NÉV: NEPTUN-kód: GYAK.:

Második ZH 2025. január 8. 10:05-11:45 PÓT-feladatsor

Minden megoldást indoklással kell alátámasztani. (Az előadáson és a gyakorlaton elhangzott állításokra szabad hivatkozni azok pontos megfogalmazása után. **A tanult módszerek következetes alkalmazása elég indoklás.**) **Használható:** Egy A4-es lap két oldalára saját kezűleg írt ‚puska' és nem programozható számológép (de minden részletszámításnak, ahogy órán tanultuk, szerepelnie kell a beadott lapokon). **Felhasználható idő: 100 perc.**

1. feladat (5+5 pont)

(a) Számítsuk ki az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{Z}_2$ felett (modulo 2):

$$f(x) = x^5 + x^2 + x, \quad g(x) = x^4 + x^2 + x$$

(b) Adjuk meg az alábbi $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját:

$$f(x) = (x-2)\cdot(x-i)^3\cdot(x+3)^2\cdot(x+i)^2\cdot(x+1)^3$$
$$g(x) = (x+2)^2\cdot(x-i)^3\cdot(x+1)\cdot(x+i)^2\cdot(x-3)^3$$

2. feladat (10 pont)

Tekintsük az $f = x^{22} + 10x^{11} + x^2 + x + 10 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ polinomot. Adjuk meg az f polinom összes többszörös gyökét (modulo 11)!

3. feladat (5+5 pont)

(a) Hogyan kell megválasztani a P és Q komplex számokat, hogy az $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + Px + Q$ polinom $\mathbb{C}$ fölött (maradék nélkül) osztható legyen a $g(x) = x^2 + 2$ polinommal?

(b) Adj meg egy olyan $f(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ polinomot, ami legfeljebb harmadfokú, és egyszerre teljesíti a következő feltételeket: $f(1) \equiv 0$, $f(10) \equiv 0$, $f(3) \equiv 10$, $f(9) \equiv 1$ (modulo 11).

4. feladat (10 pont)

Tekintsük az $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ irreducibilis polinomot és az $\mathbb{F}_{25} = \{g \pmod{f} : g \in \mathbb{Z}_5[x]\}$ testet. Számítsuk ki a $g(x) = x$ polinommal reprezentált elem reciprokát!

5. feladat (5+5 pont)

Tekintsük a következő bináris lineáris kódolást:

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) \longmapsto (c_1, c_2, c_3, c_4, c_2 + c_3 + c_4, c_1 + c_3 + c_4, c_1 + c_2 + c_4).$$

(a) Írja fel a kód egy-egy generátor- és ellenőrző mátrixát!

(b) Határozza meg a kód minimális távolságát!