

# Diszkrét matematika 1

## Gráfok

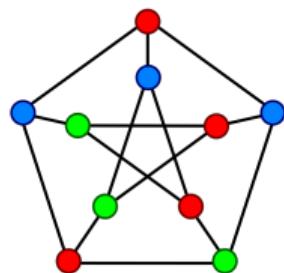
Mérai László

[merai@inf.elte.hu](mailto:merai@inf.elte.hu)

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

# Gráfok

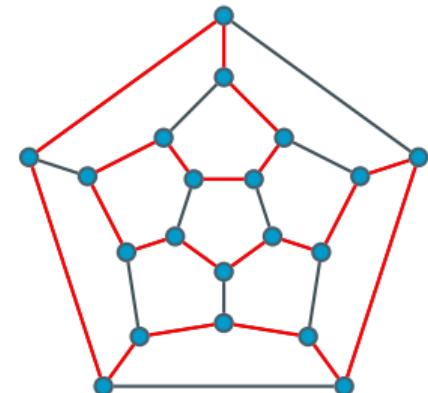


# Hamilton-út, Hamilton-kör

## Definíció

Legyen  $G$  egy véges egyszerű gráf.

- A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz.
  - A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz.
- 
- minden **élet** pontosan egyszer tartalmaz  
    → Euler-séta
  - minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz  
    → Hamilton-út



Hamilton-kör  
a dodekaéderen

# Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére

## Tétel (Dirac)

Legyen  $G = (V, E)$  egy véges, egyszerű gráf  $n = |V| \geq 3$  csúccsal. Ha minden  $v \in V$  csúcsra  $d(v) \geq n/2$ , akkor  $G$ -ben létezik Hamilton-kör.

## Bizonyítás.

A tételek adott  $n$ -re **indirekt** bizonyítjuk.

- Több adott  $n$ -re **nem** igaz az állítás.
- Ekkor vannak ellenpéldák. Legyen  $G$  egy **maximális** élszámú ellenpélda.
- Mivel  $G$  maximális élszámú ellenpélda, behúzva egy (eddig nemlétező) élt  $v$  és  $v'$  között, az új gráf már **nem** lesz ellenpélda.  $\implies$  az új gráfban **van** Hamilton-kör.
- Ekkor  $G$ -ben **van** Hamilton-út.

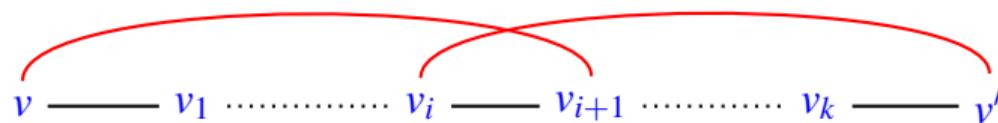
# Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére

## Tétel (Dirac)

Legyen  $G = (V, E)$  egy véges, egyszerű gráf  $n = |V| \geq 3$  csúccsal. Ha minden  $v \in V$  csúcsra  $d(v) \geq n/2$ , akkor  $G$ -ben létezik Hamilton-kör.

## Bizonyítás. (folyt.)

- $G$  maximális élszámú ellenpélda, amiben van Hamilton-út.
- **Állítás:**  $\exists i : \{v_i, v'\} \in E \wedge \{v, v_{i+1}\} \in E$



**Biz.:** Tfh nincs ilyen

- $d(v) \geq n/2 \Rightarrow$  ezek bal szomszédja nincs összekötve  $v'$ -vel  $\Rightarrow$  marad  $\leq n - 1 - n/2 = n/2 - 1$  lehetséges szomszédja  $v'$ , ez **ellentmond**  $d(v') \geq n/2$  fokszámnak
- Hamilton-kör:  $v_1, \dots, v_i, v', \dots, v_{i+1}, v$

□