Diszkrét matematika II. feladatok

Nyolcadik alkalom

Bemelegítő feladatok

1. Keresse meg az alábbi polinomok többszörös gyökeit

   a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;

   Megoldás: $f = (1,3,4,3,1)$, ennek deriváltja $f' = (4,9,8,3)$. Az f többszörös gyökei azok az f-nek és az f'-nak a közös gyökei, vagyis $\gcd(f, f')$ legnagyobb közös osztónak a gyökei.

   NEM bővített, hanem csak "sima" euklideszi algoritmusra van szükség, azaz minden lépésben az osztó helyett is, és az osztandó helyett is vehetjük annak egy kényelmesebb nemnulla számszorosát. Az első osztás így legyen $f : f'$ helyett inkább $(16 \cdot f) : f'$.

   $(16, 48, 64, 48, 16) : (4, 9, 8, 3)$ osztás maradéka $(16 \cdot r_1) = (5, 12, 7)$.

   A következő lépésben $f' : r_1$, azaz $(4, 9, 8, 3) : (\frac{5}{16}, \frac{12}{16}, \frac{7}{16})$ helyett végezzük el inkább a $(25 \cdot f') : (16 \cdot r_1)$, azaz $(100, 225, 200, 75) : (5, 12, 7)$ maradékos osztást. Ennek az osztási maradéka $(25 \cdot r_2) = (96, 96)$. Vagyis $\left(\frac{25}{96} \cdot r_2\right) = (1, 1)$.

   A következő lépésben $r_1 : r_2$ maradékos osztás helyett érdemes a $(16 \cdot r_1) : \left(\frac{25}{96} \cdot r_2\right)$ osztást elvégezni, azaz $(5, 12, 7) : (1, 1)$, aminek az osztási maradéka $16 \cdot r_3 = 0$, vagyis az utolsó nemnulla maradék r_2 volt. Mivel a legnagyobb közös osztó csak nemnulla számszoros erejéig egyértelmű, így megállapodás, hogy a végtelen sok lehetőség közül az 1-főegyütthatójút választjuk, azaz $\gcd(f, f') = (1, 1) = 1 \cdot x + 1$.

   A kitüntetett közös osztónak, $x + 1$ polinomnak csak az $x = -1$ az egyetlen gyöke, azaz $x = -1$ az f polinom többszörös gyöke.

   b) $x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$;

   Megoldás: $f = (1, 2, 1, 1, 2, 1)$, a deriváltja $f' = (5, 8, 3, 2, 2)$. $\gcd(f, f')$ kitüntetett közös osztót az előbi trükközésekhez hasonlóan euklideszi algorimussal (de annak egyes lépéseit ügyesen helyettesítve) kaphatjuk meg.

   $(25, 50, 25, 25, 50, 25) : (5, 8, 3, 2, 2)$ maradékos osztás maradéka $(-3, 6, 36, 21)$, ehelyett vegyük az ellentettjének egyharmadát: $(1, -2, -12, -7)$ és a következő lépésben ez lesz az osztó.

   $(5, 8, 3, 2, 2) : (1, -2, -12, -7)$ osztási maradéka $(99, 253, 128)$.

   Megjegyzés: Ez innen még így is gusztustalan számolás, tehát keressünk "kerülőutat": Mivel racionális együtthatós polinomról van szó, keressük először csak a *racionlis* többszörös gyökeit, racionális gyökteszttel. Olyan $\frac{a}{b}$ törteket keresünk, amikre $a|1$ és $b|1$ (illetve az f'-nak is gyökei, azaz $a|2$ és $b|5$ de ez nem ad kevesebb lehetőséget). Vagyis a racionális többszörös gyökökre a jelöltjeink csak az $x = 1$ és az $x = -1$.

   Mivel minden együttható pozitív, így a valós gyökök (tehát a racionális gyökök is) csak negatívak lehetnek, azaz csak az $x = -1$ jöhet szóba.

   $f(-1) = -1 + 2 - 1 + 1 - 2 + 1 = 0$ tehát gyöke, $f'(-1) = 5 - 8 + 3 - 2 + 2 = 0$, azaz a deriváltnak is gyöke, vagyis $x = -1$ tényleg többszörös gyök.

   Horner-táblázattal még többet megtudhatunk:

	1	2	1	1	2	1	
$c = -1$	■	1	1	0	1	1	0, $f = (x+1) \cdot (x^4 + x^3 + x + 1)$
	$c = -1$	■	1	0	0	1	0, $f = (x+1)^2 \cdot (x^3 + 1)$
		$c = -1$	■	1	-1	1	0, $f = (x+1)^3 \cdot (x^2 - x + 1)$
			$c = -1$	■	1	-2	3, azaz négyszer már nem gyök

Tehát f-nek az $x = -1$ háromszörös gyöke, minden további gyöke a $g = x^2 - x + 1$ polinomnak a gyöke, azaz f-nek a nemracionális komplex gyökei azok g-nek a gyökei, ha van nemrcionális többszörös gyöke, az g-nek többszörös gyöke. De $g = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ nem nulla, így ennek két *különböző* gyöke van (és egyik sem valós, hiszen a diszkrimináns negatív).

c) $x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$;

Megoldás: Itt is lehet f és deriváltja, f' közös gyökeit keresni, de itt összesen csak három elem jöhet szóba: $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ (ráadásul $2 \equiv -1 \mod 3$), elég ezen a három helyen megnézni a helyettesítési értékeket. (Sőt, mivel $f(0) = f_0 = 1$ a konstans tag, így a 0 nem gyöke f-nek, így azt nem is kell vizsgálni.)

$f = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$ és $f' = (5, 4, 0, 0, 0) \equiv (2, 1, 0, 0, 0) \equiv (-1, 1, 0, 0, 0) = -x^4 + x^3$. Így $f'(1) = 0$, $f'(-1) = -2 \equiv 1$ (és $f'(0) = 0$, de a 0 f-nek nem gyöke). Mivel $f(1) = 3 \equiv 0$, ezért $x = 1$ mind f-nek, mint f'-nak közös gyöke, tehát f-nek legalább kétszeres, azaz többszörös gyöke.

Másik megldás: Horner-táblázattal behelyettesítjük $c = 1$-et, illetve $c = 2 \equiv -1$-et ($c = 0$-t csak azért nem, mert arról rögtön látjuk, hogy biztosan nem gyök):

	1	1	0	0	0	1	
$c = 1$	■	1	2	2	2	2	0, $f = (x-1) \cdot (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$
	$c = 1$	■	1	0	2	1	0, $f = (x-1)^2 \cdot (x^3 + 2x + 1)$
		$c = 1$	■	1	1	0	1, tehát $c = 1$ harmadszor már nem gyök

Az eredeti $f = (x-1)^2 \cdot (x^3 + 2x + 1)$ összes többi gyöke már $x^3 + 2x + 1$ polinomnak gyöke, ennek $c = 0$ és $c = 1$ nem gyöke, csak $c = -1 \equiv 2$ lehet az, ezt kipróbáljuk, hogy gyök-e, és ha igen, többszörös-e:

	1	0	2	1	
$c = 2$	■	1	2	0	1, tehát nem gyöke

Tehát f-nek $\mathbb{Z}_3$-ból csak a $c = 1$ a gyöke, méghozzá kétszeres gyöke, más gyöke pedig nincs $\mathbb{Z}_3$-ban.

d) $x^6 + x^5 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$;

Megoldás: $f(0) = 2$, $f(1) = 1 + 1 + 1 + 2 \equiv 2$, $f(-1) = 1 - 1 + 1 + 2 = 3 \equiv 0$, tehát az egyedül szóbajöhető gyök a $c = -1$. Ha ez $f' = 6x^5 + 5x^4 + 2x \equiv 2x^4 + 2x$-nek is gyöke, akkor többszörös gyöke f-nek, különben csak egyszeres. $f'(-1) = 2 - 2 = 0$, tehát többszörös gyök. Azaz $c = -1$ az egyedüli gyök $\mathbb{Z}_3$-ban, és ez többszörös.

Másik megldás: Horner-táblázattal behelyettesítjük $c = -1 \equiv 2$-t ($c = 0$-t azért nem, mert arról rögtön látjuk, hogy biztosan nem gyök, és $c = 1$-ről is könnyen látható, hogy nem gyök, mert az együtthatók összege nem osztható 3-mal):

	1	1	0	0	1	0	2	
$c = 2$	■	1	0	0	0	1	2	0, $f = (x-2) \cdot (x^5 + x + 2)$
	$c = 2$	■	1	2	1	2	2	0, $f = (x-2)^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2)$
		$c = 2$	■	1	1	0	2	0, $f = (x-2)^3 \cdot (x^3 + x^2 + 2)$
			$c = 2$	■	1	0	0	2, negyedszer már nem gyök

Azaz $c = 2 \equiv -1$ az egyedüli gyök $\mathbb{Z}_3$-ban, és ez háromszoros gyök.

e) $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

Megoldás: Az rögtön látszik, hogy x^2 kiemelhető, azaz $c = 0$ kétszeres gyök. $(x - 0)^2$ kiemelése után $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ polinom marad, $f = x^2 \cdot g$ minden további (0-tól különböző) gyöke g-nek a gyöke.

$f = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 0)$, $g = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)$, $f' = (8, 7, 6, 5, 8, 6, 2, 0) \equiv (2, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 0)$, $g' = (6, 5, 4, 3, 4, 2) \equiv (0, 2, 1, 0, 1, 2) = (2, 1, 0, 1, 2) = 2x^4 + x^3 + x + 2$.

Mivel $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod 3$, ezért $c = 1$ gyöke g-nek, és mivel $2, +1 + 0 + 1 + 2 = 6 \equiv 0 \pmod 3$, ezért $c = 1$ gyöke g'-nak is, ezért $c = 1$ többszörös gyöke g-nek, és így többszörös gyöke f-nek is.

Mivel $1-1+1-1+2-2+1 = 1 \not\equiv 0 \pmod 3$, ezért $c=-1$ NEM gyöke g-nek, és így nem gyöke f-nek sem.

Gyakorló feladatok

2. Az alábbi f, g polinomok esetén oldja meg az $uf + vg = 1$ egyenletet

a) $f = x^5 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^3 - x \in \mathbb{Q}[x]$
Megoldás: Racionális számok fölötti polinomok körében kell bővített euklideszi algoritmust csinálni. Nem csináljuk végig :)

b) $f = x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 7x^2 + 7x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$, $g = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 11x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$
Megoldás: Racionális számok fölötti polinomok körében kell bővített euklideszi algoritmust csinálni. Nem csináljuk végig :)

c) $f = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^5 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;
Megoldás: Bővített euklideszi algoritmus modulo 2 együtthatós polinomok körében.
$f = (1,1,1,0,1,1,1,1)$, $g = (1,1,0,1,0,1)$, első lépés $f : g$ maradékos osztás:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1) & : & (1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1) & = & (1 & 0 & 1) \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Tehát $q_1 = (1,0,1)$ és $r_1 = (1,1,1,0)$, most jön $g : r_1$ maradékos osztás:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1) & : & (1 & 1 & 1 & 0) & = & (1 & 0 & 1) \\
1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Tehát $q_2 = (1,0,1)$ és $r_2 = (1,1)$, most jön $r_1 : r_2$ maradékos osztás:

$$\begin{array}{cccccccccc}
(1 & 1 & 1 & 0) & : & (1 & 1) & = & (1 & 0 & 1) \\
1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 \\
 & & 1 & 1 \\
 & & & 1
\end{array}$$

Tehát $q_3 = (1,0,1)$ és $r_3 = 1$, most jönne $r_2 : r_3$ maradékos osztás, de annak triviálisan $q_4 = r_2 = (1,1)$ a hányadosa és $r_4 = 0$ a maradéka.

$f = (1,1,1,0,1,1,1,1)$	$u_{-1} = (1)$	$\blacksquare$	$v_{-1} = (0)$
$g = (1,1,0,1,0,1)$	$u_0 = (0)$	$q_1 = (1,0,1)$	$v_0 = (1)$
$r_1 = (1,1,1,0)$	$u_1 = (1)$	$q_2 = (1,0,1)$	$v_1 = (1,0,1)$
$r_2 = (1,1)$	$u_2 = (1,0,1)$	$q_3 = (1,0,1)$	$v_2 = (1,0,0,0,0)$
$r_3 = (1)$	$u_3 = (1,0,0,0,0)$	$q_4 = (1,1)$	$v_3 = (1,0,1,0,1,0,1)$
$r_4 = (0)$	$u_4 = (1,1,0,1,0,1)$	$\blacksquare$	$v_4 = (1,1,1,0,1,1,1,1)$

Kihasználva, hogy $(1,0,1) \cdot (1,0,1) = (1,0,0,0,1)$.
Tehát $u_3 \cdot f + v_3 \cdot g = 1$, azaz $x^4 \cdot f + (x^6 + x^4 + x^2 + 1) \cdot g = 1$.

d) $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^5 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$;
Megoldás: hasonlóan.

e) $f = 2x^5 + 2x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $g = x^4 + 2x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$;
Megoldás: hasonlóan.

f) $f = 3x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $g = 2x^4 + x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$.
Megoldás: hasonlóan.

Érdekes feladatok

3. Mutasson példát olyan $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ polinomokra, melyekre

a) $f(3) = f(5) = 0 \quad$ és $\quad g(3) = g(5) = 0,\ g(0) = 1$.
Megoldás: $f(x) = (x-3)\cdot(x-5)\cdot h(x) = (x^2 - 8x + 15)\cdot h(x)$, ahol $h \in \mathbb{Q}[x]$ tetszőleges polinom.
A fenti f-be $x = 0$-t helyettesíve $f(0) = (-3)\cdot(-5)\cdot h(0) = 15h(0)$. Ha $h(0) = \frac{1}{15}$, akkor ez az f jó lesz g-nek is. Például $g(x) = \frac{1}{15}\cdot(x-3)\cdot(x-5) = \frac{1}{15}x^2 - \frac{8}{15}x + 1$.

b) $f(0) = f(3) = 0 \quad$ és $\quad g(0) = g(3) = 0,\ g(5) = 2$.
Megoldás: $f(x) = (x-0)\cdot(x-3)\cdot h(x) = (x^2 - 3x)\cdot h(x)$, ahol $h \in \mathbb{Q}[x]$ tetszőleges polinom.
A fenti f-be $x = 5$-t helyettesíve $f(0) = (-5)\cdot(5-3)\cdot h(5) = -10h(5)$. Ha $h(5) = -\frac{2}{10}$, akkor ez az f jó lesz g-nek is. Például $g(x) = -\frac{1}{5}\cdot x\cdot(x-3) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x$.

c) $f(0) = 1, f(3) = 0, f(5) = 2$.
Megoldás: Az előző két részfeladat g megoldásai: $g_a(x) = \frac{1}{15}\cdot(x-3)\cdot(x-5)$, illetve $g_b(x) = -\frac{1}{5}\cdot x\cdot(x-3)$. Ezek összege pont jó lesz itt f-nek: $f(x) = \frac{(x-3)\cdot(x-5)}{15} - \frac{x\cdot(x-3)}{10} = \frac{2\cdot(x-3)\cdot(x-5)-3\cdot(x-3)\cdot x}{30} = \frac{(2x-10-3x)\cdot(x-3)}{30} = \frac{(-10-x)\cdot(x-3)}{30} = \frac{-x^2-7x+30}{30} = -\frac{1}{30}x^2 - \frac{7}{30}x + 1$.
Hiszen ekkor $f(0) = g_a(0) + g_b(0) = 1 + 0 = 1$, $f(3) = g_a(3) + g_b(3) = 0 + 0 = 0$, $f(5) = g_a(5) + g_b(5) = 0 + 2 = 2$.

4. Mutasson példát olyan $f, g \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinomokra, melyekre

a) $f(1) = f(2) = 0 \quad$ és $\quad g(1) = g(2) = 0,\ g(6) = 2$.
Megoldás: $f(x) = (x-1)\cdot(x-2) = x^2 - 3x + 2 \equiv x^2 + 4x + 2$.
Mivel $f(6) = (6-1)\cdot(6-2) = 5\cdot 4 = 20 \equiv 6 \equiv -1$, ezért $-f(6) = 1$, és így $-2\cdot f(6) = 2$, és ezért $-2\cdot f$ jó lesz g-nek: $g(x) = -2x^2 - 8x - 4 \equiv 5x^2 + 6x + 3$.

b) $f(2) = f(6) = 0 \quad$ és $\quad g(2) = g(6) = 0,\ g(1) = 3$.
Megoldás: $f(x) = (x-2)\cdot(x-6) = x^2 - 8x + 12 \equiv x^2 + 6x + 5$.
Mivel $f(1) = (1-2)\cdot(1-6) = -1\cdot(-5) = 5$, és $2\cdot 5 = 10 \equiv 3 \pmod 7$, ezért $2\cdot f(1) = 3$, és így $2\cdot f$ jó lesz g-nek: $g(x) = 2x^2 + 12x + 10 \equiv 2x^2 + 5x + 3$.

c) $f(1) = 3, f(2) = 0, f(6) = 2$.
Megoldás: A fenti két g megoldás összege jó lesz: $f(x) = (5x^2 + 6x + 3) + (2x^2 + 5x + 3) = 7x^2 + 11x + 6 \equiv 4x + 6$.

5. Mutasson példát olyan $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomra, melyre $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$.

Megoldás: Lehet az előző feladatok mintájára, Lagrage-interpolációval, de ugyanez a Lagrange-interpoláció egy lineáris egyenletrendszer megoldásával ekvivalens:

Öt helyen van előírva a helyettesítési érték, azaz egyértelmű megoldásként egy legfeljebb negyedfokú polinomot kapunk, azaz $f(x) = f_4\cdot x^4 + f_3\cdot x^3 + f_2\cdot x^2 + f_1\cdot x + f_0$ (ahol f_4 nem feltétlenül nemnulla).

$$\begin{aligned}
1 = f(0) &= f_4 \cdot 0^4 + f_3 \cdot 0^3 + f_2 \cdot 0^2 + f_1 \cdot 0 + f_0 = 0 \cdot f_4 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_0 \\
2 = f(1) &= f_4 \cdot 1^4 + f_3 \cdot 1^3 + f_2 \cdot 1^2 + f_1 \cdot 1 + f_0 = 1 \cdot f_4 + 1 \cdot f_3 + 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_0 \\
3 = f(2) &= f_4 \cdot 2^4 + f_3 \cdot 2^3 + f_2 \cdot 2^2 + f_1 \cdot 2 + f_0 \equiv 1 \cdot f_4 + 3 \cdot f_3 + 4 \cdot f_2 + 2 \cdot f_1 + 1 \cdot f_0 \\
4 = f(3) &= f_4 \cdot 3^4 + f_3 \cdot 3^3 + f_2 \cdot 3^2 + f_1 \cdot 3 + f_0 \equiv 1 \cdot f_4 + 2 \cdot f_3 + 4 \cdot f_2 + 3 \cdot f_1 + 1 \cdot f_0 \\
1 = f(4) &= f_4 \cdot 4^4 + f_3 \cdot 4^3 + f_2 \cdot 4^2 + f_1 \cdot 4 + f_0 = 1 \cdot f_4 + 4 \cdot f_3 + 1 \cdot f_2 + 4 \cdot f_1 + 1 \cdot f_0
\end{aligned}$$

Ha az f együtthetóit egy ismeretleekből álló $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ vektornak tekintjük, mátrixosan írhatjuk a fenti egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \equiv 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \equiv 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ vagyis } \begin{array}{ccccccc} f_0 & & & & & = & 1 \\ & f_1 & & & & = & 2 \\ & & & f_3 & & = & 1 \\ & & & & f_4 & = & 4 \\ & & f_2 & & & = & 4 \end{array}$$

tehát $f = 4x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1$.

6. Mutasson példát olyan $f \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinomra, melyre $f(0) = 6$, $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(5) = 4$.

   Megoldás: A fentiekhez hasonló.

Szorgalmi feladatok

7. Tekintsük a legfeljebb 5-öd fokú valós együtthatós polinomok halmazát

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq 5\}.$$

   Mutassa meg, hogy V vektorteret alkot. Mi lesz $\dim V$? Adjon meg V-nek *két* különböző bázisát!