Diszkrét matematika II. feladatok

7.

Bemelegítő feladatok

1. Tekintsük az alábbi f, g polinomokat! Mennyi lesz az $f \cdot g$ szorzatpolinom foka, illetve a szorzatpolinomban mennyi lesz a 0-ad, 2-od, 14-ed és 15-öd fokú tag együtthatója?

   a) $f = 3x^7 + 5x^6 + 4x^5 - 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = -x^8 + 5x^7 - 11x^6 + 7x^3 + 5x - 9 \in \mathbb{Q}[x]$;
   b) $f = 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $g = 4x^8 + 3x^7 + 4x^6 + 7x^3 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$;
   c) $f = x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

2. A Horner-elrendezés segítségével számolja ki a következő esetekben az $f(c)$ helyettesítési értéket!

   a) $f = 3x^7 + 5x^6 + 4x^5 - 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $c = 2$;
   b) $f = 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $c = 1$
   c) $f = 2x^7 + x^6 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $c = 2$
   d) $f = x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $c = 1$.

Gyakorló feladatok

3. Ossza el maradékosan f-et g-vel:

   a) $f = 6x^6 - 4x^5 + 11x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 18x - 14 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = 2x^4 + 3x^2 + 7x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$;
   b) $f = 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = -x^4 + 2x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;
   c) $f = x^8 + x^7 + x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^5 + x^4 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$;
   d) $f = x^8 + 3x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$, $g = x^5 + x^4 + 5x + 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$;
   e) $f = x^8 + 2x^7 + 5x^6 + x^5 + x^4 + 5x^3 + 6x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$, $g = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$;
   f) $f = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^5 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$;

Érdekes feladatok

4. Számolja ki f és g legnagyobb közös osztóját!

   a) $f = x^8 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^6 - x^4 - 3x^3 + x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$;
   b) $f = x^5 + x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^7 - x^6 - 2x^5 + x^3 + 4x^2 - 2x \in \mathbb{Q}[x]$;
   c) $f = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^7 + x^4 + x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$;
   d) $f = x^{11} + x^{10} + x^8 + x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^9 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;
   e) $f = x^9 + x^8 + 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^7 + x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$;
   f) $f = x^9 + 2x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^7 + 2x^3 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

5. Hogyan kell megválasztani a p, q, m értékeket, hogy az $x^3 + px + q$ polinom $\mathbb{C}$ felett osztható legyen az $x^2 + mx - 1$ polinommal?

6. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy $x^4 + 3x^2 + ax + b$ osztható legyen $x^2 - 2ax + 2$-vel $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$felett!

Szorgalmi feladatok

7. Az $x - c$-vel való ismételt maradékos osztás segítségével írja fel a következő $\mathbb{C}$ fölötti polinomokat $x - a$ hatványai segítségével ($azaz$ $f = c_n(x-a)^n + \cdots + c_1(x-a) + c_0$ $alakban$):

   a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $a = -1$;
   b) x^5, $a = 1$.