2025. 11. 18.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

II. éves
Programtervező informatikus

Analízis 2AB

Kovács Sándor gyakorlata

(Hétfő, 12.00 – 13.30: DT-0.220
(Kedd, 10.00 – 11.30: DT-0.311

2025. ősz

Tudnivalók

I. A tárgy követelményrendszere

II. Kérdések, válaszok

III. Segédanyagok:

- A görög ábécé és a fraktúra
- Matematikai alapozás
- Elemi függvények
- Hiperbolikus függvények és inverzeik
- Valós-valós függvények határértéke
- Elemi függvények deriváltja
- Alapintegrálok
- Találós kérdések

IV. Ajánlott olvasmányok:

- Kovács Sándor: Matematikai alapozás (`https://numanal.inf.elte.hu/~alex/MatAlapKonyvtar/SzintrehozKS.pdf`), ill. `https://numanal.inf.elte.hu/~alex/hu/matalap.html`)
- Schipp Ferenc: Analízis II. (`https://numanal.inf.elte.hu/~schipp/Jegyzetek/ANAL_2.pdf`)
- Simon Péter: Bevezetés az analízisbe I., egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 2016. (`http://numanal.inf.elte.hu/~simon/cimlapanal1.pdf`)
- Simon Péter: Bevezetés az analízisbe II., egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 2016. (`http://numanal.inf.elte.hu/~simon/analizisirodalom2.pdf`)

V. A félév gyakorlatainak tematikája:

„Korábbi zh-feladatok” megoldása

2021 ősz

- **Az 1. zh feladatai**
- **A 2. zh feladatai**

2022 ősz

- **Az 1. zh feladatai**
- **A 2. zh feladatai**

Korábbi zh-feladatok megoldása

2021 ősz

Az 1. zh feladatai

1. Az
$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x}} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R})$$
függvény esetében

   (a) **határozza meg** a definíció alapján az $f'(0)$ deriváltat, amennyiben az létezik;

   (b) **írja fel** az $a := 3$ abszcisszájú ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét, amennyiben az létezik;

   (c) **igazolja**, hogy f invertálható!

Útm. Mivel $\mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$ ezért $\mathcal{D}_f$ nyílt halmaz: minden pontja belső pont.

(a) Tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x}} - \frac{0}{\sqrt{1+0}}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \longrightarrow 1 \qquad (x \to 0).$$
Következésképpen $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 1$.

(b) A deriválhatóságra vonatkozó műveleti szabályok alapján világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$, speciálisan $f \in \mathfrak{D}[3]$. Mivel $f(3) = \frac{3}{2}$ és
$$f'(3) = \left.\frac{1 \cdot \sqrt{1+x} - x \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}} \cdot 1}{1+x}\right|_{x=3} = \left.\frac{(2x+2) - x}{2 \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}}\right|_{x=3} =$$
$$= \left.\frac{x+2}{2 \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}}\right|_{x=3} = \frac{5}{16},$$
ezért a kérdéses érintőegyenes egyenlete nem más, mint
$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = \frac{3}{2} + \frac{5}{16} \cdot (x - 3) = \frac{5}{16} \cdot x + \frac{9}{16} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(c) Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$f'(x) = \frac{x+2}{2 \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}} > 0,$$
így f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható.

2. **Határozza meg** az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} a \cdot e^{2x} + b \cdot \cos(x), & (x < 0), \\ x^4 + 5x^2 - 4x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen, majd **adja meg** f deriváltfüggvényét!
Útm. Ha

(a) $x \in (-\infty, 0)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = 2a \cdot e^{2x} - b \cdot \sin(x).$$

(b) $x \in (0, +\infty)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = 4x^3 + 10x - 4.$$

(c) $x = 0$, akkor

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}[0],$$

ill.

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'_-(0) = f'_+(0).$$

Az

- $f \in \mathfrak{C}[0]$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha

$$a + b = \lim_{0-0} f = \lim_{0+0} f = f(0) = 1.$$

- $f'_-(0) = f'_+(0)$ feltétel pedig pontosan akkor áll fenn, ha

$$2a = f'_-(0) = f'_+(0) = -4.$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$a = -2 \qquad \text{és} \qquad b = 3,$$

következésképpen $f'(0) = -4$. Az f függvény deriváltfüggvénye tehát

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) := \begin{cases} -4 \cdot e^{2x} - 3 \cdot \sin(x), & (x < 0), \\ 4x^3 + 10x - 4 & (x \geq 0). \end{cases}$$

3. Hogyan válasszuk meg egy henger alakú zárt tartály mérteteit (alapkörének sugarát és magasságát), hogy a térfogata 8000 m^3 legyen és az előállításához szükséges anyagfelhasználás minimális legyen?
Útm. Ha $R > 0$, ill. $m > 0$ jelöli a henger alapkörének sigarát, ill. magasságát, akkor a tartály térfogata és

felszíne (ami a palástfelszínből és az alap-, ill. fedőlap összterületéből áll) a

$$V = R^2\pi m, \qquad \text{ill.} \qquad A = 2R\pi m + 2R^2\pi$$

formulákkal kapható meg. Mivel

$$V = R^2\pi m = 8000 \qquad \Longrightarrow \qquad m = \frac{8000}{R^2\pi},$$

ezért az

$$f(r) := 2R\pi \cdot \frac{8000}{R^2\pi} + 2R^2\pi = \frac{16000}{R} + 2R^2\pi \qquad (0 < R \in \mathbb{R})$$

függvény abszolút minimumát keressük. Mivel

$$f'(R) = -\frac{1600}{R^2} + 4R\pi = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = R^* := 10 \cdot \sqrt[3]{4/\pi},$$

ezért

	$(0, R^*)$	R^*	$(R^*, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A lokális minimumhely egyben abszolút minimumhely is, hiszen

$$\lim_{R\to 0-0} f(R) = +\infty = \lim_{R\to 0+0} f(R).$$

A kérdéses henger sugara és magassága tehát

$$R^* = 10 \cdot \sqrt[3]{4/\pi} \qquad \text{és} \qquad m^* = \frac{8000}{(R^*)^2\pi} = \frac{40}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Megjegyezzük, hogy ekkor a henger felszíne:

$$f(R^*) = 1200 \cdot \sqrt[3]{2\pi}.$$

4. **Végezze el** az

$$f(x) := \frac{x}{(x+3)^2} \qquad (-3 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény teljes vizsgálatát!
Útm.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

és így

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
f	$-$	$-$	0	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+3)^2 - x\cdot 2\cdot(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{(x+3)-2x}{(x+3)^3} = \frac{3-x}{(x+3)^3},$$

ezért

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,+\infty)$
f'	$-$	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{-(x+3)^3 - (3-x)\cdot 3\cdot(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-(x+3)-(3-x)\cdot 3}{(x+3)^4} = \frac{2(x-6)}{(x+3)^4}$$

ezért

	$(-\infty,-3)$	$(-3,6)$	6	$(6,+\infty)$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$\frown$	inflexió	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{-3} f = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{\pm\infty} f = 0.$$

Következésképpen a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 1. ábra szemlélteti.

5. **Írja fel** az

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény $a := 0$ ponthoz tartozó második Taylor-polinomját!

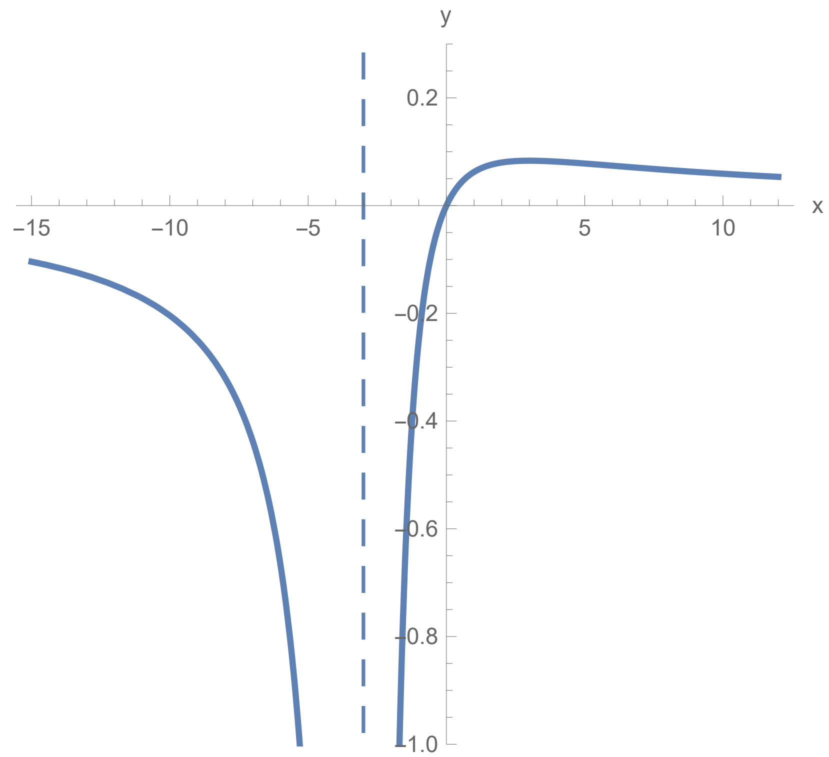
Útm. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)},$$

$$f''(x) = \frac{-\cos(x)\cdot(1+\cos^2(x)) - 2\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)}{(1+\cos^2(x))^2},$$

ill.

$$f(0) = \operatorname{arc\,tg}(\cos(0)) = \operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = -\frac{1}{2}.$$



1. ábra. Az $\mathbb{R}\backslash\{-3\} \ni x \mapsto \dfrac{x}{(x+3)^2}$ függvény grafikonja.

Így a keresett Taylor-polinom:

$$T_{0,2}f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A 2. zh feladatai

1. **Határozza meg** az

$$f(x) := \frac{x-1}{x^3-2x^2+x} \qquad (x \in (-\infty, 0))$$

függvény primitív függvényeinek a halmazát!
Útm. Látható, hogy tetszőleges $x \in I := (-\infty, 0)$ esetén

$$\frac{x-1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x-1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{x-1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Parciális törtekre bontva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \qquad (x \in (-\infty, 0)),$$

így a logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján

$$\int \frac{x-1}{x^3-2x^2+x}\,dx = [\ln(1-x) - \ln(-x)]_{x\in I} = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + c \qquad (x \in (-\infty, 0),\ c \in \mathbb{R}).$$

2. **Számítsa ki** az

$$f(x) := \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+2e^x+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény határozatlan integrálját!
Útm. Világos, hogy az integrandus

$$S(e^x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakú, ahol

$$S(y) := \frac{2y^2+3y}{y^2+2y+3} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Így, ha

$$\varphi(t) := \ln(t) \qquad (t \in (0, +\infty)),$$

akkor a $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ bijekcióra

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in (0, +\infty)),$$

és alkalmazva a második helyettesítési szabályt azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+2e^x+3}\,dx = \int S(e^x)\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int S(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{2t^2+3t}{t^2+2t+3}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} =$$

$$= \int \frac{2t+3}{t^2+2t+3}\,dt\Big|_{t=e^x}.$$

Mivel bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{2t+3}{t^2+2t+3} = \frac{2t+2+1}{t^2+2t+3} = \frac{2t+2}{t^2+2t+3} + \frac{1}{t^2+2t+3} = \frac{2t+2}{t^2+2t+3} + \frac{1}{(t+1)^2+2} =$$

$$= \frac{2t+2}{t^2+2t+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1},$$

ezért tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+2e^x+3}\,dx = \left[\ln(t^2+2t+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{t=e^x} =$$

$$= \ln(e^{2x}+2e^x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{e^x+1}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

3. **Indokolja meg**, hogy az

$$f(x) := \frac{1+\ln(x)}{x} \qquad (x \in (0,+\infty))$$

függvény integrálható $[1,e]$-n, majd ezen az intervallumon számítsa ki f határozott integrálját!

Útm. Mivel f folytonos, ezért integrálható $[1,e]$-n. Az

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$$

integrál kiszámítása két módon (is) elvégezhető.

1. módszer. Legyen

$$\varphi(x) := 1+\ln(x) \quad (x \in [1,e]) \qquad \text{és} \qquad f(x) := x \quad (x \in [1,2]).$$

Ekkor

$$\varphi \in \mathfrak{D}[1,e] \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in [1,e]).$$

Így az első helyettesítési szabály alkalmazásával

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_1^2 f = \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

adódik.

2. módszer. Mivel tetszőleges $x \in [1,e]$ esetén

$$\frac{1+\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \ln(x)\cdot\frac{1}{x},$$

ezért

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}+\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[\ln(x)+\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e =$$

$$= \ln(e)+\frac{\ln^2(e)}{2}-\ln(1)-\frac{\ln^2(1)}{2} = 1+\frac{1}{2}-0-0=\frac{3}{2}.$$

4. Az $y=x^2$ és az $y=2x$ görbék által közrezárt síktartományt az $y=1$ egyenes két részre osztja. **Számítsa ki** mindkét résznek a területét!

Útm. Ha $\alpha\in\mathbb{R}$ a két görbe metszéspontjának abszcisszája, akkor

$$\alpha^2=2\alpha \qquad\Longleftrightarrow\qquad \alpha[\alpha-2]=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \alpha\in\{0;2\}.$$

Az

$$S := S_1\cup S_2 :=$$

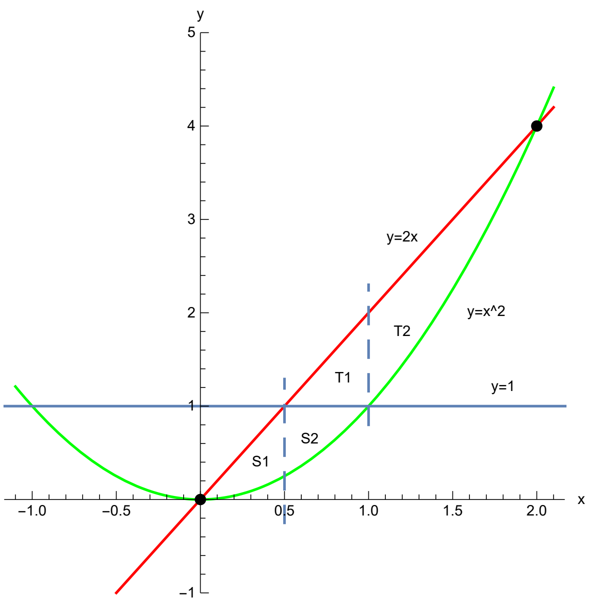
$$:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,1/2],\ y\in[x^2,2x]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[1/2,1],\ y\in[x^2,1]\right\}$$

és

$$T := T_1\cup T_2 :=$$

$$:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[1/2,1],\ y\in[1,2x]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[1,2],\ y\in[x^2,2x]\right\}$$

ponthalmazok területét kell kiszámítani (vö. 2. ábra).



2. ábra

- Az S ponthalmaz területe:

$$\int_0^{1/2}(2x-x^2)\,dx+\int_{1/2}^1(1-x^2)\,dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^1 =$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{24}-0+1-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{12}.$$

- A T ponthalmaz területe:

$$\int_{1/2}^1(2x-1)\,dx+\int_1^2(2x-x^2)\,dx = \left[x^2-x\right]_{1/2}^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= 1-1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+4-\frac{8}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{12}.$$

5. **Határozza meg** az

$$f(x):=\sqrt{(x^2+1)\cdot\sin(2x)} \qquad \left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

Útm. Mivel f folytonos függvény, ezért a kérdéses V_f térogatra

$$\frac{V_f}{\pi} = \int_0^{\pi/2} f^2 = \int_0^{\pi/2}(x^2+1)\cdot\sin(2x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{(x^2+1)\cdot\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}x\cdot\cos(2x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2+4}{8}+\frac{1}{2}+\left[\frac{x\cdot\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2+4}{8}+\frac{1}{2}+0-0+\left[\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2+4}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2+4}{8}.$$

2022 ősz

Az 1. zh feladatai

1. Feladat. Az

$$f(x) := \frac{x}{e^x + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

a) **határozza meg** a definíció alapján az $f'(0)$ deriváltat, amennyiben az létezik;

b) **írja fel** az $a := 1$ abszcisszájú ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét, amennyiben az létezik!

Útm. Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ ezért $\mathcal{D}_f$ nyílt halmaz: minden pontja belső pont.

a) Tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{e^x + 1} - \frac{0}{e^0 + 1}}{x - 0} = \frac{1}{e^x + 1} \longrightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad (x \to 0).$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 1/2$.

b) A deriválhatóságra vonatkozó műveleti szabályok alapján világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$, speciálisan $f \in \mathfrak{D}[1]$. Mivel $f(1) = \frac{1}{e+1}$ és

$$f'(1) = \left.\frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{(e+1)^2},$$

ezért a kérdéses érintőegyenes egyenlete nem más, mint

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{(e+1)^2} \cdot (x - 1) = \frac{1}{(e+1)^2} \cdot x + \frac{e}{(e+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Feladat. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} ax^2 + 5x + b, & (x < 0), \\ e^{ax} + b\sin(2x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen, majd **adja meg** f deriváltfüggvényét!

Útm. Ha

1. $x \in (-\infty, 0)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és
$$f'(x) = 2ax + 5.$$

2. $x \in (0, +\infty)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és
$$f'(x) = ae^{ax} + 2b\cos(2x).$$

3. $x = 0$, akkor
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}[0],$$
ill.
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'_-(0) = f'_+(0).$$
Az
   - $f \in \mathfrak{C}[0]$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha
   $$b = \lim_{0-0} f = \lim_{0+0} f = f(0) = 1.$$
   - $f'_-(0) = f'_+(0)$ feltétel pedig pontosan akkor áll fenn, ha
   $$5 = f'_-(0) = f'_+(0) = a + 2b.$$

   Mindez azt jelenti, hogy
   $$b = 1 \qquad \text{és} \qquad a = 3,$$
   következésképpen $f'(0) = 5$. Az f függvény deriváltfüggvénye tehát
   $$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) := \begin{cases} 6x + 5, & (x < 0), \\ 3e^{3x} + 2\cos(2x) & (x \geq 0). \end{cases}$$

3. Feladat. Számítsa ki a
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{4\,\mathrm{arc\,tg}(\cos(x)) - \pi}$$
határértéket!

Útm. Mivel
$$\lim_{x\to 0}(1 - \cos^3(x)) = 1 - 1 = 0 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi = \lim_{x\to 0}(4\,\mathrm{arc\,tg}(\cos(x)) - \pi),$$

ezért megkíséreljük alkalmazni a Bernoulli-L'Hospital-szabályt. Így

$$\frac{1-\cos^3(x)}{4\,\mathrm{arc\,tg}(\cos(x))-\pi} \sim \frac{3\cos^2(x)\sin(x)}{\frac{-4\sin(x)}{1+\cos^2(x)}} = \frac{-3\cos^2(x)(1+\cos^2(x))}{4} \longrightarrow \frac{-3}{2} \qquad (x\to 0)$$

következtében

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)}{4\,\mathrm{arc\,tg}(\cos(x))-\pi} = -\frac{3}{2}.$$

4. Feladat. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt[3]{2x-1} \qquad \left(\frac{1}{2} < x \in \mathbb{R}\right)$$

függvény $a := 1$ pont körüli második Taylor-polinomját!

Útm. Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}},$$

ill.

$$f(1) = 1, \qquad f'(1) = \frac{2}{3}, \qquad f''(1) = -\frac{8}{9},$$

ezért

$$T_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{4}{9}(x-1)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Feladat. Végezze el az

$$f(x) := (x-3)\cdot e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljes vizsgálatát!

Útm.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3,$$

és így

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f	$-$	0	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = e^x + (x-3) \cdot e^x = e^x \cdot (x-2)\,,$$

ezért

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = e^x \cdot (x-2) + e^x = e^x \cdot (x-1)\,,$$

ezért

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Világos, hogy

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{e^{-x}} \overset{\mathbf{BL}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{+\infty} f = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Következésképpen a

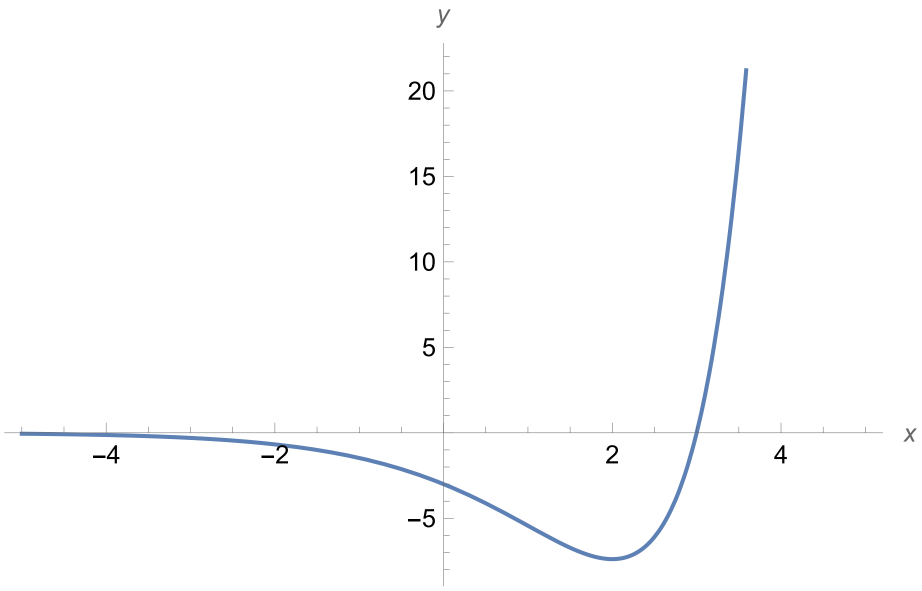
$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek a $(-\infty)$-ben. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot e^x \longrightarrow +\infty,$$

ezért f-nek nincsen aszimptotája a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x-3)\cdot e^x$ függvény grafikonja.

A 2. zh feladatai

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \left(x+e^{2x}\right)^2 \, dx \qquad (x \in \mathbb{R});$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)-1}{\sin^2(x)} \, dx \qquad (x \in (0,\pi)).$

Útm.

a) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(x+e^{2x}\right)^2 = x^2 + 2xe^{2x} + e^{4x},$$

továbbá

- $\displaystyle\int x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x\in\mathbb{R}}$;
- $\displaystyle\int 2xe^{2x}\,dx = xe^{2x} - \int e^{2x}\,dx = \left[xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_{x\in\mathbb{R}}$;
- $\displaystyle\int e^{4x}\,dx = \left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_{x\in\mathbb{R}}$,

ezért

$$\int \left(x + e^{2x}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3} + xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{4x}}{4} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

b) Mivel tetszőleges $x \in (0, \pi)$ esetén

$$\frac{\cos^3(x) - 1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)(1 - \sin^2(x))}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \cos(x) - \frac{1}{\sin^2(x)},$$

ezért

$$\int \frac{\cos^3(x) - 1}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\sin(x)} - \sin(x) + \operatorname{ctg}(x) + c \qquad (x \in (0, \pi), c \in \mathbb{R}).$$

2. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \frac{7 - x}{x^2 + x - 2}\,dx \qquad (x \in (-2, 1))$$

határozatlan integrált!

Útm. Látható, hogy az integrandus számlálója elsőfokú, a nevezője pedig két valós gyökkel rendelkező másodfokú polinom. Nem nehéz észrevenni tehát, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$ esetén

$$\frac{7 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{7 - x}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{2(x + 2) - 3(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{2}{x - 1} - \frac{3}{x + 2}.$$

Ezt a felbontást persze úgy is megkaphatjuk, hogy

$$\frac{7 - x}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{p}{x - 1} + \frac{q}{x + 2} = \frac{p(x + 2) + q(x - 1)}{x^2 + x - 2} = \frac{(p + q)x + 2p - q}{x^2 + x - 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}),$$

ahonnan

$$(p + q = -1 \quad \wedge \quad 2p - q = 7) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p = 2 \quad \wedge \quad q = -3)$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$\frac{7 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{2}{x - 1} - \frac{3}{x + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}).$$

Következésképpen tetszőleges $x \in (-2, 1)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{7-x}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}\right) dx = 2\ln(1-x) - 3\ln(x+2) + c = \ln\left(\frac{(1-x)^2}{(x+2)^3}\right) + c.$$

3. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}+4)(e^x-2)}\,dx \qquad (x \in (\ln(2), +\infty))$$

határozatlan integrált!

Útm. Világos, hogy az integrandus

$$S(e^x)$$

alakú, ahol

$$S(y) := \frac{y}{(y^2+4)(y-2)} \qquad (2 \neq y \in \mathbb{R}).$$

Így, ha

$$\varphi(t) := \ln(t) \qquad (2 < t \in \mathbb{R}),$$

akkor $\varphi : (2, +\infty) \to (\ln(2), +\infty)$ bijekcióra

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \qquad (2 < t \in \mathbb{R}),$$

és alkalmazva a második helyettesítési szabályt azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in (\ln(2), +\infty)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{(e^{2x}+4)(e^x-2)}\,dx &= \int S(e^x)\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int S(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \int \frac{t}{(t^2+4)(t-2)}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{1}{(t^2+4)(t-2)}\,dt\Big|_{t=e^x}.
\end{aligned}$$

Mivel tetszőleges $2 < t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t^2+4)(t-2)} &= \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{C}{t-2} = \frac{(At+B)(t-2)+C(t^2+4)}{(t^2+4)(t-2)} = \\
&= \frac{(A+C)t^2+(B-2A)t+4C-2B}{(t^2+4)(t-2)}
\end{aligned}$$

ezért

$$0 = A + C \qquad \wedge \qquad 0 = B - 2A \qquad \wedge \qquad 1 = 4C - 2B,$$

azaz

$$A = -\frac{1}{8} \qquad \wedge \qquad B = -\frac{1}{4} \qquad \wedge \qquad C = \frac{1}{8},$$

ui.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{array}\right].$$

Tehát

$$\frac{1}{(t^2+4)(t-2)} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{t+2}{t^2+4} - \frac{1}{t-2}\right\} \qquad (2 < t \in \mathbb{R})$$

következtében tetszőleges $\ln(2) < x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2+4)(t-2)}\, dt\Big|_{t=e^x} &= \left(-\frac{1}{8}\right)\int\left(\frac{t+2}{t^2+4} - \frac{1}{t-2}\right) dt\Big|_{t=e^x} = \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right)\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{1}{t-2}\right) dt\Big|_{t=e^x} = \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left[\ln(\sqrt{t^2+4}) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{2}\right) - \ln(t-2)\right]_{t=e^x} + c, \end{aligned}$$

azaz

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}+4)(e^x-2)}\, dx = \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left[\ln(\sqrt{e^{2x}+4}) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{e^x}{2}\right) - \ln(e^x-2)\right] + c.$$

4. Feladat. Határozza meg, az

$$y = 4x - x^2 \qquad \text{és az} \qquad y = x^2 - 6x + 8$$

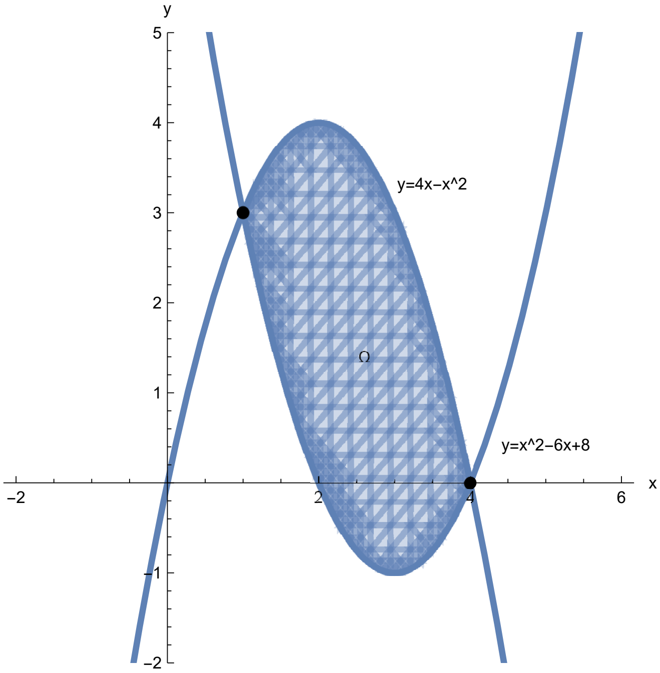
egyenletű parabola által közrezárt Ω ponthalmaz területét!

Útm. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ a két görbe metszéspontjának abszcisszája, akkor

$$4\alpha - \alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\alpha^2 - 10\alpha + 8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(\alpha-1)(\alpha-4) = 0.$$

Így a keresett ponthalmaz (vö. 4. ábra) területe:

$$\begin{aligned} T(\Omega) &= \int_1^4 \left(4x - x^2 - x^2 + 6x - 8\right)\, dx = \int_1^4 \left(-2x^2 + 10x - 8\right)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 8x\right]_1^4 = \\ &= \left(-\frac{2\cdot 64}{3} + 5\cdot 16 - 8\cdot 4\right) - \left(-\frac{2}{3} + 5 - 8\right) = -\frac{126}{3} + 15\cdot 5 - 8\cdot(4-1) = \\ &= -42 + 75 - 24 = -42 + 51 = 9. \end{aligned}$$



4. ábra

5. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x) := x \cdot \sqrt{\sin(x)} \qquad (x \in [0, \pi])$$

függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

Útm. Világos, hogy a keresett térfogat:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_0^\pi \left(x \cdot \sqrt{\sin(x)}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \pi \cdot \left\{ \left[-x^2 \cdot \cos(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x \right\} = \pi \cdot \left\{ \pi^2 + [2x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(x)\,\mathrm{d}x \right\} = \\
&= \pi \cdot \left\{ \pi^2 + 0 + [2\cos(x)]_0^\pi \right\} = \pi \cdot \left\{ \pi^2 - 2 - 2 \right\} = \pi \cdot \left\{ \pi^2 - 4 \right\}.
\end{aligned}
$$

2023 ősz

Az 1. zh feladatai

1. Feladat. Az

$$f(x) := \sqrt{\frac{1+4x}{1+2x}} \qquad \left(-\frac{1}{4} \leq x \in \mathbb{R}\right)$$

függvény esetében

a) a definíció alapján **bizonyítsa be**, hogy $f \in \mathfrak{D}[0]$, majd **számítsa ki** az $f'(0)$ deriváltat;

b) **írja fel** az $a := 12$ abszcisszájú ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét, amennyiben az létezik!

Útm. Mivel $\mathcal{D}_f = \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ ezért $\mathcal{D}_f$ nyílt halmaz: minden pontja – így a 0 is – belső pont.

a) Tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{\frac{1+4x}{1+2x}} - \sqrt{\frac{1+4\cdot 0}{1+2\cdot 0}}}{x-0} = \frac{\sqrt{\frac{1+4x}{1+2x}} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+2x}}{x\sqrt{1+2x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+2x}}{x\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+2x}} =$$

$$= \frac{2x}{x\sqrt{1+2x}\left(\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+2x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x}\left(\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{2}{1\cdot(1+1)} = 1 \in \mathbb{R} \quad (x \to 0)$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 1$.

b) A deriválhatóságra vonatkozó műveleti szabályok alapján világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$, speciálisan $f \in \mathfrak{D}[12]$. Mivel

$$f(12) = \sqrt{\frac{1+4\cdot 12}{1+2\cdot 12}} = \sqrt{\frac{1+48}{1+24}} = \frac{7}{5}$$

és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2}\{\ln(1+4x) - \ln(1+2x)\}, \qquad \text{így} \qquad f'(x) = f(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{4}{1+4x} - \frac{2}{1+2x}\right\},$$

így

$$f'(12) = f(12)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{4}{1+4\cdot 12}-\frac{2}{1+2\cdot 12}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\left\{\frac{4}{49}-\frac{2}{25}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{4\cdot 25-2\cdot 49}{49\cdot 25} = \frac{1}{2}\cdot\frac{100-98}{7\cdot 125} = \frac{1}{875},$$

ezért a kérdéses érintőegyenes egyenlete nem más, mint

$$y = f(12)+f'(12)\cdot(x-12) = \frac{7}{5}+\frac{1}{875}\cdot(x-12) = \frac{x}{825}+\frac{7}{5}-\frac{12}{875} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

2. Feladat. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^{2023}+a\cdot(x+\cos(x))-2 & (x<0), \\ b\cdot(e^{2x}+\ln(1+x))+4x & (x\geq 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen, majd **adja meg** f deriváltfüggvényét!

Útm. Ha

1. $x \in (-\infty, 0)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = 2023\cdot x^{2022}+a\cdot(1-\sin(x)).$$

2. $x \in (0, +\infty)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = b\cdot\left(2e^{2x}+\frac{1}{1+x}\right)+4.$$

3. $x = 0$, akkor

$$f\in\mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(f\in\mathfrak{C}[0] \quad \wedge \quad f'_-(0)=f'_+(0)\right).$$

Az

- $f \in \mathfrak{C}[0]$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha

$$a-2 = \lim_{0-0} f = \lim_{0+0} f = f(0) = b,$$

hiszen

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x\to 0-0}\left\{x^{2023}+a\cdot(x+\cos(x))-2\right\} = 0+a\cdot(0+1)-2 = a-2,$$
$$\lim_{0+0} f = \lim_{x\to 0+0}\left\{b\cdot(e^{2x}+\ln(1+x))+4x\right\} = b\cdot(1+\ln(1))+4\cdot 0 = b.$$

- $f'_-(0) = f'_+(0)$ feltétel pedig pontosan akkor áll fenn, ha

$$a = f'_-(0) = f'_+(0) = 3b + 4,$$

hiszen

$$\lim_{0-0} f' = \lim_{x\to 0-0} \left\{2023 \cdot x^{2022} + a \cdot (1 - \sin(x))\right\} = a,$$
$$\lim_{0+0} f' = \lim_{x\to 0+0} \left\{b \cdot \left(2e^{2x} + \tfrac{1}{1+x}\right) + 4\right\} = 3b + 4.$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$f \in \mathfrak{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 1 \qquad \text{és} \qquad b = -1.$$

Az f függvény deriváltfüggvénye tehát

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) := \begin{cases} 2023 \cdot x^{2022} + 1 - \sin(x), & (x < 0), \\ 1, & (x = 0), \\ -\left(2e^{2x} + \frac{1}{1+x}\right) & (x > 0). \end{cases}$$

3. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$$

Útm.

a) A Bernoulli-l'Hôpital-szabály többszöri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} \sim \frac{e^x - 1 + \sin(x)}{\sin(x) + x \cdot \cos(x)} \sim \frac{e^x + \cos(x)}{2\cos(x) - x \cdot \sin(x)}$$

$$\longrightarrow \frac{e^0 + \cos(0)}{2\cos(0) - 0 \cdot \sin(0)} = \frac{2}{2} = 1 \qquad (x \to 0),$$

így

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} = 1.$$

b) Mivel tetszőleges $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1 + x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1 + x)}{x}\right)$$

és

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} \sim \frac{1}{1 + x} \longrightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1 \qquad (x \to 0),$$

ezért
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
így az exponenciális függvény folytonosságátnak felhasználásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\exp(1)=e.$$

4. Feladat. Végezze el az
$$f(x):=x^4\cdot e^{-x}\qquad (x\in\mathbb{R})$$
függvény teljes vizsgálatát!

Útm.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}^\infty$, $f\geq 0$, továbbá $f(x)=0 \iff x=0$.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x\in\mathcal{D}_f$ esetén
$$f'(x)=4x^3\cdot e^{-x}-x^4\cdot e^{-x}=x^3\cdot e^{-x}\cdot(4-x)=0 \quad\iff\quad x\in\{0;4\},$$
ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+4)$	4	$(4,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x\in\mathcal{D}_f$ esetén
$$\begin{aligned}f''(x)&=3x^2\cdot e^{-x}(4-x)-x^3\cdot e^{-x}(4-x)-x^3\cdot e^{-x}=x^2\cdot e^{-x}\cdot\Big(12-3x-4x+x^2-x\Big)=\\&=x^2\cdot e^{-x}\cdot(x^2-8x+12)=x^2\cdot e^{-x}\cdot(x-2)(x-6),\end{aligned}$$
ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,6)$	6	$(6,+\infty)$
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$		$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Látható, hogy $\mathcal{D}_f'\backslash\mathcal{D}_f=\{-\infty,+\infty\}$. Világos, hogy
$$\lim_{-\infty}f=\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot e^{-x}=+\infty,\qquad \text{ill.}\qquad \lim_{+\infty}f=\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot e^{-x}=0.$$

Következésképpen a

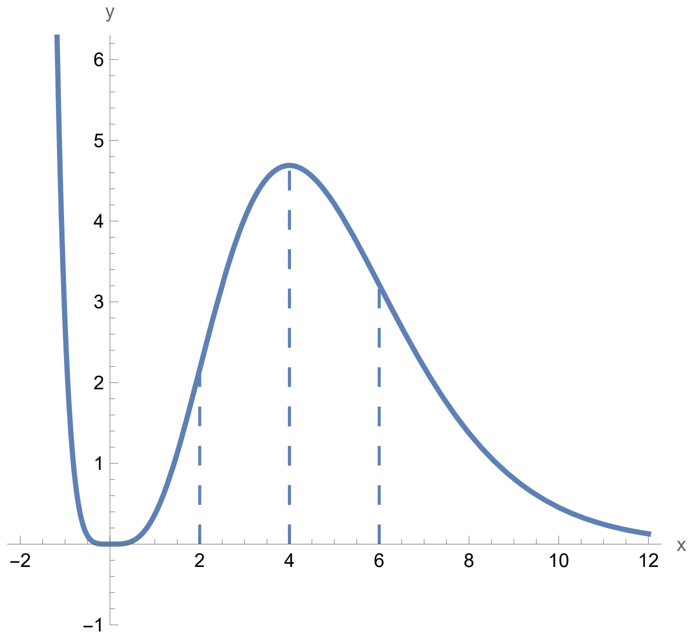
$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek a $(+\infty)$-ben. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)}{x} = x^3 \cdot e^{-x} \longrightarrow -\infty \qquad (x \to -\infty),$$

ezért f-nek nincsen aszimptotája a $(-\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját a 5. ábra szemlélteti.



5. ábra. Az $\mathbb{R}\backslash \ni x \mapsto x^4 \cdot e^{-x}$ függvény grafikonja.

5. Feladat. Legyen

$$f(x) := \sqrt[3]{1+3x} \qquad \left(-\frac{1}{3} < x \in \mathbb{R}\right).$$

Írja fel az f függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, és **határozza meg**, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

Útm.

1. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$, ezért

$$f(x) = (1+3x)^{1/3}, \qquad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (1+3x)^{-2/3}, \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot (1+3x)^{-5/3}, \quad f''(0) = -2.$$

Tehát a keresett Taylor-polinom:

$$T_{0,2}f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = 1 + x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}^3$, ezért

$$f'''(x) = (-2) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 3 \cdot (1+3x)^{-8/3} = \frac{10}{\sqrt[3]{(1+3x)^8}} \qquad (x \in \mathfrak{D}_f).$$

Következésképpen tetszőleges $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$ esetén van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

$$f(x) - T_{0,2}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}$$

Ekkor persze $0 < \xi < \frac{1}{10}$ is igaz, és így bármely $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ esetén

$$|f(x) - T_{0,2}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |x|^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{(1+3\xi)^8}} \cdot \frac{1}{10^3} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{(1+3\cdot 0)^8}} \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{1}{600}.$$

A 2. zh feladatai

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int (x+1) \cdot \sin(2x)\, dx \qquad (x \in \mathbb{R});$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x) - \cos^5(x)}{\cos^2(x)}\, dx \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$

Útm.

a) Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int (x+1)\cdot\sin(x)\,dx &= (x+1)\cdot\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\int\cos(2x)\,dx = \\ &= -\frac{(x+1)\cdot\cos(2x)}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+c.\end{aligned}$$

b) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \pi/2$ esetén $\cos(x) > 0$, ezért

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin(2x)-\cos^5(x)}{\cos^2(x)}\,dx &= \int\frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)}\,dx-\int\frac{\cos^5(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \\ &= (-2)\cdot\int\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx-\int\cos^3(x)\,dx = \\ &= (-2)\cdot\ln(\cos(x))-\int\cos(x)\cdot(1-\sin^2(x))\,dx = \\ &= \ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)-\int\Big(\cos(x)-\sin^2(x)\cdot\cos(x)\Big)\,dx = \\ &= \ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)-\sin(x)+\frac{\sin^3(x)}{3}+c \quad (c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

2. Feladat. Számítsa ki az

$$\int\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\ln(x)}\right)^2 dx \qquad (x\in(1,+\infty))$$

határozatlan integrált!

Útm. Az integrandusban elvégezve a négyzetreemelést azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in (1,+\infty)$ esetén

$$\int\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\ln(x)}\right)^2 dx = \int\frac{1}{x^2}\,dx+2\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln(x)}\,dx+\int\ln(x)\,dx.$$

Mivel

- $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x\in(1,+\infty)}$;
- $\displaystyle\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln(x)}\,dx = \int\ln'(x)\cdot\ln^{1/2}(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot\ln^{3/2}(x)\right]_{x\in(1,+\infty)}$;
- $\displaystyle\int\ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)-\int\frac{x}{x}\,dx = [x\cdot\ln(x)-x]_{x\in(1,+\infty)}$,

ezért a keresett integrál nem más, mint

$$\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\ln(x)}\right)^2 dx = -\frac{1}{x} + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\ln^3(x)} + x \cdot \ln(x) - x + c \quad (x \in (1, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

3. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 4e^x + 7}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

határozatlan integrált!

Útm. Világos, hogy az integrandus

$$S(e^x)$$

alakú, ahol

$$S(y) := \frac{y^2}{y^2 + 4y + 7} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Így, ha

$$\varphi(t) := \ln(t) \qquad (0 < t \in \mathbb{R}),$$

akkor $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ bijekcióra

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \qquad (0 < t \in \mathbb{R}),$$

és alkalmazva a második helyettesítési szabályt azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 4e^x + 7}\, dx &= \int S(e^x)\, dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int S(t) \cdot \frac{1}{t}\, dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{t^2}{t^2 + 4t + 7} \cdot \frac{1}{t}\, dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \int \frac{t}{t^2 + 4t + 7}\, dt\Big|_{t=e^x} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t + 4 - 4}{t^2 + 4t + 7}\, dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{2t + 4}{t^2 + 4t + 7} - \frac{4}{(t+2)^2 + 3}\right) dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2 + 4t + 7) - \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{t+2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dt\Bigg|_{t=e^x} = \\
&= \left[\ln(\sqrt{t^2 + 4t + 7}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t+2}{\sqrt{3}}\right)\right]_{t=e^x} = \\
&= \ln(\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 7}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{e^x + 2}{\sqrt{3}}\right) + c.
\end{aligned}$$

4. Feladat. Határozza meg, az

$$y = x^2 - 1 \qquad \text{és az} \qquad y = x - x^2$$

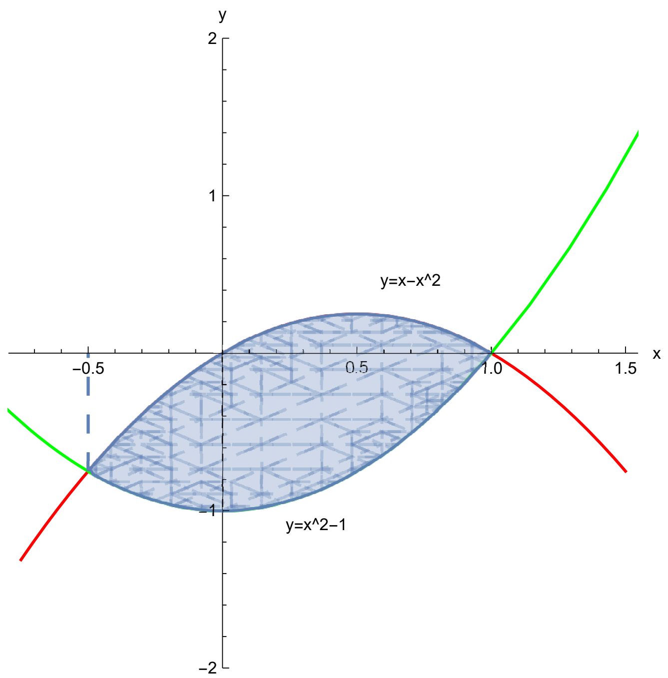
egyenletű parabola által közrezárt Ω ponthalmaz területét!

Útm. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ a két görbe metszéspontjának abszcisszája, akkor

$$\alpha^2 - 1 = \alpha - \alpha^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Így a keresett ponthalmaz (vö. 6. ábra) területe:

$$\begin{aligned} T(\Omega) &= \int_{-1/2}^{1} \left((x - x^2) - (x^2 - 1)\right) dx = \int_{-1/2}^{1} \left(-2x^2 + x + 1\right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1/2}^{1} = \\ &= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{2}{3 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} + \frac{7}{24} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$



6. ábra

5. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x) := \sqrt{\frac{2x^2-3x-5}{x^2+x-2}} \qquad (x \in [3,4])$$

függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

Útm. Mivel

$$x^2+x-2=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-2,\, 1\},$$

ezért $f \in \mathfrak{C}[3,4]$, illetve

$$V = \pi \cdot \int_3^4 f^2 = \pi \cdot \int_3^4 \frac{2x^2-3x-5}{x^2+x-2}\,dx.$$

A fenti integrál kiszámítását három lépésben végezzük el.

1. lépés. Világos, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;\, 1\}$ esetén

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2+x-2} = 2 \cdot \frac{2x^2-3x-5}{2\cdot(x^2+x-2)} = 2 \cdot \frac{2\cdot(x^2+x-2)-5x-1}{2\cdot(x^2+x-2)} = 2 - \frac{5x+1}{x^2+x-2}.$$

Ezt a részeredményt maradékos osztással is megkaphattuk volna:

$$\begin{array}{l} (2x^2-3x-5) : (x^2+x-2) = 2 \\ \underline{-(2x^2+2x-4)} \\ -5x-1, \end{array}$$

azaz bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;\, 1\}$ számra

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2+x-2} = 2 + \frac{-5x-1}{x^2+x-2}.$$

2. lépés. Vegyük észre, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;\, 1\}$ esetén

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{2(x+2)+3(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

Ezt a felbontás persze úgy is megkaphatjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;\, 1\}$ esetén

$$\boxed{\frac{5x+1}{(x+2)(x-1)}} = \frac{p}{x+2} + \frac{q}{x-1} = \frac{p(x-1)+q(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \boxed{\frac{(p+q)x-p+2q}{(x+2)(x-1)}},$$

ahonnan

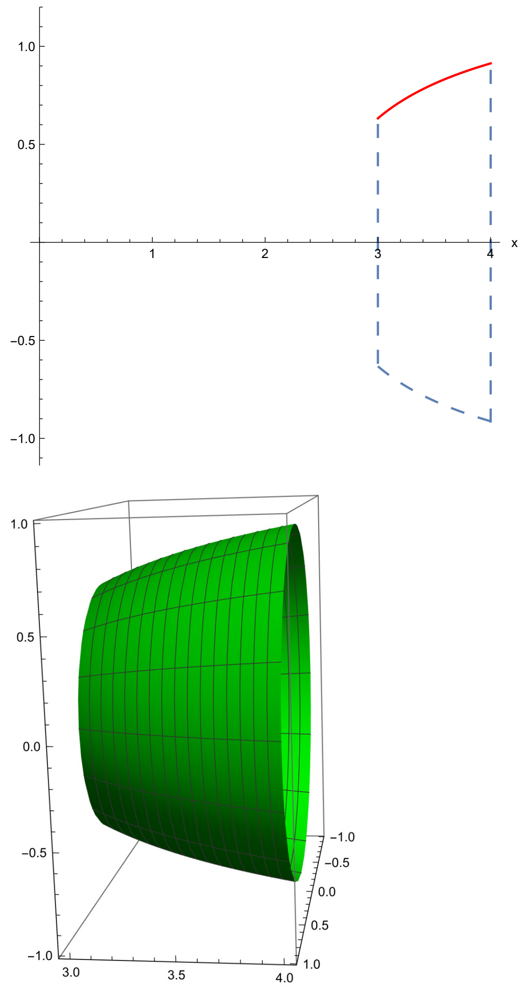
$$(5 = p+q \quad \wedge \quad 1 = -p+2q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p=3 \quad \wedge \quad q=2)$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;\, 1\}).$$

3. lépés. A keresett térfogat tehát:

$$\begin{aligned}
\boxed{V} &= \pi \cdot \int_3^4 \left(2 - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}\right) dx = \pi \cdot [2x - 3 \cdot \ln(x+2) - 2 \cdot \ln(x-1)]_3^4 = \\
&= \pi \cdot \{(8 - 3 \cdot \ln(6) - 2 \cdot \ln(3)) - (6 - 3 \cdot \ln(5) - 2 \cdot \ln(2))\} = \\
&= \boxed{2\pi + 2\pi \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) + 3\pi \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right)}.
\end{aligned}$$



7. ábra

2024 ősz

Az 1. zh feladatai

Feladat. Az

$$f(x) := \frac{2+\sqrt{1+3x^2}}{1+x} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

a) **bizonyítsa be**, hogy $f \in \mathfrak{D}[1]$, majd **számítsa ki** az $f'(1)$ deriváltat!

b) **írja fel** az $a := 0$ abszcisszájú ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét, amennyiben az létezik!

Útm. Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, ezért $1 \in \mathrm{int}(D_f)$.

a) Tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{\dfrac{2+\sqrt{1+3x^2}}{1+x} - \dfrac{2+\sqrt{1+3\cdot 1^2}}{1+1}}{x-1} = \frac{\dfrac{2+\sqrt{1+3x^2}}{1+x} - 2}{x-1} = \\
&= \frac{\sqrt{1+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{1+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{1+3x^2}+2x}{\sqrt{1+3x^2}+2x} = \\
&= \frac{1-x^2}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{1+3x^2}+2x\right)} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{1+3x^2}+2x\right)} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1+3x^2}+2x} \longrightarrow -\frac{1}{4} \quad (x \to 1).
\end{aligned}$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{D}[1]$ és $f'(1) = 1/4$.

b) A deriválhatóságra vonatkozó műveleti szabályok alapján világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$, speciálisan $f \in \mathfrak{D}[1]$. Mivel

$$f(1) = \frac{2+\sqrt{1+3\cdot 1^2}}{1+1} = 3$$

és

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2+\sqrt{1+3x^2})'(1+x) - (2+\sqrt{1+3x^2})(1+x)'}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{\dfrac{6x}{\sqrt{1+3x^2}}(1+x) - (2+\sqrt{1+3x^2})}{(1+x)^2} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

ill. $f'(0) = -3$, ezért a kérdéses érintőegyenes egyenlete nem más, mint

$$y = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) = 3 - 3\cdot(x-0) = -3x+3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} ae^{2x}\cos(x) - 1, & (x < 0), \\ \\ b(20x^{24} - \pi x^2 + 4x + 1) & (x \geq 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen, majd **adja meg** f deriváltfüggvényét!

Útm. Ha

1. $x \in (-\infty, 0)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és
$$f'(x) = 2ae^{2x}\cos(x) - ae^{2x}\sin(x) = ae^{2x}(2\cos(x) - \sin(x)).$$

2. $x \in (0, +\infty)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és
$$f'(x) = b(480x^{23} - 2\pi x + 4).$$

3. $x = 0$, akkor
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}[0],$$
ill.
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'_-(0) = f'_+(0).$$
Az
   - $f \in \mathfrak{C}[0]$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha
   $$a - 1 = \lim_{0-0} f = \lim_{0+0} f = f(0) = b.$$
   - $f'_-(0) = f'_+(0)$ feltétel pedig pontosan akkor áll fenn, ha
   $$2a = f'_-(0) = f'_+(0) = 4b.$$

   Mindez azt jelenti, hogy
   $$b = 1 \qquad \text{és} \qquad a = 2,$$
   következésképpen $f'(0) = 4$. Az f függvény deriváltfüggvénye tehát
   $$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) := \begin{cases} 2e^{2x}(2\cos(x) - \sin(x)), & (x < 0), \\ 480x^{23} - 2\pi x + 4 & (x \geq 0). \end{cases}$$

Feladat. A a Bernoulli-l'Hôpital-szabály következtében felhasználásával számítsa ki az alábbi határértékeket!
$$\text{a)} \ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{x^2 + \cos(x) - 1}, \qquad \text{b)} \ \lim_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{1/x}$$
határértéket!

Útm.

a) Mivel
$$\frac{e^x-\sin(x)-1}{x^2+\cos(x)-1}\sim\frac{e^x-\cos(x)}{2x-\sin(x)}\sim\frac{e^x+\sin(x)}{2-\cos(x)}\longrightarrow\frac{1+0}{2-1}=1\qquad(x\to 0),$$
ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály következtében
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin(x)-1}{x^2+\cos(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)}{2x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin(x)}{2-\cos(x)}=1.$$

b) Mivel bármely $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ esetén
$$(1+\sin(x))^{1/x}=\exp\left(\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}\right),$$
ezért az exponenciális függvény folytonossága következtében
$$\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{1/x}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}\right)=e^1=e,$$
hiszen a Bernoulli-l'Hôpital-szabály következtében
$$\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}\sim\frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1}=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\longrightarrow 1\qquad(x\to 0).$$

Feladat. Végezze el az
$$f(x):=\frac{x}{\ln(x)}\qquad(1\neq x\in(0,+\infty))$$
függvény teljes vizsgálatát!

Útm.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}^\infty$.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel
$$f'(x)=\frac{\ln(x)-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad x=e,$$
ezért

	$(0,1)$	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel

$$f''(x) = \frac{\frac{\ln^2(x)}{x} - \frac{(\ln(x)-1)2\ln(x)}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = e^2,$$

ezért

	$(0,1)$	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
f''	$-$	$+$	0	$-$
f	$\frown$	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}'_f \backslash \mathcal{D}_f = \{0,\ 1,\ +\infty\}$$

és

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0, \qquad \lim_{1\pm 0} f = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

és a Bernoulli-l'Hôpital-szabály következtében

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Mivel

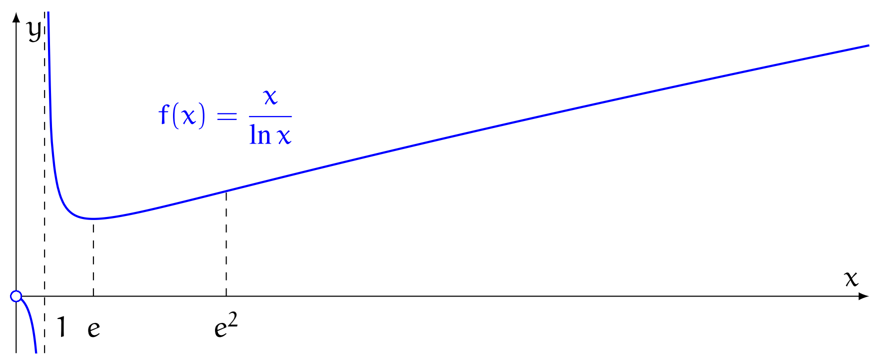
$$A := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

és

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

ezért f-nek nincsen aszimptotája.

5. lépés (grafikon).



Feladat. Írja fel az

$$f(x) := \ln(\sqrt{1+2x}) \qquad \left(-\frac{1}{2} < x \in \mathbb{R}\right)$$

függvény $a := 0$ pont körüli második Taylor-polinomját, majd becsülje meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

Útm.

1. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$, ezért

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2+2x), \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+2x}, \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2}, \qquad f''(0) = -2.$$

Tehát a keresett Taylor-polinom:

$$T_{0,2}f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}^3$, ezért

$$f'''(x) = \frac{4}{(1+2x)^3} \cdot 2 = \frac{8}{(1+2x)^3} \qquad (x \in \mathfrak{D}_f).$$

Következésképpen tetszőleges $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$ esetén van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

$$f(x) - T_{0,2}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}$$

Ekkor persze $0 < \xi < \frac{1}{10}$ is igaz, és így bármely $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ esetén

$$|f(x) - T_{0,2}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |x|^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{\sqrt[3]{(1+2\xi)^8}} \cdot \frac{1}{10^3} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{\sqrt[3]{(1+2\cdot 0)^8}} \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{1}{750}.$$

A 2. zh feladatai

Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény primitív függvényeinek halmazát!

Útm. Mivel f folytonos (racionális függvény), ezért van primitív függvénye. A számláló fokszáma nagyobb, mint a nevező fokszáma, ezért először maradékos osztást végzünk:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2} = \frac{x(x^2 + 2) - 5(x^2 + 2) + 3}{x^2 + 2} = x - 5 + \frac{3}{x^2 + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2}\,dx &= \int \left(x - 5 + \frac{3}{x^2 + 2}\right) dx = \\
&= \int \left(x - 5 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\right) dx = \\
&= \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Feladat. Számítsa ki az

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}\,dx$$

Riemann-integrált!

Útm. Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} \qquad (x \in [0, 4))$$

és

$$t := \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = t^2 =: \varphi(t) \qquad (x \in [0, 4] \quad \Longleftrightarrow \quad t \in [0, 2])\,.$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0, 4]$ és a $\varphi : [0, 2] \to [0, 4]$ függvény folytonosan deriválható,

$$\varphi'(t) = 2t \qquad (t \in [0, 2]).$$

Így a helyettesítéssel való integrálás szabálya szerint

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} f(x)\,dx = \int_0^2 f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_0^2 \frac{t}{1+2t}\cdot 2t\,dt = \\ &= \int_0^2 \frac{2t^2}{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{4t^2-1+1}{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(2t-1+\frac{1}{1+2t}\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\left[t^2-t+\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(4-2+\frac{1}{2}\ln(5)\right) = 1+\frac{\ln(5)}{4}.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a következő módon is eljárhattunk volna.
Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először meghatározzuk primitív függvényeit. Alkalmazzuk a

$$t := \sqrt{x} \quad\Longleftrightarrow\quad x = t^2 =: \varphi(t) \qquad (x \in (0,4) \quad\Longleftrightarrow\quad t \in (0,2)).$$

helyettesítést. A φ függvény deriválható,

$$\varphi'(t) = 2t \qquad (t \in (0,2)),$$

továbbá $\varphi' > 0$, így φ szigorúan monoton növekedő, tehát invertálható és

$$\varphi^{-1}(x) = t = \sqrt{x} \qquad (x \in (0,4)).$$

A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály alapján

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx &= = \int \frac{t}{1+2t}\cdot 2t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \int \frac{2t^2}{1+2t}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{4t^2-1+1}{1+2t}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2}\int\left(2t-1+\frac{1}{1+2t}\right)dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left[t^2-t+\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_{t=\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln(1+2\sqrt{x})\right)+c \quad (x \in (0,4),\ c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

A Newton-Leibniz-formula felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln(1+2\sqrt{x})\right]_0^4 = 2-1+\frac{\ln(5)}{4} = 1+\frac{\ln(5)}{4}.$$

Feladat. Indokolja meg, hogy az

$$f(x) := \frac{e^x}{1+e^{2x}} \qquad \left(x \in I := \left[0, \frac{\ln(3)}{2}\right]\right)$$

függvény integrálható, majd **számítsa ki** f határozott integrálját!

Útm. Mivel $f \in \mathfrak{C}[I]$, ezért $f \in \mathfrak{R}[I]$. Először meghatározzuk f primitív függvényeit. Alkalmazzuk a $t := e^x$ helyettesítést, azaz legyen

$$x = \ln(t) =: \varphi(t) \qquad (0 < t \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ bijekció, $\varphi^{-1} = \exp$. Így f határozatlan integrálja az alábbi racionális függvényre vezethető vissza:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\ &= \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=e^x} = [\operatorname{arc\,tg}(t)]_{t=e^x} = \operatorname{arc\,tg}(e^x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

A Newton-Leibniz-formula felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(3)/2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= [\operatorname{arc\,tg}(e^x)]_0^{\ln(3)/2} = \operatorname{arc\,tg}\left(e^{\ln(3)/2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(e^0\right) = \\ &= \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\right) - \operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Feladat. Számítsa ki az $x + y = 1$ egyenletű egyenes és a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ egyenletű görbe által közrezárt korlátos síkidom területét!

Útm. Ha

$$x + y = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 1 - x =: f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = (1-\sqrt{x})^2 =: g(x) \quad (0 \le x \in \mathbb{R}),$$

akkor a két görbe metszéspontjainak abszcisszái így határozhatók meg:

$$f(x) = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x = 1 - 2\sqrt{x} + x \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{0,\ 1\}.$$

Mivel f és g folytonos függvény, továbbá

$$f(x) - g(x) = (1-x) - (1-\sqrt{x})^2 = -2x + 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right) \geq 0 \qquad (x \in [0,1])$$

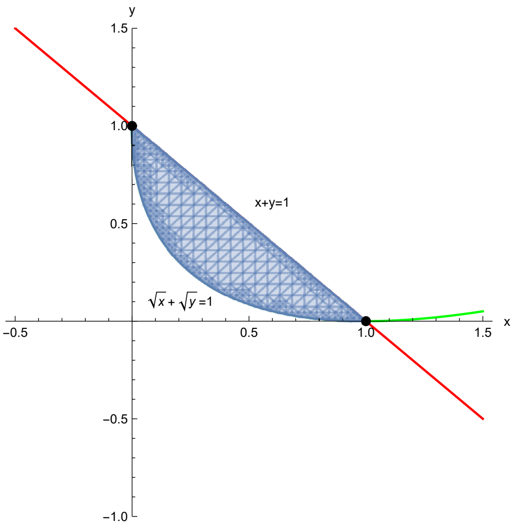
következtében

$$f(x) \geq g(x) \qquad (x \in [0,1]),$$

ezért a közrezárt síkidom (vö. 8. ábra) területe:

$$\int_0^1 (f-g) = \frac{1}{2} - \int_0^1 g = \frac{1}{2} - \int_0^1 \left(1 - 2\sqrt{x} + x\right)\, dx = \frac{1}{2} - \left[x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$



8. ábra

Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := xe^x \qquad (x \in [0,1])$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

Útm. Az

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [0,1],\ \sqrt{y^2+z^2} \leq xe^x\right\}$$

ponthalmaz térfogatát kell meghatározni. Mivel f folytonos, ezért az Ω ponthalmaz térfogatára

$$V(\Omega) = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx.$$

Az iménti integrál kiszámításához kétszeri parciális integrálásra van szükség:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \pi \left[\frac{x^2 e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \pi \int_0^1 x e^{2x}\, dx = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \left\{ \left[\frac{x e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\, dx \right\} = \\ &= \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi e^2}{2} + \pi \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \pi \cdot \frac{e^2 - 1}{4}. \end{aligned}$$

1. gyakorlat (2025. szeptember 8-9.)

Emlékeztető. Ha a
$$\sum (a_n(x-c)^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsor R konvergenciasugara nem nulla, és
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (x \in K_R(c)),$$
akkor bármely $b \in K_R(c)$ esetén létezik a $\lim_b f$ határérték, és
$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-c)^n.$$

Emlékeztető. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
ill.
$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\operatorname{ch}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Emlékeztető.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Megjegyezzük, hogy a fentiek általánosíthatók tetszőleges $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ill. $a \in \mathcal{D}_f'$ pont esetében, amelyre $0 \notin \mathcal{R}_f$, ill. $\lim_a f = 0$ teljesül:
$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1.$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Útm.

1. Megmutatjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

1. módszer. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x \longrightarrow 0$ határátmenetben

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \\ &= \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} \longrightarrow 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. módszer. A cos függvény definícióját felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\right) = \\ &= \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. módszer. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$1-\cos(x) = 1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

2. Megmutatjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

1. módszer. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x \longrightarrow 0$ határátmenetben

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)-1}{x} &= \frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} = -\frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)+1} = \\ &= (-\sin(x))\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} \longrightarrow (-0)\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$

2. módszer. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = -\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 = 0 \qquad (x \to 0).$$

3. módszer. A cos függvény definícióját felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = 0.\end{aligned}$$

4. módszer. A trigonometrikus azonosságok felhasználásával (vö. Matematikai alapozás, 38. oldal)

$$\cos(x)-1 = \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

adódik. Így

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} &= -\lim_{x\to 0}2\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \\ &= -\left(\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = -0\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a későbbiek szempontjából is igen hasznos az alábbi (ún. **linearizáló**) **formulák** ismerete (vö. Matematikai alapozás, 39. oldal):

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}, \qquad \mathrm{ch}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

1. módszer. Az exponenciális függvényre vonatkozó elemi ismeretek felhasználásával adódik, hogy tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} \longrightarrow 1+0=1 \qquad (x\to 0).$$

2. módszer. Ha $0<|x|<1$, akkor

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right| = \left|x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}\right| < |x|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = |x|\cdot(e-2),$$

ahonnan

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right) = 0\cdot(e-2)=0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$$

következik.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$. A

$$K_a f(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_f)$$

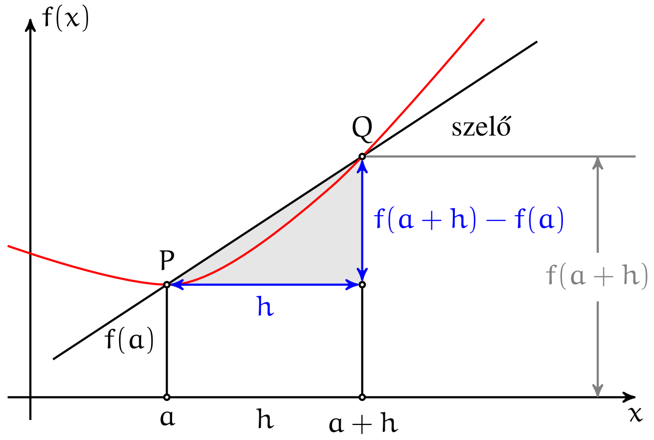
leképezést az f függvény a pontbeli **differenciahányados**ának vagy **különbségi hányados**ának nevezzük.

Megjegyzések.

1. A $h := x-a$ jelölés bevezetésével $x = a+h$, továbbá

$$K_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

2. Az f jelentésétől függően a különbségi hányadosnak lehet geometriai, ill. fizikai jelentést tulajdonítani. Legyen pl. $f : (\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ és tekintsük az f függvémy grafikonját. A grafikon $P=(a,f(a))$ és $Q=(x,f(x))$ pontjait összekötő egyenest a grafikon szóban forgó pontjain áthaladó **szelő**jének nevezzük. A $K_a f(x)$ szám ennek a szelőnek az **iránytangens**e.



A fizikában a különbségi hányadost az átlagsebesség értelmezéséhez használják. Ha az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ leképezés valamely egyensvonalú mozgás út-időfüggvénye, akkor a $K_a f(x)$ szám az a **és** x **időpontok közti átlagsebesség**et jelenti.

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{x \to a} K_a f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértéket, amennyiben az létezik!

1. $f(x) := c \in \mathbb{R}\ (x \in \mathbb{R}),\quad a \in \mathbb{R};$
2. $f(x) := |x|\ (x \in \mathbb{R}),\quad a \in \mathbb{R};$
3. $f(x) := x^n\ (x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}),\quad a \in \mathbb{R};$
4. $f(x) := \dfrac{1}{x}\ (0 \neq x \in \mathbb{R}),\quad 0 \neq a \in \mathbb{R};$
5. $f(x) := \sqrt{x}\ (0 \leq x \in \mathbb{R}),\quad 0 < a \in \mathbb{R};$
6. $f(x) := \sin(x)\ (x \in \mathbb{R}),\quad a \in \mathbb{R};$
7. $f(x) := e^x\ \ (x \in \mathbb{R}),\quad a \in \mathbb{R};$
8. $f(x) := \sqrt[3]{x^2}\ (x \in \mathbb{R}),\quad a := 0;$
9. $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9}\ (x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}),$

   $a := -1;$
10. $f(x) := \begin{cases} x^4\left(\sqrt{2} + \sin(1/x)\right) & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

    $a := 0.$

Útm.

1. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$K_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0 \longrightarrow 0 \qquad (x \to a).$$

2. Ha $a := 0$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$K_0 f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x) \longrightarrow \pm 1 \qquad (x \to 0 \pm 0).$$

3. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} K_a(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} = \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1} \longrightarrow na^{n-1} \quad (x \to a). \end{aligned}$$

4. Ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{a\}$ esetén

$$K_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x - a} = \frac{a - x}{xa(x-a)} = -\frac{1}{xa} \longrightarrow -\frac{1}{a^2} \qquad (x \to a).$$

5. Ha $0 < a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{a\}$ esetén

$$\begin{aligned} K_a f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \\ &= \frac{1}{x - a} \cdot \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad (x \to a). \end{aligned}$$

6. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} K_a f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} \overset{h:=x-a}{=} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \\ &= \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h} = \\ &= \cos(a) \cdot \frac{\sin(h)}{h} + \sin(a) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} \longrightarrow \cos(a) \cdot 1 + \sin(a) \cdot 0 \qquad (h \to 0). \end{aligned}$$

7. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$K_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \overset{h:=x-a}{=} e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^a \cdot 1 = e^a \qquad (h \to 0).$$

8. Ha $a := 0$, akkor tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$K_0 f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \longrightarrow \pm\infty \qquad (x \to 0 \pm 0).$$

9. Ha $a := -1$, akkor tetszőleges $-1 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$K_{-1}f(x) = \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{\frac{x+2}{x^2-9}+\frac{1}{8}}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{8(x+1)(x^2-9)} = \frac{(x+1)(x+7)}{8(x+1)(x^2-9)} =$$

$$= \frac{x+7}{8(x^2-9)} \longrightarrow \frac{6}{-64} = -\frac{3}{32} \qquad (x \to -1).$$

10. Ha $a := 0$, akkor tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$K_0f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^4\left(\sqrt{2}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)-0}{x-0} = x^3\left(\sqrt{2}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0),$$

ui. az

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \mapsto \sqrt{2}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

függvény korlátos és

$$\lim_{x\to 0} x^3 = 0.$$

Házi feladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

   1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-\sin(2x)}{x}$; 2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}$.

2. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határértéket, amennyiben az létezik!

   (a) $f(x) := \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R})$;

   (b) $f := \ln, \quad a \in (0, +\infty)$;

   (c) $f(x) := x \cdot \sqrt{1+\cos(x)} \quad (x \in (0, +\infty)), \quad a := \pi/2$;

   (d) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}), \quad a := -1$.

Útm.

1. Világos, hogy bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $\dfrac{\sin(3x)-\sin(2x)}{x}=3\cdot\dfrac{\sin(3x)}{3x}-2\cdot\dfrac{\sin(2x)}{2x}\longrightarrow 3\cdot 1-2\cdot 1=1 \qquad (x\to 0).$

(b) $\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{x}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}=\dfrac{x}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}=\dfrac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}}=\dfrac{1}{1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}}\longrightarrow\dfrac{1}{1+(+\infty)}=0 \quad (x\to+\infty).$

2. (a) Ha $a\in\mathbb{R}$, akkor bármely $a\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}\overset{h:=x-a}{=}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\\
&= \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}=\\
&= \cos(a)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\cdot\frac{\sin(h)}{h}\longrightarrow\cos(a)\cdot 0-\sin(a)\cdot 1 \quad (h\to 0),
\end{aligned}$$

következésképpen

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\sin(a).$$

(b) Világos, hogy ha $0<a\in\mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a} &= \frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{a}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{a}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{a+x-a}{a}\right)=\\
&= \frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{a}{x-a}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)=\\
&= \frac{1}{a}\cdot\ln\left(\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)=\frac{1}{a}\cdot\ln(e)=\frac{1}{a},
\end{aligned}$$

(c) Mivel minden $\frac{\pi}{2}\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(\pi/2)}{x-\pi/2}=\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}-\pi/2\cdot\sqrt{1+\cos(\pi/2)}}{x-\pi/2}=\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}-\pi/2}{x-\pi/2},$$

ezért a

$$h:=x-\frac{\pi}{2}$$

jelöléssel

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(\pi/2)}{x-\pi/2} &= \frac{(h+\pi/2)\cdot\sqrt{1+\cos(h+\pi/2)}-\pi/2}{h}=\frac{(h+\pi/2)\cdot\sqrt{1+\cos(h)\cos(\pi/2)-\sin(h)\sin(\pi/2)}-\pi/2}{h}=\\
&= \frac{(h+\pi/2)\cdot\sqrt{1-\sin(h)}-\pi/2}{h}=\sqrt{1-\sin(h)}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin(h)}-1}{h}=\sqrt{1-\sin(h)}+\\
&\quad +\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin(h)}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin(h)}+1}{\sqrt{1-\sin(h)}+1}=\sqrt{1-\sin(h)}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(h)}{h}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\sin(h)}+1}.
\end{aligned}$$

Így

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)-f(\pi/2)}{x-\pi/2}=\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{1-\sin(h)}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(h)}{h}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\sin(h)}+1}\right)=1+\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{-1}{2}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(d) Mivel minden $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 3; -1\}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\dfrac{x+2}{x^2-9}+\dfrac{1}{8}}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{8(x+1)(x^2-9)} = \frac{(x+1)(x+7)}{(8x+8)(x^2-9)} = \frac{x+7}{8(x^2-9)},$$

ezért

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \longrightarrow \frac{6}{-64} = -\frac{3}{32} \qquad (x \to -1),$$

azaz

$$f \in \mathfrak{D}[1] \qquad \text{és} \qquad f'(-1) = -\frac{3}{32}.$$

Gyakorló feladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\text{(a)} \ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(2x)}; \qquad \text{(b)} \ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}.$$

2. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határértéket, amennyiben az létezik!

(a) $f(x) := \dfrac{e^{-x}}{1+3\sin(x)} \qquad \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right);\ a := 0\right);$

(b) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \qquad (a := 0);$

(c) $f(x) := |\ln(|x|)| \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R};\ a := -1);$

(d) $f(x) := \sqrt{1-e^{-x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R};\ a := 0).$

Útm.

1. (a) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}\cdot\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)} = \frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)} = \frac{3}{2}.$$

(b) Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{n!}\cdot x^n}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{n!}\cdot x^n}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{n!}\cdot x^{n-1} = \lim_{x\to 0}\left\{3-2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{n!}\cdot x^{n-1}\right\} = 3-2 = 1.$$

2. (a) Mivel tetszőleges $0\neq x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{e^{-x}}{1+3\sin(x)}-1}{x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{-x}-1-3\sin(x)}{1+3\sin(x)} = \frac{e^{-x}-1-3\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+3\sin(x)} \longrightarrow \frac{-4}{1+3\cdot 0} = -4 \quad (x\to 0),$$

ui.

$$\frac{e^{-x}-1-3\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-1-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} = \frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!}-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \longrightarrow -1-3(1+0) = -4 \quad (x\to 0).$$

(b) Bármely $0\neq x\in[-1,1]$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \longrightarrow 0 \qquad (x\to 0).$$

(c) Ha $0\neq x\in\mathbb{R}$, akkor

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{|\ln(|x|)|}{x+1} = \begin{cases} \dfrac{-\ln(|x|)}{x+1} & (0\neq x\in(-1,1)), \\[2ex] \dfrac{\ln(|x|)}{x+1} & (x\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)), \end{cases}$$

következésképpen (vö. előző félév)

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1-0}\frac{\ln(-x)}{x+1} = \lim_{y\to 1+0}\frac{\ln(y)}{1-y} = -\lim_{y\to 1+0}\frac{\ln(y)}{y-1} = -1$$

és

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1+0}\frac{-\ln(-x)}{x+1} = -\lim_{x\to -1+0}\frac{\ln(-x)}{x+1} = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\nexists\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}.$$

(d) Bármely $0\neq x\in\mathbb{R}$ számra

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \frac{\sqrt{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}}}{x} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n!}}}{x} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{n!}} =$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{n!}} \longrightarrow \pm\sqrt{1+0} = \pm 1 \qquad (x\to 0\pm 0).$$

Következésképpen

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

2. gyakorlat (2025. szeptember 15-16.)

Szükséges ismeretek.

- Mi a belső pont definíciója?
- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban?
- Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?
- Adjon példát olyan függvényre, ami az $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, de nem differenciálható!
- Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Fogalmazza meg a hatványsorok összegfüggvényének deriválhatóságáról szóló tételt!
- Mi az exp, sin, cos függvények derivált függvénye?
- Elemi függvények deriváltjai (vö. deriválási táblázat).

Emlékeztető. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ esetén

$$f \in \mathfrak{D}[a] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzések.

1. Ha $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor
$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

2. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt deriválhatónak mondunk ($f \in \mathfrak{D}$), ha bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$.

3. Az
$$f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. az} \qquad f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényre $f \notin \mathfrak{D}[0]$ (vö. 1. gyakorlat).

4. Az
$$f(x) := \sqrt{x} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$
függvény esetében nincs értelme a $0 \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriválhatóságról beszélni, hiszen $0 \notin \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

5. Az
$$f(x) := \sqrt{\ln(\sin(x))} \qquad (x \in \mathbb{R}: \ \ln(\sin(x)) \geq 0)$$
függvény esetében nincs értelme semilyen $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriválhatóságról beszélni, hiszen
$$\mathcal{D}_f = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
(és $f(x) = 0$ $(x \in \mathcal{D}_f)$), azaz $\operatorname{int}(\mathcal{D}_f) = \emptyset$.

Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy az
$$f(x) := \sqrt{x^2-1} \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R})$$
függvény deriválható minden $a \in (1, +\infty)$ pontban, és számítsuk ki az $f'(a)$ értéket!

Útm. Legyen $a \in (1, +\infty) = \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor minden olyan $0 \neq h \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $a + h \in [1, +\infty) = \mathcal{D}_f$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{(a+h)^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{h} = \\ &= \frac{\sqrt{(a+h)^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \\ &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h\left[\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}\right]} = \frac{2ah+h^2}{h\left[\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}\right]} = \\ &= \frac{2a+h}{\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}} \longrightarrow \frac{2a}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \qquad (h\to 0),\end{aligned}$$

azaz

$$f\in\mathfrak{D}[a] \qquad \text{és} \qquad f'(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Emlékeztető. Legyen $a\in\mathbb{R}$, továbbá $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ha

- $f\in\mathfrak{D}[a]$, akkor tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ esetén $cf\in\mathfrak{D}[a]$ és $(cf)'(a)=cf'(a)$;
- $f,g\in\mathfrak{D}[a]$, akkor $f\pm g\in\mathfrak{D}[a]$ és $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$;
- $f,g\in\mathfrak{D}[a]$, akkor $f\cdot g\in\mathfrak{D}[a]$ és $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$;
- $g\in\mathfrak{D}[a]$: $g(a)\neq 0$, akkor $\frac{1}{g}\in\mathfrak{D}[a]$ és
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2};$$
- $f,g\in\mathfrak{D}[a]$: $g(a)\neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}\in\mathfrak{D}[a]$ és
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2};$$
- $g\in\mathfrak{D}[a]$ és $f\in\mathfrak{D}[g(a)]$, akkor $f\circ g\in\mathfrak{D}[a]$ és
$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Feladat. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\text{(a)} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}.$$

Útm.

1. Ha
$$f(x) := \sqrt[4]{x} \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}),$$
akkor f deriválhatóságának következtében
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(16+h)-f(16)}{h} = f'(16) = \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}.$$

2. Mivel
$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ezért az
$$f(x) := \frac{\sin(x-1)}{x+2} \qquad (-2 \neq x \in \mathbb{R})$$
deriválható függvényre
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\sin(x-1)}{x+2}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) =$$
$$= \left.\frac{(x+2)\cos(x-1)-\sin(x-1)}{(x+2)^2}\right|_{x=1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Definíció. Ha
$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad H := \{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f : \ f \in \mathfrak{D}[x]\} \neq \emptyset,$$
akkor a
$$H \ni x \mapsto f'(x)$$
függvényt az f **deriváltfüggvény**ének vagy **differenciálhányados-függvény**ének nevezzük és az f' szimbólummal jelöljük.

Feladat. Tanulmányozzuk a deriválási táblázatot, majd számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

1. $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad (0 < x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R});$
4. $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \quad (0 < a, x \in \mathbb{R});$
5. $f(x) := x^2 \cdot \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R});$
6. $f(x) := \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \quad (x \in \mathbb{R});$
7. $f(x) := (5x^2 + 3x)^{2025} \quad (x \in \mathbb{R});$
8. $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (0 < x \in \mathbb{R});$
9. $f(x) := \sin\left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 3}\right) \quad (-3 < x \in \mathbb{R});$
10. $f \in \{\sin^2, \cos^2\};$
11. $f(x) := \sin^2\left(\ln\left(\sqrt{1 + \cos^2(x)}\right) + 1\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 5.$$

2. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ számra
$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{\sqrt{x^2 \cdot x}}} = \sqrt{x\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt{\sqrt[4]{x^4 \cdot x^3}} = \sqrt[8]{x^7} = x^{7/8},$$
ezért
$$f'(x) = \frac{7}{8} \cdot x^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}.$$

3. Világos, hogy minden $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

4. Tetszőleges $0 < a, x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = ax^{a-1} + a^x \cdot \ln(x) + a + \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}.$$

5. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x).$$

6. Minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+x+5) - (2x+1)(x^3+2)}{(x^2+x+5)^2} = \frac{x^4+2x^3+15x^2-4x-2}{(x^2+x+5)^2}.$$

7. Minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f'(x) = 2025 \cdot (5x^2+3x)^{2024} \cdot (10x+3).$$

8. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

9. Bármely $-3 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{2x(x+3) - (x^2+1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \cos\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}.$$

10. Minden $x \in \mathbb{R}$ számra, ha

- $f(x) := \sin^2(x)$, akkor

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x);$$

- $f(x) := \cos^2(x)$, akkor

$$f'(x) = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x).$$

Kiss Richárd megjegyzése:

$$\cos^2 = 1 - \sin^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad f'(x) = 0 - \frac{d}{dx}\sin^2(x) = -\sin(2x).$$

11. A fentiek következtében $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right)+2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right)+1\right) = \\ &= \sin\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right)+2\right)\cdot\frac{-\sin(2x)}{2(1+\cos^2(x))}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvények, $\mathcal{D} := \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, továbbá $f(x) > 0$ $(x \in \mathcal{D})$, akkor az

$$f^g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad f^g(x) := f(x)^{g(x)} := e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

függvény is deriválható és deriváltjára

$$(f^g)'(x) = f(x)^{g(x)}\cdot\left\{g'(x)\cdot\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} \qquad (x \in \mathcal{D}) \tag{1}$$

teljesül.

Példa. Ha

$$h(x) := x^x = e^{x\ln(x)} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$h'(x) = x^x\{\ln(x) + 1\} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Az (1) formulát **logaritmikus deriválás**nak hívják. Konkrét számolások során sok esetben célszerű az alábbi módon eljárni:

1. lépés. Mivel minden $x \in \mathcal{D}$ esetén

$$h(x) := f(x)^{g(x)} > 0,$$

képezzük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln(h(x)) = g(x)\cdot\ln(f(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

2. lépés. Innen mindkét oldalt deriválva

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x)\cdot\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

adódik.

3. lépés. A derivált tehát

$$h'(x) = h(x) \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \qquad (x \in \mathcal{D}),$$

alakú, ahonnan ismét azt kapjuk, hogy

$$\left(f^g\right)'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

A logaritmikus deriválás más esetben is igen hasznos segédeszköz. Így van ez az

$$f(x) := K \frac{x^\alpha (ax+b)^\beta}{(cx+d)^\gamma}$$

$$\left(x \in \left(\max\left\{ -\frac{b}{a}, -\frac{d}{c} \right\}, +\infty \right);\ 0 < \alpha, \beta, a, b, c, d, K \in \mathbb{R} \right)$$

deriválható függvény esetében is:

$$\ln(f(x)) \equiv \ln(K) + \alpha \ln(x) + \beta \ln(ax+b) - \gamma \ln(cx+d),$$

így mindkét oldal deriváltját véve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \frac{\alpha}{x} + \frac{a\beta}{ax+b} - \frac{c\gamma}{cx+d},$$

azaz

$$\begin{aligned}
f'(x) &\equiv K \cdot \frac{x^\alpha (ax+b)^\beta}{(cx+d)^\gamma} \cdot \left\{ \frac{\alpha}{x} + \frac{a\beta}{ax+b} - \frac{c\gamma}{cx+d} \right\} \equiv \\
&\equiv K \cdot \frac{x^\alpha (ax+b)^\beta}{(cx+d)^\gamma} \cdot \frac{\alpha(ax+b)(cx+d) + a\beta x(cx+d) - c\gamma x(ax+b)}{x(ax+b)(cx+d)} \equiv \\
&\equiv K \cdot \frac{x^{\alpha-1} (ax+b)^{\beta-1}}{(cx+d)^{\gamma+1}} \cdot \{\alpha(ax+b)(cx+d) + a\beta x(cx+d) - c\gamma x(ax+b)\} \equiv \\
&\equiv K \cdot \frac{x^{\alpha-1} (ax+b)^{\beta-1}}{(cx+d)^{\gamma+1}} \cdot \left\{ ac(\alpha+\beta-\gamma)x^2 + [\alpha(ad+bc) + a\beta d - c\gamma b)x + \alpha bd \right\}.
\end{aligned}$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket!

1. $f(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x} \quad (0 < x \in \mathbb{R});$ 2. $f(x) := (\ln(x))^{x+1} \quad (1 < x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Mivel $f = \varphi^{\psi}$, ahol

$$\varphi(x) := 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \psi(x) := 1 - x \quad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi = (0, +\infty) \cap \mathbb{R} = (0, +\infty) \neq \emptyset,$$

ezért f deriválható. Lévén, hogy

$$\ln(f(x)) = (1-x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (1-x)\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x-1)\cdot\frac{\frac{1}{x}}{x+1} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x}\cdot\left\{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{(x-1)}{x(x+1)}\right\} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel $f = \varphi^{\psi}$, ahol

$$\varphi(x) := \ln(x) > 0 \quad (1 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \psi(x) := x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi = (1, +\infty) \cap \mathbb{R} = (1, +\infty) \neq \emptyset,$$

ezért f deriválható. Lévén, hogy

$$\ln(f(x)) = (x+1)\ln(\ln(x)) \qquad (1 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\ln(x)) + (x+1) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \qquad (1 < x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

$$f'(x) = (\ln(x))^{x+1} \cdot \left\{ \ln(\ln(x)) + \frac{x+1}{x \cdot \ln(x)} \right\} \qquad (1 < x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Hol deriválható az

$$f(x) := \frac{1}{|x|+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény? Ahol deriválható, ott számítsuk ki a deriváltat!

Útm. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & (x < 0), \\ 1 & (x = 0), \\ \dfrac{1}{x+1} & (x > 0), \end{cases}$$

ezért, ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)^2} & (a < 0), \\ \dfrac{-1}{(a+1)^2} & (a > 0). \end{cases}$$

Ha pedig $a := 0$, akkor

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{|x|+1} - 1\right\} = \frac{1-|x|-1}{x(|x|+1)} = \frac{-|x|}{x(|x|+1)} = \frac{-|x|}{x} \cdot \frac{1}{|x|+1} = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{1}{|x|+1}.$$

Mivel

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|+1} = 1 \qquad \text{és} \qquad \nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x),$$

ezért

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \qquad \text{azaz} \qquad f \notin \mathfrak{D}[0].$$

Házi feladat. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

1. $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$
2. $f(x) := \dfrac{e^x}{e^x+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$
3. $f(x) := 2^{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}),$
4. $f(x) := \dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$
5. $f(x) := 2\,\mathrm{tg}(x) - 3\,\mathrm{ctg}(x) \quad \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\right),$
6. $f(x) := (2+\sin(x))^{\cos(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. $f'(x) := \dfrac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} \quad (0 < x \in \mathbb{R});$
2. $f'(x) := \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $f'(x) := 2^{x^3} \cdot \ln(2) \cdot 3x^2 = 2^{x^3} \cdot \ln(8) \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R});$
4. $f'(x) := -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad (0 < x \in \mathbb{R});$
5. $f'(x) := \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{3}{\sin^2(x)} \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right);$
6. $f'(x) := (2+\sin(x))^{\cos(x)} \left\{-\sin(x)\ln(2+\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{2+\sin(x)}\right\} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := \sin(\sqrt{x^3+1})$,

(b) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}}$,

(c) $f(x) := \ln(e^{-x} \cdot \sin(x))$,

(d) $f(x) := \sqrt{1+\sin^2(x)} \cdot \cos(x)$,

(e) $f(x) := e^x \cdot \sin(x)$,

(f) $f(x) := x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$,

(g) $f(x) := (x+2)^8 \cdot (x+3)^6$,

(h) $f(x) := \sin^3(x) \cdot \cos(x)$,

(i) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

(j) $f(x) := \dfrac{\sin(2x^2)}{3-\cos(2x)}$,

(k) $f(x) := \ln(x^2 \cdot e^x)$,

(l) $f(x) := e^{\cos(x)} + \cos(e^x)$,

(m) $f(x) := \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}}$,

(n) $f(x) := \ln(\cos(x))$,

(o) $f(x) := x^x$,

(p) $f(x) := \left(1+e^{3x+1}\right)^{x^2+1}$,

(q) $f(x) := (\sin(x))^{\cos(x)}$,

(r) $f(x) := (\mathrm{tg}(x))^x$.

Útm.

(a) $f'(x) = \dfrac{3x^2\cos(\sqrt{x^3+1})}{2\sqrt{x^3+1}}$;

(b) $f'(x) = \dfrac{3(x-1)(1+x)^2}{2x\sqrt{x^3}}$;

(c) $f'(x) = \mathrm{ctg}(x) - 1$;

(d) $f'(x) = -\frac{4\sin^3(x)}{\sqrt{6-2\cos(2x)}}$;

(e) $f'(x) = e^x(\cos(x)+\sin(x))$;

(f) $f'(x) = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$;

(g) $f'(x) = 2(x+2)^7 \cdot (x+3)^5 \cdot (7x+18)$;

(h) $f'(x) = (1+2\cos(2x)) \cdot \sin^2(x)$;

(i) $f'(x) = -\dfrac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$;

(j) $f'(x) = -\dfrac{2\left(2x(-3+\cos(2x))\cos(2x^2) + \sin(x)\cdot\sin(2x^2)\right)}{(3-\cos(2x))^2}$;

(k) $f'(x) = \dfrac{2+x}{x}$;

(l) $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)} - e^x\sin(e^x)$;

(m) $f'(x) = \sqrt{7}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}-1}\left(1 + \frac{2}{x^3}\right)$;

(n) $f'(x) = -\operatorname{tg}(x)$;

(o) $f'(x) = x^x\,(1 + \ln(x))$;

(p) $f'(x) = \left(1 + e^{3x+1}\right)^{x^2+1}\left\{\frac{3e^{3x+1}(1+x^2)}{1+e^{3x+1}} + 2x\ln\left(1 + e^{3x+1}\right)\right\}$;

(q) $f'(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}\left\{-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right\}$;

(r) $f'(x) = (\operatorname{tg}(x))^x \cdot \left\{\ln(\operatorname{tg}(x)) + \frac{x}{\cos^2(x\operatorname{tg}(x))}\right\}$.

Gyakorló feladatok. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsuk ki a deriváltat!

(a) $f(x) := |3x - 1| \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := |\ln(1 + x)| \quad (-1 < x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \ln(|x|) \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$,

(e) $f(x) := x^2(\operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(|x - 1|)) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & (x \geq 1/3), \\ 1 - 3x & (x < 1/3), \end{cases}$$
ezért, ha $1/3 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és
$$f'(a) = \begin{cases} 3 & (a \geq 1/3), \\ -3 & (a < 1/3). \end{cases}$$
Ha pedig $a := 1/3$, akkor
$$\frac{f(x) - f(1/3)}{x - 1/3} = \frac{|3x - 1|}{x - 1/3} = 3 \cdot \frac{|3x - 1|}{3x - 1} = 3 \cdot \operatorname{sgn}(3x - 1).$$
Mivel
$$\nexists \lim_{x \to 1/3} \operatorname{sgn}(3x - 1),$$
ezért
$$\nexists \lim_{x \to 1/3} \frac{f(x) - f(1/3)}{x - 1/3}, \qquad \text{azaz} \qquad f \notin \mathfrak{D}[1/3].$$

2. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x) = \begin{cases} e^x & (x \geq 0), \\ e^{-x} & (x < 0), \end{cases}$$

ezért, ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} e^x & (x \geq 0), \\ \\ -e^{-x} & (x < 0). \end{cases}$$

Ha pedig $a := 0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{|x|} - 1}{x - 0} = \frac{e^{|x|} - 1}{x}.$$

Mivel

$$\nexists \lim_{x \to \pm 0} \frac{e^{|x|} - 1}{x} = \pm 1,$$

ezért

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \qquad \text{azaz} \qquad f \notin \mathfrak{D}[0].$$

3. Mivel tetszőleges $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x) & (x \geq 0), \\ \\ -\ln(1 + x) & (-1 < x < 0), \end{cases}$$

ezért, ha $0 \neq a \in (-1, +\infty)$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x} & (x \geq 0), \\ \\ \dfrac{1}{1 + x} & (-1 < x < 0). \end{cases}$$

Ha pedig $a := 0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|\ln(1 + x)|}{x - 0} = \frac{|\ln(1 + x)|}{x}.$$

Mivel

$$\nexists \lim_{x \to \pm 0} \frac{|\ln(1 + x)|}{x} = \pm 1,$$

ezért

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \qquad \text{azaz} \qquad f \notin \mathfrak{D}[0].$$

4. Mivel tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & (x > 0), \\ \\ \ln(-x) & (x < 0), \end{cases}$$

ezért, ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (a > 0), \\ \frac{1}{a} & (a < 0). \end{cases}$$

5. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 2x^2 & (0 < x < 1), \\ 1 & (x = 1), \\ 2x^2 & (1 < x), \end{cases}$$

ezért, ha $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} 0 & (a < 0), \\ 4a & (0 < a < 1), \\ 4a & (1 < a). \end{cases}$$

Mivel $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$, ezért $f \notin \mathfrak{C}[a]$, így $f \notin \mathfrak{D}[a]$. Mivel

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \cdot (\operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(|x-1|)) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0),$$

ezért $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 0$.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := x^3 - 2x^2 + 4x - 5$, (b) $f(x) := x + 2\sqrt{x}$,

(c) $f(x) := x - \operatorname{tg}(x)$, (d) $f(x) := 2\ln(x) - x$,

(e) $f(x) := \dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + x$, (f) $f(x) := \dfrac{10}{x^3}$,

(g) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$, (h) $f(x) := x - \sin(x)$,

(i) $f(x) := e^x + \dfrac{1}{x}$, (j) $f(x) := 3a^x - \cos(x)$.

Útm.

(a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$, (b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, (c) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2(x)}$,

(d) $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1$, (e) $f'(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, (f) $f'(x) = -\dfrac{30}{x^4}$,

(g) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}$, (h) $f'(x) = 1 - \cos(x)$, (i) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2}$,

(j) $f'(x) = 3a^x \ln(a) + \sin(x)$.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := x^2 \sin(x)$, (b) $f(x) := x^2 \operatorname{tg}(x)$,

(c) $f(x) := \sqrt{x}\cos(x)$, (d) $f(x) := \ln(x) \cdot e^x$,

(e) $f(x) := \operatorname{ctg}(x) \cdot \sin(x)$, (f) $f(x) := (1 + x^3) \cdot e^x$.

Útm.

(a) $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$, (b) $f'(x) = 2x\,\mathrm{tg}(x) + \dfrac{x^2}{\cos^2(x)}$, (c) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin(x)$,

(d) $f'(x) = \dfrac{e^x}{x} + \ln(x)\cdot e^x$, (e) $f'(x) = -\sin(x)$, (f) $f'(x) = 3x^2\cdot e^x + (1+x^3)\cdot e^x$.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^2-x-2}$, (b) $f(x) := \dfrac{2x^4}{1-x^2}$,

(c) $f(x) := \dfrac{1-x}{1+x}$, (d) $f(x) := \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Útm.

(a) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-x-2)-(2x-1)(x^2+3)}{(x^2-x-2)^2}$, (b) $f'(x) = \dfrac{8x^3(1-x^2)+4x^5}{(1-x^2)^2}$,

(c) $f'(x) = \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$, (d) $f'(x) = \dfrac{2x\ln(x)-x}{\ln^2(x)}$.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := (3x^2+4x+1)^5$, (b) $f(x) := (1+\sqrt[3]{x})^3$, (c) $f(x) := \mathrm{tg}\left(x^3\right)$,

(d) $f(x) := \sin\left(2^x\right)$, (e) $f(x) := \sqrt{x^2+1}$, (f) $f(x) := \exp\left(x^4\right)$,

(g) $f(x) := \mathrm{tg}\left((x^2+x)^3\right)$, (h) $f(x) := \cos\left(e^{2x+3}\right)$, (i) $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

(j) $f(x) := \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$.

Útm.

(a) $f'(x) = 5(3x^2+4x+1)^4(6x+4)$, (b) $f'(x) = 3(1+\sqrt[3]{x})^2\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, (c) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$,

(d) $f'(x) = \cos(2^x)\cdot 2^x\cdot\ln(2)$, (e) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, (f) $f'(x) = 4x^3\exp\left(x^4\right)$,

(g) $f'(x) = \dfrac{3(2x+1)(x^2+x)^2}{\cos^2((x^2+x)^3)}$, (h) $f'(x) = -2\sin\left(e^{2x+3}\right)e^{2x+3}$, (i) $f'(x) = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$,

(j) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+3}}}{3\sqrt[3]{[1+x\sqrt{x+3}]^2}}$.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$, (b) $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$,

(c) $f(x) := \sin^3(x)\cdot\cos(x)$, (d) $f(x) := \ln(\cos(x))$,

(e) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, (f) $f(x) := e^{4x+3}$,

(g) $f(x) := 3^{x^2}$, (h) $f(x) := \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$,

(i) $f(x) := \sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)$, (j) $f(x) := \sqrt{x^2+1}-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$,

(k) $f(x) := \ln\left(e^x\cdot\cos(x)+e^{-x}\cdot\sin(x)\right)$, (l) $f(x) := \cos(x)\cdot\sqrt{1+\sin^2(x)}$.

Útm.

(a) $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2\left\{2\sqrt{x^3}-(x+1)\sqrt{x}\right\}}{2x^3}$,

(b) $f'(x) = \dfrac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$,

(c) $f'(x) = (1+2\cos(2x))\sin^2(x)$,

(d) $f'(x) = -\operatorname{tg}(x)$,

(e) $f'(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$,

(f) $f'(x) = 4e^{4x+3}$,

(g) $f'(x) = x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln(9)$,

(h) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$,

(i) $f'(x) = -\dfrac{2^{x-1}\cdot\ln(2)\cdot\cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)}{\sqrt{1-2^x}}$,

(j) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\frac{-1}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}{\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$,

(k) $f'(x) = \dfrac{(1+e^{2x})(\cos(x)-\sin(x))}{e^{2x}\cos(x)+\sin(x)}$,

(l) $f'(x) = \dfrac{-2\sin^3(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

1. $f(x) := e^{ax}\dfrac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad /a^2+b^2>0/,$

2. $f(x) := \dfrac{1}{1-1/a}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{\sqrt{1/a}}{1-1/a}\ln\left(\dfrac{1+x\sqrt{1/a}}{1-x\sqrt{1/a}}\right) \qquad /0<a\in\mathbb{R}\backslash\{1\}/,$

3. $f(x) := (1+nx^m)(1+mx^n) \qquad /m,n\in\mathbb{N}/,$

4. $f(x) := \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \qquad /a\in\mathbb{R}/,$

5. $f(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right) \qquad /0<a,b\in\mathbb{R}/,$

6. $f(x) := \ln\left(\dfrac{b+a\cos(x)+\sqrt{b^2-a^2}\sin(x)}{a+b\cos(x)}\right) \qquad /a,b\in\mathbb{R}:\ 0\le|a|<|b|/,$

7. $f(x) := \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \qquad /a,b\in\mathbb{R}:\ a>b\ge0/,$

8. $f(x) := \ln\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) + \dfrac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{b}\right) \qquad /0\ne b\in\mathbb{R}/.$

Útm.

1. $f'(x) = \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx),$

2. $f'(x) = \dfrac{2a}{(a-x^2)(1-x^2)},$

3. $f'(x) = mn\left[x^{m-1}+(m+n)x^{m+n-1}+x^{n-1}\right],$

4. $f'(x) = \sqrt{x^2+a^2},$

5. $f'(x) = \dfrac{1}{a-bx^2},$

6. $f'(x) = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos(x)},$

7. $f'(x) = \dfrac{1}{a+b\cos(x)},$

8. $f'(x) = \dfrac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}.$

Gyakorló feladatok.

1. Számítsuk ki az
$$f(x) := \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{x^2} \qquad (x \in (0, \pi))$$
függvény deriváltját!

2. Számítsuk ki az
$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x \in (-1, 1))$$
függvény deriváltját az $a := \sqrt{2}$ pontban!

3. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x + 1 \qquad (x \in (-1, 1))$$
függvény deriváltját az $a := 0$ pontban!

4. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} \qquad (x \in (0, \pi))$$
függvény deriváltját!

5. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right) + \frac{\sin(x)}{2\cos^2(x)} \qquad (x \in (-\pi/2, \pi/2))$$
függvény deriváltját!

6. Számítsuk ki az
$$f(x) := \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right) \qquad (x \in (-1, 1))$$
függvény deriváltját!

7. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \qquad (x \in (-1, 1))$$
függvény deriváltját!

Útm.

1. Mivel tetszőleges $x \in (0, \pi)$ esetén
$$\frac{\sin(x)}{x} > 0,$$
ezért a
$$h(x) := \ln(f(x)) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \qquad (x \in (0, \pi))$$
függvényre
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{x \cdot \cos(x) - 1 \cdot \sin(x)}{x^2} = \\ &= 2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \frac{x}{\sin(x)} \cdot (x \cdot \cos(x) - \sin(x)) = \\ &= 2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \cdot (x \cdot \operatorname{ctg}(x) - 1) \qquad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$
Következésképpen
$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left\{2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \cdot (x \cdot \operatorname{ctg}(x) - 1)\right\} = \\ &= \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{x^2} \cdot \left\{2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \cdot (x \cdot \operatorname{ctg}(x) - 1)\right\} \qquad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$

2. Mivel bármely $x \in (-1, 1)$ esetén
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \frac{x \ln(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x^2(1 - \ln(x)) - 1}{x\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \\ &= \frac{x \ln(x)}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}, \end{aligned}$$
ezért
$$f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(2).$$

3. Mivel bármely $x \in (-1, 1)$ esetén
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + x}{1 - x} \cdot \frac{-(1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} + 2 = \\ &= \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} - \frac{1}{1 - x^2} + 2, \end{aligned}$$
ezért
$$f'(0) = 1 + 0 - 1 + 2 = 2.$$

4. Bármely $x \in (0, \pi)$ esetén
$$f'(x) = \frac{1}{\sin^3(x)}.$$

5. Mutassuk meg, hogy
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^3(x)} \qquad (x \in (-\pi/2, \pi/2)).$$
teljesül!

6. Mutassuk meg, hogy

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^4} \qquad (x \in (-1,1))$$

teljesül!

7. Mutassuk meg, hogy fennáll a következő egyenlőség!

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^4} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Közazdasági alkalmazások

Térjünk most egy kicsit vissza az

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

összefüggéshez. Ez a határérték definíciója alapján nem más, mint

$$\lim_{h\to 0} \left(f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = 0 \, .$$

Erre „pongyolán” fogalmazva azt mondjuk, hogy, ha

h elég közel van a 0-hoz, akkor az

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

különbség kicsi, azaz

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \, .$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy ha $a \cdot f(a) \neq 0$, akkor

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{f(a)} \approx \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{f(a)} \cdot f'(a) \, ,$$

azaz ha pl. f költségfüggvény, akkor azt mondhatjuk, hogy az

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{f(a)}$$

mennyiség, azaz egy a áru költségének relatív megválozása közelítőleg az

$$\frac{h}{a}$$

relatív árváltozással arányos. Az arányossági tényezőt a költség ár**rugalmasság**ának, ill. ár**elaszticitás**ának nevezzük. Látható, hogy mind a költség relatív megváltozása, mind pedig a relatív árváltozás „dimenziótlan” mennyiség[1], ezért közgazdászok előszeretettel használják az elaszticitást a derivált helyett, ugyanis pl. ha árról van szó, akkor különböző termékek esetében a termékek árának 1 Ft-os növekedése lehet jelentős is meg semmitmondó is.

Az elaszticitás (rugalmasság) fogalmát tehát a következő módon értelmezzük:

Definíció. Tegyük fel, hogy $f \in \mathfrak{D}[a]$: $f(a) \neq 0$. Ekkor az f függvény a pontbeli **elaszticitás**a az

$$E_f(a) := \frac{a}{f(a)} \cdot f'(a)$$

szám.

Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{26}\left(9x^2 - x^3 - 28\right) \qquad (x \in (0, +\infty))$$

költségfüggvény, ahol x az előállított mennyiség, $f(x)$ pedig a költség! Határozzuk meg a hozzá tartozó elaszticitásfüggvény értékét az $a = 5$ helyen!

Útm.

$$f(5) = \frac{9 \cdot 5^2 - 5^3 - 28}{26} = \frac{9 \cdot 25 - 5 \cdot 25 - 28}{26} = \frac{72}{26} \neq 0,$$

így

$$E_f(5) = \frac{5}{f(5)} \cdot f'(5) = \frac{5 \cdot 26}{72} \cdot \frac{18 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2}{26} = \frac{5}{f(5)} \cdot f'(5) = \frac{5 \cdot 26}{72} \cdot \frac{18 \cdot 5 - 15 \cdot 5}{26} = \frac{75}{72}.$$

[1] Ez azt jelenti, hogy pl. a relatív árváltozás számlálójának is meg nevezőjének is ugyanúgy [Ft] a dimenziója, így magának a relatív árváltozásnask nincs dimenziója.

Tétel. Ha $f, g \in \mathfrak{D}[a]$: $f(a) \cdot g(a) \neq 0$, akkor

1. $E_{f+g}(a) = \dfrac{f(a) \cdot E_f(a) + g(a) \cdot E_g(a)}{f(a) + g(a)}$;
2. $E_{f \cdot g}(a) = E_f(a) + E_g(a)$;
3. $E_{\frac{f}{g}}(a) = E_f(a) - E_g(a)$;
4. ha $1 \neq f(a) > 0$, akkor $E_{\ln \circ f}(a) = \dfrac{E_f(a)}{\ln(f(a))}$.

Biz.

1. $E_{f+g}(a) = \dfrac{a}{(f+g)(a)}(f+g)'(a) = \dfrac{a}{f(a)+g(a)}(f'(a)+g'(a)) =$

   $= \dfrac{f(a)\frac{a}{f(a)}f'(a) + g(a)\frac{a}{g(a)}g'(a)}{f(a)+g(a)} = \dfrac{f(a) \cdot E_f(a) + g(a) \cdot E_g(a)}{f(a)+g(a)}$;

2. $E_{f \cdot g}(a) = \dfrac{a}{(f \cdot g)(a)}(f \cdot g)'(a) = \dfrac{a}{f(a)g(a)}(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) =$

   $= \dfrac{a}{f(a)}f'(a) + \dfrac{a}{g(a)}g'(a) = E_f(a) + E_g(a)$;

3. $E_{\frac{f}{g}}(a) = \dfrac{a}{(f/g)(a)}(f/g)'(a) = \dfrac{ag(a)}{f(a)} \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \dfrac{a}{f(a)}f'(a) - \dfrac{a}{g(a)}g'(a) =$ $E_f(a) - E_g(a)$;

4. ha $1 \neq f(a) > 0$, akkor

$$E_{\ln \circ f}(a)) = \frac{a}{\ln(f(a))}(\ln \circ f)'(a) = \frac{a}{\ln(f(a))} \frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{1}{\ln(f(a))} \frac{a}{f(a)} f'(a) = \frac{E_f(a)}{\ln(f(a))}.$$

Feladatok.

1. Igazoljuk, hogy ha $f \in D[a]$: $a \cdot f'(a) \neq 0$, akkor fennáll a
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{f(a)} : \frac{h}{a}\right) = E_f(a)$$
egyenlőség! Mutassuk meg azt is, hogy ha a-nak h-val való megváltozása α%-os, akkor az $f(a)$-nak $f(a+h)$-ra való megváltozása közelítőleg $\alpha \cdot E_f(a)$%-os! **Igazoljuk** azt is, hogy ha f lineáris függvény, akkor a "közelítőleg egyenlő" helyett pontos egyenlőség teljesül!

2. Lássuk be, hogy ha egy f függvény grafikonját az x-tengelyre tükrözzük, akkor a tükrözött grafikonnak megfelelő $(-f)$ függvény elaszticitása megegyezik f elaszticitásával!

3. Milyen függvényre igaz az
$$f' = E_f$$
egyenlőség?

4. Legyen $f, g \in D[a]$: $f(a) = g(a) \neq 0$. Mi annak a feltétele, hogy teljesüljön az
$$E_f(a) = E_g(a)$$
egyenlőség?

5. Valamely árucikk iránti keresletet a p árától függően az
$$f(p) := \frac{100}{p+3} \qquad (p \in (0, +\infty))$$
függvény írja le. Állapítsuk meg, hogy hány %-kal növekszik a kereslet, ha a cikk árát $p = 5$-ről 1%-kal csökkentjük!

Útm.

1. Az elaszticitás definícióját megelőző megjegyzés alapján nem nehéz belátni a határérték-reláció teljesülését.
Ha a-nak h-val való megváltozása α%-os, akkor
$$\frac{100(a+h-a)}{a} = \alpha.$$

Az iménti határértékreláció alapján a függvényértékek és a független változó százalékos arányára

$$\frac{100[f(a+h)-f(a)]}{f(a)} : \frac{100(a+h-a)}{a} = \frac{100[f(a+h)-f(a)]}{\alpha \cdot f(a)} \longrightarrow E_f(a) \quad (h \to 0)\,,$$

teljesül, így valóban fennáll a közelítő

$$\frac{100[f(a+h)-f(a)]}{f(a)} \approx \alpha \cdot E_f(a)$$

egyenlőség. Ha f lineáris, azaz $f(x) = mx + b$ ($x \in \mathcal{D}_f$), akkor

$$\frac{100[f(a+h)-f(a)]}{\alpha \cdot f(a)} = \frac{100[(m(a+h)+b)-(ma+b)]}{ma+b} : \frac{100(a+h-a)}{a} =$$

$$= \frac{ma}{ma+b} = \frac{a}{ma+b} \cdot m = E_f(a).$$

2. Bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \neq 0$ esetén

$$E_{-f}(x) = \frac{x}{-f(x)}(-f'(x)) = \frac{x}{f(x)}f'(x) = E_f(x).$$

3. Tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x) \neq 0$ esetén

$$E_f(x) = f'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = x.$$

4. Világos, hogy

$$E_f(a) = E_g(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a}{f(a)}f'(a) = \frac{a}{g(a)}g'(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(a) = g'(a),$$

azaz f és g grafikonja a-ban érintkezik (közös érintőjük van).

5. Látható, hogy

$$E_f(p) = -\frac{p}{p+3} \qquad (p \in (0, +\infty)),$$

így

$$\frac{100 \cdot [f(5-0.05)-f(5)]}{f(5)} \approx 1 \cdot \left(-\frac{5}{5+3}\right) = -\frac{5}{8} \approx -0.6,$$

azaz a kereslet kb. $0,6$%-kal növekszik.

További feladatok.

1. Igazoljuk, hogy ha valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ill. $a \in \mathbb{R}$ pont esetében $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor fennáll a
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$
egyenlőség! Igaz-e az állítás megfordítása?

2. Az $\ln'(1) = 1$ egyenlőség alapján vezessük le a
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
egyenlőséget!

Útm.

1. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor a $h \to 0$ határátmenetben
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} &= \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot f'(a) + \frac{1}{2} \cdot f'(a).\end{aligned}$$

2. A logaritmusfüggvény folytonosságát felhasználva azt kapjuk, hogy ha
$$\begin{aligned}1 &= \ln'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)\end{aligned}$$
ahonnan mindekét oldal exponenciálisát képezve
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$
adódik.

Emlékeztető. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Ekkor

$$f'(x) = 0 \quad (x \in I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c \in \mathbb{R}: \; f(x) = c \quad (x \in I),$$

ill.

$$f'(x) = g'(x) \quad (x \in I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c \in \mathbb{R}: \; f(x) = g(x) + c \quad (x \in I)$$

Házi feladat. Legyen $\alpha, \tau, \xi \in \mathbb{R}$, ill. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor igaz az

$$(f' = \alpha f \quad \wedge \quad f(\tau) = \xi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = \xi e^{\alpha(x-\tau)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ekvivalencia!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \xi e^{\alpha(x-\tau)},$$

akkor

$$f(\tau) = \xi e^0 = \xi,$$

továbbá

$$f'(x) = \alpha \xi e^{\alpha(x-\tau)} = \alpha f(x).$$

2. lépés. Tegyük fel, hogy

$$f' = \alpha f \qquad \text{és} \qquad f(\tau) = \xi.$$

Ekkor a

$$\varphi(x) := f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $\varphi \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} - \alpha \cdot f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} = \alpha \cdot f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} - \alpha \cdot f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} = 0.$$

Következésképpen alkalmas $c \in \mathbb{R}$, ill. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$, ahonnan

$$c = \varphi(\tau) = f(\tau) \cdot e^0 = f(\tau) = \xi,$$

és így

$$f(x) = \xi e^{\alpha(x-\tau)}$$

következik.

További feladat. Mutassuk meg, hogy fennáll az

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1))$$

egyenlőség!

Útm.

- Világos, hogy $x = 0$ esetén a sor konvergens. Legyen $0 \neq x \in (-1,1)$. Ekkor

$$\lim \left(\left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \right| \right) = |x|^2 \lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) = |x|^2 < 1,$$

  így a hányadoskritérium következtében a sor minden $x \in (-1,1)$ esetén konvergens.

- Legyen

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

  Ekkor bármely $x \in (-1,1)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2n+1} x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-(-x^2)} = 0.$$

  Így f állandófüggvény, azaz tetszőleges $x \in (-1,1)$ számra $f(x) = f(0) = 0$, ahonnan

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

  következik.

3. gyakorlat (2025. szeptember 22-23.)

Szükséges ismeretek.

- Írja fel az ln, tg, a^x $(a > 0,\ x \in \mathbb{R})$ függvények derivált függvényét!
- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra lineáris közelítéssel?
- Mi az érintő definíciója?
- Írja le az inverz függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Definiálja a jobb oldali derivált fogalmát!
- Definiálja a bal oldali derivált fogalmát!
- Mikor mondjuk, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban?
- Fogalmazza meg a Rolle-féle középértéktételt!
- Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt!
- Fogalmazza meg a Cauchy-féle középértéktételt!
- Elemi függvények deriváltjai (vö. deriválási táblázat).

Emlékeztető. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény injektív és folytonos, $a \in I$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor az $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$ függvényre a következők igazak:

1. $f^{-1} \in \mathfrak{D}[f(a)] \quad \Longleftrightarrow \quad f'(a) \neq 0$;
2. $f^{-1} \in \mathfrak{D}[f(a)] \quad \Longrightarrow$
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(a))}.$$

Példák.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1));$$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1))$$

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arc\,tg}(x))} = \cos^2(\operatorname{arc\,tg}(x)) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\operatorname{arc\,ctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}'(\operatorname{arc\,ctg}(x))} = -\sin^2((\operatorname{arc\,ctg}(x))) = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arc\,ctg}(x))} = \frac{-1}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\operatorname{ar\,sh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{ar\,sh}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{ar\,sh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{ar\,sh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\operatorname{ar\,ch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{ar\,ch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{ar\,ch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ar\,ch}(x))-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x\in(1,+\infty))$$

$$\operatorname{ar\,th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{ar\,th}(x))} = \operatorname{ch}^2(\operatorname{ar\,th}(x)) = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{ar\,th}(x))} = \frac{1}{1-x^2} \qquad (x\in(-1,1))$$

$$\operatorname{ar\,cth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{cth}'(\operatorname{ar\,cth}(x))} = -\operatorname{sh}^2(\operatorname{ar\,cth}(x)) = \frac{-1}{\operatorname{cth}^2(\operatorname{ar\,cth}(x))-1} = \frac{1}{1-x^2} \qquad (x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty))$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1}+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény invertálható, inverze differenciálható, és határozzuk meg az inverz függvényének deriváltját, majd számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})$ értéket!

Útm. Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}$ (ezért $f\in\mathfrak{C}$ is teljesül), továbbá tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}}{2\sqrt{e^{2x-1}+1}} = \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x-1}+1}} > 0.$$

Következésképpen f szigorúan monoton növekedő, így invertálható is. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

ezért

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = (1,+\infty).$$

Tehát $\exists f^{-1}\in\mathfrak{D}$ és bármely $y := f(x)\in(1,+\infty)$ esetén

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{\sqrt{e^{2x-1}+1}}{e^{2x-1}} = \frac{y}{y^2-1},$$

hiszen

$$1 < f(x) = y \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{e^{2x-1}+1} = y \quad\Longleftrightarrow\quad e^{2x-1} = y^2-1.$$

Következésképpen

$$\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{2}.$$

Megjegyezzük, hogy f szigorúan monotonitása elemi úton is belátható, ui. tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén igaz az

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x-1}+1 < e^{2y-1}+1 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \sqrt{e^{2x-1}+1} < \sqrt{e^{2y-1}+1} = f(y)$$

ekvivalencia. Továbbá f deriválhatósága, így folytonossága következtében

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \left(\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x), \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} \sqrt{e^{2x-1}+1}, \lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^{2x-1}+1}\right) = (1,+\infty) \ni \sqrt{2}.$$

Ha tehát $y \in (1,+\infty)$, akkor

$$y = f(x) = \sqrt{e^{2x-1}+1} \iff e^{2x-1}+1 = y^2 \iff 2x-1 = \ln(y^2-1) \iff$$

$$\iff x = \frac{\ln(y^2-1)+1}{2}.$$

Az inverz függvény tehát

$$f^{-1} : (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{\ln(y^2-1)+1}{2}$$

alakú. Látható tehát $f^{-1} \in \mathfrak{D}(1,+\infty)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2-1} \cdot 2y = \frac{y}{y^2-1} \qquad (y \in (1,+\infty)).$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := x + x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in \mathcal{D}$, és számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(2)$ értéket!

Útm. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ (ezért $f \in \mathfrak{C}$ is teljesül), továbbá

$$f'(x) = 1 + 3x^2 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és $f(1) = 2$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3x^2}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{4}.$$

Emlékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$. Azt mondtuk, hogy az f függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontban van **érintő**je, ha $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az f függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontbeli érintőjén az

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletű egyenest értettük.

Megjegyzés. Ha a fenti f függvény esetében

- $f'(a) \neq 0$, akkor az
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
egyenest az f függvény $(a, f(a))$ pontbeli **normális**ának nevezzük;
- $f'(a) = 0$ és $f \in \mathfrak{D}^2[a]$: $f''(a) \neq 0$, akkor az $(a, f(a))$ pontbeli normális egyenlete: $x = a$ egyenletű egyenes.

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5}\right) \qquad (-1 < x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjának a $(0, f(0))$ pontban van érintője, majd írjuk fel az érintőegyenes egyenletét!

Útm. Mivel

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x) - 5 \cdot \ln(x^2+1) \qquad (-1 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1} \quad (-1 < x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

következtében az érintőegyenes egyenlete

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy

- ha az iménti feladatban nem használtuk volna ki a logaritmusfüggvényre vonatkozó azonosságokat, akkor f' kiszámítása lényegesen tovább tartott volna:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\dfrac{(x^2+1)^5}{2\sqrt{1+x}} - 10x(x^2+1)^4\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^{10}} = \frac{\dfrac{(x^2+1)^5}{2(1+x)} - 10x(x^2+1)^4}{(x^2+1)^5} = \\ &= \frac{(x^2+1)^5 - 20x(x+1)(x^2+1)^4}{2(1+x)(x^2+1)^5} = \frac{(x^2+1) - 20x(x+1)}{2(1+x)(x^2+1)} = \\ &= \frac{\cancel{(x^2+1)}}{2(1+x)\cancel{(x^2+1)}} - \frac{20x\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x^2+1)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

- ha a

$$g(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R})$$

függvényt kellene deriválnunk, akkor a logaritmikus deriválás módszerét lenne éremes alkalmaznunk:

$$\ln(g(x)) = \frac{\ln(x+1)}{2} - 5\ln(x^2+1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{10x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+20x(x+1)}{2(x^2+1)(x+1)},$$

ahonnan

$$g'(x) = g(x) \cdot \frac{x^2+1+20x(x+1)}{2(x^2+1)(x+1)} = \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \cdot \frac{21x^2+20x+1}{2(x^2+1)(x+1)} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Határozzuk meg f grafikonjának $(a, f(a))$-beli érintőjét!

1. $f(x) := \dfrac{x+1}{x-1} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}), \quad a := 3,$ 2. $f(x) := \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 1/2.$

Útm.

1. Mivel $f(3) = 2$, ill.

$$f'(x) \equiv \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \equiv \frac{-2}{(x-1)^2},$$

továbbá $f'(3) = -\dfrac{1}{2}$, ezért az érintő egyenlete:

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x-3) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel $f(1/2) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, ill.

$$f'(x) \equiv \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

továbbá $f'(1/2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, ezért az érintő egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör valamely (a, b) pontjában húzott érintőegyenesének az egyenletét!

Útm. Ha (a, b) a kör egy pontja, akkor nyilván $a \in [-1, 1]$. Így három esetet különböztetünk meg:

1. eset. Ha $a = -1$ vagy $a = 1$, akkor az érintő egyenlete nyilvánvalóan $x = -1$ vagy $x = 1$.

2. eset. Ha $a \in (-1, 1)$ és $b > 0$, akkor a felső félkör nem más, mint az

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad (x \in (-1, 1))$$

függvény grafikonja. Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1, 1)),$$

ezért

$$f(a) = b, \qquad \text{ill.} \qquad f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} = -\frac{a}{b}$$

következtében az érintő egyenlete:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = b - \frac{a}{b}(x-a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. eset. Ha $a \in (-1,1)$ és $b < 0$, akkor a felső félkör nem más, mint a

$$g(x) := -\sqrt{1-x^2} \qquad (x \in (-1,1))$$

függvény grafikonja. Mivel

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1)),$$

ezért

$$g(a) = b, \qquad \text{ill.} \qquad g'(a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

következtében az érintő egyenlete:

$$y = g(a) + g'(a)(x-a) = b - \frac{a}{b}(x-a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsuk ki a deriváltat!

Útm. Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \frac{1 + e^{1/a} + e^{1/a}/a}{(1+e^{1/a})^2} = \frac{a + e^{1/a}(a+1)}{a(1+e^{1/a})^2}.$$

Ha pedig $a := 0$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+e^{1/x}}.$$

Mivel

$$\lim_{x \to 0-0} e^{1/x} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} e^{1/x} = +\infty,$$

ezért

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

Következésképpen

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \qquad \text{azaz} \qquad f \notin \mathfrak{D}[0].$$

Megjegyzések.

1. Könnyen megmutatható, hogy a fenti feladatbeli f függvényre $f \in \mathfrak{C}[0]$ teljesül.

2. Ha $\alpha < a < \beta$ és

$$f(x) = \begin{cases} b(x) & (x \in (\alpha, a)), \\ f(a) & (x = a), \\ j(x) & (x \in (a, \beta)), \end{cases}$$

akkor az f függvény deriválhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy

$$b, j \in \mathfrak{D} \qquad \text{és} \qquad \lim_{a-0} b = f(a) = \lim_{a+0} j \qquad \text{és} \qquad f'_-(a) = \lim_{x\to a-0} b'(x) = \lim_{x\to a+0} j'(x) = f'_+(a)$$

teljesüljön.

Feladat. Adott $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén határozzuk meg az

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + bx + c & (x \in (-\infty, 0)), \\ e^x & (x \in [0, +\infty)) \end{cases}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Útm. Mivel

$$\lim_{x\to 0-0} (ax^2 + bx + c) = c \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} (e^x) = 1,$$

ezért $c \neq 1$ esetén $f \notin \mathfrak{C}[0]$, így $f \notin \mathfrak{D}[0]$. Viszont tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$, így

$$f' : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & (x \in (-\infty, 0)), \\ e^x & (x \in (0, +\infty)). \end{cases}$$

Ha $c = 1$, akkor

$$\lim_{x\to 0-0} (2ax + b) = b \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} (e^x) = 1,$$

ezért $b \neq 1$ esetén $f \notin \mathfrak{D}[0]$. Ha $c = 1$ mellett $b = 1$ is teljesül, akkof nyilván $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2ax + 1 & (x \in (-\infty, 0)), \\ e^x & (x \in [0, +\infty)) \end{cases}$$

teljesül. ■

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Mely pontokban deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2 & (x \in (-\infty, 0)), \\ \\ x - x^2 & (x \in [0, +\infty)) \end{cases}$$

függvény? Ahol deriválható, ott számítsuk ki a deriváltat!

Útm.

- Ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor nyilván $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} \alpha + 2a & (a < 0), \\ \\ 1 - 2a & (a > 0). \end{cases}$$

- Ha $a = 0$, akkor nyilván $f \in \mathfrak{C}[0]$, és így

$$f'_{-}(0) = \alpha - 2 \cdot 0 = \alpha \qquad \text{és} \qquad f'_{+}(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

  következtében

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 1. \quad ■$$

Házi feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi f függvény invertálható, inverze differenciálható a $b \in \mathcal{R}_f$ pontban, majd számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(b)$ deriváltat!

1. $f(x) := x^5 - e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b := -1;$
2. $f(x) := 3x^5 + 10x^3 + 15x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b := 1;$
3. $f(x) := 2x + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2 + 1) \quad (0 < x \in \mathbb{R}), b := 2 + \frac{\pi}{4} + \ln(2).$

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ (ezért $f \in \mathfrak{C}$ is teljesül), továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 5x^4 + 2e^{-2x} > 0.$$

Következésképpen f szigorúan monoton növekedő, és így invertálható. Mivel

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

ezért az f^{-1} inverz értelmezési tartománya $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R}$. Az inverz függvény differenciálására vonatkozó tétel szerint tehát $f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és így $f(0) = -1$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \frac{1}{f'(0)} = \left.\frac{1}{5x^4 + 2e^{-2x}}\right|_{x=0} = \frac{1}{5 \cdot 0 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

2. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ (ezért $f \in \mathfrak{C}$ is teljesül), továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 15x^4 + 30x^2 + 15 \geq 15 > 0.$$

Így f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és $f(0) = 1$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{15}.$$

3. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ (ezért $f \in \mathfrak{C}$ is teljesül), bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{2x}{x^2+1} = 2 + \frac{-1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2 + 2x^2 - 1 + 2x}{x^2+1} = \\ &= \frac{1 + 2x^2 + 2x}{x^2+1} > 0. \end{aligned}$$

Így f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és

$$f(1) = 2 + \frac{\pi}{4} + \ln(2)$$

következtében

$$\left(f^{-1}\right)'\left(2 + \frac{\pi}{4} + \ln(2)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(2 + \frac{\pi}{4} + \ln(2)\right)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{5}. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok.

1. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := x - \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt{2}\right)\right)$$

   függvény invertálható, majd számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(1 + \ln(2))$ deriváltat!

2. Lássuk be, hogy van olyan deriválható $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h(x^3 + 3x + 1) = x^3 - 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   majd számítsuk ki a $h'(-3)$ deriváltat!

3. Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h^3(x) + 3h(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   majd számítsuk ki a $h'(0)$ deriváltat!

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ (ezért $f \in \mathfrak{C}$ is teljesül), továbbá bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} = \frac{x^2 + x - (x+1) - 1}{x^2 + x} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} < 0.$$

   Következésképpen f szigorúan monoton fogyó. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és $f(1) = 1 + \ln(2)$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(1 + \ln(2)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \left.\frac{x^2 + x}{x^2 - 2}\right|_{x=1} = -2.$$

2. Legyen

$$f(x) := x^3 - 2x + 1, \quad g(x) := x^3 + 3x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   Ekkor

$$\lim_{\pm\infty} g = \pm\infty, \qquad g \in \mathfrak{D} \subset \mathfrak{C} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   Így $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$ és g szigorúan monoton, tehát invertálható, sőt $g^{-1} \in \mathfrak{D}$. Következésképpen a

$h := f \circ g^{-1}$ függvény deriválható, és deriváltjára

$$h' = f' \circ g^{-1} \cdot \left(g^{-1}\right)' = \frac{f' \circ g^{-1}}{g' \circ g^{-1}}, \qquad \text{így} \qquad h'(-3) = \frac{f'(g^{-1}(-3))}{g'\left(g^{-1}(-3)\right)} = \frac{f'(-1)}{g'(-1)} = \frac{1}{6}.$$

3. Mivel minden valós együtthatós, páratlan fokszámú polinomnak van gyöke, ezért létezok ilyen függvény. Sőt csak egy ilyen van, ui. ha h_1 és h_2 ilyen tulajdonságú, akkor

$$h_1^3(x) + 3h_1(x) = x \quad \text{és} \quad h_2^3(x) + 3h_2(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$h_1^3(x) - h_2^3(x) + 3(h_1(x) - h_2(x)) = (h_1(x) - h_2(x))(h^2(x) + h_1(x)h_2(x) + h_2^2(x) + 3) = 0,$$

ami csak úgy lehetséges, hogy $h_1 = h_2$. Látható, hogy az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto h^3(x) + 3h(x)$$

függvény differenciálható; így

$$h'(x) = \frac{1}{3(h^2(x) + 1)} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan $h'(0) = 1/3$ következik.

Házi feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := e^{2x} + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjának az $a := 0$ abszcisszájú pontjához húzható érintőegyenesére az érintési pontban merőleges egyenes egyenletét, majd ennek az egyenesnek az origótól való távolságát!

Útm. Világos, hogy

$$f(0) = 1 + 0 = 1, \qquad \text{továbbá} \qquad f'(0) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} + 2 \cdot 0 = 2,$$

így az érintőre merőleges egyenes egyenlete:

$$y = 1 - \frac{x}{2}.$$

Ennek az origótól való távolsága: $2/\sqrt{5}$. ■

Házi feladat. Írjuk fel az

$$f(x) := \sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjának az $a := 1$ abszcisszájó pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

Útm. Mivel

$$f(a) = \sin\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

és

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$f'(a) = \cos(0) \cdot \frac{2}{4}$$

ezért a kérdéses érintő egyenlete

$$y = \frac{x-1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad ■$$

Gyakorló feladat. Határozzuk meg f grafikonjának $(a, f(a))$-beli érintőjét!

1. $f(x) := x^{\sin(x)} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \quad a := 1;$
2. $f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \ a := \dfrac{\pi}{2};$
3. $f(x) := (x+2)^{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := -1;$
4. $f(x) := \left(\sin(\sqrt{x})\right)^{e^{1/x}} \quad (x \in (0, \pi^2)), \ a := \dfrac{\pi^2}{4}.$

Útm.

1. Mivel

$$\ln(f(x)) \equiv \sin(x)\ln(x), \qquad \text{ezért} \qquad f'(x) \equiv f(x)\left\{\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right\},$$

ahonnan

$$f'(1) = f(1)\{\cos(1)\ln(1) + \sin(1)\} = \sin(1)$$

következik. Így az érintő egyenlete:

$$y = 1 + \sin(1)(x - 1).$$

2. Mivel $f(\pi/2) = 1$, ill. $f'(x) \equiv \sin(2x)$, továbbá $f'(\pi/2) = 0$, ezért az érintő egyenlete: $y = 1$.

3. Mivel $f(-1) = 1$, $\ln(f(x)) \equiv (x^2 + 1)\ln(x + 2)$, ill.

$$f'(x) \equiv f(x)\left\{2x\ln(x+2) + \frac{x^2+1}{x+2}\right\},$$

továbbá

$$f'(-1) = f(-1)\left\{-2\ln(1) + \frac{2}{1}\right\} = 2,$$

ezért az érintő egyenlete:

$$y = 1 + 2(x + 1).$$

4. Mivel $f(\pi^2/4) = 1$, $\ln(f(x)) \equiv e^{1/x}\ln(\sin(\sqrt{x}))$, ill.

$$f'(x) \equiv f(x)\left\{-\frac{e^{1/x}}{x^2}\ln(\sin(\sqrt{x})) + e^{1/x}\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}\right\},$$

továbbá

$$f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left\{-\frac{16e^{4/\pi^2}}{\pi^4}\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + e^{4/\pi^2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right\} = 1 \cdot 0 = 0,$$

ezért az érintő egyenlete: $y = 1$. ■

Házi feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, ill.

$$f(x) := x^2 - a \cdot \ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

1. Írja fel az $a := 3$ esetben az f függvény grafikonjának az $x_0 := 1$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!
2. Mely $a \in \mathbb{R}$ esetén lesz az előző pontbeli érintőegyenes meredeksége (-2)-vel egyenlő? Mi ebben az esetben az érintési pont abszcisszája?

Útm.

1. Mivel $a=3$ esetén $f(1)=1$

$$f'(x)=x^2-\frac{3}{x} \qquad (0>x\in\mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad f'(1)=2-3=-1,$$

ezért a keresett érinő egyenlete:

$$y=1-1\cdot(x-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=2-x \quad (x\in\mathbb{R}).$$

2. Mivel bármely $0<x\in\mathbb{R}$ esetén $f\in\mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=-2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^22+2x-a=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+2a}}{2}\in(0,+\infty),$$

ezért pontosan abban az esetben létezik az érintő, ha

$$\left(1+2a>0 \ \wedge\ \frac{-1\pm\sqrt{1+2a}}{2}>0\right) \ \Longleftrightarrow\ \left(a>-\frac{1}{2} \ \wedge\ a>0\right) \quad \Longleftrightarrow \quad a\in(0,+\infty).$$

Ekkor az érintő az

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$$

abszcisszájú pontba húzható. ■

Házi feladat. Mely $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ esetén deriválható az

$$f(x):=\begin{cases} x & (x\in(-\infty,0)),\\ a+bx+cx^2+dx^3 & (x\in([0,1]),\\ -x^2 & (x\in(1,+\infty)) \end{cases}$$

függvény?

Útm. Ha f deriválható, akkor folytonos is. Világos, hogy ha $\alpha\in\{0;1\}$, akkor

$$f\in\mathfrak{C}[\alpha] \qquad \Longrightarrow \qquad (0=a \quad \wedge \quad a+b+c+d=-1)\,.$$

teljesül. Mivel $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = b$, ezért

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = b.$$

Mivel

$$f'_-(1) = b + 2c + 3d, \qquad f'_+(1) = -2,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{D}[1] \qquad \Longrightarrow \qquad b + 2c + 3d = -2.$$

Mindez azt jelenti, hogy az

$$a = 0, \qquad a + b + c + d = -1, \qquad b = 1, \qquad b + 2c + 3d = -2.$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük, azaz

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = -3, \qquad d = 1$$

esetén lesz f deriválható. ■

Gyakorló feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Vizsgáljuk az

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + 5ax + 4\cos^2(x+1) & (x \in (-\infty, -1]), \\[2ex] \dfrac{3x^3}{2x+3} + a^2 + 2 & (x \in (-1, +\infty)) \end{cases}$$

függvényt folytonosság és deriválhatóság szempontjából! Ahol nem folytonos, ott adja meg a szakadások típusát, és ahol deriválható, ott számítsa ki a derivált értékét!

Útm. Bontsuk fel a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ értelmezési tartományt intervallumokra:

$$\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup [-1, -1] \cup (-1, +\infty) =: I_b \cup I_c \cup I_j.$$

- Vizsgáljuk f-et az I_b intervallumon. Mivel a

$$(-\infty, -1) \ni x \mapsto ax^2 + 5ax + 4\cos^2(x+1)$$

függvény deriválható, így folytonos is, ezért bármely $x \in (-\infty, -1)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = 2ax + 5a - 8\sin(x+1)\cos(x+1) = 2ax + 5a - 4\sin(2x+2).$$

- Vizsgáljuk f-et az I_j intervallumon. Mivel a

$$(-1, +\infty) \ni x \mapsto \frac{3x^3}{2x+3} + a^2 + 2$$

függvény deriválható, így folytonos is, ezért bármely $x \in (-1, +\infty)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = \frac{9x^2 \cdot (2x+3) - 3x^3 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{3x^2 \cdot [3(2x+3) - 2x]}{(2x+3)^2} = \frac{3x^2 \cdot [4x+9]}{(2x+3)^2}.$$

- Vizsgáljuk f-et az I_c intervallumon, azaz a (-1) pontban.

1. Vizsgáljuk f folytonosságát a (-1) pontban! Mivel

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \left(ax^2 + 5ax + 4\cos^2(x+1)\right) = a - 5a + 4 \cdot 0^2 = 4 - 4a = f(-1)$$

és

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \left(\frac{3x^3}{2x+3} + a^2 + 2\right) = \frac{3}{-2+3} + a^2 + 2 = -3 + a^2 + 2 = a^2 - 1,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{C}[-1] \quad \Leftrightarrow \quad 4-4a = a^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+4a-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2 \pm \sqrt{4+5} \in \{-5; 1\}.$$

Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$, akkor az f függvénynek (-1)-ben elsőfajú szakadása (ugrása) van.

2. Vizsgáljuk f deriválhatóságát a (-1) pontban! Mivel

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1-0} (2ax + 5a - 4\sin(2x+2)) = -2a + 5a - 4\sin(0) = 3a$$

és

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1+0} \left(\frac{3x^2 \cdot [4x+9]}{(2x+3)^2}\right) = \frac{3 \cdot [-4+9]}{(-2+3)^2} = 15,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{D}[-1] \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \{-5; 1\} \ \wedge \ 3a = 15) \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \{-5; 1\} \ \wedge \ a = 5) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \emptyset$$

következtében tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $f \notin \mathfrak{D}[-1]$. ■

Emlékeztető. Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetében

$$H := \{a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f) : \ f \in \mathfrak{D}[a]\} \neq \emptyset,$$

akkor a

$$H \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f **deriváltfüggvény**ének vagy **differenciálhányados-függvény**ének neveztük és az f' szimbólummal jelöltük.

Házi feladat. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} 1 - x & (x \in (-\infty, 0)), \\ e^{-x} & (x \in [0, +\infty)) \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsuk ki a deriváltat!

Útm. Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) := \begin{cases} -1 & (a \in (-\infty, 0)), \\ -e^{-a} & (a \in (0, +\infty)) \end{cases}$$

Ha pedig $a := 0$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \begin{cases} \dfrac{1 - x - 1}{x} = -1 & (x < 0), \\ \\ \dfrac{e^{-x} - 1}{x} & (x > 0). \end{cases}$$

Mivel

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^0}{x} = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)_{x=0} = \left(-e^{-x}\right)_{x=0} = -1.$$

Ezért $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = -1$. ■

Gyakorló feladat. Legyen $\alpha, \beta, \gamma, x_0 \in \mathbb{R}$. Hol differenciálhatók az alábbi függvények? Ahol igen, ott számítsuk ki a deriváltakat!

1. $f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R})$;

2. $f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in \mathbb{Q}), \\ -x^2 & (x \in \mathbb{Q}^*); \end{cases}$

3. $f(x) := \begin{cases} x^2 - x + 1 & (x < 0), \\ 1 - \sin(x) & (x \geq 0); \end{cases}$

4. $f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \leq x_0), \\ \alpha x + \beta & (x > x_0); \end{cases}$

5. $f(x) := \begin{cases} 1 - \alpha x & (x < 0), \\ e^{-x^2} & (x \geq 0); \end{cases}$

6. $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & (x < 0), \\ e^x & (x \geq 0). \end{cases}$

Útm.

1. Világos, hogy

   (a) $f \in \mathfrak{D}[0]$, hiszen
   $$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{x^2}{x}\right| = |x| \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0)$$
   /sőt $f'(0) = 0$/.

   (b) Mivel
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0), \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$
   így bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$ és
   $$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0), \\ -2x & (x < 0). \end{cases}$$
   Az $a = 0$ esetben pedig
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x| - 0|0|}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0),$$
   azaz $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 0$.

   (c) bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \notin \mathfrak{D}[x]$, hiszen ha

- $a \in \mathbb{Q}$, akkor van olyan
$$x_n \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
hogy $\lim(x_n) = a$, de
$$\lim(f(x_n)) = -a^2 \neq a^2 = f(a),$$
azaz $f \notin \mathfrak{C}[a]$;
- $a \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, akkor van olyan
$$y_n \in \mathbb{Q} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
hogy $\lim(y_n) = a$, de
$$\lim(f(y_n)) = a^2 \neq -a^2 = f(a),$$
azaz $f \notin \mathfrak{C}[a]$.

2. Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eseténf $\in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x} = x - 1 & (x < 0), \\ \\ \frac{-\sin(x)}{x} & (x > 0) \end{cases} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$
Így $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = -1$. Ezért $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = -1$.

3. Világos, hogy $x_0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = x_0$ esetben a következőket érdemes meggondolni. Ha $f \in \mathfrak{D}[x_0]$, akkor
$$2x_0 = \lim_{x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$
Tehát $\alpha = 2x_0$, $\beta = -x_0^2$.

4. Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eseténf $\in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig nyilvánvalóan $f \in \mathfrak{C}[0]$, továbbá
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\alpha = f'_-(0) = f'_+(0) = e^{-2 \cdot 0^2} \cdot (-2 \cdot 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 0.$$

5. Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eseténf $\in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig $f \in \mathfrak{C}[0]$ pontosan

akkor teljesül, ha $\gamma = 1$. Mivel $f'_-(0) = \beta$, $f'_+(0) = 1$, ezért

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \beta = 1 \ \wedge \ \gamma = 1). \quad \blacksquare$$

4. gyakorlat (2025. szeptember 29-30.)

Szükséges ismeretek.

- Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?
- Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális maximuma van?
- Fogalmazza meg a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt!
- Adjon példát olyan $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$, $f'(a) = 0$ teljesül, de az f függvénynek az a pontban nincs lokális szélsőértéke!
- Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvények monoton növekedésével kapcsolatban?
- Milyen elégséges feltételt ismer differenciálható függvények szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?
- Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvények szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?
- Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?
- Hogyan szól a lokális minimumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?
- Hogyan szól a lokális maximumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?
- Írja le a lokális minimumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!
- Írja le a lokális maximumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!
- Elemi függvények deriváltjai (vö. deriválási táblázat).

Emlékeztető. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor

1. f szigorúan monoton növő $\iff$ $f'(x) \geq 0$ $(x \in I)$ és bármely $J \subset I$ nyílt intervallumnak van olyan $a \in J$ pontja, amelyre $f'(a) > 0$;
2. f szigorúan monoton fogyó $\iff$ $f'(x) \leq 0$ $(x \in I)$ és bármely $J \subset I$ nyílt intervallumnak van olyan $a \in J$ pontja, amelyre $f'(a) < 0$.

Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

1. $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \qquad (x \in \mathbb{R} \backslash \{2; 8\}).$

Útm.

1. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

Tehát f lokális minimumai: $f(-1) = -3$ és $f(2) = -30$, lokális maximuma pedig $f(0) = 2$.

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R} \backslash \{2; 8\}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 10x + 16) - x \cdot (2x - 10)}{(x^2 - 10x + 16)^2} = \frac{16 - x^2}{(x^2 - 10x + 16)^2} = \frac{(4 - x) \cdot (4 + x)}{(x-2)^2 \cdot (x-8)^2},$$

ezért

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 2)$	$(2, 4)$	4	$(4, 8)$	$(8, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$

Tehát f lokális minimuma: $f(-4) = -1/18$, lokális maximuma pedig $f(4) = -1/2$.

Feladat. Az e^{π} vagy π^{e} számok közül melyik a nagyobb?

Útm. A logaritmusfüggvény szigorú monotonotása miatt

$$e^{\pi} < \pi^{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi \ln(e) < e \ln(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\ln(e)}{e} < \frac{\ln(\pi)}{\pi}.$$

Vizsgáljuk az

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvényt monotonitás szempontjából!

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = e$$

így

$$f'(x) > 0 \quad (x \in (0, e)), \qquad \text{ill.} \qquad f'(x) < 0 \quad (x \in (e, +\infty)),$$

ahonnan

$$f(x) < f(e) \qquad (e \neq x \in (0, +\infty))$$

következik, azaz $f(\pi) < f(e)$.

Emlékeztető [Weierstraß tétele]. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor alkalmas $u, v \in [a, b]$ esetén

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \qquad (x \in [a, b]).$$

Megjegyezzük, hogy ha abszolút szőlsőértékhelyeket kell keresnünk, akkor a következőképpen érdemes eljárni. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $c \in \mathbb{R}$ pontban abszolút szélsőértéke van, akkor három eset lehetséges:

$$c = a \qquad \text{vagy} \qquad c = b \qquad \text{vagy} \qquad c \in (a, b).$$

Elsőként megkeressük az összes olyan $c \in (a, b)$ pontot, amelyre $f'(c) = 0$. Ezután legyen

$$m := \min\{f(a), f(b), f(c)\}, \qquad M := \max\{f(a), f(b), f(c)\},$$

és válaszzuk ki a, b, c közül azokat, amelyben f a m, ill. a M értéket veszi fel.

Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit!

1. $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in H := [-1, 4])$;
2. $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1} \qquad \left(x \in H := \left[-\dfrac{1}{2}, 2\right]\right)$;
3. $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. **1. lépés.** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{0; 3\}.$$

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-1),\ f(0),\ f(3),\ f(4)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{15,\ 0,\ -17,\ 10\} = \begin{matrix}-17,\\ 15.\end{matrix}$$

Következésképpen az f függvény H-ra való leszűkítésének abszolút minimuma -17 és abszolút maximuma 15, és ezt 3-ban és -1-ben veszi fel.

2. **1. lépés.** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1,$$

ui. $-1 \notin H$.

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-1/2),\ f(1),\ f(2)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\} = \begin{matrix}-2/5,\\ 1/2.\end{matrix}$$

Következésképpen az f függvény abszolút minimuma, ill. maximuma $-2/5$, ill. $1/2$, és ezt $-1/2$-ben és 1-ben veszi fel.

3. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{400}{x^3} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 10 \qquad \text{és} \qquad f''(10) = \frac{4}{10} > 0.$$

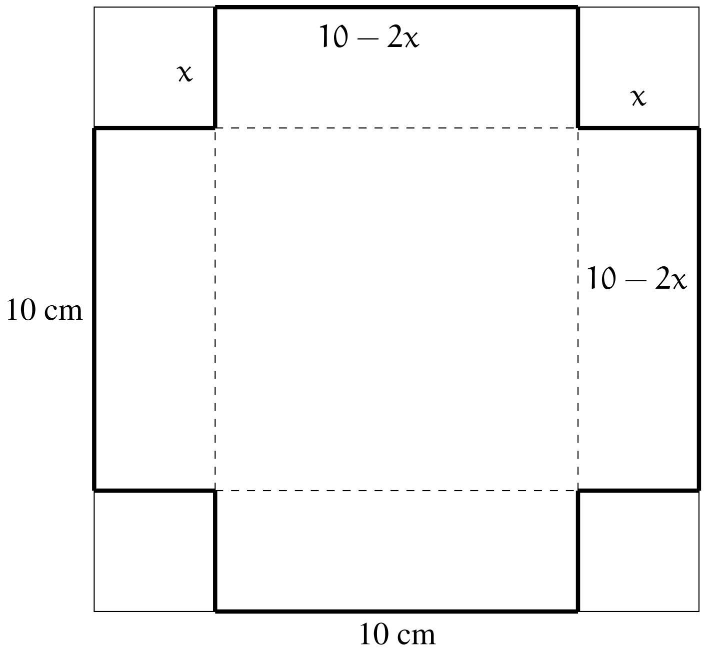
Világos, hogy

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

így f-nek az $a := 10$ helyen lokális és abszolút minimuma van: $f(a) = 40$, és f-nek nincsen maximuma. ■

Feladat. Egy $100\ \text{cm}^2$ területű, négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk belőle. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

Útm.



Az ábrából látható, hogy a doboz alapja egy $10 - 2x$ cm oldalú négyzet, és magassága x cm, ahol $x \in (0, 5)$. Azért a doboz térfogata a következőképpen írható:

$$V(x) := (10 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = (100 - 40x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x \qquad (x \in (0, 5)).$$

Világos, hogy

$$\lim_0 V = 0 = \lim_5 V.$$

Mivel $V \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in (0,5)$ esetén

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25) \qquad \text{és} \qquad V''(x) = 8(3x - 10),$$

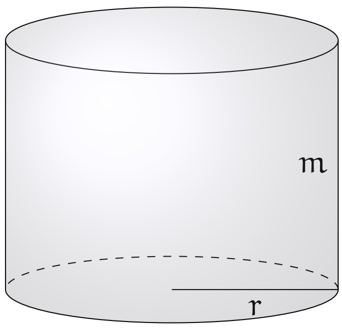
továbbá

$$V'(x) = 0 \quad \iff \quad x = \frac{10 - \sqrt{100 - 75}}{3} = \frac{5}{3} \qquad \text{és} \qquad V''\left(\frac{5}{3}\right) = 8(5 - 10) = -40 < 0,$$

ezért V-nek $\frac{5}{3}$-ban lokális maximuma van van, ami nyilvánvalóan abszolút maximum is. ■

Feladat. Hogyan kell megválasztani az 1 liter térfogatú, mindkét végén zárt, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy az anyagköltség minimális legyen, hogy ha az anyagköltség a doboz felszínével egyenesen arányos?

Útm. Jelölje $r > 0$ a henger alapkörének sugarát és $m > 0$ a henger magasságát.



A gyártási költség egyik részét az anyagköltség adja. Ezt azzal tudjuk minimalizálni, ha a legkisebb felületű konzervdobozt gyártjuk. A henger felülete

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r m.$$

Az r és m változók nem függetlenek egymástól, mert a henger térfogata 1 liter, azaz $1000\ \text{cm}^3$. A henger térfogata

$$V = \pi r^2 m = 1000 \qquad \Longrightarrow \qquad m = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Ebből felírhatjuk a henger felszínét az r sugár függvényeként:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Ennek a függvénynek keressük az abszolút minimumhelyét. Weierstraß tétele most nem alkalmazható, hiszen az értelmezési tartomány nem korlátos intervallum. A deriválási szabályokat felhasználva azt kapjuk, hogy $A \in \mathfrak{D}$ és

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad (r > 0).$$

Így

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_0 = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}},$$

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} \qquad \Longrightarrow \qquad A''(r_0) = 4\pi + 4000 \cdot \frac{2\pi}{10^3} > 0,$$

ezért

$$\lim_{r\to 0} A(r) = +\infty = \lim_{r\to+\infty} A(r)$$

következtében az A függvénynek abszolút minimumhelye van az $r_0 = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ pontban. Ekkor

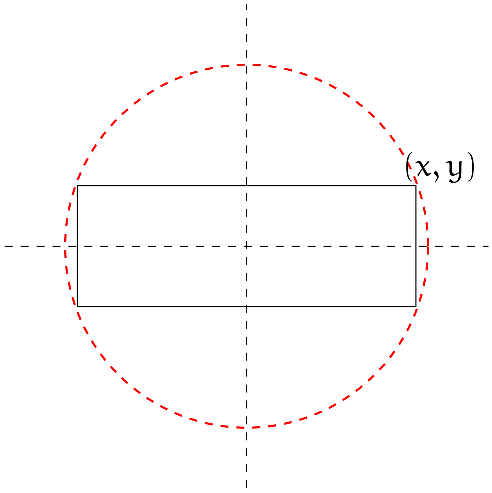
$$m_0 = \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{10}\right)^2 = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Ezért a keresett konzervdoboz méretei a következők: a konzervdoboz alapkörének sugara $\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm és magassága $\frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm. Vegyük észre, hogy az optimális méreteket akkor érjük el, ha a konzervdoboz alapkörének átmérője és magassága megegyezik.

Házi feladat. Egységsugarú körbe írjunk maximális területű téglalapot.

Útm. Világos, hogy ha a téglalap első síknegyedbe eső csúcsának koordinátái (x, y), akkor a téglalap területe:

$$4xy \qquad (x, y \in (0, 1)).$$



Mivel a téglalap csúcsai az egységkörön vannak, ezért $x^2+y^2=1$, ahonnan $y=\sqrt{1-x^2}$ és a területre

$$T(x)=4x\sqrt{1-x^2} \qquad (x\in(0,1))$$

adódik. Látható, hogy

$$\lim_0 T = 0 = \lim_1 T,$$

továbbá $T\in\mathfrak{D}$ és bármely $x\in(0,1)$ esetén

$$T'(x)=4\sqrt{1-x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4(1-x^2)-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mivel T'-nek $\frac{1}{\sqrt{2}}$-ben $(+,-)$ jelváltása van, így itt T-nek lokális maximuma van, ami nyilvánvalóan abszolút maximumhely is egyben. A megfeleő y koordinátára

$$y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy a keresett maximális területű téglalap a négyzet. ■

Házi feladat. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

Útm. A téglalap oldalait a-val és b-bel jelölve a kerülete

$$2a+2b=1, \qquad \text{azaz} \qquad b=\frac{1}{2}-a.$$

Mivel $a, b \geq 0$, ezért feltehető, hogy $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. A téglalap területe ekkor

$$T(a) = a \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{a}{2} - a^2, \qquad \left(a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),$$

ennek a függvénynek keressük az abszolút szélsőértékeit. Mivel

$$T'(a) = \frac{1}{2} - 2a = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{1}{4},$$

ezért T folytonosságának következtében alkalmazható a Weierstraß-tétel:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{T(a) \in \mathbb{R} : \ a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{T(0), T\left(\frac{1}{4}\right), T\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{0, \frac{1}{16}, 0\right\}.$$

Láthatjuk tehát, hogy a terület minimális, egészen pontosan 0 lesz az

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{1}{2}, \quad b = 0$$

oldalú, elfajuló téglalapok esetén; míg maximális az

$$a = \frac{1}{4} = b$$

oldalú négyzet esetén lesz, ekkor a területe: $T = 1/16$. ■

Házi feladat. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ pothoz?

Útm. A hiperbola (x, y) koordinátájú P pontjának a $(2, 0)$ ponttól mért távolsága

$$d := \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Mivel P illeszkedik a hiperbolára, ezért

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + 4 + x^2}.$$

Ez pedig akkor minimális, ha

$$f(x) := (x-2)^2 + 4 + x^2 = 2x^2 - 4x + 8 = 2(x^2 - 2x + 4) = 2[(x-1)^2 + 3] \qquad (x \in \mathbb{R})$$

minimális. Nyilvánvaló, hogy f az $x := 1$ helyen veszi fel abszolút mnimumát, tehát a hiperbola

$$(1, \sqrt{5}), \qquad (1, -\sqrt{5})$$

pontjai vannak legközelebb a $(2, 0)$ ponthoz. ■

Házi feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$: $a < b$, valamint $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, amelyekre

$$f(a) = g(a) \qquad \text{és} \qquad f'(x) \geq g'(x) \quad (x \in (a, b))$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $J \subset (a, b)$ intervallum esetén van olyan $c \in J$, amelyre $f'(c) > g'(c)$, akkor bármely $x \in (a, b)$ esetén fennáll az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség!

Útm. Legyen

$$\varphi(x) := f(x) - g(x) \qquad (x \in [a, b)).$$

Ekkor $\varphi(a) = 0$, $\varphi \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in [a, b)$ számra $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$. A feltételből az következik, hogy bármely $J \subset [a, b)$ nyílt intervallum esetén van olyan $c \in J$, hogy

$$\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) > 0,$$

ezért

$$0 < \varphi(x) = f(x) - g(x) \qquad (x \in (a, b)). \quad ■$$

Megjegyzés. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$: $a < b$, valamint az $f, g : [a, b) \to$ függvények n-szer differenciálhatók. Belátható, hogy ekkor

$$f^{(k)}(a) \geq g^{(k)}(a) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}) \qquad \text{és} \qquad f^{(n)}(x) \geq g^{(n)}(x) \quad (x \in (a, b)),$$

továbbá tetszőleges $J \subset (a, b)$ intervallum esetén van olyan $c \in J$, amelyre $f^{(n)}(c) > g^{(n)}(c)$, akkor bármely $x \in (a, b)$ számra fennáll az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség.

Házi feladat. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$1.\ 1 + x < e^x \quad (0 \neq x \in \mathbb{R}), \qquad 2.\ \frac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x \quad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Útm.

1. Mivel
$$1+x<e^x \quad (0\neq x\in\mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0<e^x-x-1 \quad (0\neq x\in\mathbb{R}),$$
ezért az
$$f(x):=e^x-x-1 \qquad (0\neq x\in\mathbb{R}).$$
függvény monotonitását vizsgáljuk. Mivel $f\in\mathfrak{D}$ és
$$f'(x)=e^x-1 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$
ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

Mivel tetszőleges $I\subset(-\infty,0]$, ill. $J\subset[0,+\infty)$ intervallumok esetén van olyan $a\in I$, ill. $b\in J$ hogy $f'(a)<0$, ill. $f'(b)>0$, ezért f a $(-\infty,0]$ intervallumon is szigorúan monoton csökkenő, illetve a $[0,+\infty)$ intervallumon szigorúen monoton növekedő. Így
$$e^x-x-1=f(x)>f(0)=0 \quad (0>x\in\mathbb{R}), \quad \text{ill.} \quad e^x-x-1=f(x)>f(0)=0 \quad (0<x\in\mathbb{R}).$$

2. Két lépésben igazoljuk az gyenlőtlenségek fennállását.

1. lépés. Mivel ln szogorúan monoton növekedő, ezért a fentiek következtében bármely $0<x\in\mathbb{R}$ esetén
$$\ln(x+1)<\ln(e^x)=x.$$

2. lépés. Ha
$$f(x):=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x} \qquad (-1<x\in\mathbb{R}),$$
akkor f deriválható, továbbá
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1\cdot(1+x)-x\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0 \qquad (0<x\in\mathbb{R}).$$
Mivel bármely $I\subset[0,+\infty)$ esetén van olyan $a\in I$, hogy $f'(a)>0$, ezért f szigorúan

monoton növekedő a $[0,+\infty)$ intervallumon. Következésképpen

$$\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}=f(x)>f(0)=\ln(1)-0=0 \qquad (0<x\in\mathbb{R}). \qquad \blacksquare$$

Házi feladat. Határozzuk meg f monotonitási intervallumait, ill. lokális szélsőértékhelyeit!

1. $f(x):=\dfrac{e^x}{x} \qquad (0\neq x\in\mathbb{R});$
2. $f(x):=x^5-5x^4+5x^3+1 \qquad (x\in\mathbb{R});$
3. $f(x):=(x+2)^2(x-1)^2 \qquad (x\in\mathbb{R});$
4. $f(x):=x^4-x^2 \qquad (x\in\mathbb{R});$
5. $f(x):=x^3-2x+20 \qquad (x\in\mathbb{R});$
6. $f(x):=x^3-12x \qquad (x\in\mathbb{R});$
7. $f(x):=\dfrac{x}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R});$
8. $f(x):=\dfrac{x^2+1}{x} \qquad (0\neq x\in\mathbb{R});$
9. $f(x):=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \qquad (x\in\mathbb{R});$
10. $f(x):=x\sqrt{1-x^2} \qquad (x\in[-1,1]);$
11. $f(x):=\sin(x)+\cos(x) \qquad (x\in\mathbb{R});$
12. $f(x):=\cos(x)+\dfrac{\cos(2x)}{2}+\dfrac{\cos(3x)}{3} \qquad (x\in\mathbb{R}).$

Útm.

1. Mivel $f\in\mathfrak{D}$ és tetszőleges $0\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2},$$

ezért

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

2. Mivel $f\in\mathfrak{D}$ és

$$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)=x^2(x-1)(x-3) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$		$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^2 + 2(x+2)^2(x-1) = 2(x+2)(x-1)(2x+1) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

4. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$	0	$\left(0,+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

5. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$

6. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\uparrow$	lok. min.	$\uparrow$

7. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

8. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

9. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x)}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

10. Mivel $f \in \mathfrak{D}(-1,1)$ és

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1)),$$

ezért

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. min.	$\downarrow$

11. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Lévén, hogy

$$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) < 0, \quad \text{ill.} \quad f''\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) > 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

ezért f-nek a $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ helyeken maximuma, az $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ helyeken pedig minimuma van:

$$f\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az f függvény monoton

- csökkenő a $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) + 2k\pi$ intervallumokon $(k \in \mathbb{Z})$;
- növekvő a $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ intervallumokon $(k \in \mathbb{Z})$.

12. Mivel az f függvény 2π-periodikus, ezért ezért csak a $[0, 2\pi)$ intervallumon vizsgáljuk monotonitását. Ha tehát $x \in [0, 2\pi)$, akkor

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(x) - \sin(2x) - \sin(3x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(2x) - \cos(x)\sin(2x) = \\
&= -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(2x) - 2\cos^2(x)\sin(x) = -\sin(x)\left\{1 + 2\cos(x) + \cos(2x) + 2\cos^2(x)\right\} = \\
&= -\sin(x)\left\{2\cos(x) + 2\cos^2(x) + 2\cos^2(x)\right\} = -2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\{1 + 2\cos(x)\}.
\end{aligned}$$

Így

$$f'(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x\in\{0,\pi\} \quad \vee \quad x\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\} \quad \vee \quad x\in\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}\right).$$

Mivel

$$f''(x)=-\cos(x)-2\cos(2x)-3\cos(3x) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

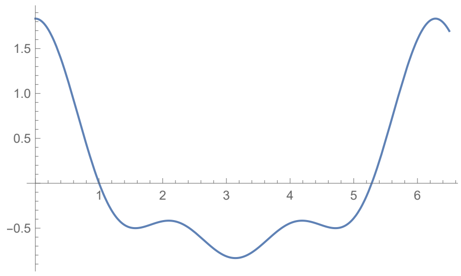
és

$$f''(0)=-6<0,\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2>0,\quad f''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}<0,\quad f''(\pi)=2>0,\quad f''\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}<0,\quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2>0,$$

ezért f-nek a $\left\{0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$ halmaz pontjaiban lokális maximuma, a $\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ halmaz pontjaiban pedig lokális minimuma van. Tobábbá az is igaz, hogy

- f monoton fogyó a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumokon;
- f monoton növő a $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$, intervallumokon.

(vö. 13. ábra).



9. ábra

Házi feladat. Határozzuk meg f monotonitási intervallumait, ill. lokális szélsőértékhelyeit!

1. $f(x):=4x+\mathrm{tg}(x) \qquad (x\in\mathbb{R}:\ |2x|<\pi)$;
2. $f(x):=\mathrm{arc\,tg}(2x) \qquad (x\in\mathbb{R})$;
3. $f(x):=-x\ln(x) \qquad (0<x\in\mathbb{R})$;
4. $f(x):=x^x \qquad (0<x\in\mathbb{R})$;
5. $f(x):=\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\})$.

Útm.

1. Mivel $f\in\mathfrak{D}$ és

$$f'(x)=4+\frac{1}{\cos^2(x)}>0 \qquad (x\in\mathbb{R}:\ |2x|<\pi),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő és f-nek nincsen szélsőértéke.

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és
$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ezért f szigorúan monoton növekedő és f-nek nincsen szélsőértéke.

3. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és
$$f'(x) = -\ln(x) - \frac{x}{x} = -(1+\ln(x)) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$
ezért

	$\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e} + \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

4. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\ln(f(x)) = x\ln(x),$$
így
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1, \qquad \text{azaz} \qquad f'(x) = x^x\,(\ln(x)+1) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$
Következésképpen

	$\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

5. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x^2-3x+2)-(x^2+3x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{2x^3-3x^2-5x+6-(2x^3+3x^2-5x-6)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \\ &= \frac{-6x^2+12}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-6(x^2-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}. \end{aligned}$$
Így

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 1)$	$(1, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$

A f függvény lokális minimuma, ill. maximuma tehát
$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)} = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}, \qquad \text{ill.} \qquad f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}.$$

Házi feladat. Igazoljuk, hogy fennáll az

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenségpár!

Útm.

1. lépés. A jobb oldali egyenlőtlenség igazolásához tekintsük a

$$\varphi(x) := x - \ln(x+1) \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

Mivel

$$\varphi'(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

ezért φ szigorúan monoton növekedő. Következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 = \varphi(0) < \varphi(x) = x - \ln(x+1), \qquad \text{azaz} \qquad \ln(x+1) < x.$$

2. lépés. A bal oldali egyenlőtlenség igazolásához tekintsük a

$$\varphi(x) := x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1) \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1} = \frac{1 + x - x^2 - x - 1}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

Mivel

$$\varphi'(x) \leq 0 \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

ezért φ szigorúan monoton fogyó. Következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 = \varphi(0) > \varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1), \qquad \text{azaz} \qquad x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1).$$

Megjegyezzük, hogy a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával is belátható ez az egyenlőtlenség. Tekintsük ui. tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi : [1, 1+x] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) := \ln(t)$$

leképezést. Ekkor

$$\varphi \in \mathfrak{C}[1, 1+x] \cap \mathfrak{D}(1, 1+x),$$

következésképpen alkalmas $\xi \in (1, 1+x)$ köztes számra

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\varphi(1+x) - \varphi(1)}{1+x-1} = \varphi'(\xi) = \frac{1}{\xi} < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(x+1) < x. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Alkalmas $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monotonitását felhasználva igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségek fennállását!

1. $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R});$
2. $(x^p + 1)^2 < (x^2 + 1)^p \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ 2 < p \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Ha
$$f(x) := \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$
akkor $f(0) = 0$ és
$$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$
Ha sikerül belátnunk, hogy tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) > 0$, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor f szigorúan monoton növekedő, következésképpen
$$0 = f(0) < f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}, \qquad \text{azaz} \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$
teljesül. Az f' deriváltfüggvénynek a $(0, +\infty)$ intervallumon való pozitivitását pedig úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk, hogy $f''(0) = 0$ és tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f''(x) > 0$ teljesül. Ebből ui. az következik, hogy f' szigorúan monoton növekedő, következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $0 = f'(0) < f'(x)$. Mivel tetszőleges $0 \leq x \in \mathbb{R}$ számra $f''(x) = -\sin(x) + x$, ezért $f''(0) = 0$. Nem maradt más tehát hátra, mint az, hogy megmutassuk, hogy bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f''(x) > 0$ teljesül. Mivel bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén $f'''(x) = -\cos(x) + 1$, ezért f''' pontosan a $2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ pontokban tűnik el, egyébként pedig $f''' > 0$. Következésképpen bármely $J \subset [0, +\infty)$ intervallumnak van olyan α pontja, amelyre $f'''(\alpha) > 0$, ami azt jelenti, hogy f'' szigorúan monoton növekedő, ahonnan minden $x \in (0, +\infty)$ számra $0 = f''(0) < f''(x)$ következik.

2. Világos, hogy tetszőleges $x \in (0, +\infty)$, ill. bármely $p \in (2, +\infty)$ esetén igaz az
$$(x^p + 1)^2 < (x^2 + 1)^p \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^p + 1 < (x^2 + 1)^{p/2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1$$
ekvivalencia. Ha tehát
$$f(x) := (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$
akkor $f \in \mathfrak{D}$, $f(0) = 0$ és tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x) = px(\sqrt{x^2 + 1})^{p-2} - px^{p-1} = px\left\{(\sqrt{x^2 + 1})^{p-2} - x^{p-2}\right\} > px\left\{(\sqrt{x^2})^{p-2} - x^{p-2}\right\} = 0.$$
Következésképpen f szigorúan monoton növekedő, ahonnan tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ számra
$$0 = f(0) < f(x) = (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1, \qquad \text{azaz} \qquad (x^p + 1)^2 < (x^2 + 1)^p$$
következik. ■

Házi feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

1. lokális szélsőértékeit;
2. abszolút szélsőértékeit a $H := [-2, 0]$ intervallumon!

Útm.

1. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - x \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2},$$

ezért

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke a H halmazon:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \{f(x) \in \mathbb{R} : \quad x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \{f(-2),\ f(-1),\ f(0)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \left\{-\frac{2}{3},\ -1,\ 0\right\} = \begin{matrix}-1,\\ 0,\end{matrix}$$

hiszen $1 \notin H$. Következésképpen az f függvény abszolút minimuma, ill. maximuma a H halmazon -1, ill. 0. ■

Gyakorló feladatok.

1. Határozzuk meg az
$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(1+\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény
   (a) lokális szélsőértékeit;
   (b) abszolút szélsőértékeit a $H := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon!

2. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit!
   (a) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^3+1} \quad (0 \leq x \in \mathbb{R})$;
   (b) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-10, 12])$;
   (c) $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (d) $f(x) := \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}\ (x \in [-2, 3])$;
   (e) $f(x) := \dfrac{a}{a^{x^2}+a} + a^{x^2} + 1\ (x \in \mathbb{R}:\ 1 \neq a \in (0, +\infty))$.

Útm.

1. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és
$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{1+(1+\cos(x))^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f'(x) = 0 \iff x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
ezért az
$$\{2k\pi \in \mathbb{R}:\ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{ill.} \qquad \{(2k+1)\pi \in \mathbb{R}:\ k \in \mathbb{Z}\}$$
pontjaiban f'-nek $(+,-)$-, ill. $(-,+)$-jelváltása, következésképpen f-nek lokális maximuma, ill. minimuma van. Így f lokális maximuma, ill. lokális minimuma:
$$f(2k\pi) = \operatorname{arc\,tg}(2), \qquad \text{ill.} \qquad f((2k+1)\pi) = \operatorname{arc\,tg}(0) = 0.$$

   2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke a H halmazon:
$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x) \in \mathbb{R}:\ \ x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-\pi/2),\ f(0),\ f(\pi), f(3\pi/2)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{\frac{\pi}{4}, \operatorname{arc\,tg}(2), \frac{\pi}{4}\right\} = \begin{matrix}\pi/4,\\ \operatorname{arc\,tg}(2)\end{matrix},$$
hiszen az arc tg függvény szigorúan monoton növekedő. Következésképpen az f függvény abszolút minimuma, ill. maximuma a H halmazon $\pi/4$, ill. $\operatorname{arc\,tg}(2)$.

2. (a) Nyilvánvaló, hogy f a 0-ban veszi fel legkisebb értékét, hiszen $f(0) = 0$ és bármely $x > 0$ számra $f(x) > 0$. Mivel f differenbciálható és tetszőleges $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}, \qquad \text{ezért} \qquad f'(x) = 0 \iff x \in \left\{0,\ \sqrt[3]{2}\right\}.$$

Lévén, hogy f szigorúan monoton növekvő a $\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$ intervallumon és szigorúan monoton fogyó a $\left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$ intervallumon, ezért f a $\sqrt[3]{2}$ helyen veszi fel maximuát, továbbá

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}^2}{2+1} = \sqrt[3]{\frac{4}{27}}.$$

(b) Mivel bármely $x \in (-10, 12)$ esetén

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-2, 1\}.$$

Tehát

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \{f(x) \in \mathbb{R} : \;\; x \in [-10, 12]\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \{f(-10),\, f(12),\, f(-2),\, f(1)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \{-1579,\, 3745,\, 21,\, -6\} = \begin{matrix}-1579,\\ 3745,\end{matrix}$$

hiszen

	2	3	−12	1
−10	2	−17	158	−1579
12	2	27	312	3745
−2	2	−1	−10	21
1	2	5	−7	−6

(c) Világos, hogy f a 0-ban veszi fel legkisebb értékét, hiszen $f(0) = 0$ és bármely $x > 0$ számra $f(x) > 0$. Mivel f differenbciálható és tetszőleges $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x \cdot e^{-x}\,(2-x)\,,$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{0, 2\}.$$

Lévén, hogy f szigorúan monoton fogyó a $(-\infty, 0)$ és a $(2, +\infty)$ intervallumon, ill. szigorúan monoton növekedő a $(0, 2)$ intervallumon, ezért f a 0-ban helyen veszi fel minimumát: $f(0) = 0$. Mivel

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty,$$

ezért f felülről nem korlátos.

(d) Mivel bármely $x \in (-2, 3)$ esetén

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 4x}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}} = \frac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}},$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}.$$

Tehát

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \{f(x) \in \mathbb{R} : \;\; x \in [-2, 3]\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \left\{f(-2),\, f(3),\, f(-\sqrt{2}),\, f(0),\, f(-\sqrt{2})\right\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \left\{3, \sqrt{54}, 3, 3, 3\right\} = \begin{matrix}3,\\ \sqrt{54}.\end{matrix}$$

(e) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{-a \cdot a^{x^2}\ln(a) \cdot 2x}{(a^{x^2} + a)^2} + a^{x^2}\ln(a) \cdot 2x = a^{x^2}\ln(a) \cdot 2x \left\{\frac{-a}{(a^{x^2}+a)^2} + 1\right\} = a^{x^2}\ln(a) \cdot 2x \cdot \frac{(a^{x^2}+a)^2 - a}{(a^{x^2}+a)^2},$$

ezért az $f'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van: 0. Lévén, hogy

- $a > 1$ esetén f-nek 0-ban $(-,+)$ jelváltása van és $\lim_{\pm} f = +\infty$, ezért f a 0 veszi fel legkisebb értékét: $f(0) = \frac{a}{1+a} + 2$, és f felülről nem korlátos;

- $0 < a < 1$ esetén f-nek 0-ban $(+,-)$ jelváltása van és $\lim_{\pm} f = 0$, ezért f a 0-ban veszi el legnagyobb értékét: $f(0) = \dfrac{a}{1+a} + 2$. Az f függvény ugyan alulról korlátos, hiszen $f \geq 0$. de nincsen legkisebb értéke, hsizen 0 az egyetlen stacionárius helye. ■

Házi feladatok.

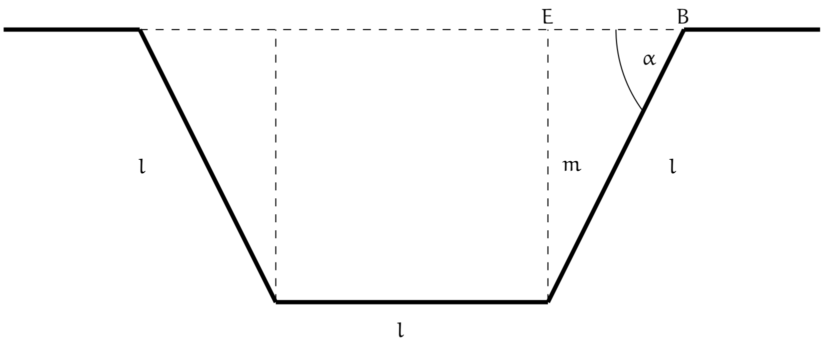
1. Egy trapéz keresztmetszetű csatornát kell készítenünk, amelnek a földben lévő minden oldala adott l hosszúságú. Hány fokos szöget kell bezárnia a nem párhuzamos oldalaknak a vízszintessel, hogy a keresztmetszet a lehető legnagyobb legyen?

2. Tekintsünk egy $v_0 > 0$ kezdősebességgel légüres térben ferdén elhajított testet. Határozzuk meg, hogy a vízsznteshez viszonyítva milyen θ szög alatt kell elhajítani, hogy az maximális H távolságban érje el újból a vízszintest! Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a testet d magasságból hajítjuk (súlylökés)!

3. Keressük meg azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, amelynek az egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló két oldala a koordinátatengelyekre, az origóval szemközti csúcs pedig az
$$f(x) := e^{-3x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$
függvény grafikonjára illeszkedik!

Útm.

1. Az ábráról látható, hogy a csatorna



$m := l \cdot \sin(\alpha)$ mélyen van a földben. Így a csatorna keresztmetszetének területe

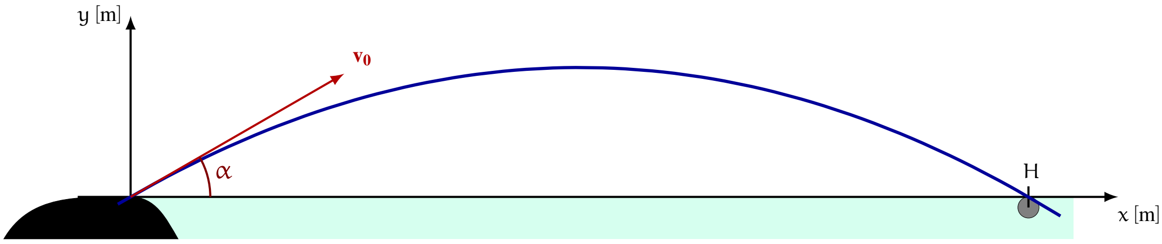
$$T(l) := 2 \cdot \frac{l \cdot \cos(\alpha) \cdot m}{2} + l \cdot m = l^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha) + l^2 \sin(\alpha) = l^2 \left(\frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sin(\alpha)\right) \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

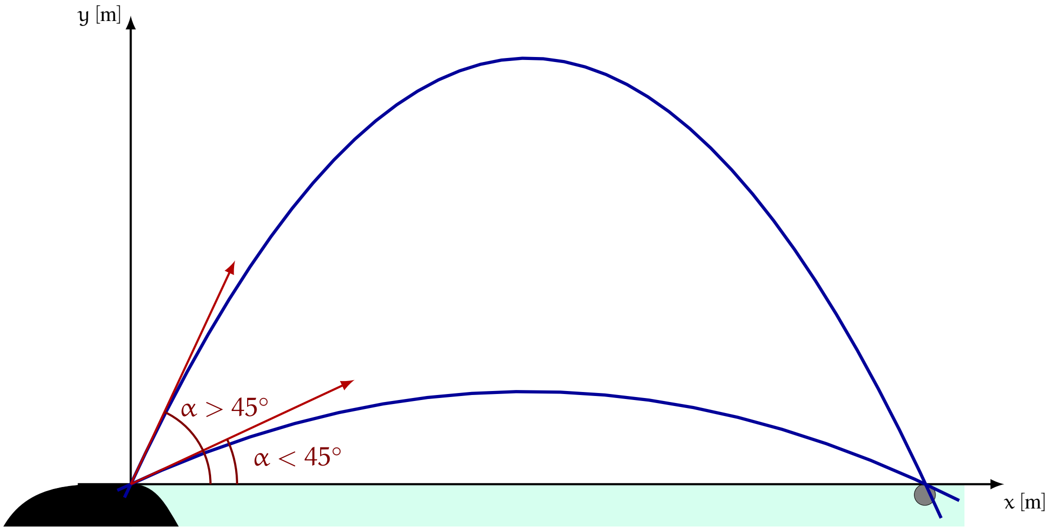
Mivel $T \in \mathfrak{D}$ és

$$T'(x) = l^2(\cos(2\alpha) + \cos(\alpha)) = l^2(2\cos^2(\alpha) - 1 + \cos(\alpha)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{-1 + \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3},$$

továbbá T-nek nincsen más stacionárius helye, ezért T-nek az $\alpha = \frac{\pi}{3}$-ban van abszolút maximuma. Ez azt jelenti, hogy a csatorna nem párhuzamos oldalának $60°$-os szöget kell bezárnia a vízszintessel.

2. A sebesség vízszintes összetevője $v_0 \cos(\alpha)$, a függőleges összetevő pedig $v_0 \sin(\alpha)$.





A test vízszntesre eső vetülete egyenletes mozgást végez, következésképpen a test t idő elteltével az $x = v_0 t \cos(\alpha)$ abszcisszájú pontban lesz. A függőleges vetület mozgását, amelynél a nehézségi erőt is figyelembe kell venni – az

$$y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}$$

egyenlet írja le. A két összefüggésből a t értéket kilüszöbölve a pálya egyenletét kapjuk:

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}.$$

Az x-tengelyt akkor metszi ez a görbe (hajítási parabola), ha a test eléri a vízszintest, azaz ha $y=0$. Az

$$x\,\mathrm{tg}(\alpha)-\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}=0$$

egyenlet gyökei:

$$x=0 \qquad \text{és} \qquad x=\frac{v_0^2}{g}\cdot\sin(2\alpha).$$

Tehát a

$$H(\alpha):=\frac{v_0^2}{g}\cdot\sin(2\alpha) \qquad \left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

függvény abszolút maximumát kell keresnünk. Mivel $H\in\mathfrak{D}^2$ és

$$H'(\alpha)=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\cos(2\alpha)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos(2\alpha)=0\Longleftrightarrow \quad \alpha=\frac{\pi}{4}, \quad \text{továbbá} \quad H''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4v_0^2}{g}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4v_0^2}{g}<0,$$

ezért H-nak a $\frac{\pi}{4}$-ben lokális maximuma van, amely nyilvánvalóan abszolút maximum is egyben, hiszen $H>0$ és

$$\lim_{\alpha\to 0}H(\alpha)=0=\lim_{\alpha\to\pi/4}H(\alpha).$$

Megjegyezzük, hogy a sin függvény $(0,\pi)$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének abszolút maximuma 1 és ezt $\frac{\pi}{2}$-ben veszi fel, ahonnan

$$2\alpha=\frac{\pi}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \alpha=\frac{\pi}{4}$$

következik. Ha viszont a hajítás d magasságból történik, úgy az x-tengelyt akkor metszi a fenti prabola, ha $y=-d$. Ezért most az

$$x\,\mathrm{tg}(\alpha)-\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}=-d$$

egyenlet pozitív gyökét keressük:

$$x=\frac{v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}\left\{\mathrm{tg}(\alpha)+\sqrt{\mathrm{tg}^2(\alpha)+\frac{2gd}{v_0^2\cos^2(\alpha)}}\right\}=:\frac{v_0^2}{g^2}\left\{\frac{\sin(2\alpha)}{2}+\cos(\alpha)\sqrt{\sin^2(\alpha)+c}\right\} \qquad \Big/\ c:=\frac{2gd}{v_0^2}\ \Big/.$$

Tehát a

$$H_d(\alpha):=\frac{v_0^2}{g^2}\left\{\frac{\sin(2\alpha)}{2}+\cos(\alpha)\sqrt{\sin^2(\alpha)+c}\right\} \qquad \left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

függvény abszolút maximumát kell keresnünk. Mivel $H_d\in\mathfrak{D}^2$ és a

$$H_d'(\alpha)=\frac{v_0^2}{g^2}\left\{\cos(2\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\sqrt{\sin^2(\alpha)+c}+\frac{\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)}{\sqrt{\sin^2(\alpha)+c}}\right\},$$

ezért

$$H_d'(\alpha)=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \cos(2\alpha)\sqrt{\sin^2(\alpha)+c}=\sin(\alpha)\{c-\cos(2\alpha)\}$$

Négyzetreemelés után a fenti jobboldali egyenlőség az

$$\cos^2(2\alpha)\left[\sin^2(\alpha)+c\right]=\sin^2(\alpha)\left[c^2-2c\cos(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)\right]$$

alakot ölti, amiből

$$\cos^2(2\alpha)+2\sin^2(\alpha)\cos(2\alpha)=c\sin^2(\alpha) \iff \cos(2\alpha)\left[\underbrace{\cos(2\alpha)+2\sin^2(\alpha)}_{=1}\right]=c\sin^2(\alpha) \iff \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=c\sin^2(\alpha)$$

következik. Mindez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{ctg}^2(\alpha)=1+c \qquad \iff \qquad \alpha=\mathrm{arc\,ctg}\left(\sqrt{1+c}\right)=\mathrm{arc\,ctg}\left(\sqrt{1+\frac{2gd}{v_0^2}}\right).$$

Mivel $H_d>0$ és H_d'-nek egyetlen zérushelye van a kérdéses intervallumban, így H_d kétszer deriválhatósága miatt az imént számított stacionárius pont egyben lokális szélsőértékhely: lokális maximum. Nem nehéz belátni, hogy itt abszolút maximumról van szó. **Megjegyezzük**, hogy

$$\mathrm{arc\,ctg}\left(\sqrt{1+\frac{2gd}{v_0^2}}\right)\longrightarrow \mathrm{arc\,ctg}\,(1)=\frac{\pi}{4} \qquad (d\to 0),$$

azaz visszakapjuk a fenti megoldást. A maximális hajyítási távolságra a fenti formulába való behelyettesítéssel

$$x_{\max}=\frac{v_0}{2g}\sqrt{v_0^2+2gd}$$

adódik.

3. Ha az origóval szemközti csúcs abszcisszája x, akkor ordinátája $f(x)$, így a kérdéses tégalalap területe:

$$T(x):=x\cdot e^{-3x} \qquad (x\in(0,+\infty)).$$

Látható, hogy $T\in\mathfrak{D}$ és

$$T'(x)=e^{-3x}+x\cdot e^{-3x}\cdot(-3)=(1-3x)\cdot e^{-3x} \qquad (x\in(0,+\infty)).$$

Mivel T'-nek az $\frac{1}{3}$ pontban $(+,-)$-jelváltása van, ezért az $\frac{1}{3}$ pont lokális maximumhelye T-nek. Mivel

$$\lim_{0+0}T=\lim_{x\to 0+0}x\cdot e^{-3x}=0 \qquad \text{és} \qquad 0<\lim_{+\infty}T=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{3x}}<\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(3x^2)/2!}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x}=0,$$

ezért az $\frac{1}{3}$ pont egyben abszolút maximumhely is, azaz $x=\frac{1}{3}$ esetén kapjuk a maximális területű téglalapot. ■

Szöveges szélsőértékfeladatok I.

1. Osszunk fel egy 30 cm-es szakaszt két részre úgy, hogy a részekkel szerkesztett négyzetek területének összege minimális legyen!

2. Mely pozitív szám esetén lesz a szám és reciprokának összege a lehető legkisebb?

3. Két, egymást derékszögben metsző egyenes egy-egy pontja egyidejűleg kezd a csúcspont felé mozogni. Az egyik 100 m, a másik 60 m távolságban indul a csúcsponttól. Az első sebessége 4 m/s, a másiké 2 m/s. Mikor lesz a két pont egymáshoz legközelebb, és mekkora lesz ekkor egymástól a távolságuk?

4. Egy 5 m széles csatornán szálfákat úsztatnak. A csatornából egy $2,5$ m széles melléékág vezet le, amelynek az iránya az eredetivel derékszöget zár be. Legyfeljebb hány m hosszúságú szálfát tudunk a szóban forgó mellékágra terelni?

5. Az R sugarú gömbbe írt kúpok közül keressük meg azt, amelyiknek a téfogata maximális!

6. Ismeretes, hgy adott f fókusztávolságú szemnüveglecsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága:
$$k = \frac{tf}{t-f} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$
(vö. **lencsetörvény**). Számítsuk ki szóban forgó lencse esetében a tárgy és képtávolság összegének alsó, ill. felső határát!

Útm.

1. Ha x az egyik szakasz hossza, akkor a másiké nyilván $30-x$. A négyzetek területének összegére
$$T(x) := x^2 + (31-x)^2 \qquad (x \in (0,30)).$$
Mivel $T \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in (0,30)$ esetén $T'(x) = 2x - 2(30-x)$, ezért a $T'(x) = 0$ egyenlet megoldása: 15. Világos, hogy itt T-nek minimuma van, hiszen
$$T(x) = 2x^2 - 60x + 900 \qquad (x \in (0,30)).$$

2. Legyen x a szóban forgó pozitív szám. Ekkor az
$$f(x) := x + \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény minimumhelyét kell meghatározni. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = \frac{1}{x}$, azaz ha $x = 1$, ezért az 1 az a pozitív szám, amelyre a keresett összeg minimális: 2.

3. Nyilvánvaló, hogy t idő elteltéevel a két pont

$$f(t) := \sqrt{(100 - 4t)^2 + (60 - 2t)^2} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

méter távolságra lesz egymástól. Világos, hogy f-nek ugyanott van minimuma, ahol a

$$g(t) := f^2(t) = (100 - 4t)^2 + (60 - 2t)^2 \qquad (t \in [0, +\infty))$$

függvénynek: $t = 26$. Ekkor a két pont távolsága $f(26) = \sqrt{800}$ méter.

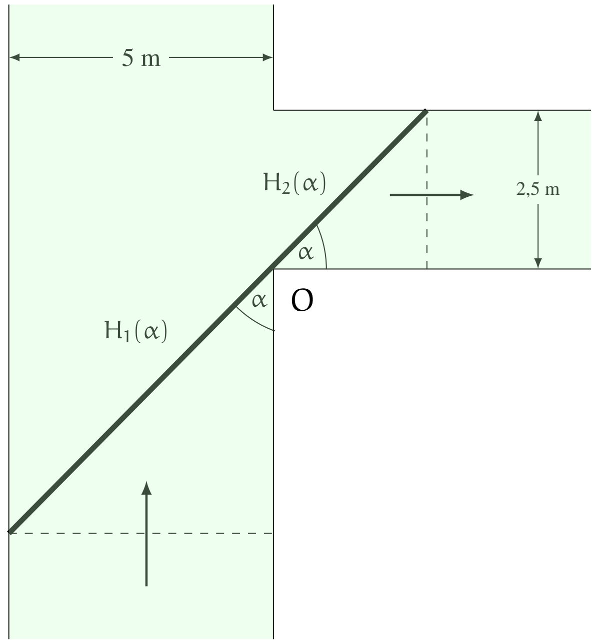
4. Világos, hogy csak olyan hosszúságú szálfát tudunk a mellékágra terelni, amely rövidebb, mint az a szakasz, amelyiknek az egyik végpontja a csatornának a mellékággal szembeni partján van, a másik pedig a mellékág bal partján, továbbá amelyik illeszkedik a csatorna és a mellékág O találkozási pontjára. Az optimális szálfahossz tehát ezen szakaszok hosszainak a minimuma. Ha α jelöli az egyik ilyen szakasznak a csatorna jobb partjával bezárt szögét, akkor a szakasz hossza

$$H(\alpha) := H_1(\alpha) + H_2(\alpha) = \frac{5}{\sin(\alpha)} + \frac{2,5}{\cos(\alpha)} \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Világos, hogy $H \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ számra

$$\begin{aligned} H'(\alpha) &= -\frac{5 \cdot \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{2,5 \cdot \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{-5 \cdot \cos^3(\alpha) + 2,5 \cdot \sin^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} = \\ &= \frac{-20 \cdot \cos^3(\alpha) + 10 \cdot \sin^3(\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} = -10 \cdot \frac{2 \cdot \cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}, \end{aligned}$$

és



$$
\begin{aligned}
H''(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{5\cdot\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}+\frac{2,5\cdot\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) = \\
&= \frac{5\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin^2(\alpha)+5\cdot\cos(\alpha)\cdot 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} + \\
&\quad + \frac{2,5\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)-2,5\cdot\sin(\alpha)\cdot 2\cdot\cos(\alpha)\cdot(-\sin(\alpha))}{\cos^4(\alpha)} = \\
&= \frac{5\cdot\sin^2(\alpha)+10\cdot\cos^2(\alpha)}{\sin^3(\alpha)}+\frac{2,5\cdot\cos^2(\alpha)-5\cdot\sin^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} = \\
&= \frac{5+5\cdot\cos^2(\alpha)}{\sin^3(\alpha)}+\frac{5+5\cdot\sin^2(\alpha)}{2\cdot\cos^3(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Mivel

$$H'(\alpha^*)=0 \iff 2\cdot\cos^3(\alpha^*))-\sin^3(\alpha^*))=0 \iff \operatorname{tg}(\alpha^*)=\sqrt[3]{2} \iff \alpha^*=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt[3]{2}\right)$$

és $\alpha^*\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ következtében

$$\cos(\alpha^*)=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha^*)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}>0,$$

$$\sin(\alpha^*) = \frac{\frac{\sin(\alpha^*)}{\cos(\alpha^*)}}{\frac{1}{\cos(\alpha^*)}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha^*)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\alpha^*)}}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha^*)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha^*)}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}} > 0,$$

ezért $H''(\alpha^*) > 0$. Ennélfogva a H függvény az

$$\alpha^* := \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt[3]{2}\right) \approx 51,56^\circ$$

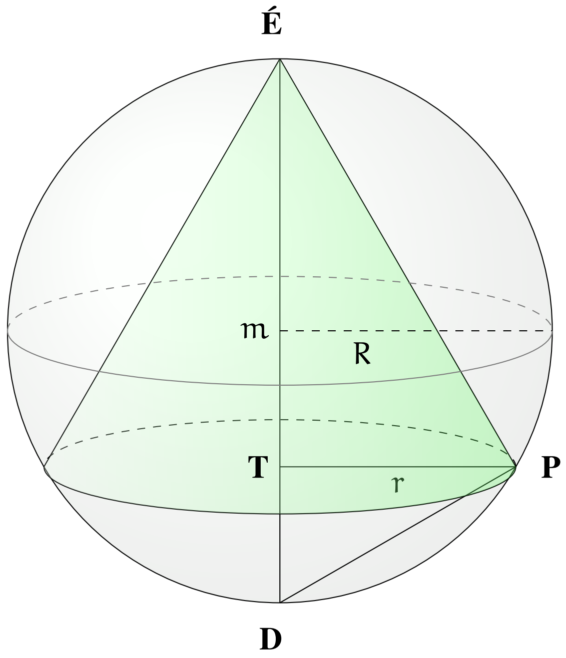
szögben veszi fel abszolút minimumát. Így H abszolút minimuma:

$$H(\alpha^*) = H\left(\sqrt[3]{2}\right) = 5 \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} + 2,5 \cdot \sqrt{1+\sqrt[3]{4}} \approx 10,4,$$

Ez azt jelenti, hogy közel maximum $10,4$ m-es szálfát lehet a mellékágra irányítani.

5. Ha r jelöli a beírt kúp alapkörének sugarát, m pedig magasságát, akkor térfogata

$$V(m) := r^2\pi \cdot \frac{m}{3} \qquad (m \in (0, 2R)).$$



Mivel a $\overline{\textbf{PT}}$ szakasz merőleges a pólusokat összekötő $\overline{\textbf{ED}}$ szakaszra, ezért Thalész-tétel-tétel értelmében az északi és déli pólust összekötő $\overline{\textbf{ÉD}}$szakasz derékszögben látszik a gömbfelület **P** pontjából. A magasságtétel szerint így r az $\overline{\textbf{ÉT}}$ és a $\overline{\textbf{DT}}$ szakaszok hosszának mértani közepe:

$$r = \sqrt{m \cdot (2R - m)}.$$

Következésképpen

$$V(m) = m \cdot (2R - m) \cdot \frac{m}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(2Rm^2 - m^3\right) \qquad (m \in (0, 2R)).$$

Mivel tetszőleges $m \in (0, 2R)$ esetén

$$V'(m) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(4Rm - 3m^2\right) \qquad \text{és} \qquad V''(m) = \frac{\pi}{3} \cdot (4R - 6m) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2R - 3m),$$

ezért

$$V(m^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m = \frac{4R}{3} \qquad \text{és} \qquad V''(m^*) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2R - 4R) = -\frac{4\pi R}{3} < 0$$

következtében a maximálisan beírható kúp m^* magasságára, ill. alapkörének r^* sugarára

$$m^* = \frac{4R}{3}, \qquad \text{ill.} \qquad r^* \sqrt{m^* \cdot (2R - m^*)} = \sqrt{\frac{4R}{3} \cdot (2R - \frac{4R}{3})} = \sqrt{\frac{4R \cdot (6R - 4R)}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} R.$$

6. Legyen a két távolság összege:

$$S(t) := t + k = t + \frac{tf}{t - f} \qquad (t \in (f, +\infty)).$$

Mivel $S \in \mathfrak{D}^2$ és

$$S'(t) = 1 + \frac{f(t - f) - tf}{(t - f)^2} = 1 - \frac{f^2}{(t - f)^2} \quad \text{és} \quad S''(t) = \frac{2f^2}{(t - f)^3} \qquad (t \in (f, +\infty)),$$

ezért

$$S'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2f \qquad \text{és} \qquad S''(2f) = \frac{2}{f} > 0.$$

Így S-nek $2f$-nél abszolút minimuma van. Mivel $\lim_{f} S = +\infty = \lim_{+\infty} S$, ezért S felülről nem korlátos, tehát

$$\inf\{S(t) \in \mathbb{R} : \ f \neq t \in (0, +\infty)\} = \min\{S(t) \in \mathbb{R} : \ f \neq t \in (0, +\infty)\} = S(2f) = 4f$$

és

$$\sup\{S(t) \in \mathbb{R} : \ f \neq t \in (0, +\infty)\} = +\infty.$$

Szöveges szélsőértékfeladatok II.

1. Egy szép napon az $A(0,a)$ városban lakó *Billy* elhatározza, hogy meglátogatja a $B(b,c)$-beli *Mary*t $/a,b,c>0/$, ezért lóra pattan. *Szomjas* névre hallgató lova azonban csak akkor hajlandó (egyenletes sebességgel) vágtatni, ha útközben ihat a $-\infty$-ben eredő, a $+\infty$-be torkolló, és az x-tengely mentén folyó *River* vizéből. Hol célszerű *Billy*nek megitatnia a lovát, ha azt akarja, hogy a lehető legrövidebb úton jusson el *Mary*hez?

2. Az előbbi feladat módosításaként tegyük fel, hogy *Mary* a *River* túlsó partján lévő $B(b,-c)$ városban lakik, *Szomjas* pedig az A város felőli parton v_1, addig a túlparton v_2 (egyenletes) sebességgel tud vágtatni. Hol célszerű megitatni a *Szomjas*t *Billy*nek, ha azt karja, hogy a legrövidebb idő alatt jusson el A-ból a B városba?

3. Ismeretes, hogy az emberi szem akkor lát valami a legjobban, ha azt a (bizonyos korlátok között) a lehető legnagyobb szög alatt látja. Szociológusok megfigyelték, hogy a Skóciába látogató turisták az idegenforgalmi nevezetességnek számító kockás szoknya helyett a szoknya alatti lábszárrészt nézegetik. Számítsuk ki, hogy milyen közel kell menni a turistának a szoknyás skótokhoz, hogy a szoknya alól kivilágló lábszárrész a lehető legnagyobb szög alatt látszódjék!

4. Valamely R sugarú kör alakú asztal közepe felett milyen magasra kell emelni a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a beesési szög koszinuszával, fordítva arányos a távolság négyzetével.)

5. Egy számítógép alaplapjának elkülönített részén apcsoljunk egy R ellenállású fogyasztót valamely U_0 elektromotoros erejű (üresjárási feszültségű) és R_b belső ellenállású áramforrásra. Milyen R esetén lesz a fogyasztóra jutó teljesítmény maximális? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

6. Valamely mennyiséget (pl. valamely test tömegét, időt stb.) n-szer mérünk $(n\in\mathbb{N})$. A mérés eredményeként az $x_1,\ldots,x_n$ számokat kapjuk. A mennyiség valódi értéks legjobb becslésének azt az $\overline{x}$ számot tekintjük, amelytől a mérési altérések négyzetösszege a legkisebb. Határozzuk meg aztz az $\overline{x}$ számot!

Útm.

1. Mivel a praeryn (az euklideszi sík neve over the sea) két pont között legrövidebb út az egyenes, *Billy*nek az $X(x,0)$ ideális itatóhelyig $\sqrt{a^2+x^2}$, X-ből B-be pedig $\sqrt{(b-x)^2+c^2}$ utat kell megtennie, A-ból B-be tehát összesen$f(x)$-et:

$$f(x):=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Az f függvény legalább kétszer differenciálható, továbbá

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} - \frac{-\sqrt{(b-x)^2+c^2} + \dfrac{(b-x)^2}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}}{(b-x)^2+c^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + \frac{c^2}{\sqrt{((b-x)^2+c^2)^3}} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Mivel

$$f'(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=\frac{ab}{a+c} \qquad \text{és} \qquad f''\left(\frac{ab}{a+c}\right)>0,$$

ezért f-nek $\dfrac{ab}{a+c}$-ben lokális minimuma van. Mivel

$$f''(x)>0 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

f konvex, így f-nek $\dfrac{ab}{a+c}$-ben abszolút minimuma van.

Megjegyzések.

- Könnyen belátható, hogy ha $x\in[0,b]$, akkor

$$f(x)<f(y) \qquad (y\in(-\infty,0)\cup(b,+\infty)).$$

Ezért elegendő csak a

$$g(x):=f(x) \qquad (x\in[0,b])$$

függvény abszolút minimumhelyét meghatározni. Mivel $g\in\mathfrak{C}[0,b]\cap\mathfrak{D}(0,b)$ és

$$0<\frac{ab}{a+c}<b,$$

továbbá

$$\min\left\{g(0),g(b),g\left(\frac{ab}{a+c}\right)\right\} = \min\left\{a+\sqrt{b^2+c^2},\sqrt{a^2+b^2}+c,\sqrt{b^2+(a+c)^2}\right\} = \sqrt{b^2+(a+c)^2},$$

ezért g-nek, így f-nek is az $\dfrac{ab}{a+c}$ pontban abszolút minimuma van.

- Az a tény, hogy az optimális itatóhelyet a $[0,b]$ intervallumban érdemes keresni, egyszerűbbé teszi a dolgot. Legyen ui. B' a B pontnak az x-tengelyre vonatkozó tükörképe. Ha X' az x-tengely ($[0,b]$-beli) tetszőleges pontja, akkor

$$\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B)=\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B').$$

A

$$\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B)$$

összeg akkor lesz a legkisebb, amikor

$$\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B')$$

a legkisebb, azaz ha X' egybeesik az AB' egyenes és az x-tengely X metszéspontjával. Mivel

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \text{és} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+x^2}},$$

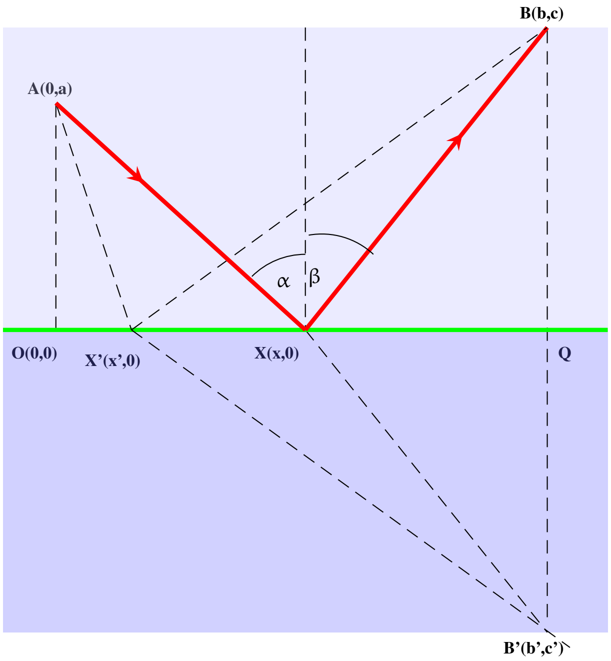
ezért a legrövidebb úthoz tartozó itatóhelyhez esetében

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right), \qquad \text{azaz} \qquad \boxed{\alpha=\beta}$$

Az α ás a ßβ szögek egyenlősége persze úgy is megkapható, hogy a tükrözés következtében a $\frac{\pi}{2}-\beta=BXQ\sphericalangle$ megegyezik a $QXB'\sphericalangle$-gel, ami pedig nem más mint $AXO\sphericalangle=\frac{\pi}{2}-\beta$. Ebben az esetben az AOX háromszög hasonló az XQB háromszöghöz, ahol Q az x-tengely és a BB' egyenes metszéspontja. A hasonlóság miatt

$$\frac{x}{b-x}=\frac{a}{c}, \qquad \text{azaz} \qquad x=\frac{ab}{a+c}$$

(vö. **Alexandriai Hérón** (10 körül - 75 körül) egyiptomi hellén gépész és matematikusnak a fényvisszaverődésre vonatkozó „**legrövidebb út elvével**”).



2. Ha *Mary* a *River* túlsó partján lakik, akkor az A városból a B városba *Szomjas*

$$T(x):=T_1(x)+T_2(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

idő alatt jut el, hiszen a bal, parton v_1 sebességgel tud haladni, így az itatóhelyig az A várostól, illetve az itatóhelytől a B városig

$$T_1(x):=\frac{\overline{\mathbf{AX}}}{v_1}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}, \qquad \text{ill.} \qquad T_2(x):=\frac{\overline{\mathbf{XB}}}{v_2}=\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$$

ideig kell vágtatnia. Látható, hogy

$$T'(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x-b}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}.$$

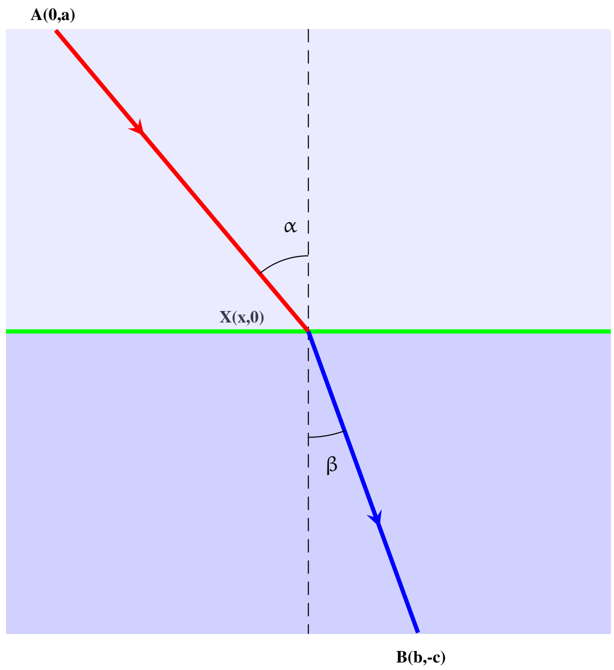
Az ábráról leolvasdható, hogy

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{|\mathbf{\acute{E}O}|} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \text{és} \qquad \sin(\beta) = \frac{x}{|\mathbf{OD}|} = \frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}},$$

ahonnan

$$\frac{\sin(\alpha)}{v_1} = \frac{\sin(\beta)}{v_2}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}}$$

(vö. a fénytörés **Snell-Descartes**-féle (vagy latinosan **Snellius-Cartesius**-féle) törvénye, amely Willebrord van Roijen Snell (1591-1626) holland csillagász és matematikus, valamint René Descartes (1596-1650) francia filozófus, matematikus és természettudós nevéhez fűződik).

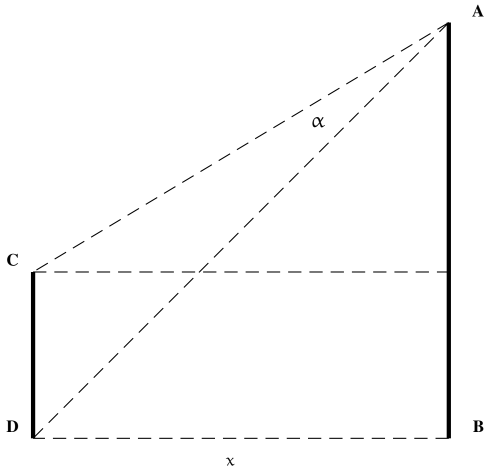


Mivel $T \in \mathfrak{D}^2$, ezért tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}, \qquad \text{ill.} \qquad T''(x) = \frac{a^2}{v_1\sqrt{[a^2+x^2]^3}} + \frac{c^2}{v_2\sqrt{[(b-x)^2+c^2]^2}} > 0.$$

3. Jelöljük a-val az $\overline{AB}$ szakasszal modellezett turista szemmagasságát, b-vel pedig a $\overline{CD}$ szakasszal modellezett skót szoknyája alsó szélének a földtől mért távolságát, továbbá x-szel a skót és a turista távolságát. Ekkor a kérdéses szög a $ABC\measuredangle$ és az $ABC\measuredangle$ különbsége

$$\alpha(x) := CAB\measuredangle - DAB\measuredangle = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{b-a}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{b}\right) \qquad (x \in [0, +\infty)).$$



Mivel

$$\alpha(x) \geq 0 \quad (x \in [0, +\infty), \qquad \alpha(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

továbbá $\alpha \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{b-a}\right)^2} \cdot \frac{1}{b-a} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b-a}{(b-a)^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + x^2},$$

ezért

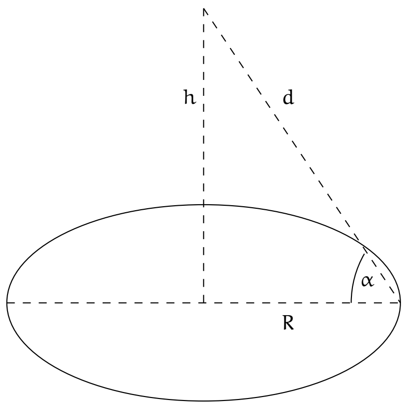
$$\alpha'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{b-a}{(b-a)^2 + x^2} = \frac{b}{b^2 + x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (b-a)\{b^2 + x^2\} = b\{(b-a)^2 + x^2\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{b(b-a)}$$

következtében az optimális távolság $\sqrt{b(b-a)}$ (rossznyelvek szerint nyáron nemcsak azért rövidebb a skótok szoknyája, mert jobbak az időjárási viszonyok, hanem mert ekkor – lévén, hogy a kisebb – kisebb az optimális x távolság, azaz a turistának közelebb kelljen mennie).

4. Ha a beesési szög $\frac{\pi}{2} - \alpha$, akkor a megvilágítás erőssége:

$$k \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{d^2} = k \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\left(\frac{R}{\cos(\alpha)}\right)^2} = k \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)}{R^2} =: J(\alpha) \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

ahol $0 < k \in \mathbb{R}$ az ún. arányossági tényező.



Mivel $J \in \mathfrak{D}^2$, és tetszőleges $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$J'(\alpha) = \frac{k}{R^2} \cdot \left\{\cos^3(\alpha) - 2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\right\} = \frac{k}{R^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \left\{\cos^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\right\}$$

és

$$J''(\alpha) = \frac{k}{R^2} \cdot \left[-\sin(\alpha) \cdot \left\{\cos^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\right\} + \cos(\alpha) \cdot \{-\sin(2\alpha) - 4\sin(2\alpha)\}\right],$$

ezért

$$J'(\alpha^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^* = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 55^\circ \qquad \text{és} \qquad J''(\alpha^*) = \frac{k}{R^2} \cdot [-\sin(\alpha^*) \cdot 0 - 5\cos(\alpha^*)\sin(2\alpha^*)] < 0.$$

Így a maximális megvilágításhoz tartozó magasság, ill. a maximális megvilágítás értéke:

$$h = R \cdot \operatorname{tg}(\alpha^*) = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad J(\alpha^*) = \frac{k}{d\sqrt{3}} = \frac{2k\sqrt{3}}{9R^2}.$$

5. Az R ellenállású fogysztóra jutó elektromos teljesítmény:

$$P = UI = I^2 R,$$

ahol I a fogyasztón átfolyó áram:

$$I = \frac{U_0}{R_0 + R}.$$

Ezért

$$P(R) = U_0^2 \cdot \frac{R}{(R_0 + R)^2} \qquad (R \in [0, +\infty)).$$

Látható, hogy P legalább kétszer deriválható függvény, továbbá

$$P'(R) = U_0^2 \cdot \frac{(R_b + R)^2 - 2(R_b + R)R}{(R_b + R)^4} = U_0^2 \cdot \frac{R_b^2 - R^2}{(R_b + R)^4} = U_0^2 \cdot \frac{R_b - R}{(R_b + R)^3} = 0 \qquad (R \in [0, +\infty))$$

és P'-nek R_b-ben $+-$ előjelváltása van. Tehát a külső fogysztóra jutó legnagyobb teljesítmény úgy érhető el egy adott áramforrás esetén, ha a fogyasztó ellenállását R_b-nek választjuk. Ekkor

$$P(R_b) = U_0^2 \cdot \frac{R_b}{(R_0 + R_b)^2}.$$

6. A mérési eredményektől való eltérés négyzetösszege:

$$f(x) := (x - x_1)^2 + \ldots (x - x_n)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 2(x - x_1) + \ldots + 2(x - x_1), \qquad \text{ill.} \qquad f''(x) = 2 + \ldots + 2 = 2n > 0$$

ezért

$$f'(\overline{x}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2[n\overline{x} - (x_1 + \ldots + x_n)] = 0$$

következtében a legjobb becslés a mérté értékek

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

számtani közepe. ■

További feladatok.

1. Tegyük fel, hogy a differenciálható $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros (páratlan) [periodikus]. Mutassuk meg, hogy f' páratlan (páros) [periodikus]!
2. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?
3. Vizsgálja meg van-e lokális szélsőértéke az
$$f(x) := (x-a)^n \varphi(x) \qquad (x, a \in \mathbb{R})$$
függvények az $x = a$ pontban, ha a φ függvény folytonos az a pontban, $\varphi(a) \neq 0$ és n pozitív egész szám!

Útm.

1. **1. lépés.** Ha f páros, akkor $\mathcal{D}_f = -\mathcal{D}_f$ és $f(-x) = f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$; így ha f páros és $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[-a]$ és $f'(-a) = -f'(a)$, ui.
   - egyrészt $-a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$, hiszen tetszőleges $\delta > 0$ esetén $K_\delta(-a) = -K_\delta(a)$ és $K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_f \Rightarrow -K_\delta(a) \subset -\mathcal{D}_f$;
   - másrészt pedig
   $$f'(-a) = \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(a)}{x+a} = \lim_{y\to a} \frac{f(-y)-f(a)}{-y+a} = \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{-y+a} = -\lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = -f'(a).$$

   2. lépés. Ha f páratlan, akkor $\mathcal{D}_f = -\mathcal{D}_f$ és $f(-x) = -f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$; így ha f páratlan és $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[-a]$ és $f'(-a) = f'(a)$, ui.
   - egyrészt $-a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$, hiszen tetszőleges $\delta > 0$ esetén $K_\delta(-a) = -K_\delta(a)$ és $K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_f \Rightarrow -K_\delta(a) \subset -\mathcal{D}_f$;
   - másrészt pedig
   $$f'(-a) = \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to -a} \frac{f(x)+f(a)}{x+a} = \lim_{y\to a} \frac{f(-y)+f(a)}{-y+a} = \lim_{y\to a} \frac{-f(y)+f(a)}{-y+a} = \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a).$$

   3. lépés. Ha f periodikus, akkor van olyan $0 \neq p \in \mathbb{R}$, hogy $\mathcal{D}_f = p + \mathcal{D}_f$ és $f(x+p) = f(p)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$; így ha f periodikus és $f \in D[a]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a+p]$ és $f'(a+p) = f'(a)$, ui.
   $$\lim_{x\to a+p} \frac{f(x)-f(a+p)}{x-(a+p)} = \lim_{y\to a} \frac{f(y+p)-f(a+p)}{y+p-a-p} = \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a).$$

2. Mivel
$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x + p \qquad (x \in \mathbb{R})$$
páratlan fokszámú polinom, így van valós gyöke (vö. előző félév). Azt kell tehát már csak megmutatni, hogy egyetlen ilyen valós gyök van. Mivel
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ezért f-nek csak 1-ben és 3-ban lehet lokális szélsőértéke. Továbbá
$$f''(x) = 6x - 12 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad f''(1) = -6 < 0, \quad f''(3) = 6 > 0$$

következtében f-nek 1-ben lokális maximuma, 3-ban pedig lokális minimuma van. Ha

$$0 < f(3) = 27 - 54 + 27 + p$$

akkor f-nek egyetlen zérushelye van, hiszen $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$.

3. Mivel tetszőleges $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén az $x \to a$ határátmenetben

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (x - a)^{n-1}\varphi(x) \longrightarrow 0 \cdot \begin{cases} \varphi(a) & (n = 1), \\ 0 & (n > 1), \end{cases}$$

ezért $n = 1$ esetén $f'(a) \neq 0$, így f-nek nincsen lokális szélsőértéke a-ban. Sőt, az islátható, hogy ha n páratlan akkor

$$f(a) = 0, \qquad \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(\varphi(a)) \quad (a < x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{sgn}(f(x)) = -\operatorname{sgn}(\varphi(a)) \quad (a > x \in \mathbb{R})$$

így f-nek a-ban nincsen lokális szélsőértéke. Ha viszont n páros, akkor

$$f(a) = 0, \qquad \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(\varphi(a)) \quad (a \neq x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen f-nek az a pontban lokális minimuma, ill. maximuma van, aszerint, hogy $\varphi(a) > 0$, ill. $\varphi(a) < 0$. ■

5. gyakorlat (2025. október 6-7.)

Szükséges ismeretek.

- Mi a konvex függvény definíciója?
- Mi a konkáv függvény definíciója?
- Jellemezze egy függvény konvexitását az első deriváltfüggvény segítségével!
- Jellemezze egy függvény konkávitását az első deriváltfüggvény segítségével!
- Jellemezze egy függvény konvexitását a második deriváltfüggvény segítségével!
- Jellemezze egy függvény konkávitását a második deriváltfüggvény segítségével!
- Mikor mondja, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek inflexiója van az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban?
  VÁLASZ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy valamely $a \in I$ pontban $f \in \mathfrak{D}[a]$. Azt monjuk, hogy f-nek inflexiója van a-ban, ha az $f - e_a f$ függvénynek jelváltása van az a pontban, ahol
  $$e_a f(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
- Mondja ki a konvexitás és az érintő kapcsolatára vonatkozó tételt!
- Mondja ki a konkávitás és az érintő kapcsolatára vonatkozó tételt!
- Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek aszimptotája van a $+\infty$-ben?
- Hogyan szól a $+\infty$-beli aszimptota létezésére vonatkozó feltétel?
- Elemi függvények deriváltjai (vö. deriválási táblázat).

Emlékeztető. Vö. Matematikai alapozás, 27-30. old; 36-39. old.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!

$$\log_{1/4}\left(\frac{1}{1024}\right), \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\operatorname{arc\,tg}(1), \quad \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{3}), \quad \arcsin(\sin(10)).$$

Útm.

- Ha $1 \neq a \in (0, +\infty)$, $x \in (0, +\infty)$ és $y \in \mathbb{R}$, akkor

$$\log_a(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exp_a(y) = a^y = x,$$

ezért

$$\log_{1/4}\left(\frac{1}{1024}\right) = y \in \mathbb{R} \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{1024} \iff \left(\frac{1}{2^2}\right)^y = \frac{1}{2^{10}} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2^{2y}} = \frac{1}{2^{10}} \iff 2y = 10 \iff y = 5.$$

Tehát

$$\boxed{\log_{1/4}\left(\frac{1}{1024}\right) = 5}.$$

- Világos, hogy ha $x \in [-1, 1]$ és $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor

$$\arcsin(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = x,$$

ezért

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff \sin(y) = \frac{1}{2} \iff y = \frac{\pi}{6},$$

ahonnan

$$\boxed{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}}$$

következik.

- Világos, hogy ha $x \in [-1, 1]$ és $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor
$$\arcsin(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = x,$$
ezért
$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\frac{\pi}{3},$$
ahonnan
$$\boxed{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}}$$
következik.

- Világos, hogy ha $x \in [-1, 1]$ és $y \in [0, \pi]$, akkor
$$\arccos(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(y) = x,$$
ezért
$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \in [0, \pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{3\pi}{4},$$
ahonnan
$$\boxed{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}}$$
következik.

- Jól látható, hogy ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor
$$\operatorname{arc\,tg}(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tg}(y) = x,$$
ezért
$$\operatorname{arc\,tg}(1) = y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tg}(y) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{4},$$
ahonnan
$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{4}}$$
következik.

- Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tg}(y) = x,$$

ezért

$$\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tg}(y) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\frac{\pi}{6},$$

ahonnan

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}}$$

következik.

- Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in (0, \pi)$, akkor

$$\operatorname{arc\,ctg}(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{ctg}(y) = x,$$

ezért

$$\operatorname{arc\,ctg}\left(\sqrt{3}\right) = y \in (0, \pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{ctg}(y) = \sqrt{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{6},$$

ahonnan

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}}$$

következik.

- Mivel

$$\arcsin\left(\sin(10)\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = \sin(10),$$

így

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{2k\pi + \beta \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2l+1)\pi - \beta \in \mathbb{R} : \ l \in \mathbb{Z}\}$$

következtében – $0 < \pi < 4$ felhasználásával – azt kapjuk, hogy

$$y = 10 + 2k\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{vagy} \qquad y = (2l+1)\pi - 10 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (l = 1).$$

Ennélfogva

$$\boxed{\arcsin\left(\sin(10)\right) = 3\pi - 10}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $x \in [-1, 1]$ esetén fennáll az

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

egyenlőség!

Útm. Legyen

$$\varphi(x) := \arcsin(x) + \arccos(x) - \frac{\pi}{2} \qquad (x \in [-1, 1]).$$

Ekkor

$$\varphi(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = 0$$

és

$$\varphi(1) = \arcsin(1) + \arccos(1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Mivel $\varphi \in \mathfrak{D}(-1, 1)$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \qquad (x \in (-1, 1)),$$

ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, illetve tetszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén $\varphi(x) = c$. Következésképpen

$$c = \varphi(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) - \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

ahonnan az állítás nyílvánvaló. ■

Megjegyezzük, hogy

1. a fenti feladatbeli állítás elemi úton is belátható. Ha ui. $x \in [-1, 1]$ tetszőleges, akkor $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, következésképpen

$$\cos(\arcsin(x)) \geq 0 \qquad (x \in [-1, 1]).$$

A négyzetes összefüggés felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2},$$

ill.

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

A sin-ra vonatkozó adddíciós tétel felhasználásával innen

$$\begin{aligned}\sin(\operatorname{arc\,sin}(x)+\operatorname{arc\,cos}(x)) &= \sin(\operatorname{arc\,sin}(x))\cos(\operatorname{arc\,cos}(x))+\cos(\operatorname{arc\,sin}(x))\sin(\operatorname{arc\,cos}(x)) = \\ &= x\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=x^2+1-x^2=1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

következik. Így az

$$y:=\operatorname{arc\,sin}(x)+\operatorname{arc\,cos}(x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cup[0,\pi]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

elemmel

$$\sin(\alpha)=\sin(\beta)\quad\Longleftrightarrow\quad\alpha\in\{2k\pi+\beta\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2l+1)\pi-\beta\in\mathbb{R}:\ l\in\mathbb{Z}\}$$

következtében – $0<\pi<4$ felhasználásával – azt kapjuk, hogy

$$y=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\quad(k=0)\qquad\text{vagy}\qquad y=(2l+1)\pi-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\quad(l=0).$$

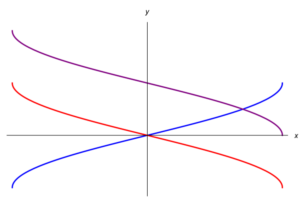
Ennélfogva

$$\operatorname{arc\,sin}(x)+\operatorname{arc\,cos}(x)=y=\frac{\pi}{2}.$$

2. a feladatbeli állításból az arc sin és az arc cos függvények grafikonja közötti

$$\operatorname{arc\,cos}(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sin}(x)\qquad(x\in[-1,1])$$

állítás következik: az arc cos függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az arc sin függvény grafikonjából, hogy azt tükrözzük az x-tengelyre, majd az y-tengely irányában felfelé toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel (vö. 10. ábra).



10. ábra. Az arc sin, a $-$arc sin és az arc cos függvények grafikonjai.

Feladat. Vázoljuk az

$$f(x) := \arcsin(\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Útm. Mivel a sin, következésképpen az f függvény 2π szerint periodikus, ezért f-et elegendő megvizsgálni valamely 2π hosszúságú intervallumon, például a

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

intervallumon. Az arc sin függvény értelmezéséből következik, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\arcsin(\sin(x)) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(x) = \sin(y).$$

Ha tehát

- $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor a

  $$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

  függvény szigorú monotonitása miatt

  $$\sin(x) = \sin(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

  ahonnan

  $$f(x) = x \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

  következik.

- $x, y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, akkor

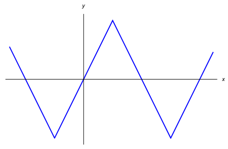
  $$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2},$$

  így

  $$\sin(x) = \sin(\pi - x) = \sin(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi - x = y.$$

  Következésképpen (vö. 11. ábra)

  $$f(x) = \pi - x \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right). \quad \blacksquare$$



11. ábra. Az $\arcsin(\sin)$ grafikonjának egy részlete.

Emlékeztető (Bernoulli-l'Hôpital-szabály). Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre

(i) $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$;

(ii) az alábbi feltétel közül pontosan egy teljesül:

$$\textbf{vagy} \qquad \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0 \qquad \textbf{vagy pedig} \qquad \lim_{a+0} g \in \{-\infty, +\infty\};$$

(iii) $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

Mindez igaz marad akkor is, ha az **(ii)**, **(iii)** feltételekben b baloldali határértékére cseréljük az a jobboldali határértékét. Ekkor

$$\lim_{b-0} \frac{f}{g} = \lim_{b-0} \frac{f'}{g'}.$$

Megjegyzések.

1. Előfordul, hogy valamely határérték számítása során **– a szabály feltételei teljesülésének ellenőrzése mellett –** többször (esetünkben k-szor) vagyunk kénytelenek megkísérelni a fenti szabály alkalmazását. Ez esetben a következő jelöléseket használjuk

$$\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \sim \frac{f''}{g''} \sim \frac{f'''}{g'''} \sim \ldots \sim \frac{f^{(k)}}{g^{(k)}} \longrightarrow A, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{f}{g} \longrightarrow A.$$

2. Gaullaume François Antoine Marqies de l'Hospital $(1661-1704)$ havonta fél professzori fizetés adott Johann (I) Bernoullinek $(1667-1748)$, hogy annak matematikai eredményeit kizárólag vele közölje, amit l'Hospital saját neve alatt meg is jelentetett. Halála után így ezeket az eredményeket hosszú ideig

neki tulajdonították (vö. Über die sogenannte Regel von de l'Hospital im Mathematikunterricht). Szász Pál $(1901 - 1978)$ szófordulatával élve elmondható, hogy ez az a szabály, ami Bernoullitól lett „ellopitálva".

Példák.

- Ha $a \in (1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{a^x}{x^n} \sim \frac{a^x \ln(a)}{nx^{n-1}} \sim \frac{a^x \ln^2(a)}{n(n-1)x^{n-2}} \sim \ldots \sim \frac{a^x \ln^n(a)}{n!} \longrightarrow +\infty \qquad (x \to +\infty),$$

  és így

$$\frac{a^x}{x^n} \longrightarrow +\infty \qquad (x \to +\infty).$$

  Erre azt is szokás mondani, hogy $1 < a \in \mathbb{R}$ esetén **az $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ exponenciális függvény gyorsabban tart végtelenhez, mint az identikus függvény bármely pozitív egész kitevőjű hatványa**. Ezt az alábbi jelsorozattal szokás röviden kifejezni:

$$x^n \ll a^x, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy.}$$

- Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\ln^n(x)}{x^m} \sim \frac{n \ln^{n-1}(x)}{mx^m} \sim \frac{n(n-1)\ln^{n-2}(x)}{m^2x^m} \sim \ldots \sim \frac{n!}{m^n x^m} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty),$$

  és így

$$\frac{\ln^n(x)}{x^m} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty).$$

  Erre azt is szokás mondani, hogy **az identikus függvény bármely pozitív egész kitevőjű hatványa gyorsabban tart végtelenhez, mint $\ln$ bármely pozitív egész kitevőjű hatványa**. Ezt az alábbi jelsorozattal szokás röviden kifejezni:

$$\ln^n(x) \ll x^m, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy.}$$

Megjegyzések.

1. A tételbeli

$$g'(x) \neq 0 \qquad (x \in (a, b))$$

   feltétel lényeges, ui. az

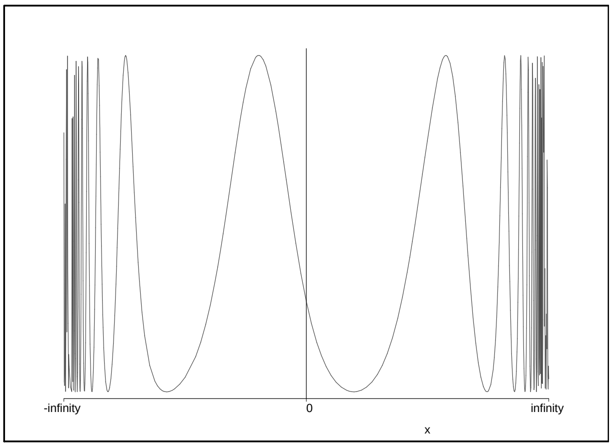
$$f(x) := x + \sin(x)\cos(x), \quad g(x) := f(x)e^{\sin(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében nem létezik a $\lim\limits_{+\infty}(f/g)$ határérték, hiszen a sin periodikus függvény, viszont

$$\lim_{+\infty}\frac{f'}{g'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos(x)e^{-\sin(x)}}{x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)}=0.$$

A Bernoulli-l'Hôpital-szabály azért nem alkalmazható, mert g' tetszőleges nemkorlátos intervallumon felveszi a 0 értéket:

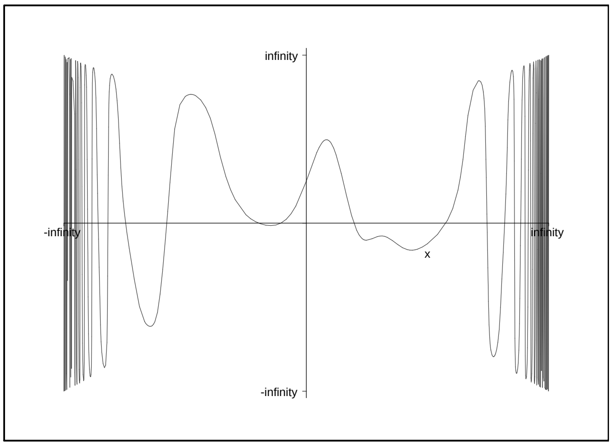
$$\begin{aligned}
g'(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)}(x+\sin(x)\cos(x))+e^{\sin(x)}(1+\cos^2(x)-\sin^2(x)) = \\
&= e^{\sin(x)}\left[x\cos(x)+\sin(x)\cos^2(x)+1+\cos^2(x)-\sin^2(x)\right] = \\
&= e^{\sin(x)}\left[x\cos(x)+\sin(x)\cos^2(x)+2\cos^2(x)\right] = \\
&= e^{\sin(x)}\cos(x)\left[x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)\right] \qquad (x\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$



12. ábra. Az f/g függvény grafikonja.

2. Sok esetben a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazása nem célravezető, viszont egyszerű átalakításokkal a keresett határérték kiszámítható:

   (a) ha a
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$
   hatáérték kiszámítására akarnánk használni a szabályt, akkor
   $$\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\sim\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\sim\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\sim\ldots$$



13. ábra. A g' függvény grafikonja.

miatt sohasem érnénk célt, így inkább az alábbi módon járunk el:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

(b) ha a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

határérték kiszámítására akarnánk használni a szabályt, akkor

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\sim\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\sim\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\sim\dots$$

miatt sohasem érnénk célt, így inkább az alábbi módon járunk el:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1.$$

3. Előfordulhat, hogy

$$\nexists\lim\frac{f'}{g'},\qquad\text{de}\qquad\exists\lim\frac{f}{g}.$$

Ilyenkor persze nem a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt alkalmazzuk a határérték kiszámításához. Pl.

(a) a

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin(x)}$$

határérték kiszámítására nem alkalmazható a szabály, hiszen

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1/x) + 2x\cos(1/x)}{\cos(x)}.$$

Viszont

$$\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \cdot \left(x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0).$$

(b) a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\mathrm{tg}(x)}$$

határérték kiszámítására nem alkalmazható a szabály, hiszen

$$\nexists \lim_{x\to 0} \cos^2(x)\,\{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)\}\,.$$

Viszont

$$\frac{x^2\sin(1/x)}{\mathrm{tg}(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \cdot x \cdot \cos(x) \cdot \sin(1/x) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0).$$

4. A Bernoulli-l'Hôpital-szabályt tehát

$$\frac{0}{0} - \qquad \text{és} \qquad \frac{\cdots}{\infty}\text{-típusú}$$

határértékek kiszámítására alkalmas. Bizonyos esetekben nem ilyen típusú határértékekkel van dolgunk, azonban, amint azt az

$$a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}, \qquad a - b = a \cdot \frac{b}{b} - b \cdot \frac{a}{a} = a \cdot b \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{ab}}, \qquad a^b = e^{b\ln(a)}$$

átalakítások szimbolikusan mutatják, ezeknek a határértékeknek a kiszámítása a Bernoulli-l'Hôpital-szabályban szereplő típusú határértékekre vezethető vissza. Az alábbiakban felsorolunk néhány alapvető esetet, amelyekben a szabály ilyen típusú határértékek kiszámítására alkalmazható.

A $0 \cdot \infty$-típusú határérték kiaszámítása az

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

átalakítás $\frac{0}{0}$-típusú vagy $\frac{\cdots}{\infty}$-típusú határérték kiszámítására vezethető vissza.

A $\infty - \infty$-típusú határérték kiszámítása az

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)f(x)}}$$

átalakítás segítségével $\frac{0}{0}$-típusú határérték kiszámítására vezethető vissza.

A 0^0-típusú, ∞^0-típusú, ill. 1^∞-típusú határérték kiszámítása az

$$f(x)^{g(x)} = \exp\left(g(x)\ln(f(x))\right) = \exp\left(\frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}\right)$$

átalakítás segítségével, illetve az exponenciális függvény folytonosságára való hivatkozással $\frac{\cdots}{\infty}$ vagy $\frac{0}{0}$-típusú határérték kiszámítására vezethető vissza.

Példák.

1. Mivel bármely $x \in (0, 4/5)$ esetén

$$\sin(x)\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \frac{-\sin^2(x)}{x\cos(x)} \sim \frac{-\sin(2x)}{\cos(x) - x\sin(x)} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0 \qquad (x \to 0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0+0} \sin(x)\ln(x) = 0.$$

2. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(x)}$$

ezért az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\sin(x)} = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} \sin(x)\ln(x)\right) = e^0 = 1.$$

3. Mivel $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1+3x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(1+3x^2)\right)$$

és

$$\frac{1}{x^2}\ln(1+3x^2) \sim \frac{\frac{6x}{1+3x^2}}{2x} = \frac{3}{1+3x^2} \longrightarrow 3 \qquad (x \to 0),$$

ezért az exponenciális függvény folytonosságát használva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}\right) = e^3.$$

Feladat. Legyen $0 < a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. A Bernoulli-l'Hôpital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \ln(x)\cdot\ln(1-x)$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(xe^{1/x}-x\right)$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-a^{\sin(x)}}{x^2}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
7. $\lim \left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right) \qquad (0<\alpha\in\mathbb{R})$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$.

Útm.

1. Világos, hogy
$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \sim \frac{2x}{4x-1} \longrightarrow \frac{2}{3} \qquad (x\to 1),$$
Következésképpen
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{4x-1} = \frac{2}{3}.$$

2. Mivel az $x \to 0$ határátmenetben
$$\frac{\mathrm{tg}(x)-x}{x-\sin(x)} \sim \frac{1+\mathrm{tg}^2(x)-1}{1-\cos(x)} = \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{1-\cos(x)} \sim \frac{2\,\mathrm{tg}(x)(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\sin(x)} = \frac{2(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\cos(x)} \longrightarrow \frac{2}{1} = 2,$$
ezért
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)-x}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\cos(x)} = 2.$$

3. Mivel
$$\ln(x)\cdot\ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}} \sim \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}} = \frac{x\ln^2(x)}{1-x} \sim -(\ln^2(x)+2\ln(x)) \longrightarrow 0 \qquad (x\to 1-0),$$
ezért
$$\lim_{x\to 1-0} \ln(x)\cdot\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x\ln^2(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1-0} \left(-(\ln^2(x)+2\ln(x))\right) = 0.$$

4. Legyen
$$y := \frac{1}{x} \qquad (0<x\in\mathbb{R}).$$
Ekkor
$$xe^{1/x}-x = \frac{e^y-1}{y} \sim e^y \longrightarrow 1 \qquad (y\to 0+0).$$

Következésképpen
$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)=\lim_{y\to 0+0}\frac{e^y-1}{y}=\lim_{y\to 0+0}e^y=1.$$

5. Mivel
$$\frac{a^x-a^{\sin(x)}}{x^2}\sim\frac{a^x\ln(a)-a^{\sin(x)}\ln(a)\cos(x)}{2x}\sim$$
$$\sim\frac{a^x\ln^2(a)-a^{\sin(x)}\ln^2(a)\cos^2(x)+a^{\sin(x)}\ln(a)\sin(x)}{2}\longrightarrow 0\quad(x\to 0),$$
ezért
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin(x)}}{x^2}=0.$$

6. Világos, hogy ha a határérték létezik, akkor az exponenciális függvény folytonossága következtében
$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\exp\left(\frac{1}{1-x}\ln(x)\right)=\exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln(x)\right).$$
Mivel
$$\frac{\ln(x)}{1-x}\sim\frac{1}{-x}\longrightarrow -1\qquad(x\to 1),$$
ezért
$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\exp(-1)=\frac{1}{e}.$$

7. Világos, hogy ha a határérték létezik, akkor
$$\lim\left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right)=\lim\left(n\left(\alpha^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)=\lim\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-1}{x}.$$
Mivel
$$\frac{\alpha^x-1}{x}\sim\alpha^x\ln(\alpha)\longrightarrow\ln(\alpha)\qquad(x\to 0),$$
ezért
$$\lim\left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right)=\ln(\alpha).$$

8. Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$

Ez $\frac{0}{0}$-típusú határérték. Kíséreljük meg alkalmazni a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt, azaz számítsuk ki

a
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}$$
határértéket! Ez megint $\frac{0}{0}$-típusú. Ismét kíséreljük meg alkalmazni a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt, azaz számítsuk ki a
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{(x+2)e^x}$$
határértéket! Ennek értéke $\frac{1}{2}$; tehát a keresett határérték $\frac{1}{2}$.

9. Világos, hogy ha a határérték létezik, akkor az exponenciális függvény folytonossága következtében
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}\right).$$
Mivel az $x\longrightarrow 0$ határátmenetben
$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x} &\sim \frac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\frac{a^x\ln(a)+b^x\ln(b)+c^x\ln(c)}{3}=\\ &=\frac{a^x\ln(a)+b^x\ln(b)+c^x\ln(c)}{a^x+b^x+c^x}\longrightarrow\frac{\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)}{3}=\\ &=\frac{\ln(abc)}{3}=\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right),\end{aligned}$$
ezért
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}=\exp\left(\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right)\right)=\sqrt[3]{abc}.\quad\blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!
$$e^{-2\ln(3)},\qquad 8^{\log_4(9)},\qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Útm.

- Az exponenciális függvény inverzére, azaz a logaritmusfüggvényre vonatkozó azonosságok felhasználásával
$$e^{-2\ln(3)}=e^{\ln\left(3^{-2}\right)}=3^{-2}=\frac{1}{9}$$
adódik.

- Az exponenciális függvényre, illetve az inverzére vonatkozó azonosságok felhasználásával

$$\log_4(9) = \frac{\log_2(9)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(9)}{2},$$

következésképpen

$$8^{\log_4(9)} = (2^3)^{\log_4(9)} = (2^3)^{\frac{\log_2(9)}{2}} = 2^{\frac{3\log_2(9)}{2}} = 2^{\log_2(27)} = 27$$

teljesül.

- Világos, hogy ha $x \in [-1, 1]$ és $y \in [0, \pi]$, akkor

$$\arccos(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(y) = x,$$

ezért

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \in [0, \pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{6},$$

ahonnan

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

következik. ■

Házi feladat. Vázoljuk az

$$f(x) := \arccos(\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Útm. Mivel a cos, következésképpen az f függvény is 2π szerint periodikus, ezért f-et elegendő megvizsgálni valamely 2π hosszúságú intervallumon, például a $[0, 2\pi]$ intervallumon. Az arc cos függvény értelmezéséből következik, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\arccos(\cos(x)) = y \in [0, \pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(x) = \cos(y).$$

Ha tehát

- $x, y \in [0, \pi]$, akkor a

$$[0, \pi] \ni x \mapsto \cos(x)$$

függvény szigorú monotonitása miatt

$$\cos(x) = \cos(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

ahonnan

$$f(x) = x \qquad (x, \in [0, \pi])$$

következik.

- $x, y \in [\pi, 2\pi]$, akkor

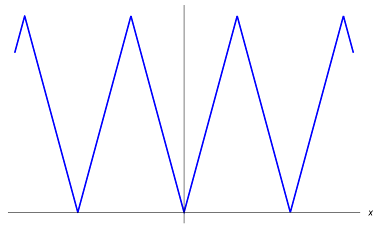
$$\pi \leq x \leq 2\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq 2\pi - x \leq \pi,$$

így

$$\cos(x) = \cos(2\pi - x) = \cos(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\pi - x = y.$$

Következésképpen (vö. 14. ábra)

$$f(x) = 2\pi - x \qquad (x \in [\pi, 2\pi]) \,. \quad \blacksquare$$



14. ábra. Az $\arccos(\cos)$ grafikonjának egy részlete.

Házi feladat. Igazoljuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,ctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

egyenlőség! Milyen kapcsolat van az arc tg és az arc ctg függvények grafikonjai között?

Útm. Legyen

$$\varphi(x) := \operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,ctg}(x) - \frac{\pi}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = 0,$$

ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, illetve tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$. Következésképpen

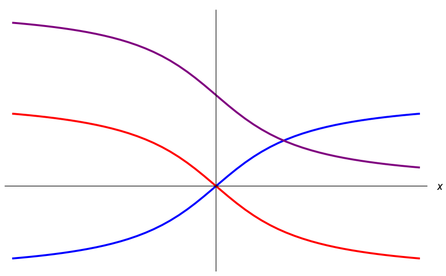
$$c = \varphi(0) = \operatorname{arc\,tg}(0) + \operatorname{arc\,ctg}(0) - \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

ahonnan az állítás már következik. ■

Megjegyzések.

1. A fenti feladatbeli állítás elemi úton is belátható. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az $y := \operatorname{arc\,tg}(x)$ számmal
$$x = \operatorname{tg}(y) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$
Ez azt jelenti, hogy
$$\operatorname{arc\,ctg}(x) = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(x), \qquad \text{azaz} \qquad \operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,ctg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. A feladatbeli állításból az arc tg és az arc ctg függvények grafikonja közötti
$$\operatorname{arc\,ctg}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
állítás következik: az arc ctg függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az arc tg függvény grafikonjából, hogy azt tükrözzük az x-tengelyre, majd az y-tengely irányában felfelé toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel (vö. 15. ábra).



15. ábra. Az arc tg, a $-$arc tg és az arc ctg függvények grafikonjai.

Házi feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges

1. $0 \neq x \in (-1,1)$ esetén fennáll az

$$\arccos(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

egyenlőség, ill.

2. $x \in (-1,1)$ esetén fennáll az

$$\arcsin(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

egyenlőség!

Útm.

1. Legyen $I := (-1,0)$, ill. $J := (0,1)$. A

$$\varphi_K(x) := \arccos(x) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad (x \in K \in \{I,J\})$$

függvényre nyilván $\varphi_K \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in K$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi_K'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} \cdot \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} = -\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = 0,\end{aligned}$$

ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, ill. $d \in \mathbb{R}$, továbbá tetszőleges $x \in I$, ill, $x \in J$ esetén $\varphi_I(x) = c$, ill. $\varphi_J(x) = d$. Következésképpen

$$c = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-(-1/2)^2}}{-1/2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0,$$

ill.

$$d = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-(1/2)^2}}{1/2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0,$$

ahonnan az állítás már következik.

2. Legyen
$$\varphi(x) := \arcsin(x) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad (x \in (-1,1)).$$
Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}(-1,1)$ és
$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,
\end{aligned}$$
ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, illetve tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén $\varphi(x) = c$. Következésképpen
$$c = \varphi(0) = \arcsin(x) - \operatorname{arc\,tg}(0) = 0 + 0 = 0,$$
ahonnan az állítás már következik. ■

Gyakorló feladatok.

1. Adjuk meg az
$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \operatorname{arc\,tg}(x) \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$$
függvény értékkészletét!

2. Mutassuk meg, fennáll a
$$2\operatorname{arc\,tg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi\operatorname{sgn}(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1),$$
egyenlőség!

3. Legyen
$$f(x) := \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \qquad (x \in [0,1]).$$
Adjunk meg olyan $c \in \mathbb{R}$ számot, amelyre tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = c$ teljesül!

4. Mutassuk meg, hogy fennáll az
$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arc\,tg}(x) & (x > 1), \\ 2\operatorname{arc\,tg}(x) & (-1 \leq x \leq 1), \\ -\pi - 2\operatorname{arc\,tg}(x) & (x < -1) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
egyenlőség!

5. Számítsuk ki $f(x)$-et!
$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Útm.

1. Mivel bármely $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2x^2+2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$
ezért alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ számokra
$$f(x) = c \quad (-1 > x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(x) = d \quad (-1 < x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy f nem intervallumon értelmezett függvény, ezért kell külön-külön az értelmezési tartomány részintervallumain alkalmazni a tanult tételt. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arc\,tg}(1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{és} \qquad f(0) = \operatorname{arc\,tg}(-1) - \operatorname{arc\,tg}(0) = -\frac{\pi}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4},$$

ezért

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} \quad (-1 > x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(x) = -\frac{\pi}{4} \quad (-1 < x \in \mathbb{R}),$$

következésképpen

$$\mathcal{R}_f = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

2. Ha

$$f(x) := 2\operatorname{arc\,tg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

akkor bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$ számra

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} \cdot \frac{-2x^2+2}{1+x^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^4-2x^2+1}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = 0. \end{aligned}$$

Így alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$2\operatorname{arc\,tg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} c & (x \in [1, +\infty)), \\ d & (x \in (-\infty, -1]). \end{cases}$$

Az $x := 1$, ill. $x := -1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $c = \pi$, ill. $d = -\pi$, ahonnan az igazolandó állítás következik.

3. Mivel bármely $x \in (0, 1)$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = c \qquad (x \in [0, 1]).$$

Így

$$c = f(0) = \arcsin(0) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Ha

$$f(x) := \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\})$ és

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} = 2\operatorname{arc\,tg}'(x) & (|x| < 1), \\[2ex] -\dfrac{2}{1+x^2} = -2\operatorname{arc\,tg}'(x) & (|x| > 1). \end{cases}$$

Ezért alkamas $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) + 2\operatorname{arc\,tg}(x) &= c_1 & (x > 1), \\ f(x) - 2\operatorname{arc\,tg}(x) &= c_2 & (x \in (-1, 1)), \\ f(x) + 2\operatorname{arc\,tg}(x) &= c_3 & (x < -1). \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} c_1 &= f(\sqrt{3}) + 2\,\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \pi, \\ c_2 &= f(0) + 2\,\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{0}) = 0, \\ c_3 &= f(-\sqrt{3}) + 2\,\mathrm{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\pi, \end{aligned}$$

amiből következik az állítás, ui. az $x = \pm 1$ helyeken az állítás nyilvánvaló.

5. Ha

$$\varphi(x) := \mathrm{arc\,tg}(x) + \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

továbbá $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$, ill.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

következtében

$$\mathrm{arc\,tg}(x) + \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (x > 0), \\ -\dfrac{\pi}{2} & (x < 0). \end{cases}$$

Házi feladat. A következő határértékek kiszámításához használjuk a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(2\cdot\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x+1)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{tg}(5x)}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin(x)}}{x-\sin(x)}$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{a^{\ln(x)}-x}$;
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cdot e^{1/x^2}$;
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}$;
12. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{\mathrm{tg}(x)}$;
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{4/(1+2\ln(x))}$;
14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$;
15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right)$;
16. $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \left(1+\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n$;
17. $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$;
18. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Útm.

1. Ha

$$f(x) := 3x^2-2x-1 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := 5x^2-x-4 \quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{6x-2}{10x-1} \longrightarrow \frac{4}{9} \qquad (x \to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \frac{4}{9}.$$

Megjegyezzük, hogy a határérték kiszámítása oly módon is történhet, hogy kihasználjuk azt a tényt, miszerint a számláló és a nevező is polinom:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(3x+1)}{\cancel{(x-1)}(5x+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{4}{9}.$$

2. Ha

$$f(x) := e^{2x}-1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{2e^{2x}}{\cos(x)} \longrightarrow \frac{2}{1} = 2 \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)} = 2.$$

3. Ha

$$f(x) := \sin(2\cdot\arccos(x)) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \sqrt{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sin(2\cdot 0) = 0 = \lim_{x\to 1-0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\cos(2\cdot\arccos(x))\cdot\frac{(-2)}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2}{x}\cdot\cos(2\cdot\arccos(x)) \longrightarrow \frac{2}{1}\cdot\cos(2\cdot 0) = 2 \qquad (x \longrightarrow 1-0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(2\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = 2.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2\sin(\arccos(x))\cdot\cos(\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x\cdot\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}}{\sqrt{1-x^2}} = 2x \longrightarrow 2 \qquad (x \to 1-0).$$

4. Ha

$$f(x) := x \quad (-1 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \ln(1+x) \quad (-1 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to +\infty} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1 \longrightarrow +\infty \qquad (x \to +\infty),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=+\infty.$$

5. Ha

$$f(x):=\operatorname{tg}(x)-x\quad\left(0\neq x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\qquad\text{és}\qquad g(x):=x-\sin(x)\quad\left(0\neq x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

akkor

$$\lim_{x\to0}f(x)=0=\lim_{x\to0}g(x).$$

Mivel

$$\operatorname{tg}'=\frac{1}{\cos^2}=\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}=1+\operatorname{tg}^2,$$

így

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{1+\operatorname{tg}^2(x)-1}{1-\cos(x)}\sim\frac{2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}{\sin(x)}=\frac{2(1+\operatorname{tg}^2(x))}{\cos(x)}\longrightarrow\frac{2(1+0)}{1}=2\qquad(x\to0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}=2.$$

6. Ha

$$f(x):=\cos(x)-1\quad(x\in\mathbb{R})\qquad\text{és}\qquad g(x):=x^2\quad(x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to0}f(x)=0=\lim_{x\to0}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{-\sin(x)}{2x}\sim\frac{-\cos(x)}{2}\longrightarrow-\frac{1}{2}\qquad(x\to0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

7. Ha $\frac{\pi}{2}\neq x\in\left(-\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right)$, akkor

$$\frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)}=\frac{\sin(x)}{\sin(5x)}\cdot\frac{\cos(5x)}{\cos(x)}=:f(x).$$

Mivel

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(x)}{\sin(5x)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

és

$$\frac{\cos(5x)}{\cos(x)}\sim\frac{-5\sin(5x)}{-\sin(x)}\longrightarrow\frac{5\cdot1}{1}\qquad\left(x\to\frac{\pi}{2}\right),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\pi/2}f(x)=1\cdot5=5.$$

8. Ha

$$f(x):=e^x-e^{\sin(x)}\quad(x\in\mathbb{R})\qquad\text{és}\qquad g(x):=x-\sin(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{\sin(x)} \cdot \frac{e^{x-\sin(x)}-1}{x-\sin(x)} \sim e^{\sin(x)} \cdot \frac{(1-\cos(x))e^{x-\sin(x)}}{1-\cos(x)} = e^{\sin(x)} \cdot e^{x-\sin(x)} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1 \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin(x)} = 1.$$

9. Ha

$$f(x) := \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := a^{\ln(x)} - x \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\frac{1}{x}}{a^{\ln(x)} \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{a^{\ln(x)} \cdot \ln(a) - x} = \longrightarrow \frac{1}{a^0 \cdot \ln(a) - 0} = \frac{1}{\ln(a) - 1} \qquad (x \to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{a^{\ln(x)} - x} = \frac{1}{\ln(a) - 1}.$$

10. Ha

$$f(x) := x^2 \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := e^{1/x^2} \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

Mivel

$$x^2 \cdot e^{1/x^2} = f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} \sim \frac{e^{1/x^2} \cdot (-2/x^3)}{-2/x^3} = e^{1/x^2} \longrightarrow +\infty \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot e^{1/x^2} = +\infty.$$

11. Ha

$$f(x) := e^{x^2} - 1 \quad (\in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := 1 - \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{2xe^{x^2}}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \cdot 2 \cdot e^{x^2} \longrightarrow 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos(x)} = 2.$$

12. Mivel

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)=2-0=2 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}(x)=+\infty,$$

ezért

$$\operatorname{tg}(x)\ln\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)=\frac{\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)}{\operatorname{ctg}(x)}\sim\left(-\frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{-\sin^2(x)}{2-\frac{2x}{\pi}}\longrightarrow\frac{2}{\pi} \qquad \left(x\to\frac{\pi}{2}-0\right),$$

illetve az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}(x)}=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}(x)\ln\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)\right)=e^{2/\pi}.$$

13. Mivel

$$\frac{4\ln(x)}{1+2\ln(x)}\sim\frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}}=2\longrightarrow 2 \quad (x\to 0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(x)}{1+2\ln(x)}=2,$$

ill. az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to 0}x^{4/(1+2\ln(x))}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(x)}{1+2\ln(x)}\right)=e^2.$$

14. Ha

$$f(x):=x \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x):=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (0<x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\ln(1)=0.$$

Mivel

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\sim\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x}\longrightarrow 1 \qquad (x\to+\infty),$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

15. Mivel tetszőleges $1<x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\sim\frac{1-1-\ln(x)}{1-\frac{1}{x}+\ln(x)}\sim\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\longrightarrow-\frac{1}{2} \qquad (x\to 1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

16. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\exp\left(n\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right),$$

ezért a $(0,+\infty) \ni x \mapsto x \cdot \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ függvény $(+\infty)$-határértékét kell kiszámítanunk. MIvel tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x \cdot \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} \sim \frac{\frac{1}{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow 1 \qquad (x \to +\infty),$$

ezért az exponenciális függvény folytonosságát felhasználva

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = e^1 = e$$

adódik.

17. Ha

$$f(x) := (1+x)^{1/x} - e \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y - e = 0 = \lim_{x\to 0+0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\varphi'(x) - 0}{1} = (1+x)^{1/x} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

ahol a

$$(0,+\infty) \ni x \mapsto \varphi(x) := (1+x)^{1/x}$$

függvényre

$$\ln(\varphi(x)) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2},$$

és

$$\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \sim \frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} \sim \frac{\frac{-2}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad (x \to 0+0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

18. Mivel tetszőleges

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

esetén

$$\frac{x^3 \sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^2,$$

ezért (vö. 6.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = 1 \cdot 2^2 = 4. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok.

1. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$, $f \in \mathfrak{C}^1[a]$. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$e_a f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

érintőre fennáll a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - e(x)}{x - a} = 0$$

határérték-reláció!

2. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $a \in I$, $f \in \mathfrak{C}[a]$ és f differenciálható az $I \backslash \{a\}$ halmazon. Igazoljuk, hogy ha

$$b := \lim_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R},$$

akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és fennáll az

$$f'(a) = b$$

egyenlőség!

Útm.

1. Mivel

$$\lim_{x \to a} (f(x) - e_a f(x)) = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)) = 0$$

és

$$\frac{f(x) - e_a f(x)}{x - a} \sim \frac{f'(x) - e_a' f(x)}{1} = f'(x) - f'(a) \longrightarrow 0 \qquad (x \to a),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazsával a kívánt állítást kapjuk.

2. Az f függvény a-beli folytonosságának következtében

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Ha

$$F, G : I \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := f(x) - f(a), \quad G(x) := x - a$$

akkor F deriválható az $I \backslash \{a\}$ halmazon, G deriválható I, és bármely $x \in I$ esetén $G'(x) = 1 \neq 0$, továbbá

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0 = \lim_{x \to a} G(x).$$

Mivel

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = f'(x) \qquad (a \neq x \in I),$$

ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a} f'(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Következésképpen

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\in\mathbb{R}. \quad\blacksquare$$

Gyakorló feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $b \neq 0$. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{ex}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{x^2}\right)$.

Útm.

1. Ha

$$f(x):=\sqrt{1+3x^2}-1 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x):=x^2 \quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=\lim_{x\to 0}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{3}{2\sqrt{1+3x^2}}\longrightarrow\frac{3}{2} \qquad (x\to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

2. Ha

$$f(x):=\sin(\pi x) \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x):=ex \quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=\lim_{x\to 0}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\pi\cos(\pi x)}{e}\longrightarrow\frac{\pi}{e} \qquad (x\to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{ex}=\frac{\pi}{e}.$$

3. Ha

$$f(x):=x-1 \quad (0<x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x):=\ln(x) \quad (<x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1}f(x)=0=\lim_{x\to 1}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \longrightarrow 1 \qquad (x \to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1.$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $1 \neq x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}} = \frac{1}{\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}} \longrightarrow \frac{1}{\ln'(1)} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (x \to 1).$$

4. Ha

$$f(x) := 1 - \cos(ax) \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := 1 - \cos(bx) \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 - 1 = 0 = 1 - 1 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a\sin(ax)}{b\sin(bx)}$$

és

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} a\sin(ax) = 0 = \lim_{x\to 0} b\sin(bx) = \lim_{x\to 0} g'(x),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \sim \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{a^2\cos(ax)}{b^2\cos(bx)} \longrightarrow \frac{a^2}{b^2} \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{a\sin(ax)}{b\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2\cos(ax)}{b^2\cos(bx)} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$: $\cos(bx) \neq 0$ esetén az $x \longrightarrow 0$ határátmenetben

$$\frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)} = \frac{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}}{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(ax)^{2n-2}}{(2n)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(bx)^{2n-2}}{(2n)!}} = \frac{\frac{a^2}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n}(x)^{2n-2}}{(2n)!}}{\frac{b^2}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{b^{2n}(x)^{2n-2}}{(2n)!}} \longrightarrow \frac{\frac{a^2}{2}+0}{\frac{b^2}{2}+0} = \frac{a^2}{b^2} \qquad ().$$

5. Ha

$$f(x) := x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad g(x) := x\ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1+\ln(x)} \longrightarrow 1 \qquad (x \to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\ln(x)} = 1.$$

6. Ha

$$f(x) := e^x - \frac{1}{1-x} \quad (x \in (-1,1)), \qquad \text{ill.} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{2x} \sim \frac{e^x - \frac{2}{(1-x)^3}}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad (x \to 0).$$

Így a Bernoulli-l'Hôpital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{2}{(1-x)^3}}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható függvényekre

(i) $g^{(k)}(x) \neq 0 \quad (x \in (a,b),\ k \in \{1,\ldots,n\})$;

(ii) $\lim_a f = \lim_a g = \lim_a f' = \lim_a g' = \ldots = \lim_a f^{(n-1)} = \lim_a g^{(n-1)} = 0$;

(iii) $A := \lim_{a+0} \frac{f^{(n)}}{g^{(n)}} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Lássuk be, hogy ekkor

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

Mindez igaz marad akkor is, ha az **(ii)**, **(iii)** feltételekben b baloldali határértékére cseréljük az a jobboldali határértékét. Ekkor

$$\lim_{b-0} \frac{f}{g} = \lim_{b-0} \frac{f^{(n)}}{g^{(n)}}$$

Útm. Teljes indukcióval bizonyítunk.

- Az $n := 1$ esetben az állítás nem más, mint a Bernoulli-l'Hôpital-szabály egyik alesete.
- Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a feltételeket teljesítő f, ill. g függvényre,

majd legyen f és g $(n+1)$-szer differenciálható az (a,b) intervallumon,

$$g^{(n+1)}(x) \neq 0 \qquad (x \in (a,b)),$$

továbbá

$$\lim_a f^{(k)} = 0 = \lim_a g^{(k)} \quad (k \in \{0,\dots,n\}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{a+0} \frac{f^{(n+1)}}{g^{(n+1)}} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az indukciós feltevést az f' és g' függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{a+0} \frac{f'}{g'} = A, \qquad \text{ahonnan (BL)} \qquad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = A \qquad \text{következik.} \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Ismeretes, hogy az **abszolút fekete test** emisszióképességének frekvenciától és hőmérséklettől való függésére

$$E(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \qquad (\nu, T \in (0,+\infty)),$$

ill. (a $c = \lambda\nu$ helyettesítéssel) hullámhossztól és hőmérséklettől való függésére

$$E(\lambda,T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda Tk}\right) - 1} \qquad (\lambda, T \in (0,+\infty))$$

teljesül, ahol

c : a fény sebessége vákuumban,
ν : a sugárzás frekvenciája,
λ : a sugárzás hullámhossza,
k : a Boltzmann-állandó,
T : a sugárzó test abszolút hőmérséklete,
h : a Planck-állandó

(**Planck-féle sugárzási törvény**). Adott $T > 0$ hőmérséklet esetén írjuk fel azt az egyenletet, amelyet a Planck-féle sugárzási törvényben a ν frekvenciának ki kell elégítenie ahhoz, hogy az E emisszióképesség maximális legyen!

Útm. Ha rögzített $T > 0$ esetén az

$$u(\nu) := E(\nu,T) \qquad (\nu \in (0,+\infty))$$

függvénynek maximuma van, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= u'(\nu) = \frac{24\pi h\nu^2}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{-1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^2} \cdot \frac{h\nu}{kT} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^2} \cdot \left\{3\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right) - \frac{h\nu}{kT} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)\right\} \end{aligned}$$

teljesül. Mivel u pozitív értékű, és a Bernoulli-l'Hôpital-szabály segítségével könnyen belátható, hogy

$$\lim_{\nu\to 0} u(\nu) = 0 = \lim_{\nu\to\infty} u(\nu),$$

ezért az

$$x := \frac{h\nu}{kT}$$

jelöléssel a maximumhelyre

$$3(e^x - 1) = xe^x, \qquad \text{azaz} \qquad x = 3(1 - e^{-x})$$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fenti transzcendens egyenlet gyökére pl. a MAPLE© programcsomg felhasználásával igen jó közelítést kaphatunk:

$$x_{max} = \frac{h\nu_{max}}{kT} \approx 2.82$$

(a "solve$(x = 3 * (1 - \exp(-x)), x)$; > evalf(%);" parancssor eredménye: $2.821439372, 0.$).

Adott T hőmérsékleten az u függvény maximuma a

$$\nu_{max} = \frac{kT}{h} x_{max}$$

frekvenciánál van. Ebből látszik, hogy a maximumhely a hőmérséklet növekedésével arányosan növekszik, tehát a növekvő frekvencia felé tolódik el (**Wien-féle eltolódási törvény**). ■

Emlékeztető (Jensen-egyenlőtlenség). Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ intervallum. Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha bármely $n \in \mathbb{N}$, illetve $a_1, \ldots, a_n \in I$ esetén fennáll az

$$f(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \ldots + \lambda_n f(a_n)$$

egyenlőtlenség minden olyan $0 < \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számra, amelyekre $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha α, β, γ valamely háromszög szögei, akkor fennáll a

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Mivel a sin konkáv a $[0, \pi]$ intervallumon, ezért felhasználva a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget, majd a Jensen-egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) &\leq \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{3}\right)^3 \leq \\ &= \sin^3\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right) = \sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

adódik, hiszen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

6. gyakorlat (2025. október 13-14.)

Szükséges ismeretek.

- Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény n-szer $2 \leq n \in \mathbb{N}$ differenciálható egy pontban?
- Ismertesse a $\frac{0}{0}$ határértékre vonatkozó Bernoulli-l'Hôpital-szabályt!
- Ismertesse a $\frac{\cdots}{\pm\infty}$ határértékre vonatkozó Bernoulli-l'Hôpital-szabályt!
- Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?
- Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?
- Fogalmazza meg a Taylor-formula Lagrange-maradéktaggal néven tanult tételt!
- Milyen elégséges feltételt ismer a Taylor-sornak a generáló függvényhez való konvergenciájával kapcsolatosan?
- Írja le az
$$f(x) := \frac{1}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1), \qquad \text{ill. a} \qquad g(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$
függvény Taylor-sorát!
- Írja le az
$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$
függvény Taylor-sorát!
- Elemi függvények deriváltjai (vö. deriválási táblázat).

Megjegyzés. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény vizsgálatakor az alábbi lépéseket célszerű végigmenni.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Deriválhatóság, paritás, periodikusság, előjelviszonyok megállapítása.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Megkeressük f stacionárius helyeit, valamint azokat az intervallumokat, ahol f szigorúan monoton, majd azonosítjuk f lokális szélsőértékhelyeit, ill. szélsőértékeit.

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Megkeressük f' stacionárius helyeit, valamint azokat az intervallumokat, ahol f szigorúan konvex vagy konkáv, majd azonosítjuk f inflexiós pontjait.

4. lépés (határérték, aszimptota). A $\mathcal{D}_f'\backslash\mathcal{D}_f$ halmaz pontjaiban kiszámítjuk f határértékét, illetve meghatározzuk aszimptotáját.

5. lépés (grafikon). Vázoljuk f grafikonját.

Feladat. Végezzük el az alábbi függvények teljes vizsgálatát!

1. $f(x) := \mathcal{G}(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := x + 2 - \dfrac{4x}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R});$
4. $f(x) := \dfrac{x^3+x}{x^2-1} \qquad (\pm 1 \neq x \in \mathbb{R});$
5. $f(x) := \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R});$
6. $f(x) := x \cdot \ln^2(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$. Mivel

$$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért f páros. Sőt, az is igaz, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) > 0$.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$-\sqrt{2}/2$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}_f' \backslash \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \backslash \mathbb{R} = \{-\infty,\, +\infty\}$$

és

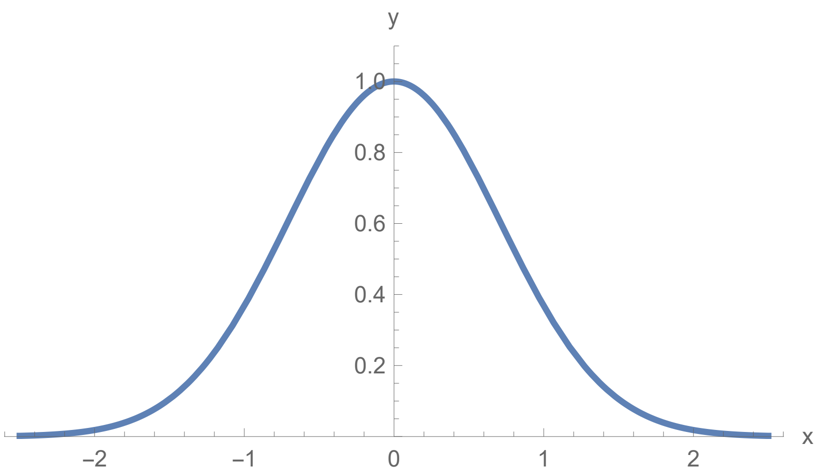
$$\lim_{\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Következésképpen a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 16. ábra szemlélteti (ezt a függvény Carl Friedrich Gauß $(1777 - 1855)$ német matematikus, természettudós, csillagászról nevéhez fűződik, akit munkásságának elismeréseként „a matematika fejedelme” névvel illetnek. Grafikonját szokás **Gauß-görbé**nek vagy alakja alapján **haranggörbé**nek is nevezni).



16. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \to e^{-x^2}$ függvény grafikonja.

2. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$. Mivel

	1	−4	0	0	10
0	1	−4	0	0	10
1	1	−3	−3	−3	7
2	1	−2	−4	−8	−6
3	1	−1	−3	−9	−17
4	1	0	0	0	10

és f együtthatóinak sorozatában két jelváltás van a

$$g(x) := f(-x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény együtthatóinak sorozatában viszont nincsen jelváltás (vö. Descartes-féle előjelszabály: Differenciálegyenletek és bifurkációk I. 213. old.), ezért alkalmas $\xi \in (1,2)$, ill. $\eta \in (3,4)$ esetén f előjele az alábbi táblázatból olvasható le

	$(-\infty,\xi)$	ξ	(ξ,η)	η	$(\eta,+\infty)$
f	$+$	0	$-$	0	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

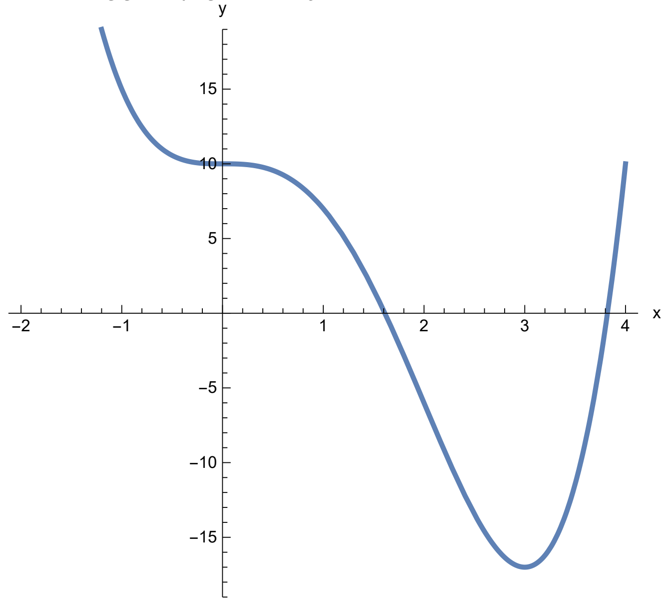
	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}_f'\backslash\mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{R} = \{-\infty,\, +\infty\}$$

Mivel f negyedfokú normált polinom, ezért $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$, és f-nek nincsen aszimptotája sem $(-\infty)$-ben, sem pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 17. ábra szemlélteti.



17. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^4 - 4x^3 + 10$ függvény grafikonja.

3. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2+1} + \frac{8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+6x^2-3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2)^2+6x^2-3}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és

$$y^2 + 6y - 3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_\pm = -3 \pm \sqrt{12} = -3 \pm 2\sqrt{3},$$

ezért

$$(x^2+1)^2 \cdot f'(x) = \left(x^2 - (2\sqrt{3}-3)\right)\left(x^2 + (2\sqrt{3}+3)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen a

$$\xi := \sqrt{2\sqrt{3}-3}$$

számmal

	$(-\infty, -\xi)$	$-\xi$	$(-\xi, \xi)$	ξ	$(\xi, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{4\cdot 2x}{(x^2+1)^2}+\frac{16x(x^2+1)^2-8x^2\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}= \\
&= \frac{8x(x^2+1)^2+16x(x^2+1)^2-32x^3(x^2+1)}{(x^2+1)^4}= \\
&= \frac{8x(x^2+1)+16x(x^2+1)-32x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{8x\left[1+x^2+2+2x^2-4x^2\right]}{(x^2+1)^3}= \\
&= \frac{8x\left(3-x^2\right)}{(x^2+1)^3},
\end{aligned}
$$

ezért

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$	inflexió	$\frown$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}_f'\backslash\mathcal{D}_f=\overline{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{R}=\{-\infty,\,+\infty\},$$

ill. $\lim\limits_{\pm\infty} f=\pm\infty$, továbbá

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x}+1-\frac{4}{x^2+1}\longrightarrow 1 \qquad (x\to\pm\infty)$$

és

$$f(x)-1\cdot x=2-\frac{4x}{x^2+1}\longrightarrow 2 \qquad (x\to\pm\infty)$$

Következésképpen a

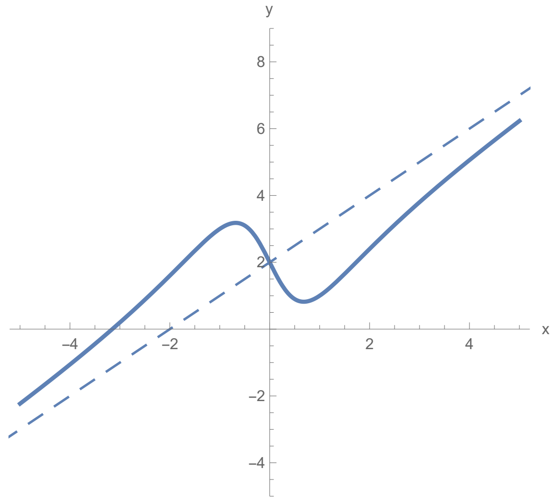
$$\varphi(x):=x+2 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 18. ábra szemlélteti.

4. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}^\infty$, továbbá tetszőleges $\pm1\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f(x)=x\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}=x\cdot\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=x\cdot\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=x+\frac{2x}{x^2-1}.$$



18. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \to x + 2 - \dfrac{4x}{x^2+1}$ függvény grafikonja.

Következésképpen f páratlan, hiszen

$$f(-x) = (-x)\left(1 + \frac{2}{(-x)^2 - 1}\right) = -f(x) \qquad (\pm 1 \neq x \in \mathbb{R});$$

továbbá

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

így

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f	$-$	$+$	0	$-$	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = 1 + \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = 1 - \frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2)^2 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2},$$

és $(y := x^2)$

$$y^2 - 4y - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_{\pm} = 2 \pm \sqrt{5},$$

ezért

$$(x^2-1)^2 \cdot f'(x) = \left(x^2 - (2+\sqrt{5})\right)\left(x^2 - (2-\sqrt{5})\right) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Látható, hogy

$$2 + \sqrt{5} > 0 \qquad \text{és} \qquad 2 - \sqrt{5} < 0,$$

következésképpen a

$$\xi := \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

számmal

	$(-\infty,-\xi)$	$-\xi$	$(-\xi,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\xi)$	ξ	$(\xi,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)^2-(x^4-4x^2-1)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(x^4-4x^2-1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} = \\ &= \frac{4x^5-4x^3-8x^3+8x-4x^5+16x^3+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}, \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f''	$-$	$+$	0	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	inflexió	$\frown$	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}_f'\backslash\mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}}\backslash(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}) = \{-\infty,\ -1,\ 1,\ +\infty\},$$

ill.

$$\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty, \qquad \lim_{-1\pm 0} f = \pm\infty, \qquad \lim_{1\pm 0} f = \pm\infty,$$

továbbá

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x^2-1} \longrightarrow 1 \qquad (x \to \pm\infty)$$

és

$$f(x) - 1\cdot x = \frac{2x}{x^2-1} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \pm\infty)$$

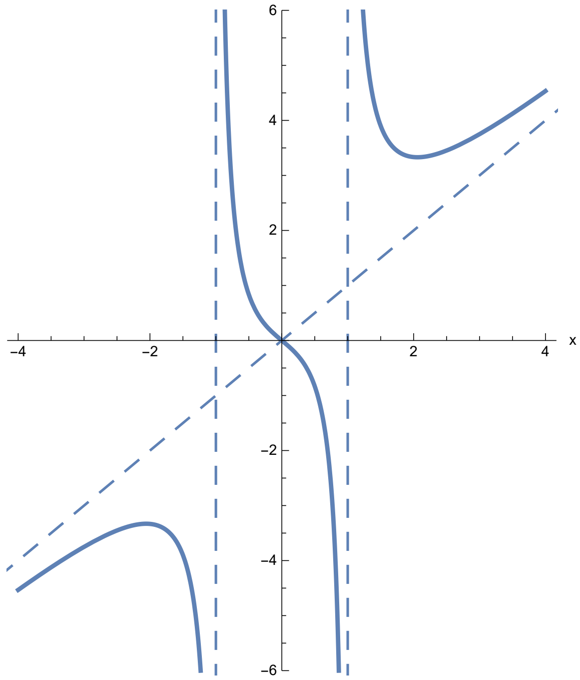
Következésképpen a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 19. ábra szemlélteti.

5. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá tetszőleges $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) > 0$.



19. ábra. Az $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \ni x \to \dfrac{x^3+x}{x^2-1}$ függvény grafikonja.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - (x^2+1) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x \cdot (x+1) - 2(x^2+1)}{(x+1)^3} = \frac{2(x-1)}{(x+1)^3}.$$

Ezért

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$	
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x+1)^3 - 2(x-1) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} == \frac{2 \cdot (x+1) - 6(x-1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{4 \cdot (2-x)}{(x+1)^4},$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f''	$+$	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$\smile$	inflexió	$\frown$

4. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}'_f \backslash \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \backslash (\mathbb{R} \backslash \{-1\}) = \{-\infty, -1, +\infty\},$$

ill.

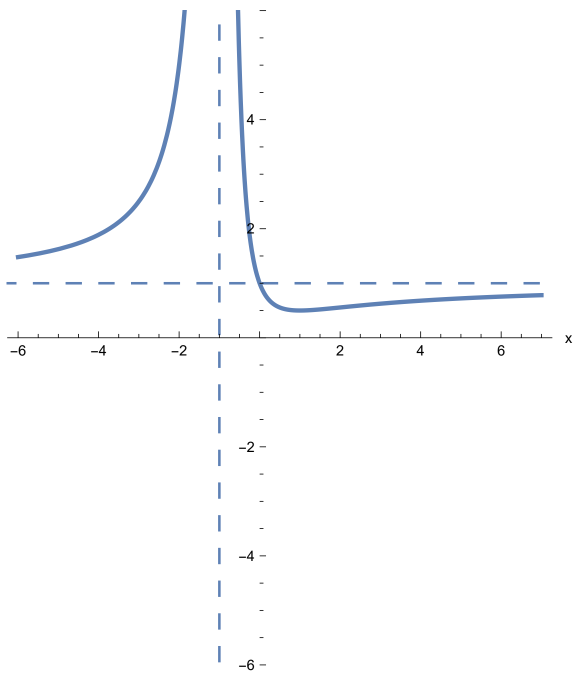
$$\lim_{\pm\infty} f = 1, \qquad \lim_{-1\pm 0} f = +\infty.$$

Következésképpen a

$$\varphi(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 20. ábra szemlélteti.



20. ábra. Az $\mathbb{R} \backslash \{\pm 1\} \ni x \to \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ függvény grafikonja.

6. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$. Igaz továbbá, hogy

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1,$$

így

	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f	$-$	0	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \ln^2(x) + x \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \ln^2(x) + 2 \cdot \ln(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2)\,,$$

ezért

	$(0,1)$	$\frac{1}{e^2}$	$\left(\frac{1}{e^2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{\ln(x)+2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2(\ln(x)+1)}{x},$$

ezért

	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Látható, hogy

$$\mathcal{D}_f' \backslash \mathcal{D}_f = [0,+\infty] \backslash (0,+\infty) = \{0,\,+\infty\}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty,$$

továbbá

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln^2(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(x)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-2x\ln(x)) =$$

$$= (-2) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BL}}{=} (-2) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha $k \in \mathbb{N}_0$, akkor a Bernoulli-l'Hôpital-szabály k-szori alkalmazásával vagy teljes indukcióval belátható, hogy

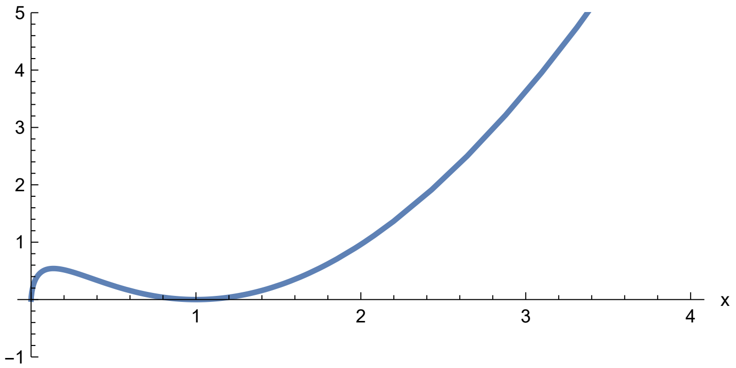
$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln^k(x) = 0.$$

Mivel bármely

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = +\infty \qquad (x \to 0),$$

ezért f-nek nincsen aszimptotája sem a $(+\infty)$-ben, sem pedig a $(-\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 21. ábra szemlélteti.



21. ábra. Az $(0,+\infty) \ni x \to x \cdot \ln^2(x)$ függvény grafikonja.

Feladat. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy a

$$T_m(x) := \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos(m \arccos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Csebisev-polinomokra

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Útm. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \frac{\sin(m \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \sin(m \arccos(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

és

$$T_m''(x) = -\frac{m^2 \cos(m \arccos(x))}{2^{m-1}(1-x^2)} + \frac{xm \sin(m \arccos(x))}{2^{m-1}\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{m^2}{1-x^2} \cdot T_m(x) + \frac{xT_m'(x)}{1-x^2}.$$

Következésképpen minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = -m^2 T_m(x) + xT_m'(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Számítsuk ki az alábbi függvények n-edik deriváltját!

1. $f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1,+\infty))$;
2. $f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;
4. $f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;
5. $f(x) := \dfrac{1}{x^2-3x+2} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\})$;
6. $f(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (a,b,c,d,x \in \mathbb{R}:\ c \neq 0,\ x \neq -d/c)$;
7. $f(x) := \ln\left(\dfrac{a+bx}{a-bx}\right) \quad \left(x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right);\ 0 < a, b \in \mathbb{R}\right)$.

Útm.

1. Világos, hogy $f^{(0)} = f$, továbbá bármely $x \in (-1,+\infty)$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in (-1,+\infty)).$$

2. Mivel $f^{(0)} = f$, és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = -\sin(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

és

$$f'''(x) = -\cos(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(x) = \sin(x) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right),$$

ezért indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Mivel $f^{(0)} = f$, és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

és

$$f'''(x) = \sin(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right),$$

ezért indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \sin(2x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = 2\cos(2x) = -2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = -4\sin(2x) = -4\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(x) = -8\cos(2x) = -8\cos\left(2x + \frac{4\pi}{2}\right).$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

5. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}\setminus\{1; 2\}$ esetén[2]

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

ezért

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-1)^3}, \qquad f''(x) = -\frac{6}{(x-2)^4} + \frac{6}{(x-1)^4}.$$

[2] Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \neq b$, akkor bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{a; b\}$ esetén

$$\frac{c}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{b-a} \cdot \frac{b-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{b-a} \cdot \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{b-a} \cdot \left\{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right\}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})\,.$$

6. Mivel tetszőleges $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$: $c \neq 0$, $x \neq -d/c$ esetén $f^{(0)}(x) = f(x) =$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \left[1 + \frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x + \frac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}$$

vagy $f^{(0)}(x) = f(x) =$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{acx + bc}{acx + ad} = \frac{a}{c} \cdot \frac{acx + ad + bc - ad}{acx + ad} = \frac{a}{c} \cdot \left(1 + \frac{bc - ad}{acx + ad}\right) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{bc - ad}{cx + d}$$

(vö. Analízis 1 (36. oldal)), ezért

$$f'(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(cx+d)^2}, \qquad f''(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{-2c}{(cx+d)^3},$$

és

$$f'''(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{6c^2}{(cx+d)^4}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot c^n \cdot n!}{(cx+d)^{n+1}}. \qquad (n \in \mathbb{N},\ a, b, c, d, x \in \mathbb{R}:\ c \neq 0,\ x \neq -d/c)\,.$$

7. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor tetszőleges $x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$ esetén

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \ln(a + bx) - \ln(a - bx), \qquad f'(x) = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx},$$

$$f''(x) = \frac{-b^2}{(a+bx)^2} + \frac{b^2}{(a-bx)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2b^3}{(a+bx)^3} + \frac{2b^3}{(a-bx)^3}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$ esetén

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot b^n \cdot (n-1)!}{(a+bx)^n} + \frac{b^n \cdot (n-1)!}{(a-bx)^n} = \\ &= \frac{b^n \cdot (n-1)!}{(a^2-b^2x^2)^n}\{(a+bx)^n - (-1)^n \cdot (a-bx)^n\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tétel (Leibniz-szabály). Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in \mathfrak{D}^n[a]$, akkor $f \cdot g \in \mathfrak{D}^n[a]$ és

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

Megjegyezzük, hogy

- az $n = 2$, ill. $n = 3$ esetben a fenti szabály

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'' &= ((f \cdot g)')' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' = \\ &= f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'' \end{aligned}$$

  ill.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)''' &= ((f \cdot g)'')' = (f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'')' = \\ &= f''' \cdot g + f'' \cdot g' + 2 \cdot f'' \cdot g' + 2 \cdot f' \cdot g'' + f' \cdot g'' + f \cdot g''' = \\ &= f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + f \cdot g''' \end{aligned}$$

  alakú;

- a szabály bizonyítása a teljes indukcióval történik (vö. Simon Péter: Bevezetés az analízsbe I.)

Emlékeztető.

1. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f \in \mathfrak{D}^n(I)$ teljesül. Ha $a \in I$, akkor a

$$T_n(x) := T_{a,n}f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az f függvény (a-hoz tartozó n-edik) **Taylor-polinom**jának nevezzük.

2. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f \in \mathfrak{D}^{n+1}(I)$ teljesül. Ekkor bármely $a, x \in I$ esetén van olyan $\xi \in (a,x) \cup (x,a)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)} \qquad (x \in I).$$

Feladat. Írjuk fel az alábbi függvények $a := 0$-hoz tartozó adott Taylor-polinomját, a kért esetekben a hozzátartozó Lagrange-féle maradéktaggal!

1. $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad T_n + R_n$; 2. $f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad T_5 + R_5$;

3. $f(x) := \sin^3(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad T_n$; 4. $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{2;3\}), \quad T_n$.

Útm.

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},$$

ahol $\xi \in (0,x) \cup (x,0)$;

2. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\xi)}{6!} \cdot x^6,$$

ahol $\xi \in (0,x) \cup (x,0)$;

3. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin^3(x) = \sin(x)\cdot\sin^2(x) = \sin(x)\cdot(1-\cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x)\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x+2x)+\sin(x-2x)}{2} = \frac{3}{4}\cdot\sin(x) - \frac{1}{4}\cdot\sin(3x),$$

ezért indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \frac{3}{4}\cdot\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot 3^n\cdot\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ennélfogva tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left\{\frac{3}{4}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot 3^k\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right\}\cdot x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left\{\frac{3}{4}\cdot(-1)^{2k+1} - \frac{1}{4}\cdot 3^{2k+1}\cdot(-1)^{2k+1}\right\}\cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{3}{4}\cdot\{1-3^{2k}\}\cdot x^{2k+1}.$$

4. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;3\}$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

ezért

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot n!\cdot\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}\backslash\{2;3\}).$$

Következésképpen

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\cdot\left(2^{k+1}-3^{k+1}\right)}{6^{k+1}}\cdot x^k \qquad (x\in\mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Írjuk fel a

$$p(x) := 1+3x+5x^2+2x^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

polinomot $x+1$ hatványai szerint!

Útm. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p'(x) = 3 + 10x + 6x^2, \qquad p''(x) = 10 + 12x, \qquad p'''(x) = 12, \qquad p^{(4)}(x) = 0$$

és

$$p(-1) = 1-3+5-2 = 1, \qquad p'(-1) = 3-10+6 = -1, \qquad p''(-1) = 10-12 = -2, \qquad p'''(-1) = 12,$$

így a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula szernt, ha $x \in \mathbb{R}$ akkor alkalmas $\xi \in (-1, x) \cup (x, -1)$, ill. $x = -1$ esetén $\xi := -1$ köztes elemmel

$$p(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{p^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = \frac{p^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)^4 = 0,$$

azaz

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{p^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = 1 - (x+1) - (x+1)^2 + 2(x+1)^3.$$

Megjegyzések.

1. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha először x helyébe $(x-1)$-et helyettesítünk, majd felbontjuk a zárójeleket, és az így kapott polinomba x helyébe $x+1$-et írunk:

$$\begin{aligned} 1 + 3x + 5x^2 + 2x^3 \quad \rightsquigarrow \quad & 1 + 3(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3 = \\ = \quad & 1 + 3x - 3 + 5x^2 - 10x + 5 + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = \\ = \quad & 1 - x - x^2 + 2x^3 \quad \rightsquigarrow \quad 1 - (x+1) - (x+1)^2 + 2(x+1)^3. \end{aligned}$$

2. Ha $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ legfeljebb n-edfokú polinom, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $P^{(n+1)}(x) = 0$. Így a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula következtében bármely $a \in \mathbb{R}$ számra

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + 0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Legyen
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R}).$$

1. Írjuk fel az f függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és becsülje meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!
2. Az iménti feladatbeli becslés felhasználásával számítsuk ki az $A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}}$ szám egy közelítő értékét!

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá
$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^4}}, \qquad f''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+x)^7}}, \qquad f'''(x) = -\frac{28}{27\sqrt[3]{(1+x)^{10}}},$$
ill.
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -\frac{1}{3}, \qquad f''(0) = \frac{4}{9}, \qquad f'''(0) = -\frac{28}{27}.$$
Így bármely $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x) \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 = 1 - \frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{9}\cdot x^2 - \frac{14}{81}\cdot x^3.$$
Ha $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$, akkor alkalmas $\xi \in (0, x)$ esetén
$$f(x) - T_3(x) = R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot x^4.$$
Ha tehát
$$0 < \xi < x \leq \frac{1}{10},$$
akkor
$$f^{(4)}(\xi) = \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi)^{13}}}$$
következtében
$$\left|f^{(4)}(\xi)\right| \leq \frac{280}{81}.$$

Így azt kapjuk, hogy bármely $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$ esetén

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} - \left(1 - \frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{9}\cdot x^2 - \frac{14}{81}\cdot x^3\right)\right| = |f(x) - T_3(x)| \leq \frac{280}{81}\cdot\frac{1}{4!}\cdot 10^{-4} = \frac{7}{486000} \approx 0.0000144.$$

2. Mivel

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{1000+30}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1000\left(1+\frac{3}{100}\right)}} = \frac{1}{10\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}},$$

ezért először a

$$B := \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = f\left(\frac{3}{100}\right)$$

egy közelítő értékét számoljuk ki. A fentiek alapján

$$B \approx T_3\left(\frac{3}{100}\right) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{3}{100}\right)^2 - \frac{14}{81}\cdot\left(\frac{3}{100}\right)^3 = 0,990159\dot{3}.$$

Így a Taylor-formulát alkalmazva $\left(0, \frac{3}{100}\right]$ intervallumon elmondható, hogy alkamas $\xi \in \left(0, \frac{3}{100}\right]$ esetén

$$\left|f\left(\frac{3}{100}\right) - T_3\left(\frac{3}{100}\right)\right| \leq \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\cdot\left(\frac{3}{100}\right)^4 \leq \frac{280}{81}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{3}{100}\right)^4 =$$

$$= \frac{35}{3}\cdot 10^{-8} < \frac{36}{3}\cdot 10^{-8} = 1,2\cdot 10^{-7}.$$

Következésképpen az A szám egy közelítő értéke:

$$A = \frac{B}{10} \approx 0,0990195\dot{3},$$

és a közelítés hibája az alábbi módon becsülhető felülről:

$$\left|A - 0,0990195\dot{3}\right| < 1,2\cdot 10^{-8}. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki az alábbi f függvéyn n-edik deriváltját!

1. $f(x) := x^2\ln(1-x)\ \ (x \in (-\infty, 1))$; 2. $f(x) := e^x\cdot x^n\ \ (x \in \mathbb{R})$; 3. $f(x) := x^2\cdot\frac{e^x + e^{-x}}{2}\ \ (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Legyen
$$\varphi, \psi : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^2, \quad \psi(x) = \ln(1-x).$$
Ekkor
$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
és bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in (-\infty, 1)$ számra
$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{2!}{(2-k)!} \cdot x^{2-k} & (k \in \{1,2\}), \\[2ex] 0 & (2 < k \in \mathbb{N}), \end{cases} \qquad \psi^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}.$$
A Leibniz-szabály következtében így tetszőleges $x \in (-\infty, 1)$ esetén
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(n-k)}(x) = \\ &= -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \cdot x^2 - 2 \cdot n \cdot x \cdot \frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}. \end{aligned}$$

2. Legyen
$$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^n, \quad \psi(x) = e^x.$$
Ekkor
$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
így bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in \mathbb{R}$ számra
$$\psi^{(k)}(x) = e^x, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k} & (k \in \{1, \ldots, n\}), \\[2ex] 0 & (n < k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$
A Leibniz-szabályt alkalmazva tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k} \cdot e^x =$$

$$= e^x \cdot \sum_{k=0}^{n} k! \cdot \binom{n}{k}^2 \cdot x^{n-k}$$

adódik.

3. Legyen

$$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^2, \quad \psi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x).$$

Ekkor

$$\varphi'(x) = 2x, \quad \varphi''(x) = 2, \quad \varphi'''(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\psi^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} & (n \equiv 0\ (2)), \\ \operatorname{sh} & (n \equiv 1\ (2)). \end{cases}$$

Így

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2}{k} \varphi^{(k)}(x)\psi^{(2-k)}(x) = \binom{n}{0} x^2 \operatorname{ch}^{(n)}(x) + \binom{n}{1} 2x \operatorname{ch}^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} \operatorname{ch}^{(n-2)}(x) =$$

$$= \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{ch}(x) + 2 \cdot n \cdot x \cdot \operatorname{sh}(x) + n \cdot (n-1) \cdot \operatorname{ch}(x) & (n \equiv 0\ (2)), \\ x^2 \cdot \operatorname{sh}(x) + 2 \cdot n \cdot x \cdot \operatorname{ch}(x) + n \cdot (n-1) \cdot \operatorname{sh}(x) & (n \equiv 1\ (2)). \end{cases} \quad \blacksquare$$

Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, ill. konkáv! Van-e f-nek inflexiós pontja?

1. $f(x) := x \cdot e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}).$

Útm.

1. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)\right) = (-4x)e^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) = 2x(2x^2-3)e^{-x^2} = 0 \iff x \in$$

ezért

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$esetén

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x^2-1+1+x}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1+x}{x-1} = x+1+\frac{1+x}{x-1},$$

így

$$f'(x) = 1 + \frac{x-1-(1+x)}{(x-1)^2} = 1 + \frac{-2}{(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3},$$

tehát

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\frown$	$\smile$

Házi feladat. Függvényvizsgálat.

Házi feladat. Függvényvizsgálat (folyt).

Házi feladat. Végezzük el az alábbi függvények teljes vizsgálatát!

1. $f(x) := \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := x + \ln(x^2-4x) \qquad (x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty));$
3. $f(x) := 2^{-x}\sin(\pi x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá

$$f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-2; 0\},$$

így

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
f	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4} = \frac{(3x^2+4x)(x+1) - 2(x^3+2x^2)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3} = \frac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3}$$

és

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(3x^2+6x+4)\cdot(x+1)^3-(x^3+3x^2+4x)\cdot 3\cdot(x+1)^2}{(x+1)^6} = \\
&= \frac{(3x^2+6x+4)\cdot(x+1)-3(x^3+3x^2+4x)}{(x+1)^4} = \\
&= \frac{3x^3+6x^2+4x+3x^2+6x+4-3(x^3+3x^2+4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+4}{(x+1)^4} = \frac{2(2-x)}{(x+1)^4}
\end{aligned}
$$

és

$$f''(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=2,$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\smile$	$\smile$	inflexió	$\frown$

4. lépés (határérték, aszimptota). Mivel f racionális függvény, így az előző lépést (is) figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{-1\pm 0} f = +\infty.$$

Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \longrightarrow 1 \qquad (x \to \pm\infty),$$

továbbá

$$f(x)-x = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} - x = \frac{x^3+2x^2-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1} = \frac{-x}{x^2+2x+1} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \pm\infty),$$

ezért a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

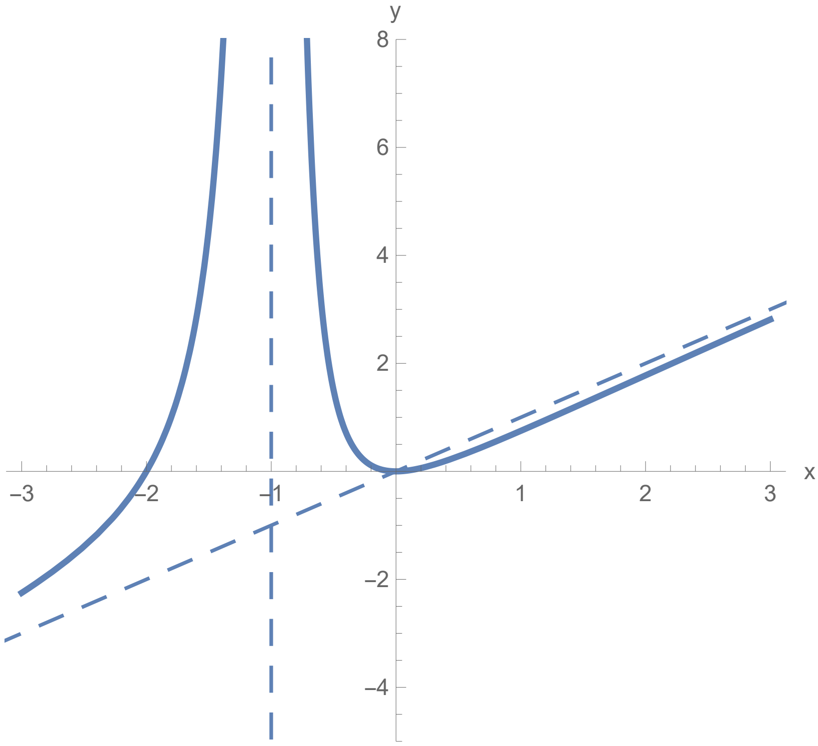
lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 22. ábra szemlélteti.

2. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá igaz az

$$x \in (4,+\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > 0$$

implikáció.



22. ábra. Az $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \ni x \to \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1}$ függvény grafikonja.

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x} = \frac{x^2-2x-4}{x^2-4x} = \frac{(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})}{x^2-4x}$$

és

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1-\sqrt{5}$$

hiszen

$$1-\sqrt{5} < 1-\sqrt{4} = -1 < 0 < 1+\sqrt{5} < 1+\sqrt{9} = 4$$

következtében $1+\sqrt{5} \notin \mathcal{D}_f$, ezért

	$(-\infty, 1-\sqrt{5})$	$1-\sqrt{5}$	$(1-\sqrt{5}, 0)$	$(4, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f	$\uparrow$	lok max.	$\downarrow$	$\uparrow$

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2)(x^2-4x)-(x^2-2x-4)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = \\ &= \frac{2x^3-8x^2-2x^2+8x-2x^3+4x^2+4x^2-8x+8x-16}{(x^2-4x)^2} = \\ &= (-2)\cdot\frac{x^2-4x+8}{(x^2-4x)^2} = (-2)\cdot\frac{(x-2)^2+4}{(x^2-4x)^2} < 0, \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty,0)$	$(4,+\infty)$
f''	$-$	$-$
f	$\frown$	$\frown$

4. lépés (határérték, aszimptota). Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{0-0} f = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{4+0} f = -\infty,$$

továbbá $\lim_{+\infty} f = +\infty$, illetve $\lim_{-\infty} f = -\infty$, ui. egyrészt $\lim_{x\to 0+0} \ln(x) = -\infty$, másrészt pedig

$$\exp\left(x+\ln(x^2-4x)\right) = e^x\cdot(x^2-4x) = x^2\cdot e^x - 4\cdot x\cdot e^x \longrightarrow 0-0=0 \qquad (x\to-\infty),$$

hiszen a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt felhasználva tetszőleges $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$x^k\cdot e^x = \frac{x^k}{e^{-x}} \sim \frac{kx^{k-1}}{-e^{-x}} \sim \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^{-x}} \sim \frac{k!}{(-1)^k e^{-x}} = \frac{k!}{(-1)^k}\cdot e^x \longrightarrow 0 \qquad (x\to-\infty)$$

adódik. Mivel

$$\frac{f(x)}{x} = 1+\frac{\ln(x^2-4x)}{x} \longrightarrow 1+0=1 \qquad (x\to+\infty)$$

hiszen a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt használva azt kapjuk, hogy

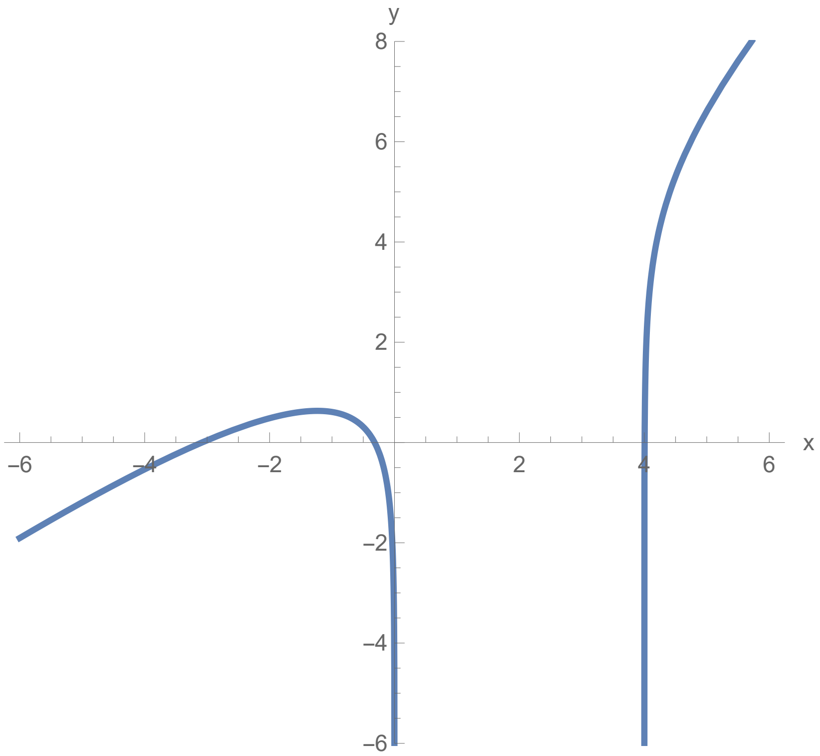
$$\frac{\ln(x^2-4x)}{x} \sim \frac{2x-4}{x^2-4x} \longrightarrow 0 \qquad (x\to+\infty),$$

továbbá

$$f(x)-x = \ln(x^2-4x) \longrightarrow +\infty \qquad (x\to+\infty),$$

ezért f-nek nincsen aszimptotája sem a $(+\infty)$-ben, sem pedig a $(-\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 23. ábra szemlélteti.



23. ábra. Az $(x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)) \ni x \to x + \ln(x^2 - 4x)$ függvény grafikonja.

3. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $2^{-x} \neq 0$, ezért

$$f(x) = 0 \iff \sin(\pi x) = 0 \iff \pi x \in \{k\pi \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\} \iff x \in \mathbb{Z}.$$

2. és lépés 3. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték, és alaki viszonyok, inflexió). Bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $2^{-x} > 0$ és

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2^{-x}(-\ln(2))\sin(\pi x) + 2^{-x}\pi\cos(\pi x) = 2^{-x}\{-\ln(2)\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)\}, \\
f''(x) &= = 2^{-x}(-\ln(2))\{-\ln(2)\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)\} \\
& \quad +2^{-x}\left\{-\ln(2)\pi\cos(\pi x) - \pi^2\sin(\pi x)\right\} = \\
&= 2^{-x}\left\{\left(\ln^2(2) - \pi^2\right)\sin(\pi x) - 2\pi\ln(2)\cos(\pi x)\right\},
\end{aligned}$$

ezért a

$$g(x) := -a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény előjelviszonyait fogjuk vizsgálni, ahol $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Legyen

$$H := \left\{ k + \frac{1}{2} \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ekkor bármely $x \in H$ esetén $g(x) \neq 0$, hiszen

$$g\left(k + \frac{1}{2}\right) = -a(-1)^k \neq 0.$$

Világos, hogy

$$g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b\cos(\pi x) = a\sin(\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = \operatorname{tg}(\pi x) \quad (x \in \mathbb{R} \backslash H),$$

továbbá adott $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$x \in \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad x - k \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(x-k) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

és a tangensfüggvény periodicitása miatt $\operatorname{tg}(\pi x) = \operatorname{tg}(\pi(x-k))$. Mivel

$$\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \right)^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\pi x) = \frac{b}{a} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \quad \pi(x-k) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ \wedge \ \operatorname{tg}(\pi(x-k)) = \frac{b}{a} \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \quad \pi(x-k) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \quad x - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) = k \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad x - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

A

$$c := \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

jelölés bevezetésével így azt kapjuk, hogy

- $a := -\ln(2) > 0$ és $b := \pi > 0$ esetén

$$0 < c < \frac{1}{2}.$$

Mivel

$$g(0) = b = \pi > 0 \qquad \text{és} \qquad 0 \in (-1 + c.c).$$

így a koszinuszfüggvény és a szinuszfüggvény periodukussága következtében

$$g(x) \begin{cases} > 0 & (x \in (k+c, k+1+c),\ k \in \mathbb{Z}:\ k \equiv 1\,(2)), \\ \\ < 0 & (x \in (k+c, k+1+c),\ k \in \mathbb{Z}:\ k \equiv 0\,(2)). \end{cases}$$

- $a := \pi^2 - \ln^2(2) > \pi^2 - 2^2 > 0$ és $b := -2\pi\ln(2) < 0$ esetén $-\dfrac{1}{2} < c < 0$. Mivel

$$g(0) = b < 0 \qquad \text{és} \qquad 0 \in (c, 1 + c),$$

ezért

$$g(x) \begin{cases} < 0 & (x \in (k+c, k+1+c),\ k \in \mathbb{Z}:\ k \equiv 0\,(2)), \\ \\ > 0 & (x \in (k+c, k+1+c),\ k \in \mathbb{Z}:\ k \equiv 1\,(2)). \end{cases}$$

Következésképpen az f függvény

(a) szigorúan monoton növő a

$$\left[2k + 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right), 2k + 2 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon;

(b) szigorúan monoton fogyó a

$$\left[2k\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right), 2k + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon;

(c) konvex az

$$I_k := \left[2k + 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2 - \ln^2(2)}\right), 2k + 2 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2 - \ln^2(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon;

(d) konkáv a

$$J_k \left[2k + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2 - \ln^2(2)}\right), 2k+1+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2-\ln^2(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon,

továbbá f-nek

(a) lokális maximuma van a

$$2k + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

pontokban;

(b) lokális minimuma van a

$$2k + 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

pontokban;

(c) inflexiója van az I_k, ill. J_k intervallumok határpontjaiban $(k \in \mathbb{Z})$.

4. lépés (határérték, aszimptota). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x)| \leq 2^{-x} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty),$$

ezért $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, következésképpen a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek a $(+\infty)$-ben. Mivel

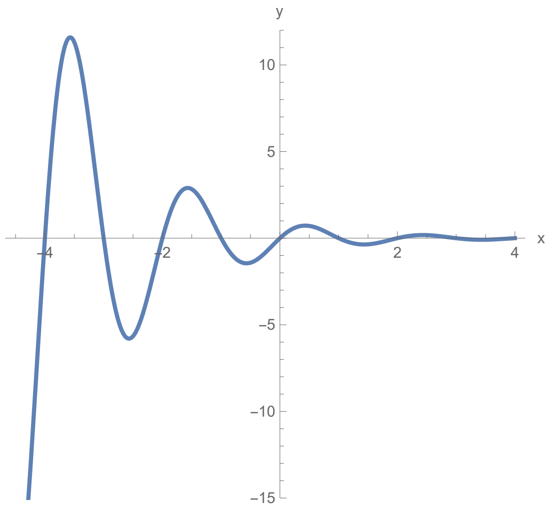
$$\lim_{x\to-\infty} 2^{-x} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x2^x} = -\infty,$$

ill.

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^k \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

ezéert f nek a $(-\infty)$-ben sem határértéke, sem pedig aszimptotája nincsen.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 24. ábra szemlélteti.



24. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \to 2^{-x}\sin(\pi x)$ függvény grafikonja.

Gyakorló feladat. Határozzuk meg a következő függvények magasabbrendű deriváltjait!

1. $f(x) := (x^4 + 1) \cdot \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R})$, $f^{(5)}(x) = ?$;
2. $f(x) := x^2 \cdot \sin(x) \quad (\in \mathbb{R})$, $f^{(7)}(x) = ?$;
3. $f(x) := e^x \cdot \cos(x) \quad (\in \mathbb{R})$, $f^{(3)}(x) = ?$.

Útm.

1. Legyen
$$\varphi, \psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^4 + 1, \quad \psi(x) = \ln(x).$$
Ekkor
$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in (0, +\infty)),$$
és bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in (0, +\infty)$ számra
$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{4!}{(4-k)!} \cdot x^{4-k} & (k \in \{1, 2, 3, 4\}), \\ 0 & (4 < k \in \mathbb{N}), \end{cases} \qquad \psi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^{k-1}}.$$

A Leibniz-szabály következtében így tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
f^{(5)}(x) &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(5-k)}(x) = \\
&= \binom{5}{0} \cdot (x^4+1) \cdot \frac{24}{x^5} + \binom{5}{1} \cdot 4x^3 \cdot \left(-\frac{6}{x^4}\right) + \binom{5}{2} \cdot 12x^2 \cdot \frac{2}{x^3} + \binom{5}{3} \cdot 24x \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \binom{5}{4} \cdot 24 \cdot \frac{1}{x} + \binom{5}{5} \cdot 0 \cdot \ln(x) = \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left\{24 \cdot \frac{x^4+1}{x^4} - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 24 - 10 \cdot 24 + 5 \cdot 24 + 0\right\} = \frac{24}{x}\left(1 + \frac{1}{x^4}\right).
\end{aligned}$$

2. Legyen

$$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^2, \quad \psi(x) = \sin(x).$$

Ekkor

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{2!}{(2-k)!} \cdot x^{2-k} & (k \in \{1, 2\}), \\[2ex] 0 & (2 < k \in \mathbb{N}), \end{cases} \qquad \psi^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

A Leibniz-szabály következtében így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f^{(7)}(x) &= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(5-k)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{7}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(7-k)}(x) = \\
&= \binom{7}{0} \cdot x^2 \cos(x) + \binom{7}{1} \cdot 2x(-\sin(x)) + \binom{7}{2} \cdot 2(-\cos(x)) = -x^2\cos(x) - 14x\sin(x) + 42\cos(x).
\end{aligned}$$

3. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = e^x\cos(x) - e^x\sin(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)), \qquad f''(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + e^x(-\sin(x) - \cos(x)) = -2e^x\sin(x),$$

és

$$f'''(x) = -2e^x\sin(x) - 2e^x\cos(x) = -2e^x(\sin(x) + \cos(x)). \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki e értékét $3 \cdot 10^{-6}$-nál kisebb hibával!

Útm. Mivel

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R};\ \xi \in (0, x) \cup (x, 0)),$$

ezért

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi} \cdot 1^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x = 1;\ \xi \in (0, 1)).$$

Az n értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a hiba

$$|R_n| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 3 \cdot 10^{-6}$$

legyen. Mivel $e^{\xi} < e < 3$, ezért

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!} < 3 \cdot 10^{-6} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n+1)! > 10^6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 9$$

$$(5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 540, \quad 8! = 40320, \quad 9! = 362880, \quad 10! = 3628800.)$$

Következésképpen Tehát

$$e \approx T_9(1) = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2,71828. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki $\ln(1,1)$ értékét 10^{-4} pontossággal!

Útm. Legyen $x \in (-1, 1)$. Ekkor

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n(x),$$

ahol

$$R_n(x) := (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}$$

valamely $\xi \in (0, x) \cup (x, 0)$ $(x \neq 0)$ esetén ($x = 0$ esetén $\xi := 0$). Mivel

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{10^{n+1} \cdot (n+1)},$$

ezért n értékét úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\frac{1}{10^{n+1}(n+1)} < 10^{-4}, \qquad \text{azaz} \qquad n = 3$$

legyen. Tehát

$$\ln(1,1) = \ln(1+0,1) \approx T_3(0,1) = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0,0953. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Legyen $0 < h \in \mathbb{R}$, ill.

$$f : (-h, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt{x+h}.$$

1. Határozzuk meg az f függvény 0-körüli T_1 első és T_2 második Taylor-polinomját!
2. Lássuk be, hogy fennáll a

$$T_2(x) < f(x) < T_1(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenségpár!

3. Adjunk alsó, ill. felső becslést a $\sqrt{148}$ számára!

Útm.

1. Mivel bármely $-h < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+h}}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(x+h)^3}}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(x+h)^5}},$$

ezért

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \sqrt{h} + \frac{x}{2\sqrt{h}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ill.

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = \sqrt{h} + \frac{x}{2\sqrt{h}} - \frac{x^2}{8h\sqrt{h}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$, ill. alkalmas $\xi_1, \xi_2 \in (0, x)$ esetén

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-0)^2 = -\frac{x^2}{8\sqrt{(\xi_1+h)^3}} < 0$$

ill.

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-0)^3 = \frac{3x^3}{48\sqrt{(\xi_2+h)^5}} > 0.$$

Következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ számra

$$T_2(x) < T_2(x) + R_2(x) = f(x) = T_1(x) + R_1(x) < T_1(x).$$

3. Mivel $148 = 144 + 4 = 12^2 + 4$, ezért a $h := 144$, ill. $x := 4$ választással

$$T_2(4) < f(4) = \sqrt{148} < T_1(4)$$

és

$$\begin{aligned}
T_1(4) &= 12 + \frac{4}{2 \cdot 12} = 12 + \frac{1}{6} < 12,167, \\
T_2(4) &= 12 + \frac{1}{6} - \frac{16}{8 \cdot 144 \cdot 12} = 12 + \frac{1}{6} - \frac{1}{144 \cdot 6} = 2 + \frac{143}{864} > 12,165
\end{aligned}$$

következtében

$$12,165 < \sqrt{148} < 12,167. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Tetszőleges $0 \leq x \leq 1$ esetén adjunk felső becslést az

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} \right|$$

számra, és ennek alapján határozzuk meg $\sqrt{2/3}$ egy közelítő értékét $(=: \alpha)$, majd becsüljük meg (felülről) az $\left|\sqrt{2/3} - \alpha\right|$ eltérést!

Útm. Legyen
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad (x \in (-1, +\infty)).$$
Ekkor $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és
$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(1+x)^3}}, \qquad f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}}, \qquad f'''(x) = -\frac{15}{8\sqrt{(1+x)^7}},$$
ill.
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{-1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{3}{4}.$$
Így
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8}\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k\right| = |f(x) - T_2(x)| = \\ &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-0)^3\right| = \left|-\frac{15}{48\sqrt{(1+\xi)^7}} \cdot x^3\right| = \\ &= \frac{15}{48\sqrt{(1+\xi)^7}} \cdot x^3 < \frac{15}{48} \\ &\quad (0 \leq x \leq 1;\ 0 < \xi < x,\ \text{ill. } \xi = 0,\ \text{ha } x = 0),\end{aligned}$$
valamint $\sqrt{2/3}$ egy közelítő értéke:
$$\sqrt{2/3} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/2}} \approx T_2(1/2) = 1 - \frac{1/2}{2} + \frac{3(1/2)^2}{8} = \frac{27}{32} =: \alpha,$$
és
$$\left|\sqrt{2/3} - \alpha\right| < \frac{15}{48 \cdot 8} = \frac{5}{128} = 0,0390625. \quad \blacksquare$$

Feladat. Lássuk be, hogy a
$$\sum_{k=1} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$
sor konvergens és határozzuk meg az összegét!

Útm. Mivel
$$\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (x \in (-1, 1]),$$
ezért tetszőleges $x \in (0, 1]$ esetén van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy
$$\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1+x)}{k!} x^k = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1},$$
azaz
$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1+x)}{k!} x^k\right| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+0)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$
Tehát
$$\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Adott $0 \leq x \leq 1$ esetén adjunk felső becslést a

$$\left|\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right|$$

számra, és ennek alapján határozzuk meg $\sqrt[3]{5/4}$ egy közelítő értékét $(=: \alpha)$, majd becsüljük meg felülről az $\left|\sqrt[3]{5/4} - \alpha\right|$ eltérést!

Útm. Legyen

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{D}^\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}, \qquad f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}, \qquad f'''(x) = \frac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}},$$

ill.

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{3}, \qquad f''(0) = \frac{-2}{9}.$$

Így

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k\right| = |f(x) - T_2(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \cdot (x-0)^3\right| = \left|\frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \sqrt[3]{(1+\xi)^8}} \cdot x^3\right| = \\ &= \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \sqrt[3]{(1+\xi)^8}} \cdot x^3 < \frac{10}{6 \cdot 27} = \frac{10}{162} \qquad (0 < \xi < x, \text{ ill. } \xi = 0, \text{ ha } x = 0),\end{aligned}$$

valamint $\sqrt[3]{5/4}$ egy közelítő értéke:

$$\sqrt[3]{5/4} = \sqrt[3]{1+1/4} \approx 1 + \frac{1/4}{3} - \frac{(1/4)^2}{9} = \frac{155}{144} \qquad \text{és} \qquad \left|\sqrt[3]{5/4} - \alpha\right| < \frac{10}{162 \cdot 64} = \frac{10}{10368}. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Írjuk fel a tg 0-körüli harmadfokú Taylor-polinomját, majd a Lagrange-féle maradéktag felhasználásával mutassuk meg, hogy fennáll a

$$\operatorname{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3} \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

egyenlőtlenség!

Útm.

$$\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}, \qquad \operatorname{tg}'' = \frac{2\sin}{\cos^3}, \qquad \operatorname{tg}''' = \frac{2\cos^4 + 6\cos^2\sin^2}{\cos^6} = \frac{2\cos^2 + 6\sin^2}{\cos^4} = \frac{2 + 4\sin^2}{\cos^4},$$

ill.

$$\operatorname{tg}(0) = 0, \qquad \operatorname{tg}'(0) = 1, \qquad \operatorname{tg}''(0) = 0, \qquad \operatorname{tg}'''(0) = 2.$$

Így

$$T_3(x) = x + \frac{x^3}{3} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén van tehát olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

$$\mathrm{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\mathrm{tg}^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 \qquad \text{és} \qquad \mathrm{tg}^{(4)} = \frac{8 \sin \cos^2 + 4 \sin(2 + 4 \sin^2)}{\cos^5},$$

ezért tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén $\mathrm{tg}^{(4)}(x) > 0$, ahonnan már következik az állítás. ■

Emlékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és

$$\alpha_k := \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Ekkor a

$$\sum_{n=0} \left(\alpha_n (x - c)^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvényt **Taylor-sor**ának nevezzük.

Mint ahogy azt az 5. előadáson hallhatták, van olyan függvény, amelynek Taylor-sora egy intervallumban konvergens, de a sor nem az adott függvényt, hanem egy másik függvényt állít elő. Erre vonatkozik a következő – Cauchy-tól származó –

Házi feladat. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy

1. bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}^{\infty}[x]$, majd számítsuk ki az

$$f'(x), \qquad f''(x), \qquad f'''(x)$$

deriváltakat;

2. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, illetve alkalmas p_n polinom esetén fennáll az

$$f^{(n)}(x) = f(x) \cdot \frac{p_n(x)}{x^{3n}} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

egyenlsőség;

3. bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $f \in \mathfrak{D}^{n}[0]$, majd számítsuk ki $f^{(n)}(0)$ értékét!

Útm.

1. Világos, hogy bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}^{\infty}[x]$, hiszen f itt nem más, mint az exponenciális függvény és egy racionális függvény kompozíciója, továbbá bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(-2)x^{-3}\exp(-x^{-2}) = 2x^{-3}f(x), \\ f''(x) &= 2(-3)x^{-4}f(x) + 2x^{-3}f'(x) = (-6x^{-4} + 4x^{-6})f(x), \\ f'''(x) &= \left[(-6)(-4)x^{-5} + 4(-6)x^{-7}\right] f(x) + \left[-6x^{-4} + 4x^{-6}\right] f'(x) = \\ &= \left(24x^{-5} - 24x^{-7} - 12x^{-7} + 8x^{-9}\right) f(x) = \left(24x^{-5} - 36x^{-7} + 8x^{-9}\right) f(x). \end{aligned}$$

2. Indukcióval bizonyítunk.

   - Világos, hogy $n = 1$ esetén igaz az állítás (vö. fent).
   - Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \\ &= (-3n)x^{-3n-1}p_n(x)f(x) + x^{-3n}p_n'(x)f(x) + x^{-3n}p_n(x)f'(x) = \\ &= x^{-3n-3}\left[-3nx^2p_n(x) + x^3p_n'(x) + 2p_n(x)\right] f(x). \end{aligned}$$

Ha most

$$p_{n+1}(x) := -3nx^2 p_n(x) + x^3 p_n'(x) + 2p_n(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor p_{n+1} polinom, azaz az $n+1$ indexre is igaz az állítás.

3. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{x \to 0} x^{-2} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} x^{-2n} \exp(-x^{-2}) = \lim_{x \to 0} \frac{(x^{-2})^n}{\exp(-x^{-2})} = 0,$$

következésképpen

$$\lim_{x \to 0} x^{-n} \exp(-x^{-2}) = \lim_{x \to 0} x^{-2n} \cdot \exp(-x^{-2}) \cdot \lim_{x \to 0} x^n = 0 \cdot 0 = 0.$$

Így

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{-1} \exp(-x^{-2}) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0),$$

így $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 0$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathfrak{D}^n[0]$ és $f^{(n)}(0) = 0$, akkor

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = x^{-3n-1} p_n(x) f(x) \longrightarrow p_n(0) \cdot 0 = 0 \qquad (x \to 0),$$

ennélfogva

$$f \in \mathfrak{D}^{n+1}[0] \qquad \text{és} \qquad f^{(n+1)}(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmény azt jelenti, hogy az f függvény 0-körüli Taylor-sora:

$$\sum_{n=0} (0 \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami minden $\mathbb{R} \ni x$-re konvegens és összege minden x helyen zérus. Így a 0 pont környezetében mindenhol konvergens Taylor-sor nem állítja elő az f függvényt.

Ajánlott feladatok.

1. Adott $0 \leq x \leq 1$ esetén adjunk felső becslést az

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|$$

számra, és ennek alapján határozzuk meg $\ln(3/2)$ egy közelítő értékét $(=: \alpha)$, majd becsüljük meg (felülről) az $|\ln(3/2) - \alpha|$ eltérést!

2. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy aigaz az

$$f \text{ konvex} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x, y \in I: \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

ekvivalencia!

3. Lássuk be, hogy tetszőleges $\alpha \in [1, +\infty)$, ill. $x \in (-1, +\infty)$ esetén fennáll az

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

egyenlőtlenség (**Bernoulli-egyenlőtlenség**)!

4. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény: $f \in \mathfrak{D}^2$, továbbá

$$M_k := \sup\left\{|f^{(k)}(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in \mathbb{R}\right\} \qquad (k \in \{0, 1, 2\}),$$

akkor fennáll az

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2$$

Landau-Kolmogorov-egyenlőtlenség!

5. Igazoljuk, hogy ha a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre

$$\varphi'(x) = x + \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(0) = 0$$

teljesül, akkor $\varphi \in \mathfrak{D}^\infty$, majd írjuk fel a φ függvény 0-körüli n-edik Taylor-polinomját! A Taylor-polinom felhasználásával számítsuk ki a $\varphi(1)$ helyettesítési értéket!

Útm.

1. Legyen
$$f(x) := \ln(1+x) \qquad (x \in (-1,+\infty)).$$
Ekkor $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$$
ill.
$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1, \qquad f'''(0) = 2,$$
Így
$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k\right| = |f(x) - T_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot(x-0)^4\right| = \left|\frac{6}{24(1+\xi)^4}\cdot x^4\right| =$$
$$= \frac{1}{4(1+\xi)^4}\cdot x^4 < \frac{1}{4} \qquad (0 < \xi < x, \text{ ill. } \xi = 0, \text{ ha } x = 0),$$
valamint $\ln(3/2)$ egy közelítő értéke:
$$\ln(3/2) = \ln(1+1/2) \approx 1/2 - \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^3}{3} = \frac{5}{12} =: \alpha$$
és
$$|\ln(3/2) - \alpha| < \frac{1}{4\cdot 16} = \frac{1}{64} = 0{,}015625.$$

2. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$, ezért f konvexitásának következtében $f'' \geq 0$. Így tetszőleges $y \in I$ esetén az f függvény y-körüli első Taylor-polinomja:
$$T_1(x) = f(y) + f'(y)(x-y) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Következésképpen alkalmas $\xi \in (x,y) \cup (y,x)$ (ha $x = y$, akkor $\xi := x = y$) esetén
$$f(x) = f(y) + f'(y)(x-y) + \frac{f'(\xi)}{2}(x-y)^2$$
Ha $x \neq y$, akkor $\xi \neq x$ és $\xi \neq y$. Ennélfogva $f''(\xi) \geq 0$, ahonnan
$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) + 0 = f(y) + f'(y)(x-y)$$
következik.

2. lépés. Tudjuk, hogy f pontosan akkor konvex, ha tetszőleges $a, b \in I$ esetén igaz az
$$x \in (a,b) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
implikáció. Világos, hoga a
$$\varphi(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x \in (a,b])$$
függvény differenciálható, továbbá a feltételek következtében tetszőleges $x \in (a,b]$ esetén
$$\varphi'(x) = \frac{(x-a)f'(x) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f(a) - f(x) - f'(x)(x-a)}{(x-a)^2} \geq 0.$$
Ez azt jelenti, hogy φ monoton növekedő. Következésképpen $\varphi(x) \leq \varphi(b)$.

3. Az

$$f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := (1+x)^{\alpha}$$

függvény nyilvánvalóan kétszer differenciálható, továbbá tetszőleges $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \alpha(\alpha-1)^{\alpha-2}.$$

Következésképpen $f'' \geq 0$, azaz f konvex, így az előző feladatbeli állítás felhasználásával ($y := 0$) azt kapjuk, hogy

$$(1+x)^{\alpha} = f(x) \geq f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \alpha x.$$

4. A Lagrange-maradéktagos Taylor-formula következtében bármely $x, h \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

ahol ξ az x és $x+h$ által meghatározott nyílt intervallumban van (illetve $h = 0$ esetén $\xi := x$).

1. eset. $M_0, M_1, M_2 < +\infty$. Ekkor, ha valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén

- $f(x) \geq 0$, úgy
$$0 \leq f(x) = f(x+h) - f'(x)h - \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \leq M_0 - f'(x)h + \frac{M_2}{2}h^2.$$
Mivel ez tetszőleges $h \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, ezért $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$.
- $f(x) \leq 0$, úgy
$$0 \leq -f(x) = -f(x+h) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \leq M_0 + f'(x)h + \frac{M_2}{2}h^2.$$
Mivel ez tetszőleges $h \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, ezért $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$.

Az $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$ egyenlőtlenség tehát minden $x \in \mathbb{R}$ pontban fennáll, amiből már következik, hogy

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

2. eset. M_0, M_1, M_2 nem mindegyike véges. Elég azt megmutatni, hogy ha $M_1 = +\infty$, akkor M_0 és M_2 közül legalább az egyik $+\infty$. Ha ez nem igaz, akor a minden $x, h \in \mathbb{R}$ esetén fenálló

$$|f'(x)h| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}h^2$$

egyenlőtlenségből az $M_1 = +\infty$ feltételünkkel ellentmondásra jutunk.

Könnyen megmutatható, hogy az

$$f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+\frac{229}{77}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $M_1^2 = 2M_0M_2$. Ez azt jelenti, hogy a fenti becslés nem javítható.

5. Világos, hogy $\varphi \in \mathfrak{D}^{\infty}$ és

$$\varphi^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \in \{0; 1\}), \\ 1 & (1 < n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= x + \varphi(x), \qquad \varphi(0) = 0 & \varphi'(0) &= 0,\\
\varphi''(x) &= 1 + \varphi'(x), & \varphi''(0) &= 1,\\
\varphi'''(x) &= \varphi''(x), & \varphi'''(0) &= 1,\\
\varphi^{(4)}(x) &= \varphi'''(x), & \varphi^{(4)}(0) &= 1,\\
\varphi^{(5)}(x) &= \varphi^{(4)}(x), & \varphi^{(5)}(0) &= 1,\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Így φ 0-körüli n-edik Taylor-polinomja:

$$T(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Látható, hogy

$$T(x) \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\varphi(x) = e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan $\varphi(1) = e - 2$ következik. ■

További feladat. Számítsuk ki $f^{(n)}(0)$-t az alábbi f függvények esetében!

1. $f(x) := x^n e^x \quad (x \in \mathbb{R})$; 2. $f := \operatorname{arc\,tg}$.

Útm.

1. **1. módszer.** A Leibniz-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(0) = e^0 \cdot \sum_{k=0}^{n} k! \cdot \binom{n}{k}^2 \cdot 0^{n-k} = n!.$$

2. módszer. Mivel

$$f(x) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot \frac{1}{1} = n!.$$

2. **1. módszer.** Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f'(x), \qquad \text{azaz} \qquad (1+x^2)f'(x) = 1.$$

Mindkét oldal $(n-1)$-edik deriváltját véve, a Leibniz-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + \binom{n-1}{1} 2x f^{(n-1)}(x) + 2\binom{n-1}{2} f^{(n-1)}(x) = 0,$$

azaz

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$f'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \qquad \text{és} \qquad f''(0) = \frac{-2\cdot 0}{(1+0^2)^2} = 1,$$

így a fenti rekurziót használva

$$f'''(0) = -2\cdot 1\cdot 1 = -2, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!, \qquad f^{(6)}(0) = 0,$$

$f^{(7)}(0) = -6\cdot 5\cdot 4! = -6!$ stb. adódik. Tehát, ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0\,(2)), \\ (-1)^n(2n)! & (n \equiv 1\,(2)). \end{cases}$$

2. módszer. Tudjuk (vö. 2. gyakorlat, 35. old.), hogy

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Következésképpen, ha

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1)), \qquad \text{akkor tetszőleges } k \in \mathbb{N}_0 \text{ indexre}$$

$$\operatorname{arc\,tg}^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad \operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0) = f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\cdot(2k)!. \quad \blacksquare$$

Az 1. zárthelyi feladatainak megoldása

Feladat. Az

$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

a) a definíció alapján **igazolja**, hogy $f \notin \mathfrak{D}[0]$;

b) **írja fel** az $a := 1$ abszcisszájú ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét, amennyiben az létezik!

Útm. Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ ezért $\mathcal{D}_f$ nyílt halmaz: minden pontja belső pont.

a) Tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} - \frac{\sqrt[3]{0}}{0^2+1}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \longrightarrow \frac{1}{0+0} \cdot 1 = +\infty \qquad (x \to 0+0).$$

Következésképpen $f \notin \mathfrak{D}[0]$, hiszen a határérték – ugyan létezik, de – nem véges.

b) A deriválhatóságra vonatkozó műveleti szabályok alapján világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$, speciálisan $f \in \mathfrak{D}[1]$. Mivel

$$f(1) = \frac{\sqrt[3]{1}}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

és bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{3}\ln(x) - \ln(x^2+1),$$

ezért

$$f'(x) = f(x) \cdot \left\{\frac{1}{3x} - \frac{2x}{x^2+1}\right\}, \qquad \text{így} \qquad f'(1) = f(1) \cdot \left\{\frac{1}{3} - \frac{2}{1+1}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Következésképpen a kérdéses érintőegyenes egyenlete:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot (x-1) = -\frac{x}{3} + \frac{5}{6} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} (x+a)^2 + x^{2025} & (x<0), \\ b(\ln(1+2x) + \cos(x)) & (x \geq 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen, majd **adja meg** f deriváltfüggvényét!

Útm. Ha

1. $x \in (-\infty, 0)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és
$$f'(x) = 2(x+a) + 2025 \cdot x^{2024} \cdot \sin(x) + x^{2025} \cdot \cos(x).$$

2. $x \in (0, +\infty)$, akkor deriválhatságra vonatkozó műveleti szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{D}[x]$ és
$$f'(x) = b\left(\frac{2}{1+2x} - \sin(x)\right).$$

3. $x = 0$, akkor
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}[0],$$
ill.
$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'_-(0) = f'_+(0).$$
Az
   - $f \in \mathfrak{C}[0]$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha
$$a^2 = \lim_{0-0} f = \lim_{0+0} f = f(0) = b.$$
   - $f'_-(0) = f'_+(0)$ feltétel pedig pontosan akkor áll fenn, ha
$$2a = f'_-(0) = f'_+(0) = 2b.$$

   Mindez azt jelenti, hogy
$$(a^2 = b \qquad \text{és} \qquad a = b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a = 0 = b \quad \text{vagy} \quad a = 1 = b),$$

következésképpen $f'(0) = 2a$. Az f függvény deriváltfüggvénye tehát

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) := \begin{cases} 2(x+a) + 2025 \cdot x^{2024} \cdot \sin(x) + x^{2025} \cdot \cos(x) & (x < 0), \\ b\left(\frac{2}{1+2x} - \sin(x)\right) & (x \geq 0). \end{cases}$$

Feladat. Számítsa ki az alábbia határértékeket a Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával!

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{xe^x - \sin(x)}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \left(1 - x^2\right)^{1/x^2}.$$

Útm.

a) Mivel

$$\lim_{x\to 0}(\cos(2x) - \cos(3x)) = 1 - 1 = 0 = 0 - 0 = \lim_{x\to 0}(xe^x - \sin(x)),$$

ezért megkíséreljük alkalmazni a Bernoulli-L'Hospital-szabályt. Így

$$\frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{xe^x - \sin(x)} \sim \frac{-2\sin(2x) + 3\sin(3x)}{e^x + xe^x - \cos(x)} \sim \frac{-4\cos(2x) + 9\cos(3x)}{2e^x + xe^x + \sin(x)} \longrightarrow \frac{5}{2} \quad (x \to 0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{xe^x - \sin(x)} = \frac{5}{2}.$$

b) Világos, hogy tetszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\left(1 - x^2\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}\right).$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0} \ln(1 - x^2) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2,$$

ezért a Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1 - x^2} = -1.$$

Így az exponenciális függvény folytonosságát használva

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - x^2\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

adódik.

Feladat. Végezze el az

$$f(x) := \frac{x^3}{x^2-3} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}\right)$$

függvény teljes vizsgálatát!

Útm.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Világos, hogy f páratlan függvény, $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

és így

	$(-\infty, \sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f	$-$	$+$	0	$-$	$+$

2. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2},$$

ezért

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	

3. lépés (alaki viszonyok, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 18x^2)(x^2-3)^2 - (x^4 - 9x^2)2(x^2-3)2x}{(x^2-3)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 18x^2)(x^2-3) - 4x(x^4 - 9x^2)}{(x^2-3)^3} = \frac{6x(9+x^2)}{(x^2-3)^3}, \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f''	$-$	$+$	0	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	inflexió	$\frown$	$\smile$

4. lépés (határérték, aszimptota). Világos, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-3} = \pm\infty,$$

továbbá

$$\lim_{-\sqrt{3}\pm 0} f = \pm\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{\sqrt{3}\pm 0} f = \pm\infty.$$

Mivel

$$\lim_{\pm\infty} f' = \frac{1}{1} = 1,$$

ezért

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \boxed{1},$$

és

$$f(x) - \boxed{1} \cdot x = \frac{x^3}{x^2-3} - x = \frac{x^3 - x^3 + 3x}{x^2-3} = \frac{3x}{x^2-3} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \pm\infty),$$

ezért a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

füügvény aszomptota a $(\pm\infty)$-ben.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját a **??**. ábra szemlélteti.

Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \qquad \left(-\frac{1}{2} < x \in \mathbb{R}\right).$$

Írja fel az f függvény 0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomját, és becsülje meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^2$. Így $f(0) = 1$ és

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{-2\sqrt{1+2x}} = -\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} \qquad && f'(0) = -1, \\ f''(x) &= \frac{3}{\sqrt{(1+2x)^5}} && f''(0) = 3. \end{aligned}$$

Ezért a 0 körüli másodfokú Taylor-polinom

$$T^f_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{D}^3$, ezért

$$f'''(x) = -\frac{15}{\sqrt{(1+2x)^7}} \qquad (x \in \mathfrak{D}_f).$$

Következésképpen tetszőleges $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$ esetén van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

$$f(x) - T^f_{2,0}(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}.$$

Ekkor persze $0 < \xi < \frac{1}{10}$ is igaz, és így bármely $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ esetén

$$\left|f(x) - T^f_{2,0}(x)\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |x|^3 \leq \frac{15}{6\sqrt{(1+2\xi)^7}} \cdot \frac{1}{10^3} \leq \frac{15}{6} \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{1}{400}.$$

7. gyakorlat (2025. október 20-21.)

Szükséges ismeretek.

- Definiálja a primitív függvény fogalmát!
- Van-e olyan függvény, aminek nincsen primitív függvénye?
- Definiálja a határozatlan integrál fogalmát!
- Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?
- Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás tétele?
- Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos első helyettesítési szabály?
- Adja meg a következő függvények egy primitív függvényét!
  - exp
  - $x^n \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ -1 \neq a \in \mathbb{R})$
  - $\dfrac{1}{x}\ (0 < x \in \mathbb{R})$
  - sin
  - cos
  - $\dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$
- Alapintegrálok.

Feladat. Az

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény esetén adjuk meg az összes olyan deriválható $F : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $F' = f$ teljesül!

Útm.

$$F(x) := \begin{cases} \ln(x) + c & (0 < x \in \mathbb{R}), \\ \\ \ln(-x) + d & (0 > x \in \mathbb{R}) \end{cases} \qquad (c, d \in \mathbb{R}),$$

hiszen $F' = f$, továbbá ha valamely

$$\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \psi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$$

függvénnyel

$$\varphi'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \psi'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 > x \in \mathbb{R}),$$

akkor a

$$g(x) := \ln(x) - \varphi(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad h(x) := \ln(-x) - \psi(x) \quad (0 > x \in \mathbb{R})$$

függvényekre

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \varphi'(x) = \frac{1}{x} - f(x) = 0 \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$h'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) - \psi'(x) = \frac{1}{x} - f(x) = 0 \quad (0 > x \in \mathbb{R}).$$

Innen alkalmas, sőt tetszőleges $k \in \mathbb{R}$, ill. $K \in \mathbb{R}$ számokkal

$$g(x) = k \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad h(x) = K \quad (0 > x \in \mathbb{R}).$$

Vgyük észre, hogy k, ill. K tetszőleges valós szám lehet, így

$$\varphi(x) = \ln(x) + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \psi(x) = \ln(-x) + d \quad (0 > x \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}).$$

A továbbiakban $I \subset \mathbb{R}$ mindig nyílt intervallumot jelöl.

Emlékeztető. Adott $f : I \to \mathbb{R}$ esetén a $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt a f függvény **primitív függvény**ének neveztük, ha $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

Példa. A $F := -\cos$ függvény a $f := \sin$ függvény primitív függvénye, ui. $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

Példa. A
$$F(x) := \ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$
függvény a
$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$
függvény primitív függvénye, ui. $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

Példa. A
$$F(x) := \ln(-x) \qquad (0 > x \in \mathbb{R})$$
függvény a
$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 > x \in \mathbb{R})$$
függvény primitív függvénye, ui. $F \in \mathfrak{D}$ és
$$F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = f(x) \qquad (0 > x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzések.

1. Mivel a deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú, ezért azoknak a függvényeknek, amelyek nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, nyilván nincs primitív függvényük. Ilyen pl. az előjelfüggvény.

2. Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

Emlékeztető. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$. Így, ha

1. F az f primitív függvénye, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek, ui. ekkor $F + c \in \mathfrak{D}$ és
$$(F + c)' = f + 0 = f.$$

2. F_1 és F_2 az f primitív függvénye, akkor $F_1 - F_2$ állandófüggvény, hiszen mindekettő értelmezési tartomány az I nyílt intervallum és
$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti emlékeztetőben az a feltétel, hogy f értelmezési tartománya intervallum lényeges (ellenkező esetben nem igaz az állítás).

Példa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 2x & (x \in (0,1)), \\ 0 & (x \in (2,3)) \end{cases}$$

függvény, ill. a

$$F_1(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in (0,1)), \\ 1 & (x \in (2,3)), \end{cases} \qquad F_2(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in (0,1)), \\ 0 & (x \in (2,3)) \end{cases}$$

függvények esetében $F_1' = f = F_2'$, de $F_1 - F_2$ nem állandófüggvény:

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (0,1)), \\ 1 & (x \in (2,3)). \end{cases}$$

Emlékeztető. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f függvény **határozatlan integrál**jának neveztük és az

$$\int f \quad \text{(olv. „integrál ef”)}, \qquad \text{ill. az} \qquad \int f(x)\,dx \quad \text{(olv. „integrál efikszdéiksz”)}$$

szimbólummal jelöltük.

Ha tehát F primitív függvénye f-nek: $F \in \int f$, akkor az előző tétel értelmében

$$\int f = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\} =: [F].$$

Ezt az egyenlőséget kevésbé pontos, de a hagyományoknak jobban megfelelő formában a következőképpen írjuk:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c =: [F(x)]_{x \in I} \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példák.

1. $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sgn} = \emptyset.$

4. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} \ln(\alpha - x) + c & (x \in (-\infty, \alpha),\ n = 1,\ c \in \mathbb{R})), \\[2ex] \dfrac{(x-\alpha)^{1-n}}{1-n} + c & (x \in (-\infty, \alpha),\ 2 \le n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R})). \end{cases}$$

Emlékeztető (határozatlan integrál linearitása). Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre

$$\int f \neq \emptyset \neq \int g,$$

akkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int (f + \alpha g) = \int f + \alpha \int g.$$

Példák.

1. $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \ln(x+3) + c \quad (x \in (-3, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$
2. $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$
3. $\displaystyle\int \cos^4(x)\,dx$ pl. így számítható ki:

$$\begin{aligned} \int \cos^4(x)\,dx &= \int \left(\cos^2(x)\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}\right) dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + \int \frac{1+\cos(4x)}{8}\,dx = \\ &= \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Házi feladat. $\displaystyle\int \sin^4(x)\,dx = ?$

Megjegyzés. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén igazak az alábbi trigonometrikus, ill. hiperbolikus összefüggések:

1. • $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ **(négyzetes összefüggés)**

- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ (**addíciós képlet**);

- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ (**addíciós képlet**);

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
(**az argumentum kétszeresén felvett értékek**);

- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ (**linearizáló formulák**);

2.
- $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ (**négyzetes összefüggés**);

- $\text{sh}(x \pm y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) \pm \text{ch}(x)\,\text{sh}(y)$ (**addíciós képlet**);

- $\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) \pm \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$ (**addíciós képlet**);

- $\text{sh}(2x) = 2\,\text{sh}(x)\,\text{ch}(x)$, $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$
(**az argumentum kétszeresén felvett értékek**);

- $\text{sh}^2(x) = \dfrac{\text{ch}(2x)-1}{2}$, $\text{ch}^2(x) = \dfrac{\text{ch}(2x)+1}{2}$ (**linearizáló formulák**).

Feladat. Tanulmányozzuk (tanuljuk meg úgy, hogy tudjuk könyv nélkül) az alapintegrálok táblázatát)!

Feladat. Elemi átalakítások felhasználásával határozzuk meg $\int f$-et az alábbi esetekben!

1. $f(x) := 6x^2 - 8x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

2. $f(x) := \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

3. $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,

4. $f(x) := \dfrac{\cos^2(x) - 5}{1+\cos(2x)} \quad \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Útm.

1. $$\int \left(6x^2 - 8x + 3\right)\, dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c = 2x^3 - 4x^2 + 3x + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1},$$
ezért
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = x - \operatorname{arc\,tg}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

3. Mivel tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[8]{x^7} = x^{7/8},$$
ezért
$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx = \frac{x^{15/8}}{15/8} + c = \frac{8}{15} \cdot x^{15/8} + c = \frac{8\sqrt[8]{x^{15}}}{15} + c.$$

4. Minden $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén
$$\int \frac{\cos^2(x) - 5}{1 + \cos(2x)}\, dx = \int \frac{\cos^2(x) - 5}{2\cos^2(x)}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2\cos^2(x)}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{5\,\mathrm{tg}(x)}{2} + c.$$
Megjegyezzük, hogy a linearizáló formulák ismerete nélkül így is felbonthattuk volna a törtet:
$$\frac{\cos^2(x) - 5}{1 + \cos(2x)} = \frac{\cos^2(x) - 5}{\cos^2(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) - 5}{2\cos^2(x)} \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Tétel. Ha $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\varphi : I \to J$, $\varphi \in \mathfrak{D}$, $f : J \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}$, akkor
$$\int (f' \circ \varphi) \cdot \varphi' = [f \circ \varphi],$$
vagy hagyományos jelöléssel
$$\int f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = f(\varphi(x)) + c \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

Biz. Mivel f is, φ is deriválható, ezért $f \circ \varphi$ is az és

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \qquad (x \in I).$$

Példák.

1. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}\,dx = \int \frac{1}{1+\ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(\ln(x)) + c \quad (x \in (0,+\infty),\ c \in \mathbb{R}).$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x+1}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e\cdot e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\sqrt{e}e^x}{1+(\sqrt{e}e^x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(e^{x+1/2}\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

4. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos^2(x)}\,dx = \int e^{\operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = e^{\operatorname{tg}(x)} + c \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$

5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x\,dx = \arcsin(e^x) + c \quad (x \in (-\infty,0),\ c \in \mathbb{R}).$

Tétel. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in I$ esetén $f(x) > 0$. Ekkor fennáll az

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})$$

egyenlőség.

Biz. Ha

$$\varphi(x) := \ln(f(x)) \qquad (x \in I),$$

akkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \qquad (x \in I).$$

Példák.

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \ln\left(x^2+3\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \ln\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \ln\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$

4. $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(\cos(x))+c = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)+c \quad \left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ c\in\mathbb{R}\right);$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \ln(\ln(x))+c \quad (x\in(1,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{x}}{-\ln(x)}\,dx = \ln(-\ln(x))+c \quad (x\in(0,1),\ c\in\mathbb{R}).$

Tétel. Tegyük fel, hogy $f: I\to\mathbb{R}$, $f\in\mathfrak{D}$, valamint tetszőleges $x\in I$ esetén $f(x)>0$, továbbá $-1\neq\alpha\in\mathbb{R}$. Ekkor fennáll az

$$\int f^{\alpha}(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c, \quad (x\in I,\ c\in\mathbb{R})$$

egyenlőség.

Biz. Ha

$$\varphi(x) := \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} \qquad (x\in I),$$

akkor $\varphi\in\mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\cdot f^{\alpha}(x)\cdot f'(x) \qquad (x\in I).$$

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha\in\mathbb{N}$, akkor a fenti tételben a pozitivitási feltétel elhagyható.

Példák.

1. $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx = \frac{\sin^4(x)}{4}+c \quad (x\in(0,\pi),\ c\in\mathbb{R}).$

2. Mivel tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\sin^3(x)\cos^4(x) = \sin(x)\sin^2(x)\cos^4(x) = \sin(x)[1-\cos^2(x)]\cos^4(x) = \cos^4(x)\sin(x)-\cos^6(x)\sin(x),$$

ezért

$$\int \sin^3(x)\cos^4(x)\,dx = \int \left\{\cos^6(x)(-\sin(x)) - \cos^4(x)(-\sin(x))\right\}\,dx = \frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{\cos^5(x)}{5} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

3. Mivel tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\cos(x) > 0$ és $\operatorname{tg}(x) > 0$, ezért

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\operatorname{tg}^3(x)}}\,dx = \int \operatorname{tg}^{-3/2}(x)\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{-1/2}(x)}{-1/2} + c = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

4. $\displaystyle\int x^3(1-2x^4)^{2024}\,dx = \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\int(-8x^3)(1-2x^4)^{2024}\,dx = -\frac{(1-2x^4)^{2025}}{8\cdot 2025} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

5. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int(-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{-\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R});$

6. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x^3+3}\,dx = \frac{1}{6}\cdot\int 6x^2\sqrt{2x^3+3}\,dx = \frac{\sqrt{(2x^3+3)^3}}{9} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

7. $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int \left[x\left(1+x^2\right)-x\right]\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int x\sqrt[3]{(1+x^2)^4}\,dx - \int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\cdot\int 2x\sqrt[3]{(1+x^2)^4}\,dx - \frac{1}{2}\cdot\int 2x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^7}}{14} - \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8} + c$
$(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

8. $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^2\,dx = -\int -e^x(1-e^x)^2\,dx = -\frac{(1-e^x)^3}{3} + c = \frac{(e^x-1)^3}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

9. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx = \int e^x(1+e^x)^{-1/3}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}}{2} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

Tétel (lineáris helyettesítés). Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye. Ekkor minden olyan $a, b \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$ esetén, amelyre $ax + b \in I$ $(x \in I)$ teljesül, fennáll az

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

egyenlőség.

Biz. Ha

$$\varphi(x) := \frac{F(ax+b)}{a} \qquad (x \in I),$$

akkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b) \qquad (x \in I).$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

1. $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx \quad (x \in (-\infty,-3)), \quad \text{ill.} \quad (x \in (-3,+\infty));$
2. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Világos, hogy tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{3}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{(2x+6)'}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{2x+6} \cdot \frac{d}{dx}(2x+6)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot \ln(-2x-6) + c, & (x \in (-\infty,-3)), \\[2ex] \dfrac{3}{2} \cdot \ln(2x+6) + d & (x \in (-3,+\infty)) \end{cases} \qquad (c, d \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel

$$x^2 - x + 1 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért az alábbi átalakításokat fogjuk használni:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx -$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2-x+1) - 2\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \ln(\sqrt{x^2-x+1}) - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy ha

$$a,b,c,A,B\in\mathbb{R}: \quad a\neq 0,\ b^2-4ac<0,$$

akkor meghatározunk olyan $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ számot, amelyre

$$Ax+B=\gamma(ax^2+bx+c)'+\delta \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és így az

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\gamma(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{\delta}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R})$$

integrál kiszámítása során a fentiekhez hasonló számolásokat kell elvégeznünk.

Példa. Mivel tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+3} = \frac{2x+2+1}{x^2+2x+3} = \frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

ezért

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \qquad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$$

Emlékeztető (parciális integrálás). Legyen $f, g : I \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $f, g \in \mathfrak{D}$, ill. $\int fg' \neq \emptyset$. Ekkor

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Példa.

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)\,dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c \quad (x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 1\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(\frac{d}{dx}x\right) dx = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \\
&= \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2(1+x^2)-2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2 \cdot \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - 2 \cdot \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \\
&= \frac{x}{1+x^2} + 2 \cdot \operatorname{arc\,tg}(x) - 2 \cdot \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$$

következik. **Megjegyezzük**, hogy ebben az esetben a

$$\frac{2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

ötlet felhasználásával is célba értünk volna.

Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \tag{2}$$

egyenlőség!

Útm. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az alábbi egyenlőség átrendezésével kapjuk az állítást.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \cdot \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \cdot \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2n \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx - 2n \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx.$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor igazak az alábbi azonosságok!

1. $$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N});$$
2. $$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Útm.

1. $$\int \cos^n(x)\,dx = \int \cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx = \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx =$$
$$= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,dx =$$
$$= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \cos^n(x)\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$$ innen
$$n\int \cos^n(x)\,dx = \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),$$
ahonnan n-nel való átosztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

2. $$\int \sin^n(x)\,dx = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\cdot$$
$$\cdot\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\,dx =$$
$$= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \sin^n(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
innen
$$n\int \sin^n(x)\,dx = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),$$
ahonnan n-nel való átosztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

Megjegyezzük, hogy a parciális integrálásra különösen alkalmas függvények típusai a következők.

1. típus. $\int p(x)\cdot t(ax+b)\,dx \quad (a,b,x\in\mathbb{R}:\ a\neq 0)$, ahol p polinom és $t\in\{\exp,\sin,\cos,\mathrm{sh},\mathrm{ch}\}$.
Ebben az esetben legyen

$$f'(x):=t(ax+b) \quad \text{és} \quad g(x):=p(x) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Annyi parciális integrálásra lesz szükség, mint amennyi a p foka.

2. típus. $\int x^{\alpha}\ln^{n}\left(x^{\beta}\right)\,dx \quad \left(0<x\in\mathbb{R};\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha\neq -1;\ n\in\mathbb{N}\right)$.
Ebben az esetben legyen

$$f'(x):=x^{\alpha} \quad \text{és} \quad g(x):=\ln^{n}\left(x^{\beta}\right) \qquad (0<x\in\mathbb{R}).$$

Itt n darab parciális integrálásra lesz szükség.

3. típus. $\int t_1(ax+b)\cdot t_2(cx+d)\,dx \quad (a,b,c,d,x\in\mathbb{R}:\ ac\neq 0)$, ahol $t_1,t_2\in\{\exp,\sin,\cos,\mathrm{sh},\mathrm{ch}\}$.

Ebben az esetben legyen

$$f'(x):=t_1(ax+b) \quad \text{és} \quad g(x):=t_2(cx+d) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

4. típus. $\int p(x)\cdot i(x)\,dx \quad (x\in\mathcal{D}_i)$, ahol p polinom és $i\in\{\log,\ \text{gyök},\ \text{arc},\ \text{area}\}$.

Ebben az esetben

$$f':=p \qquad \text{és} \qquad g:=i.$$

„5. típus”. Nem tartoznak a fenti típusok egyikébe sem, de a parciálisan integrálás módszerével célszerű meghatározni ezeket az integrálokat.

Példa. Az 1. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrálok.

- $\displaystyle\int x\sin(x)\,dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)\,dx=-x\cos(x)+\sin(x)+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$
- $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}\,dx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)+c$
  $(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R})$.
- $\displaystyle\int x^2\sin(5x)\,dx=\frac{-\cos(5x)x^2}{5}+\frac{2}{5}\int x\cos(5x)\,dx=\frac{-\cos(5x)x^2}{5}+\frac{\sin(5x)2x}{25}-\frac{2}{25}\int\sin(5x)\,dx=$
  $\displaystyle=\frac{-\cos(5x)x^2}{5}+\frac{\sin(5x)2x}{25}+\frac{2\cos(5x)}{125}+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

Példa. A 2. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrálok.

- $\int x\ln^2\left(x^3\right)\,dx = \dfrac{x^2\ln^2\left(x^3\right)}{2} - \int 3x\ln\left(x^3\right)\,dx = \dfrac{x^2\ln^2\left(x^3\right)}{2} - \dfrac{3x^2\ln\left(x^3\right)}{2} + \dfrac{9}{2}\int x\,dx =$
  $= \dfrac{x^2\ln^2\left(x^3\right)}{2} - \dfrac{3x^2\ln\left(x^3\right)}{2} + \dfrac{9x^2}{4} + c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$
- $\int \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - \int \dfrac{2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - \int \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} + c$
  $(x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$

Példa. A 3. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrál.

$$\int e^{2x}\sin^2(x)\,dx = \int e^{2x}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos(2x),$$

ahol

$$\int e^{2x}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x) + \int e^{2x}\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x) + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x) - \int e^{2x}\cos(2x)\,dx,$$

így

$$\int e^{2x}\cos(2x) = \frac{e^{2x}}{4}(\cos(2x)+\sin(2x)) + c \qquad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$$

Szintén a 3. típusban említett módszerrel határozható meg az

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \qquad (a,b,x\in\mathbb{R}:\ ab\neq 0)$$

integrál.

1. módszer.

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= -e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \\ &= -e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\left(e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx\right) = \\ &= \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\end{aligned}$$

Így

$$\underbrace{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}_{\frac{b^2+a^2}{b^2}}\cdot\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)),$$

ill.
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c \qquad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$$

2. módszer. Két különböző módon parciálisan integrálunk: egyszer az

$$f'(x) := \sin(bx) \qquad \text{és} \qquad g(x) := e^{ax} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

választással, majd az
$$f'(x) := e^{ax}, \qquad g(x) := \sin(bx) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

választással:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = -e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx, \quad (*)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx. \quad (**)$$

$(*)$-t $\frac{b}{a}$-val, $(**)$-ot $\frac{a}{b}$-vel szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)}_{\frac{b^2+a^2}{ab}}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{b}\sin(bx) - \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx)\ ,$$

amiből
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R})$$
következik.

Szintén a 3. típusban említett módszerrel határozható meg az

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \qquad (a,b,x\in\mathbb{R}:\ ab\neq 0)$$

integrál.

1. módszer.

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \\
&= e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}-\frac{a}{b}\left(-e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx\right) = \\
&= \frac{e^{ax}}{b^2}(b\sin(bx)+a\cos(bx))-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx,
\end{aligned}
$$

Így

$$
\underbrace{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}_{\frac{b^2+a^2}{b^2}}\cdot\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{b^2}(b\sin(bx)+a\cos(bx)),
$$

ill.

$$
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin(bx)+a\cos(bx))+c \qquad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).
$$

2. módszer. Két különböző módon parciálisan integrálunk: egyszer az

$$
f'(x) := \cos(bx) \qquad \text{és} \qquad g(x) := e^{ax} \qquad (x\in\mathbb{R})
$$

választással, majd az

$$
f'(x) := e^{ax}, \qquad g(x) := \cos(bx) \qquad (x\in\mathbb{R})
$$

választással:

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx, \quad (*) \\
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx)+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx. \quad (**)
\end{aligned}
$$

$(*)$-t $\frac{b}{a}$-val, $(**)$-ot $\frac{a}{b}$-vel szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy

$$
\underbrace{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)}_{\frac{b^2+a^2}{ab}}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx)+\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx)\ ,
$$

amiből

$$
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin(bx)+a\cos(bx))+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R})
$$

következik.

Példa. A 4. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrálok.

- $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln(x) - x + c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$
- $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c \quad (x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}).$

Feladat. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

1. $\displaystyle\int (x^2+2x-1)e^{-2x}\,dx \quad (x\in\mathbb{R});$
2. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(x)\,dx \quad (x\in\mathbb{R});$
3. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg}(3x)\,dx \quad (x\in\mathbb{R});$
4. $\displaystyle\int x^2\cdot\ln(x)\,dx \quad (0<x\in\mathbb{R});$
5. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad (x\in(-1,1)).$

Útm.

1. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\int (x^2+2x-1)e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{(x^2+2x-1)e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int (2x+2)e^{-2x}\,dx = -\frac{(x^2+2x-1)e^{-2x}}{2} + \int (x+1)e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{(x^2+2x-1)e^{-2x}}{2} - \frac{(x+1)e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{(x^2+2x-1)e^{-2x}}{2} - \frac{(x+1)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c.$$

2. Minden $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(x)\,dx &= -e^{2x}\cos(x) + 2\int e^{2x}\cos(x)\,dx, \quad (*)\\ \int e^{2x}\sin(x)\,dx &= \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos(x)\,dx. \quad (**)\end{aligned}$$

$(*)$-t $\frac{1}{2}$-el, $(**)$-ot 2-vel szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}+2\right)}_{\frac{1+4}{2}}\int e^{2x}\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin(x)\,dx + 2\int e^{2x}\sin(x)\,dx = e^{2x}\sin(x) - \frac{e^{2x}}{2}\cos(x)\,,$$

amiből

$$\int e^{2x}\sin(x)\,dx = \frac{4e^{2x}}{5}(2\sin(x) - \cos(x)) + c.$$

3. Bármely $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg}(3x)\,dx &= \int 1\cdot\operatorname{arc\,tg}(3x)\,dx = x\cdot\operatorname{arc\,tg}(3x) - \int \frac{3x}{1+9x^2}\,dx =\\ &= x\cdot\operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6}\int\frac{18x}{1+9x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + c.\end{aligned}$$

4. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int x^2\cdot\ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \frac{x^3}{9} + c.$$

5. Tetszőleges $x \in (-1,1)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int \left\{\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin(x).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$2\cdot\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right]_{x\in(-1,1)},$$

azaz

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2} + c.$$

Házi feladat. Elemi átalakítások felhasználásával határozzuk meg $\int f$-et az alábbi esetekben!

1. $f(x) := x^4 - 3x^2 + 5 \ (x \in \mathbb{R})$,
2. $f(x) := 3x^4 + 4x^{-5} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
3. $f(x) := \dfrac{\sqrt{2 + x^4 + x^{-4}}}{x^3} \ (0 < x \in \mathbb{R})$,
4. $f(x) := \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \quad (1 < x \in \mathbb{R})$,
5. $f(x) := \sqrt[3]{x^2} + 10^x \quad (x \in \mathbb{R})$,
6. $f(x) := \sqrt{x \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x}}} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
7. $f(x) := \dfrac{\sqrt[4]{x \sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
8. $f(x) := \mathrm{tg}^2(x) + \mathrm{ctg}^2(x) \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$,
9. $f(x) := \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - 2}{\mathrm{ch}(2x) + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$,
10. $f(x) := \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$,
11. $f(x) := \dfrac{5}{4 - 4x^2} \quad (x \in (-1, 1))$,
12. $f(x) := \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} + \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \quad (x \in (-1, 1))$,
13. $f(x) := \dfrac{x^2}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,
14. $f(x) := \dfrac{1}{\sin^2(x) \cos^2(x)} \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$;
15. $f(x) := \arcsin(x) + \arccos(x)$ $\quad (x \in (-1, 1))$,
16. $f(x) := \sqrt{1 - \sin(2x)}$ $\quad \left(x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)\right)$,
17. $f(x) := \dfrac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$;
18. $f(x) := \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} \quad (x \in (-1, 1))$,
19. $f(x) := \dfrac{2x + 3}{x - 2} \quad (x \in (2, +\infty))$.

Útm.

1. $$\int \left(x^4 - 3x^2 + 5\right) dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + 5x + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

2. $$\int \left(3x^4 + 4x^{-5}\right) dx = \frac{3x^5}{5} - x^{-4} + c = \frac{3x^5}{5} - \frac{1}{x^4} + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^4+x^{-4}}}{x^3}\,dx = \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}\,dx = \ln(x) - \frac{1}{4x^4} + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1}\right)\,dx = x - 4\,\mathrm{ar\,cth}(x) + c \quad (1 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

5. $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2} + 10^x\right)\,dx = \int \left(x^{2/3} + 10^x\right)\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + \frac{10^x}{\ln(10)} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}\,dx = \int \sqrt{x\,\sqrt[12]{x^5}}\,dx = \int \sqrt[24]{x^{17}}\,dx = \int x^{17/24}\,dx = \frac{24}{41}\,\sqrt[24]{x^{17}} + c$

$$(x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\,dx = \int x^{2/15}\,dx = \frac{15\,\sqrt[15]{x^{17}}}{17} + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

8. $\displaystyle\int (\mathrm{tg}(x))^2 + (\mathrm{ctg}(x))^2\,dx = \mathrm{tg}(x) - \mathrm{ctg}(x) - 2x + c \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right)$, ui.

$$\mathrm{tg}^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1-\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} - 1, \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \mathrm{tg}^2,$$

továbbá

$$\mathrm{ctg}^2 = \frac{\cos^2}{\sin^2} = \frac{1-\sin^2}{\sin^2} = \frac{1}{\sin^2} - 1, \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2} = -1 - \mathrm{ctg}^2 .$$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^2(x) - 2}{\mathrm{ch}(2x) + 1}\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2(x) - 2}{\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}\,dx = \frac{x}{2} - \tanh(x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)}\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)}\,dx = \mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

11. $\displaystyle\int \frac{5}{4-4x^2}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{5\,\mathrm{ar\,th}(x)}{4} + c \quad (x \in (-1, 1),\ c \in \mathbb{R}).$

12. $$\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\arcsin(x) + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).$$

13. $$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, dx = \ldots = x - \operatorname{arc\,tg}(x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

14. $$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\, dx = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x) + c \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$$

15. $$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx = \int \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{\pi x}{2} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).$$

16. $$\int \sqrt{1-\sin(2x)}\, dx = \int (\sin(x) - \cos(x))\, dx = -\cos(x) - \sin(x) + c \qquad \left(x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$$

17. $$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\, dx = \int \left(e^{2x} - e^x + 1\right) dx = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

18. Mivel bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

ezért

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \arcsin(x) + \operatorname{ar\,sh}(x) + c \qquad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).$$

19. Mivel tetszőleges $x \in (2,+\infty)$ esetén

$$\frac{2x+3}{x-2} = \frac{2x-4+7}{x-2} = 2 + \frac{7}{x-2},$$

ezért

$$\int \frac{2x+3}{x-2}\, dx = 2x + 7\ln(x-2) + c \qquad (x \in (2,+\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

Házi feladat. Számítsuk ki $\int$ f-et az alábbi esetekben!

1. $f(x) := \dfrac{x}{x^2+3} \quad (x \in \mathbb{R})$,
2. $f(x) := \dfrac{x-3}{x^2-6x+27} \quad (x \in \mathbb{R})$,
3. $f(x) := \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$,
4. $f(x) := \mathrm{tg}(x) \quad \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,
5. $f(x) := \dfrac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arc\,tg}(x)} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
6. $f(x) := \dfrac{e^x(\mathrm{sh}(5x)+\mathrm{ch}(5x))}{\mathrm{ch}(6x)} \quad (x \in \mathbb{R})$
7. $f(x) := \dfrac{1}{\sin(x)} \quad (x \in (0, \pi))$,
8. $f(x) := \dfrac{1}{\mathrm{ctg}(x) - \mathrm{tg}(x)} \quad \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

Útm.

1. $$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \ln(\sqrt{x^2+3}) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

2. $$\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x-6}{x^2-6x+27}\,dx = \ln\left(\sqrt{x^2-6x+27}\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$$

3. $$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \ln\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$$

4. $$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(\cos(x)) + c \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right);$$

5. $$\int \frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arc\,tg}(x)}\,dx = \ln(\mathrm{arc\,tg}(x)) + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$$

6. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{e^x(\mathrm{sh}(5x)+\mathrm{ch}(5x))}{\mathrm{ch}(6x)} = e^x \cdot \frac{\frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2} + \frac{e^{5x}-e^{-5x}}{2}}{\frac{e^{6x}+e^{-6x}}{2}} = \frac{2e^{6x}}{e^{6x}+e^{-6x}} = \frac{2e^{6x}}{e^{6x}+\frac{1}{e^{6x}}} = \frac{2e^{12x}}{e^{12x}+1},$$
ezért
$$\int \frac{e^x(\mathrm{sh}(5x)+\mathrm{ch}(5x))}{\mathrm{ch}(6x)}\,dx = \int \frac{2e^{12x}}{e^{12x}+1}\,dx = \ln\left(\sqrt[6]{e^{12x}+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

7. Mivel tetszőleges $x \in (0, \pi)$ esetén

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ezért

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \qquad (x \in (0, \pi),\ c \in \mathbb{R}).$$

8. Mivel tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{ctg}(x) - \mathrm{tg}(x)} &= \frac{1}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\sin(x)\cdot\cos(x)}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)},\end{aligned}$$

ezért

$$\int f = -\frac{1}{4}\cdot\ln(\cos(2x)) + c = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\cos(2x)}}\right) + c. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki $\int$ f-et az alábbi esetekben!

1) $f(x) := x^3(1-2x^4)^{2021} \quad (x \in \mathbb{R})$,
2) $f(x) := x\sqrt{1-x^2} \quad (x \in (-1, 1))$,
3) $f(x) := x^2\sqrt{2x^3+3} \quad (x \in \mathbb{R})$,
4) $f(x) := x^3\sqrt[3]{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,
5) $f(x) := e^x(1-e^x)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$,
6) $f(x) := \dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} \quad (x \in \mathbb{R})$;
7) $f(x) := \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+3e^{2x}}} \quad (x \in \mathbb{R})$,
8) $f := \sin\cdot\cos$.

Útm.

1. $\displaystyle\int x^3(1-2x^4)^{2021}\,dx = -\frac{(1-2x^4)^{2022}}{8\cdot 2022} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$;

2. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{-\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R});$

3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x^3+3}\,dx = \frac{\sqrt{(2x^3+3)^3}}{9} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

4. $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int \left[x\left(1+x^2\right) - x\right]\sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$

$$= \int x\sqrt[3]{(1+x^2)^4}\,dx - \int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^7}}{14} - \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8} + c$$
$(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

5. $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^2\,dx = \frac{(e^x-1)^3}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

6. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}}{2} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

7. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+3e^{2x}}}\,dx = \frac{\sqrt{1+3e^{2x}}}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

8. $\displaystyle\int \sin\cdot\cos = \frac{\sin^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$ ■

Házi feladat. Számítsuk ki $\int f$-et az alábbi esetekben!

1) $f := \sin^{2021}\cdot\cos,$

2) $f := \sin^3,$

3) $f := \cos^3,$

4) $\displaystyle f(x) := \frac{6x+5}{\sqrt[3]{(3x^2+5x+7)^9}} \quad (x \in \mathbb{R}),$

5) $\displaystyle f(x) := \frac{2x-5}{\sqrt[4]{(x^2-5x+13)^3}} \quad (x \in \mathbb{R}),$

6) $\displaystyle f(x) := \frac{9x^2}{\sqrt{2-3x^3}} \quad (0 > x \in \mathbb{R});$

7) $\displaystyle f(x) := \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\operatorname{tg}^3(x)}} \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$

8) $\displaystyle f(x) := \frac{\cos(x)}{\sqrt{5+2\sin(x)}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. $\displaystyle\int \sin^{2021}\cdot\cos = \frac{\sin^{2022}}{2022} + c \quad (c\in\mathbb{R});$

2. $\displaystyle\int \sin^3 = \int \sin^2\sin = \int (1-\cos^2)\sin = \int (\sin + \cos^2(-\sin)) = -\cos + \frac{\cos^3}{3} + c \quad (c\in\mathbb{R});$

3. $\displaystyle\int \cos^3 = \int \cos^2\cos = \int (1-\sin^2)\cos = \int (\cos - \sin^2\cos) = \sin - \frac{\sin^3}{3} + c \quad (c\in\mathbb{R});$

4. $\displaystyle\int \frac{6x+5}{\sqrt[3]{(3x^2+5x+7)^9}}\,dx = -\frac{1}{2(3x^2+5x+7)^2} + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$

5. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{\sqrt[4]{(x^2-5x+13)^3}}\,dx = 4\sqrt[4]{x^2-5x+13} + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$

6. $\displaystyle\int \frac{9x^2}{\sqrt{2-3x^3}}\,dx = -2\sqrt{2-3x^3} + c \quad (0 > x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\operatorname{tg}^3(x)}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} + c \quad \left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ c\in\mathbb{R}\right);$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{5+2\sin(x)}}\,dx = \sqrt{5+2\sin(x)} + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).\ \blacksquare$

Házi feladat. Számítsuk ki $\int$ f-et az alábbi esetekben!

1) $\displaystyle f(x) := \frac{(\ln(x))^5}{x} \quad (1 < x\in\mathbb{R}),$ 2) $\displaystyle f(x) := \sqrt{\frac{\operatorname{ar\,sh}(x)}{1+x^2}} \quad (0 < x\in\mathbb{R}),$

3) $\displaystyle f(x) := \frac{\operatorname{tg}(x)}{(\ln(\cos(x))^6} \quad \left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right).$

Útm.

1. $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^5}{x}\,dx = \frac{(\ln(x))^6}{6} + c \quad (1 < x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$

2. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{ar\,sh}(x)}{1+x^2}}\,dx = \frac{2\sqrt{\operatorname{ar\,sh}^3(x)}}{3} + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{(\ln(\cos(x)))^6}\,dx = -\int \frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{(\ln(\cos(x)))^6}\,dx = \frac{1}{5\ln(\cos(x)))^5} + c \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$ ■

Házi feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{x+4}} \qquad (x \in (-4, +\infty))$$

függvény primitív függvényeinek halmazát!

Útm. Két módszert is használunk az integrál kiszámítására.

1. módszer. Ha $x \in (-4, +\infty)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = 2x\sqrt{x+4} - \int 2\sqrt{x+4}\,dx = 2x\sqrt{x+4} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+4)^3} + c.$$

2. módszer. Ha $x \in (-4, +\infty)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = \int \frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}}\,dx = \int \left(\sqrt{x+4} - \frac{4}{\sqrt{x+4}}\right)\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + c. \quad ■$$

Megjegyezzük, hogy a kétféle módszerrel kapott eredmény azonos. A

$$\varphi(x) := 2x\sqrt{x+4} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+4)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} + 8\sqrt{x+4} \qquad (x \in (-4, +\infty))$$

függvény deriválható és deriváltjára

$$\varphi'(x) = 2\sqrt{x+4} + \frac{x}{\sqrt{x+4}} - 2\sqrt{x+4} - \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}} = 0 \qquad (x \in (-4, +\infty))$$

teljesül. Így alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$ $(x \in (-4, +\infty))$. Mivel $\varphi(0) = 0$, ezért

$$\varphi(x) = 0 \quad (x \in (-4, +\infty)). \quad ■$$

Házi feladatok.

1. Határozzuk meg azt az $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$f(-4) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(3x) & (x \geq 0), \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

teljesül!

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad (x \in (0, +\infty));$

(b) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{2x-1}\, dx \qquad (x \in (1/2, +\infty));$

Útm.

1. Mivel

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + d \qquad (x \in (-\infty, 0),\ d \in \mathbb{R}),$$

ezért $f(-4) = 0$, ezért $f(-4) = 8 + d = 0$, azaz $d = -8$. Mivel

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arc\,tg}(3x)\, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x)\, dx = x \operatorname{arc\,tg}(3x) - \int \frac{3x}{1+9x^2}\, dx = \\ &= x \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6} \int \frac{18x}{1+9x^2}\, dx = \\ &= x \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6} \ln\left(1 + 9x^2\right) + c \quad (x \in [0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

és – lévén, hogy f differenciálható –, így folytonos is, ezért

$$\lim_{0-0} f = -8 = f(0) = c,$$

amiből $c = -8$ adódik. Tehát

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6} \ln\left(1 + 9x^2\right) - 8 & (x \geq 0), \\ \dfrac{x^2}{2} - 8 & (x < 0). \end{cases}$$

2. (a) Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}(-1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int \frac{-1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$$

(b) Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int x\cdot\sqrt{2x-1}\,dx = x\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{3}\cdot\int\sqrt{(2x-1)^3}\,dx =$$

$$= \frac{x}{3}\cdot\sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{15}\cdot\sqrt{(2x-1)^5} + c$$

$$(x\in(1/2,+\infty),\ c\in\mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Házi feladat. A parciális integrálás módszerével határozzuk meg az

$$f(x) := x^5 e^{x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad g(x) := \frac{xe^x}{(1+x)^2} \qquad (-1 < x\in\mathbb{R})$$

függvény primitív függvényeinek halmazát!

Útm.

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int x^4(2x)e^{x^2}\,dx = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - 2\int x^3e^{x^2}\,dx = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - \int x^2(2x)e^{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^4e^{x^2}}{2} - x^2e^{x^2} + \int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - x^2e^{x^2} + e^{x^2} + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}),$$

$$\int g(x)\,dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int\frac{e^x+xe^x}{1+x}\,dx = \int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x\,dx =$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c = \frac{e^x}{1+x} + c \quad (-1<x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Használjuk a parciális integrálás módszerét $\int f$ kiszámítására!

1. $f(x) := \ln\left(\dfrac{2x-5}{3-x}\right) \quad \left(x \in \left(\dfrac{5}{2}, 3\right)\right)$,
2. $f(x) := \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$,
3. $f(x) := x\,\mathrm{tg}^2(x) \quad \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,
4. $f(x) := x^2\cos^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,
5. $f(x) := x^2\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \quad (1 < x \in \mathbb{R})$,
6. $f(x) := x^2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
7. $f := \cos^4$,
8. $f(x) := \dfrac{1}{\sin^3(x)} \quad (x \in (0, \pi))$,
9. $f(x) := \dfrac{1}{(x^2+1)^3} \quad (x \in \mathbb{R})$,
10. $f(x) := x^3\sqrt{1-x^2} \quad (x \in (-1, 1))$.

Útm.

1. Tetszőleges $x \in \left(\dfrac{5}{2}, 3\right)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) dx = \int \{\ln(2x-5) - \ln(3-x)\}\,dx = x\ln(2x-5) - \int \frac{2x}{2x-5}\,dx - \\
&\qquad -x\ln(3-x) + \int \frac{-x}{3-x}\,dx = x\ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) - \int \frac{2x-5+5}{2x-5}\,dx + \int \frac{3-x-3}{3-x}\,dx = \\
&= x\ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) - \int \frac{5}{2x-5}\,dx - \int \frac{3}{3-x}\,dx = \\
&= x\ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) - \frac{5}{2}\ln(2x-5) + 3\ln(3-x) + c.
\end{aligned}$$

2. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x^2\,dx = x^2\sqrt{x^2+1} - \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \\
&= x^2\sqrt{x^2+1} - \frac{2\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + c.
\end{aligned}$$

3. Emlékeztetünk arra, hogy korábban kiszámoltuk, hogy

$$\int (\mathrm{tg}(x))^2\,dx = \mathrm{tg}(x) - x + c \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right),$$

így

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x(\mathrm{tg}(x))^2\,dx = \int (\mathrm{tg}(x))^2 \cdot x\,dx = (\mathrm{tg}(x)-x)x - \int (\mathrm{tg}(x)-x)\,dx = \\ &= (\mathrm{tg}(x)-x)x + \ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2} \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).\end{aligned}$$

4. $$\int f(x)\,dx = \int x^2\cos^2(x)\,dx = \int x^2\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\int x^2\cos(2x)\,dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int x^2\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\int x^2\cos(2x)\,dx = \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2\sin(2x)}{2} - \int x\sin(2x)\,dx\right\} = \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)\,dx \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{8} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int f(x)\,dx =$

$$\begin{aligned}
= \int x^2 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx \;&=\; \frac{x^3}{3}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\int x^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \\
&=\; \frac{x^3}{3}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\int x\frac{x^2-1+1}{1-x^2}\,dx = \\
&=\; \frac{x^3}{3}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\int \left(-x + \frac{x}{1-x^2}\right) dx = \\
&=\; \frac{x^3}{3}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\left\{-\frac{x^2}{2} - \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right\} + c
\end{aligned}$$

$(1 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$.

6. $\displaystyle\int f(x)\,dx =$

$$\begin{aligned}
= \int x^2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) dx \;&=\; \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \\
&=\; \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\int x\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \\
&=\; \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \\
&=\; \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) + c
\end{aligned}$$

$(0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$.

7. $\displaystyle\int f =$

$$= \int \cos^4 \;=\; \int \cos^3 \cdot \cos = \sin \cdot \cos^3 + 3 \int \sin^2 \cdot \cos^2 =$$

$$= \sin \cdot \cos^3 + 3 \int (1 - \cos^2) \cdot \cos^2 = \sin \cdot \cos^3 + 3 \int \cos^2 - 3 \int \cos^4,$$

innen

$$\int \cos^4 \;=\; \frac{1}{4}\left(\sin \cdot \cos^3 + 3 \int \cos^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(x)\cos^3(x) + 3 \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(x)\cos^3(x) + \frac{3}{2}\left[\sin(x)\cos(x) + x\right]\right) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\; c \in \mathbb{R}).$$

8. $\displaystyle\int f(x)\,dx =$

$$= \int \frac{1}{\sin(x)}\,dx \;=\; \int \sin(x)\frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = \int \sin(x)\frac{1}{\sin^2(x)}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - 2\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}\,dx = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - 2\int \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^3(x)}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - 2\left(\int \frac{1}{\sin^3(x)}\,dx - \int \frac{1}{\sin(x)}\,dx\right) \qquad (x \in (0,\pi)),$$

amiből

$$\int \frac{1}{\sin^3(x)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right) \qquad (x \in (0,\pi)),$$

Korábbról tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \qquad (x \in (0,\pi),\; c \in \mathbb{R}),$$

így

$$\int \frac{1}{\sin^3(x)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right) + c \qquad (x \in (0,\pi),\; c \in \mathbb{R}).$$

9. Két lépésben számoljuk ki az integrált:

1. lépés.

$$\text{arc tg} \in \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

így

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^3}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^2} + \int \frac{4}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{4}{(x^2+1)^3}\,dx,$$

így

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}(x)\right) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

10. $\int f(x)\,dx =$

$$= \int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2(-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \frac{1}{3}\int(-2x)\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx =$$

$$= -\frac{x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{(1-x^2)^5}}{15} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki az

$$f(x) := \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \cdot \ln\left(\frac{ex}{x^2-1}\right) \qquad (x \in (1,+\infty))$$

függvény határozatlan integrálját!

Útm. Mivel tetszőleges $x \in (1,+\infty)$ esetén

$$f(x) = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \ln\left(\frac{e}{x-\frac{1}{x}}\right),$$

ezért – parciálisan integrálva – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)\left(\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)-1\right)dx = \\ &= \frac{\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x-\frac{1}{x}} - \int \frac{d}{dx}\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x-\frac{1}{x}} + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

8. gyakorlat (2025. november 3-4.)

Szükséges ismeretek.

- Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabály?
- Fogalmazza meg a primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltételt!
- Fogalmazza meg a primitív függvény létezésére vonatkozó elégséges feltételt!
- Definiálja intervallum egy felosztását!
- Mit jelent egy felosztás finomítása?
- Mi az alsó közelítő összeg definíciója?
- Mi a felső közelítő összeg definíciója?
- Mi történik az alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?
- Mi történik a felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Feladat. Adott $A, b, c \in \mathbb{R}$: $b \neq c$ számok esetén határozzunk meg olyan $p, q \in \mathbb{R}$ számokat, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{b, c\}$ esetén

$$\frac{A}{(x-b)(x-c)} = \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c}$$

teljesüljön!

Útm.

1. módszer. Mivel

$$(x-b)-(x-c) \equiv c-b,$$

ezért a

$$p := \frac{A}{b-c} \qquad \text{és} \qquad q := \frac{A}{c-b}$$

választás megfelelő, hiszen

$$\frac{A}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{c-b}\cdot\frac{c-b}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{c-b}\cdot\frac{(x-b)-(x-c)}{(x-b)(x-c)} =$$

$$= \frac{A}{c-b}\cdot\left\{\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-b}\right\} = \frac{A}{b-c}\cdot\left\{\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}\right\}.$$

2. módszer. Mivel

$$\frac{A}{(x-b)(x-c)} = \frac{p}{x-b}+\frac{q}{x-c} \equiv \frac{p(x-c)+q(x-b)}{(x-b)(x-c)} \equiv \frac{(p+q)x-pc-qb}{(x-b)(x-c)},$$

ezért

$$(0=p+q \quad\wedge\quad A=-pc-qb) \quad\Longleftrightarrow\quad \left(p=\frac{A}{b-c}\quad\wedge\quad q=\frac{A}{c-b}\right),$$

ez pedig azt jelenti, hogy p, q-t így kell megválasztanunk:

$$p:=\frac{A}{b-c},\qquad q:=\frac{A}{c-b}.\quad\blacksquare$$

Gyakorló feladat. Végezzük el a fenti felbontást az alábbi törtek esetében!

1. $\dfrac{6}{x^2+x-2}$, 2. $\dfrac{1}{x^2+2x-3}$, 3. $\dfrac{2}{x^2-2x}$, 4. $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, 5. $\dfrac{1}{x^2-6x+8}$.

Útm.

1. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}\backslash\{1;-2\}$ esetén

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{6}{(x-1)(x+2)} = \frac{6}{3}\cdot\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{6}{3}\cdot\frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+2}.$$

2. Bármely $x\in\mathbb{R}\backslash\{1;-3\}$ esetén

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+3}.$$

3. Minden $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ esetén
$$\frac{2}{x^2-2x}=\frac{2}{x(x-2)}=\frac{x-(x-2)}{x(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}.$$

4. Ha $x \in \mathbb{R}\setminus\{1;3\}$, akkor
$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1/2}{x-3}-\frac{1/2}{x-1}.$$

5. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}\setminus\{2;4\}$ esetén
$$\frac{1}{x^2-6x+8}=\frac{1}{(x-2)(x-4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(x-2)(x-4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)-(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\frac{1/2}{x-4}-\frac{1/2}{x-2}.$$

Házi feladat. Végezzük el a fenti példák esetén a számolásokat a második módszerrel is!

Útm.

1. Mivel etszőleges $x \in \mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ esetén
$$\frac{6}{x^2+x-2}=\frac{6}{(x-1)(x+2)}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{x+2}=\frac{p(x+2)+q(x-1)}{x^2+x-2}=\frac{(p+q)x+2p-q}{x^2+x-2},$$
ezért
$$0=p+q,\quad 6=2p-q,\qquad \text{azaz}\qquad p=2,\quad q=-2.$$

2. Mivel etszőleges $x \in \mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$ esetén
$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{x+3}=\frac{p(x+3)+q(x-1)}{x^2+2x-3}=\frac{(p+q)x+3p-q}{x^2+2x-3},$$
ezért
$$0=p+q,\quad 1=3p-q,\qquad \text{azaz}\qquad p=1/4,\quad q=-1/4.$$

3. Mivel etszőleges $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ esetén
$$\frac{2}{x^2-2x}=\frac{2}{x(x-2)}=\frac{p}{x}+\frac{q}{x-2}=\frac{p(x-2)+qx}{x(x-2)}=\frac{(p+q)x-2p}{x(x-2)},$$
ezért
$$0=p+q,\quad 2=-2p,\qquad \text{azaz}\qquad p=-1,\quad q=1.$$

4. Mivel etszőleges $x \in \mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ esetén
$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{x-3}=\frac{p(x-3)+q(x-1)}{x^2-4x+3}=\frac{(p+q)x-3p-q}{x^2-4x+3},$$

ezért

$$0 = p + q, \quad 1 = -3p - q, \qquad \text{azaz} \qquad p = -1/2, \quad q = 1/2.$$

5. Mivel etszőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;4\}$ esetén

$$\frac{1}{x^2-6x+8} = \frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{p}{x-2} + \frac{q}{x-4} = \frac{p(x-4)+q(x-2)}{x^2-6x+8} = \frac{(p+q)x-4p-2q}{x^2-6x+8},$$

ezért

$$0 = p + q, \quad 1 = -4p - 2q, \qquad \text{azaz} \qquad p = -1/2, \quad q = 1/2.$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx \qquad (x \in (2,4))$$

határozatlan integrált!

Útm. Mivel bármely $x \in (2,4)$ esetén

$$\frac{1}{x^2-6x+8} = \frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{1/2}{x-4} - \frac{1/2}{x-2},$$

ezért

$$\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx = \frac{1}{2}\cdot(\ln(4-x)-\ln(x-2)) + c = \ln\left(\sqrt{\frac{4-x}{x-2}}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A továbbiakban adott $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ algebrai polinomok, illetve

$$I \subset \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\}$$

nyílt intervallum esetén az

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad (x \in I \subset \{u \in \mathbb{R} : \ Q(u) \neq 0\}) \tag{3}$$

határozatlan integrál kiszámítása a célunk, ahol I nyílt intervallum.
Példa. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $x^{10} + x^5 + 6 = (x^5)^2 + x^5 + 6 > 0$, ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^9+x^4}{x^{10}+x^5+6}\,dx &= \frac{1}{5}\cdot\int\frac{10x^9+5x^4}{x^{10}+x^5+6}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\int\frac{(x^{10}+x^5+6)'}{x^{10}+x^5+6}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\ln(x^{10}+x^5+6)+c = \\ &= \ln(\sqrt[5]{x^{10}+x^5+6})+c \qquad (c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Az alábbiakban néhány alaptípust sorolunk fel, amely kiszámításának ismerete alapvető jelentőségű.

1. alaptípus (elemi törtek). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $b \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}$. Az

$$I := \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right), \qquad \text{ill. a} \qquad J := \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$$

intervallumokon kiszámítjuk az

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\, dx$$

határozatlan integrált. Lineáris helyettesítéssel látható, hogy ha

- $n = 1$, akkor

$$\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \begin{cases} \dfrac{\ln(-ax-b)}{a} + c & (x \in I), \\[2ex] \dfrac{\ln(ax+b)}{a} + d & (x \in J) \end{cases} \qquad (c, d \in \mathbb{R}).$$

  Példa. Ha $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$, akkor

$$\int \frac{1}{3x-7}\, dx = \frac{\ln(7-3x)}{3} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

- $n > 1$, akkor

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\, dx = \int (ax+b)^{-n}\, dx = \frac{(ax+b)^{1-n}}{a \cdot (1-n)} + c \qquad (x \in I \cup J,\ c \in \mathbb{R})$$

  Példa. Ha $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$, akkor

$$\int \frac{1}{(3x-7)^2}\, dx = \int (3x-7)^{-2}\, dx = \frac{(3x-7)^{-1}}{3 \cdot (-1)} + c = \frac{1}{21-9x} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

2. alaptípus. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$ és $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, amelyre

$$ax^2 + bx + c \neq 0 \qquad (x \in I).$$

Ekkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx = \int \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}\, dx = \begin{cases} \ln(ax^2+bx+c) + \alpha & (ax^2+bx+c > 0), \\[2ex] \ln(-ax^2-bx-c) + \beta & (ax^2+bx+c < 0). \end{cases}$$

Példák.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2-4)+c = \ln(\sqrt{x^2-4})+c \qquad (x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty),\ c\in\mathbb{R});$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln(4-x^2)+c = \ln(\sqrt{4-x^2})+c \qquad (x\in(-2,2),\ c\in\mathbb{R}).$

3. alaptípus. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a > 0$ és $b^2-4ac < 0$. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $ax^2+bx+c > 0$, továbbá alkalmas $u, v \in \mathbb{R}$, $v > 0$ számokkal

$$ax^2+bx+c = a\cdot(x-u)^2+v.$$

Következésképpen tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a\cdot(x-u)^2+v}\,dx = \frac{1}{v}\cdot\int \frac{1}{\left[\sqrt{a/v}(x-u)\right]^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{\sqrt{a/v}}\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{a/v}(x-u)\right)+K = \frac{1}{\sqrt{av}}\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{a/v}(x-u)\right)+K.$$

Példa. Tetszőleges $x, c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(3/2)x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(\sqrt{3/2}x)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3/2}x\right)}{\sqrt{3/2}}+c = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3/2}x\right)+c.$$

4. alaptípus. Legyen $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$, $b^2-4ac < 0$. Ekkor pontosan egy olyan $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ szám van, amelyre

$$Ax+B = \gamma(ax^2+bx+c)'+\delta \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Így

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\gamma(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{\delta}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R})$$

5. alaptípus. Legyen $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$, $b^2-4ac < 0$, továbbá $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Ekkor az

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

integrál kiszámítáása egy $f'\cdot f^{-n}$-es típus leválasztása után lineáris helyettesítéssel vissza vezethető

az
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx$$
integrálra (vö. (2)).

Tetszőleges P, Q polinom esetén az $S := \dfrac{P}{Q}$ racionális függvény[3] határozatlan integráljának kiszámítását azt teszi lehetővé, hogy minden ilyen tört felírható valamely polinomnak és elemi vagy résztörteknek (**parciális tört**eknek) az összegeként.[4] Egy ilyen felírás a következő lépések egymásutánjaként kapható meg.

1. lépés. Ha P és Q polinom, $Q \not\equiv 0$, akkor pl. maradékos osztást használva belátható, hogy pontosan egy olyan p és q polinom van, amelyre
$$S(x) = p(x) + \frac{q(x)}{Q(x)} \qquad (x \in I), \tag{4}$$
teljesül. A (4)-beli felbontás sok esetben egyszerű átalakítások felhasználásával is megkapható. Pl. tetszőleges $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{2x^4+x^2+2x+1}{x^3+1} = \frac{2x^4+2x+x^2+1}{x^3+1} = \frac{2x(x^3+1)+x^2+1}{x^3+1} = 2x + \frac{x^2+1}{x^3+1}.$$
Erre a lépésre akkor van szükség, ha $\deg(Q) < \deg(P)$. Ha $q(x) \equiv 0$, akkor az (3)-beli integrál kiszámításához polinomot kell integrálnunk:
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int p(x)\,dx.$$
Ha $q(x) \not\equiv 0$, akkor a következé két lépésre van szükség.

2. lépés. A Q nevezőpolinomot faktorizáljuk (szorzattá alakítjuk). Pl.

- $Q(x) = x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$;
- $Q(x) = x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$;
- $Q(x) = x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$;
- $Q(x) = x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$;
- $Q(x) = x^3+6x^2+12x+8 = (x+2)^3$;
- $Q(x) = x^3+18x^2+108x+216 = (x+6)^3$;
- $Q(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = x^4(x+1)+x^2(x+1)+x+1 = (x+1)(x^4+x^2+1) = (x+1)[(x^2+1)^2-x^2] = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

[3] Valamely $S \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt **racionális függvény**nek nevezünk, ha S felírható polinomok hányadosaként.
[4] A *parciális* szó latin eredetű, jelentése 'részleges, nem egész'.

- $Q(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$;
- $Q(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

Figyeljük meg, hogy a fenti felbontásokban elsőfokú tényezők, illetve olyan másodfokú tényezők szerepelnek, amelyeknek nincsenek valós gyökei. Ez általánosan is igaz: minden valós együtthatós Q polinom felírható valós együtthatós első- és másodfokú tényezők (vagy ezek hatványainak) szorzataként, ahol a másodfokú tényezőknek nincsen valós gyöke. Erre a felbntásra csak legfeljebb negyedfokú Q esetén van használható algoritmus (gyökképlet), magasabb fokúra már nem. A Q polinom faktorai (szorzótényezői) az alábbi típusúak lehetnek:

$$x-u, \qquad (x-v)^n, \qquad (ax^2+bx+c), \qquad (dx^2+ex+f)^m,$$

ahol $m, n \in \mathbb{N}$, továbbá $u, v, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$: $b^2 - 4ac < 0$, $e^2 - 4df < 0$.

3. lépés. Ha tehát P és Q olyan polinom, amelyre $\deg(Q) > \deg(P)$, azaz az $S := \dfrac{P}{Q}$ törtben a számláló foka kisebb, mint a nevező foka, akkor a Q polinom **faktorizálás**ának (**szorzatokra való bontás**ának) ismeretében az S racionális függvényt elemi törtek összegére bontjuk. A Q szorzatra bontott alakjának megfelelően több esetet különböztetünk meg.

1. eset. Q-nak csak egyszeres, valós gyökei vannak:

$$Q(x) \equiv (x-x_1)\cdot \ldots \cdot (x-x_n).$$

Ekkor a parciális törtekre való bontás így történik

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}, \tag{5}$$

ahol

$$A_1 := \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}, \qquad \ldots, \qquad A_n := \frac{P(x_n)}{Q'(x_n)}.$$

Példák.

1. Világos, hogy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} :\equiv \frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1/6}{x-2} - \frac{1/6}{x+4},$$

hiszen $Q'(x) \equiv 2x + 2$ és így

$$A_1 := \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{1}{6}, \qquad A_2 := \frac{P(-4)}{Q'(-4)} = -\frac{1}{6}.$$

Megjegyezzük, hgy ebben az esetben az a gyakorlat elején ismertetett „**ránézéses módszer**”, illetve az **egyenlő egütthatók módszere** is célhoz vezet. Ez utóbbi módszernek alapja a polinomok azonossági tétele, miszerint két polinom pontosan akkor egenlő, ha a megfeleő együtthatóik megegyeznek. Ennek felhasználásával a keresett $A_1, \ldots, A_n$ együtthatókat úgy kaphatjuk meg, hogy az (5) egyenlőség jobb oldalán közös nevezőre hozunk, majd az így kapott tört számlálóját x hatványai szerint (növekvő vagy csökkenő módon) rendezzük, ezutám pedig – felhasználva, hogy az kapott tört számlálója egyenlő a bal oldalon lévő tört számlálójával – a határozatlan együtthatókra egy lineáris egyenletrendszert írunk fel, melynek megoldásai a keresett $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók.

2. Világos, hogy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} :\equiv \frac{1}{(x-3)(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4},$$

hiszen

$$Q'(x) \equiv (x+2)(x-4) + (x-3)(x-4) + (x-3)(x+2),$$

és így

$$A := \frac{P(3)}{Q'(3)} = \frac{1}{-5}, \qquad B := \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = \frac{1}{30}, \qquad C = \frac{P(4)}{Q'(4)} = \frac{1}{6}.$$

3. Világos, hogy ha $x \in (-\infty, -2)$, akkor

$$\frac{x^3-4}{5x^3-x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5x^3-20}{5x^3-x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5x^3-x+x-20}{5x^3-x} = \frac{1}{5} \cdot \left\{1 + \frac{x-20}{5x^3-x}\right\},$$

továbbá

$$\begin{aligned}
\frac{x-20}{5x^3-x} &= = \frac{x-20}{x\left(5x^2-1\right)} = \frac{x-20}{5x\left(x^2-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x-20}{x\left(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left\{\frac{A}{x} + \frac{B}{x+\frac{1}{\sqrt{5}}} + \frac{C}{x-\frac{1}{\sqrt{5}}}\right\} = \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{A\left(x^2-\frac{1}{5}\right) + Bx\left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + Cx\left(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{x\left(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}.
\end{aligned}$$

A számlálók azonosságából meghatározzuk a keresett A, B és C értékeket, x helyébe a mevező gyökeit helyettesítve:

$$x - 20 \equiv A\left(x^2 - \frac{1}{5}\right) + Bx\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + Cx\left(x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

- Ha $x = 0$, akkor $-20 = \dfrac{A}{-5}$, azaz $A = 100$.
- Ha $x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, akkor $-\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 20 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)B = \frac{2}{5}B$, azaz $B = -\frac{\sqrt{5}}{2} - 50$.
- Ha $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, akkor $\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 20 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}C = \frac{2}{5}C$, azaz $C = \frac{\sqrt{5}}{2} - 50$.

Következésképpen tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 4}{5x^3 - x}\,dx &= \int \frac{1}{5}\,dx + \frac{1}{25} \cdot \int \left(\frac{100}{x} + \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2} - 50}{x + \frac{1}{\sqrt{5}}} + \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - 50}{x - \frac{1}{\sqrt{5}}}\right) dx = \\ &= \frac{x}{5} + 4\ln(-x) - \frac{\sqrt{5} + 100}{50}\ln\left(-x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\sqrt{5} - 100}{50}\ln\left(-x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + c.\end{aligned}$$

2. eset. Q-nak csak valós gyökei vannak, de többszörös gyökök is előfordulhatnak:

$$Q(x) \equiv (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{\alpha_r}.$$

Ekkor a parciális törtekre való bontás így történik

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{\alpha_r}} = \\ &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \\ &\quad \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \\ &\quad + \ldots + \\ &\quad \frac{A_{r1}}{x - x_r} + \frac{A_{r2}}{(x - x_r)^2} + \ldots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x - x_r)^{\alpha_r}}.\end{aligned} \tag{6}$$

Példa. Ha $x \in (-\infty, -2)$, akkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^2 + 4x - 6}{(x + 2)^3} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{(x + 2)^3},$$

ahol

$$A := \frac{P''(-2)}{2!} = \frac{6}{2!} = 3, \qquad B := \frac{P'(-2)}{1!} = \frac{-12+4}{1!} = -8, \qquad C := \frac{P(-2)}{0!} = -2.$$

Megjegyzés. Ha

$$Q(x) \equiv (x-\alpha)^n,$$

akkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n},$$

ahol

$$A_k := \frac{P^{(n-k)}(\alpha)}{(n-k)!} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Persze az egyenlő együtthatók módszerét is használhatjuk:

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} = \frac{A(x+2)^2 + B(x+2) + C}{(x+2)^3}$$

és

$$3x^2 + 4x - 6 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C = Ax^2 + (4A+B)x + 4A + 2B + C,$$

ahonnan a

$$3 = A, \qquad 4 = 4A + B, \qquad -6 = 4A + 2B + C$$

egyenletrendszer megoldásával ismét azt kapjuk, hogy

$$A = 3, \qquad B = -8, \qquad C = -2.$$

Így tetszőleges $x \in (-\infty, -2)$, ill. bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{-8}{(x+2)^2} + \frac{-2}{(x+2)^3} \right) dx = 3\ln(-x-2) + \frac{8}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + c.$$

3. eset. **Q-nak nem minden gyöke valós:**

$$Q(x) \equiv (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{\alpha_r} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_s x + c_s).$$

Ekkor

$$\left.\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{k=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1k}}{(x-x_1)^k}+\dots+\sum_{l=1}^{\alpha_r}\frac{A_{rl}}{(x-x_r)^l}+\\ &\quad+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{B_sx+C_s}{x^2+b_sx+c_s}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Példák.

1. Ha $x \in (-\infty, 0)$, akkor

$$\frac{5}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+Bx^2+C}{x(x^2+4)},$$

ahonnan

$$5 \equiv A(x^2+4)+Bx^2+C, \qquad \text{ill.} \qquad A=\frac{5}{4}, \quad B=-\frac{5}{4}, \quad C=0$$

Így

$$\begin{aligned}\int\frac{5}{x(x^2+4)}\,dx &= \frac{5}{4}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=\frac{5}{4}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4}\right)dx=\\ &= \frac{5}{4}\left\{\ln(-x)-\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4)\right\}+c.\end{aligned}$$

2. Ha $x \in (-\infty, -1)$, akkor

$$\frac{2x^2}{x^4-1}=\frac{2x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Így

$$\begin{aligned}&\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\equiv\\ &\equiv \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\equiv\\ &\equiv \frac{A(x^3-x^2+x-1)+B(x^3+x^2+x+1)+C(x^3-x)+D(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}\equiv\\ &\equiv \frac{(A+B+C)x^3+(-A+B+D)x^2+(A+B-C)x-A+B-D}{x^4-1},\end{aligned}$$

azaz

$$A + B + C = 0, \qquad -A + B + D = 2, \qquad A + B - C = 0, \qquad -A + B - D = 0,$$

ahonnan

$$A = -\frac{1}{2}, \qquad B = \frac{1}{2}, \qquad C = 0, \qquad D = 1$$

következik. Ennélfogva tetszőleges $x \in (-\infty, -1)$ esetén

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2}{x^4-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \\ &= -\frac{1}{2}\ln(-x-1) + \frac{1}{2}\ln(1-x) + 2\,\mathrm{arc\,tg}(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Általában az alábbi tételben megfogalmazott állítást alkalmazzuk.

Tétel (parciális törtek módszere). Legyen

$$P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

polinom, $\deg(Q) \geq 1$, továbbá $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, amelyben Q-nak nincsen gyöke, és

$$S : I \to \mathbb{R}, \qquad S(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Ha $\deg(P) \geq \deg(Q)$, akkor léteznek olyan $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok, amelyekkel

$$S(x) = p(x) + \frac{q(x)}{Q(x)} \qquad (x \in I), \tag{8}$$

továbbá

$$\deg(q) < \deg(p) \qquad \text{vagy} \qquad q(x) = 0 \quad (x \in I).$$

Tegyük fel, hogy

$$Q(x) = a \cdot \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot \prod_{l=1}^{s} (x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^{m_l} \qquad (x \in I), \tag{9}$$

ahol a a Q polinom főegyütthatója,

$$\alpha_k, \beta_l, \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad 0 < n_k, m_l \in \mathbb{N}, \quad \beta_l^2 - 4\gamma_l < 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, r\},\ l \in \{1, \ldots, s\}),$$

$$\alpha_i \neq \alpha_j \qquad (i \neq j),$$

továbbá $\beta_i = \beta_j$ és $\gamma_i = \gamma_j$ $i \neq j$ esetén egyszerre nem teljesül. Ekkor van olyan

$$A_{ki}, B_{lj}, C_{lj} \in \mathbb{R},$$

hogy

$$\frac{q(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{A_{ki}}{(x - \alpha_k)^i} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{B_{lj} x + C_{lj}}{(x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^j}. \tag{10}$$

A fenti tételben az ismeretlen A_{ki}, B_{lj}, C_{lj} számok meghatározására egyenletrendszert írhatunk fel.

Feladat. Írjuk fel a (8)-(10) formulákat az alábbi racionális függvények esetében!

1. $S(x) := \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4} \qquad (x \in \mathbb{R});$
2. $S(x) := \dfrac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} \qquad (x \in (1,+\infty));$
3. $S(x) := \dfrac{2x^3-4x^2+x-5}{x^5-x^4+8x^3-8x^2+16x-16} \qquad (x \in (1,+\infty));$
4. $S(x) := \dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} \qquad (x \in (-1,+\infty)).$

Útm.

1. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$S(x) = \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = \frac{x^4+5x^2+4-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Határozzuk meg tehát az $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy

$$\begin{aligned} -\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \\ &= \frac{4B+D+(4A+C)x+(B+D)x^2+(A+C)x^3}{x^4+5x^2+4} \end{aligned}$$

teljesüljön:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 16 \end{array}\right].$$

Ebből

$$D = -\frac{16}{3}, \qquad C = 0, \qquad B = \frac{1}{3}, \qquad A = 0,$$

azaz

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x^2+4} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Minden $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$S(x) = \frac{1}{x^4(x-1)+x^2(x-1)+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^4+x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x^4+2x^2+1-x^2)} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)((x^2+1)^2-x^2)} = \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}.$$

Határozzuk meg tehát az $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^4+x^2+1)+(Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{A(x^4+x^2+1)+(Bx+C)(x^3-2x^2+2x-1)+(Dx+E)(x^3-1)}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} =$$

$$= \frac{A-C-E+(2C-B-D)x+(A-2C+2B)x^2+(C-2B+E)x^3+(A+B+D)x^4}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$$

teljesüljön:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Ebből

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{3}, \qquad C = -\frac{1}{6}, \qquad D = 0, \qquad E = -\frac{1}{2},$$

azaz

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} \qquad (x \in (1, +\infty)).$$

3. Minden $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{x^4(x-1) + 8x^2(x-1) + 16(x-1)} = \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^4 + 8x^2 + 16)} = \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Határozzuk meg tehát az $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} &\frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+4} + \frac{Dx + E}{(x^2+4)^2} = \\ &= \frac{A(x^2+4)^2 + (Bx + C)(x-1)(x^2+4) + (Dx + E)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)^2} = \\ &= \frac{16A - 4C - E + (E - D + 4C - 4B)x + (8A + 4B - C + D)x^2 - Bx^3 + (A + B)x^4}{x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16} \end{aligned}$$

teljesüljön:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 16 & 0 & -4 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -16 & -4 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & -1 & -37 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 11 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 39 \end{array}\right].$$

Ebből

$$A = -6/25, \qquad B = 6/25, \qquad C = 56/25, \qquad D = -4/5, \qquad E = -39/5,$$

azaz tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16} = -\frac{6}{25(x-1)} - \frac{39 + 4x}{5(x^2+4)} + \frac{2(3x+28)}{(x^2+4)^2}.$$

4. Határozzuk meg az $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy tetszőleges $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$S(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}$$

$$= \frac{A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} +$$

$$+ \frac{D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \ldots =$$

$$= \frac{108A + 54B + 27C + 12D + 12E + 4F}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} + \frac{(216A + 135B + 54C + 28D + 28E + 8F)x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} +$$

$$+ \frac{(171A + 126B + 36C + 23D + 23E + 5F)x^2 + (67A + 56B + 10C + 8D)x^3 +}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$+ \frac{(13A + 12B + C + D)x^4 + (A+B)x^5}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

teljesül:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 12 & 1 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 67 & 56 & 10 & 47 & 8 & 1 & 0 \\ 171 & 126 & 36 & 97 & 23 & 5 & 0 \\ 216 & 135 & 54 & 96 & 28 & 8 & 0 \\ 108 & 54 & 27 & 36 & 12 & 4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & -20 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -45 & 36 & -74 & 23 & 5 & 0 \\ 0 & -81 & 54 & -120 & 28 & 8 & 0 \\ 0 & -54 & 27 & -72 & 12 & 4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 16 & -22 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 42 & -53 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 36 & -42 & 4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 28 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 39 & -23 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 13 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Ebből

$$A = \frac{1}{8}, \qquad B = 2, \qquad C = -1, \qquad D = -\frac{17}{8}, \qquad E = -\frac{5}{4}, \qquad E = -\frac{1}{2},$$

azaz tetszőleges $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} =$$

$$= \frac{1}{8(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{17}{8(x+3)} - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{1}{2(x+3)^3}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Szemléltessük a parciális törtekre bontás módszerét az alábbi törteken anélkül, hogy meghatároznánk a megfelelő együtthatókat!

1. $\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)^2(x+1)(x+3)^3}$;
2. $\dfrac{x-1}{x^4+x^3+x^2}$;
3. $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$;
4. $\dfrac{x^4+1}{(x^2+9)(x^2-x+1)^2}$;
5. $\dfrac{2x+5}{x^6-1}$;
6. $\dfrac{x+4}{(x-2)^2(2x^2+9x-5)}$;
7. $\dfrac{(x-3)^2}{(x^2-x+7)^3}$;
8. $\dfrac{1}{x^4+4}$.

Útm.

1. Világos, hogy

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2(x+1)(x+3)^3} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}$$

2. A nevezőt szorzatra bontva kapjuk, hogy

$$\frac{x-1}{x^4+x^3+x^2} \equiv \frac{x-1}{x^2(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

3. A nevezőt szorzatra bontva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^4-1)^2} &\equiv \frac{1}{[(x^2-1)(x^2+1)]^2} \equiv \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2} \equiv \\ &\equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

4. Világos, hogy

$$\frac{x^4+1}{(x^2+9)(x^2-x+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+9}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}.$$

5. A nevezőt szorzatra bontva kapjuk, hogy

$$\frac{2x+5}{x^6-1} \equiv \frac{2x+5}{(x^3-1)(x^3+1)} \equiv \frac{2x+5}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)} \equiv$$

$$\equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1}.$$

6. A nevezőt szorzatra bontva kapjuk, hogy

$$\frac{x+4}{(x-2)^2(2x^2+9x-5)} \equiv \frac{x+4}{(x-2)^2(2x-1)(x+5)} \equiv$$

$$\equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{2x-1} + \frac{D}{x+5}.$$

7. Világos, hogy

$$\frac{(x-3)^2}{(x^2-x+7)^3} \equiv \frac{Ax+B}{x^2-x+7} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+7)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+7)^3}.$$

8. A nevezőt átalakítva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x^4+4} \equiv \frac{1}{x^4+4x^2-4x^2+4} \equiv \frac{1}{x^4+4x^2+4-4x^2} \equiv \frac{1}{(x^2+2)^2-(2x)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} \equiv$$

$$\equiv \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}. \quad \blacksquare$$

Feladat. A parciális törtekre bontás módszerével számítsuk ki a következő függvények határozatlan integrálját!

1. $f(x) := \dfrac{x}{x^2-3x+2}$ $\quad (x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty));$

2. $f(x) := \dfrac{1}{1-x^3}, \quad (x \in (1, +\infty))$

3. $f(x) := \dfrac{x^3-4}{x^3+x} \quad (x \in (0, +\infty));$

4. $f(x) := \dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)} \quad (x \in (1, +\infty));$

5. $f(x) := \dfrac{2x^4-3x^3+2x^2-x+8}{x^3-3x^2+3x-1} \quad (x \in (1, +\infty)).$

Útm.

1. Látható, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-3x+2} &= \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)} - \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

   Megjegyzés. A fenti felbontást természetesen így is csinálhattuk volna:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2},$$

   ahonnan

$$(A+B=1,\; -2A-B=0) \quad \Longrightarrow \quad \ldots \quad \Longrightarrow \quad A=-1,\; B=2.$$

   Következésképpen

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx &= 2\cdot\int\frac{1}{x-2}\,dx - \int\frac{1}{x-1}\,dx = \\ &= \begin{cases} 2\cdot\ln(2-x)-\ln(1-x)+c & (x\in(-\infty,1)), \\ 2\cdot\ln(2-x)-\ln(x-1)+d & (x\in(1,2)), \\ 2\cdot\ln(x-2)-\ln(x-1)+e & (x\in(2,+\infty)) \end{cases} \qquad (c,d,e\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

2. Mivel bármely $x \in (1,+\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^3} &= \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2} = \\ &= \frac{A(1+x+x^2)+(Bx+C)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= \frac{(A-B)x^2+(A+B-C)x+A+C}{1-x^3},\end{aligned}$$

ezért

$$(A - B = 0,\ A + B - C = 0,\ A + C = 1) \quad\Longrightarrow\quad \ldots \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3}.$$

Következésképpen tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x^3}\,dx &= \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{3}\cdot\int\frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx = \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\ln(x-1) + \frac{1}{6}\cdot\int\frac{2x+4}{1+x+x^2}\,dx = \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\ln(x-1) + \frac{1}{6}\cdot\int\frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx + \frac{1}{6}\cdot\int\frac{3}{1+x+x^2}\,dx = \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\ln(x-1) + \frac{1}{6}\cdot\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx = \\
&= \ln\left(\sqrt[6]{\frac{1+x+x^2}{(x-1)^2}}\right) + \frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \\
&= \ln\left(\sqrt[6]{\frac{1+x+x^2}{(x-1)^2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

3. Mivel bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\frac{x^3-4}{x^3+x} = \frac{x^3+x-x-4}{x^3+x} = 1 - \frac{x+4}{x^3+x}$$

és

$$\frac{x+4}{x^3+x} = \frac{x+4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x},$$

ezért

$$(A - B = 0,\ C = 1,\ A = 4) \quad\Longrightarrow\quad \ldots \quad\Longrightarrow\quad A = 4,\ B = -4,\ C = 1.$$

Következésképpen tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-4}{x^3+x}\,dx &= \int \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4x-1}{x^2+1}\right)dx = \\
&= \int 1\,dx - 4\cdot\int \frac{1}{x}\,dx + 2\cdot\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \\
&= x - 4\ln(x) + 2\ln(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg}(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

4. Mivel minden $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \\
&= \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \\
&= \frac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x-A+B+D}{(x-1)^2(x^2+1)},
\end{aligned}$$

ezért

$$A+C=1, \quad -A+B-2C+D=4, \quad A+C-2D=-8, \quad -A+B+D=0,$$

ahonnan

$$A=2, \qquad B=-2, \qquad C=-2, \qquad D=4.$$

Következésképpen tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-2x+4}{x^2+1}\right)dx = \\
&= 2\cdot\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}-\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + 4\cdot\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \\
&= 2\cdot\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}-\ln(x^2-1)+4\operatorname{arc\,tg}(x)+c \quad (c\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

5. Vegyük észre, hogy

$$n(x) := x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért írjuk fel a számlálóbeli s polinomot felírjuk $(x-1)$ hatványai szerint. Ismeretes (vö. 148-149. oldal), hogy ha

$$s(x) := 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 8 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$s(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{s^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = 8 + 2(x-1) + 5(x-1)^2 + 5(x-1)^3 + 2(x-1)^4 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

hiszen $s(1) = 8$ és

$$\begin{aligned}
&s'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 4x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}) &&\Longrightarrow \quad s'(1) = 2,\\
&s''(x) = 24x^2 - 18x + 4 \quad (x \in \mathbb{R}) &&\Longrightarrow \quad s''(1) = 10,\\
&s'''(x) = 48x - 18 \quad (x \in \mathbb{R}) &&\Longrightarrow \quad s'''(1) = 30,\\
&s^{(4)}(x) = 48 \quad (x \in \mathbb{R}) &&\Longrightarrow \quad s^{(4)}(1) = 48.
\end{aligned}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha először x helyébe $(x+1)$-et helyettesítünk, majd felbontjuk a zárójeleket, és az így kapott polinomba x helyébe $x-1$-et írunk:

$$\begin{aligned}
2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 8 &\rightsquigarrow 2(x+1)^4 - 3(x+1)^3 + 2(x+1)^2 - (x+1) + 8 =\\
&= 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 2 - 3x^3 - 9x^2 - 9x - 3 + 2x^2 + 4x + 2-\\
&\quad -x - 1 + 8 =\\
&= 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 2x + 8 \quad \rightsquigarrow\\
&\rightsquigarrow 2(x+1)^4 + 5(x+1)^3 + 5(x+1)^2 + 2(x+1) + 8.
\end{aligned}$$

Következésképpen tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^4-3x^3+2x^2-x+8}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx &= \int \frac{s(x)}{n(x)}\,dx = \\
&= \int \frac{8+2(x-1)+5(x-1)^2+5(x-1)^3+2(x-1)^4}{(x-1)^3}\,dx = \\
&= \int \left(\frac{8}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{x-1}+5+2(x-1)\right)dx = \\
&= -\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+5\ln(x-1)+3x+x^2+c \quad (c\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. A számláló magasabb fokú polinom, mint a nevező, így az alábbi módon is eljárhatunk.

1. lépés Maradékos osztást végzünk. Látható, hogy

$$2x^4-3x^3+2x^2-x+8=(x^3-3x^2+3x-1)\cdot(2x+3)+5x^2-8x+11 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

hiszen

$$
\begin{array}{l}
(2x^4-3x^3+2x^2-x+8):(x^3-3x^2+3x-1)=2x+3\\
\underline{-(2x^4-6x^3+6x^2-2x)}\\
3x^3-4x^2+x+8\\
\underline{-(3x^3-9x^2+9x-3)}\\
5x^2-8x+11
\end{array}
$$

Következésképpen bármely $1<x\in\mathbb{R}$ számra

$$\frac{2x^4-3x^3+2x^2-x+8}{x^3-3x^2+3x-1}=2x+3+\frac{5x^2-8x+11}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

2. lépés Világos, hogy minden $1<x\in\mathbb{R}$ esetén

$$
\begin{aligned}
\frac{5x^2-8x+11}{x^3-3x^2+3x-1} &= \frac{5x^2-8x+11}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}= \\
&= \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C}{(x-1)^3},
\end{aligned}
$$

ezért

$$A=5, \quad -2A+B=-8, \quad A-B+C=11,$$

ahonnan

$$A=5, \qquad B=2, \qquad C=8.$$

3. lépés Így tehát bármely $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 8}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\,dx = \int \left(2x + 3 + \frac{5x^2 - 8x + 11}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\right) dx =$$

$$= x^2 + 3x + \int \frac{5x^2 - 8x + 11}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\,dx =$$

$$= x^2 + 3x + \int \left(\frac{5}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3}\right) dx =$$

$$= x^2 + 3x + 5\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + c \quad (c \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

1. $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad (x \in (-1, +\infty))$;
2. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad (x \in (-1, 1))$;
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx \quad (x \in (0, +\infty))$.

Útm.

1. Mivel bármely $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$\frac{3x-5}{x^2+2x+1} = \frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2},$$

ezért

$$(A = 3, \quad A + B = -5) \qquad \Longrightarrow \qquad (A = 3 \quad B = -8).$$

Következésképpen

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{3}{x+1}\,dx + \int \frac{-8}{(x+1)^2}\,dx = 3\cdot\ln(x+1) + \frac{8}{x+1} + c \quad (x \in (-1, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel bármely $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x^2-1+4}{x^2-1} = x + 1 + \frac{4}{x^2-1},$$

ezért

$$\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{4}{x^2-1}\right) dx = \frac{x^2}{2}+x-4\,\mathrm{ar\,th}(x)+c \quad (x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}).$$

3. Mivel bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}$$

ezért

$$(A+B=0, \quad C=0, \quad 4A=1) \qquad \Longrightarrow \qquad (A=1/4 \quad B=-1/4, \quad C=0).$$

Következésképpen bármely $x\in(0,+\infty)$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx\right) = \frac{1}{4}\cdot\ln(x) - \frac{1}{8}\cdot\ln(x^2+4)+c = \ln\left(\sqrt[8]{\frac{x^2}{x^2+4}}\right)+c. \qquad \blacksquare$$

Házi feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,dx \quad (x\in(-4,2))$;
2. $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{5x^3+x}\,dx \quad (x\in(0,+\infty))$;
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx \quad (x\in(-1,+\infty))$;
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6+x^4}\,dx \quad (x\in(0,+\infty))$;
5. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^2+1)^3}\,dx \quad (x\in(-\infty,+\infty))$.

Útm.

1. Mivel bármely $x\in(-4,2)$ esetén

$$\frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(x+4)-(x-2)}{(x-2)(x+4)} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}\right)$$

ezért

$$\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{1}{6}\cdot(\ln(2-x)-\ln(x+4))+c = \ln\left(\sqrt[6]{\frac{2-x}{x+4}}\right)+c \qquad (c\in\mathbb{R}).$$

2. Tetszőleges $x \in (0,+\infty)$ esetén

$$\frac{x^3-4}{5x^3+x} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5x^3-20}{5x^3+x} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5x^3+x-x-20}{5x^3+x} = \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x+20}{x(5x^2+1)}$$

és

$$\frac{x+20}{x(5x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{5x^2+1} = \frac{A(5x^2+1)+(Bx+C)x}{x(5x^2+1)} = \frac{(5A+B)x^2+Cx+A}{x(5x^2+1)},$$

ahonnan

$$A=20, \qquad C=1, \qquad B=-100.$$

Így

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{5x^3+x}\,dx &= \int\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{-100x+1}{5x^2+1}\right)dx = \frac{x}{5}-\ln(x^4)-\frac{1}{5}\cdot\int\frac{100x-1}{5x^2+1}\,dx = \\ &= \frac{x}{5}-\ln(x^4)-2\cdot\int\frac{10x}{5x^2+1}\,dx-\frac{1}{5}\int\frac{1}{(\sqrt{5}x)^2+1}\,dx = \\ &= \frac{x}{5}-\ln(x^4)-\ln((5x^2+1)^2)+\frac{1}{5\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{5}x\right)+c \quad (c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

3. Mivel tetszőleges $x \in (-1,+\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \\ &= \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{x^3+1},\end{aligned}$$

ezért

$$A+B=0,\ -A+B+C=0,\ A+C=1, \qquad \text{azaz} \qquad A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{2}{3}.$$

Így tetszőleges $x \in (-1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}\,dx &= \frac{1}{3}\cdot\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx = \ln(\sqrt[3]{x+1}) - \frac{1}{6}\cdot\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx = \\
&= \ln(\sqrt[3]{x+1}) - \frac{1}{6}\cdot\int\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\,dx = \\
&= \ln(\sqrt[3]{x+1}) - \ln(\sqrt[6]{x^2-x+1}) + \frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \\
&= \ln(\sqrt[3]{x+1}) - \ln(\sqrt[6]{x^2-x+1}) + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (c\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

4. Mivel bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^6+x^4} &= \frac{1}{x^4(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{x^2+1} = \\
&= \frac{Ax^3(x^2+1)+Bx^2(x^2+1)+Cx(x^2+1)+D(x^2+1)+(Ex+F)x^4}{x^4(x^2+1)} = \\
&= \frac{(A+E)x^5+(B+F)x^4+(A+C)x^3+(B+D)x^2+Cx+D}{x^6+x^4},
\end{aligned}$$

ezért

$$A+E=0,\quad B+F=0,\quad A+C=0,\quad B+D=0,\quad C=0,\quad D=1,$$

azaz

$$A=0,\qquad B=-1,\qquad C=0,\qquad D=1,\qquad E=0,\qquad F=1.$$

Így tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\int\frac{1}{x^6+x^4}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\operatorname{arc\,tg}(x)+c \quad (c\in\mathbb{R}).$$

5. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^4}{(x^2+1)^3} = \frac{x^4+2x^2+1-2x^2-1}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^2+1)^2-2x^2-1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^3}$$

és

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^3} &= \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}= \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+1)^2+(Cx+D)(x^2+1)+Ex+F}{(x^2+1)^3}= \\
&= \frac{Ax^5+Bx^4+(2A+C)x^3+(2B+D)x^2+(A+C+E)x+B+D+F}{(x^2+1)^3},
\end{aligned}
$$

azaz

$$A=0,\quad B=0,\quad 2A+C=0,\quad 2B+D=2,\quad A+C+E=0,\quad B+D+F=1,$$

ahonnan

$$A=0,\qquad B=0,\qquad C=0,\qquad D=2,\qquad E=0,\qquad F=-1$$

következik. Így (vö. 1. gyaklorlat)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{(x^2+1)^3}\,dx &= \operatorname{arc\,tg}(x)-\int \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^3}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(x)-\int\left(\frac{2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{(x^2+1)^3}\right)dx= \\
&= \operatorname{arc\,tg}(x)-2\cdot\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx= \\
&= \operatorname{arc\,tg}(x)-2\cdot\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx= \\
&= \operatorname{arc\,tg}(x)+\frac{x}{4(x^2+1)^2}-\frac{5}{4}\cdot\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx= \\
&= \operatorname{arc\,tg}(x)+\frac{x}{4(x^2+1)^2}-\frac{5}{4}\cdot\left\{\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x)\right\}+c= \\
&= \frac{3}{8}\cdot\operatorname{arc\,tg}(x)-\frac{5}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+c \quad (c\in\mathbb{R}). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

9. gyakorlat (2025. november 10-11.)

Szükséges ismeretek.

- Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?
- Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?
- Mi a Darboux-féle felső integrál definíciója?
- Mikor nevez egy függvényt Riemann-integrálhatónak?
- Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-)integrálját?
- Adjon példát nem integrálható függvényre!
- Mi az oszcillációs összeg definíciója?
- Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

Tétel (integrálás helyettesítéssel). Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $g : I \to J$, $g \in \mathfrak{D}$, továbbá $f : J \to \mathbb{R}$. Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. Ha $\int f \neq \emptyset$, akkor $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$ és bármely $F \in \int f$ primitív függvénnyel

$$\int (f \circ g) \cdot g' = [F \circ g] \qquad \Big/ \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Big|_{u=g(x)} \Big/$$

(az ún. **első alak**, amikor „**függvényt helyettesítünk változóval**: $g(x) =: u$”).

2. Ha g bijekció és $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, akkor $\int f \neq \emptyset$ és bármely $H \in \int (f \circ g) \cdot g'$ primitív függvénnyel

$$\int f = [H \circ g^{-1}] \qquad \Big/ \int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \Big/$$

(az ún. **második alak**, amikor „**változót helyettesítünk függvénnyel**: $x =: g(t)$”).

Természetesen mindkét alak alkalmazása ugyanarra az integrálra vezet, legfeljebb az egyik alak (általában a második alak) alkalmazására könyebb rájönni.

Példa. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ $(x \in \mathbb{R})$ kiszámítása:

1. alak:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\cdot e^x\,dx = \int \frac{u}{1+u}\,du\Big|_{u=e^x} = \int \frac{u+1-1}{1+u}\,du\Big|_{u=e^x} = \\ &= \int \left(1-\frac{1}{1+u}\right)du\Big|_{u=e^x} = (u-\ln(1+u))|_{u=e^x}+c = \\ &= e^x-\ln(1+e^x)+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

Itt

$$f(u) := \frac{u}{1+u} \qquad (u \in (-1,\infty) =: J),$$

ill.

$$g(x) := e^x \qquad (x \in \mathbb{R} =: I).$$

2. alak:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{\exp(2\ln(t))}{1+\exp(\ln(t))}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{t}{1+t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \ldots$$

Itt

$$f(x) := \frac{e^{2x}}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R} =: J)$$

ill.

$$g(t) := \ln(t) \qquad (t \in (0,+\infty) =: I),$$

így $g : I \to J$ bijekció,

$$g'(t) = \frac{1}{t} \quad (t \in I), \qquad g^{-1}(x) = e^x \quad (x \in J).$$

Példa. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(x \in (-1,1))$ kiszámítása:

1. alak:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int (1-x^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int (1-\sin^2)(\arcsin(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\
&= \int \cos^2(u)\,du\Big|_{u=\arcsin(x)} = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2u)\right)\,du\Big|_{u=\arcsin(x)} = \\
&= \left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{u=\arcsin(x)} = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + c = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Itt

$$f(u) := 1 - \sin^2(u) \qquad (u \in \mathbb{R} =: J),$$

ill.

$$g(x) := \arcsin(x) \qquad (x \in (-1,1) =: I).$$

2. alak:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} = \int \cos^2(t)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} = \ldots$$

Itt

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad (x \in (-1,1) =: J),$$

ill.

$$g(t) := \sin(t) \qquad \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =: I\right),$$

így $g : I \to J$ bijekció,

$$g'(t) = \cos(t) \quad (t \in I), \qquad g^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad (x \in J).$$

Megjegyezzük, hogy a

$$g : (0,\pi) \to (-1,1), \qquad g(t) := \cos(t)$$

bijekció is felhasználható helyettesítésre.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

1. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx \quad (x\in(0,+\infty))$,
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$,
3. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx \quad (x\in(0,+\infty))$,
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx \quad (x\in(0,+\infty))$.

Útm.

1. Világos, hogy $x\in(0,+\infty)$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int\left(1+\frac{1}{u}\right)\cdot\sqrt[3]{1+u}\cdot 2u\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} = \\ &= 2\int(u+1)\cdot\sqrt[3]{1+u}\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} = 2\int\sqrt[3]{(1+u)^4}\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} = \\ &= \frac{6}{7}\cdot\left[\left(\sqrt[3]{(1+u)^7}\right)\right]_{u=\sqrt{x}} = \frac{6}{7}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^7}+c.\end{aligned}$$

2. Szintén a helyettesítés módszerét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx &= \int\frac{1}{1+u}\cdot\frac{2}{u}\,du\Big|_{u=\sqrt{e^x}} = 2\cdot\int\frac{1+u-u}{(1+u)u}\,du\Big|_{u=\sqrt{e^x}} = \\ &= 2\cdot\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du\Big|_{u=\sqrt{e^x}} = 2\,(\ln(u)-\ln(1+u))|_{u=\sqrt{e^x}}+c = \\ &= 2\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\Big|_{u=\sqrt{e^x}}+c = 2\ln\left(\frac{\sqrt{e^x}}{1+\sqrt{e^x}}\right)+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

3. A

$$t:=\sqrt{e^x-1} \quad\rightsquigarrow\quad x=\ln(t^2+1) \quad\rightsquigarrow\quad dx=\frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

helyettesítéssel tetszőleges $x\in(0,+\infty)$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int\sqrt{e^x-1}\,dx &= \int\frac{2t^2}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = \int\frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = \int\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = \\ &= [2t-2\operatorname{arc\,tg}(t)]_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{e^x-1})+c.\end{aligned}$$

4. A

$$t := \sqrt[6]{x} \quad \rightsquigarrow \quad x = t^6 \quad \rightsquigarrow \quad dx = 6t^5\,dt$$

helyettesítéssel tetszőleges $x \in (0, +\infty)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{t^3 + t^2} \cdot 6t^5\,dt\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} =$$

$$= 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}\,dt\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} =$$

$$= \left[2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1)\right]_{t=\sqrt[6]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c.$$

A leggyakoribb helyettesítések a következők.

1. $f(ax+b)$ alakú integrandus (lineáris helyettesítés):

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye. Ekkor minden olyan $a, b \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$ esetén, amelyre $ax + b \in I$ $(x \in I)$ teljesül, fennáll az

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \qquad (x \in \mathbb{R}:\ ax+b \in I,\ c \in \mathbb{R})$$

egyenlőség.

Példa. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+10x+29}\,dx$ $(x \in \mathbb{R})$ kiszámítása:

$$\int \frac{1}{x^2+10x+29}\,dx = \int \frac{1}{(x+5)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{(x+5)^2}{4}+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x+5}{2}\right) + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. $S(e^x)$ alakú integrandus (az exp függvény racionális kifejezéseinek integrálja):

Legyen $S \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racionális függvény, $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy

$$e^x \in \mathcal{D}_S \qquad (x \in I).$$

Ekkor

$$\int S(e^x)\,dx = \int \frac{S(t)}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} \qquad (x \in I).$$

Példa. $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx$ $(x \in (-\infty, \ln(2)))$ kiszámítása:

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx = \int \frac{4}{e^{2\ln(t)}-4}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{4}{t(t-2)(t+2)}\,dt\Big|_{t=e^x}.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\frac{4}{t(t-2)(t+2)} &\equiv \frac{(t+2)-(t-2)}{t(t-2)(t+2)} = \frac{1}{t(t-2)} - \frac{1}{t(t+2)} \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2}\left\{\frac{t-(t-2)}{t(t-2)} - \frac{(t+2)-t}{t(t+2)}\right\} \equiv \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+2}\right\} \equiv \\
&\equiv \frac{1/2}{t-2} - \frac{1}{t} + \frac{1/2}{t+2},
\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx &= \left[\ln(\sqrt{2-t}) - \ln(t) + \ln(\sqrt{t+2})\right]_{t=e^x} = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{4-t^2}}{t}\right)\right]_{t=e^x} = \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{4-e^{2x}}}{e^x}\right) + c \quad (x \in (-\infty, \ln(2)).
\end{aligned}$$

Példa. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$ $(x \in \mathbb{R})$ kiszámítása. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx &= \int \frac{t^3}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{t^2}{t+2}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{t^2-4+4}{t+2}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \int \left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt\Big|_{t=e^x} = \left[\frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2)\right]_{t=e^x} = \\
&= \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + c.
\end{aligned}$$

3. $\sin^p(x) \cdot \cos^q(x)$ alakú integrandusok, ahol $p, q \in \mathbb{N}_0$.

(a) $\sin^{2n+1}(x) \cdot \cos^m(x)$ alakú integrandus.
Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin(x) \cdot \sin^{2n}(x) = \sin(x) \cdot (1 - \cos^2(x))^n,$$

ezért

$$\sin^{2n+1}(x) \cdot \cos^m(x) = \sin(x) \cdot \sin^{2n}(x) = \sin(x) \cdot (1 - \cos^2(x))^n \cdot \cos^m(x).$$

Így az integrandus olyan $(n+1)$-tagú összeg, amelynek (legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál) minden egyes tagja $f^n \cdot f'$ alakú.

Példa. $\int \sin^5(x) \cdot \cos^2(x)\, dx$ $(x \in \mathbb{R})$ kiszámítása. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(x) \cdot \cos^2(x)\, dx &= \int \sin(x) \cdot (1 - \cos^2(x))^2 \cdot \cos^2(x)\, dx = \\
&= \int \left\{\sin(x) \cdot \cos^2(x) - 2\sin(x) \cdot \cos^4(x) + \sin(x) \cdot \cos^6(x)\right\} dx = \\
&= -\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^7(x)}{7} + c.
\end{aligned}$$

(b) $\sin^m(x) \cdot \cos^{2n+1}(x)$ alakú integrandus.
Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^{2n+1}(x) = \cos(x) \cdot \cos^{2n}(x) = \cos(x) \cdot (1 - \sin^2(x))^n,$$

ezért

$$\sin^m(x) \cdot \cos^{2n+1}(x) = \cos(x) \cdot (1 - \sin^2(x))^n \cdot \sin^m(x).$$

Így az integrandus olyan $(n+1)$-tagú összeg, amelynek (legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál) minden egyes tagja $f^n \cdot f'$ alakú.

Példa. $\int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x)\, dx$ $(x \in \mathbb{R})$ kiszámítása. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) \cdot \cos^3(x) &= \sin^2(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos^2(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)(1 - \sin^2(x)) = \\
&= \sin^2(x) \cdot \cos(x) - \sin^4(x) \cdot \cos(x).
\end{aligned}$$

Így

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)\,dx = \left[\frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5}\right]_{x\in\mathbb{R}}.$$

(c) $\sin^{2n}(x)\cdot\cos^{2m}(x)$ alakú integrandus.

Mivel tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$2\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(2x), \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

ezért az integrandus átalakítására a kétszeres szögfüggvényekre tanult azonosságokat érdemes felhasználni.

Példa. $\int \sin^2(x)\cdot\cos^4(x)\,dx$ $(x\in\mathbb{R})$ kiszámítása. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cdot\cos^4(x) &= \sin^2(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\cos^2(x) = (\sin(x)\cdot\cos(x))^2\cdot\cos^2(x) = \\
&= \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{\sin^2(2x)\cdot(1+\cos(2x))}{8} = \\
&= \frac{\sin^2(2x)+\sin^2(2x)\cdot\cos(2x)}{8} = \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos(4x)}{2} + \sin^2(2x)\cdot\cos(2x)\right).
\end{aligned}$$

Így

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8} + \frac{\sin^3(2x)}{6}\right) + c.$$

4. $R(\sin(x),\cos(x))$ alakú integrandus (trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálja).

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $k.l \in \{0, \ldots, n\}$, továbbá $a_{kl} \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$P(x, y) := \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} x^k y^l \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényt **kétváltozós polinom**nak nevezzük. Ha $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós polinomok,

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; Q(x, y) = 0\right\},$$

akkor az

$$R(x, y) := \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash H)$$

leképezés neve: **kétváltozós racionális függvény**.

Példa. Az alábbi leképezések min kétváltozós racionális függvények:

1. $R(u, v) := \dfrac{1-u}{1+v} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq -1);$
2. $R(u, v) := \dfrac{2}{2+\frac{u}{v}} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq -2v);$
3. $R(u, v) := \dfrac{1}{u} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0);$
4. $R(u, v) := 1 \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2);$
5. $R(u, v) := \dfrac{1}{v} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq 0);$
6. $R(u, v) := \dfrac{1}{1+v^2} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0).$

Adott R kétváltozós racionális függvény esetén az

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx$$

integrált szeretnénk kiszámítani. Ha

$$t := \mathrm{tg}(x/2) \qquad (x \in I \subset (-\pi, \pi)),$$

akkor

$$x = 2\,\mathrm{arc\,tg}(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

továbbá

$$\sin(x) = \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

ill.

$$\cos(x) = \frac{\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

következtében

$$\int R(\sin(x),\cos(x))\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)} \qquad (x\in I).$$

Példa. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ $(x\in(0,\pi))$ kiszámítása:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx \;=\; \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)} = \int \frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)} = \ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c.$$

Hasonlítsuk össze az iménti eredményt a Házi feladat/7. eredményével!

Példa. $\displaystyle\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx$ $(x\in(0,\pi))$ kiszámítása:

1. módszer. A

$$t := \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

helyettesítés felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $x\in(0,\pi)$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)} = \int\left(1-\frac{2t}{t^2+1}\right)dt\Big|_{t=\mathrm{tg}(x/2)} = \\ &= \left[t-\ln(t^2+1)\right]_{t=\mathrm{tg}(x/2)} = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\ln\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+c.\end{aligned}$$

2. módszer. Mivel tetszőleges $x\in(0,\pi)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)} &= \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\cdot\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)} = \frac{(1-\sin(x))(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} = \\ &= \frac{1-\cos(x)-\sin(x)+\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)},\end{aligned}$$

ezért

$$\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx = -\mathrm{ctg}(x)-\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\frac{1}{\sin(x)}+\ln(\sin(x))+c.$$

3. módszer. Mivel tetszőleges $x\in(0,\pi)$ esetén

$$\frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1+\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)},$$

így
$$\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c.$$

Megjegyezzük, hogy a háromféle módszerrel kapott eredmény azonos. Legyen ui.
$$f_1(x) := \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) \qquad (x \in (0,\pi)),$$
$$f_2(x) := -\operatorname{ctg}(x) - \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\sin(x)} + \ln(\sin(x)) \qquad (x \in (0,\pi)),$$
ill.
$$f_3(x) := \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad (x \in (0,\pi)).$$
Ekkor a
$$\varphi := f_1 - f_2 \qquad \text{és a} \qquad \psi := f_2 - f_3$$
függvényekre tetszőleges $x \in (0,\pi)$ esetén
$$\varphi'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = \ldots = 0 = \ldots = f_2'(x) - f_3'(x)$$
és
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots = 0 = \ldots \psi\left(\frac{\pi}{2}\right),$$
ezért
$$\varphi = 0 = \psi, \qquad \text{azaz} \qquad f_1 = f_2 = f_3.$$

Megjegyzések.

(a) Ha minden $(x,y) \in \mathcal{D}_R$ esetén
$$(-x,-y) \in \mathcal{D}_R \qquad \text{és} \qquad R(-x,-y) = R(x,y),$$
akkor a
$$t := \operatorname{tg}(x) \qquad \text{vagy a} \qquad t := \operatorname{ctg}(x)$$
helyettesítés is célhoz vezet.

Példa. Tetszőleges $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén
$$t := \operatorname{tg}(x) \qquad \rightsquigarrow \qquad x = \operatorname{arc\,tg}(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

így

$$\int \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{1+\cos^2(\operatorname{arc\,tg}(t))}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg}(t))}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} =$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2+1}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(t/\sqrt{2})^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{t=\operatorname{tg}(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{2}}\right)+c \quad (c\in\mathbb{R}).$$

Példa. $\int \frac{2}{2+2\operatorname{tg}(x)}\,dx$ $(x\in(0,\pi))$ kiszámítása. Tetszőleges $x\in(0,\pi))$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{2+2\operatorname{tg}(x)}\,dx &= \int \frac{2}{2+2t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \int \frac{1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \\
&= \int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}\right)dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \\
&= \int\left(\frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)}\right)dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \\
&= \int\left(\frac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(t+1)(t^2+1)}\right)dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \\
&= \int\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1-t}{t^2+1}\right)dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x)} = \\
&= \left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\operatorname{arc\,tg}(t)\right]_{t=\operatorname{tg}(x)} = \\
&= \ln(\operatorname{tg}(x)+1)-\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2(x)+1)+x+c
\end{aligned}$$

(b) Ha minden $(x,y)\in\mathcal{D}_R$ esetén

$$(x,-y)\in\mathcal{D}_R \qquad \text{és} \qquad R(x,-y)=-R(x,y),$$

akkor a

$$t := \sin(x)$$

helyettesítés is célhoz vezet.

Példa. Tetszőleges $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$t := \sin(x) \quad \rightsquigarrow \quad x = \arcsin(t) \quad \rightsquigarrow \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

így

$$\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) + \sin^3(x) - 1}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t^2+t^3-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\Big|_{t=\sin(x)} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2 \cdot (t-1)}\,dt\Big|_{t=\sin(x)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1}\right)dt\Big|_{t=\sin(x)} = \ldots$$

(c) Ha minden $(x, y) \in \mathcal{D}_R$ esetén

$$(-x, y) \in \mathcal{D}_R \qquad \text{és} \qquad R(-x, y) = -R(x, y),$$

akkor a

$$t := \cos(x)$$

helyettesítés is célhoz vezet.

Példa. Tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$t := \cos(x) \quad \rightsquigarrow \quad x = \arccos(t) \quad \rightsquigarrow \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

így

$$\int \frac{\sin(x)}{2\sin^2(x) + 3\cos(x)}\,dx = \ldots$$

5. R(sh(x), ch(x)) alakú integrandus (hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integrálja):
Ha

$$t := e^x \qquad (x \in I \subset \mathbb{R} : \ (\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x)) \in \mathcal{D}_R \quad (x \in I)),$$

akkor $x = \ln(t)$ és

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

így

$$\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\,dx = \int R\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} \qquad (x\in I).$$

Megjegyzések. Vegyük észre, hogy mivel a hiperbolikus függvények az exponenciális függvényből „épülnek fel”, ezért az integrandus tulajdonképpen $S(e^x)$ alakú, ahol $S\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ racionális függvény.

Példa.

- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\,dx = \int \frac{2}{e^x-e^{-x}}\,dx = \ldots + c \ (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R});$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,dx = \int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \ldots + c \ (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R});$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)+\mathrm{ch}^2(x)}\,dx = \ldots + c \ (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

6. $R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)$ $(a,b\in\mathbb{R}:\ a\neq 0)$ alakú integrandus :

Ha

$$t := \sqrt[n]{ax+b}, \qquad \text{akkor} \qquad x=\frac{1}{a}(t^n-b),$$

így

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\cdot\frac{nt^{n-1}}{a}\,dt\Big|_{t=\sqrt[n]{ax+b}}.$$

Példa. $\displaystyle\int x\sqrt{5x+3}\,dx$ $(x\in(-3/5,+\infty))$ kiszámítása:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5x+3}\,dx &= \int\frac{t^2-3}{5}\cdot t\cdot\frac{2t}{5}\,dt\Big|_{t=\sqrt{5x+3}} = \ldots = \\ &= \frac{2}{25}\left(\frac{\sqrt{(5x+3)^5}}{5}-\sqrt{(5x+3)^3}\right)+c \quad (x\in(-3/5,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Példa. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $(x\in(0,+\infty))$ kiszámítása:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int\frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \int\frac{2t+2-2}{1+t}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \\ &= \int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = [2t-2\ln(t+1)]_{t=\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+c\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy így is eljárhattunk volna:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}\,dx - 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

7. $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}:\ ad \neq bc)$ alakú integrandus :

Ha

$$t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad \text{akkor} \qquad x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a},$$

így

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\cdot \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}\,dt\Bigg|_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}.$$

Példa.

$$t := \sqrt{x} \quad \rightsquigarrow \quad x = t^2 \quad \rightsquigarrow \quad dx = 2t\,dt,$$

így

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t}{1+t}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \int \frac{2t+2-2}{1+t}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = [2t - 2\ln(1+t)]_{t=\sqrt{x}} + c$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c \qquad (x \in (0,+\infty),\ c \in \mathbb{R})$$

Példa.

$$t := \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{1+t^3}{1-t^3} \quad \rightsquigarrow \quad dx = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,dt$$

így

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int \left(\frac{1-t^3}{1+t^3}\right)^2 \cdot t \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,dt\Bigg|_{t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} = \int \frac{6t^3}{(1+t^3)^2}\,dt\Bigg|_{t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}.$$

Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{6t^3}{(1+t^3)^2}\,dt &= 2\cdot\int \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\cdot t\,dt = -\frac{2}{1+t^3}+\int\frac{2}{1+t^3}\,dt = \\ &= -\frac{2}{1+t^3}+\int\frac{2}{(t+1)(t^2-t+1)}\,dt.\end{aligned}$$

Alkalmazva a parciális törtekre való bontás módszerét

$$\begin{aligned}\frac{2}{(t+1)(t^2-t+1)} &= \frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \\ &= \frac{(A+B)t^2+(B+C-A)t+A+C}{(t+1)(t^2-t+1)},\end{aligned}$$

ezért

$$A+B, \qquad B+C-A=0, \qquad A+C=2,$$

azaz

$$A=\frac{2}{3}, \qquad B=-\frac{2}{3}, \qquad C=\frac{4}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{(t+1)(t^2-t+1)}\,dt &= \frac{1}{3}\cdot\left[2\ln(t+1)-\int\frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left[2\ln(t+1)-\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\int\frac{3}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left[2\ln(t+1)-\ln(t^2-t+1)+4\int\frac{1}{\left(\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1}\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left[\ln\left(\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\right)+\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right].\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = -\frac{2}{1+\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)^3} + \frac{1}{3}\cdot\left\{\ln\left(\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right) + \right.$$

$$\left. +\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right\} + c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$$

Példa.

$$\int\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\,dx = \int t\cdot\frac{2t(2)}{(t^2-1)^2}\,dx = \int\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}} = \ldots + c \ (x>3,\ c\in\mathbb{R}).$$

Példa.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int t\cdot\frac{2t(2)}{(-t^2-1)^2}\,dx = \int\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \ldots + c \ (|x|<1,\ c\in\mathbb{R}).$$

8. $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$ alakú integrandus :

$$t := \arcsin(x/a) \quad \rightsquigarrow \quad x = a\sin(t) \quad \rightsquigarrow \quad dx = a\cos(t)\,dt,$$

Példa.

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \int \sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} = \int\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} =$$

$$= \int\frac{1-\cos(2t)}{2}\cdot\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} = \frac{1}{4}\cdot\int(1-\cos^2(2t))\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\int\left(1-\frac{1+\cos(4t)}{2}\right)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left[t-\frac{\sin(4t)}{4}\right]_{t=\arcsin(x)} = \frac{1}{8}\cdot\left[\arcsin(x)-\frac{\sin(4\arcsin(x))}{4}\right] + c \quad (x\in(-1,1),\ c\in(-1,1)).$$

Mivel bármely $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\begin{aligned}\sin(4t) &= 2\sin(2t)\cos(2t) = 4\sin(t)\cos(t)[\cos^2(t)-\sin^2(t)] = \\ &= 4\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\,\left[1-2\sin^2(t)\right],\end{aligned}$$

ezért

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin(x)-(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}{8}+c \qquad (x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}).$$

9. $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ alakú integrandus :

$$t := \operatorname{ar\,sh}(x/a) \quad \rightsquigarrow \quad x = a\,\operatorname{sh}(t) \quad \rightsquigarrow \quad dx = a\,\operatorname{ch}(t)\,dt,$$

Példa.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)}\cdot\operatorname{ch}(t)\,dt\Big|_{t=\operatorname{ar\,sh}(x)} = \int\operatorname{ch}^2(t)\,dt\Big|_{t=\operatorname{ar\,sh}(x)} = \\ &= \int\frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{ar\,sh}(x)} = \frac{1}{2}\cdot\left[t+\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_{t=\operatorname{ar\,sh}(x)} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ar\,sh}(x)+\frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{ar\,sh}(x))}{2}\right)+c.\end{aligned}$$

Mivel bármely

$$\text{NB}: \qquad \operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\alpha)} \qquad (\alpha\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{\operatorname{ar\,sh}(x)+x\sqrt{1+x^2}}{2}+c \qquad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$$

10. $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$ alakú integrandus :

$$t := \operatorname{ar\,ch}(x/a) \quad \rightsquigarrow \quad x = a\,\operatorname{ch}(t) \quad \rightsquigarrow \quad dx = a\,\operatorname{sh}(t)\,dt,$$

Példa. coming soon

11. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ $(a,b,c\in\mathbb{R}:\ a\neq 0)$ alakú integrandus :

Ha

- $a > 0$, akkor a
$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: \sqrt{a}x + t \qquad \Big/ \text{vagy} \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} =: \sqrt{a}x - t \Big/$$
helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ui.
$$ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x+t)^2 \qquad \big/\text{vagy} \qquad ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x-t)^2 \big/,$$
ahonnan
$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} =: \mu(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-2\sqrt{a}t^2+2bt-2c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2} =: \nu(t)$$
következik. Így, ha
$$\varphi(x) :\equiv \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x,$$
akkor
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\mu(t), t+\sqrt{a}\mu(t)\right) \nu(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)};$$
- $c > 0$, akkor a
$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: tx + \sqrt{c} \qquad \Big/ \text{vagy} \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} =: tx - \sqrt{c} \Big/$$
helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ui.
$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c \qquad \big/\text{vagy} \qquad ax^2+bx+c = 2t^2 - 2\sqrt{c}xt + c\big/,$$
ahonnan
$$x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2} =: \mu(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2} =: \nu(t)$$
következik. Így, ha
$$\varphi(x) :\equiv \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x},$$
akkor
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\mu(t), \sqrt{c}+t\mu(t)\right) \nu(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)};$$
- valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, akkor a
$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: t(x-\alpha)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ui. alkalmas $\beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = t^2(x-\alpha)^2 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ahonnan

$$x = \frac{a\beta - t^2\alpha}{a-t^2} =: \mu(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2at(\beta-\alpha)}{(a-t^2)^2} =: \nu(t)$$

következik. Így, ha

$$\varphi(x) :\equiv \frac{\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\alpha},$$

akkor

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \int R\left(\mu(t), t(\mu(t)-\alpha)\right)\nu(t)\, dt\Big|_{t=\varphi(x)}$$

(**Euler-féle helyettesítés**ek).

Példa. Ha $I := (0, +\infty)$ és

$$\sqrt{x^2+2x+4} =: x-t, \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{t^2-4}{2(t+1)},$$

akkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+4}{t(1+t)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{4}{t} - \frac{3}{1+t} - \frac{3}{(1+t)^2}\right) dt = \\
&= 2\ln(-t) - \frac{3}{2}\ln(-1-t) + \frac{3}{2(1+t)} + c = \\
&= 2\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x) - \frac{3}{2}\ln(-1+\sqrt{x^2+2x+4}-x) + \\
&\quad + \frac{3}{2(1+x-\sqrt{x^2+2x+4})} + c \quad (x\in I,\ c\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Példa. Ha $I := (2, 5)$ és

$$\sqrt{7x-10-x^2} =: t(x-5), \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{5t^2+2}{t^2+1},$$

akkor

$$\int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{5t^2+2}{t^2}\,dt = -\frac{10}{9}t + \frac{4}{9t} + c\Big|_{t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-5}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{7x-10-x^2}}{45-9x} + \frac{4x-20}{9\sqrt{7x-10-x^2}} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa. Ha $I := (-1-\sqrt{2}, 0)$ és

$$\sqrt{1-2x-x^2} =: tx - 1,$$

akkor

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(t+1)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\ln(-t) + \ln(1-t) - 2\,\mathrm{arc\,tg}(t) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

Spec. esetek:

(a) $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú integrandus :

(b) $\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú integrandus :

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $p_n : I \to \mathbb{R}$ n-edfokú polinom $(n \in \mathbb{N})$. Ha

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (x \in I),$$

akkor van olyan $q_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-edfokú polinom és $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad (x \in I).$$

A q_{n-1} polinom együtthatóit és λ-t mindkét oldal differenciálása és a megfelelő együtthatók összehasonlítása után kaphatjuk meg.

Példa. Ha $I := (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyekkel

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2} + \int \frac{d}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx,$$

akkor differenciálással azt kapjuk, hogy

$$x^2 = (2ax+b)(1+2x-x^2) + (ax^2+bx+c)(1-x) + d \qquad (x \in I),$$

ahonnan

$$a = -\frac{1}{3}, \qquad b = -\frac{5}{6}, \qquad c = -\frac{19}{6}, \qquad d = 4.$$

Így

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) + \sqrt{1+2x-x^2} + 4\int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) + \sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + c\end{aligned}$$

$$(x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és

1. $0 \neq a, b, c \in \mathbb{R}$: $b^2 - 4ac < 0$, akkor az

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

integrál kiszámítása a fentihez hason rekurzióra vezet, ahol érdemes felhasználni a nevezőbeli zárójelben lévő szám esetén a teljes négyzetté való alakítást.

Példa.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{[(x+2)^2+1]^2}\,dx \overset{u:=x+2}{=} \int \frac{1}{[u^2+1]^2}\,du.$$

2. $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$: $a, b, c, A \neq 0$: $b^2 - 4ac < 0$, akkor a – múlt óraihoz hasonlóan a következőképpen érdemes eljárni:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{Ax}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx + \int \frac{B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

és

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \\ &= \frac{A}{2a}\left\{\int \frac{(ax^2+bx+c)'}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx - \int \frac{b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx\right\}.\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n \cdot (n+1)} \qquad (x \in (0,2))$$

összeget!

Útm.

1. lépés. Mivel $\lim \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right) = 1$, ezért a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara 1.

2. lépés. Ha

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \qquad (x \in (0,2)),$$

akkor $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetzsőleges $x \in (0,2)$ esetén

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}.$$

Következésképpen

$$f' \in \int f''(x)\,dx = \ln(x) + c \qquad (x \in (0,2),\ c \in \mathbb{R}).$$

Az $x := 1$ helyettesítéssel $0 = f'(1) = 0 + c = c$, azaz $c = 0$ adódik. Mivel

$$f \in \int f'(x)\,dx = x\ln(x) - x + d \qquad (x \in (0,2),\ d \in \mathbb{R}),$$

ezért az $x := 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $0 = f(1) = 0 - 1 + d$, azaz $d = 1$. Következésképpen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} = x\ln(x) - x \qquad (x \in (0,2)). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A binomiális tétel következményeként azt kapjuk, hogy hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

ahol

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & (k=0), \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \dfrac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!} & (k\in\{1,\ldots,n\}) \end{cases}$$

és $0^0 := 1$.

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. vezessük be a következő jelölést:

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & (n=0), \\ \dfrac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)}{n!} & (n\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

Számítsuk ki a

$$\sum_{n=0}\left(\binom{\alpha}{n}x^n\right) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugarát, majd mutassuk meg, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén teljesül az

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \qquad (x\in(-1,1))$$

egyenlőség (**binomiális sorfejtés**)!

Útm.

1. lépés. Ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$: $n > \alpha$ esetén $\binom{\alpha}{n} = 0$, így a hatványsor nem más mint egy polinom. Következésképpen $R = +\infty$.

2. lépés. Ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot\left|\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)\right|}{k!\cdot\left|\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|\alpha-k|} = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = |-1| = 1,$$

így $R = 1$.

3. lépés. Megmutatjuk, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}$, ill.

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in (-1,1)) \qquad \text{és} \qquad g(x) := (1+x)^\alpha \quad (x \in (-1,1)),$$

továbbá $\varphi \in \{f, g\}$, akkor

$$(1+x) \cdot \varphi'(x) = \alpha \cdot \varphi(x) \qquad (x \in (-1,1)).$$

Valóban

- tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$g'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1},$$
ezért
$$(1+x) \cdot g'(x) = (1+x) \cdot \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} = \alpha \cdot (1+x)^\alpha = \alpha \cdot g(x) \qquad (x \in (-1,1)).$$

- bármely $x \in (-1,1)$ számra
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n,$$
így

$$(1+x) \cdot f'(x) = f'(x) + x \cdot f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} =$$

$$= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} =$$

$$= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n = \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} (n-1) + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n =$$

$$= \alpha \binom{\alpha}{0} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha \cdot f(x).$$

4. lépés. Mivel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{\frac{\alpha f(x)g(x)}{1+x} - \frac{\alpha f(x)g(x)}{1+x}}{g^2(x)} = 0 \qquad (x \in (-1,1)),$$

így $\frac{f}{g}$ állandófüggvény. Mivel

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1,$$

ezért $f = g$. ■

Feladat. Számítsuk ki a $\sqrt[3]{9}$ egy közelítő értékét!

Útm. Világos, hogy

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{9}{8}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{8}} = 2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}}.$$

Alkalmazva a binomiális sorfejtést azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in (-1,1)$, azaz $0 < 1+x < 2$ esetén

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n,$$

így

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{9} &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} \left(\frac{1}{8}\right)^n \approx \\
&\approx 2 \cdot \left\{ \binom{1/3}{0} \cdot 1 + \binom{1/3}{1} \cdot \frac{1}{8} + \binom{1/3}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \binom{1/3}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \right\} = \\
&= 2 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1/3 \cdot (-2/3)}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1/3 \cdot (-2/3) \cdot (-5/3)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \right\} = \\
&= \frac{6 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + (-2/3) \cdot 8 + 1/3 \cdot (-2/3) \cdot (-5/3)}{3 \cdot 8^3}.
\end{aligned}$$

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(2n)!! := \prod_{k=1}^{n}(2k) = (2n)(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2, \qquad (2n-1)!! := \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1.$$

(ejtsd: **szemifaktoriális**)).

Példa. Világos, hogy tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

- $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$;
- $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\cdot(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$;
- $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot x^n$;
- $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot(-x)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^n$;
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}$;
- $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} = (1+x)^{-1/4} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/4}{n}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n-3)!!}{4^n\cdot n!}\cdot x^n$;
- $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^{4n}$

Feladat. Írjuk fel az arcsin függvényt 0-körüli hatványsor összegeként a $(-1,1)$ intervallumon!

Útm. Mivel

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2k)!!}x^{2n} \qquad (x \in (-1,1)),$$

és

$$\arcsin \in \int \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2k)!!}\cdot x^{2n}\right)\,dx = x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c \qquad (x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}),$$

így az $x := 0$ helyettesítéssel $0 = \arcsin(0) = c$, azaz $c = 0$ adódik, ahonnan

$$\arcsin(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x\in(-1,1))$$

következik. ■

Megjegyezzük (vö. korábban), hogy innen tetszőleges $k \in \mathbb{N}_0$ index esetén

$$\arcsin^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad \arcsin^{(2k+1)}(0) = ((2k-1)!!)^2$$

következik.

Feladat. Írjuk fel az

$$f(x) := \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \qquad (x\in(-1,1))$$

függvényt 0-körüli hatványsor összegeként!

Útm. A fentiek következtében tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^{n+1} = \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left\{\binom{-1/2}{n}-\binom{-1/2}{n-1}\right\} = \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(-\frac{1}{2}-n+2)}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1-n\right) = \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-2n}\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^n. \quad ■
\end{aligned}$$

Házi feladatok.

1. Fejtsük 0-körüli hatványsorba a következő függvényeket vagy alkalmas leszűkítésüket!

   (a) $f(x) := \ln(1-x^2) \quad (x \in (-1,1))$;

   (b) $f(x) := \ln(x^2-5x+6) \quad (x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty))$.

2. Állítsuk elő az alábbi f függvényeket 0-körüli hatványsor összegfüggvényeként/

   (a) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-1,1))$; (b) $f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-1,1))$;

   (c) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (x \in (-1,1))$; (f) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in (-1,1))$;

   (e) $f(x) := \arccos(x) \quad (x \in (-1,1))$; (f) $f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x) \quad (x \in (-1,1))$;

   (g) $f(x) := \operatorname{arc\,ctg} \quad (x \in (-1,1))$; (h) $f(x) := \operatorname{ar\,sh}(x) \quad (x \in (-1,1))$;

   (i) $f(x) := \operatorname{ar\,th}(x) \quad (x \in (-1,1))$.

Útm.

1. (a) Mivel

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} -2x^{2n+2} \qquad (x \in (-1,1))$$

és

$$f \in \int \left(-\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+2}\right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}),$$

ezért az $x := 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $0 = f(0) = -0 + c$, azaz $c = 0$. Következésképen

$$\ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Megjegyezzük, hogy ugyanerre ar eredményre jutunk, ha a

$$g(x) := \ln(1-x) \qquad (x \in (-1,1))$$

függvénynt írjuk fel 0-körüli hatványsor összegeként, hiszen

$$f(x) = g(x^2) \qquad (x \in (-1,1)).$$

(b) Mivel bármely $|x| < \min\{2,3\}$, azaz $x \in (-2,2)$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)+(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} = \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

és

$$f \in \int\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in (-2,2),\ c \in \mathbb{R}),$$

ezért az $x := 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $\ln(6) = f(0) = 0 + c$, azaz $c = \ln(6)$. Következésképpen

$$\ln(x^2-5x+6) = \ln(6) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x \in (-2,2)).$$

2. (a) Tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

(b) Bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$

(c) Minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$

(d) Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(x^2)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}.$$

(e) Mivel

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \qquad (x \in (-1,1)),$$

és

$$\arccos \in \int\left(-1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)dx = -x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c \qquad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}),$$

így az $x := 0$ helyettesítéssel $\frac{\pi}{2} = \arccos(0) = c$, azaz $c = \frac{\pi}{2}$ adódik, ahonnan

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1))$$

következik.

(f) coming soon

(g) coming soon

(h) coming soon

(i) coming soon

10. gyakorlat (2025. november 17-18.)

Szükséges ismeretek.

- Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalens átfogalmazását!
- Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?
- Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?
- Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?
- Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény értékeinek megváltoztatását illetően?
- Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?
- Hogyan szól az integrálszámítás első középértéktétele?
- Fogalmazza meg a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget!

Emlékeztető. Tegyük fel, hogy $-\infty < a < b < +\infty$, $\tau := \{x_0, \ldots, x_n\}$ egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak: $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$, azaz $n \in \mathbb{N}_0$ és

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

A leghosszabb részintervallom hozzát, azaz a

$$\|\tau\| := \max\{x_k - x_{k-1} \in \mathbb{R} : \; k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

számot a τ **felosztás finomságá**nak neveztük. Azt mondtuk továbbá, hogy a

$$(\tau_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{F}([a, b])$$

sorozat az $[a, b]$ intervallum **minden határon túl finomodó felosztássorozata**, ha

$$\lim_{n\to\infty} (\|\tau_n\|) = 0.$$

Példák felosztásokra.

1. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje τ_n az $[a, b]$ intervallum **ekvidisztáns felosztás**át, azaz legyen

$$\tau_n := \left\{a + k \cdot \frac{b-a}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\}.$$

   Ekkor

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

   és így

$$\|\tau_n\| = \frac{b-a}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. Legyen $0 < a < b$. Az $[a, b]$ intervallum esetében, ha

$$\tau_n := \left\{a \cdot q^k \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{ahol} \qquad q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$$

   akkor

$$x_k - x_{k-1} = a \cdot q^k - a \cdot q^{k-1} = a \cdot q^{k-1}(q-1) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

   és így

$$\begin{aligned}\|\tau_n\| &= a \cdot q^{n-1} \cdot (q-1) = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1)/n} \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \\ &= a \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) \longrightarrow b \cdot 1 \cdot (1-1) = 0 \qquad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Emlékeztető. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau := \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$,

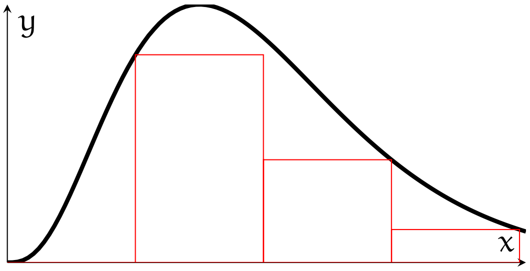
$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}, \qquad \text{ill.} \qquad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad\qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

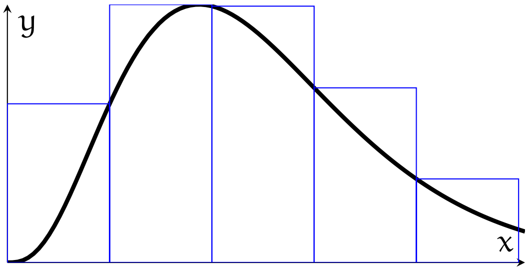
továbbá

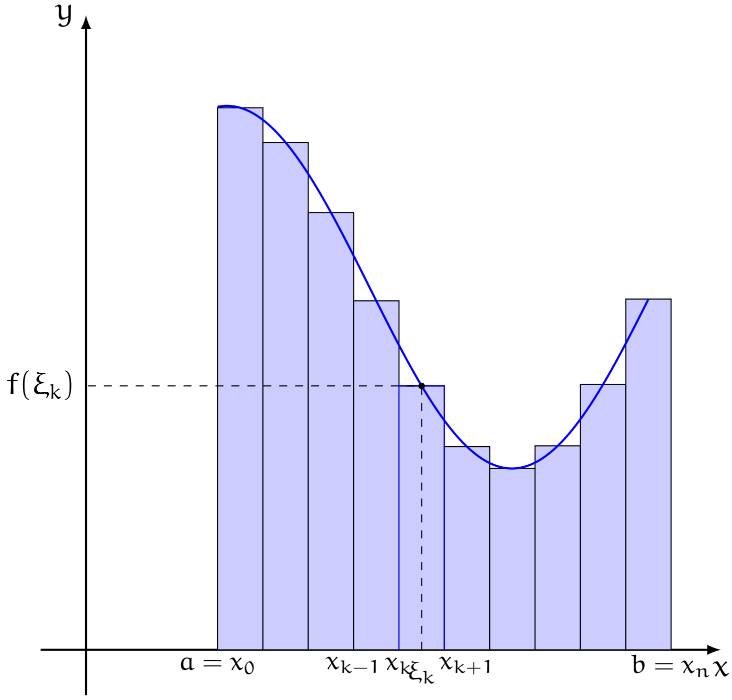
$$m_k := \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad \text{ill.} \qquad M_k := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

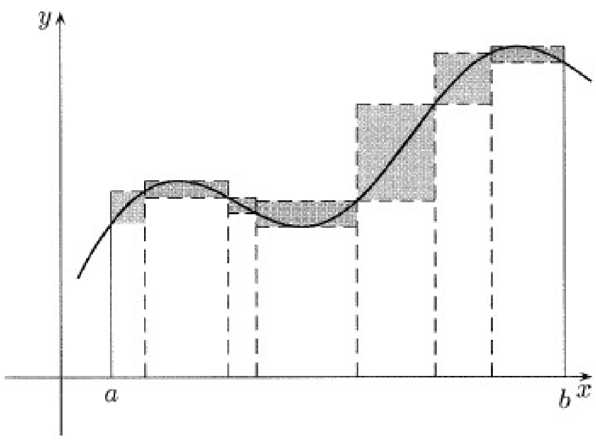
Ekkor az f függvény τ felosztáshoz tartozó

- **alsó összeg**ének neveztük az
$$s(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$
számot;
- **felső összeg**énekének neveztük az
$$S(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$
- **osszcillációs összeg**ének neveztük az
$$\omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$$
számot;
- **integrálközelítő összeg**ének neveztük a
$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$
számot;
- **Darboux-féle alsó integrál**jának neveztük az
$$I_*(f) := \sup\{s(f, \tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\}$$
számot;
- **Darboux-féle felső integrál**jának neveztük az
$$I^*(f) := \inf\{S(f, \tau) \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\}$$
számot.









Példa. Legyen $[a, b] := [-4, 3]$,

$$\tau := \{-4, -1, 0, 1, 3\} \qquad \text{és} \qquad \xi_1 := -3, \quad \xi_2 := -\frac{1}{2}, \quad \xi_3 := \frac{1}{2}, \quad \xi_4 := 2,$$

továbbá

$$f : [-4, 3] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 2 - x.$$

Ekkor

$$s(f, \tau) = 10, \qquad S(f, \tau) = 25, \qquad \omega(f, \tau) = 15, \qquad \sigma(f, \tau, \xi) = 19. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $[a, b] := [0, 5]$,

$$\tau_n := \left\{ \frac{5k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$f : [0, 5] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 3^x.$$

Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} s(f, \tau_n) \qquad \text{és a} \qquad \lim_{n\to\infty} S(f, \tau_n)$$

határértéket!

Útm. Mivel f szigorúan monoton növekedő, ezért tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f, \tau_n) = \sum_{k=1}^{n} 3^{(k-1)\cdot\frac{5}{n}} \cdot \frac{5}{n} = \frac{5}{n} \cdot 3^{-\frac{5}{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(3^{\frac{5}{n}}\right)^k = \frac{5}{n} \cdot \frac{3^5 - 1}{3^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{242}{\frac{3^{\frac{5}{n}}-1}{\frac{5}{n}}}.$$

A Bernoulli-l'Hôpital-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{3^x - 1}{x} \sim 3^x \cdot \ln(3) \longrightarrow \ln(3) \qquad (x \to 0),$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} s(f, \tau_n) = \frac{242}{\ln(3)}$$

következik. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \tau_n) = \frac{242}{\ln(3)}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$\tau_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} \in \mathfrak{F}([1,2]) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan felosztássorozat, ahol az osztópontok valamely mértani sorozat egymást követő tagjai, valamint

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) \qquad \text{és a} \qquad \lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n)$$

határértéket!

Útm. Mivel

$$x_k^{(n)} = \left(\sqrt[n]{2}\right)^k \qquad (k \in \{0,1,2\ldots,n\})$$

és f szigorúan monoton csökkenő, ezért tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f,\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{2^k}}\left(\sqrt[n]{2^k} - \sqrt[n]{2^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}},$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) = \ln(2)$$

következik, hiszen a Bernoulli-l'Hôpital-szabály értelmében

$$\frac{2^x - 1}{x} \sim 2^x \cdot \ln(2) \longrightarrow \ln(2) \qquad (x \to 0).$$

Hasonlóan látható be az is, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n) = \ln(2). \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$\tau_n := \left\{x_k^{(n)} := \frac{2k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\} \in \mathfrak{F}([0, 2]) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$\xi_k^{(n)} := \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2} \qquad (k \in \{1, 2 \ldots, n\}),$$

valamint

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2.$$

Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \tau_n, \xi^{(n)})$$

határértéket!

Útm. Mivel

$$\xi_k^{(n)} = \frac{\frac{2(k-1)}{n} + \frac{2k}{n}}{2} = \frac{k-1}{n} + \frac{k}{n} = \frac{2k-1}{n} \qquad (k \in \{1, 2 \ldots, n\}),$$

ezért

$$\begin{aligned}\sigma(f, \tau_n, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) = \\ &= \frac{2}{n^3} \cdot \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right),\end{aligned}$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \tau_n, \xi^{(n)}) = \frac{8}{3}$$

következik. ■

Emlékeztető. Valamely

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

korlátos függvény esetében azt mondtuk, hogy az f függvény **Riemann-integrálható** (jelben $f \in \mathfrak{R}[a, b]$), ha

$$I_*(f) = I^*(f),$$

és az

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^b f := \int_{[a,b]} f := I_*(f) = I^*(f)$$

számot az f függvény **Riemann-integrál**jának (vagy **határozott integrál**jának) neveztük.

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos. Ekkor

1. minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$, $\|\tau\| < \delta$ felosztásra
$$|s(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad |S(f, \tau) - I^*(f)| < \varepsilon;$$
2. az f függvényre $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ pontosan akkor teljesül, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$ felosztás, hogy
$$\omega(f, \tau) < \varepsilon.$$
3. bármely $I \in \mathbb{R}$ esetén egyenértékű az alábbi két állítás:

   (i) $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ és $\displaystyle\int_a^b f = I$,

   (ii) tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $\tau \in \mathfrak{F}([a, b])$ felosztásra igaz a
$$\|\tau\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$
   implikáció.

Példa. Tekintsük a **Dirichlet-függvény**nek valamely $[a, b]$ intervallumra való leszűkítését:
$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]), \\ 0 & (x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b]), \end{cases}$$
majd legyen $\tau =: \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$ tetszőleges, $\boldsymbol{\xi}_\tau := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ahol
$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$
Ekkor
$$\sigma(f, \tau, \boldsymbol{\xi}_\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a & (\xi_k \in \mathbb{Q}), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0 & (\xi_k \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$
Így a
$$0 < \varepsilon < \frac{b - a}{2}$$

választással látható, hogy $f \notin \mathfrak{R}[a,b]$. ◊

Tételek. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, majd vezessük be f szakadási helyeinek halmazára az alábbi jelölést:

$$\mathfrak{U}_f := \{x \in [a,b] : \; f \notin \mathfrak{C}[x]\}.$$

Jordan-kritérium. Ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, akkor az f szakadási helyeinek $\mathfrak{U}_f$ halmaza **Jordan szerint nullmértékű**, azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, ill. $I_k \subset \mathbb{R}$ intervallum $(k \in \{1, \ldots, n\}$, hogy

$$\mathfrak{U}_f \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n} |I_k| < \varepsilon.$$

Lebesgue-kritérium. Az $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ tartalmazás pontosan akkor igaz, ha az f szakadási helyeinek $\mathfrak{U}_f$ halmaza **Lebesgue szerint nullmértékű**, azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $I_n \subset \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallum-sorozat, hogy az f függvény szakadási helyeinek $\mathfrak{U}_f$ halmazára

$$\mathfrak{U}_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Tétel (Newton-Leibniz-tétel). Ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ és $F \in \int f$, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b.$$

Példák.

1. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_1^x \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt = 2 \cdot \int_1^x \frac{e^{\sqrt{t}}}{2 \cdot \sqrt{t}}\, dt = \left[2 \cdot e^{\sqrt{t}}\right]_1^x = 2 \cdot \left(e^{\sqrt{x}} - e\right).$$

2. Világos, hogy

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2x)}{2\cos^4(x)}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)}{2\cos^4(x)}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2\cos^2(x)}{2\cos^4(x)}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = [\operatorname{tg}(x)]_0^{\pi/4} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}(0) = 1 - 0 = 1.$$

3. Mivel

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2(x)}{4}}} = \frac{-2}{\sqrt{1-\left(\frac{\cos(x)}{2}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(x)}{2}\right) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right),$$

ezért

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2(x)}{4}}}\,dx = \left[2\arccos\left(\frac{\cos(x)}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{3}.$$

4. Mivel

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\frac{\sin^2(x)}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right),$$

ezért

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\frac{\sin^2(x)}{4}}}\,dx = \left[2\arcsin\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{3}.$$

5. Mivel

$$\frac{\sin(\ln(x))}{x} = \sin(\ln(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) \qquad (x \in [1, e]),$$

ezért

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = [-\cos(\ln(x))]_1^e = -\cos(1) + 1.$$

6. Mivel

$$\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1} \qquad \left(x \in [-2, \sqrt{3}-2]\right),$$

ezért

$$\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = [\operatorname{arc\,tg}(x+2)]_{-2}^{\sqrt{3}-2} = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arc\,tg}(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$

7. Mivel

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \qquad (x \in (2, +\infty)),$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx &= \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = [\ln(x-2) - \ln(x-1)]_3^4 = \\ &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_3^4 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right). \quad \Diamond\end{aligned}$$

Házi feladat. Igazoljuk, hogy π irracionális szám!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy alkalmas $a, b \in \mathbb{N}$ esetén $\pi^2 = a/b$, majd legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

teljesül (mivel $(a^n/n!)$ nullsorozat, van ilyen n). Ha valamely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$c_k := (-1)^k \binom{n}{n-k} = (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

és

$$f(x) := \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n = \frac{1}{n!} x^n \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n-1\} \cup \{2n+1, 2n+2, \ldots\}),$$

ill.

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} \cdot c_k \in \mathbb{Z} \qquad (k \in \{n, \ldots, 2n\}).$$

Mivel

$$f(1-x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ha most

$$g(x) := b^n \left\{ \pi^{2n} \cdot f(x) - \pi^{2n-2} \cdot f''(x) + \pi^{2n-4} \cdot f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^0 \cdot f^{(2n)}(x) \right\} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$g(0) \in \mathbb{Z} \qquad \text{és} \qquad g(1) \in \mathbb{Z},$$

továbbá

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(g'(x) \sin(\pi x) - \pi g(x) \cos(\pi x) \right) &\equiv \left(g''(x) + \pi^2 g(x) \right) \sin(\pi x) \equiv \\ &\equiv b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin(\pi x) \equiv \pi^2 a^n f(x) \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Így az

$$I := \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x)\, dx = g(1) + g(0)$$

számra egyrészt $I \in \mathbb{Z}$, másrészt pedig

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} \qquad (x \in (0,1))$$

következtében

$$0 < I < \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

ami nem lehetséges.

2. lépés. Ha $\pi \in \mathbb{Q}$ volna, akkor $\pi^2 = \pi \cdot \pi \in \mathbb{Q}$ lenne, ez azonban a fentiek miatt nem lehetséges. ■

Megjegyzés. További bizonyítások találhatók itt.

Emlékeztető.

1. Ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ és $c \in [a,b]$, ill. $d \in [a,c]$, akkor

$$\int_c^d f := \begin{cases} 0 & (d = c), \\ -\displaystyle\int_d^c f & (d \neq c). \end{cases}$$

2. Ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, akkor

   (a) bármely $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ esetén a $\varphi := f|_{[\alpha,\beta]}$ függvényre $\varphi \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$.

   (b) tetszőleges $c \in (a,b)$ mellett az

$$f_c(x) := f(x) \quad (x \in [a,c]) \qquad \text{és} \qquad f^c(x) := f(x) \quad (x \in [c,b])$$

   függvényre

$$f_c \in \mathfrak{R}[a,c] \qquad \text{és} \qquad f^c \in \mathfrak{R}[c,b],$$

   továbbá

$$\int_a^b f = \int_a^c f_c + \int_c^b f^c =: \int_a^c f + \int_c^b f.$$

3. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton vagy $f \in \mathfrak{C}[a,b]$, akkor $f \in \mathfrak{R}[a,b]$.

Emlékeztető.

1. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény,
$$\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b]).$$
Ha
$$\varphi_k := f|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \mathfrak{R}[x_{k-1}, x_k] \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$
akkor $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ és
$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k.$$

2. $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor
$$f + \lambda g \in \mathfrak{R}[a, b] \qquad \text{és} \qquad \int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$

3. Ha $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor $f \cdot g \in \mathfrak{R}[a, b]$.

4. Ha $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ és $f \le g$, akkor
$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

5. Ha $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor $|f| \in \mathfrak{R}[a, b]$ és
$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \le (b - a) \cdot \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a, b]\} =: (b - a) \cdot \|f\|_\infty.$$

6. Ha $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor
$$\max\{f, g\} \in \mathfrak{R}[a, b] \qquad \text{és} \qquad \min\{f, g\} \in \mathfrak{R}[a, b]$$

7. Ha $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ és alkalmas $c > 0$ esetén
$$|g(x)| \ge c \qquad (x \in [a, b]),$$
akkor
$$\frac{f}{g} \in \mathfrak{R}[a, b].$$

Emlékeztető. Ha

1. Ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ és valamilyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum esetén $\varphi : I \to [a,b]$, akkor az

$$F(x) := \int_a^{\varphi(x)} f \qquad (x \in I)$$

   függvényre a következők igazak:

   - ha $\varphi \in \mathfrak{C}$, akkor $F \in \mathfrak{C}$;
   - ha $\varphi \in \mathfrak{D}$ és $f \in \mathfrak{C}$, akkor $F \in \mathfrak{D}$ és

$$F'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \qquad (x \in I).$$

2. Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, az

$$\Omega := \{x \in [a,b] : \ f(x) \neq g(x)\}$$

   halmaz (legfeljebb) véges, akkor igazak az alábbi állítások.

   (a) $f \in \mathfrak{R}[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad g \in \mathfrak{R}[a,b]$.

   (b) Ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, akkor $\displaystyle\int_a^b g = \int_a^b f$.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy, ha $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, akkor a

$$\varphi(x) := \exp(F(x)) \int_0^x \exp(-F(y))G(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\varphi' = F' \cdot \varphi + G.$$

teljesül (vö. lineáris differenciálegyenlet)!

Útm. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \exp(F(x)) \cdot (F'(x)) \cdot \int_0^x \exp(-F(y))G(y)\,dy + \exp(F(x)) \cdot \{\exp(-F(x))G(x)\} = \\ &= F'(x) \cdot \varphi(x) + G(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$\int_0^x f(t) \cdot e^{a(t^2-x^2)}\, dt = \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Mely a esetén áll fenn az $f'(\pi/2) = 5$ egyenlőség?

Útm. Megszorozva mindkét oldalt az

$$e^{ax^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

számmal azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) := \int_0^x f(t) \cdot e^{at^2}\, dt = e^{ax^2} \cdot \sin(x) =: \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan egyenlőség következik. Mivel φ és ψ deriválható, ezért $\varphi' = \psi'$, azaz

$$f(x) \cdot e^{ax^2} = 2ax \cdot e^{ax^2} \cdot \sin(x) + e^{ax^2} \cdot \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f(x) = 2ax \cdot \sin(x) + \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

$$5 = f'(\pi/2) = -1 + 2a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 3. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$f(x) := x^2 \cdot \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{1+t^2}\right) dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg az $f'(1)$ értéket $f(1)$ függvényében!

Útm. Mivel az integrandus folytonos, ezért a

$$\varphi(x) := \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{1+t^2}\right) dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriválható, és deriváltjára

$$\varphi'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Következésképpen f is deriválható, és

$$f'(x) = 2x \cdot \varphi(x) + x^2 \cdot \varphi'(x) = 2x \cdot \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{1+t^2}\right) dt + x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f'(1) = 2 \cdot f(1) + 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot f(1) + 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt}{\sin(x^3)}$$

határértéket!

Útm. Vegyük észre, hogy

$$\lim_{x\to 0} \sin(x^3) = 0 = \lim_{x\to 0} x \cdot \int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt,$$

így próbáljuk meg alkalmazni a Bernoulli-l'Hôpital-szabályt. Mivel

$$\frac{x \cdot \int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt}{\sin(x^3)} \sim \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt + x \cdot \sin(x^4) \cdot 2x}{3x^2 \cdot \cos(x^3)} \sim \frac{2x \cdot \sin(x^4) + 4x \cdot \sin(x^4) + 8x^5 \cdot \cos(x^4)}{6x \cdot \cos(x^3) - 9x^4 \cdot \sin(x^3)}$$

és

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \sin(x^4) + 4x \cdot \sin(x^4) + 8x^5 \cdot \cos(x^4)}{6x \cdot \cos(x^3) - 9x^4 \cdot \sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4) + 2 \cdot \sin(x^4) + 4x^4 \cdot \cos(x^2)}{3 \cdot \cos(x^3) - \frac{9}{2} \cdot x^3 \cdot \sin(x^3)} = \frac{0}{3} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt + x \cdot \sin(x^4) \cdot 2x}{3x^2 \cdot \cos(x^3)} = 0,$$

és így a keresett határérték

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt}{\sin(x^3)} = 0. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{e^t + 2}\, dt$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Útm. Mivel f differenciálható és

$$f'(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{e^{x^2} + 2} \cdot 2x = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{e^{x^2} + 2} \cdot 2x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért f stacionárius helyei az

$$\{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

halmaz elemei. Mivel f'-nek (-1)-ben és 1-ben $(+-)$-jelváltása, a többi stacionárius pontban pedig $(-+)$-jelváltása van van, ezért (-1) és 1 lokális maximumhely, a többi stacionárius pont pedig lokális maximumhely. ■

Emlékeztető. (Parciális integrálás.) Legyen $f, g \in \mathfrak{D}[a, b]$: $f', g' \in \mathfrak{R}[a, b]$. Ekkor

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Példa. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_1^x \ln(t)\, dt = \int_1^x 1 \cdot \ln(t)\, dt = [t \cdot \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t}\, dt = x \cdot \ln(x) - [t]_1^x = x \cdot \ln(x) - (x - 1) = x \cdot \ln(x) - x + 1.$$

Példa. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_a^b xe^x\, dx = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x\, dx = be^b - ae^a - [e^x]_a^b = (b - 1)e^b - (a - 1)e^a.$$

Példa. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_a^b e^x \sin(x)\, dx = [e^x \sin(x)]_a^b - \int_a^b e^x \cos(x)\, dx = [e^x \sin(x)]_a^b - [e^x \cos(x)]_a^b - \int_a^b e^x \sin(x)\, dx,$$

ahonnan

$$\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = \frac{e^b[\sin(b)-\cos(b)] - e^a[\sin(a)-\cos(a)]}{2}.$$

Példa. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ olyan, hogy vagy $a, b > 0$ vagy $a, b < 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 \ln(|x|)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(|x|)\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{3}\ln(|x|)\right]_a^b - \left[\frac{x^3}{9}\right]_a^b = \\ &= \frac{b^2}{3}\ln(|b|) - \frac{a^2}{3}\ln(|a|) - \frac{b^3-a^3}{9}.\end{aligned}$$

Példa. Mivel

$$\text{NB}: \qquad 1+\cos(2x) = 2\cos^2(x) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$\int_0^\pi e^{-x}\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left\{\int_0^\pi e^{-x}\,dx + \int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx\right\}.$$

Mivel

$$\int_0^\pi e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\pi = -e^{-\pi}+1$$

és

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx &= [-e^{-x}\cos(2x)]_0^\pi - 2\int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx = -e^{-\pi}+1+2\,[e^{-x}\sin(2x)]_0^\pi - \\ &-4\cdot\int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx,\end{aligned}$$

így

$$\int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx = \frac{1-e^{-\pi}}{5},$$

továbbá

$$\int_0^\pi e^{-x}\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left\{-e^{-\pi}+1+\frac{1-e^{-\pi}}{5}\right\} = \frac{3(1-e^{-\pi})}{5}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\in\mathfrak{C}^2[a,b]$, akkor fennáll az

$$\int_a^b xf''(x)\,dx = bf'(b) - f(b) - (af'(a) - f(a))$$

egyenlőség!

Útm. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = [x f'(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,dx = bf'(b) - af'(a) - f(b) + f(a). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 x \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)\,dx$$

integrált!

Útm. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 x \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - [\operatorname{arc\,tg}(x)]_0^1\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}$$

integrál értékét!

Útm. Mivel

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} = -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin}{\cos} = -[\ln(\cos)]_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) + 0 = \ln(\sqrt{2})$$

és

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} = \int_0^1 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} = [x \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - 0 - \left[\ln(\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2}),$$

ezért

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén számítsuk ki az

$$\int_0^a x^2 \cos(x)\, dx$$

integrált!

Útm. Kétszer kell parciálisan integrálni:

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^2 \cos(x)\, dx &= \left[x^2 \sin(x)\right]_0^a - \int_0^a 2x \sin(x)\, dx = a^2 \sin(a) - 2\int_0^a x \sin(x)\, dx = \\
&= a^2 \sin(a) + 2\left[x \cos(x)\right]_0^a - 2\int_0^a \cos(x)\, dx = \\
&= a^2 \sin(a) + 2a\cos(a) - 2\left[\sin(x)\right]_0^a = (a^2 - 2)\sin(a) + 2a\cos(a). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk a következő állításokat!

1. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$
2. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$
3. Ha
$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$
akkor
$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \text{és} \qquad I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Útm.

1. A

$$B(m,n) := \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx \qquad (m,n\in\mathbb{N})$$

jelölést bevezetve, parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$B(m,n) = \left[\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n(1-x)^{n-1}(-1)\,dx = \frac{n}{m+1}B(m+1,n-1).$$

Ezért

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \frac{n}{m+1}B(m+1,n-1) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{m+n}B(m+n,0) = \\ &= \frac{n!}{(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n)}\int_0^1 x^{m+n}\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}. \end{aligned}$$

2. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \left[x(1-x^2)^n\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xn(1-x^2)^{n-1}(-2x)\,dx = 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx =$$

$$= 2n\left\{\left[\frac{x^3(1-x^2)^{n-1}}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1\frac{x^3}{3}(n-1)(1-x^2)^{n-2}(-2x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2n(2n-2)}{3}\int_0^1 x^4(1-x^2)^{n-2}\,dx =$$

$$= \frac{2n(2n-2)}{3}\left\{\left[\frac{x^5(1-x^2)^{n-2}}{5}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1\frac{x^5}{5}(n-2)(1-x^2)^{n-3}(-2x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3\cdot 5}\int_0^1 x^6(1-x^2)^{n-3}\,dx = \ldots = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 2}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\int_0^1 x^{2n}\,dx =$$

$$= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 2}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

3. $n=0$, ill. $n=1$ esetén

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1,$$

és ha $2\le n\in\mathbb{N}$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\cos^{n-2}(x)\,dx = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^{n-2}(x)\sin(x)\,dx =$$

$$= I_{n-2} + \left[\frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\sin(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\cos(x)\,dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cdot I_n,$$

azaz

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \qquad (2 \le n \in \mathbb{N}).$$

Ha külön tekintjük a páros, ill. a páratlan számokat, akkor a kívánt egyenlőséghez jutunk. ■

A fenti feladatbeli 3. eredmény felhasználható a π szám előállításához. Mivel

$$0 \le \cos(x) \le 1 \qquad (x \in [0, \pi/2])$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\cos^{2n}(x) \ge \cos^{2n+1}(x) \ge \cos^{2n+2}(x) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right),$$

ezért az integrál monotonitása alapján

$$I_{2n} \ge I_{2n+1} \ge I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot I_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$1 \ge \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \ge \frac{2n+1}{2n+2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A Sandwich-tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\lim\left(\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\right) = 1,$$

ahonnan

$$\lim\left(\frac{2}{\pi}(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right) = 1,$$

azaz

$$\lim\left((2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

következik. Ez a határérték-reláció az ún. **Wallis-formula**.

11. gyakorlat (2025. november 24-25.)

Szükséges ismeretek.

- Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?
- Definiálja a szakaszonként monoton függvény fogalmát!
- Definiálja az egyenletes folytonosság fogalmát!
- Mondja ki az egyenletes folytonosságra igazolt Heine-tételt!
- Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?
- Definiálja a szakaszonként folytonos függvény fogalmát!
- Hogyan szól a Newton-Leibniz-tétel?
- Definiálja az integrálfüggvény fogalmát!

1 **Tétel (a határozott integrálra vonatkozó első helyettesítési szabály).** Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és $\varphi : J \to I$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor tetszőleges $a, b \in J$ esetén

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi', \qquad \text{ill.} \qquad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,du.$$

2 **Tétel (a határozott integrálra vonatkozó második helyettesítési szabály).** Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és $\varphi : J \to I$ folytonosan differenciálható függvény. Ha φ bijektív, akkor bármely $a, b \in I$ esetén

$$\int_a^b f = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi) \cdot \varphi', \qquad \text{ill.} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Példa. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx,$$

hiszen az

$$f(x) := x^m(1-x)^n, \quad \varphi(x) := 1-x \qquad (x \in [0,1])$$

függvényekre

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx &= -\int_1^0 x^m(1-x)^n\,dx = -\int_1^0 f = -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f \overset{1}{=} -\int_0^1 (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \\ &= \int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 (1-x)^m x^n\,dx.\end{aligned}$$

Példa. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$f(x) := e^{\sqrt{x}} \quad (x \in (0,+\infty)), \qquad \varphi(x) := x^2 \quad (x \in (0,+\infty))$$

függvényekkel

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int_{\varphi(\sqrt{a})}^{\varphi(\sqrt{b})} f(x)\,dx \overset{1}{=} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^t\cdot 2t\,dt = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} te^t\,dt \overset{\text{HF}}{=} \\ &= 2\left[(t-1)e^t\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = 2\left\{(\sqrt{b}-1)e^{\sqrt{a}} - (\sqrt{a}-1)e^{\sqrt{a}}\right\}.\end{aligned}$$

Példa. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{x} \quad (x \in (0,+\infty)), \qquad \varphi(x) := e^x \quad (x \in (0,+\infty))$$

függvényekkel

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\ln(x)}{x}\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx \overset{2}{=} \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{\ln(e^t)}{e^t}\cdot e^t\,dt = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} t\,dt = \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\ln(a)}^{\ln(b)} = \frac{\ln^2(b)-\ln^2(a)}{2}.\end{aligned}$$

Példa. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in (0, +\infty)), \qquad \varphi(x) := \operatorname{arc\,tg}(x) \quad (x \in (0, +\infty))$$

függvényekkel

$$\int_a^b \sqrt{\operatorname{arc\,tg}(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \overset{1}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_{\operatorname{arc\,tg}(a)}^{\operatorname{arc\,tg}(b)} \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_{\operatorname{arc\,tg}(a)}^{\operatorname{arc\,tg}(b)} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(\operatorname{arc\,tg}(b))^3} - \sqrt{(\operatorname{arc\,tg}(a))^3}\right).$$

Példa. Legyen $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b, \beta > 0$. Ekkor az

$$f(x) := \frac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(x) := \beta x - \alpha \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényekkel és a

$$c := \frac{a+\alpha}{\beta}, \qquad \text{ill.} \qquad d := \frac{b+\alpha}{\beta}$$

számokkal

$$\int_a^b \frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx \overset{1}{=} \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_c^d \frac{1}{\beta^2 t^2 + \beta^2} \cdot \beta\,dt =$$

$$= \frac{1}{\beta} \cdot \int_c^d \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\beta} \cdot [\operatorname{arc\,tg}(t)]_c^d = \frac{1}{\beta} \cdot \left\{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b+\alpha}{\beta}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a+\alpha}{\beta}\right)\right\}.$$

Példa. Legyen

$$f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(x) := \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ bijekció, $\varphi^{-1} = \exp$, továbbá

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \int_1^e \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(1)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \overset{2}{=} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sin(x)\,dx =$$

$$= [-\cos(x)]_0^1 = -\cos(1) + \cos(0) = 1 - \cos(1).$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\, dx$$

integrál értékét!

Útm. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$t := \sqrt[3]{x-2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = t^3 + 2 =: \varphi(t) \qquad (x \in [10, 66] \quad \Longleftrightarrow \quad t \in [2, 4])$$

Ekkor φ folytonosan deriválható, így

$$\begin{aligned}\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\, dx \quad &= \quad \int_{\varphi(2)}^{\varphi(4)} f(x)\, dx \overset{1}{=} \int_2^4 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_2^4 \frac{1}{t^3 + 2 - t - 2} \cdot 3t^2\, dt = \\ &= \int_2^4 \frac{3t^2}{t^3 - t}\, dt = \frac{3}{2} \cdot \int_2^4 \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt = \frac{3}{2} \cdot \left[\ln(t^2 - 1)\right]_2^4 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot (\ln(15) - \ln(3)) = \frac{3}{2} \cdot \ln(5).\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a következő módon is eljárhattunk volna.
Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először meghatározzuk primitív függvényeit. Alkalmazzuk a

$$t := \sqrt[3]{x-2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = t^3 + 2 =: \varphi(t) \qquad (x \in (10, 66) \quad \Longleftrightarrow \quad t \in (2, 4)).$$

helyettesítést. A φ függvény deriválható:

$$\varphi'(t) = 3t^2 \qquad (t \in (2, 4)),$$

továbbá $\varphi' > 0$, így φ szigorúan monoton növekedő, tehát invertálható, és

$$\varphi^{-1}(x) = t = \sqrt[3]{x-2} \qquad (x \in (10, 66)).$$

A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály alapján

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx &= = \int \frac{1}{t^3+2-t-2}\cdot 3t^2\,dt\Big|_{t=\sqrt[3]{x-2}} = \int \frac{3t^2}{t^3-t}\,dt\Big|_{t=\sqrt[3]{x-2}} = \\
&= \int \frac{3t}{t^2-1}\,dt\Big|_{t=\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2-1}\,dt\Big|_{t=\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2}\left[\ln(t^2-1)\right]_{t=\sqrt[3]{x-2}} = \\
&= \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{(x-2)^2}-1)+c \quad (x\in(10,66),\ c\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

A Newton-Leibniz-formula felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{10}^{66} \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx &= \frac{3}{2}\cdot\left[\ln(\sqrt[3]{(x-2)^2}-1)\right]_{10}^{66} = \frac{3}{2}\cdot\left\{\left(\ln(\sqrt[3]{64^2}-1\right)-\left(\ln(\sqrt[3]{8^2}-1\right)\right\} = \\
&= \frac{3}{2}\cdot(\ln(15)-\ln(3)) = \frac{3}{2}\cdot\ln(5). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $0<a\in\mathbb{R}$, $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy

1. ha f páratlan, akkor fennáll az
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
egyenlőség;
2. ha f páros, akkor igaz az
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
állítás!

Útm.

1. Ha f páratlan, akkor

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\
&= \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

2. Ha f páros, akkor

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\ &= -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Példa. Mivel az

$$f(x) := \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}{1+\pi^{\sqrt{4-x^2}}} \qquad (x \in [-2,2])$$

függvény páratlan, ezért

$$\int_{-2}^{2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}{1+\pi^{\sqrt{4-x^2}}}\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0.$$

Példa.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}}\,dx &= \int_{2}^{-2} \frac{\sqrt{4-(-t)^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}((-t)^5)}}\cdot(-1)\,dt = \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-t^2}}{1+\frac{1}{\pi^{\operatorname{arc\,tg}(t^5)}}}\,dt = \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{\pi^{\operatorname{arc\,tg}(t^5)}\cdot\sqrt{4-t^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(t^5)}}\,dt = \int_{-2}^{2} \frac{\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}\cdot\sqrt{4-x^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}}\,dx.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left\{\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}}\,dx + \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2} \frac{(1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)})\cdot\sqrt{4-x^2}}{1+\pi^{\operatorname{arc\,tg}(x^5)}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{2} \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(t)^2}\cdot 2\cos(t)\,dt = 4\cdot\int_{0}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt =$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos(2t)\,dt = 2\cdot\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Feladat. Legyen $0 < p \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos p-periodikus függvény. Mutassuk meg, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx$$

egyenlőség!

Útm. Az f függvény p-periodikus volta következtében

$$\begin{aligned}\int_a^{a+p} f(x)\,dx &= \int_a^{p+a} f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^{p+a} f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^{p+a} f(x-p)\,dx = \\ &= \int_a^p f(x)\,dx + \int_0^a f(t)\cdot 1\,dt = \int_0^p f(x)\,dx. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy igzak az alábbi állítások!

1. Ha $0 < a \in \mathbb{R}$, $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor
$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.
3. $\displaystyle\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.
4. $\displaystyle\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^\omega \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k}$.

Útm.

1. Ha
$$\varphi(x) := a - x \qquad (x \in [0, a]),$$
akkor
$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

2. Ha
$$f(x) := \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \qquad (x \in [0,\pi]),$$
akkor
$$f(\pi - x) = \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)},$$
így az előző példa szerint
$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx - \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx.$$
Innen
$$\begin{aligned} 2\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -\pi\int_0^\pi \frac{1}{1+u^2}\Big|_{u=\cos(x)} \cdot \cos'(x)\,dx = \\ &= -\pi\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{1}{1+u^2}\,du = -\pi(\operatorname{arc\,tg}(-1) - \operatorname{arc\,tg}(1)) = \ldots = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

3. Ha
$$\varphi(t) := t^2 \qquad (0 < t \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\varphi^{-1}(\pi^2/4)}^{\varphi^{-1}(\pi^2)} \frac{\sin\left(\sqrt{\varphi(t)}\right)}{\sqrt{\varphi(t)}}\varphi'(t)\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} 2t\,dt = [-2\cos(t)]_{t=\pi/2}^{t=\pi} = 2.$$

4. Ha
$$F(\omega) := \int_0^\omega \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \qquad (0 < \omega \in \mathbb{R}),$$
akkor F folytonos függvény, továbbá a
$$\varphi(t) := \operatorname{tg}(t) \qquad (t \in (0, \pi/2))$$
szigorúan monoton növekedő függvénnyel
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(\omega)} \frac{1}{(1+\varphi^2(t))^n}\varphi'(t)\,dt = \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\omega)} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2(t))^n} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt = \\ &= \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\omega)} \cos^{2n-2}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Így (a korábbiak következtében)

$$\lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre

$$f(x) = f(a + b - x) \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül, akkor fennáll az

$$\int_a^b f(x)\, dx = 2 \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx$$

egyenlőség!

Útm. Világos, hogy

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\, dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a + b - x)\, dx =$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\, dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $\varepsilon \in [0, 1)$. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll az

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cdot \cos(x)}\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

egyenlőség!

Útm. Mivel bármely $x \in [0, 2\pi]$ esetén

$$1 + \varepsilon \cdot \cos(x) = 1 + \varepsilon \cdot \cos(2\pi - x),$$

ezért

$$\frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$$

következtében a

$$t := \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \qquad \text{ill.} \qquad t := \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

helyettesítésekkel

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\cos(x)}\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\cos(x)}\,dx =$$

$$= 2\cdot\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\cos(x)}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\cos(x)}\,dx\right\} =$$

$$= 2\cdot\left\{\int_0^{\mathrm{tg}(\pi/4)} \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt + \int_{\mathrm{ctg}(\pi/4)}^{\mathrm{ctg}(\pi/2)} \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\frac{t^2-1}{1+t^2}}\cdot\frac{-2}{1+t^2}\,dt\right\} =$$

$$= 2\cdot\left\{\int_0^1 \frac{2}{1+t^2+\varepsilon\cdot(1-t^2)}\,dt + \int_1^0 \frac{-2}{1+t^2+\varepsilon\cdot(t^2-1)}\,dt\right\} =$$

$$= 2\cdot\left\{\int_0^1 \frac{2}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}\,dt + \int_0^1 \frac{2}{(1+\varepsilon)t^2+1-\varepsilon}\,dt\right\} =$$

$$= 2\cdot\left\{\frac{2}{1+\varepsilon}\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot t\right)^2}\,dt + \frac{2}{1-\varepsilon}\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot t\right)^2}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\left\{\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) + \mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)\right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

hiszen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ számra

$$\mathrm{arc\,tg}(x) + \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(vö. 102. oldal 5. Házi feladat).■

Tétel. (Lagrange-lemma). Tegyük fel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = 0$$

minden, a $\eta(a) = \eta(b)$ feltételenek eleget tévő kétszer folytonosan differenciálható $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre. Ekkor

$$f(t) = 0 \qquad (t \in [a, b]).$$

Biz. Az f folytonossága következtében elegendő azt megmutatni, hogy bármely $t \in (a, b)$ esetén $f(t) = 0$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy alkalmas $x \in (a, b)$ esetén $f(x) \neq 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $f(x) =: \varepsilon > 0$. Ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$[x - \delta, x + \delta] \subset (a, b)$$

és – f folytonossága miatt –

$$f(t) \geq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (t \in [x - \delta, x + \delta]).$$

Könnyen megkonstruálható olyan kétszer folytonosan deriválható nem-negatív $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$, amelyre $\eta(x) > 0$ és

$$\eta(t) = 0 \qquad (t \notin [x - \delta, x + \delta])$$

teljesül. Valóban,

$$\eta(x) := \begin{cases} (t - x + \delta)^3(x + \delta - t)^3 & (t \in [x - \delta, x + \delta]), \\ \\ 0 & (t \in [a, x - \delta] \cup [c + \delta, b]) \end{cases}$$

ilyen. Így

$$0 = \int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\eta(t)\,dt \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \eta(t)\,dt > 0,$$

ami nem lehetséges. ■

Tétel. (du Bois Reymond-lemma). Tegyük fel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és

$$\int_a^b f(t)\eta'(t)\,dt = 0$$

minden, a $\eta(a) = \eta(b)$ feltételenek eleget tévő folytonosan differenciálható $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre. Ekkor f állandófüggvény, azaz alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(t) = c \qquad (t \in [a,b]).$$

Útm. Legyen

$$\eta(t) := \int_a^t (f(s) - c)\,ds \qquad (t \in [a,b]),$$

ahol

$$c := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Ekkor

$$\eta : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \eta \in \mathfrak{C}^1, \qquad \eta(a) = \eta(b) = 0,$$

továbbá

$$\eta'(t) = f(t) - c \qquad (t \in [a,b]),$$

ahonnan

$$0 \le \int_a^b (f(t)-c)^2\,dt = \int_a^b (f(t)-c)\eta'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\eta'(t)\,dt - c\,[\eta(t)]_a^b = \int_a^b f(t)\eta'(t)\,dt$$

következik. Így $f - c$ folytonossága következtében bármely $t \in [a,b]$-re $f(t) = c$. ■

Következmény. Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és

$$\int_a^b \{f(t)\eta(t) + g(t)\eta'(t)\}\,dt = 0$$

minden, a $\eta(a) = \eta(b)$ feltételenek eleget tévő folytonosan differenciálható $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre. Ekkor $g \in \mathfrak{C}^1$ és $g' = f$.

Ui. Ha $s \in [a,b]$ esetén

$$F(s) := \int_a^s f(t)\,dt,$$

akkor az $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálfüggvényre $F \in \mathfrak{C}^1$ és $F' = f$. Ezért

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = [F(t)\eta(t)]_a^b - \int_a^b F(t)\eta'(t)\,dt = -\int_a^b F(t)\eta'(t)\,dt,$$

ahonnan

$$0 = \int_a^b \{f(t)\eta(t) + g(t)\eta'(t)\}\,dt = \int_a^b \{g(t) - F(t)\}\eta'(t)\,dt$$

következik. Ez azt jelenti (vö. du Bois Reymond-lemma), hogy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$g(t) - F(t) = c \qquad (t \in [a, b]),$$

azaz

$$g = F + c \in \mathfrak{C}^1[a, b] \qquad \text{és} \qquad g' = F' = f.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ esetén fennáll az

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)}$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0,$$

akkor az

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}\left([f(t)]^2 + [g(t)]^2\right) \qquad (t \in [a, b])$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b |fg| \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b f^2 + \int_a^b g^2\right) = 0.$$

2. lépés. Ha pl.

$$\int_a^b f^2 > 0,$$

akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az

$$F(t) := (g(t) - \lambda f(t))^2 \qquad (t \in [a, b])$$

függvényre $F \in \mathfrak{R}[a, b]$ és bármely $t \in [a, b]$ esetén

$$F(t) \geq 0 \qquad (t \in [a, b]),$$

így

$$0 \leq \int_a^b F = \lambda^2 \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2,$$

azaz

$$\left(2\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0. \quad \blacksquare$$

Példa.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{(1+x^4)\cdot 1}\,dx \leq \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = \\ &= \sqrt{\left[x + \frac{x^5}{5}\right]_0^1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{1,2} < 1,1. \quad \diamond\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre $f(1) = 0$, akkor fennáll az

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|^2 \leq \frac{1}{12} \cdot \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx$$

egyenlőslenség!

Útm. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1 \cdot f(x)\,dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x)\,dx = -\int_0^1 x \cdot f'(x)\,dx.$$

Ennélfogva

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|^2 = \left|4\cdot\int_0^1 \frac{x}{4}\cdot f'(x)\,dx\right|^2 \leq 4\cdot\left(\int_0^1 \frac{x^2}{16}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 (f'(x))^2\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\cdot\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx = \frac{1}{12}\cdot\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki 3 tizedesjegy pontossággal a $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ integrált!

Útm. Mivel

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(4n+3)}$$

ezért (vö. Leibniz-sorokra vonatkozó hibaformula)

$$|h_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)!(4n+7)} < 5\cdot 10^{-4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 2$$

ui. $n = 2$ esetén

$$(2\cdot 2+3)!\cdot(4\cdot 2+7) = 75600,$$

így

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} = 0.310. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha bármely minden határon túl finomodó $(\tau_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{F}([a,b])$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b f.$$

Ha pl. $f \in \mathfrak{R}[0,1]$ és

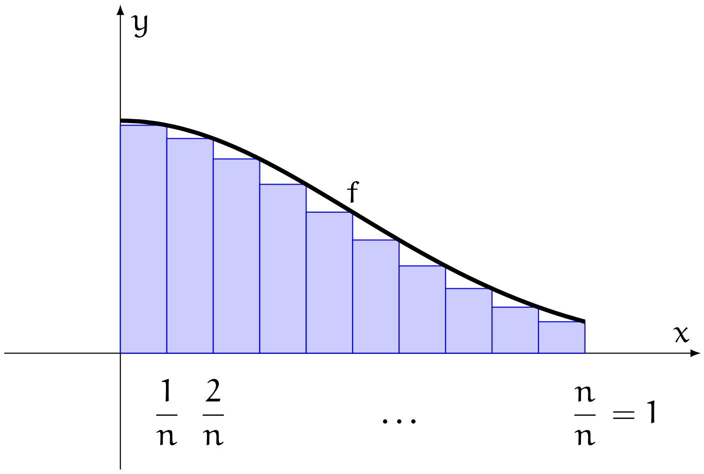
$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} :\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\} \in \mathfrak{F}([0,1]), \quad \xi_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ill.

$$\sigma(f, \tau_n, \xi_n) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sigma(f, \tau_n, \xi_n)\right) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$



Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok konvergensek és számítsuk ki határértéküket!

1. $x_n := \dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \dfrac{1}{4n} \quad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{3}n} \quad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \dfrac{\pi}{n} \cdot \left\{ \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right) \right\} \quad (n \in \mathbb{N});$
4. $x_n := \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$, ahol $\alpha \in (0, +\infty)$;
5. $x_n := \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N});$
6. $x_n := \dfrac{n}{1+n^2} + \dfrac{n}{4+n^2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N});$
7. $x_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} \quad (n \in \mathbb{N});$
8. $x_n := \dfrac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2}}} + \dfrac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+4}}} + \ldots + \dfrac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2n}}} \quad (n \in \mathbb{N});$
9. $x_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \quad (n \in \mathbb{N});$
10. $x_n := \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Útm.

1. Világos, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{1}{n}\left\{ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2} \right\}.$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{(1+x)^2}$$

és

$$\tau_n := \left\{ \frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f, \tau_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$$

2. Látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right\}. \end{aligned}$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} :\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$, továbbá

$$\sigma(f, \tau_n, \xi^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)})\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{\pi}{n}\cdot\left\{\sin\left(\frac{0}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right\}.$$

Legyen

$$f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sin(x)$$

és

$$\tau_n := \left\{ \frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0, \pi] \subset \mathfrak{R}[0, \pi]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0, \pi])$, továbbá

$$\sigma(f, \tau_n, \xi^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n} = x_n$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sigma(f, \tau_n, \xi^{(n)})\right) = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

4. Némi átalakítással azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha} + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^{\alpha} \right\} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}.$$

Legyen

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^{\alpha}$$

és

$$\tau_n := \left\{ \frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0, 1] \subset \mathfrak{R}[0, 1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0, 1])$. Mivel f monoton növekedő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$S(f, \tau_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \lim_{n\to\infty} (S(f, \tau_n)) = \int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^{\alpha} + 2^{\alpha} + \ldots + (n-1)^{\alpha} + n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} \right) = \frac{1}{1 + \alpha}$$

következtében

$$1^{\alpha} + 2^{\alpha} + \ldots + (n-1)^{\alpha} + n^{\alpha} \sim \frac{1}{1 + \alpha} \cdot n^{\alpha+1} \qquad (n \to \infty)$$

teljesül.[5]

5. Világos, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}.$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{1+x}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f,\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

6. Látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n^2}{4+n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2+n^2}\right\} = \frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{1}{\frac{1^2}{n^2}+1} + \frac{1}{\frac{2^2}{n^2}+1} + \ldots + \frac{1}{\frac{n^2}{n^2}+1}\right\}.$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x^2+1}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő,

[5] Azt mondjuk, hogy az (x_n) és az (y_n) sorozat **aszimptotikusan egyenlő**:

$$x_n \sim y_n \quad (n \to \infty), \qquad \text{ha} \qquad \frac{x_n}{y_n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f, \tau_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f, \tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\operatorname{arc\,tg}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

7. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n\cdot n}}\right\} = \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right\}. \end{aligned}$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f, \tau_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f, \tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

8. Látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2k}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n\sqrt[n]{e^n}\sqrt[n]{e^{2k}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{ne\sqrt[n]{e^{2k}}} = \frac{2}{e} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(e^2)^{k/n}}.$$

Legyen
$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\frac{1}{e^{2x}}$$
és
$$\tau_n:=\left\{\frac{k}{n}\in\mathbb{R}:\ k\in\{0,1,\ldots,n\}\right\}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$
Ekkor $f\in\mathfrak{C}[0,1]\subset\mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre $\tau_n\in\mathfrak{F}([0,1])$, továbbá
$$\frac{2}{e}\cdot\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)})=\frac{2}{e}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=x_n.$$
Következésképpen
$$\lim_{n\to\infty}(x_n)\;=\;\frac{2}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)})\right)=\frac{2}{e}\cdot\int_0^1\frac{1}{e^{2x}}=-\frac{1}{e}\cdot\int_0^{-2}e^t\,dt=-\frac{1}{e}\cdot\left[e^t\right]_0^{-2}=$$
$$=\;-\frac{1}{e}\cdot\left(e^{-2}-e^{1}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}.$$

9. Világos, hogy
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$
Legyen
$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (x\in[0,1)),\\[2ex] 0 & (x=1)\end{cases}$$
és
$$\tau_n:=\left\{\frac{k}{n}\in\mathbb{R}:\ k\in\{0,1,\ldots,n\}\right\}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$
Ekkor $f\in\mathfrak{R}[0,1]$, ui. f-nek egyetlen szakadási helye van, és bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre $\tau_n\in\mathfrak{F}([0,1])$. Látható, hogy f szigorúan monoton növekedő, hiszen
$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}>0\qquad(x\in(0,1)).$$
Következésképpen
$$s(f,\tau_n)=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=x_n\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

és így

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n))) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 1}\int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega\to 1}[\arcsin(x)]_0^\omega = \lim_{\omega\to 1}(\arcsin(\omega)-\arcsin(0)) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

10. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \exp(\ln(x_n)) = \exp\left(\frac{\ln(n!)}{n} - \ln(n)\right) = \exp\left(\frac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Így az exponenciális függvény folytonossága alapján (vö. korábban)

$$\lim(x_n) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 \ln(x)\,dx\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

12. gyakorlat (2025. december 1-2.)

Szükséges ismeretek.

- Hogyan szól a Newton-Leibniz-tétel?
- Definiálja az integrálfüggvény fogalmát!
- Fogalmazza meg az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítást!
- Mondja ki integrálfüggvény deriválhatóságára vonatkozó tételt!
- Hogyan szól a parciális integrálásra vonatkozó tétel határozott integrálra?
- Mi a helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra?
- Milyen tételt ismer függvénygrafikon ívhosszának kiszámítására határozott integrál segítségével?
- Hogyan értelmezi forgástest térfogatát határozott integrál segítségével?

Definíció. Legyen $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, továbbá tegyük fel, hogy

$$g(x) \leq f(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

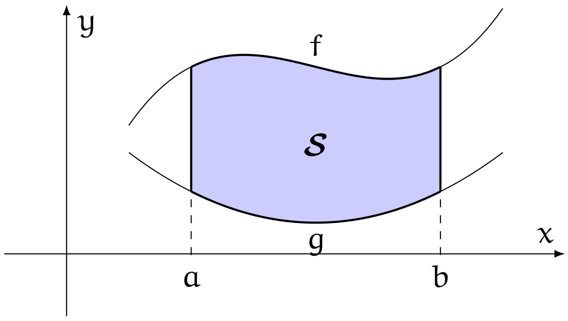
majd legyen

$$\mathcal{S} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\right\}.$$

Ekkor az $\mathcal{S}$ ponthalmaz (**síkidom**) **terület**ének nevezzük a

$$T(\mathcal{S}) := \int_a^b (f - g)$$

valós számot.

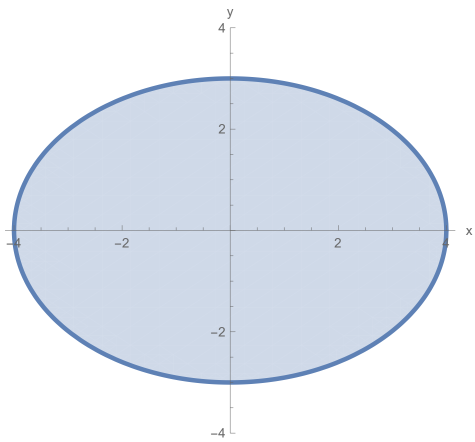


Feladat. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az origó középpontú, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis területét!

Útm. A szóbanforgó ellipszislap határának egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Így a szóbanforgó ellipszislap nem más, mint az



25. ábra

$$\mathcal{S} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [-a, a], \; y \in [g(x), f(x)]\right\}$$

ponthalmaz (vö. 25. ábra), ahol

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R} \qquad f(x) := b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

és

$$g : [-a, a] \to \mathbb{R} \qquad g(x) := -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Felhasználva, hogy f és g páros függvények az ellipszilap területére

$$\begin{aligned} T(\mathcal{S}) &= \int_{-a}^{a} (f-g) = 2 \cdot \int_{0}^{a} (f-g) = 4 \cdot \int_{0}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4 \cdot \int_{0}^{a} b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \\ &= 4 \cdot \int_{0}^{\pi/2} b\sqrt{1 - \sin^2(t)}\,a\cos(t)\,dt = 4ab \cdot \int_{0}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = 2ab \cdot \int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\,dt = \\ &= 2ab \cdot \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = ab\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közreszárt ponthalmaz területét!

Útm. Mivel

$$(x-1)^2 = y^2 = 2x + 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4+5} \in \{-1; 5\},$$

ezért a kérdéses ponthalmaz $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ alakú (vö. 26. ábra), ahol

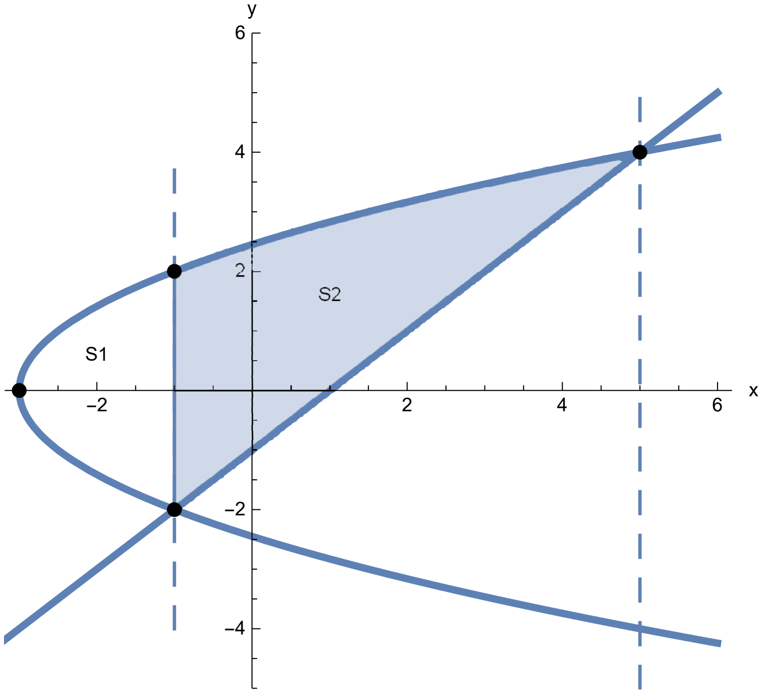
$$\mathcal{S}_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-3, -1],\ y \in [-\sqrt{2x+6}, \sqrt{2x+6}]\right\},$$

ill.

$$\mathcal{S}_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1, 5],\ y \in [x - 1, \sqrt{2x+6}]\right\}.$$

Ennélfogva $\mathcal{S}$ területe

$$\begin{aligned} T(\mathcal{S}) &= T(\mathcal{S}_1) + T(\mathcal{S}_2) = \int_{-3}^{-1} 2 \cdot \sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} \left(\sqrt{2x+6} - (x-1)\right)\,dx = \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(2x+6)^3}\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x+6)^3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} = \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{64} - \sqrt{0}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{16^3} - \frac{25}{2} + 5\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{4^3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \\ &= \frac{16}{3} + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - \frac{24}{2} + 6 = 24 - 12 + 6 = 18. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



26. ábra

Feladat. Milyen arányú részekre osztja az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \leq 8$ egyenletű körlapot?

Útm. A fentiek következtében a $\mathcal{K}$ kör területe: $\mathrm{T}(\mathcal{K}) = 8\pi$. Meghatározzuk a kimetszett síkidom területét. Mivel

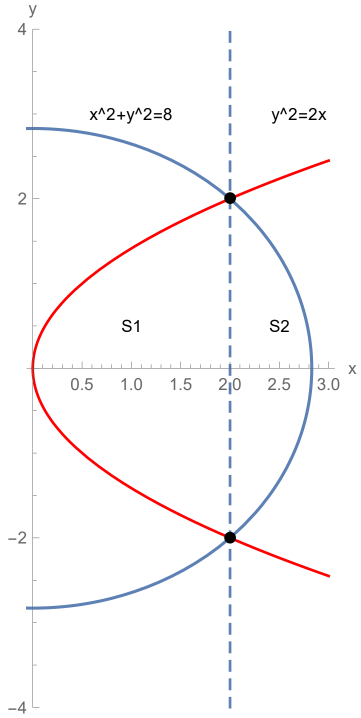
$$8 - x^2 = 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2x - 8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1+8} \in \{-4; 2\},$$

ezért a kérdéses síkidom $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ alakú (vö. 27. ábra), ahol

$$\mathcal{S}_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0, 2], \; y \in [-\sqrt{2x}, \sqrt{2x}]\right\},$$

ill.

$$\mathcal{S}_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [2, \sqrt{8}], \; y \in [-\sqrt{8 - x^2}, \sqrt{8 - x^2}]\right\}.$$



27. ábra

Ennélfogva $\mathcal{S}$ területe

$$\begin{aligned}
T(\mathcal{S}) &= T(\mathcal{S}_1) + T(\mathcal{S}_2) = \int_0^2 2\cdot\sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} 2\cdot\sqrt{8-x^2}\,dx = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^2 + 2\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{8-8\cdot\sin^2(t)}\cdot\sqrt{8}\cdot\cos(t)\,dt = \\
&= \frac{16}{3} + 2\cdot 8\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt = \frac{16}{3} + 8\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,dt = \\
&= \frac{16}{3} + 8\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} + 2\pi.
\end{aligned}$$

Így a keresett arány

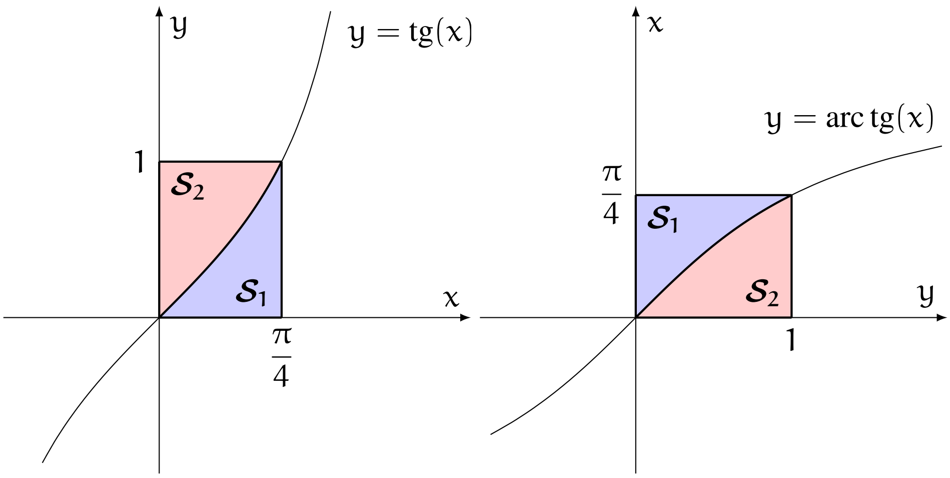
$$\frac{T(\mathcal{K})-T(\mathcal{S})}{T(\mathcal{S})} = \frac{8\pi-\frac{4}{3}-2\pi}{\frac{4}{3}+2\pi} = \frac{6\pi-\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+2\pi} = \frac{18\pi-4}{4+6\pi} = \frac{9\pi-2}{2+3\pi}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}$$

integrál értékét (vö. Feladat)!

Útm.



A tg függvény (lásd bal oldali ábra) két részre bontja az

$$\mathcal{S} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \, y \in [0,1]\right\}$$

téglalapot:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2,$$

ahol

$$\mathcal{S}_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \, y \in [0, \operatorname{tg}(x)]\right\},$$

ill.

$$\mathcal{S}_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \, y \in [\operatorname{tg}(x), 1]\right\}.$$

A tg grafikonja alatti $\mathcal{S}_1$ síkidom területe:

$$T(\mathcal{S}_1) = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x)\,dx.$$

A grafikon feletti $\mathcal{S}_2$ síkidom az x és y változók felcserélésével értelmezhető az arc tg grafikonja alatti területként (lásd jobb oldali ábra):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 \leq & x \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \leq & y \leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 \leq & \operatorname{tg} x \leq 1 \\ \operatorname{tg} x \leq & y \leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 \leq & y \leq 1 \\ 0 \leq & \operatorname{tg} x \leq y \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 0 \leq \; y \leq 1 \\ 0 \leq \; x \leq \operatorname{arc\,tg} y \end{array}\right\}$$

azaz

$$\mathcal{S}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [0,1], \; x \in [0, \operatorname{arc\,tg}(y)]\right\}.$$

Így az $\mathcal{S}_2$ ponthalmaz területe:

$$T(\mathcal{S}_2) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg}(y)\,dy = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg}(x)\,dx.$$

Az $\mathcal{S}$ ponthalmaz területe tehát:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x)\,dx + \int_0^1 \operatorname{arc\,tg}(x)\,dx = T(\mathcal{S}_2) + T(\mathcal{S}_1) = T(\mathcal{S}) = \frac{\pi}{4}.$$

Megjegyezzük, hogy ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény invertálható és deriválható, akkor f mellett f^{-1}-nek is létezik primitív függvénye:

$$\int f^{-1}(y)\,dy \overset{y=f(x)}{=} \int f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int x \cdot f'(x)\,dx = x \cdot f(x) - \int x' \cdot f(x)\,dx =$$

$$= \quad x \cdot f(x) - \int f(x)\,dx \Big|_{x=f^{-1}(y)}.$$

Továbbá, ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, akkor $f^{-1} \in \mathfrak{R}[f(a), f(b)]$, és

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = [x \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx.$$

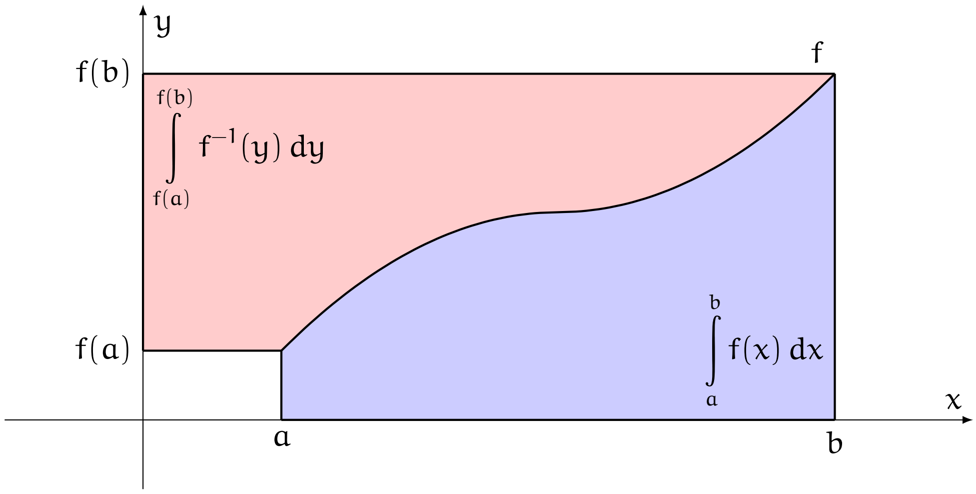
Ezt átrendezve azt kapjuk hogy (vö. alábbi ábra):

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = [x \cdot f(x)]_a^b = b \cdot f(b) - a \cdot f(a),$$

azaz

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x)\,dx + \int_{\operatorname{tg} 0}^{\operatorname{tg}(\pi/4)} \operatorname{arc\,tg}(y)\,dy \quad = \quad \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x)\,dx + \int_0^1 \operatorname{arc\,tg}(x)\,dx = [x \cdot \operatorname{tg}(x)]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 \cdot \operatorname{tg}(0) = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$



Házi feladat. Van-e az

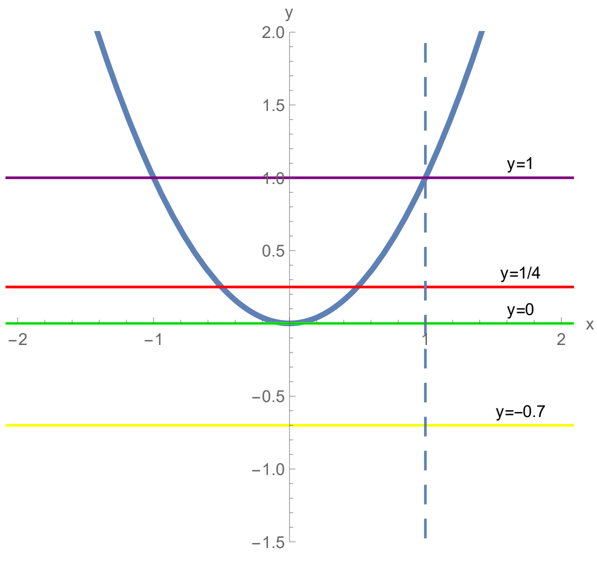
$$H := \left\{ \int_0^1 |x^2 - c|\,dx : \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaznak minimuma? Ha igen, határozzuk meg meg $\min(H)$-t!

Útm. Geometriai megfontolással belátható, hogy

$$\left\{ \int_0^1 |x^2 - c|\,dx : \ c \in [0,1] \right\} < \left\{ \int_0^1 |x^2 - c|\,dx : \ c \in \mathbb{R}\backslash[0,1] \right\},$$

hiszen az $y = x^2$ és az $y = x$ görbék közrezárta ponthalmaz területe $c > 1$, ill. $c < 0$ esetén nagyobb, mint a $c = 1$, ill. a $c = 0$ esetben (vö. 28. ábra). Legyen tehát $c \in [0,1]$, majd számítsuk ki az



28. ábra

$$T_c := \int_0^1 |x^2 - c|\, dx$$

integrált. Mivel

$$x^2 = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{c},$$

ezért

$$T_c = \int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2), dx + \int_{\sqrt{c}}^1 (x^2 - c), dx = \left[cx - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{c}} + \left[\frac{x^3}{3} - cx\right]_{\sqrt{c}}^1 = \frac{4c\sqrt{c}}{3} - c + \frac{1}{3}.$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$T : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad T(c) := T_c$$

függvény folytonos. Így a Weierstraß-tétel következményeként T-nek van minimuma és maximuma. Mivel bármely $c \in (0, 1)$ esetén

$$T'(c) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{c} - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{4} \in (0, 1),$$

ezért

$$\min\{T(c) \in \mathbb{R} :\ c \in [0, 1]\} = \min\left\{T(0), T\left(\frac{1}{4}\right), T(1)\right\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{4},$$

azaz a T függvény a $c = \dfrac{1}{4}$ értéknél veszi fel minimumát. Következésképpen

$$\min(H) = T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Melyik szám nagyobb?

$$e^{\pi} \qquad \text{vagy} \qquad \pi^{e}.$$

Útm.

1. módszer. A logaritmusfüggvény szigorú monotonotása miatt

$$e^{\pi} < \pi^{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi \cdot \ln(e) < e \cdot \ln(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\ln(e)}{e} < \frac{\ln(\pi)}{\pi}.$$

Vizsgáljuk az

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvényt monotonitás szempontjából!

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = e$$

így

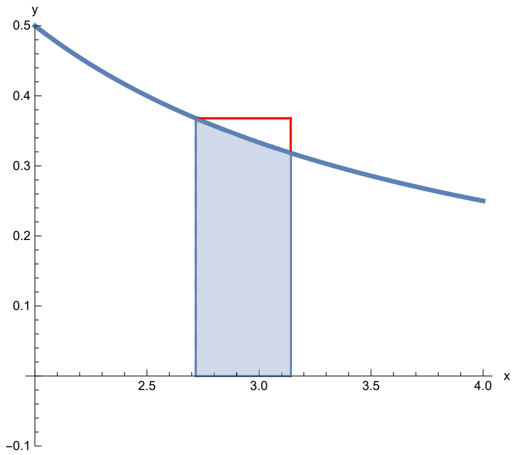
$$f'(x) > 0 \quad (x \in (0, e)), \qquad \text{ill.} \qquad f'(x) < 0 \quad (x \in (e, +\infty)),$$

ahonnan

$$f(x) < f(e) \qquad (e \neq x \in (0, +\infty))$$

következik, azaz $f(\pi) < f(e)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\pi^e < e^\pi$.

2. módszer. Világos (vö. 29. ábra), hogy



29. ábra

$$\ln(\pi) - 1 = \ln(\pi) - \ln(e) = \int_e^\pi \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{e}(\pi - e) = \frac{\pi}{e} - 1,$$

ahonnan

$$\ln(\pi) < \frac{\pi}{e}, \qquad \text{azaz} \qquad \pi^e < e^\pi$$

következik.

3. módszer. Az integrálszámítás középértéktétele következtében bármely $c \in (e, \pi)$ számra

$$\int_e^\pi \frac{1}{x}\,dx = \int_e^\pi \frac{1}{x} \cdot 1\,dx = \frac{1}{c} \cdot (\pi - e),$$

így

$$\ln(\pi) - \ln(e) < \frac{\pi - e}{e} = \frac{\pi}{e} - \ln(e),$$

azaz

$$e \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot \ln(e) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi^e < e^\pi. \quad \blacksquare$$

Definíció. Az $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ függvény esetén az

$$y = f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

görbe (f grafikonja) x-tengely körüli megforgatásával előálló $\mathcal{F}$ **forgástest**nek neveztük azon

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

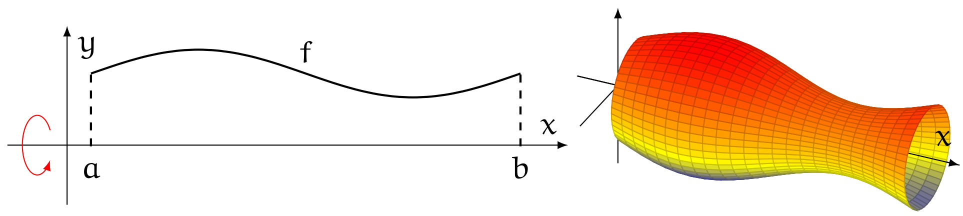
pontok halmazát, amelyek távolsága az x-tengelytől kisebb vagy egyenlő, mint $|f(x)|$ $(x \in [a, b])$, azaz

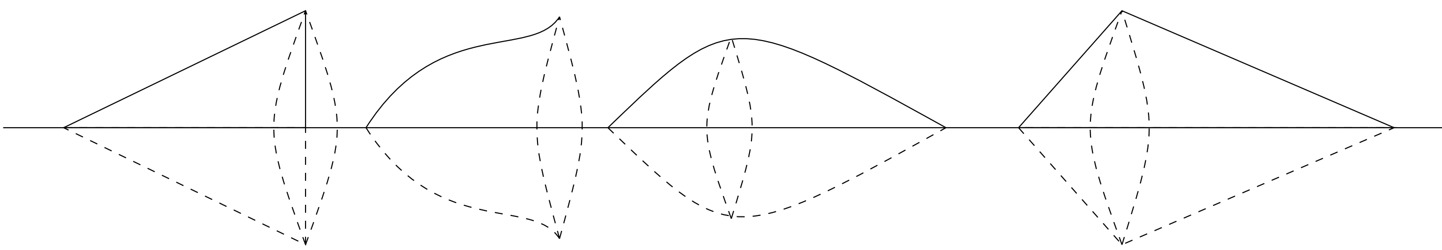
$$\mathcal{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \in [a, b], \; \sqrt{y^2 + z^2} \le |f(x)|\right\}.$$

Az $\mathcal{F}$ forgástest **térfogat**ának nevezzük a

$$V(\mathcal{F}) := \pi \int_a^b f^2$$

valós számot.





Példa. Adott $m, r, R > 0$: $R > r$, és

$$f : [0, m] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{R - r}{m} x + r,$$

esetén f folytonos, a fenti definícióbeli $\mathcal{F}$ ponthalmaz egy m magasságú csonka körkúp, ahol a kúp alap-, ill. fedőkörének sugara R, ill. r. Ezért $\mathcal{F}$ térfogata:

$$\begin{aligned}
V(\mathcal{F}) &= \pi\int_0^m \left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2 dx = \pi\int_0^m \left(\frac{(R-r)^2}{m^2}x^2+\frac{2(R-r)r}{m}x+r^2\right) dx = \\
&= \pi\left(\frac{(R-r)^2 m}{3}+(R-r)rm+r^2m\right) = \frac{m\pi}{3}\left(R^2-2Rr+r^2+3Rr-3r^2+3r^2\right) = \\
&= \frac{m\pi}{3}\left(R^2+rR+r^2\right).
\end{aligned}$$

Példa. Adott $R>0$, és

$$f:[-R,R]\to\mathbb{R}, \qquad f(x):=\sqrt{R^2-x^2},$$

esetén f folytonos, a fenti definícióbeli $\mathcal{F}$ ponthalmaz egy R sugarú gömb. Így $\mathcal{F}$ térfogata:

$$V(\mathcal{F})=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx = 2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4R^3\pi}{3}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Határozzuk meg az $\mathcal{F}$ forgástest térfogatát az alábbi f függvények esetében!

1. $f:[-a,a]$, $f(x):=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, ahol $a,b>0$;
2. $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\dfrac{1}{1+x^2}$;
3. $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\sqrt{\dfrac{\cos(x)}{2+\cos(x)}}$;
4. $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\sin^2(x)$;
5. $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\sqrt{\sin(x)}\cdot e^x$.

Útm.

1. $\mathcal{F}$ nem más, mint egy forgásellipszoid, amelynek térfogata:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{F}) &= \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\,dx = 2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\,dx = 2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \\ &= 2\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi a b^2}{3}. \end{aligned}$$

2. A

$$V(\mathcal{F}) = \pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

integrált kell meghatároznunk.

1. lépés. Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg.

$$\begin{aligned} &\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{x}{2}\right)\,dx = \\ &= \int\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{2(1+x^2)}-\int\frac{1}{2(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}(x)+\frac{x}{1+x^2}\right)+c. \end{aligned}$$

2. lépés. A Newton-Leibniz-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$V(\mathcal{F}) = \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}(x)+\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}.$$

3. A

$$V(\mathcal{F}) = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}\,dx$$

integrált kell meghatároznunk.

1. lépés. Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg.

1. módszer. Elemi átalakításokkal:

$$\begin{aligned} &\int\frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}\,dx = \int\frac{2+\cos(x)-2}{2+\cos(x)}\,dx = \int\left(1-\frac{2}{2+\cos(x)}\right)\,dx = \\ &= x-2\int\frac{1}{3\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = x-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\,dx = \\ &= x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c. \end{aligned}$$

2. módszer. A

$$t := \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \rightsquigarrow \quad x = 2\operatorname{arc\,tg}(t) =: \varphi(t) \quad \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right): \quad \varphi'(t) \equiv \frac{2}{1+t^2}, \quad \varphi \uparrow,$$

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

helyettesítés alkalmazásával:

$$\int \frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\int \frac{1-t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Mivel

$$\frac{1-t^2}{(3+t^2)(1+t^2)} = \frac{(3+t^2)-2(1+t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{3+t^2},$$

ezért

$$\int \frac{1-t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}\,dt = \operatorname{arc\,tg}(t) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c,$$

így

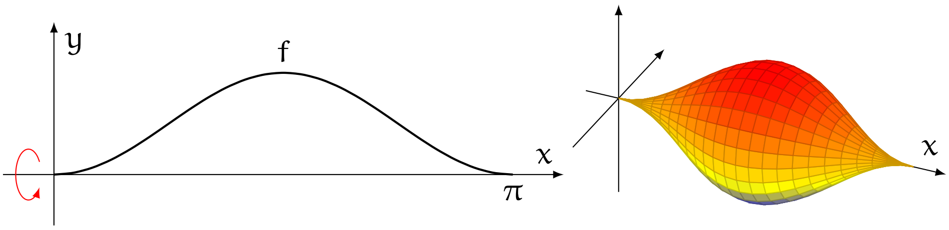
$$\int \frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}\,dx = x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c.$$

2. lépés. A Newton-Leibniz-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(\mathcal{F}) &= \pi\left[x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \\ &= \frac{\pi^2}{18}\left(9-4\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

4. Az $\mathcal{F}$ térfogata:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{F}) &= \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^4(x)\,dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)\,dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot x - \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{8}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi^2}{8}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



5. Az $\mathcal{F}$ térfogatára

$$
\begin{aligned}
V(\mathcal{F}) &= \pi \cdot \int_0^\pi \sin(x)\cdot e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi \sin(x)\cdot 2e^{2x}\,dx = \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\left[\sin(x)\cdot e^{2x}\right]_0^\pi - \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi \cos(x)\cdot e^{2x}\,dx = \\
&= -\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^\pi \cos(x)\cdot 2e^{2x}\,dx = -\frac{\pi}{4}\cdot\left[\cos(x)\cdot e^{2x}\right]_0^\pi - \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^\pi \sin(x)\cdot e^{2x}\,dx = \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot\left(1+e^{2\pi}\right) - \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^\pi \sin(x)\cdot e^{2x}\,dx.
\end{aligned}
$$

Következésképpen

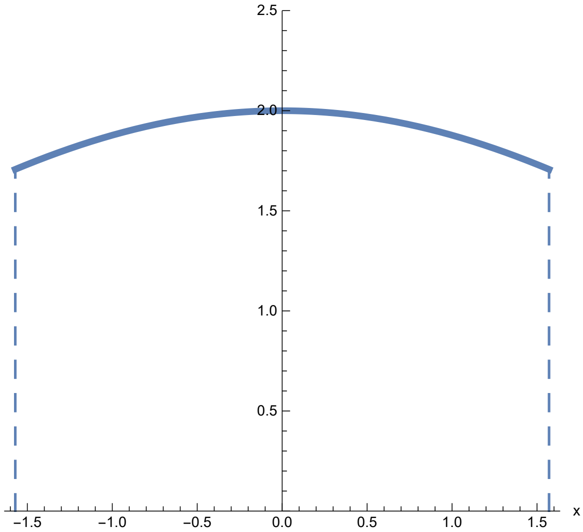
$$V(\mathcal{F}) = \frac{\pi\cdot\left(1+e^{2\pi}\right)}{5}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mennyi bor fér abba a hordóba, amely dongájának egyenlete az alábbi görbével (vö. 30. ábra) írható le?

$$y = 1+\cos(x/2) \qquad (x\in[-\pi/2,\pi/2])).$$

Útm. A hordó térfogata

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+\cos(x/2)\right)^2\,dx = 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos(x/2)\right)^2\,dx = \\
&= 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cdot\cos(x/2)+\cos^2(x/2)\right)\,dx = 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cdot\cos(x/2)+\frac{1+\cos(x)}{2}\right)\,dx = \\
&= 2\pi\cdot\left[x+4\cdot\sin(x/2)+\frac{x}{2}+\frac{\sin(x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\cdot\left\{\frac{\pi}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\} = \\
&= \frac{\pi}{2}\left(3\pi+2+8\cdot\sqrt{2}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$



30. ábra

Feladat. Számítsuk ki a $0 < r < R$ paraméterekkel jellemzett **tórusz**, azaz az

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$

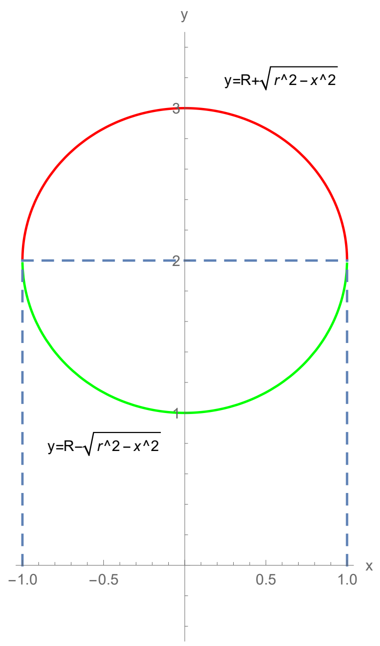
egyenletű körlap (vö. 31. ábra) x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

Útm. Világos, hogy a tórusz nem más, mint az

$$\mathcal{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \in [-r, r], \; y \in \left[R - \sqrt{r^2 - x^2}, R + \sqrt{r^2 - x^2}\right]\right\}.$$

forgástest. Következésképpen térfogatára:

$$\begin{aligned}
V(\mathcal{F}) &= \pi\cdot\int_{-r}^{r}\left\{\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right\}dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}4R\cdot\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\\
&= 8rR\pi\cdot\int_0^r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx=8rR\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin(t)^2}\cdot r\cdot\cos(t)\,dt=\\
&= 8r^2R\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt=8r^2R\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=4r^2R\pi\cdot\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}=\\
&= 4r^2R\pi\cdot\frac{\pi}{2}+0=(r^2\pi)\cdot(2R\pi).\quad\blacksquare
\end{aligned}$$



31. ábra

Feladat. Tulajdonítható-e térfogat az

$$\mathcal{F}:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\in[4,+\infty),\ \sqrt{y^2+z^2}\le\frac{1}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}\right\}$$

ponthalmaznak?

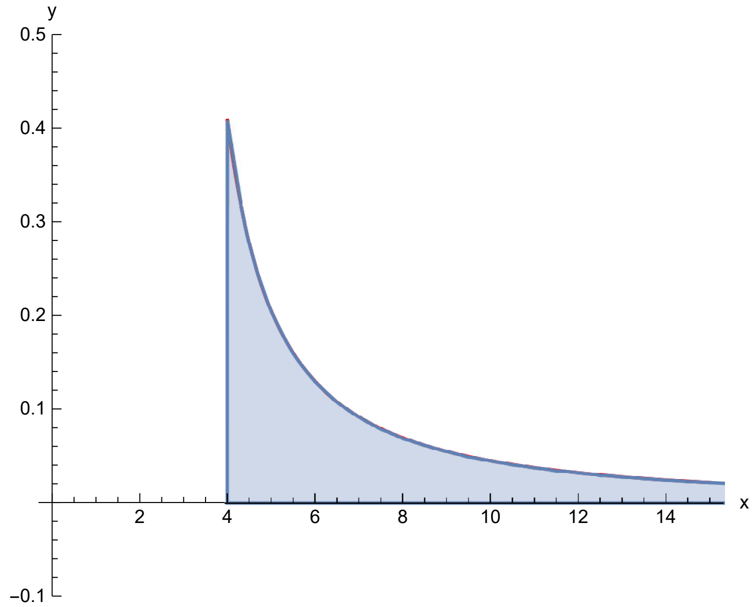
Útm. Világos, hogy

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \in [4,+\infty), \; \sqrt{y^2+z^2} \leq |f(x)|\right\}.$$

ahol (vö. 32 ábra)

$$f : [4,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}$$

Mivel bármely $x \in [4,+\infty)$ esetén



32. ábra

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \frac{1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\
&= \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \\
&= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},
\end{aligned}$$

ezért, ha $\omega \in [4, +\infty)$, akkor

$$\int_4^\omega f^2(x)\,dx = \left[\ln(\sqrt{x-3}) - \ln(x-2) + \ln\sqrt{(x-1)}\right]_4^\omega = \left[\ln\left(\sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}}\right)\right]_4^\omega =$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{(\omega-3)(\omega-1)}{(\omega-2)^2}}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{1\cdot 3}{4}}\right) \longrightarrow \ln(1) + \ln(2) - \ln(\sqrt{3}) \quad (\omega \to +\infty).$$

Az $\mathcal{F}$ ponthalmaznak tehát tulajdonítható térfogat:

$$V(\mathcal{F}) = \lim_{\omega\to+\infty}\left(\pi\cdot\int_4^\omega f^2(x)\,dx\right) = \pi\cdot\left(\ln(2) - \ln(\sqrt{3})\right). \quad \blacksquare$$

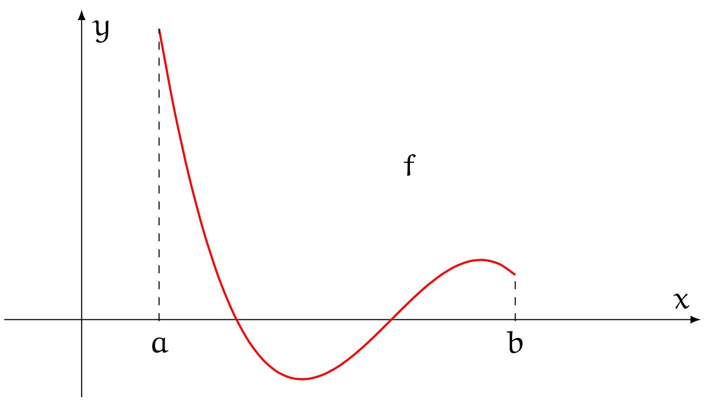
Definíció. Valamely $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és $\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$ felosztás estén az f függvény grafikonjába írt **poligon hosszá**nak nevezzük az

$$l_f(\tau) := \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

számot. Azt mondjuk, hogy f grafikonja **rektifikálható** (vagy f grafikonjának van **hossz**a), ha

$$l_f := \sup\{l_f(\tau) \in \mathbb{R} :\ \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\} < +\infty.$$

Ilyen kor az l_f számot a szóban forgó függvény(grafikon) **ívhossz**ának nevezzük.



Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor grafikonjának ívhosszára

$$l_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Feladat. Határozzuk meg az alábbi f függvények grafikonjának ívhosszát!

1. $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}$;
2. $f : [1/2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$;
3. $f : \left[-\dfrac{R}{\sqrt{2}}, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$, ahol $0 < R \in \mathbb{R}$.

Útm.

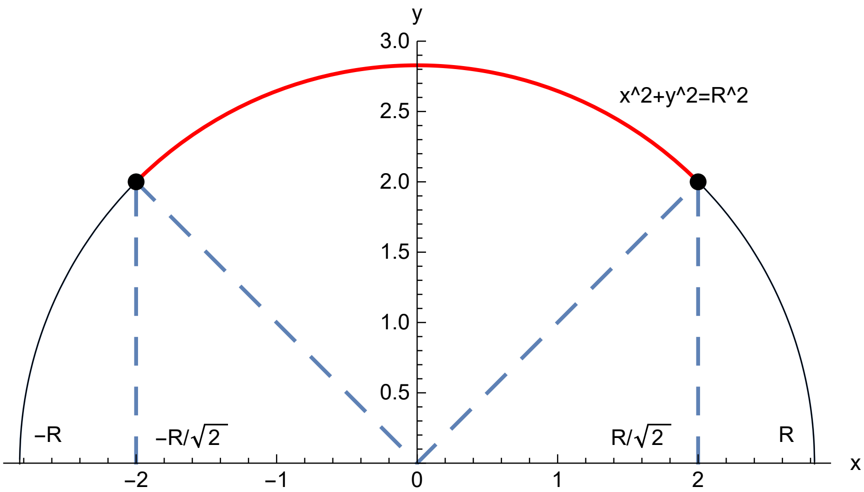
1. Mivel
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x-1} \qquad (x \in [2, 5]),$$
ezért fenti tétel felhasználásával f grafikonjának ívhossza:
$$l_f = \int_2^5 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2}\, dx = \int_2^5 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \left[\sqrt{x^3}\right]_2^5 = \frac{2}{3} \cdot \left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

2. Mivel
$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} \cdot \sqrt{x-1} \qquad (x \in [1/2, 1]),$$
ezért fenti tétel felhasználásával f grafikonjának ívhossza:
$$l_f = \int_{1/2}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\, dx = \int_{1/2}^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right]_{1/2}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{48} + 1 = \frac{31}{48}.$$

3. Mivel
$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad \left(x \in \left[-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right]\right),$$

ezért fenti tétel felhasználásával f grafikonjának, azaz az R sugarú negyedkörív hossza (vö. 33. ábra):

$$
\begin{aligned}
l_f &= \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx = \\
&= 2\cdot\int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 2\cdot\int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}\,dx = 2\cdot\left[R\cdot\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^{R/\sqrt{2}} = \\
&= 2R\cdot\arcsin\left(\frac{R}{\sqrt{2}R}\right) = 2R\cdot\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2R\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{R\pi}{2}.
\end{aligned}
$$



33. ábra

Emlékeztetünk arra, hogy a középiskolában a π számot az egységsugarú kör kerületének a felével értelmeztük. Az elmúlt előtti félévben a (hatványsor összegfüggvényeként bevezetett) cos függvény-finíció egyenértékű. Ebből az is következik, hogy a középiskolában bevezett sin, illetve cos függvény valóban egyenlő az Analízis I. tantárgyban definiált sin, illetve cos függvénnyel. ■

Definíció. Legyen $d \in \{2,3\}$. Azt mondjuk, hogy a $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz **görbe** az $\mathbb{R}^d$ térben, ha alkamas $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, ill. $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^d)$ vektor-skalár függvény esetén igazak az alábbiak:

$$\textbf{(i)} \quad \boldsymbol{\varphi} \text{ injektív,} \qquad\qquad \textbf{(ii)} \quad \mathcal{R}_{\boldsymbol{\varphi}} = \left\{\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^d : \ t \in I\right\} = \mathcal{G}.$$

Ha a fenti esetben a $\boldsymbol{\varphi}|_{[a,b)}$ leszűkítés injektív és $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$, akkor a $\mathcal{G}$ ponthalmazt **zárt görbé**nek nevezzük. A $\boldsymbol{\varphi}$ függvény (mindkét esetben) a $\mathcal{G}$ görbe egy **paraméterezés**e. Hogy bizonyos görbéket ne zárjunk ki vizsgálatainkból, olykor azt is megengedjük, hogy az $I \subset \mathbb{R}$ intervallum ne legyen korlátos.

Megjegyezzük, hogy a $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}^2(I, \mathbb{R}^d)$ függvényeknek szemléletes jelentésük van: nevezetesen minden pontszerű test (a fizikában szoksásos szóhasználattal: **tömegpont**) **mozgás**a ilyen típusú függvényekkel írható le, $\boldsymbol{\varphi}(t)$-vel jelölve a tömegpont helyvektorát (az origóból a tömegpontba mutató vektort) a t időpillantban. Ilyenkor a $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ vektor a mozgó tömegpont **pillanatnyi sebességé**ét, a $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ vektor pedig a **pillanatnyi gyorsulás**át jelenti a t időpillanatban. A $\boldsymbol{\varphi}$ függvény értékkészletét, más szóval azt az $\mathbb{R}^d$-beli halmazt, amelyet a mozgó pont befut, a mozgás **pályá**jának nevezzük.

Példa. Ha $u, v \in \mathbb{R}^d$, akkor a

$$\mathcal{G}_{uv} = \left\{u + t(v-u) \in \mathbb{R}^d : \ t \in [0,1]\right\}$$

ponthalmaz (az u és v pontokat összekötő **egyenes szakasz**) görbe az $\mathbb{R}^d$ térben, ui. a

$$\boldsymbol{\varphi}_{uv}(t) := u + t(v-u) \qquad (t \in [a,b])$$

leképezés paraméterezése a $\mathcal{G}_{uv}$ ponthalmaznak.

Példa. Ha $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor a

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\right\}$$

ponthalmaz (**ellipszis**) görbe az $\mathbb{R}^2$ térben, ui. a

$$\boldsymbol{\varphi}_{\alpha\beta}(t) := (\alpha\cos(t), \beta\sin(t)) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

leképezés paraméterezése a $\mathcal{G}_R$ ponthalmaznak.

Példa. Legyen $0 < R, \omega, \nu, T \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), \nu t) \qquad (t \in [0, T])$$

vektor-skalár értékkészlete **hengeres csavarvonal** vagy **hengerre írt csavarvonal**.

Definíció. Ha valamely $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ görbe paraméterezése a $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathcal{G}$ vektor-skalár függvény, akkor valamely $\tau := \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathfrak{F}([a, b])$ felosztás esetén a τ felosztáshoz tartozó **görbébe írt poligon hosszá**nak nevezzük az

$$l_\tau := \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{\varphi}(t_{k-1}) - \boldsymbol{\varphi}(t_k)\|$$

számot. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{\varphi}$ paraméterezte $\mathcal{G}$ görbe **rektifikálható**, ha

$$L(\mathcal{G}) := \sup\{l_\tau \in \mathbb{R} : \ \tau \in \mathfrak{F}([a, b])\} \in \mathbb{R}.$$

Belátható, hogy ha a $\mathcal{G}$ görbe $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathcal{G}$ paraméterezése folytonosan deriválható, akkor $\mathcal{G}$ ívhosszára

$$L(\mathcal{G}) = \int_a^b \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\| \, dt := \int_a^b \sqrt{[\dot{\varphi}_1(t)]^2 + \ldots + [\dot{\varphi}_d(t)]^2} \, dt.$$

Példa. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor a

$$\mathcal{G}_f := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b]\right\}$$

függvénygrafikon – mint $\mathbb{R}^2$-beli görbe egy paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := (t, f(t)) \qquad (t \in [a, b]),$$

így ívhosszára a jól ismert formulát kapjuk:

$$L(\mathcal{G}) = \int_a^b \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt.$$

Feladat. Valamely, a síkon mozgó anyagi pont pályájának egy paraméterezése:

$$\varphi(t) := (t, f(t)) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Mekkora utat fut be a mozgó pont a $t = 1$ és a $t = \ln(3)$ pillanatok között?

Útm. Az anyagi pont által megtzett út éppen a φ paraméterezte görbeív hosszával egyezik meg:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{G}) &= \int_1^{\ln(3)} \sqrt{1 + (\mathrm{ch}'(t))^2}\,dt = \int_1^{\ln(3)} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)}\,dt = \int_1^{\ln(3)} \mathrm{ch}(t)\,dt = \\ &= [\mathrm{sh}(t)]_1^{\ln(3)} = \mathrm{sh}(\ln(3)) - \mathrm{sh}(1) = \frac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} - \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{4}{3} - \frac{e^2 - 1}{2e}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definíció. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az

$$y = f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

görbe (f grafikonja) x-tengely körüli megforgatásával előálló **forgásfelület**nek nevezzük az

$$\mathcal{S} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|\right\},$$

ponthalmazt. Az $\mathcal{S}$ forgásfelület **felszíné**t pedig az

$$A(\mathcal{S}) := 2\pi \cdot \int_a^b f \cdot \sqrt{1 + (f')^2}$$

formulával értelmezzük.

Feladat. Határozzuk meg az $\mathcal{FS}$ forgásfelület felszínét az alábbi f függvények esetében!

1. $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$;
2. $f : [-r, r]] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$, ahol $0 < R \in \mathbb{R}$ és $r \in (0, R)$;
3. $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{tg}(x)$;
4. $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) := a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, ahol $a > 0$.

Útm.

1. A kérdéses felület felszíne:

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{S}) &= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot \sqrt{1 + \cos^2(x)}\, dx \overset{\cos(x)=:t}{=} 2\pi \cdot \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \cdot (-1)\, dt = \\
&= 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt \overset{\text{Példa.}}{=} 2\pi \cdot \left[\frac{\mathrm{ar\,sh}(t) + t\sqrt{1 + t^2}}{2}\right]_{-1}^{1} = \\
&= \pi\left\{\mathrm{ar\,sh}(1) + \sqrt{2} - \mathrm{ar\,sh}(-1) + \sqrt{2}\right\} = 2\pi\left\{\mathrm{ar\,sh}(1) + \sqrt{2}\right\} \overset{\mathrm{ar\,sh}(\alpha)=\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})}{=} \\
&= 2\pi\left(\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

2. Mivel

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad (x \in [-r, r]),$$

ezért a kérdéses felület (a $2r$ magasságú **gömböv** $\mathcal{S}_r$) felszíne:

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{S}_r) &= 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \\
&= 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \cdot \int_0^r \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \\
&= 4\pi \cdot \int_0^r \sqrt{R^2}\, dx = 4R\pi \cdot [x]_0^r = 4Rr\pi.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy az $r \to R$ határesetben a gömbfelület felszínét kapjuk:

$$4rR\pi \longrightarrow 4R^2\pi \qquad (r \to R).$$

3. Az

$$A(\mathcal{S}) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(x)\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4(x)}}\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\sqrt{\cos^4(x)+1}\,dx$$

integrált kell meghatároznunk. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}) &= \pi\left[\frac{\sqrt{\cos^4(x)+1}}{\cos^2(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos^4(x)+1}}\,dx = \\ &= \pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) - \pi\left[\mathrm{ar\,sh}\left(\cos^2(x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) - \pi\left(\mathrm{ar\,sh}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{ar\,sh}(1)\right). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{ar\,sh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1},$$

a forgásfelület felszíne:

$$A(\mathcal{S}) = \pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right)\right).$$

4. Az

$$A(\mathcal{S}) = 2\pi\int_0^a a\ \mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\,dx$$

integrált kell meghatároznunk. Mivel

$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}, \qquad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}, \qquad \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1, \qquad \mathrm{ch}^2(t) = \frac{1+\mathrm{ch}(2t)}{2} \quad (t\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}) &= 2\pi a\int_0^a \mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{a}\right)dx = 2\pi a\int_0^a \frac{1+\mathrm{ch}\left(\frac{2x}{a}\right)}{2}\,dx = 2\pi a\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\,\mathrm{sh}\left(\frac{2x}{a}\right)\right]_0^a = \\ &= a^2\pi\left(1+\frac{\mathrm{sh}(2)}{2}\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Feladat. Legyen $0 < r < R$, majd $\alpha \in (0, r)$. Számítsuk ki annak az $\mathcal{S}_\alpha$ forgásfelületnek a felszínét, amelyet az

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2 \qquad (x \in (-\alpha, \alpha))$$

körívek x-tengely körüli megforgatásával kapunk!

Útm. Világos, hogy az alsó, ill. a felső körív az

$$f_- : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}, \quad R - \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad \text{ill. az} \qquad f_+ : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}, \quad R + \sqrt{r^2 - x^2}$$

függvény grafikonja. Így $A(\mathcal{S}_\alpha) =$

$$2\pi \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ f_- \cdot \sqrt{1 + (f_-')^2} + f_+ \cdot \sqrt{1 + (f_+')^2} \right\} = 2\pi \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \, dx +$$

$$+ 2\pi \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot \left\{ R - \sqrt{r^2 - x^2} + R + \sqrt{r^2 - x^2} \right\} dx = 4\pi \cdot \int_0^{\alpha} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot 2R \, dx =$$

$$= 8\pi R r \cdot \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = 8\pi R \cdot \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \, dx = 8\pi R^2 \left[r \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r} \right) \right]_0^{\alpha} = 8\pi R r \arcsin\left(\frac{\alpha}{r} \right).$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha \to r$ határesetben

$$8\pi R r \arcsin\left(\frac{\alpha}{r} \right) \longrightarrow 8\pi R r \cdot \frac{\pi}{2}$$

és $\mathcal{S}_\pi$ épp egy tórusz felülete, így anak felszíne $4\pi^2 R r$. ■

Feladat. Írjuk le valamely $m > 0$ tömegű anyagi pontnak a Föld nehézségi erőterében történő mozgását!

Útm. A Newton-féle mozgástörvények szerint a pont helyzetének (időtől függő) koordinátáira

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} = -mg,$$

ahol g jelöli a nehézségi gyorsulást x, y, ill. z pedig a tömegpont helyzetének koordinátáit (olyan koordinátarendszert használunk, amelynek z tengelyét a nehézségi erővel párhuzamosnak, de ellentétes irányúnak választjuk). Így, ha $I := [0, \omega)$ jelöli a mozgás időintervallumát, akkor bármely $t \in I$ esetén

$$\ddot{z}(t) = -g \implies \int_0^t \ddot{z}(s)\,ds = \int_0^t -g\,ds \implies \dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt$$

$$\implies \int_0^t \dot{z}(s)\,ds = \int_0^t (\dot{z}(0) - gs)\,ds \implies z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

és hasonlóan

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t, \qquad \text{ill.} \qquad y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t.$$

Megjegyzések.

- Ezzel igazoltuk Galilei 1683-ban megfogalmazott állítását, miszerint „a nyugalmi helzetből induló szabadon eső test által egyenlő időközönként megtett távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok, 1-től kezdődően”, hiszen a nyugalmi helyzetből induló anyagi pont esetén

  $$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0,$$

  így a szabadon eső test az első Δt idő alatt

  $$s_1 = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

  távolságot tesz meg, továbbá az n-edik Δt idő alatt megtett út:

  $$s_n = \frac{1}{2} g (n\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g ((n-1)\Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 (2n-1),$$

  ezért tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén a megtett utak aránya:

  $$\frac{s_m}{s_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

- Eredményünk azt is jelenti, hogy nehézségi erő hatására a mozgás mindig a függőleges (z-vel párhuzamos) síkban megy végbe, hiszen

  $$\dot{y}(0)x(t) - \dot{x}(0)y(t) + \dot{x}(0)y(0) - \dot{y}(0)x(0) = 0 \qquad (t \in I),$$

  így az

  $$A := \dot{y}(0), \qquad B := -\dot{x}(0), \qquad C := \dot{x}(0)y(0) - \dot{y}(0)x(0)$$

  jelöléssel a mozgás egy

  $$Ax + By + C = 0$$

  egyenletű (függőleges) síkban történik.

- Ha

  $$x(0) = y(0) = z(0) = 0,$$

  azaz az anyagi pont $t = 0$-kor a koordinátarendszer kezdőpontjában van, és a

  $$(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = \mathbf{v}(0)$$

(kezdősebesség)vektor pedig az (xz)-síkban van és az x-tengellyel α szöget zár be, akkor

$$\dot{x}(0) = \|\mathbf{v}(0)\| \cos(\alpha), \qquad \dot{y}(0) = 0, \qquad \dot{z}(0) = \|\mathbf{v}(0)\| \sin(\alpha).$$

Így tetszőleges $t \in I$ esetén

$$x(t) = \|\mathbf{v}(0)\| \cos(\alpha)t, \qquad y(t) = 0, \qquad z(t) = \|v(0)\| \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{11}$$

A mozgás pályáját úgy kaphatjuk meg, hogy kiküszöböljük t-t:

$$z = -\frac{g}{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + x \operatorname{tg}(\alpha).$$

Ez pedig egy parabola egyenlete. A tömegpont tehát egy ideig emelkedik, majd a pálya második szakaszán lefelé esik. Az emelkedés t_e idejét úgy számíthatjuk ki, hogy ebben az időpontban a sebesség párhuzamos az x-tengellyel, tehát a z-komponens zérus:

$$-gt_e + \|\mathbf{v}(0)\| \sin(\alpha) = 0,$$

amiből

$$t_e = \frac{\|\mathbf{v}(0)\| \sin(\alpha)}{g}.$$

A mozgás ideje ennek kétszerese: $t_m = 2t_e$. Az emelkedés h magassága t_e-nek (11)-be való helyettesítésével számítható ki:

$$h = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \sin(2\alpha)}{2g}.$$

A hajítás d távolságára (11) első komponenséből azt kapjuk, hogy

$$d = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Ebből látszik, hogy adott $\mathbf{v}(0)$ esetén d az $\alpha = 45°$-nál lesz maximális. ∎

Feladat. Írjuk le annak az első tengelyen fekvő egységnyi hosszúságú, $(0,0)$, ill. $(1,0)$ végpontú nyújthatalan rúd jobb oldali végpontjának mozgását, amelynek bal oldali végpontját a második tengely mentén mozgatjuk, pozitív irányban, azaz adjunk példát olyan $\boldsymbol{\varphi} : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ függvényre, amelynek $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$ értékkészletére, azaz az

$$\left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(t), \ t \in [0,1)\right\}$$

görbére az alábbi két állítás teljesül!

- $(1,0) \in \mathcal{R}_{\boldsymbol{\varphi}}$.
- Tetszőleges $t \in [0,1)$ esetén a $\boldsymbol{\varphi}(t)$-beli érintőegyenes olyan pontban metszi a második tengelyt, amelynek $\boldsymbol{\varphi}(t)$-től vett távolsága állandó: 1.

Útm. Alkalmas $\alpha, \beta : [0,1) \to \mathbb{R}$ sima függvények esetén a rúd bal, ill. jobb oldali végpontja a

$$\mathbf{b}(t) := (0, \beta(t)) \quad (t \in [0,1))$$

ill. a

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := (1-t, \alpha(t)) \quad (t \in [0,1))$$

függvények értékkészletét járja be, ha a t paraméternek az adott pont első tengelyre való vetületének az $(1,0)$ ponttól mért távolságát választjuk. Az érintőfeltételből:

$$\mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|} \qquad (t \in [0,1)), \tag{12}$$

azaz az első komponensek egyenlőségéből

$$1 - t = \frac{1}{\sqrt{1 + [\alpha'(t)]^2}} \qquad (t \in [0,1))$$

vagy

$$[\alpha'(t)]^2 = \frac{1}{(1-t)^2} - 1 = \frac{2t - t^2}{(1-t)^2} \qquad (t \in [0,1))$$

ill.

$$\alpha'(t) = \frac{\sqrt{2t - t^2}}{1-t} \qquad (t \in [0,1))$$

adódik. Világos, hogy α' pozitív előjelű, ui. (12) következtében

$$\beta(t) - \alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\sqrt{1 + [\alpha'(t)]^2}} \quad \text{és} \quad \beta(t) > \alpha(t) \qquad (t \in [0,1)).$$

Így, ha $t \in [0,1)$, akkor $\alpha(0)=0$ figyelembevételével

$$\alpha(t)=\int_0^t \frac{\sqrt{2s-s^2}}{1-s}\,ds \qquad (t\in[0,1)).$$

Az $u := 1-s$ helyettesítéssel így tetszőleges $t \in [0,1)$ esetén

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int_1^{1-t}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}(-1)\,du = \int_{1-t}^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,du = \int_{1-t}^1 \frac{1-u^2}{u\sqrt{1-u^2}}\,du = \\ &= \int_{1-t}^1\left(\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}-\frac{u}{\sqrt{1^2-u^2}}\right)du = \int_{1-t}^1\left(\frac{1}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du.\end{aligned}$$

Ismét helyettesítve: $v := 1/u$, ill. $w := u^2$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int_{\frac{1}{1-t}}^1 \frac{-1}{\sqrt{v^2-1}}\,dv - \int_{(1-t)^2}^1 \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-w}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\,dw = \\ &= \int_1^{\frac{1}{1-t}}\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}\,dv - \frac{1}{2}\int_{(1-t)^2}^1\frac{1}{\sqrt{1-w}}\,dw = \\ &= \operatorname{ar\,ch}\left(\frac{1}{1-t}\right)-\sqrt{2t-t^2} \qquad (t\in[0,1)). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az így adódó görbét szokás **traktrix**nak, **kutyagörbének**,[6] **vonszolási görbének**[7] vagy **üldözési görbéknek** is nevezni. Alkalmazása pl. a közlekedés-tervezésben ... ■

Feladat. Írjuk le a nyugvónak képzelt Föld középpontjától x $(> R > 0)$ távolságban lévő m (> 0) tömegű anyagi pontnak a mozgását, ha a levegő ellenállásától eltekintünk: rá csak a gravitációs (ill. a nehézségi) erő hat!

Útm. Az anyagi pont mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -\gamma\frac{mM}{x^2}, \tag{13}$$

ahol M (> 0) a Föld tömege[8], γ (> 0) pedig a gravitációs állandó[9]. Így, ha $I := [0,\omega]$ jelöli a mozgás

[6] A traktrixot Huygens nevezte kutyagörbének, mert ha a vonakodó kutyát pórázon húzzuk a második tengely mentén, akkor a kutya traktrix mentén mozog.

[7] A latin *traho* jelentése: 'vonszol'.

[8] A Föld tömege $M \approx 5.97\cdot 10^{24}$ kg.

[9] $\gamma \approx 6.67\cdot 10^{11}\ \frac{m^3}{kgs^2}$.

időintervallumát, akkor bármely $t \in I$ esetén

$$\begin{aligned}
\int_0^t \ddot{x}(s)\dot{x}(s)\,ds &= -\gamma M \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(x(s))^2}\,ds \\
&\Downarrow \\
\frac{(\dot{x}(t))^2}{2} &= \frac{(\dot{x}(0))^2}{2} + \gamma M \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)}\right) \\
&\Downarrow \\
(\dot{x}(t))^2 &= (\dot{x}(0))^2 + 2\gamma M \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)}\right).
\end{aligned}$$

Ezért egy igen nagy távolságból eső anyagi pont (pl. meteor) végsebessége a Földre érkezéskor (az

$$„x(0) = +\infty", \qquad \dot{x}(0) = 0$$

feltételek figyelembevételével)

$$x(\omega) = R \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x}(\omega) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \approx 11.18\,\frac{km}{s}.$$ [10]

(vö. földi **második kozmikus sebesség** vagy **szökési sebesség**).

[10] A Föld sugara $R \approx 6.37 \cdot 10^3$ km

13. gyakorlat (2025. december 8-9.)

Szükséges ismeretek.

- Adja meg az $\int_0^{+\infty} f$ improprius integrál definícióját!
- Adja meg az $\int_{-\infty}^{0} f$ improprius integrál definícióját!
- Adja meg az $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ improprius integrál definícióját!
- Fogalmazza meg az improprius integrálokra vonatkozó minoránskritériumot!
- Fogalmazza meg az improprius integrálokra vonatkozó majoránskritériumot!
- Mit ért azon, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál abszolút konvergens?
- Fogalmazza meg improprius integrálokra vonatkozó Newton-Leibniz-kritériumot!
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó integrálkritériumot!

Feladat. Legyen $1 < a \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll az

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

egyenlőség!

Útm. Mivel az

$$F(\omega) := \int_0^{\omega} \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx \qquad (\omega \in [0,\pi])$$

függvény folytonos, ezért

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx = F(\pi) = \lim_{\omega\to\pi} F(\omega) = \lim_{\omega\to\pi} \int_0^{\omega} \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega\to\pi} \int_0^{\operatorname{tg}(\omega/2)} \frac{1}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \lim_{\omega\to\pi} \int_0^{\operatorname{tg}(\omega/2)} \frac{2}{a\cdot(1+t^2)+1-t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{\omega\to\pi} \int_0^{\operatorname{tg}(\omega/2)} \frac{2}{(a-1)\cdot t^2+a+1}\,dt = \lim_{\omega\to\pi} \frac{2}{a+1} \cdot \int_0^{\operatorname{tg}(\omega/2)} \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot t\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{a+1} \cdot \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \cdot \lim_{\omega\to\pi} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot t\right)\right]_0^{\operatorname{tg}(\omega/2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \lim_{\omega\to\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot \operatorname{tg}(\omega/2)\right) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \blacksquare$$

Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $a < b$, továbbá $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Legyen továbbá

$$F : [a, b) \to \mathbb{R}, \qquad F(\omega) := \int_a^{\omega} f(x)\,dx.$$

Ha

$$\lim_{\omega\to b} F(\omega) =: A \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

akkor ezt az A számot az f **improprius integráljának** nevezzük, és a következő jelölést használjuk:

$$\int_a^b f := A.$$

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**. Ha (14) nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**.

Példa. Ha $p \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\int_1^{+\infty} x^p\,dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p < -1$, ui.

$$F(\omega) = \int_1^{\omega} x^p \, dx = \begin{cases} \dfrac{\omega^{p+1} - 1}{p+1} & (p \neq -1), \\ \\ \ln(\omega) & (p = -1) \end{cases} \qquad (\omega \in (1, +\infty)),$$

és így

1. $p < -1$ esetén
$$\int_1^{+\infty} x^p \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \frac{-1}{p+1};$$

2. $p \geq -1$ esetén
$$\int_1^{+\infty} x^p \, dx$$
(nyilvánvalóan) divergens, hiszen ekkor
$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = +\infty.$$

Tétel (összehasonlító kritérium). Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: $a < b$, továbbá $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre tetszőleges $c \in (a, b)$, ill. $x \in [a, b)$ esetén

$$f, g \in \mathfrak{R}[a, c], \qquad \text{ill.} \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

teljesül. Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. Ha $\displaystyle\int_a^b g$ konvergens, akkor $\displaystyle\int_a^b f$ is konvergens és $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
2. Ha $\displaystyle\int_a^b f$ divergens, akkor $\displaystyle\int_a^b g$ is divergens.

Példa. Látható, hogy bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$0 \leq \frac{1}{5 + 4x + x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

ezért

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) = 1$$

következtében

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx \in \mathbb{R}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx = \\ &= \lim_{\omega\to+\infty} [\operatorname{arc\,tg}(x+2)]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \{\operatorname{arc\,tg}(\omega+2) - \operatorname{arc\,tg}(3)\} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(3).\end{aligned}$$

Példa.

$$\begin{aligned}\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \lim_{\omega\to 2-0} \int_0^{\omega} \frac{1}{2\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 2-0} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\omega} = \\ &= \lim_{\omega\to 2-0} \left(\arcsin\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arcsin(0)\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Példa. Ha $p, a, b \in \mathbb{R}$: $p > 0$, $a < b$, akkor az

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p \in (0, 1)$, ui.

$$F(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\left\{(b-\omega)^{1-p} - (b-a)^{1-p}\right\} & (p \neq 1), \\ \ln(b-a) - \ln(b-\omega) & (p = 1) \end{cases} \qquad (\omega \in (a, +\infty)),$$

és így

1. $0 < p < 1$ esetén
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p};$$
2. $p \geq 1$ esetén
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = +\infty.$$

Példa. Ha $p \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\int_0^{+\infty} e^{px}\,dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p < 0$, ui.

$$F(\omega) = \int_0^{\omega} e^{px}\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{p\omega}-1}{p} & (p \neq 0), \\ \\ \omega & (p = 0) \end{cases} \qquad (\omega \in [0, +\infty)),$$

és így

1. $p < 0$ esetén $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{px}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = -\frac{1}{p}$,
2. $p \geq 0$ esetén $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{px}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = +\infty$.

Feladat. Legyen $p, q \in \mathbb{R}$: $p > 0$. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(qx)\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(qx)\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}$.

Útm.

1. Parciálisan integrálva könnynen megmutatható (vö. Analízis 2, 11. gyakorlat, 230-231. old)), hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ esetén

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Így az

$$F(\omega) := \int_0^{\omega} e^{-px}\cos(qx)\,dy \qquad (0 < \omega \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$F(\omega) = \frac{e^{-p\omega}}{p^2+q^2}(-p\sin(q\omega) - q\cos(q\omega)) + \frac{q}{p^2+q^2} \qquad (0 < \omega \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \frac{q}{p^2+q^2}.$$

2. Hasonlóan. ■

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

improprius integrált!

Útm. Mivel tetszőleges $0 \le \omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_0^{\omega} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^{e^\omega} \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_1^{e^\omega} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left(\frac{e^\omega}{e^\omega+1}\right) - \ln(1/2),$$

ill. a Bernoulli-L'Hospital-szabály következtében

$$\lim_{\omega\to+\infty} \ln\left(\frac{e^\omega}{e^\omega+1}\right) = \ln\left(\lim_{\omega\to+\infty} \frac{e^\omega}{e^\omega+1}\right) = \ln\left(\lim_{\omega\to+\infty} \frac{e^\omega}{e^\omega}\right) = \ln(1) = 0,$$

ezért

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \ln(2). \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x)\,dx$$

egyenlőség!

Útm. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \varphi(x) := \mathrm{tg}(x) \quad (x \in (0, \pi/2)).$$

Ekkor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^{\omega} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^{\omega} f = \lim_{\omega\to\infty} \int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(\omega)} (f\circ\varphi)\cdot\varphi' =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \int_0^{\mathrm{arc\,tg}(\omega)} \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2(t))^n}\cdot\frac{1}{\cos^2(t)}\,dt = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^{\mathrm{arc\,tg}(\omega)} \cos^{2n-2}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)\,dt. \quad \blacksquare$$

Tétel.
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Biz.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

A

$$h(t) := (1+t)e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény maximumhelye 0, mert

$$h'(t) = -te^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

a h' deriváltfüggvény csak 0-ban tűnik el, és ott jelet is vált ($t < 0$ esetén $h'(t) > 0$; $t > 0$ esetén pedig $h'(t) < 0$); továbbá $h(0) = 1$. Ezért

$$h(t) < h(0) \qquad (0 \neq t \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$(1+t)e^{-t} < 1 \quad (0 \neq t \in \mathbb{R}).$$

Legyen $0 \neq x \in \mathbb{R}$ tetszőleges! Az iménti egyenlőtlenség $t := -x^2$ esetén

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1,$$

a $t := x^2$ esetén pedig

$$(1+x^2)e^{-x^2} < 1$$

alakú lesz. E két egyenlőtlenség összevetéséből adódik, hogy

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{x^2} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x \in (0,1)$, akkor $1 - x^2 > 0$, ezért a fenti egyenlőtlenséglánc első két tagjából hatványozással azt kapjuk, hogy

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (x \in (0,1),\ 0 < n \in \mathbb{N}),$$

az utolsó két tagjából pedig – szintén hatványozással – azt, hogy

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R},\ 0 < n \in \mathbb{N}).$$

Figyelembe véve, hogy as sorra jövő integrandusok pozitívak, a kapott egyenlőtlenség és az integrál intervallum szerinti additivitásának felhasználásával adódik a kívánt egyenlőtlenséglánc.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx:$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} e^{-nx^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}\omega} e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}\omega} e^{-t^2}\,dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

3. lépés. Megmutattuk tehát, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k},$$

azaz

$$\frac{n}{2n+1}\cdot(2n+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2} < \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2}{(2k)^2}.$$

Ha

$$a_n := (2n+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{2n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2}{(2k)^2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így

$$\lim(a_{n-1}) = \lim(a_n) = \frac{\pi}{2},$$

továbbá

$$\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim\left(\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

A Sandwich-tételt felhasználva azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\leq\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^2\leq\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi},$$

ami a bizonyítandó állítással egyenértékű. ■

Definíció. Legyen $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}$: $a<b$, továbbá $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c\in(a,b)$ esetén $f\in\mathfrak{R}[c,b]$. Legyen továbbá

$$F:(a,b]\to\mathbb{R},\qquad F(\alpha):=\int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Ha

$$\lim_{\alpha\to a}F(\alpha)=:A\in\mathbb{R},\tag{15}$$

akkor ezt az A számot az f **improprius integráljának** nevezzük, és a következő jelölést használjuk: $\int_a^b f:=A$. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**. Ha (15) nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**.

Példa. Ha $p\in\mathbb{R}$, így az

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p<1$, ui.

$$F(\alpha)=\int_\alpha^1\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}-\ln(\alpha) & (p=1),\\[2ex] \frac{1}{1-p}\left\{1-\alpha^{1-p}\right\} & (p\neq1)\end{cases}\qquad(\alpha\in(0,1]),$$

és így

1. $p\geq1$ esetén
$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{\alpha\to0+0}F(\alpha)=+\infty;$$
2. $p<1$ esetén
$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{\alpha\to0+0}F(\alpha)=\frac{1}{1-p}.$$

Példa.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} e^{x}\,dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{\alpha}^{0}=\lim_{\alpha\to-\infty}\left(e^{0}-e^{\alpha}\right)=1.$$

Példa.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx &= \lim_{\alpha\to1+0}\int_{\alpha}^{2}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx=\lim_{\alpha\to1+0}\int_{\alpha}^{2}\frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx=\\ &= \lim_{\alpha\to1+0}\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{2}\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}\,dx=\lim_{\alpha\to1+0}\frac{1}{2}\left[\ln(3-x)-\ln(x-1)\right]_{\alpha}^{2}=\\ &= \lim_{\alpha\to1+0}-\ln\left(\sqrt{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right)=-\infty.\end{aligned}$$

Példa.

$$\int_{0}^{1}\ln(x)\,dx=\lim_{\alpha\to0+0}\int_{\alpha}^{1}1\cdot\ln(x)\,dx=\lim_{\alpha\to0+0}\left[x\ln(x)-x\right]_{\alpha}^{1}=\lim_{\alpha\to0+0}\left(\alpha-1-\alpha\ln(\alpha)\right)=-1,$$

ui.

$$\alpha\ln(\alpha)=\frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}}\sim\frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}}=-\alpha\longrightarrow0\qquad(\alpha\to0+0).$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_{0}^{1}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]dx$$

integrált!

Útm. Mivel (vö. Analízis 2, 1. gyakorlat, 23. old))

$$\lim_{x\to0}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=0,$$

ezért az

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] & (x\neq0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

függvény folytnos, következésképpen integrálható. Ha $n\in\mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n},$$

akkor
$$n \le \frac{1}{x} < n+1,$$
tehát
$$\left[\frac{1}{x}\right] = n$$
és
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{1/(n+1)}^1 x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\,dx = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} kx\,dx = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\cdot\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \overset{\mathrm{HF}}{=} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n}{(n+1)^2}\right\} = \frac{\pi^2}{12}. \quad\blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$
integrált!

Útm.
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\alpha\to 1}\int_\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\alpha\to 1}\left[2\cdot\sqrt{x-1}\right]_\alpha^2 = 2\cdot\lim_{\alpha\to 1}(1-\sqrt{\alpha-1}) = 2. \quad\blacksquare$$

Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: $a < b$, továbbá $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c, d \in (a, b)$: $c < d$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c, d]$.

1. Ha valamely $\xi \in (a, b)$ esetén az $\int_a^\xi f$ és az $\int_\xi^b f$ improprius integrál konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**, és
$$\int_a^b f := \int_a^\xi f + \int_\xi^b f\,.$$
2. Ha van olyan $\eta \in (a, b)$, hogy az $\int_a^\eta f$ és az $\int_\eta^b f$ improprius integrálok közül legalább az egyik divergens, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**.

Példa. Legyen $0 < p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p + qx^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{pq}},$$
ui.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{p + qx^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^0 \frac{1}{p + qx^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1}{p} \int_\alpha^0 \frac{1}{1 + (\sqrt{q/p}x)^2}\,dx =$
$\displaystyle= \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{pq}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\alpha\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{pq}},$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{p + qx^2}\,dx = \ldots = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{pq}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\omega\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{pq}}.$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor igaz az
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\,dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$
állítás!

Útm. Mivel bármely

- $0 \leq \omega \in \mathbb{R}$ esetén a $t := \dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ helyettesítéssel

$$\int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt$$

és

$$\lim_{\omega\to+\infty} \left\{\int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt + \int_0^{\frac{\omega-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} \exp\left(-t^2\right) \sqrt{2}\sigma\, dt\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \sqrt{2}\sigma \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2},$$

ezért

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}.$$

- $0 \geq \alpha \in \mathbb{R}$ esetén a $t := \dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ helyettesítéssel

$$\int_{\alpha}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt$$

és

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \left\{\int_{\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt - \int_{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt,$$

ezért

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt,$$

ahonnan az állítás már következik. ■

A valószínűségszámításban és a statisztikában fontos szerepe van az

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és a

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$). Az f-et a **standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének**, Φ-t pedig a **standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének** vagy **valószínűségintegrál**nak, ill. **Gauß-féle hibaintegrál**nak nevezik. A fenti f függvény harang alakú grafikonját, Carl Fiedrich Gauß $(1777 - 1855)$ arcképét, valamint Göttingen történelmi épületeit láthatjuk az 1989-ben, a Német Szövetségi Bank által kibocsátott 10 márkás bankjegyen (vö. 34. ábra).

34. ábra

Feladat. A valószínűségszámításban a $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ **paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét** a következő módon értelmezik:

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ábrázoljuk f_1-et, ill. f_2-t a pozitív féltengelyen! Mutassuk meg, hogy minden $\lambda > 0$ esetén

1. az f_λ grafikonja alatti terület 1-gyel egyenlő:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx = 1;$$

2. az exponenciális eloszlás **várható érték**e $\frac{1}{\lambda}$, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\lambda(x)\, dx = \frac{1}{\lambda};$$

3. az exponenciális eloszlás **szórásnégyzet**e $\frac{1}{\lambda^2}$, azaz fenáll az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\lambda(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\lambda(x)\, dx\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

egyenlőség!

Útm. Az f_1 és f_2 függvényeknek a pozitív féltengelyre vett leszűkítésének grafikonjai láthatók az 35 ábrán.

1. Tetszőleges $\lambda > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\omega = \lim_{\omega \to +\infty} \left\{-\frac{1}{e^{\lambda\omega}} + 1\right\} = 1.$$

2. A várható érték parciális integrálással adódik:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\lambda(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^\omega x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \left\{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\omega + \int_0^\omega e^{-\lambda x}\, dx\right\} =$$

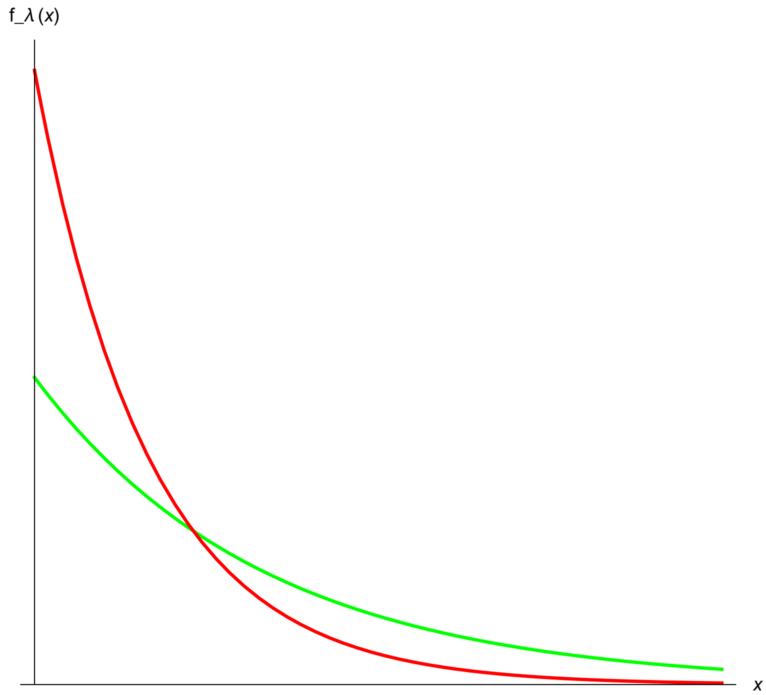
$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left\{-\frac{\omega}{e^{\lambda\omega}} - \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^\omega\right\} = \lim_{\omega \to +\infty} \left\{-\frac{\omega}{e^{\lambda\omega}} - \frac{1}{\lambda e^{\lambda\omega}} + \frac{1}{\lambda}\right\} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. A szórásnégyzetet kétszeres parciális integrálással kapjuk, ahol

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\lambda(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \\ &= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{\omega} + \int_0^{\omega} 2xe^{-\lambda x}\,dx\right\} = \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} + 2\int_0^{\omega} xe^{-\lambda x}\,dx\right\} = \\ &= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} - \left[\frac{2xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\omega} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\omega} e^{-\lambda x}\,dx\right\} = \\ &= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} - \frac{2\omega}{\lambda e^{\lambda\omega}} + \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\omega}\right\} = \\ &= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} - \frac{2\omega}{\lambda e^{\lambda\omega}} + \frac{2}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{\lambda e^{\lambda\omega}}\right)\right\} = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad \blacksquare$$



35. ábra. Az f_1 és f_2 függvények grafikonjai a pozitív féltengelyen.

Megjegyzés. Gyakran találkozunk a következő szituációval. Valamely $c \in (a, b)$, ill. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$[a, b]\backslash\{c\} \subset \mathcal{D}_f, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{x \to c+/-0} f(x) \in \{\pm\infty\},$$

és az

$$\int_a^b f$$

„integrál" meghatározása a feladat. Ha

$$\int_a^c f \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \int_c^b f \in \mathbb{R},$$

akkor a következőképpen járunk el:

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Példa.

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega \to 1} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \lim_{\alpha \to 1} \int_\alpha^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{\omega \to 1} \left[3 \cdot \sqrt[3]{x-1}\right]_0^\omega + \lim_{\alpha \to 1} \left[3 \cdot \sqrt[3]{x-1}\right]_\alpha^3 =$$

$$\stackrel{\text{HF}}{=} 3 \cdot (1 + \sqrt[3]{2}). \quad \blacksquare$$

Tétel (Integrálkritérium.) Ha $a \in \mathbb{R}$, $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ pozitív és monoton fogyó függvény, úgy bármely $b > a$ szám esetén igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(b+n) < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_b^{+\infty} f < +\infty$$

ekvivalencia.

Biz. Mivel f monoton fogyó, ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_k := f(b+k) \geq f(x) \geq f(b+k+1) =: a_{k+1} \quad (x \in [b+k,\ b+k+1]). \tag{16}$$

Az f monotonitásából következik, hogy $[b, +\infty)$ minden véges részintervallumán integrálható. Integráljuk a (16) egyenlőtlenséget a

$$[b+k,\ b+k+1]$$

intervallumon; az integrál monoton tulajdonsága alapján

$$a_k \geq \int_{b+k}^{b+k+1} f \geq a_{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{17}$$

A (17) egyenlőtlenségeket $k = 0, \ldots, n$-re összeadva

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \geq \int_{b}^{b+n+1} f \geq s_{n+1} - a_0. \tag{18}$$

Miután az f függvény pozitív,

$$\int_{b}^{b+n+1} f < \int_{b}^{+\infty} f \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ha ez utóbbi improprius integrál létezik. Ebben az esetben a monoton növekedő (s_n) sorozat korlátos, így a sor konvergens. Ha az f függvény improprius integrálja divergens, vagyis

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{b}^{\omega} f = +\infty,$$

akkor (18) miatt meg inkább $\lim(s_n) = +\infty$, azaz a sor divergens.

Megjegyzés.

- Hibabecslés:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(b+n) - \int_{b}^{+\infty} \leq f(b)$$

  (ez (18)-ból következik $n \to \infty$ esetén).

- Alkalmazások: valamely $\alpha > 0$ szám esetén

  1. a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

  (hiperharmonikus) sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$, ui. az

$$f(x) := \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

  függvény pozitív, monoton fogyó és

$$\int_1^{+\infty} f = \begin{cases} +\infty & (0 < \alpha < 1), \\ +\infty & (\alpha = 1), \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & (1 < \alpha); \end{cases}$$

valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = f(n+1).$$

Sőt $\alpha > 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \int_1^{+\infty} f \leq f(1),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

2. a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln^\alpha(n)} \right)$$

sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$, ui. az

$$f(x) := \frac{1}{(x-1)\ln^\alpha(x-1)} \qquad (x \in (2, +\infty))$$

függvény pozitív, monoton fogyó és

$$\int_3^{+\infty} f = \begin{cases} +\infty & (0 < \alpha < 1), \\ +\infty & (\alpha = 1), \\ \dfrac{1}{(\alpha - 1)\ln^{\alpha-1}(3)} & (1 < \alpha); \end{cases}$$

valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{(2+n)\ln^\alpha(2+n)} = f(3+n). \quad \blacksquare$$

A 2. zárthelyi feladatainak megoldása

A Függelék

Informatikai alkalmazások

Emlékeztető. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_n, c, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, továbbá

$$f : (c-r, c+r) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n.$$

Ekkor $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$ és tetszőleges $k \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$f^{(k)}(x) = k! \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n (x-c)^{n-k} \qquad (x \in (c-r, c+r)).$$

Megjegyezzük, hogy ennek az állításnak több következménye is van.

- Ha
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in (c-r, c+r)),$$
akkor $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$ és
$$f^{(k)}(c) = k! \cdot \alpha_k \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

- Ha $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_n, \beta_n, c, r, s \in \mathbb{R}$, $r, s > 0$, továbbá valamely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in (c-r, c+r))$$
és
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in (c-s, c+s)),$$
akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indere $\alpha_n = \beta_n$ (**hatványsorokra vonatkozó egyértelműségi télel**).

A következő fogalom informatikai tanulmányaink során lépten-nyomon előkerül.

Definíció. Az $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat **generátorfüggvény**ének, illetve **exponenciális generátorfüggvény**ének nevezzük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha van olyan $0 < r \leq \rho$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad (|x| < r),$$

illetve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad (|x| < r),$$

ahol ρ a

$$\sum_{n=0} (a_n \cdot x^n) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad \sum_{n=0} \left(a_n \cdot \frac{x^n}{n!}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara.

Példák.

1. Az

$$a_n := n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatnak nincsen generátorfüggvénye, ui. a

$$\sum_{n=0} (n! \cdot x^n) \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza a $\{0\}$ egyelemű halmaz.

2. Adott $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az

$$f(x) := (1+x)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

- generátorfüggvénye a $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots$ sorozatnak, illetve
- exponenciális generátorfüggvénye a $V_n^0, V_n^1, \ldots, V_n^n, 0, 0, \ldots$ sorozatnak, ahol

$$C_n^k := \binom{n}{k}, \qquad \text{ill.} \qquad V_n^k := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

ugyanis a binomiális tétel következtében

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

(**Fibonacci-sorozat**) akkor fennáll az

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőség (**Moivre–Binet-formula**)!

Útm. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$0 \leq F_n \leq 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ezért a

$$\sum_{n=0} (F_n \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor ρ konvergenciasugarára: $\rho \leq \frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n \qquad \left(x \in \mathbb{R} : \ |x| < \frac{1}{2}\right)$$

függvény az (F_n) sorozat generátorfüggvénye. Így

$$f(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\, x^n = x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} =$$

$$= x(f(x) + 1) + x^2 f^2(x) = x + (x + x^2) f(x).$$

A fenti egyenletet $f(x)$-re megoldva azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)x^n$$

amennyiben

$$x \in \mathbb{R}:\ |x| < \min\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Innen az állítás a hatványsorokra vonatkozó egyértelműségi tétel felhasználásával következik. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $l : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre

$$l_1 = 1, \qquad l_{n+1} = 2l_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor fennáll az

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőség (vö. „Hanoi tornyai”-feladat: Analízis 1 (136. oldal))!

Útm. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$0 < l_n \leq 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A

$$\sum_{n=0} (|l_n x^n|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sornak majoránsa a

$$\sum_{n=0} (|2^n x^n|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sor, ez pedig tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1/2$ esetén konvergens, így a

$$\sum_{n=0} (l_n x^n) \qquad (x \in \mathbb{R}:\ |x| < 1/2)$$

sor abszolút konvergens. Ezért az (l_n) sorozatnak generátorfüggvénye az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \qquad (|x| < 1/2)$$

függvény, ahol $l_0 := 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= l_1 + \sum_{n=2}^{\infty} l_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (2l_{n-1} + 1)\, x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2l_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2l_n x^{n+1} + \frac{x}{1-x} - 1 = 2x \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n + \frac{x}{1-x} = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Így egy egyenletet kapunk $f(x)$-re, amiből

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{(1-x)-(1-2x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1/2).$$

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \min\{1, 1/2\} = 1/2$ esetén

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{2^n - 1\} x^n,$$

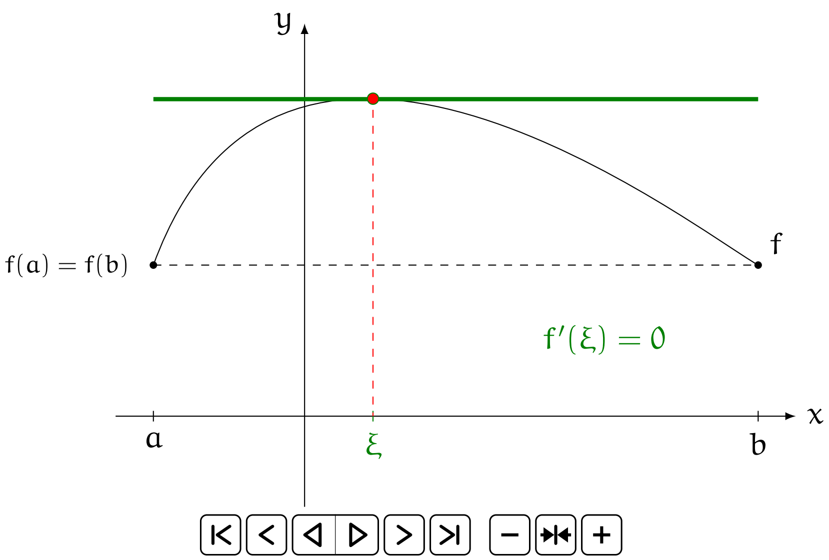
ezért az egyértelműségi tétel következtében

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

B Függelék

Középértéktételek

Emlékeztető (Rolle-tétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, továbbá $f(a) = f(b)$ teljesül. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén $f'(\xi) = 0$.



Feladat. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x & (-16 \leq x \leq 2), \\ -x^2 + 6x - 6 & (2 < x \leq 8) \end{cases}$$

1. Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei a $[-6, 6]$ intervallumon?
2. Van-e zérushelye f'-nek a $(-6, 6)$ intervallumon?

Útm.

1. Mivel
$$\lim_{x\to 2-0} f'(x) = \lim_{x\to 2-0} 1 = 1 \neq 2 = \lim_{x\to 2+0} (-2x+6) = \lim_{x\to 2+0} f'(x),$$
ezért $f \notin \mathfrak{D}[-2]$, következésképpem a $[-6, 6]$ intervallumon nem teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.

2. Világos, hogy $f'(3) = 0$ és $3 \in (-6, 6)$. ■

Feladat. Tegyük fel, hogy a folytonos $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható a $[-1, 1]$ intervallumon, kétszer differenciálható a $(-1, 1)$ intervallumon, továbbá fennáll az
$$f(-1) = f(1) \qquad \text{és az} \qquad f'(-1) = 0 = f'(1)$$
egyenlőség. Igazoljuk, hogy ekkor van olyam $\xi, \eta \in (-1, 1)$, amelyekre $\xi \neq \eta$ és
$$f''(\xi) = 0 = f''(\eta)$$
teljesül!

Útm. Mivel
$$f \in \mathfrak{C}[-1, 1] \cap \mathfrak{D}(-1, 1) \qquad \text{és} \qquad f(1) = f(-1),$$
ezért a Rolle-tétel értelmében alkalmas $c \in (-1, 1)$ esetén $f'(c) = 0$. A fentiek következtében az $f' : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ deriváltfüggvény is eleget tesz a Rolle-tétel feltételeinek a $[-1, c]$ és a $[c, 1]$ intervallumokon, következésképpen van olyan $\xi \in (-1, c)$ és $\eta \in (c, 1)$, amelyekre $f''(\xi) = 0 = f''(\eta)$ teljesül. ■

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig polinom. Igazoljuk, hogy ha az $a \in \mathbb{R}$ a p polinomnak n-szeres zérushelye, akkor p'-nek $(n-1)$-szeres zérushelye!

Útm.

1. lépés. Legyen $n = 1$. Ekkor alkalmas $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomra

$$p(x) = (x-a)q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad q(a) \neq 0.$$

Mivel

$$p'(x) = q(x) + (x-a)q'(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért $p'(a) \neq 0$.

2. lépés. Ha $1 < n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, amelyre

$$p(x) = (x-a)^n q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad q(a) \neq 0.$$

Így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} p'(x) &= n(x-a)^{n-1}q(x) + (x-a)^n q'(x) = (x-a)^{n-1}\{nq(x) + (x-a)q'(x)\} =: \\ &=: (x-a)^{n-1}r(x) \end{aligned}$$

és

$$r(a) \neq 0.$$

Következésképpen az a szám p'-nek $(n-1)$-szeres gyöke. ■

Feladat. Legyen $1 \neq a, b, c \in (0, +\infty)$. Lehet-e az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := a^x + b^x + c^x - 3$$

függvénynek három különböző zérushelye?

Útm. Világos, hogy a 0 zérushelye f-nek:

$$f(0) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0.$$

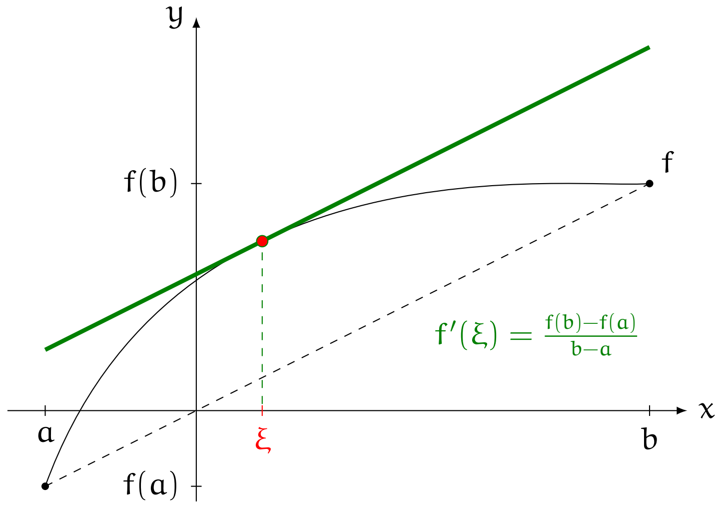
Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = a^x \ln(a) + b^x \ln(b) + c^x \ln(c) \qquad \text{és} \qquad f''(x) = a^x \ln^2(a) + b^x \ln^2(b) + c^x \ln^2(c),$$

ezért ha f-nek három különböző zérushelye lenne, akkor a Rolle-tétel következményeként f'-nek legalább két zérushelye, f''-nek pedig legalább egy zérushelye lenne, ami nem lehetséges, hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f''(x) > 0$. ■

Emlékeztető (Lagrange-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Megjegyezzük, hogy amint azt a 36 ábra is mutatja – hasonlóan a Rolle-tételhez – A Lagrange-tétel esetében is nem csak egy ξ létezhet.

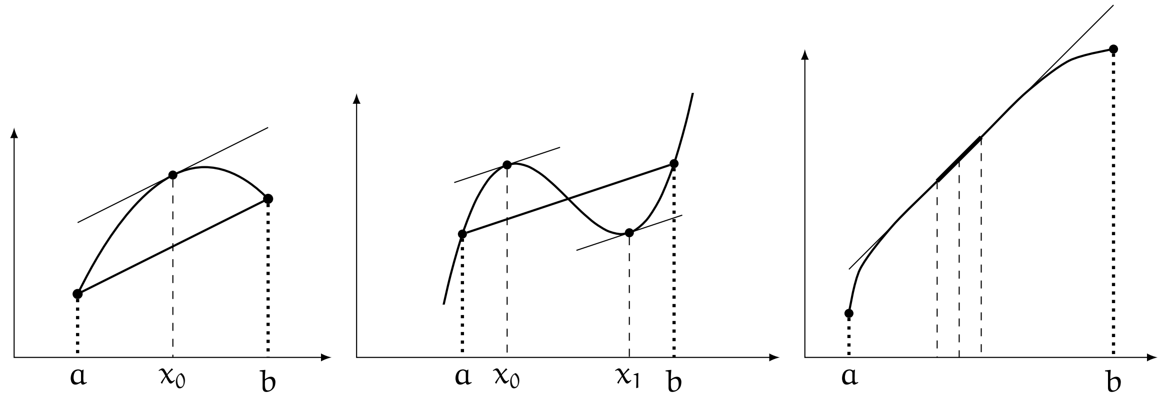
Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $-1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\sqrt[n]{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{n}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Legyen

$$f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt[n]{1 + x} - 1.$$



(a) egyetlen ξ létezik (b) két ξ létezik (c) végtelen sok ξ létezik

36. ábra

Azt kell belátnunk, hogy bármely $-1 \leq x \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) \leq \frac{x}{n} \tag{19}$$

teljesül. Világos, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ha

- $x \in (0, +\infty)$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

  $$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+\xi}\right)^{n-1}}.$$

  Mivel $\xi > 0$, ezért $1 + \xi > 1$, így az n-edik gyökfüggvény monotonitának figyelembevételével azt kapjuk, hogy

  $$\left(\sqrt[n]{1+\xi}\right)^{n-1} \geq \left(\sqrt[n]{1}\right)^{n-1} = 1.$$

  Következésképpen

  $$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{azaz} \qquad f(x) \leq \frac{x}{n} \quad (x > 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

- $x \in [-1, 0)$, akkor szintén a Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyam $\xi \in (x, 0)$,

hogy
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+\xi}\right)^{n-1}};$$
így $\xi<0$ következtében $1+\xi<1$, ill.
$$\frac{f(x)}{x}\geq\frac{1}{n},\qquad \text{azaz}\qquad f(x)\leq\frac{x}{n}\quad (x<0,\ n\in\mathbb{N}).$$

- $x=0$, akkor triviálisan telesül az egyenlőtlenség, sőt egyenlőség van. ■

Megjegyezzük, hogy ha alkalmazzuk a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget az
$$1,1,\ldots,1,1-x\in[0,+\infty)\qquad(-1\leq x\in\mathbb{R})$$
számokra, akkor azt kapjuk, hogy
$$\sqrt[n]{1+x}=\sqrt[n]{1\cdot\ldots\cdot1\cdot(1+x)}\leq\frac{1+\ldots+1+1+1+x}{n}=\frac{(n-1)\cdot1+1+x}{n}=\frac{n}{n}+\frac{x}{n}=1+\frac{x}{n}.$$

Feladat. Lássuk be, hogy bármely $x\in(-1,1)$ esetén fennáll az
$$|\arcsin(x)|\leq\frac{|x|}{1-|x|}$$
egyenlőtlenség!

Útm. Ha

- $x=0$, akkor triviálisan telesül az egyenlőtlenség, sőt egyenlőség van.
- $0\neq x\in(-1,1)$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyan $\xi\in(x,0)\cup(0,x)$ (0 és x közötti ξ), amelyre
$$\frac{\arcsin(x)}{x}=\frac{\arcsin(x)-\arcsin(0)}{x-0}=\arcsin'(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$
Mivel $|\xi|<|x|$, ezért $\xi^2<x^2$, így
$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ahonnan

$$|\arcsin(x)| = \left|\frac{\arcsin(x)}{x}\right| \cdot |x| = \frac{|x|}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

következik. Mivel $|x| < 1$, ezért igaz a

$$\sqrt{1-x^2} \geq 1-|x| \iff 1-x^2 \geq 1-2|x|+|x|^2 \iff 2|x|^2-2|x| \leq 0 \iff$$

$$\iff |x|\,(|x|-1) \leq 0.$$

ekvivalencialánc. Mivel az utolsó állítás nyilvánvaló, ezért

$$|\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{1-x^2} \leq \frac{|x|}{1-|x|}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha n rendre páros, illetve páratlan, akkor a

$$p(x) := x^n + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak legfeljebb kettő, illetve három gyöke van!

Útm.

1. lépés. Legyen $n \equiv 0\ (2)$, azaz n páros. Tegyük fel, hogy p-nek legalább három gyöke van: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2 < x_3$. A Lagrange-féle középértéktétel következtében bármely $k \in \{1; 2\}$ indexre van olyan $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, amelyre

$$0 = p(x_k) - p(x_{k+1}) = p'(\xi_k)(x_k - x_{k+1}), \qquad \text{azaz} \qquad p'(\xi_k) = 0.$$

Mivel $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$ ezért p'-nek legalább két gyöke van. Lévén, hogy $n-1$ páratlan, és

$$p'(x) = nx^{n-1} + a \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért p'-nek csak a $\left(-\dfrac{a}{n}\right)^{1/(n-1)}$ szám lehet a gyöke. Ez pedig nem lehetséges.

3. lépés. Legyen $n \equiv 1\ (2)$, azaz n páratlan. Tegyük fel, hogy p-nek legalább négy gyöke van: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, és $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. A Lagrange-féle középértéktétel következtében bármely $k \in \{1; 2; 3\}$ indexre van olyan $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, amelyre

$$0 = p(x_k) - p(x_{k+1}) = p'(\xi_k)(x_k - x_{k+1}), \qquad \text{azaz} \qquad p'(\xi_k) = 0.$$

Mivel $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$ és $x_3 \in (\xi_2, \xi_3)$ ezért p'-nek legalább három gyöke van. Lévén, hogy

$$p'(x) = nx^{n-1} + a = n\left(x^{n-1} + 0 \cdot x + \frac{a}{n}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért p' három gyöke az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^{n-1} + 0 \cdot x + \frac{\alpha}{n}$$

polinonmnak is gyöke. Ennek a polinomnak viszont $n-1$ párossága következtében legfeljebb két gyöke lehet az elősző lépés szerint, ami azt jelenti, hogy a kiinduló feltevésünk hamis volt. ■

Feladat. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre

- $f(x) \in [a, b] \quad (x \in [a, b])$;
- alkalmas $q \in [0, 1)$ esetén
$$|f'(x)| \leq q \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor f **kontrakció**, azaz bármely $x, y \in [a, b]$ esetén fennáll az

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$$

egyenlőtlenség!

Útm. A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával tetszőleges $x, y \in [a, b]$, ill. alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|. \quad ■$$

Emlékeztető (Cauchy-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, $[a, b] \subset \mathcal{D}_g$ és $f, g \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

Megjegyezzük, hogy ha tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor a Rolle-tétel következtében $g(a) \neq g(b)$, és így

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$ és $a < b$, továbbá $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\xi \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\frac{af(b) - bf(a)}{b - a} = \xi f'(\xi) - f(\xi)$$

teljesül!

Útm. Tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén legyen

$$\varphi(x) := \frac{f(x)}{x} \qquad \text{és} \qquad \psi(x) := \frac{1}{x}.$$

Ekkor $\varphi, \psi \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, továbbá bármely $x \in (a, b)$ esetén $\psi'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$, így a Cauchy-féle középértéktételt használva a

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{af(b) - bf(a)}{ab}}{\frac{a-b}{ab}} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = -\frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$$

és a

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = -(\xi f'(\xi) - f(\xi))$$

egyenlsőégekhez jutunk, ahonnan az állítás már nyilvánvaló. ■

Házi feladatok.

1. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x & (-10 \le x \le 2), \\ \\ \sqrt{8x - x^2 - 8} & \left(2 \le x \le 2(2+\sqrt{2})\right) \end{cases}$$

   (a) Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei?

   (b) Van-e zérushelye f'-nek?

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^x - p(x)$$

   függvénynek $n + 1$ zérushelye van!

3. A Rolle-téel felhasználásával mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén fennáll a

$$\sin(x) > \frac{2x}{\pi}$$

   egyenlőség!

Útm.

1. (a) Világos, hogy tetszőleges $2 \neq a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$, és

$$\lim_{x \to 2-0} f'(x) = \lim_{x \to 2-0} 1 = 1 = \lim_{x \to 2+0} \frac{8 - 2x}{2\sqrt{8x - x^2 - 8}} = \lim_{x \to 2+0} f'(x).$$

   Ezért $f \in \mathfrak{D}$, így eljesülnek a Rolle-tétel feléttelei.

   (b) Világos, hogy

$$f'(\xi) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{8 - 2\xi}{2\sqrt{8\xi - \xi^2 - 8}} = \frac{4 - \xi}{\sqrt{8\xi - \xi^2 - 8}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi = 4.$$

2. Tegyük fel, hogy f-nek legalább $n + 2$ zérushelye van. Rolle-téele következtében f'-nek legalább $n + 1$, f''-nek legalább n gyöke van. Következésképpen az $f^{(n)}$ függvénynek éegalább két gyöke van. Ez pedig nem lehetséges, hiszen alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számra

$$f(x) = e^x - c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és az exponenciális függvény szigorúan monoton.

3. Legyen
$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sin(x) - \frac{2x}{\pi}.$$
Ekkor
$$f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi} \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$
Mivel f'-nek csak egyetlen zérushelye van a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban és
$$f(0) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
ezért Rolle-tétele következtében f-nek nincsen más zérushelye a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban. Mivel $f \in \mathfrak{C}$, ezért
$$\textbf{vagy} \qquad f(x) > 0 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad \textbf{vagy} \qquad f(x) < 0 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$
Mivel
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0,$$
ezért az első eset teljesül, amiből következik az állítás. ■

Házi feladatok.

1. A Lagrange-féle középérték-tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!
   (a) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) \quad (0 < x \in \mathbb{R})$;
   (b) $\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(y) \leq x - y \quad (x, y \in \mathbb{R} : \ y < x)$;
   (c) $\dfrac{ab - a^2}{b^2 + 1} < \ln\left(\sqrt{\dfrac{b^2+1}{a^2+1}}\right) < \dfrac{b^2 - ab}{a^2 + 1}$, ahol $0 < a < b < +\infty$.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Mutassuk meg, hogy alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén fennáll a
$$\frac{b}{b-a} \cdot e^{f(b)-f(\xi)} + \frac{a}{a-b} \cdot e^{f(a)-f(\xi)} = 1 + \xi \cdot f'(\xi)$$
egyenlőség!

Útm.

1. (a) Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi : [1, 1+x] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) := \ln(t)$$

függvényre

$$\varphi \in \mathfrak{C}[1, 1+x] \cap \mathfrak{D}(1, 1+x).$$

ALagrange-féle középértéktétel következtében így alkalmas $\xi \in (1, 1+x)$ köztes számra

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\varphi(1+x) - \varphi(1)}{1+x-1} = \varphi'(\xi) = \frac{1}{\xi} < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(x+1) < x.$$

(b) A Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyan $\xi \in (y, x)$, hogy

$$\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(y) = \operatorname{arc\,tg}'(\xi)(x-y) = \frac{1}{1+\xi^2}(x-y) \leq x - y.$$

2. Az

$$f(x) := \ln(x^2+1) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$ teljesül, így alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$\frac{2\xi}{1+\xi^2} = \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(b^2+1) - \varphi(a^2+1)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right).$$

3. Mivel

$$\frac{b}{b-a} \cdot e^{f(b)-f(\xi)} + \frac{a}{a-b} \cdot e^{f(a)-f(\xi)} = 1 + \xi \cdot f'(\xi)$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{b}{b-a} \cdot e^{f(b)} + \frac{a}{a-b} \cdot e^{f(a)} = (1 + \xi \cdot f'(\xi)) \cdot e^{f(\xi)},$$

ezért az

$$F(x) := x \cdot e^{f(x)}, \quad G(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényekre

$$F(b) - F(a) = b \cdot e^{f(b)} - a \cdot e^{f(a)}, \qquad \text{ill.} \qquad G(b) - G(a) = b - a,$$

továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$G'(x) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad F'(x) = e^{f(x)} + x \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)}\left[1 + x \cdot f'(x)\right]. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok.

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $a + b \neq 0$, továbbá tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, ill. $af(b) = bf(a)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ számmal fennáll az
$$\frac{f(b) + f(a)}{b + a} = f'(\xi)$$
egyenlőség!

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $ab > 0$, továbbá tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, ill.
$$\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$
teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ számmal fennáll az
$$\frac{f(b) \cdot f(a)}{b \cdot a} = f'(\xi)$$
egyenlőség!

3. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy az
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$
egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$ intervallumban!

4. Oldjuk meg a
$$3^x + 6^x = 4^x + 5^x$$
egyenletet a Lagrange-féle középértéktétellel!

Útm.

1. Az
$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) + f(a)}{b + a} \cdot x \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvényre $F \in \mathfrak{C}[a,b] \cap \mathfrak{D}(a,b)$, ill.

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b)+f(a)}{b+a} \cdot a = \frac{a^f(b) + af(a) + bf(b) + bf(a) - af(b) - af(a)}{b+a} = \\ &= \frac{bf(b)+bf(a)}{b+a} = \frac{f(b)+f(a)}{b+a} \cdot b = F(b) \end{aligned}$$

teljesül. Így a Rolle-tétel felhasználásávak azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)+f(a)}{b+a}, \qquad \text{azaz} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b)+f(a)}{b+a}.$$

2. Az

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a} \cdot x \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

$$\begin{aligned} F(a) - F(b) &= f(a) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a} \cdot a = f(b) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a} \cdot b = \\ &= f(a) - f(b) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a} \cdot (a-b) = \\ &= \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a} \cdot (a-b) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a} \cdot (a-b) = 0 \end{aligned}$$

teljesül, hiszen a feltételekből

$$\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(a)-f(b)}{f(b)f(a)} = \frac{a-b}{ba} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)f(a)}{ba}.$$

Így a Rolle-tétel felhasználásávak azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}, \qquad \text{azaz} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}.$$

3. Legyen

$$f(x) := ax^4 + bx^3 + cx^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \cap \mathfrak{D}(0,1)$, továbbá

$$f(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = a+b+c.$$

A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi \in (0,1)$ esetén

$$a+b+c=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)=4a\xi^3+3b\xi^2+2c\xi.$$

4. Világos, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$3^x+6^x=4^x+5^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4^x-3^x=6^x-5^x.$$

Ha most

$$f(t):=t^x \qquad (0<t\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$f\in\mathfrak{C}[3,4]\cap\mathfrak{D}(3,4) \qquad \text{és} \qquad f\in\mathfrak{C}[5,6]\cap\mathfrak{D}(5,6).$$

A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával így azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi \in (3,4)$, ill. $\eta \in (5,6)$ esetén

$$x\cdot\xi^{x-1}=f'(\xi)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=4^x-3^x \qquad \text{és} \qquad x\cdot\eta^{x-1}=f'(\eta)=\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=6^x-5^x.$$

Következésképpen

$$4^x-3^x=6^x-5^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\cdot\xi^{x-1}=x\cdot\eta^{x-1}.$$

Látható tehát, hogy $x=0$ megoldás. Ha $x\neq 0$, akkor

$$x\cdot\xi^{x-1}=x\cdot\eta^{x-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi^{x-1}=\eta^{x-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{x-1}=1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=1. \qquad \blacksquare$$