm\frac{1}{3}, \ \pm\frac{2}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{n}, \ \pm\frac{2}{n}, \ldots, \pm\frac{n-1}{n} \tag{30}$$

pontokban teljesül. Legyen ezek közül p_1/q_1 az a-tól különböző, a-hoz legközelebbi tört, ill. $\delta := \left|\frac{p}{q} - a\right|$. Következésképpen az $(a-\delta, a+\delta)$ intervallumban nincsen a-tól különböző, (30) alatti szám, így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 < |x-a| < \delta = \left|\frac{p}{q} - a\right| \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

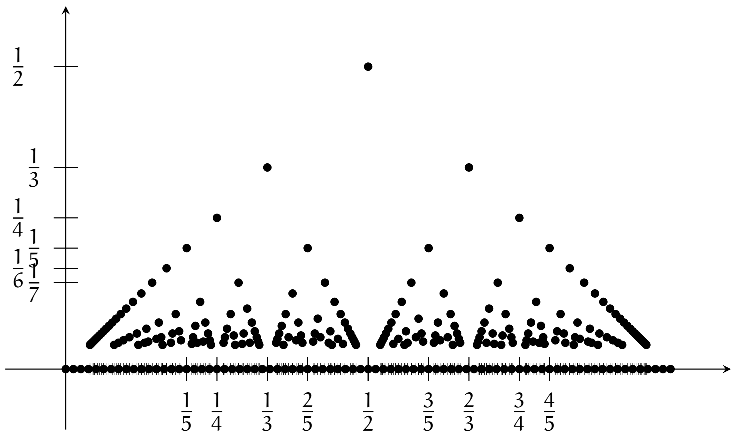
(d) Bármely $a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$, hiszen $f(a) = 0$, így

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = f(a).$$

(e) Bármely $a \in \mathbb{Q}$ esetén f-nek a-ban megszüntethető szakadása van, hiszen $f(a) \neq 0$, de

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \neq f(a).$$

A függvény grafikonját szemlálteti az alábbi ábra a $[0, 1]$ intervallumon.



6. Nyilvánvaló, hogy f folytonos a $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ intervallumok mindegyikén (vö. korábbi tételek). Látható továbbá, hogy

- f-nek másodfajú szakadása van az $a := 1$ pontban, hiszen

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1-x} = +\infty.$$

- f-nek elsőfajhú szakadása van az $a := 2$ pontban, hiszen

$$\lim_{2-0} f = \lim_{x\to 2-0} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \lim_{x\to 2-0} \frac{x+7-9}{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{x-2}{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2-0} \frac{-1}{\sqrt{x+7}+3} = -\frac{1}{6}$$

és

$$\lim_{2+0} f = \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(2-x)}{2x-4} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $0 < c \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f, g \in \mathfrak{C}$ esetén igazak az alábbi állítások!

$$|f| \in \mathfrak{C}, \qquad f \vee g \in \mathfrak{C}, \qquad f \wedge g \in \mathfrak{C}, \qquad f_c \in \mathfrak{C},$$

ahol

$$f \mathop{}_{\wedge}^{\vee} g(x) := \begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\{f(x), g(x)\} \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \qquad \text{és} \qquad f_c(x) := \begin{cases} -c & (f(x) < -c) \\ f(x) & (|f(x)| \leq c) \\ c & (f(x) > c) \end{cases} \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Útm.

1. lépés. $|f| = \text{abs} \circ f$;

2. lépés. $\begin{smallmatrix}\max\\ \min\end{smallmatrix}\{f(x), g(x)\} = \dfrac{f(x) + g(x) \pm |f(x) - g(x)|}{2} \qquad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$;

3. lépés. Tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f_c(x) = \min\{c, \max\{f(x), -c\}\}$.

13. gyakorlat (2025. május 14.)

Tétel (Polinomok azonossági tétele). Adott $n \in \mathbb{N}_0$, ill. $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$: $a_n b_n \neq 0$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k = b_k \quad (0 \leq k \leq n).$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Világos, hogy ha bármely $k \in \{0, 1 \ldots, n\}$ esetén $a_k = b_k$, akkor a

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) := \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomokra $p = q$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha a fenti polinomokra $p = q$, azaz bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x) = q(x)$, akkor $x = 0$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy $a_0 = b_0$ és

$$p_1(x) := a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k x^{k-1} = b_1 + \sum_{k=2}^{n} b_k x^{k-1} = q_1(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$a_1 = \lim_{x \to 0} p_1(x) = \lim_{x \to 0} p_2(x) = b_1$$

és

$$p_2(x) := a_2 + \sum_{k=3}^{n} a_k x^{k-2} = b_2 + \sum_{k=3}^{n} b_k x^{k-2} = q_2(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Az eljárást folytatva, véges sok lépésben belátható, hogy

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad \ldots, \qquad a_n = b_n.$$

Példa. Valamely $\alpha, \beta, \gamma, \delta, u \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^4 + 3x^2 + 7x + 2 = \alpha x^4 + (3\beta + u)x^3 + 3x^2 + \gamma x + \delta \qquad (x \in \mathbb{R})$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\alpha = 1, \qquad 3\beta + u = 0, \qquad \gamma = 7 \qquad \text{és} \qquad \delta = 2.$$

Példa. Az

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

felbontásból (a jobb oldalon történő beszorzás után)

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma), \qquad b = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma, \qquad c = -\alpha\beta\gamma$$

következik.

Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan polinom, amelyre

$$f(x) = (1 - 5x + 5x^2)^{2016} \cdot (1 + 7x - 7x^2)^{2017} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg f együtthatóinak összegét!

Útm. Mivel

$$2016 \cdot 2 + 2017 \cdot 2 = 4033 \cdot 2 = 8066,$$

ezért alkalmas $a_0, a_1, \ldots, a_{8066} \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{8066} x^{8066} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{8066} = f(1) = 1^{2016} \cdot 1^{2017} = 1.$$

Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan polinom, amelyre

1. $f(x) = (1 + x)^{1000} + x(1 + x)^{999} + x^2(1 + x)^{998} + \ldots + x^{1000} \qquad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + 3(1 + x)^3 + \ldots + 1000(1 + x)^{1000} \qquad (x \in \mathbb{R}).$

Határozzuk meg az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

felírásban az a_{50} együtthatót!

Útm.

1. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1000} \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right)^{1000} + x^{1000} \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right)^{999} + x^{1000} \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right)^{998} + \ldots + x^{1000} = \\ &= x^{1000} \cdot \left\{\left(\frac{1+x}{x}\right)^{1000} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{999} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{998} + \ldots + 1\right\} = \\ &= x^{1000} \cdot \frac{1-\left(\frac{1+x}{x}\right)^{1001}}{\frac{1+x}{x}-1} = \frac{x^{1001}-(1+x)^{1001}}{-1} = (1+x)^{1001} - x^{1001}, \end{aligned}$$

ha pedig $x = 0$, akkor

$$f(0) = 1 = (1+0)^{1001} - 0^{1001}.$$

Így tehát bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = (1+x)^{1001} - x^{1001} = 1 + 1001x + \binom{1001}{2}x^2 + \binom{1001}{3}x^3 + \ldots + 1001x^{1001}.$$

Ennélfogva

$$a_{50} = \binom{1001}{50} = \frac{1001!}{50! \cdot 951!}.$$

2. Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$xf(x) = (1+x)f(x) - f(x) = \left[(1+x)^2 + 2(1+x)^3 + 3(1+x)^4 + \ldots + 1000(1+x)^{1001}\right] -$$

$$-\left[(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \ldots + 1000(1+x)^{1000}\right] =$$

$$= 1000(1+x)^{1001} - \left[(1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^{1000}\right] =$$

$$= 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{1+x-1} = 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x},$$

így

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1000(1+x)^{1001}}{x} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x^2} = \\ &= 1000\left[1000 + \binom{1001}{2}x + \binom{1001}{3}x^2 + \ldots + 1001x^{999} + x^{1000} + \right] - \\ &\quad -\left[\binom{1001}{2} + \binom{1001}{3}x + \binom{1001}{4}x^2 + \ldots + 1001x^{998} + x^{999}\right]. \end{aligned}$$

A keresett együttható tehát

$$\begin{aligned} a_{50} &= 1000\binom{1001}{51} - \binom{1001}{52} = \frac{1000 \cdot 1001!}{51! \cdot 850!} - \frac{1001!}{52! \cdot 449!} = \\ &= \frac{1001!}{52! \cdot 950!}[52 \cdot 1000 - 950] = \frac{51050 \cdot 1001!}{52! \cdot 950!}. \end{aligned}$$

Tétel (hatványsorokra vonatkozó egyértelműségi tétel). Tegyük fel, hogy

$$c, a_n, b_n \in \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad 0 < r \in \mathbb{R},$$

továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R}: \ |x-c| < r).$$

Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre fennáll az $a_n = b_n$ egyenlőség.

Bizonyítás.

1. lépés Ha valamely $u_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-c)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara r, és $0 < \rho < r$, akkor van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $z \in \mathbb{R}$, $|x-c| \leq \rho$ esetén

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-c)^n\right| \leq K,$$

ui. az ilyen x-re

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-c)^n\right| = \left|\lim\left(\sum_{k=0}^{n} u_n(x-c)^n\right)\right| = \lim\left(\left|\sum_{k=0}^{n} u_n(x-c)^n\right|\right) \leq$$
$$\leq \lim\left(\sum_{k=0}^{n} |u_n|\,|x-c|^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\,|x-c|^n \leq K,$$

hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a hatványsor itt abszolút konvergens, és ha

$$d_n := \sum_{k=0}^{n} c_k(x-c)^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$|\lim(d_n)| = \lim(|d_n|), \qquad \text{hiszen} \qquad ||d_n| - |\lim(d_n)|| \leq |d_n - \lim(d_n)|.$$

2. lépés Világos, hogy ha $x = c$, akkor $a_0 = b_0$. Tegyük fel, hogy valamely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén beláttuk, hogy

$$a_0 = b_0, \quad \ldots, \quad a_k = b_k.$$

Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x - c| \leq \rho$ esetén

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} (a_n - b_n)(x - c)^n = 0.$$

Így ha $x \neq c$, akkor

$$a_{k+1} - b_{k+1} + (x - c) \cdot \sum_{n=k+2}^{\infty} (a_n - b_n)(x - c)^{n-k-2} = 0.$$

Az **1. lépés**ben belátottak alapján tehát van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy

$$\left| \sum_{n=k+2}^{\infty} (a_n - b_n)(x - c)^{n-k-2} \right| \leq K \qquad (0 < |x - c| \leq \rho),$$

azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - c| \leq \rho$ esetén

$$|a_{k+1} - b_{k+1}| \leq K|x - c|.$$

Innen pedig $a_{k+1} = b_{k+1}$ következik.

A következő fogalom informatikai tanulmányaink során lépten-nyomon előkerül.

Definíció. Az $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat **generátorfüggvény**ének, illetve **exponenciális generátorfüggvény**ének nevezzük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha van olyan $0 < r \leq \rho$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad (|x| < r),$$

illetve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad (|x| < r),$$

ahol ρ a

$$\sum_{n=0} (a_n \cdot x^n) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad \sum_{n=0} \left(a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara.

Példák.

1. Az

$$a_n := n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatnak nincsen generátorfüggvénye, ui. a

$$\sum_{n=0} (n! \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza a $\{0\}$ egyelemű halmaz.

2. Adott $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az

$$f(x) := (1+x)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

- generátorfüggvénye a $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots$ sorozatnak, illetve
- exponenciális generátorfüggvénye a $V_n^0, V_n^1, \ldots, V_n^n, 0, 0, \ldots$ sorozatnak, ahol

$$C_n^k := \binom{n}{k}, \qquad \text{ill.} \qquad V_n^k := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

ugyanis a binomiális tétel következtében

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

(**Fibonacci-sorozat**) akkor fennáll az

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőség (**Moivre–Binet-formula**)!

Útm. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$0 \le F_n \le 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ezért a

$$\sum_{n=0} (F_n \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor ρ konvergenciasugarára: $\rho \leq \frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot x^n \qquad \left(x \in \mathbb{R}:\ |x| < \frac{1}{2}\right)$$

függvény az (F_n) sorozat generátorfüggvénye. Így tetszőleges $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ esetén

$$f(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\, x^n = x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} =$$

$$= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x f(x) + x^2 f(x),$$

ahonnan

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

következik. Mivel a fenti x-ekre

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \right) x^n,$$

amennyiben

$$x \in \mathbb{R}:\ |x| < \min\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2},$$

ezért az állítás a hatványsorokra vonatkozó egyértelműségi tétel felhasználásával igazoltnak tekinthető.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $l : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre

$$l_1 = 1, \qquad l_{n+1} = 2l_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor fennáll az

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőség (vö. *„Hanoi tornyai”-feladat*)!

Útm. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$0 < l_n \leq 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A

$$\sum_{n=0} (|l_n x^n|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sornak majoránsa a

$$\sum_{n=0} (|2^n x^n|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sor, ez pedig tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1/2$ esetén konvergens, így a

$$\sum_{n=0} (l_n x^n) \qquad (x \in \mathbb{R}: \ |x| < 1/2)$$

sor abszolút konvergens, ahol $l_0 := 0$. Ezért az (l_n) sorozatnak generátorfüggvénye az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \qquad (|x| < 1/2)$$

függvény. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= l_1 + \sum_{n=2}^{\infty} l_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (2l_{n-1} + 1)\, x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2l_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2l_n x^{n+1} + \frac{x}{1-x} - 1 = 2x \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n + \frac{x}{1-x} = 2x f(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Így egy egyenletet kapunk $f(x)$-re, amiből

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{(1-x)-(1-2x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1/2).$$

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \min\{1, 1/2\} = 1/2$ esetén

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\{2^n - 1\}x^n,$$

ezért az egyértelműségi tétel következtében

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az 1. zárthelyi feladatainak megoldása

A 2. zárthelyi feladatainak megoldása

A Függelék

Tétel (Rekurziótétel: Dedekind (1888)). Legyen H tetszőleges (nem-üres) halmaz, $h \in H$, $f : H \to H$. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény (**sorozat**) van, amelyre

(i) $\varphi(0) = h$;

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n+1) = f(\varphi(n))$.

Bizonyítás.

1. lépés. Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi : \mathbb{N}_0 \to H$ rendelkezik a fenti tulajdonsággal. Ekkor $\varphi = \psi$, ui.

- $n = 0$ esetén
$$\varphi(0) = h = \psi(0);$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n) = \psi(n)$, akkor
$$\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) = f(\psi(n)) = \psi(n+1).$$

2. lépés. Legyen

$$\mathcal{H} := \{A \subset \mathbb{N}_0 \times H : \ \textbf{i)}\,(0,h) \in A,\ \textbf{ii)}\,\forall n \in \mathbb{N}_0\, \forall k \in H : \ (n,k) \in A \ \Rightarrow \ (n+1, f(k)) \in A\}.$$

Ekkor nyilvánvalóan $\mathbb{N}_0 \times H \in \mathcal{H}$ és bármely $B \in \mathcal{H}$ esetén $(0,h) \in B$, ezért

$$D := \bigcap_{A \in \mathcal{H}} A$$

a legszűkebb $\mathbb{N}_0 \times H$-beli halmaz, amelyre **i)** és **ii)** teljesül. Ekkor

1. bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexhez pontosan egy olyan $b \in H$ van, hogy $(n,b) \in D$ teljesül, ui.
   - $n = 0$ esetén $(0,h) \in D$, továbbá ha valamely $h \neq c \in H$ esetén $(0,c) \in D$, akkor $D \backslash \{(0,c)\}$ még mindig rendelkezik az **i)** és **ii)** tulajdonsággal, ami ellentmond annak, hogy D a legszűkebb ilyen halmaz.
   - ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén pontosan egy olyan $b \in H$ van, amelyre $(n,b) \in D$, akkor az **ii)** tulajdonság következtében $(n+1, f(b)) \in D$. Ha valamely $d \neq f(b) \in H$ esetén $(n+1, d) \in D$ volna, akkor $D \backslash \{(n+1, d)\}$ rendelkezne az **ii)** tulajdonsággal, ami ellentmondana annak, hogy D a legszűkebb ilyen.

2. a fentiek következtében pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény van, hogy

$$\mathrm{graph}(\varphi) = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times H : \ m = \varphi(n)\} = D.$$

Ekkor

- az **i)** azt jelenti, hogy $\varphi(0) = h$;
- a **ii)** tulajdonság pedig azt, hogy $(n+1, f(\varphi(n)) \in D$, azaz

$$\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Általánosítás. Legyen H halmaz, $h \in H$, $k \in \mathbb{N}$, $f : H^k \to H$. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény (**sorozat**) van, amelyre

(i) $\varphi(0) = h$;

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n+k) = f(\varphi(1), \ldots, \varphi(n))$.

B Függelék

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz

1. **zárt**, ha $H = \emptyset$ vagy $H \neq \emptyset$ és tetszőleges konvergens $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to H$ sorozatra $\lim(x_n) \in H$.
2. **nyílt**, ha $H^c := \mathbb{R} \backslash H$ komplementere zárt.
3. **kompakt**, ha bármely $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to H$ sorozat esetén van olyan $\nu \in \mathcal{I}$ indexsorozat, hogy $\lim(x_{\nu_n}) \in H$, azaz bármely H-beli sorozatnak van H-ban konvergens részsorozata.

Megjegyezzük, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ esetén az $[a, b]$ intervallum zárt halmaz (ez indokolja a „zárt" intervallum elnevezést), ugyanakkor a $(0, 1)$ (nyílt) intervallum nem zárt halmaz. Hasonlóan zárt maga az $\mathbb{R}$ halmaz vagy pl. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén az

$$[a, +\infty), \qquad \text{ill. a} \qquad (-\infty, a]$$

„félegyenes".

Definíció. Valamely $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz esetén az $f : H \to H$ függvényt **kontrakció**nak nevezzük, ha alkalmas $q \in [0, 1)$ számmal

$$|f(u) - f(v)| \leq q \cdot |u - v| \qquad (u, v \in H).$$

A q szám neve **kontrakciós állandó**.

Példák.

1. Ha $H := [1, +\infty)$ és
$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in H),$$
akkor f kontrakció, ui.
   - bármely $t \in H$ esetén (a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében)
   $$[f(t)]^2 = 4 \cdot \frac{[f(t)]^2}{4} = 4 \cdot \left(\frac{\frac{t}{2} + \frac{1}{t}}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{4}{2} = 2 \qquad (1 \leq t \in \mathbb{R}),$$
   azaz ($f(t) > 0$ miatt) $f(t) \geq \sqrt{2} > 1$;

- tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$$|f(u) - f(v)| = \left|\frac{u}{2} + \frac{1}{u} - \frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right| = |u - v| \cdot \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{uv}\right| < \frac{1}{2} \cdot |u - v|,$$

  azaz (pl.) $q := 1/2$ kontrakció állandó.

2. Ha $H := \left[0, \frac{1}{3}\right]$ és

$$f(t) := t^2 + \frac{1}{8} \qquad (t \in H),$$

   akkor f kontrakció, ui.

- bármely $t \in H$ esetén

$$0 \leq f(t) = t^2 + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72} < \frac{24}{72} = \frac{1}{3},$$

  azaz $f(t) \in H$;

- bármely $u, v \in H$ esetén

$$|f(u) - f(v)| = \left|u^2 - v^2\right| = |u + v| \cdot |u - v| \leq \frac{2}{3} \cdot |u - v|. \quad \square$$

Kontrakciók fontos szerepet játszanak pl. a közelítő számításokban (ld. **numerikus analízis**). Az alábbi tétel mintegy alapját képezi az említett alkalmazásoknak.

Tétel (fixponttétel). Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz és $f : H \to H$ kontrakció a $q \in [0, 1)$ kontrakciós állandóval. Ekkor

1. pontosan egy olyan $\alpha \in H$ szám van, amelyre $f(\alpha) = \alpha$;

2. bármely $u \in H$ esetén az

$$x_0 := u, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   rekurzióval definiált (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$;

3. az iménti (x_n) sorozatra fennáll az

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   egyenlőtlenség (**hibabecslés**).

Bizonyítás.

1. lépés A $0^0 := 1$ megállapodással megmutatjuk, hogy fennáll az

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{31}$$

becslés. Valóban,

- az $n = 0$ esetben az állítás nyilvánvaló.
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén fennáll az (31) egyenlőtlenség, akkor

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq q \cdot |x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot q^n \cdot |x_1 - x_0| = q^{n+1} \cdot |x_1 - x_0|.$$

2. lépés Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat Cauchy-féle. Ha $m, n \in \mathbb{N}_0$ és (pl.) $m > n$, akkor

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \leq \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \leq \\
&\leq q^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + q^{m-2} \cdot |x_1 - x_0| + \ldots + q^{n+1} \cdot |x_1 - x_0| + q^n \cdot |x_1 - x_0| = \\
&= \left(q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^{n+1} + q^n\right) \cdot |x_1 - x_0| = \\
&= q^n \cdot \left(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \ldots + q + 1\right) \cdot |x_1 - x_0| = \\
&= q^n \cdot \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

Mivel (q^n) nullsorozat, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy bármely

$N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre
$$q^n < \frac{(1-q)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}.$$
Következésképpen bármely $N \leq m, n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_m - x_n| < \varepsilon$, azaz (x_n) Cauchy-féle.

3. lépés A Cauchy-féle konvergenciakritérium következtében az (x_n) sorozat konvergens is. Legyen $\alpha := \lim(x_n)$. Mivel H zárt halmaz, ezért $\alpha \in H$. Belátjuk, hogy $f(\alpha) = \alpha$. Valóban,

$$0 \leq |f(\alpha) - \alpha| = |(f(\alpha) - f(x_n)) + (f(x_n) - \alpha)| \leq |f(\alpha) - f(x_n)| + |f(x_n) - \alpha| =$$

$$= |f(\alpha) - f(x_n)| + |x_{n+1} - \alpha| \leq q \cdot |x_n - \alpha| + |x_{n+1} - \alpha| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

csak úgy teljesülhet, ha $f(\alpha) - \alpha = 0$, azaz $f(\alpha) = \alpha$.

4. lépés Tegyük fel, hogy valamely $\beta \in H$ számra $f(\beta) = \beta$. Ekkor
$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq q \cdot |\alpha - \beta| \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-q) \cdot |\alpha - \beta| \leq 0.$$
Mivel $0 \leq q < 1$ ezért innen $(0 \leq)|\alpha - \beta| \leq 0$, azaz $|\alpha - \beta| = 0$ következik. Tehát $\alpha = \beta$.

5. lépés A 2. lépésbeli
$$|x_m - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0,\ m > n)$$
becslés, ill a tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indexre fennálló
$$\lim_{m \to \infty} (x_m - x_n) = \alpha - x_n, \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{m \to \infty} (|x_m - x_n|) = |\alpha - x_n|$$
határértékreláció figyelembevételével az
$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
hibabecslés adódik. ■

A fenti tételben szereplő α számot a tételbeli f függvény **fixpontj**ának, magát a tételt **fixponttétel**nek nevezzük. Az α fixpont tehát az
$$f(x) = x \qquad (x \in H)$$
egyenletnek a megoldása. Éppen ezért a fixponttétel a közelítő számítások, módszerek (ld. numerikus

analízis) egyik legfontosabb eszköze.

Példa. Egy korábbi példában szereplő

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (1 \leq t \in \mathbb{R})$$

kontrakció esetében az $f(x) = x$ egyenlet

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \qquad (1 \leq t \in \mathbb{R})$$

alakú. Könnyű ellenőrizni, hogy ennek az egyenletnek egyetlen α gyöke van az $[1, +\infty)$ halmazban, nevezetesen $\alpha = \sqrt{2}$, hiszen bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2 = 2x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{2}.$$

Ha a fixponttételt au $u := 2$ „kezdőértékkel” alkalmazzuk, akkor az

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatot kapjuk (**Heron-féle** vagy **babiloni gyökkeresési algoritmus**). A fixponttétel következtében tehát az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \sqrt{2}$, továbbá a $q := 1/2$ kontrakciós állandóval

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} \cdot |x_0 - x_1| = \frac{|2 - 3/2|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$