Diszkrét matematika II. feladatok

Hetedik alkalom

Bemelegítő feladatok

1. Tekintsük az alábbi f, g polinomokat! Mennyi lesz az $f \cdot g$ szorzatpolinom foka, illetve a szorzatpolinomban mennyi lesz a 0-ad, 2-od, 14-ed és 15-öd fokú tag együtthatója?

   a) $f = 3x^7 + 5x^6 + 4x^5 - 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = -x^8 + 5x^7 - 11x^6 + 7x^3 + 5x - 9 \in \mathbb{Q}[x]$;
   Megoldás: Mivel $\mathbb{Q}$ nullosztómentes, ezért $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g = 7 + 8 = 15$.
   $(f \cdot g)_0 = f_0 \cdot g_0 = 1 \cdot (-9) = -9$, $(f \cdot g)_2 = f_0 \cdot g_2 + f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_0 = 1 \cdot 0 + (-7) \cdot 5 + 0 \cdot (-9) = -35$, $(f \cdot g)_{14} = f_6 \cdot g_8 + f_7 \cdot g_7 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = -5 + 15 = 10$, $(f \cdot g)_{15} = f_7 \cdot g_8 = 3 \cdot (-1) = -3$.

   b) $f = 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $g = 4x^8 + 3x^7 + 4x^6 + 7x^3 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$;
   Megoldás: Mivel $\mathbb{Z}_5$ nullosztómentes, ezért $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g = 7 + 8 = 15$.
   $(f \cdot g)_0 \equiv f_0 \cdot g_0 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$, $(f \cdot g)_2 \equiv f_0 \cdot g_2 + f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_0 \equiv 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \equiv 2$, $(f \cdot g)_{14} \equiv f_6 \cdot g_8 + f_7 \cdot g_7 \equiv 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \equiv 12 + 9 \equiv 1$, $(f \cdot g)_{15} \equiv f_7 \cdot g_8 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 2$.
   Megjegyzés: Ha nem $\mathbb{Z}_5$, hanem $\mathbb{Z}_6$ fölött lennénk, akkor $(f \cdot g)_{15} \equiv f_7 \cdot g_8 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 0$ lenne, ezért ekkor NEM 15 lenne a szorzatpolinom fokszáma. Mivel ekkor $(f \cdot g)_{14} \equiv 3$ lenne, így ez lenne a szorzatpolinomban a legnagyobb indexű nemnulla együttható, ezért ekkor $\deg(f \cdot g) = 14$ lenne.

   c) $f = x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.
   Megoldás: Mivel $\mathbb{Z}_2$ nullosztómentes, ezért $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g = 7 + 8 = 15$.
   $(f \cdot g)_0 \equiv f_0 \cdot g_0 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$, $(f \cdot g)_2 \equiv f_0 \cdot g_2 + f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_0 \equiv 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \equiv 1$, $(f \cdot g)_{14} \equiv f_6 \cdot g_8 + f_7 \cdot g_7 \equiv 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \equiv 1 + 1 \equiv 0$, $(f \cdot g)_{15} \equiv f_7 \cdot g_8 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$.

2. A Horner-elrendezés segítségével számolja ki a következő esetekben az $f(c)$ helyettesítési értéket!

   a) $f = 3x^7 + 5x^6 + 4x^5 - 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $c = 2$;
   b) $f = 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $c = 1$
   c) $f = 2x^7 + x^6 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $c = 2$
   d) $f = x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $c = 1$.

   Megoldások:

$f = 3x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $c = 2$;

	3	5	4	0	0	0	-7	1	
2	$\searrow$ $\blacksquare$	3	$2 \cdot 3 + 5$ $= 11$	$2 \cdot 11 + 4$ $= 26$	$2 \cdot 26 + 0$ $= 52$	$2 \cdot 52 + 0$ $= 104$	$2 \cdot 104 + 0$ $= 208$	$2 \cdot 208 - 7$ $= 409$	$2 \cdot 409 + 1$ $= 819$

$f = 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $c = 1$

	3	3	4	0	0	0	3	1	
1	$\searrow$ $\blacksquare$	3	$1 \cdot 3 + 3$ $\equiv 1$	$1 \cdot 1 + 4$ $\equiv 0$	$1 \cdot 0 + 0$ $\equiv 0$	$1 \cdot 0 + 0$ $\equiv 0$	$1 \cdot 0 + 0$ $\equiv 0$	$1 \cdot 0 + 3$ $\equiv 3$	$1 \cdot 3 + 1$ $\equiv 4$

$f = 2x^7 + 1 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 2x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $c = 2 \equiv -1$

	2	1	0	0	2	1	0	1	
2	$\searrow$ $\blacksquare$	2	$2 \cdot 2 + 1$ $\equiv 2$	$2 \cdot 2 + 0$ $\equiv 1$	$2 \cdot 1 + 0$ $\equiv 2$	$2 \cdot 2 + 2$ $\equiv 0$	$2 \cdot 0 + 1$ $\equiv 1$	$2 \cdot 1 + 0$ $\equiv 2$	$2 \cdot 2 + 1$ $\equiv 2$

$f = 1 \cdot x^7 + 1 \cdot x^6 + 1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $c = 1$

	1	1	1	0	0	1	1	1	
1	$\searrow$ ■	1	$1 \cdot 1 + 1 \equiv 0$	$1 \cdot 0 + 1 \equiv 1$	$1 \cdot 1 + 0 \equiv 1$	$1 \cdot 1 + 0 \equiv 1$	$1 \cdot 1 + 1 \equiv 0$	$1 \cdot 0 + 1 \equiv 1$	$1 \cdot 1 + 1 \equiv 0$

Gyakorló feladatok

3. Ossza el maradékosan f-et g-vel:

a) $f = 6x^6 - 4x^5 + 11x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 18x - 14 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = 2x^4 + 3x^2 + 7x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$;

Megoldás:

$$\begin{array}{rrrrrrrcccccccccc}
(6 & -4 & 11 & 15 & -20 & 18 & -14) & : & (2 & 0 & 3 & 7 & -3) & = & (3 & -2 & 1) \\
\color{red}{-(6} & \color{red}{0} & \color{red}{9} & \color{red}{21} & \color{red}{-9)} & & & & & & & & & & & & \\
 & (-4 & 2 & -6 & -11 & 18 & -14) & & & & & & & & & & \\
 & \color{red}{-(-4} & \color{red}{0} & \color{red}{-6} & \color{red}{-14} & \color{red}{6)} & & & & & & & & & & & \\
 & & (2 & 0 & 3 & 12 & -14) & & & & & & & & & & \\
 & & \color{red}{-(2} & \color{red}{0} & \color{red}{3} & \color{red}{7} & \color{red}{-3)} & & & & & & & & & & \\
 & & & (0 & 0 & 5 & -11) & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Tehát a hányados $q(x) = 3x^2 - 2x + 1$, és a maradék $r(x) = 5x - 11$.

b) $f = 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = -x^4 + 2x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;

Megoldás:

$$\begin{array}{rrrrrrrcccccccccc}
(2 & 1 & -3 & 4 & -1 & 6 & -8) & : & (-1 & 0 & 2 & -3 & 1) & = & (-2 & -1 & -1) \\
\color{red}{-(2} & \color{red}{0} & \color{red}{-4} & \color{red}{6} & \color{red}{-2)} & & & & & & & & & & & & \\
 & (1 & 1 & -2 & 1 & 6 & -8) & & & & & & & & & & \\
 & \color{red}{-(1} & \color{red}{0} & \color{red}{-2} & \color{red}{3} & \color{red}{-1)} & & & & & & & & & & & \\
 & & (1 & 0 & -2 & 7 & -8) & & & & & & & & & & \\
 & & \color{red}{-(1} & \color{red}{0} & \color{red}{-2} & \color{red}{3} & \color{red}{-1)} & & & & & & & & & & \\
 & & & (0 & 0 & 4 & -7) & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Tehát a hányados $q(x) = -2x^2 - x - 1$, és a maradék $r(x) = 4x - 7$.

c) $f = x^8 + x^7 + x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^5 + x^4 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$;

Megoldás: A hányados $q = x^3 + x + 2$, a maradék $r = 2x^2 + 2x + 2$.

d) $f = x^8 + 3x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$, $g = x^5 + x^4 + 5x + 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$;

Megoldás: A hányados $q = x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, a maradék $r = 3x^2 + x + 5$.

e) $f = x^8 + 2x^7 + 5x^6 + x^5 + x^4 + 5x^3 + 6x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$, $g = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$;

Megoldás: A hányados $q = x^3 + 6x^2 + 2x + 6$, a maradék $r = x^2 + 5x + 2$.

f) $f = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^5 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$;

Megoldás: A hányados $q = x^3 + 1$, a maradék $r = 0$.

Érdekes feladatok

4. Számolja ki f és g legnagyobb közös osztóját!

a) $f = x^8 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^6 - x^4 - 3x^3 + x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$;

Megoldás: $f = q \cdot g + r_1$ maradékos osztásban $r_1 = 2x^4 - 2x = 2 \cdot (x^4 - x)$.

Az euklideszi algoritmus következő lépése g-nek maradékos osztása r_1-gyel, de ha NEM a bővített, hanem csak az egyszerű euklideszi algoritmust csináljuk, akkor minden maradékos osztásban az osztandó helyett és az osztó helyett is vehetjük annak asszociáltját (egységszeresét: itt nemnulla számszorosát). Azaz a második osztás lehet $g = x^6 - x^4 - 3x^3 + x + 2$ maradékos osztása $r_1^* = x^4 - x$-szel.

$g = q_2 \cdot r_1^* + r_2^*$ maradékos osztásban $r_2^* = -2x^3 + 2 = -2 \cdot (x^3 - 1)$, itt is vehetjük inkább a maradék számszorosát: $r_2^{**} = x^3 - 1$-et maradéknak.

$r_1^* = q_3 \cdot r_2^{**} + r_3^{**}$ maradékos osztásban $r_3^{**} = 0$, azaz az utolsó nemnulla maradék (asszociáltság erejéig) az $r_2^{**} = x^3 - 1$, ez lesz a legnagyobb közös osztó.

b) $f = x^5 + x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^7 - x^6 - 2x^5 + x^3 + 4x^2 - 2x \in \mathbb{Q}[x]$;

Megoldás: Itt a g a magasabb fokszámú, így célszerű f és g szerepét felcserélni (mivel NEM bővített euklideszi algoritmust csinálunk, nem lehet belőle semmi gubanc).

$g = q_1 \cdot f + r_1$ maradékos osztásban $r_1 = -10x^4 + 9x^3 + 20x^2 - 18x = -(10x^4 - 9x^3 - 20x^2 + 18)$.

Most a második lépésben érdemes $f = q_2 \cdot r_1 + r_2$ maradékos osztás helyett a $100 \cdot f = q_2^* \cdot (-r_1) + r_2^*$ maradékos osztást elvégezni, ha kerülni akarjuk a törtekkel vacakolást (és az előjelhibák lehetőségét is minimalizáli akarjuk). Ekkor elvégezve a maradékos osztást $r_2^* = -29x^3 + 58x = -29 \cdot (x^3 - x)$ lesz. Ehelyett érdemes $r_2^{**} = x^3 - x$-szel folytatni a harmadik lépést:

$(-r_1) = q_2^{**} \cdot r_2^{**} + r_3^{**}$ maradékos osztás maradéka $r_3^{**} = -10x^2 + 9x = -(10x^2 - 9x)$.

A következő lépésben $(100x^3 - 100x) : (10x^2 - 9x)$ maradékos osztást végezzük el, aminek a maradéka $r_4^{***} = 19x$, ami helyett $r_4^{****} = x$-szel folytathatjuk az algoritmust, és ezzel már maradék nélkül osztható lesz r_3, azaz az utolsó nemnulla maradék, és így a legnagyobb közös osztó az $r_4^{****} = x$ polinom (illetve ennek tetszőleges asszociáltja, vagyis tetszőleges egységszerese, azaz nemnulla számszorosa).

c) $f = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^7 + x^4 + x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

Megoldás: $f : g$ maradékos osztásban a maradék $r_1 = x^6$.

A következő lépés $g : r_1$ maradékos osztásában a maradék $r_2 = x^4 + x^3 + x^2$.

A következő lépés $r_1 : r_2$ maradékos osztásában a maradék $r_3 = x^3$.

A következő lépés $r_2 : r_3$ maradékos osztásában a maradék $r_4 = x^2$.

És x^2 már maradék nélkül osztja x^3-öt, azaz az utolsó nemnulla maradék, és így a legnagyobb közös osztó az x^2.

d) $f = x^{11} + x^{10} + x^8 + x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^9 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

e) $f = x^9 + x^8 + 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^7 + x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$;

f) $f = x^9 + 2x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^7 + 2x^3 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

5. Hogyan kell megválasztani a p, q, m értékeket, hogy az $x^3 + px + q$ polinom $\mathbb{C}$ felett osztható legyen az $x^2 + mx - 1$ polinommal?

Megoldás: Osszunk maradékosan, paraméteresen, és a maradéknak a konstans nulla polinomnak kell lennie.

$$\begin{array}{rrrrcccc}
(1 & 0 & p & q) & : & (1 \quad m \quad -1) & = & (1 \quad -m) \\
-(1 & m & -1) & & & & & \\
 & (-m & p+1 & q) & & & & \\
 & -(-m & -m^2 & m) & & & & \\
 & & (p+1+m^2 & q-m) & = & (0 \quad 0) & &
\end{array}$$

Vagyis $q - m = 0$, azaz $q = m$, és $p + 1 + m^2 = 0$, azaz $p = -m^2 - 1$, tehát bármilyen $m \in \mathbb{C}$ számhoz egyértelműen tartozik egy $p = -m^2 - 1 \in \mathbb{C}$ és egy $q = m \in \mathbb{C}$ paraméterérték, hogy fennáll az oszthatóság.

6. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy $x^4 + 3x^2 + ax + b$ osztható legyen $x^2 - 2ax + 2$-vel $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett!

Megoldás: Osszunk maradékosan, paraméteresen, és a maradéknak a konstans nulla polinomnak kell lennie.

$$
\begin{array}{rrrrrcccc}
(1 & 0 & 3 & a & b) & : & (1\quad -2a\quad 2) & = & (1\quad 2a\quad 1+4a^2) \\
-(1 & -2a & 2) & & & & & & \\
 & (2a & 1 & a & b) & & & & \\
 & -(2a & -4a^2 & 4a) & & & & & \\
 & & (1+4a^2 & -3a & b) & & & & \\
 & & -(1+4a^2 & -2a-8a^3 & 2+8a^2) & & & & \\
 & & & (8a^3-a & b-2-8a^2) & = & (0\quad 0) & &
\end{array}
$$

Tehát $8a^3 - a = 0$, azaz $8a^3 = a$, vagyis vagy $a = 0$, vagy $8a^2 = 1$.

$a = 0$ esetén $0 = b - 2 - 8a^2 = b - 2$, azaz $b = 2$, tehát ekkor $(a, b) = (0, 2)$ az egyik megoldás, ami $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett is megoldás.

$8a^2 = 1$ esetén $0 = b - 2 - 8a^2 = b - 2 - 1 = b - 3$, azaz $b = 3$, és $a^2 = \frac{1}{8}$, azaz $a = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, azaz csak $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett van további két megoldás: $(a, b) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, 3)$ és $(a, b) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 3)$.

Szorgalmi feladatok

7. Az $x-c$-vel való ismételt maradékos osztás segítségével írja fel a következő $\mathbb{C}$ fölötti polinomokat $x - a$ hatványai segítségével (*azaz* $f = c_n(x-a)^n + \cdots + c_1(x-a) + c_0$ *alakban*):

a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $a = -1$;

Megoldás: Mivel $f_0 = c_n(x-a)^n + \cdots + c_1(x-a) + c_0$ maradékosan oszva $(x-a)$-val, a maradék c_0 és a hányados $f_1 = c_n(x-a)^{n-1} + \cdots + c_2(x-a) + c_1$, ezt követően $f_1 = c_n(x-a)^{n-1} + \cdots + c_2(x-a) + c_1$ maradékosan oszva $(x-a)$-val, a maradék c_1 és a hányados $f_2 = c_n(x-a)^{n-2} + \cdots + c_3(x-a) + c_2$, és így tovább, az eljárás a következő: Horner-táblázat segítségével behelyettesítjük $x = a$-t, és a táblázat megfelelő sorában pont a hányados együtthatói, és az utolsó oszlopban a maradék fog megjelenni, így a következő lépésre a táblázat aktuálisan utolsó sorát használhatjuk, a következőképpen:

	1	2	-3	-4	1	
$a=-1$	■	1	1	-4	0	$1 = c_0$
	$a=-1$	■	1	0	-4	$4 = c_1$
		$a=-1$	■	1	-1	$-3 = c_2$
			$a=-1$	■	1	$-2 = c_3$
				$a=-1$	■	$1 = c_4$

Tehát $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 1 \cdot (x+1)^4 - 2 \cdot (x+1)^3 - 3 \cdot (x+1)^2 + 4 \cdot (x+1) + 1$.

b) x^5, $a = 1$.

Megoldás: Az előzőhöz hasonlóan

	1	0	0	0	0	0	
$a=1$	■	1	1	1	1	1	$1 = c_0$
	$a=1$	■	1	2	3	4	$5 = c_1$
		$a=1$	■	1	3	6	$10 = c_2$
			$a=1$	■	1	4	$10 = c_3$
				$a=1$	■	1	$5 = c_4$
					$a=1$	■	$1 = c_5$

Tehát $x^5 = 1 \cdot (x-1)^5 + 5 \cdot (x-1)^4 + 10 \cdot (x-1)^3 + 10 \cdot (x-1)^2 + 5 \cdot (x-1) + 1$. Persze ezt rögtön láthattuk volna a binomiális tételből is, hiszen $x^5 = \big((x-1)+1\big)^5$.