Analízis I. (BSc)

Programtervező informatikus szak

Bizonyítással kért tételek listája a megajánlott vizsgajegyhez

1. A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.

2. Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok.

3. A Cauchy-féle gyökkritérium.

4. A d'Alembert–féle hányadoskritérium.

5. Leibniz-típusú sorok konvergenciája.

6. Minden $[0,1]$-beli szám felírható tizedes tört alakban.

7. Konvergens sorok zárójelezése.

8. Abszolút konvergens sorok átrendezése.

9. Sorok téglányszorzatának konvergenciája.

10. Abszolút konvergens sorok szorzatai.

11. Hatványsorok konvergenciasugara.

12. A Cauchy–Hadamard-tétel.

13. Függvények határértékének egyértelműsége.

14. A határértékre vonatkozó átviteli elv.

15. Monoton függvények határértéke.

16. Az összetett függvény folytonossága.

1. Végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium

Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra

A valós sorozatokra vonatkozó Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával, de a véges határérték definíciójával ellentétben annak eldöntésére, hogy egy adott sorozat Cauchy-sorozat-e vagy sem, nem szükséges ismerni a sorozat határértékét, hiszen ez utóbbi nem szerepel a Cauchy-tulajdonságban. A sorösszeg elég összetett fogalom, de lényegében egy határérték, a sor részletösszegeinek a határértéke. Ezért, ha a Cauchy-tulajdonságot felírjuk a sor részletösszegeinek sorozatára, akkor olyan tulajdonságot kapunk, ami ekvivalens a sor konvergenciájával, de nem tartalmazza a sor összegét.

6. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\sum a_n \text{ konvergens} \iff (s_n) \text{ konvergens} \iff (s_n) \text{ Cauchy-sorozat},$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_0 \colon |s_m - s_n| < \varepsilon$$

teljesül. Állításunk abból következik, hogy ha $m > n$, akkor

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m.$$

Megjegyzések.

1. A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot így is felírhatjuk:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0, \forall k \in \mathbb{N}^+ \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Valóban: legyen az előző tételben szereplő m index $m := n + k$.

2. A kritérium azt jelenti, hogy konvergens sorok esetén, ha elég nagy indextől adunk össze akármennyi véges sok tagot, akkor az összeg abszolút értéke kisebb, mint bármely előre meghatározott kicsi szám.

3. Ha a kritérium nem teljesül, akkor a sor divergens. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists n > n_0, \exists k \in \mathbb{N}^+ \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \geq \varepsilon.$$

A harmonikus sor divergenciája ennek alkalmazásával is igazolható. Valóban legyen $\varepsilon = 1/2$ és $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges index. A harmonikus sor általános tagja $a_n = 1/n$. Így minden $k \in \mathbb{N}^+$ szám esetén

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+k}}_{k\text{-szor}} = \frac{k}{n+k}. \end{aligned}$$

Ekkor $k = n$ esetén

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \geq \frac{k}{k+k} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

11. Tétel (Összehasonlító kritériumok). *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

1. **Majoráns kritérium:** *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*
2. **Minoráns kritérium:** *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen véges sok tag megváltozásával egy sor konvergenciája nem változik. Jelölje (s_n), illetve (t_n) a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sorok részletösszegeiből álló sorozatokat. A feltevésünk miatt $s_n \leq t_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a nemnegatív tagú sorok konvergenciáról szóló tétel szerint

1. ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor (t_n) korlátos, így (s_n) is az. Ezért a $\sum a_n$ sor is konvergens.
2. ha $\sum a_n$ sor divergens, akkor (s_n) nem korlátos, így (t_n) sem az. Ezért a $\sum b_n$ sor is divergens.

Megjegyzés. A szuperharmonikus sor konvergenciája a majoráns kritériummal is igazolható. Valóban: a szóban forgó pozitív tagú sor tagjaira:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} \qquad (n \geq 2).$$

Így $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ majorálható a $\sum_{n=2} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens teleszkopikus sorral. ■

3. Cauchy-féle gyökkritérium

1. Tétel (A Cauchy-féle gyökkritérium). *Tekintsük a $\sum a_n$ végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

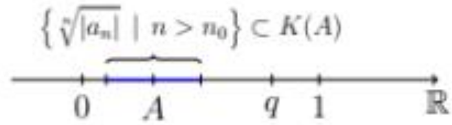
$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $A \geq 0$.

1. Tegyük fel, hogy $\boxed{0 \leq A < 1}$.

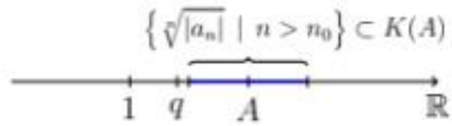


Vegyünk egy A és 1 közötti q számot!

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon\ \sqrt[n]{|a_n|} < q, \ \text{ azaz } \ |a_n| < q^n.$$

Mivel $0 < q < 1$, ezért a $\sum q^n$ mértani sor konvergens. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, és ez azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy $\boxed{A > 1}$.



Vegyünk most egy 1 és A közötti q számot!

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon\ \sqrt[n]{|a_n|} > q, \ \text{ azaz } \ |a_n| > q^n.$$

Tehát, véges sok n indextől eltekintve $|a_n| > q^n > 1$.

Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \neq 0$, és így a $\sum a_n$ sor divergens.

3. Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$;
- a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$.

4. d'Alembert-féle hányadoskritérium

2. Tétel (A d'Alembert-féle hányadoskritérium). *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \le A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Világos, hogy $A \ge 0$.

1. Legyen $\boxed{0 \le A < 1}$ és vegyünk egy olyan q számot, amire $A < q < 1$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \ge n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| < q|a_n|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|, \quad |a_{n_0+2}| < q|a_{n_0+1}|, \quad \ldots \quad , |a_{n-1}| < q|a_{n-2}|, \quad |a_n| < q|a_{n-1}|$$

minden $n \ge n_0$ esetén. Így

$$|a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \cdots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = q^{-n_0}|a_{n_0}|q^n = aq^n,$$

ahol $a := q^{-n_0}|a_{n_0}|$ egy n-től független konstans. A $\sum aq^n$ mértani sor konvergens, mert $0 < q < 1$. Ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, vagyis a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2. Legyen $\boxed{A > 1}$ és vegyünk most egy olyan q számot, amire $1 < q < A$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| > q|a_n| > |a_n|.$$

Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \ne 0$, így a $\sum a_n$ sor divergens.

3. Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

Megjegyzések.

1. Igazolható, hogy ha a $\sum a_n$ szigorúan pozitív tagú sorban létezik a $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ határérték, akkor a $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ határérték is létezik, és
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz. Ez azt jelenti, hogy a gyökkritérium általánosabb a hányadoskritériumnál, azaz olyan soroknál is alkalmazható, ahol a hányadoskritérium nem. Azonban sok esetben a hányadoskritériumban szereplő képlet könnyebben kezelhető.

2. Már több kritériumot is megismertünk sorok konvergenciájának az eldöntésére. Ezek felhasználásával konvergencia esetén a sor összegét nem tudjuk kiszámítani. Néhány esetben azonban a sor konvergenciájának az ismeretében bizonyos tételek felhasználásával a sor összegét is meg tudjuk határozni. Például a gyakorlaton már foglalkoztunk a $\sum nq^n$ sorral, ahol $|q|<1$. A definíció alapján igazoltuk, hogy a sor konvergens, és az összegét is kiszámoltuk. Most ennek a feladatnak egy másik megoldását mutatjuk meg.

   A gyökkritérium alapján a sor konvergens, hiszen
$$a_n=nq^n \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n|q|^n}=|q|\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=|q|\cdot 1=|q|<1.$$
   Legyen $A:=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nq^n\in\mathbb{R}$. Ekkor átindexeléssel azt kapjuk, hogy
$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}nq^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^{n+1}=q\sum_{n=0}^{+\infty}nq^n+q\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=q\sum_{n=1}^{+\infty}nq^n+q\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=qA+q\,\frac{1}{1-q}.$$
   hiszen az előző átalakításban szereplő sorok konvergensek, ami miatt a sorok lineáris kombinációra vonatkozó tétel alkalmazható. Ekkor
$$A=qA+q\,\frac{1}{1-q} \quad\Longrightarrow\quad (1-q)A=q\,\frac{1}{1-q} \quad\Longrightarrow\quad A=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

5. Leibniz-típusú sorok konvergenciája

Leibniz-típusú sorok

Váltakozó előjelű sorok konvergenciáját az eddigiek alapján csak akkor tudjuk eldönteni, ha a sor abszolút konvergens. Most egy olyan kritériumot ismertetünk, amelyik bizonyos speciális alakban felírható váltakozó előjelű sorok konvergenciájára ad elégséges feltételt abban az esetben is, ha a sor nem abszolút konvergens.

1. Definíció. *A* $0 \le a_{n+1} \le a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *feltételt kielégítő sorozatból képzett*

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

váltakozó előjelű sort **Leibniz-típusú** *sornak nevezzük.*

3. Tétel (Leibniz-kritérium).

1. **Konvergencia:** *A* $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim(a_n) = 0$.
2. **Hibabecslés:** *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor konvergens és az összege*

$$A := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n.$$

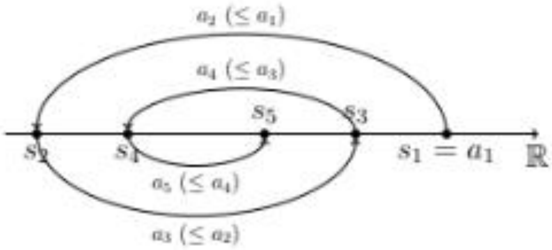
Ekkor

$$(*) \qquad \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

⇐ Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1}a_n$ egy Leibniz-típusú sor, és $\lim(a_n) = 0$. Igazoljuk, hogy a sor konvergens. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Szemléltessük az (s_n) részletösszeg-sorozat első néhány tagját!



$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1,\\
s_2 &= a_1 - a_2 = s_1 - a_2,\\
s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_3,\\
s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - a_4,\\
s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_4 + a_5.
\end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy az ábra alapján sejthető tendencia valóban igaz, azaz, hogy az (s_{2n}) sorozat monoton növekvő, és az (s_{2n+1}) sorozat monoton csökkenő.

- A páros indexű részsorozatnál a következő csoportosításból látható, hogy

$$s_{2n} = \overbrace{\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0}}^{s_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

  minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n}) valóban monoton növekvő.

- Hasonlóan, a páratlan indexű részsorozatnál

$$s_{2n+1} = \overbrace{a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_4 + a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0}}^{s_{2n-1}} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0}$$

  minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n+1}) monoton csökkenő sorozat.

Másrészt, az $s_0 := 0$ értelmezés mellett

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, amiből következik, hogy $s_{2n} \leq s_{2n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$(1) \qquad s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1.$$

Tehát (s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátos sorozatok. Mivel mindkettő monoton és korlátos, ezért konvergens is. Jelölje $A = \lim(s_{2n+1})$ és $B = \lim(s_{2n})$ a határértéküket. Ekkor

$$A - B = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

hiszen (a_{2n+1}) részsorozata az (a_n) sorozatnak. Ezért $A = B$, tehát az (s_{2n}) és az (s_{2n+1}) részsorozatok határértéke megegyezik. Ebből következik, hogy az (s_n) sorozat konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a Leibniz-típusú sor valóban konvergens.

2. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ Leibniz-típusú sor konvergens és A az összege. Ekkor $A = \lim(s_{2n+1}) = \lim(s_{2n})$. Az (1) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$s_{2n} \le A \le s_{2n+1} \le s_{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Így

- $0 \le A - s_{2n} \le s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad |A - s_{2n}| \le a_{2n+1}$, és
- $-a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1} \le A - s_{2n-1} \le 0 \quad \Longrightarrow \quad |A - s_{2n-1}| \le a_{2n}$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Azt kaptuk tehát, hogy

$$|A - s_n| \le a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ami az állítást igazolja.

Megjegyzések.

1. Az előző tételt Gottfried Leibniz (1646–1716) német matematikus fedezte fel, és 1714-ben levélben közölte Johann Bernoulli (1667–1748) svájci matematikussal. A Leibniz-kritérium konvergenciára vonatkozó állítása szerint a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor konvergens, mert az $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat monoton csökkenve tart 0-hoz.

2. Jelölje A a Leibniz-sor összegét. A Leibniz-kritériumban szereplő $(*)$ hibabecslés felhasználásával az A közelítő értékét (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk adni. Például a Leibniz-sornál ha $n = 10$, akkor $a_{11} = 1/11$ és

$$s_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} = 0,645\overline{634920}.$$

Mivel $s_{10} < A$, ezért $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$0,645\overline{634920} = s_{10} < A < s_{10} + a_{11} = \frac{20417}{27720} = 0,736\overline{544011},$$

így

$$0,6456 < A < 0,7366.$$

Később be fogjuk bizonyítani, hogy $A = \log_e 2 =: \ln 2 = 0,693147180\ldots$.

A Leibniz-típusú sorok hibabecslésére mintegy 250 évig csak Leibniz $(*)$ egyenlőtlensége volt ismeretes. Meglepő tény az, hogy csak az 1960-as évektől jelentek meg olyan dolgozatok, amelyekben a szerzők a szóban forgó becslés élesítését igazolták (lásd pl. D. Rattaggi dolgozata).

3. A Leibniz-kritériumban az (a_n) sorozat monotonitására tett feltétel nem hagyható el. Például az

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{2}{k} & (n = 2k-1) \\[2mm] \dfrac{1}{k} & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}^+)$$

pozitív tagú nullsorozat *nem monoton csökkenő*, és a $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ váltakozó előjelű (nem Leibniz-típusú!) végtelen sor divergens.

6. Minden [0,1]-beli szám felírható tizedes tört alakban

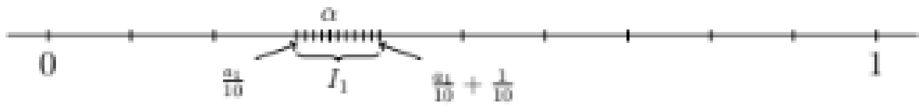
5. Tétel. *Minden $\alpha \in [0,1]$ számhoz létezik olyan $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ sorozat, amire az teljesül, hogy*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\alpha \in [0,1]$ számot!

Az első lépésben osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists a_1 \in \{0,1,2,\ldots,9\} : \alpha \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right] =: I_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{a_1}{10} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$



A második lépésben osszuk fel az I_1 intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists a_2 \in \{0,1,2,\ldots,9\} : \alpha \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\right] =: I_2, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}.$$

Ha az eljárást folytatjuk, akkor az n-edik lépésben találunk olyan $a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ számot, hogy

$$s_n := \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = s_n + \frac{1}{10^n},$$

ahol s_n a sor n-edik részletösszege. Ekkor

$$|\alpha - s_n| = \left|\alpha - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right)\right| \le \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

és így

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

2. Definíció. *Legyen $\alpha \in [0,1]$ és $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ olyan sorozat, amire*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

teljesül. Ekkor $0, a_1a_2a_3\ldots$ az α szám **tizedes tört alakja** *és ezt az*

$$\alpha = 0, a_1a_2a_3\ldots$$

egyenlőséggel fejezzük ki.

Megjegyzések.

1. Ha $\alpha \in [n, n+1]$, ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor α tizedes tört alakja $n, a_1a_2a_3\ldots$.

2. Bizonyos valós számoknak több tizedes tört alakja van. Például

$$\frac{1}{10} = 0,1000\ldots \quad \text{és} \quad \frac{1}{10} = 0,0999\ldots,$$

ugyanis

$$0,0999\ldots = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}.$$

Igazolható, hogy ha egy pozitív számnak van nullára végződő tizedes tört alakja, akkor van még egy tizedes tört alakja, ami 9-re végződik. Csak ilyen esetben lehet egy pozitív számnak több tizedes tört alakja, és ekkor pontosan két különböző tizedes tört alakja van.

3. ***A tizedes tört alak előállítása.*** A következő rekurzív algoritmus generálja a szám tizedes tört alakját. Legyen $\alpha \in [0,1)$. Szorozzuk meg α-t 10-zel. a_1 legyen a kapott szám egész része, a törtrésze egy $[0,1)$-beli szám, amivel az eljárás megismételhető. Ezzel egymás után kapjuk meg az a_2, a_3,… számjegyeket. Ha $\alpha = 1$, akkor tizedes tört alakja $0,999\ldots$.

4. ***Tizedes törtek osztályozása.*** Azt mondjuk, hogy $0, a_1a_2a_3\ldots$
   - ***véges tizedes tört***, ha $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$: $a_n = 0$,
   - ***szakaszos végtelen tizedes tört***, ha $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ és $\exists k \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > n_0$: $a_{n+k} = a_n$,
   - ***nem szakaszos végtelen tizedes tört***, ha végtelen, de nem szakaszos tizedes tört.

   A szakaszos végtelen tizedes törtek általános alakja

$$0, a_1a_2\ldots a_{n_0}\underbrace{b_1b_2\ldots b_k}\underbrace{b_1b_2\ldots b_k}\underbrace{b_1b_2\ldots b_k}\ldots,$$

   azaz egy ismétlődő k hosszúságú szakasz található a felírásban. Ekkor a tizedes törtet a

$$0, a_1a_2\ldots a_{n_0}\overline{b_1b_2\ldots b_k}$$

   alakban fogjuk felírni. Például $1/3 = 0,\overline{3}$.

5. Egy valós szám pontosan akkor *racionális*, ha tizedes tört alakja véges, vagy végtelen tizedes tört alakja szakaszos. Ebből az is következik, hogy egy valós szám akkor és csak akkor *irracionális*, ha végtelen tizedes tört alakja nem szakaszos.

6. A tizedes törtekre (mint végtelen sorokra) értelmezhetők a műveletek, megadható rendezés, bizonyíthatók ezek tulajdonságai, érvényes a teljességi axióma is, ezért ez is egy modellje (reprezentációja) lehet a valós számoknak. Ez a ***tizedes tört modell***.

7. Konvergens sorok zárójelezése

8. Tétel. *Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens sor, és összege az eredeti sor összegével egyenlő.*

Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor (m_n) által meghatározott zárójelezése, és jelölje (σ_n) és (s_n) rendre a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ha $\sum\limits_{n=1} a_n$ konvergens, akkor (s_n) konvergens sorozat, de ekkor minden részsorozata is konvergens, és határértéke megegyezik az (s_n) sorozat határértékével.

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}^+$ indexre $\sigma_n = s_{m_n}$ teljesül, így (σ_n) részsorozata az (s_n) sorozatnak. Tehát a (σ_n) sorozat konvergens és $\lim(\sigma_n) = \lim(s_n)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

9. Tétel. *Legyen $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott zárójelezése, és tegyük fel, hogy*

i) *a zárójelek hossza korlátos, azaz $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat,*

ii) $\lim(a_n) = 0$,

iii) *a $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ sor konvergens.*

Ekkor a $\sum\limits_{n=1} a_n$ is konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Bizonyítás. Mivel $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat, így

$$\exists K := \max\{m_{n+1} - m_n : n \in \mathbb{N}^+\} > 0.$$

Másrészt minden n indexű tag megtalálható az egyik zárójelben:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hez } \exists k(n) \in \mathbb{N}^+ : m_{k(n)-1} < n \le m_{k(n)}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített szám. Mivel $\lim(a_n) = 0$, így

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+,\ \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Jelölje (s_n) és (σ_n) a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ekkor $\forall n > n_0$ esetén

$$|s_n - \sigma_{k(n)}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{k(n)} \alpha_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m_{k(n)}} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m_{k(n)}} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m_{k(n)}} |a_k| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Ezért $\lim(s_n - \sigma_{k(n)}) = 0$. De ha a $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ sor konvergens és összege s, akkor $\lim(\sigma_{k(n)}) = s$, és így

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - \sigma_{k(n)}) + \lim_{n\to+\infty} \sigma_{k(n)} = 0 + s = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor is konvergens, és összege megegyezik a $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ sor összegével.

7. Abszolút konvergens sorok átrendezése

5. Definíció. *Legyen $\sum a_n$ egy adott végtelen sor. Tegyük fel, hogy $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció, (más szóval p egy permutációja $\mathbb{N}$-nek). Ekkor a $\sum a_{p_n}$ végtelen sort a $\sum a_n$ sor (p_n) által meghatározott* **átrendezésének** *nevezzük.*

10. Tétel. *Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor tetszőleges $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutációval képzett $\sum a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{és} \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} a_{p_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. lépés. Igazoljuk, hogy a $\sum a_{p_n}$ sor abszolút konvergens. Valóban, mivel $\sum a_n$ abszolút konvergens, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}| = |a_{p_0}| + |a_{p_1}| + \cdots + |a_{p_n}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K < +\infty,$$

azaz a $\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}|$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat felülről korlátos, de nyilván monoton növekvő is, következésképpen a $\sum |a_{p_n}|$ sor konvergens. Így a $\sum a_{p_n}$ sor valóban abszolút konvergens.

2. lépés. Azt igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Legyen

$$A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{és} \qquad B := \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n.$$

Tudjuk, hogy a $\sum |a_n|$ sor konvergens, így a Cauchy-kritérium szerint

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n \geq n_0\colon\ |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdot + |a_m| < \varepsilon.$$

Ezért $n = n_0$ mellett, ha $m > n_0$, akkor $\sum\limits_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$.

Adott $\varepsilon > 0$-ra tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat, és legyen N_0 olyan index, amire az $a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}$ összeg már tartalmazza ezeket a tagokat. Ilyen N_0 nyilván létezik, és $N_0 \geq n_0$. Legyen $n > N_0$. Ekkor

$$\sigma_n - s_n = \Big(\underbrace{a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}} + a_{p_{N_0+1}} + \cdots a_{p_n}\Big) - \Big(\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n\Big)$$

nem tartalmazza az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat. Így

$$|\sigma_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

ahol $m := \max\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, hiszen $m \geq n > N_0 \geq n_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\sigma_n - s_n)$ nullsorozat. Ezért

$$\sigma_n = (\sigma_n - s_n) + s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + A = A,$$

azaz

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Megjegyzés. Az tétel egyik fontos következménye, hogy végtelen sok pozitív számot bármilyen sorrendben adhatunk össze, mert ugyanaz lesz a végeredmény. Ez azért van, mert pozitív számokból álló sor abszolút sora megegyezik az eredeti sorral. ■

Ha egy konvergens sor nem abszolút konvergens (ezeket neveztük *feltételesen konvergens sorok-nak*), akkor az előbbi állításhoz képest „drámaian” megváltozik a helyzet. Az ilyen sorokat át lehet rendezni úgy, hogy az összege előre megadott $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem legyen, sőt konvergens sorból divergens sort is kaphatunk. Ezt fejezi ki a következő állítás.

9. Sorok téglányszorzatának konvergenciája

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} a_n$ *és a* $\sum_{n=0} b_n$ *végtelen sorok konvergensek. Ekkor a* $\sum_{n=0} t_n$ *téglányszorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

azaz konvergens sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a sorozatoknál tanult műveletek és határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel. Jelölje A_n, B_n és T_n rendre a $\sum_{n=0} a_n$, $\sum_{n=0} b_n$ és $\sum_{n=0} t_n$ sorok n-edik részletösszegeit. Ekkor

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i b_j \right) = \sum_{\max\{i,j\} \le n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) =$$

$$= A_n B_n \to \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right), \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a (T_n) sorozat konvergens, és így a $\sum t_n$ végtelen sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \lim(T_n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

10. Abszolút konvergens sorok szorzatai

2. Tétel (Abszolút konvergens sorok szorzatai). *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor*

1. *a* $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzat is abszolút konvergens,*
2. *a* $\sum\limits_{n=0} c_n$ *Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,*
3. *az összes* $a_i b_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ *szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett* $\sum\limits_{n=0} d_n$ *végtelen sor is abszolút konvergens, és*

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big)$$

Bizonyítás. Elég a 3. állítást igazolni. Mivel $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergensek, ezért

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} A \in \mathbb{R}, \qquad B_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} B \in \mathbb{R}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\sum d_n$ sort, ahol $d_n = \sum\limits_{\cdots} a_i b_j$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Jelölje I, illetve J a maximális i, illetve j indexet a $d_0, d_1, \ldots, d_N$ összegekben. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \le \sum_{\substack{0 \le i \le I \\ 0 \le j \le J}} |a_i b_j| = \Big(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\Big) \le A \cdot B,$$

és ez azt jelenti, hogy a $\sum |d_n|$ nemnegatív tagú sor konvergens, mert részletösszegei korlátosak. Tehát $\sum d_n$ abszolút konvergens.

A fentiek érvényesek $d_n = t_n$ esetén, így a $\sum t_n$ téglányszorzat is abszolút konvergens, tehát konvergens is. Ekkor az előző tétel szerint $(*)$ teljesül a $\sum t_n$ sorra, azaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Legyen $\sum t_n^*$ az a sor, amelyet a $\sum t_n$ téglányszorzatban szereplő zárójelek elhagyásával kapunk. Mivel $\sum t_n^*$ is egy lehetséges $\sum d_n$ típusú sor, ezért $\sum t_n^*$ is abszolút konvergens, és így bármely zárójelezésével az összege nem változik, azaz $(*)$ teljesül a $\sum t_n^*$ sorra:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^* = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Azonban bármely $\sum d_n$ típusú sor megkapható a $\sum t_n^*$ sorból megfelelő átrendezéssel és csoportosítással. Ekkor a sor összege nem változik, tehát $(*)$ teljesül tetszőleges $\sum d_n$ sorra.

11. Hatványsor konvergenciasugara

3. Tétel (Hatványsor konvergenciasugara). *Tetszőleges* $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:*

1. *$\exists\, 0 < R < +\infty$, hogy a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < R$ pontban abszolút konvergens és $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| > R$ pontban divergens.*
2. *A hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens. Ekkor legyen $R := 0$.*
3. *A hatványsor abszolút konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor legyen $R := +\infty$.*

R-et a hatványsor **konvergenciasugarának** *nevezzük.*

Bizonyítás. Az állítást elég $a = 0$ esetén igazolni.

Segédtétel. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| < |x_0|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens az x pontban.

A segédtétel bizonyítása. Mivel a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor konvergens, ezért $\lim(\alpha_n x_0^n) = 0$, így az $(\alpha_n x_0^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0\colon |\alpha_n x_0^n| \le M < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, amire $|x| < |x_0|$ teljesül. Ekkor

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n =: Mq^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum |\alpha_n x^n|$ végtelen sor tehát majorálható a $\sum Mq^n$ mértani sorral, ami konvergens, mert $|q| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |\alpha_n x^n|$ sor is konvergens, tehát a $\sum \alpha_n x^n$ végtelen sor abszolút konvergens.

A tétel bizonyítása. Tekintsük a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsort. Ez $x = 0$-ban nyilván konvergens, ezért $\mathrm{KH}\left(\sum \alpha_n x^n\right) \neq \emptyset$, és így

$$(1) \qquad \exists \sup \mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \alpha_n x^n\right) =: R \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad R \ge 0.$$

A következő három eset lehetséges.

1. $\underline{0 < R < +\infty}$. Legyen $|x| < R$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója szerint $\exists x_0 > 0\colon |x| < x_0 < R$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. Ha $|x| > R$ tetszőleges, akkor az R szám definíciója és a segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor divergens.
2. $\underline{R = 0}$. A $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor az $x = 0$ pontban nyilván konvergens. Tegyük fel, hogy $x \neq 0$ olyan pont ahol $\sum \alpha_n x^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint a hatványsor konvergens az $\frac{|x|}{2} > 0$ pontban, ami nem lehetséges, mert $R = 0$. A hatványsor tehát csak az $x = 0$ pontban konvergens.
3. $\underline{R = +\infty}$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója értelmében $\exists x_0 > 0\colon |x| < x_0$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

12. Cauchy-Hadamard-tétel

4. Tétel (A Cauchy–Hadamard-tétel.). *Tekintsük a* $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0,\ \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $A \geq 0$. Rögzítsük tetszőlegesen az $x \in \mathbb{R}$ számot, és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ végtelen számsorra:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha_n(x-a)^n\right|} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) \cdot |x-a| = A|x-a|, \quad \text{és így}$$

$$A|x-a| < 1 \implies \text{a sor konvergens}, \qquad A|x-a| > 1 \implies \text{a sor divergens}.$$

1. Ha $\underline{0 < A < +\infty}$, akkor A-val lehet osztani, és ekkor

   $$x \in \left(a - \frac{1}{A}, a + \frac{1}{A}\right) \implies \text{a sor konv.}, \qquad x \notin \left[a - \frac{1}{A}, a + \frac{1}{A}\right] \implies \text{a sor div.},$$

   amiből következik, hogy $R = 1/A$.
2. Ha $\underline{A = +\infty}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq a$: $A|x-a| = (+\infty)\cdot|x-a| = +\infty > 1$.
   Ezért a hatványsor az $x = a$ pont kivételével divergens, azaz $R = 0$.
3. Ha $\underline{A = 0}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}$: $A|x-a| = 0 \cdot |x-a| = 0 < 1$.
   Ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, azaz $R = +\infty$.

13. Függvény határértékének egyértelműsége

A függvényhatárérték alaptételei

3. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ elem eleget tesz a definíció feltételeinek. Mivel két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem diszjunkt környezetekkel szétválasztható, ezért

$$\exists \varepsilon > 0\colon K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset.$$

A határérték definíciója szerint egy ilyen ε-hoz

$$\exists \delta_1 > 0,\ \forall x \in \dot{K}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon(A_1),$$

$$\exists \delta_2 > 0,\ \forall x \in \dot{K}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon(A_2).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset, \quad \text{de } \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset, \text{ mert } a \in \mathcal{D}_f'.$$

Ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk.

14. Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv

4. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ *és* $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor*

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \textit{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$ $\lim_a f = A \implies \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített érték.

$$\lim(x_n) = a \quad \implies \quad \delta\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel $x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, amiből $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ez azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_a f = A$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\lim_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\text{-hoz } \exists x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A).$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással ez azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } \exists x_n \in \dot{K}_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges. Az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a-hoz tart $\big($hiszen $x_n \in K_{1/n}(a)\big)$, de a függvényértékek $\big(f(x_n)\big)$ sorozata nem tart A-hoz $\big($hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)\big)$, ami ellentmond a feltételünknek.

15. Monoton függvények határértéke

3. Tétel. *Legyen $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α,β)-n, akkor f-nek $\forall a\in(\alpha,\beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.*

a) *Ha $f\nearrow(\alpha,\beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f=\inf\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x>a\big\},$$

$$\lim_{a-0} f=\sup\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x<a\big\}.$$

b) *Ha $f\searrow(\alpha,\beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f=\sup\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x>a\big\},$$

$$\lim_{a-0} f=\inf\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x<a\big\}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f\nearrow(\alpha,\beta)$-n. A jobb oldali határértékre vonatkozó állítást igazoljuk.

Legyen

$$m:=\inf\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x>a\big\}.$$

Világos, hogy $m\in\mathbb{R}$. Az infimum definíciójából következik, hogy

i) $\forall x\in(\alpha,\beta),\ x>a\colon m\le f(x)$,

ii) $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists x_1\in(\alpha,\beta),\ x_1>a\colon f(x_1)<m+\varepsilon$.

Így $m\le f(x_1)\le m+\varepsilon$. Mivel $f\nearrow(\alpha,\beta)$-n, ezért

$$m\le f(x)\le f(x_1)<m+\varepsilon\qquad\big(x\in(a,x_1)\big).$$

A $\delta:=x_1-a>0$ választással tehát azt mutattuk meg, hogy

$$\forall\varepsilon>0\text{-hoz }\exists\delta>0,\ \forall x\in(\alpha,\beta),\ a<x<a+\delta\colon \underbrace{0\le f(x)-m<\varepsilon}_{f(x)\in K_\varepsilon(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy f-nek a-ban van jobb oldali határértéke, és az m-mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f=m=\inf\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x>a\big\}.$$

A tétel többi állítása hasonlóan bizonyítható.

16. Összetett függvény folytonossága

9. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény „örökli” a belső- és a külső függvény folytonosságát.*

Bizonyítás. A feltételek szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $g(a) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, azaz $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről, és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ is igaz.

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in C\{a\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim\big(g(x_n)\big) = g(a)$. Jelölje

$$b := g(a) \qquad \text{és} \qquad y_n := g(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(y_n) = b$. Mivel $f \in C\{b\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim\big(f(y_n)\big) = f(b)$. Ugyanakkor

$$f(b) = f\big(g(a)\big) = (f \circ g)(a) \qquad \text{és} \qquad f(y_n) = f\big(g(x_n)\big) = (f \circ g)(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt igazoltuk tehát, hogy $\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$, $\lim(x_n) = a$ sorozat esetén igaz, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \big(f(y_n)\big) = f(b) = (f \circ g)(a).$$

Ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f \circ g \in C\{a\}$.