

# DISZKRÉT MATEMATIKA I.

## TÉTEL BIZONYÍTÁSOK

MÉRAI LÁSZLÓ

### BEVEZETŐ

Ez az oktatási segédanyag a *Diszkrét matematika I.* című tantárgy előadásain elhangzott főbb tételek bizonyításait foglalja össze. Elsődleges célja az előadások követésének támogatása, valamint az elhangzottak rendszerezésének és megértésének elősegítése.

Fontos hangsúlyozni, hogy a dokumentum **nem** tekinthető önálló jegyzetnek vagy tankönyvnek. Az itt közolt anyag kizárolag az előadásokkal együtt értelmezhető és használható eredményesen.

A segédanyag folyamatos fejlesztés alatt áll. Amennyiben hibát, elírást vagy pontatlanságot észlel, kérem, jelezzen a [merai@inf.elte.hu](mailto:merai@inf.elte.hu) címen.

### 1. RELÁCIÓK

**1.1. téTEL** (Relációk kompozíciója asszociatív). *Legyenek  $X, Y, Z, W$  adott halmazok és  $T \subset X \times Y$ ,  $S \subset Y \times Z$ ,  $R \subset Z \times W$  tetszőleges relációk. Ekkor*

$$(1) \quad (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

*Bizonyítás.* Legyen  $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$ . Megmutatjuk, hogy ekkor  $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$  szintén teljesül.

Valóban, ha  $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$ , akkor a relációk kompozíciójának definíciója szerint létezik olyan  $z \in Y$ , hogy

$$(2) \quad (x, z) \in T$$

és  $(z, y) \in R \circ S$ . Hasonlóan, ekkor létezik olyan  $w \in Z$ , hogy

$$(3) \quad (z, w) \in S$$

és

$$(4) \quad (w, y) \in R.$$

Ekkor a (2) és a (3) alapján  $(x, w) \in S \circ T$ . Ezt és a (4) felhasználva  $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$  adódik.

Hasonlóan megmutathatjuk, hogy ha  $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$  teljesül, akkor szintén  $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$ .

Ezzel beláttuk, hogy a  $R \circ (S \circ T)$  és  $(R \circ S) \circ T$  relációk pontosan ugyanazokat a párokat tartalmazzák, tehát megegyeznek.  $\square$

**1.2. tétel** (Kompozíció inverze). *Adott  $X, Y, Z$  halmazok esetén legyenek  $S \subset X \times Y$  és  $R \subset Y \times Z$  relációk. Ekkor*

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

*Bizonyítás.* Adott  $x, y$  esetén megmutatjuk, hogy  $(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$  pontosan akkor teljesül, ha  $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ .

Először tegyük fel, hogy  $(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$ . Ekkor az inverz definíciója szerint,  $(y, x) \in R \circ S$ . Ez utóbbi akkor teljesül, ha létezik olyan  $z$ , hogy

$$(y, z) \in S \quad \text{és} \quad (z, x) \in R.$$

A relációk inverzének definícióját felhasználva ez ekvivalens azzal, hogy

$$(z, y) \in S^{-1} \quad \text{és} \quad (x, z) \in R^{-1},$$

azaz  $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ .

Mivel itt ekvivalens átalakításokat végeztünk, hasonlóan módon megmutatható, hogy  $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$  esetén  $(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$  szintén teljesül.  $\square$

**1.3. tétel** (Ekvivalencia relációk és osztályozás). *Legyen  $\sim$  egy  $X$  halmazon értelmezett ekvivalencia reláció és  $x \in X$  esetén legyen*

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\} \subset X.$$

*Ekkor az  $\{[x] : x \in X\}$  egy osztályozás.*

*Megfordítva, tekintsük egy  $X$  halmaz  $\mathcal{O}$  osztályozását. Ekkor az*

$$R = \{(x, y) : x \text{ és } y \text{ az } \mathcal{O} \text{ ugyanazon osztályban vannak}\}$$

*egy ekvivalencia reláció.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{O} = \{[x] : x \in X\}$ . Megmutatjuk, hogy ez egy osztályozás.

Mivel  $\sim$  reflexív, ezért minden  $x \in X$  esetén  $x \in [x]$ , így

$$\cup \{[x] : x \in X\} = X.$$

Szintén megmutatjuk, hogy  $\mathcal{O}$  elemei páronként diszjunktak. Ehhez legyenek  $x, y \in X$  olyan elemek, melyekre  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ . Megmutatjuk, hogy ebben az esetben  $[x] = [y]$ . Ehhez legyen  $z \in [x] \cap [y]$ . Ekkor a  $[x]$  és  $[y]$  halmazok definíciója szerint  $z \sim x$  és  $z \sim y$ . Mivel  $\sim$  szimmetrikus, ezért  $x \sim z$  is teljesül. Továbbá, mivel  $\sim$  tranzitív

$$(5) \quad x \sim z \wedge z \sim y \implies x \sim y,$$

azaz  $x \in [y]$ .

Megmutatjuk, hogy nem csak  $x$ , hanem  $[x]$  összes eleme is eleme az  $[y]$  halmaznak. Ehhez legyen  $x' \in [x]$ , azaz  $x' \sim x$ . Ekkor ahogy (5)-ben megmutattuk  $x \sim y$ . Így, mivel  $\sim$  tranzitív

$$x' \sim x \wedge x \sim y \implies x' \sim y,$$

azaz  $x' \in [y]$ . Ezzel megmutattuk, hogy

$$(6) \quad [x] \subset [y].$$

Az  $x$  és  $y$  szerepének felcseréléssel ugyanígy kaphatjuk, hogy

$$(7) \quad [y] \subset [x].$$

Így a (6) és (7) felhasználásával adódik, hogy  $[x] = [y]$ .

Ezzel megmutattuk, hogy  $\mathcal{O}$  valóban egy osztályozás.

A második részhez tegyük fel, hogy  $\mathcal{O}$  egy osztályozás. Megmutatjuk, hogy  $R$  valóban egy ekvivalenciareláció.

Mivel minden  $x$  ugyanabban az osztályban van, mint önmaga, így triviálisan  $xRx$ , azaz  $R$  reflexív.

Ha  $xRy$ , akkor  $R$  definíciója szerint  $x$  és  $y$  ugyanabban az osztályban vannak, így  $yRx$  szintén teljesül, azaz  $R$  szimmetrikus.

Végül, ha  $xRy$  és  $yRz$ , akkor minden  $x, y$  és  $z$  ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan  $xRy$ , azaz  $R$  tranzitív.

□

## 2. KOMPLEX SZÁMOK

**2.4. tételel** (Moivre azonosság). *Legyenek  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  nem-nulla komplex számok, és tekintsük azok trigonometrikus alakját:*

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi),$$

*Ekkor*

1.  $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$ ,
2.  $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$ ,
3.  $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$  adott  $n \geq 1$  esetén.

*Bizonyítás.* Először megmutatjuk a szorzásra vonatkozó 1. azonosságot. Ehhez tekintsük a  $zw$  szorzatot. Kihasználva, hogy  $i^2 = -1$ , kapjuk hogy

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot |w|(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= |z||w|(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)). \end{aligned}$$

Kihasználva a sin és cos függvényekre vonatkozó következő következő addíciós képleteket:

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \quad \sin(\varphi + \psi) = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi,$$

kapjuk, hogy

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ezzel beláttuk az 1. összefüggést.

A 2. összefüggés megmutatásához legyen

$$v = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

a 2. egyenletének jobb oldala. Az összefüggés bizonyításához meg kell mutatni, hogy  $v = z/w$ , azaz  $w \cdot v = z$ . Azonban az 1. összefüggés szerint

$$\begin{aligned} w \cdot v &= |w|(\cos \psi + i \sin \psi) \cdot \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) \\ &= |z|(\cos \psi + i \sin \psi) \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) \\ &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z. \end{aligned}$$

A 3. összefüggést  $n$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az  $n = 1$  közvetlenül adódik. Tegyük fel, hogy  $n = k$  esetén igaz az állítás, megmutatjuk, hogy  $n = k + 1$  esetén is teljesül az összefüggés. Valóban, az 1. összefüggést használva,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z \cdot z^k = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)|z|^k(\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)) \\ &= |z|^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi)). \end{aligned}$$

□

**2.5. tétel** (Gyökvonás komplex számok körében). *Legyen  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  komplex szám  $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$  trigonometrikus alakkal. Ekkor a*

$$(8) \quad z^n = w, \quad z \in \mathbb{C}$$

*egyenlet megoldásai:*

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k) : \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*Bizonyítás.* Adott  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  esetén keressük azokat a  $z \in \mathbb{C}$  számokat, melyekre (8) teljesül. Mivel  $w \neq 0$ , ezért  $z$  sem lehet 0. Tekintsük ezek trigonometrikus alakját.

$$w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi), \quad z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ekkor a megoldások megtalálásához a  $|z|$  és  $\varphi$  értékeit kel megtalálni.

A (8) egyenlet és a 2.4. téTEL szerint

$$(9) \quad |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = |w|(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Ekkor a két oldal abszolút értékét összehasonlítva kapjuk

$$|z|^n = |w| \Rightarrow |z| = |w|^{1/n}.$$

Továbbá, a (9) egyenletből

$$\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = \cos \psi + i \sin \psi,$$

azaz

$$n\varphi = \psi + 2k\pi$$

valamely  $k$  egész szám esetén. Leosztva  $n$ -nel, kapjuk, hogy

$$\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Vegyük észre, hogy ezek  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  esetén minden különböznek, azonban ha  $k$   $n$ -nél nagyobb, akkor a szögfüggvények  $2\pi$  szerinti periodikussága miatt nem kapunk újabb  $z_k$  megoldást.  $\square$

### 3. KOMBINATORIKA

**3.6. téTEL** (Ismétlés nélküli permutáció). *Adott egy  $n$  elemű halmaz. A halmaz elemeit  $n!$  módon tudjuk sorrendbe tenni.*

*Bizonyítás.* Az első helyre  $n$  módon tudunk elemet választani, a másodikra  $n - 1$  módon, ..., az  $n$ -edik helyre pedig 1 módon tudunk választani. Így a második szorzat szabály szerint összesen  $n \cdot (n - 1) \cdots 1 = n!$  módon tudjuk az elemeket sorrendbe rendezni.  $\square$

**3.7. téTEL** (Ismétléses permutáció). *Adott  $k_1$  darab 1. típusú elem,  $k_2$  darab 2. típusú, ...,  $k_\ell$  darab  $\ell$ -edik típusú elem. Ha az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor ezeket*

$$\frac{(k_1 + \cdots + k_\ell)!}{k_1! \cdots k_\ell!}$$

*módon tudjuk sorba állítani.*

*Bizonyítás.* Ha minden elem megkülönböztethető, akkor azokat  $(k_1 + \cdots + k_\ell)!$  módon tudjuk sorrendbe állítani. Ha viszont az azonos típusú elemeket nem különböztetjük meg, akkor egy-egy lehetőséget többször számoltunk. Nevezetesen annyiszor, ahányszor a  $k_1$  darab 1. típusú elemet sorrendbe tudjuk rakni és a  $k_2$  darab 2. típusú elemet sorrendbe tudjuk rakni és .... Ezt összesen  $k_1! \cdots k_\ell!$  módon tudjuk megtenni a 3.6 és a szorzás szabály szerint. Így a osztás szabály szerint, ezzel leosztva megkapjuk a kívánt mennyiséget.  $\square$

**3.8. téTEL** (Ismétlés nélküli variáció). *Adott egy  $n$  elemű halmaz. A halmazból  $k$ -szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje számít, egy elemet egyszer választhatunk. Ezt  $n!/(n - k)!$  módon tudjuk megtenni.*

*Bizonyítás.* Az első helyre  $n$  módon tudunk elemet választani, a másodikra  $n - 1$  módon, ..., a  $k$ -adik helyre pedig  $n - k + 1$  módon tudunk választani. Így a második szorzat szabály szerint összesen  $n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = n!/(n - k)!$  módon tudunk választani.  $\square$

**3.9. téTEL** (Ismétléses variáció). *Adott egy  $n$  elemű halmaz. A halmazból  $k$ -szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje számít, egy elemet többször is választhatunk. Ezt  $n^k$  módon tudjuk megtenni.*

*Bizonyítás.* Az első esetben  $n$  módon tudunk választani, a második esetben  $n$  módon tudunk választani, ... Így a *szorzás szabály* szerint összesen  $n^k$  módon tudunk választani.  $\square$

**3.10. téTEL** (Ismétlés nélküli kombináció). *Adott egy  $n$  elemű halmaz. A halmazból  $k$ -szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje nem számít, egy elemet csak egyszer választhatunk. Ezt  $\binom{n}{k}$  módon tudjuk megtenni.*

*Bizonyítás.* Először válasszunk ki  $k$  darab elemet úgy, hogy a sorrend számít. Ezt  $\frac{n!}{(n-k)!}$  módon tudjuk megtenni. Azonban, ha a sorrend nem számít, egy lehetőséget annyiszor számoltunk, ahány módon sorrendbe tudjuk rakni a ki-választott  $k$  elemet, ez  $k!$  Így az *osztás szabály* szerint  $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ .  $\square$

**3.11. téTEL** (Ismétléses kombináció). *Adott egy  $n$  elemű halmaz. A halmazból  $k$ -szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje nem számít, egy elemet többször is választhatunk. Ezt  $\binom{n+k-1}{k}$  módon tudjuk megtenni.*

*Bizonyítás.* Egy adott választást reprezentálhatunk egy 0–1 sorozattal a következő módon. A sorozatban pontosan  $k$  darab 0 és  $n - 1$  darab 1 szerepel a következő módon: először szerepeljen annyi 0, ahányszor az 1. elemet választottuk, majd egy 1 és annyi 0, ahányszor a 2. elemet választottuk, ... Így minden egyes választás pontosan meghatároz egy sorozatot. Az ilyen 0–1 sorozat hossza  $k + n - 1$ . Annyi ilyen típusú sorozat van, ahányféleképpen ki tudunk választani a  $k + n - 1$  pozícióból  $k$  darabot, aholá a 0-át írjuk (és a maradék helyekre az 1-eket). Ezt  $\binom{k+n-1}{k}$  módon tudjuk megtenni.  $\square$

**3.12. téTEL** (Binomiális tétel). *Adott  $n \geq 1$  egész esetén*

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Tekintsük a

$$(10) \quad (a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)}_{n\text{-szer}}.$$

Amikor a zárójeleket felbontjuk  $a^{n-i} b^i$  alakú szorzatok keletkeznek. Ez a tag annyiszor jelenik meg, ahányféleképpen ki tudunk választani a (10) szorzatban  $i$  tényezőt, ahonnan a  $b$  tagot választjuk, és a maradék  $n - i$  tényezőből az  $a$  tagot választjuk. Mivel a sorrend nem számít, ezt összesen  $\binom{n}{i}$  módon tudjuk megtenni.  $\square$

**3.13. téTEL** (Pascal-háromszög). *Adott  $n, i$  nemnegatív egészek esetén, ha  $n \geq i$ , akkor*

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

*Bizonyítás.* Adott  $n+1$  elemből szeretnénk  $i+1$ -et kiválasztani. Kétféleképpen számláljuk le ezek lehetőségeit.

Először közvetlenül kiválasztunk  $n+1$  elemből  $i+1$ -et. Ezt  $\binom{n+1}{i+1}$  módon tudjuk megtenni.

Másrészt esetszétválasztással is megszámoljuk a lehetőségeket aszerint, hogy az utolsó,  $n+1$ -edik elemet kiválasztjuk-e.

Ha *kiválasztjuk*, akkor a maradék  $n$  elemből még  $i$  elemet kell kiválasztani. Ezt  $\binom{n}{i}$  módon tudjuk megtenni.

Ha az utolsó elemet *nem* választjuk ki, akkor a maradék  $n$  elemből még  $i+1$ -et kell kiválasztani, ezt  $\binom{n}{i+1}$  módon tudjuk megtenni.

Mivel minden lehetőséget itt pontosan egyszer vettünk figyelembe, így összesen ezt

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$$

módon tudjuk megtenni. □

**3.14. tételel** (Binomiális együtthatók szimmetriája). *Minden  $n, k$  nemnegatív egészre*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $n$  különböző elemet és színezzük ki  $k$  elemet kékre és a maradék  $n-k$  elemet pirosra. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni? Ezen lehetőségeket kétféleképpen számláljuk le.

Először leszámoljuk a lehetséges eseteket aszerint, hogy hányféleképpen tudjuk a kékre színezendő elemeket kiválasztani. Ez  $\binom{n}{k}$ .

Másrészről leszámolhatjuk ezt aszerint is, hogy hányféleképpen tudunk  $n-k$  elemet pirosra kiszínezni. Ezt  $\binom{n}{n-k}$  módon tudjuk megtenni. Mivel a ugyanazt a jelenséget számoltuk le kétféleképpen, ezért a két mennyiségnak meg kell egyezni. □

#### 4. GRÁFELMÉLET

**4.15. tételel** (Kézfogás szabály). *Minden  $G = (V, E)$  gráfra*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

*Bizonyítás.* Számoljuk meg az *illeszkedő*

$$\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}$$

pont-él párokat kétféleképpen.

Adott  $v \in V$  esetén  $\sum_{e \in E} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}|$  a  $v$ -re illeszkedő élek számát adja, azaz a  $v$  fokszámát. Így

$$(11) \quad \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{v \in V} d(v).$$

Másrészről adott  $e \in E$  esetén  $\sum_{v \in V} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}|$  az  $e$  ére illeszkedő csúcsok számát adja, ami minden esetben 2. Így

$$(12) \quad \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$

Mivel mind a (11) mind a (12) esetén ugyanazt számoltuk meg, ezért a két mennyiségnak meg kell egyeznie.  $\square$

**4.16. tétel** (Fákra vonatkozó 4 ekvivalens állítás). *Egy  $G$  gráfra a következők ekvivalensek*

- (1)  $G$  fa, azaz összefüggő és körmentes.
- (2)  $G$  összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem.
- (3) ha  $v$  és  $v'$  a  $G$  különböző csúcsai, akkor  $v$ -ból  $v'$ -be pontosan egy út vezet.
- (4)  $G$ -nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van.

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1).

**1. rész:** (1)  $\Rightarrow$  (2)

$G$  összefüggősége következik a fa definíciójából.

A másik rész megmutatásához, tegyük fel, hogy az  $e$  él ( $v$  és  $v'$  között) elhagyásával a gráf összefüggő marad. Ekkor létezik  $v$  és  $v'$  között séta, mely nem tartalmazza az  $e$  által. Ekkor a sétahoz az  $e$  által hozzáadva kapunk egy  $v$ -ból induló zárt sétát  $v'$ -n keresztül. Ekkor ez a zárt séta tartalmaz kört, ami ellentmond a  $G$  körmentességének.

**2. rész:** (2)  $\Rightarrow$  (3)

Mivel  $G$  összefüggő, ezért létezik  $v$  és  $v'$  között séta, így út is. Indirekt tegyük fel, hogy több út is létezik. Legyenek ezek

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1} = v'$$

illetve

$$v = u_0, f_1, u_1, f_2, \dots, u_\ell, f_\ell, u_{\ell+1} = v',$$

ahol a  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_\ell \in V$  és  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell \in E$ . Legyen  $r$  az első pont, ahol a két út szétválik:

$$r = \min\{i : v_i \neq u_i\}.$$

Mivel  $v_0 = v = u_0$  és a két út nem egyforma, ilyen  $r \geq 1$  szám létezik. Legyen továbbá  $v_s$  az az első pont, ahol a két út újra találkozik:

$$s = \min\{i > r : v_i = u_j \text{ valamely } j > r\}.$$

Mivel  $v_{k+1} = v' = u_{\ell+1}$ , ilyen  $s$  egész szintén létezik. Ekkor a

$$v_{r-1}, e_r, v_r, \dots, v_s = u_j, f_{j-1}, \dots, u_{r-1} = v_{r-1}$$

egy kör.

**3. rész:**  $(3) \Rightarrow (4)$

Tegyük fel, hogy a (4) állítás valamelyik része nem teljesül. Ekkor megmutatjuk, hogy a (3) sem teljesül.

Először tegyük fel, hogy  $G$ -nek van köre. Ekkor a körön két irányban haladva két tetszőleges pont között, a gráfban az adott pontok között több út is van.

Másrészről, tegyük fel, hogy nincs köre, és az  $e = \{v, v'\}$  él hozzáadásával sem keletkezik kör. Ekkor az eredeti gráfban  $v$  és  $v'$  között nem volt út, hiszen csak azt egészítette volna ki körré az  $e$  él.

**4. rész:**  $(4) \Rightarrow (1)$

Elég megmutatni, hogy  $G$  összefüggő. Indirekt tegyük fel, hogy nem az, speciálisan léteznek olyan  $v, v'$  csúcsok, hogy közöttük nincs séta. Ekkor az  $e = \{v, v'\}$  és behúzásával a gráfban keletkezik egy kör, legyen ez

$$v', e, v, e_1, v_1, \dots, e_k, v'.$$

Ekkor a  $v, e_1, v_1, \dots, e_k, v'$  egy út  $v$  és  $v'$  között az eredeti gráfban, ami ellentmond a feltevésünknek.  $\square$

**4.17. téTEL** (Minden fának van levele). *Legyen  $G = (V, E)$  egy körmentes nemüres ( $E \neq \emptyset$ ) véges gráf. Ekkor  $\exists v \in V : d(v) = 1$ .*

*Bizonyítás.* Mivel  $E \neq \emptyset$ , így  $G$ -ben van út. Tekintünk egy maximális hosszúságú utat, legyen ez

$$v_0, e_1, \dots, e_k, v_k$$

$G$  körmentes, így  $v_k$ -nak nem lehetnek szomszédjai a korábbi  $v_0, \dots, v_{k-2}$  csúcsok, továbbá a maximalitás miatt  $v_k$ -nak nem lehet szomszédja olyan  $v \in V$  csúcs, ami különbözik a  $v_0, \dots, v_{k-2}$  csúcsoktól. Azaz  $v_k$ -nak egyedül  $v_{k-1}$  a szomszédja, speciálisan  $d(v_k) = 1$ .  $\square$

**4.18. téTEL** (Fák élszáma). *Legyen  $G$  egyszerű  $n$  csúcsú gráf. Ekkor a következők ekvivalensek:*

- (1)  $G$  fa, azaz összefüggő és körmentes.
- (2)  $G$  körmentes és  $n - 1$  élre van.
- (3)  $G$  összefüggő és  $n - 1$  élre van.

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

**1. rész:**  $(1) \Rightarrow (2)$

Az  $n$  csúcosszám szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha  $n = 2$ , akkor az állítás triviálisan igaz. Tegyük most fel fel, hogy az állítás teljesül  $k < n$  csúcsú gráfokra. Megmutatjuk, hogy ekkor  $n$  csúcsú gráfokra is teljesül az állítás.

Ehhez legyen  $G$  egy  $n$  csúcsú fa. Mivel körmentes, ezért létezik olyan  $v$  csúcsa, ami elsőfokú. Legyen  $G'$  a  $G$ -nek az a részgráfja, amit a  $v$  csúcs illetve a rá illeszkedő él elhagyásával kapunk. Ekkor  $G'$  egy  $n - 1$  csúcsú fa. Ekkor az indukció szerint élszáma  $n - 1 - 1 = n - 2$ . Így  $G$  élszáma  $n - 1$ .

### 2. rész: $(2) \Rightarrow (3)$

Azt kell megmutatnunk, hogy  $G$  összefüggő. Hasonlóan,  $n$  szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha  $n = 2$ , akkor az állítás igaz. Legyen most  $G$  egy  $n$  csúcsú körmentes gráf  $n - 1$  éllel. Mivel  $G$  körmentes, van olyan  $v$  csúcsa, mely elsőfokú. Legyen  $G'$  az a részgráf, melyet a  $v$  és a rá illeszkedő  $e = \{v, v'\}$  él elhagyásával kapunk. Ekkor  $G'$  egy körmentes,  $n - 1$  csúcsú,  $n - 2$  élű gráf. Indukció szerint összefüggő. Megmutatjuk, hogy ekkor  $G$  is összefüggő. Ehhez legyen  $u, u'$  a  $G$  két csúcsa. Ha  $u, u' \neq v$ , akkor azok benne vannak a  $G'$  gráfban, így van közöttük séta  $G'$ -ben, speciálisan  $G$ -ben is. Legyen most  $u' = v$ . Mivel  $v'$  a  $G'$  gráfban is benne van, így van séta  $u$  és  $v'$  között  $G'$ -ben. A sétához hozzáadva az  $e$  élt, ez egy séta lesz  $u$  és  $v$  között.

### 3. rész: $(3) \Rightarrow (1)$

Legyen  $G$  egy összefüggő,  $n - 1$  élű gráf. Ha  $G$  körmentes, akkor fa is. Ha van benne kör, akkor a körön él elhagyásával keletkező részgráf még mindig összefüggő. Folytassuk ezt, amíg egy körmentes,  $n$  csúcsú de összefüggő  $T$  részgráfot kapunk. Akkor  $T$  egy fa. Legyen továbbá  $\ell$  az elhagyott élek száma. Ekkor  $T$ -nek  $n$  csúcsa és  $n - 1 - \ell$  éle van. Azonban mivel  $T$  fa, így az  $(1) \Rightarrow (2)$  szerint  $T$ -nek  $n - 1$  éle van, azaz  $\ell = 0$ . Tehát, nem kellett élt elhagyni  $G$ -ből a körmentesség eléréséhez.  $\square$

**4.19. téTEL** (Euler zárt séta létezése). *Egy véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-séta, ha*

- (1) izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő;
- (2) minden csúcs foka páros.

*Bizonyítás.* A két feltétel nyilván szükséges feltétel. Tekintsük ugyanis a gráf egy

$$v_0, e_1, v_1, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_0$$

zárt Euler sétáját. Ekkor, ha  $u_1$  és  $u_2$  nem izolált csúcsok, azaz illeszkednek rájuk élek, akkor mind  $u_1$ , mind  $u_2$  fel van sorolva a zárt Euler sétában, így azon haladva van közöttük séta.

Másrészről, adott  $v$  csúcs minden előfordulása esetén a sétában kettővel járul hozzá a fokszámához. Mivel a séta Euler séta, így minden él fel van sorolva, így  $v$  fokszáma páros lesz.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a feltételek teljesülnek. Adunk egy algoritmust, ami keres a gráfban egy zárt Euler sétát.

Ehhez legyen  $v$  egy tetszőleges nem izolált csúcs. Indulunk el a  $v$  csúcsból csak korábban még nem látogatott éleken keresztül. Amíg nem érkezünk vissza  $v$ -be, addig lesz lehetőségünk a sétát folytatni, mert minden csúcs foka páros. Legyen ez a

$$v, e_1, v_1, \dots, e_{\ell-1}, v_{\ell-1}, e_\ell, v$$

séta.

Tegyük fel, hogy a fenti módszerrel kaptunk egy zárt sétát a gráfban. Ha ez a gráf összes élét tartalmazza, akkor készen vagyunk.

Ellenkező esetben legyen  $e = \{u_1, u_2\}$  olyan éle a gráfnak, amit nem tartalmaz a séta. Ha például  $u_1$  rajta van a sétán, akkor a  $u_1$ -ből elindulva az  $e$  élen keresztül hasonló módon kaphatunk egy másik zárt sétát. Ezt az eredeti sétával kiegészítve egy hosszabb sétát kapunk.

Ha  $u_1$  nincs rajta a sétán, akkor az összefüggőség miatt van

$$v, f_1, w_1, f_2, \dots, w_{t-1}, f_t, u_1$$

séta  $v$ -ből  $u_1$ -be. Legyen

$$i = \min\{j : e_j \neq f_j\}$$

és tekintsük a  $v_{i-1}$  csúcsot. Ekkor erre a csúcsra illeszkedik az eredeti zárt sétával nem lefedett él. Ezen hasonlóan elindulva kaphatunk egy  $v_{i-1}$  csúcsra illeszkedő zárt sétát. Ezt az eredeti zárt sétával kiegészítve egy nagyobb zárt sétát kapunk.

Az eljárást folytatva végül egy zárt Euler sétát kapunk.  $\square$

**4.20. tételes** (Dirac tétele). *Legyen  $G = (V, E)$  egy véges, egyszerű gráf  $n = |V| \geq 3$  csúccsal. Ha minden  $v \in V$  csúcsra  $d(v) \geq n/2$ , akkor  $G$ -ben létezik Hamilton-kör.*

*Bizonyítás.* A tételt adott  $n$  csúcosszám esetén indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy adott  $n$  esetén a tételet nem igaz, azaz léteznek olyan  $n$ -csúcsú gráfok, melyek kielégítik a tételet feltételeit, de nem tartalmaznak Hamilton-kört. Tekintsük ezen gráfok közül azt a  $G$  gráfot, melynek maximális élszáma van.

A maximalitás miatt, ha behúzunk egy eddig nem létező  $\{v, v'\}$  élt, akkor az így kapott gráfban már van Hamilton-kör. Azaz, az eredeti gráfban létezik a  $v$  és  $v'$  csúcsok között Hamilton-út. Legyen ez az út

$$v = v_0, v_1, \dots, v_{n-2}, v_{n-1} = v'.$$

Megmutatjuk, hogy

$$(13) \quad \exists i : \{v_i, v'\} \in E \wedge \{v_{i+1}, v\} \in E.$$

Először bebizonyítjuk a (13) állítást, majd később annak segítségével befejezzük a tételet bizonyítását is.

*A (13) állítás bizonyítása.* Tegyük fel, hogy nincs ilyen  $v_i$  csúcs. Legyen

$$\mathcal{V}_1 = \{u \in V : v \text{ és } u \text{ szomszédosak}\}, \quad \mathcal{V}_2 = \{u \in V : v' \text{ és } u \text{ szomszédosak}\}.$$

Nyilván  $|\mathcal{V}_1| = d(v) \geq n/2$  és  $|\mathcal{V}_2| = d(v') \geq n/2$ . Az indirekt feltétel szerint

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

Továbbá  $v, v' \notin \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ , így

$$n - 2 \geq |\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2| = |\mathcal{V}_1| + |\mathcal{V}_2| \geq n/2 + n/2 = n,$$

így ellentmondásra jutottunk, ami bizonyítja a (13) állítást.

A (13) állítás segítségével már befejezhetjük a téTEL bIZONYÍTÁSÁT IS. A (13) állítás szerint tekintsük a  $v_i$  és  $v_{i+1}$  csúcsokat. Segítségükkel konstruálunk a gráfban egy Hamilton-kört. Legyen ez

$$v = v_0, v_1, \dots, v_i, v', v_{n-2}, v_{n-3}, \dots, v_{i+1}, v.$$

□