

**Bizonyítással kért tételek  
a megajánlott vizsgajegyhez az 1. zh-n**

Analízis II. A-B (BSc)

Programtervező informatikus szak

1. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.
2. A szorzatfüggvény deriválása.
3. A hányadosfüggvény deriválása.
4. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.
5. A Rolle-féle középértéktétel.
6. A Lagrange-féle középértéktétel.
7. A Cauchy-féle középértéktétel.
8. Nyílt intervallumon értelmezett deriválható függvények esetében a monotonitás és a derivált kapcsolata.
9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.
10. A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.
11. A véges pontbeli  $\frac{0}{0}$  határérték esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.
12. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

1. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.

### Tétel.

Legyen  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ . Ekkor  $f \in D\{a\} \iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f), \end{array} \right.$$

és  $A = f'(a)$ .

### Bizonyítás.

$$\boxed{\implies} \quad f \in D\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff$$
$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}),$$

akkor  $\lim_a \varepsilon = 0$  és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ezért a feltétel az  $A = f'(a)$  választással teljesül.

$$\boxed{\impliedby} \quad \text{T.f.h. } \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0, \text{ hogy}$$

$$f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \quad \text{ha } x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy  $f \in D\{a\}$  és  $f'(a) = A$ . ■

## 2. A szorzatfüggvény deriválása.

**Tétel: Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.**

*T.f.h.  $f, g \in D\{a\}$  valamilyen  $a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$  pontban. Ekkor*

**3<sup>o</sup>**  $f \cdot g \in D\{a\}$  és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$

**Bizonyítás.**

A közös ötlet:  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  és  $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$  „kialakítása”.

**3<sup>o</sup> A szorzatfüggvény deriválása.** Világos, hogy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_{f \cdot g}$ .

Az  $f \cdot g$  függvény különbségihányados-függvénye az  $a$  pontban

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \stackrel{!}{=} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(x)}{x - a} = \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_{f \cdot g} \setminus \{a\}). \end{aligned}$$

Mivel  $g \in D\{a\}$ , ezért  $g \in C\{a\}$ , tehát  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . Így

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} &= \\ = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy  $f \cdot g \in D\{a\}$  és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

### 3. A hányadosfüggvény deriválása.

**Tétel: Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.**

*T.f.h.  $f, g \in D\{a\}$  valamilyen  $a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$  pontban. Ekkor*

**4°** *ha még a  $g(a) \neq 0$  feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

#### 4° A hányadosfüggvény deriválása.

Először azt igazoljuk, hogy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$ .

Valóban:  $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$ . Tehát  $g(a) \neq 0 \implies$

$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a)) \implies a \in \text{int } \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$

Az  $\frac{f}{g}$  hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye  $a$ -ban

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x - a} = \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \end{aligned}$$

Mivel  $g \in C\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$ , ezért

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \\ &= \frac{1}{g(a) \lim_{x \rightarrow a} g(x)} \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(a)} (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy  $\frac{f}{g} \in D\{a\}$  és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

4. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.

**Tétel: Elsőrendű szükséges feltétel a lok. szé-re.**

*T.f.h. az  $f$  függvénynek az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban lokális szélsőértéke van és  $f \in D\{a\}$ . Ekkor*

$$f'(a) = 0.$$

**Biz.** T.f.h.  $f$ -nek  $a$ -ban lokális maximuma van, azaz  $\exists r > 0$ :

$$\forall x \in (a - r, a + r) : f(x) \leq f(a) \implies f(x) - f(a) \leq 0.$$

Tek. az  $f$  fv.  $a$ -hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}).$$

Ha  $a < x < a + r \implies x - a > 0$  és  $f(x) - f(a) \leq 0 \implies$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \leq 0.$$

Ha  $a - r < x < a \implies x - a < 0$  és  $f(x) - f(a) \leq 0 \implies$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) \geq 0.$$

Mivel  $f \in D\{a\}$ , ezért

$$\underbrace{f'_-(a)}_{\geq 0} = \underbrace{f'_+(a)}_{\leq 0} = f'(a) = 0.$$

A bizonyítás hasonló akkor is, ha  $f$ -nek  $a$ -ban lokális minimuma van. ■

## 5. A Rolle-féle középértéktétel.

**Tétel: A Rolle-féle k.é.t.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ . Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \in C[a, b], \\ \bullet f \in D(a, b), \\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy} \\ f'(\xi) = 0. \end{array}$$

**Biz.**  $f \in C[a, b] \implies$  (Weierstrass-tétel)  $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ :

$$f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

1. eset:  $m = M$ . Ekkor  $f$  állandó, így  $\forall \xi \in (a, b)$ :  $f'(\xi) = 0$ .

2. eset:  $m \neq M$ . Mivel  $f(a) = f(b)$ , ezért  $\alpha$  és  $\beta$  közül legalább az egyik (pl.  $\alpha$ )  $(a, b)$ -be esik. Ekkor  $\xi := \alpha \in \text{int } \mathcal{D}_f = (a, b)$ , és  $f$ -nek  $\xi$ -ben lokális minimuma van. Mivel  $f \in D\{\xi\} \implies$  (az elsőrendű szükséges feltétel)  $f'(\xi) = 0$ . ■

## 6. A Lagrange-féle középértéktétel.

**Tétel: A Lagrange-féle k.é.t.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ .  
Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \in C[a, b], \\ \bullet f \in D(a, b) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy} \\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{array}$$

**Biz.** Az  $(a, f(a))$  és a  $(b, f(b))$  pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Igazoljuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a, b])$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.

Valóban,  $f$  és  $h_{a,b}$  mindketten folytonosak  $[a, b]$ -n és deriválhatók  $(a, b)$ -n, ezért a különbségük,  $F$  szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right) = 0,$$

tehát  $F(a) = F(b)$  is teljesül. A Rolle-tétel alapján tehát van olyan  $\xi \in (a, b)$  pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

## 7. A Cauchy-féle középértéktétel.

**Tétel: A Cauchy-féle k.é.t.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ . Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f, g \in C[a, b], \\ \bullet f, g \in D(a, b), \\ \bullet \forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy} \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \end{array}$$

**Biz.** A Rolle-tételből következik, hogy  $g(a) \neq g(b)$ . Valóban,  $g(a) = g(b)$ -ből az következne, hogy  $g$  deriváltja nulla az  $(a, b)$  intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \quad (x \in [a, b]).$$

Az  $F$  függvény folytonos  $[a, b]$ -n, deriválható  $(a, b)$ -n és  $F(a) = F(b) = 0$ . Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan  $\xi \in (a, b)$ , amelyre  $F'(\xi) = 0$ . Ekkor

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint  $g'(\xi) \neq 0$ , ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \blacksquare$$



8. Nyílt intervallumon értelmezett deriválható függvények esetében a monotonitás és a derivált kapcsolata.

**Tétel: A monotonitás és a derivált kapcsolata.** Legyen  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  egy **nyílt intervallum**. T.f.h.  $f \in D(a, b)$ . Ekkor

$$1^\circ f \nearrow [\searrow] (a, b)\text{-n} \iff f' \geq 0 [f' \leq 0] (a, b)\text{-n};$$

$$2^\circ \text{ ha } f' > 0 [f' < 0] (a, b)\text{-n} \implies f \uparrow [\downarrow] (a, b)\text{-n}.$$

**Bizonyítás.**

$1^\circ \boxed{\implies}$  Ha  $f \nearrow (a, b)\text{-n}$  és  $t \in (a, b)$  egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0 \quad (t < x < b),$$

hiszen  $x - t > 0$  és a monotonitás miatt  $f(x) - f(t) \geq 0$ . Mivel  $f \in D\{t\}$ , így

$$f'(t) = f'_+(t) = \lim_{x \rightarrow t+0} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0.$$

$\boxed{\impliedby}$  Ha  $\forall x \in (a, b): f'(x) \geq 0$ , akkor legyen  $x, y \in (a, b)$ ,  $x < y$  két tetszőleges pont. Ekkor  $f \in C[x, y]$ ,  $f \in D(x, y)$ , és így a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi \in (x, y): \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0 \implies f(x) \leq f(y).$$

Ezért  $f \nearrow (a, b)\text{-n}$ .

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetében is.

$2^\circ$  Alkalmazzunk „éles” egyenlőtlenségeket  $1^\circ$ -ben a  $\boxed{\impliedby}$  irányban. ■

## 9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.

### Tétel: Elsőrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékekre.

Legyen  $-\infty < a < b < +\infty$  és  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy

- $f \in D(a, b)$ ,
- egy  $c \in (a, b)$  pontban  $f'(c) = 0$  és
- az  $f'$  deriváltfüggvény előjelet vált  $c$ -ben.

Ekkor,

**1°** ha az  $f'$  függvénynek  $c$ -ben  $(-, +)$  előjelváltása van, akkor  $c$  az  $f$  függvénynek szigorú **lokális minimumhelye**;

**2°** ha az  $f'$  függvénynek  $c$ -ben  $(+, -)$  előjelváltása van, akkor  $c$  az  $f$  függvénynek szigorú **lokális maximumhelye**.

**Bizonyítás.** Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből, hiszen ha az  $f$  függvénynek  $c$ -ben  $(-, +)$  előjelváltása van, akkor  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $f' < 0$   $(c - \delta, c)$ -n és  $f' > 0$   $(c, c + \delta)$ -n. Ezért  $f \downarrow (c - \delta, c]$ -n és  $f \uparrow [c, c + \delta)$ -n. Emiatt  $\forall x \in (c - \delta, c + \delta): f(x) > f(c)$ , tehát  $c$  az  $f$  függvénynek szigorú lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható  $(+, -)$  előjelváltás esetén. ■

## 10. A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.

**Tétel.** T.f.h.  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum és  $f \in D(I)$ . Ekkor

$$f \text{ konvex } I\text{-n} \iff f' \nearrow I\text{-n}.$$

**Megjegyzés.** „ $\nearrow$ ” helyett szigorúan konvex esetben „ $\uparrow$ ”, konkáv esetben „ $\searrow$ ” és szigorúan konkáv esetben pedig „ $\downarrow$ ” áll. ■

### Bizonyítás.

$\Rightarrow$  Legyen  $u, v \in I$ ,  $u < v$  tetszőleges és  $x \in (u, v)$  is tetszőleges. T.f.h.  $f$  konvex  $I$ -n. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \quad \text{és} \\ f(x) &\leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v). \end{aligned}$$

Egyszerű átrendezésekkel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}.$$

Vegyük itt az  $x \rightarrow u$ , ill. az  $x \rightarrow v$  határátmenetet:

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v).$$

Tehát  $f'$  monoton növekedő  $I$ -n.

$\Leftarrow$  T.f.h.  $f'$  monoton növekedő  $I$ -n. Legyen  $u, v \in I$ ,  $u < v$  tetszőleges és  $x \in (u, v)$  is tetszőleges. Ekkor a Lagrange-féle k.é.t. szerint  $\exists \xi_1 \in (u, x)$  és  $\exists \xi_2 \in (x, v)$ :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad \text{és} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}.$$

Mivel  $f' \nearrow I$ -n, ezért  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ , vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}.$$

Ezt átrendezve (a részleteket mellőzve) azt kapjuk, hogy

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u).$$

Ez azt jelenti, hogy az  $f$  függvény konvex  $I$ -n. ■

11. A véges pontbeli  $\frac{0}{0}$  határérték esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.

**Tétel: L'Hospital-szabály a  $\frac{0}{0}$  esetben.**

Legyen  $-\infty \leq a < b < +\infty$  és  $f, g \in D(a, b)$ . T.f.h.

- (a)  $\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ ,
- (b)  $g(x) \neq 0$  és  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ ,
- (c)  $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

**Bizonyítás.** 1. eset:  $a > -\infty$  (véges).

Legyen  $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ , azaz

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0 : \forall y \in (a, a+\delta) \subset (a, b) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A)$ .

Azt kell igazolni, hogy

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A)$ .

Értelmezzük  $f$ -et és  $g$ -t az  $a$  pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

Ekkor a  $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$  feltételből következik, hogy  $f, g \in C[a, a+\delta)$ .

Legyen most  $x \in (a, a+\delta)$  tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az  $f$  és a  $g$  függvényre az  $[a, x]$  intervallumon teljesülnek. Így  $\exists \xi_x \in (a, x)$ , amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Ez azt jelenti, hogy a  $\lim_{a+0} \frac{f}{g}$  határérték létezik, és  $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$ .

2. eset:  $a = -\infty$ . Nem bizonyítjuk. ■

## 12. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

### Tétel: Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Legyen  $n \in \mathbb{N}$ , és t.f.h.  $f \in D^{n+1}(K(a))$ . Ekkor  $\forall x \in K(a)$  ponthoz  $\exists$  olyan  $a$  és  $x$  közé eső  $\xi$  szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Bizonyítás.** A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni. Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{a,n}f(x) \quad (x \in K(a)).$$

A  $T_{a,n}f$  polinom definíciójából következik, hogy

$$F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - (T_{a,n}f)^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Továbbá,  $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ , hiszen  $(T_{a,n}f)^{(n+1)} \equiv 0$ , mert  $T_{a,n}f$  egy legfeljebb  $n$ -edfokú polinom.

Másrészt, legyen  $G(x) := (x-a)^{n+1}$  ( $x \in K(a)$ ). Ekkor minden  $x \in K(a)$  esetén

$$G'(x) = (n+1)(x-a)^n, \quad G''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1}, \quad \dots, \\ G^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

amiből következik, hogy  $G^{(i)}(a) = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), és  $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ .

Tegyük fel, hogy  $x \in K(a)$  és például  $x > a$ . (Az  $x < a$  eset hasonlóan vizsgálható.) Az  $F$  és a  $G$  függvényekre az  $[a, x]$  intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists \xi_1 \in (a, x): \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az  $F'$  és a  $G'$  függvényekre az  $[a, \xi_1]$  intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x): \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a fenti gondolatmenetet  $n$ -szer megismételjük, akkor a  $k$ -dik lépésben ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} \exists \xi_{k+1} \in (a, \xi_k) \subset (a, x): \\ \frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)}. \end{aligned}$$

Az  $n$  számú lépés során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - T_{a,n}(f, x)}{(x - a)^{n+1}} &= \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \dots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \\ &= \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

hiszen minden  $x \in K(a)$  esetén  $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$  és  $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ . A konstrukcióból látható, hogy  $\xi_{n+1}$  az  $a$  pont és  $x$  között van, ezért a  $\xi := \xi_{n+1}$  választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■