Diszkrét matematika II.

2. szorgalmi feladatsor

Ez a két szorgalmi feladatsorból a második, 8 pont értékben. Akár minden feladatra adható be megoldás, de összesen legfeljebb 10 pont szerezhető a két feladatsorral. Nincs minimum elérendő pontszám, a feladatsorral nem kötelező foglalkozni a tárgy teljesítéséhez. A kézzel írott, majd szkennelt, fényképezett vagy tabletről exportált megoldások a Canvas megfelelő feladatához tölthetők fel legkésőbb a második ZH-t követő napon. Ha ez nem működne, emailben is be lehet küldeni: nagytdaniel@inf.elte.hu.

1. Legyen p egy prímszám és tekintsük a következő $\mathbb{Z}_p[x]$-beli polinomot:

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+p-2)(x+p-1).$$

Mivel lesz egyenlő $f(x)$ a fenti kifejezés kiszorzása és egyszerűsítése után?
A megoldást $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ alakban keressük, ahol $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.
Tipp: Próbáld ki, mi jön ki kis p értékek esetén, ebből megsejthető az eredmény. Ha tudod, minek kell kijönni, már könnyebb bebizonyítani. (2 pont)

2. Minden pozitív egész n-re határozd meg, hogy $n^4 + n^2 + 1$ prímszám vagy összetett-e. *(2 pont)*

3. Hozd zárt alakra a következő szorzatot:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(2^{2^{k+1}} - 2^{2^k} + 1\right)$$

Tipp: Használd fel az előző feladatban talált összefüggést a kifejezés egyszerűsítéséhez. A végeredményben ne legyen $\prod$ vagy $\sum$ jel. Definíció szerint $2^{2^k} = 2^{(2^k)}$ és nem $(2^2)^k$. (2 pont)

4. Tekintsük azokat a $2n$ hosszú stringeket, amik n darab 0-ból és n darab 1-ből állnak. Kiválasztunk néhányat úgy, hogy bármely kettő legalább 4 pozícióban különbözzön. (Például ha $n = 4$, akkor 01110100 és 01010101 nem választható ki egyszerre, mivel csak a harmadik és az utolsó pozícióban térnek el.) Bizonyítsd be, hogy a kiválasztott stringek száma legfeljebb $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. *(2 pont)*