

Diszkrét matematika II. feladatok

8.

Bemelegítő feladatok

1. Keresse meg az alábbi polinomok többszörös gyökeit

- a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;
- b) $x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;
- c) $x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$;
- d) $x^6 + x^5 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$;
- e) $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

Gyakorló feladatok

2. Az alábbi f, g polinomok esetén oldja meg az $uf + vg = 1$ egyenletet

- a) $f = x^5 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^3 - x \in \mathbb{Q}[x]$
- b) $f = x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 7x^2 + 7x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 11x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$
- c) $f = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^5 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;
- d) $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^5 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$;
- e) $f = 2x^5 + 2x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^4 + 2x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$;
- f) $f = 3x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $g = 2x^4 + x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Érdekes feladatok

3. Mutasson példát olyan $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ polinomokra, melyekre

- a) $f(3) = f(5) = 0$ és $g(3) = g(5) = 0$, $g(0) = 1$.
- b) $f(0) = f(3) = 0$ és $g(0) = g(3) = 0$, $g(5) = 2$.
- c) $f(0) = 1$, $f(3) = 0$, $f(5) = 2$.

4. Mutasson példát olyan $f, g \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinomokra, melyekre

- a) $f(1) = f(2) = 0$ és $g(1) = g(2) = 0$, $g(6) = 2$.
- b) $f(2) = f(6) = 0$ és $g(2) = g(6) = 0$, $g(1) = 3$.
- c) $f(1) = 3$, $f(2) = 0$, $f(6) = 2$.

5. Mutasson példát olyan $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomra, melyre $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$.

6. Mutasson példát olyan $f \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinomra, melyre $f(0) = 6$, $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(5) = 4$.

Szorgalmi feladatok

7. Tekintsük a legfeljebb 5-öd fokú valós együtthatós polinomok halmazát

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq 5\}.$$

Mutassa meg, hogy V vektorteret alkot. Mi lesz $\dim V$? Adjon meg V -nek két különböző bázisát!