# Analízis I. (BSc)

Programtervező informatikus szak

# Bizonyítással kért tételek listája a megajánlott vizsgajegyhez

## Table of Contents

# 1. A teljes indukció elve.

**1. Tétel (A teljes indukció elve).** *Tegyük fel, hogy minden $n$ természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

*i)* $A(0)$ *igaz,*

*ii)* *ha* $A(n)$ *igaz, akkor* $A(n+1)$ *is igaz.*

*Ekkor az* $A(n)$ *állítás minden* $n$ *természetes számra igaz.*

***Bizonyítás.*** Legyen

$$S := \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, A(n) \text{ igaz} \right\}.$$

Ekkor $\underline{S \subset \mathbb{N}}$ és $S$ induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz, ezért $n+1 \in S$ teljesül, következésképpen $S$ induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\underline{\mathbb{N} \subset S}$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden $n$ természetes számra igaz.

## 2. A szuprémum elv.

**2. Tétel (A szuprémum elv).** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

*i)* $H \neq \emptyset$ *és*

*ii)* $H$ *felülről korlátos.*

*Ekkor*

$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

***Bizonyítás.*** Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists \xi \in \mathbb{R}\colon a \leq \xi \leq K \qquad (a \in A,\ K \in B).$$

Erre a $\xi$-re az teljesül, hogy

- $\xi$ felső korlátja $H$-nak, hiszen $a \leq \xi$ minden $a \in A$ esetén,
- $\xi$ a legkisebb felső korlát, ui. ha $K$ egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\xi$ a $H$ halmaz legkisebb felső korlátja.

# 3. Az arkhimédészi tulajdonság.

**7. Tétel (Az arkhimédészi tulajdonság).** *Minden $a > 0$ és minden $b$ valós számhoz létezik olyan $n$ természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall a > 0 \quad \text{és} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \ \text{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

***Bizonyítás.*** Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists a > 0 \ \text{ és } \ \exists b \in \mathbb{R}, \ \text{hogy} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és $H$ felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv szerint

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor $\xi$ a legkisebb felső korlátja $H$-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n_0 \cdot a > \xi - a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(n_0 + 1) \cdot a \in H$, tehát $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$, hiszen $\xi$ felső korlátja a $H$ halmaznak. Így ellentmondáshoz jutottunk.

# 4. A Cantor-tulajdonság.

**8. Tétel (A Cantor-tulajdonság).** *Tegyük fel, hogy minden $n$ természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*Ekkor*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

***Bizonyítás.*** A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Először belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R}: \; a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \in [a_n, b_n] \;\; \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

# 5. Konvergens sorozatok határértékének egyértelműsége.

**1. Tétel (A határérték egyértelműsége).** *Ha az* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő* $A$ *szám egyértelműen létezik.*

***Bizonyítás.*** Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozatra $(*)$ az $A_1$ és az $A_2$ számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1 \colon |a_n - A_1| < \varepsilon, \quad \text{és}$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2 \colon |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő $n_1$, $n_2$ indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \Big|(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)\Big| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $\Big|A_1 - A_2\Big| < \Big|A_1 - A_2\Big|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet.

## 6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata.

**3. Tétel.** *Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

***Bizonyítás.*** Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel $\varepsilon$-t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = \big|(a_n - A) + A\big| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (n > n_0).$$

Ha $n \le n_0$, akkor

$$|a_n| \le \max\big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|\big\}.$$

Legyen

$$K := \max\big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|,\ 1 + |A|\big\}.$$

Ekkor $|a_n| \le K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az $(a_n)$ sorozat korlátos.

# 7. Monoton részsorozatok létezésére vonatkozó tétel.

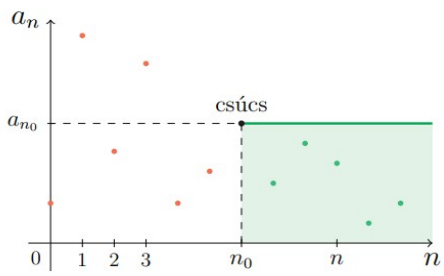
**6. Tétel.** *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik monoton részsorozata, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

***Bizonyítás.***

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy $a_{n_0}$ az $(a_n)$ sorozat ***csúcsa*** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{indexre} \quad a_n \leq a_{n_0}.$$

Két eset lehetséges.




<u>1. eset.</u> A sorozatnak ***végtelen*** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\colon a_{\nu_0} \text{ csúcselem, azaz } \forall n \geq \nu_0\colon a_n \leq a_{\nu_0},$$

$$\exists \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} \text{ csúcselem, azaz } \forall n \geq \nu_1\colon a_n \leq a_{\nu_1} \ (\leq a_{\nu_0}),$$

$$\vdots$$

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \cdots,$$

ezért a csúcsok $(a_{\nu_n})$ sorozata $(a_n)$-nek egy monoton csökkenő részsorozata.

<u>2. eset.</u> A sorozatnak legfeljebb ***véges*** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \quad \text{esetén} \quad a_n \quad \text{már nem csúcs.}$$

Mivel $a_N$ nem csúcselem, ezért

$$\exists \nu_0 > N\colon a_{\nu_0} > a_N.$$

Azonban $a_{\nu_0}$ sem csúcselem, ezért

$$\exists \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} > a_{\nu_0} \ (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \cdots.$$

Ebben az esetben tehát $(a_{\nu_n})$ sorozat $(a_n)$-nek egy (szigorúan) monoton növekvő részsorozata.

# 8. A sorozatokra vonatkozó közrefogási elv.

**7. Tétel (A közrefogási elv).** *Tegyük fel, hogy az $(a_n)$, $(b_n)$ és $(c_n)$ sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \le b_n \le c_n$,
- *az $(a_n)$ és a $(c_n)$ sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

*Ekkor a $(b_n)$ sorozatnak is van határértéke és* $\lim(b_n) = A$.

***Bizonyítás.*** Három eset lehetséges.

1. eset: $\boxed{A \in \mathbb{R}}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A$ azt jelenti, hogy $(a_n)$ és $(c_n)$ azonos $A$ határértékkel rendelkező konvergens sorozatok. A konvergencia definíciója szerint tehát

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0,$$

azaz a $(b_n)$ sorozat konvergens, tehát van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

2. eset: $\boxed{A = +\infty}$ Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(a_n) = +\infty$ értelmezése szerint

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon a_n > P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$P < a_n \le b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = +\infty$.

3. eset: $\boxed{A = -\infty}$ Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(c_n) = -\infty$ értelmezése szerint

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon c_n < P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall n > n_0$ indexre

$$P > c_n \ge b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = -\infty$.

# 9. A határérték és a rendezés kapcsolata.

**8. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az* $(a_n)$ *és a* $(b_n)$ *sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

*Ekkor:*

1. $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n < b_n.$
2. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad A \leq B.$

***Bizonyítás.***

1. Azt már tudjuk, hogy bármely két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

   $$\forall A, B \in \overline{\mathbb{R}},\ A \neq B\text{-hez } \exists r_1, r_2 > 0,\ K_{r_1}(A) \cap K_{r_2}(B) = \emptyset.$$

   Világos, hogy ha $A < B$, akkor $\forall x \in K_{r_1}(A), \forall y \in K_{r_2}(B)\colon x < y$.
   Mivel $\lim(a_n) = A$ és $\lim(b_n) = B$, így a definíció értelmében

   $$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon a_n \in K_{r_1}(A),$$
   $$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon b_n \in K_{r_2}(B).$$

   Legyen $N := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > N$ esetén

   $$a_n \in K_{r_1}(A) \quad \text{és} \quad b_n \in K_{r_2}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad a_n < b_n.$$

2. Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor a már igazolt 1. állítás szerint $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek.

# 10. Műveletek nullsorozatokkal.

**2. Tétel (Műveletek nullsorozatokkal).** *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is nullsorozat,*
2. *ha* $(c_n)$ *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *is nullsorozat,*
3. $(a_n \cdot b_n)$ *is nullsorozat.*

***Bizonyítás.***

1. Mivel $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1 \colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2 \colon |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullsorozat.

2. A $(c_n)$ sorozat korlátos, ezért

$$\exists K > 0 \colon |c_n| < K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $(a_n)$ nullsorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

következésképpen minden $n > n_0$ indexre

$$|c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz $\lim(c_n \cdot a_n) = 0$.

3. Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim(b_n) = 0$ feltételből következik, hogy $(b_n)$ korlátos sorozat. Az állítás tehát a 2. állítás közvetlen következménye.

# 11. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel.

**3. Tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal).** *Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ és a $(b_n)$ sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \qquad \textit{és} \qquad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

*Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B,$
2. $(a_n \cdot b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B,$
3. *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim(b_n) \neq 0$, *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens, és} \ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

***Bizonyítás.*** Gyakran fogjuk alkalmazni a nullsorozatok 2. alaptulajdonsága, ami azt mondja ki, hogy

$(*)$ $\qquad (x_n)$ konvergens, és $\alpha \in \mathbb{R}$ a határértéke $\iff$ $(x_n - \alpha)$ nullsorozat.

1. $(*)$ miatt elég megmutatni, hogy $\big((a_n + b_n) - (A + B)\big)$ nullsorozat. Ez nyilván igaz, mert
$$\big((a_n + b_n) - (A + B)\big) = (a_n - A) + (b_n - B),$$
és két nullsorozat összege is nullsorozat.
2. $(*)$ miatt elég megmutatni, hogy $\big(a_n b_n - AB\big)$ nullsorozat. Ez a következő átalakítással igazolható:
$$a_n b_n - AB = a_n b_n - A b_n + A b_n - AB = \underbrace{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(b_n - B)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$
A fenti gondolatmenetben a $(b_n)$ sorozat azért korlátos, mert konvergens.

# 12. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel.

*3. ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim(b_n) \neq 0$, akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens, és} \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

3. A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.

**Segédtétel.** *Ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $(b_n)$ konvergens, továbbá $B := \lim(b_n) \neq 0$, akkor az*

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

*reciprok-sorozat korlátos.*

Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett

$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \qquad \forall n > n_0 \text{ indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén

$$|b_n| \geq |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2},$$

hiszen $|B| = |B - b_n + b_n| \leq |B - b_n| + |b_n|$. Tehát

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \qquad \text{ha } n > n_0,$$

következésképpen az

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\left(1/b_n\right)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk.

Most azt látjuk be, hogy az

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \quad \text{sorozat konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

Ez $(*)$-ből következik az alábbi átalakítással:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{B \cdot b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(B - b_n)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$

A 3. állítás bizonyításának a befejezéséhez már csak azt kell figyelembe venni, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

más szóval az $(a_n/b_n)$ „hányados-sorozat” két konvergens sorozat szorzata. Így a 2. állítás és a reciprok sorozatról az előbb mondottak miatt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{is konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}.$$

# 13. Monoton növekvő sorozatok határértékére vonatkozó tétel (véges és végtelen eset).

**5. Tétel.** *Minden $(a_n)$ monoton sorozatnak van határértéke.*

*1. a) Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor $(a_n)$ konvergens és*

$$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

*b) Ha $(a_n) \searrow$ és alulról korlátos, akkor $(a_n)$ konvergens és*

$$\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

*2. a) Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = +\infty$.

*b) Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = -\infty$.

***Bizonyítás.*** Az állítást csak monoton növekvő sorozatokra fogjuk igazolni. Értelemszerű módosításokkal bizonyíthatjuk be az állítást a monoton csökkenő sorozatokra.

1. Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Legyen

$$A := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy $A$ a szóban forgó halmaznak a legkisebb felső korlátja, azaz

- $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq A$ és
- $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$.

Mivel a feltételezésünk szerint az $(a_n)$ sorozat monoton növekvő, ezért az

$$A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A.$$

becslés is igaz minden $n > n_0$ indexre. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens, és $\lim(a_n) = A$.

2. Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozat monoton növekvő és felülről nem korlátos. Ekkor

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon a_{n_0} > P.$$

A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$\forall n > n_0\colon a_n \geq a_{n_0} > P,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.

# 14. Az n :=(1 + 1/n)^n (n ∈ N+) sorozat konvergenciája.

**2. Tétel (Az $e$ szám értelmezése).** *Az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

*sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen*

$$e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

***Bizonyítás.*** Az állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség „ötletes" felhasználásaival bizonyítjuk.

- ***A monotonitás*** igazolásához az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ darab

  $$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

  számra alkalmazzuk. Mivel ezek nem mind egyenlők, ezért

  $$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

  Mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

  $$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

  amivel beláttuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.

- ***A korlátosság*** bizonyításához most az $(n+2)$ darab

  $$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

  számra alkalmazzuk ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

  $$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

  Ebből következik, hogy

  $$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

  ezért a sorozat felülről korlátos.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételből következik, hogy a sorozat konvergens.

# 15. Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére.

**4. Tétel (Newton-féle iterációs eljárás $m$-edik gyökök keresésére).** *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós szám,} \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

*rekurzióval értelmezett $(a_n)$ sorozat konvergens, és az $\alpha := \lim(a_n)$ határértékére igaz, hogy $\alpha > 0$ és*

$$\alpha^m = A.$$

***Bizonyítás.*** Az állítást több lépésben igazoljuk.

**1. lépés.** Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy az $(a_n)$ sorozat „jól definiált” és $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

**2. lépés.** Igazoljuk, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens. A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt fogjuk alkalmazni.

A sorozat *alulról korlátos* és 0 egy triviális alsó korlát (az 1. lépés alapján).

Most megmutatjuk azt, hogy az $(a_n)$ sorozat *a második tagtól kezdve monoton csökkenő*, azaz

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \qquad \text{ha } n = 1, 2, \ldots.$$

A rekurzív képlet szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^m} + m - 1\right) \leq 1 \qquad \iff \qquad a_n^m \geq A.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolására a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség következő alakját fogjuk alkalmazni: ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tetszés szerinti nemnegatív valós számok, akkor

$$(\triangle) \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$. Fontos hangsúlyozni, hogy lényegében ezt az alakot igazoltuk gyakorlaton, és csak az $m$-edik gyök egyértelmű létezése után írhatjuk fel az egyenlőtlenséget a megszokott alakban.

Vegyük észre, hogy a rekurzív képlet jobb oldalán álló összeg az $m$ darab

$$x_1 := \frac{A}{a_n^{m-1}}, \quad x_2 := a_n, \quad x_3 := a_n, \quad \ldots \quad , \quad x_m := a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

pozitív szám számtani közepe. Ezért ($\triangle$) miatt

$$a_{n+1}^m = \left(\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{m-1 \text{ darab}}\right)\right)^m = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m \geq$$

$$\geq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m = \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ \ldots \ \cdot a_n}_{m-1 \text{ darab}} = A \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sikerült igazolnunk tehát, hogy $a_n^m \geq A$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, ezzel azt, hogy az $(a_n)$ sorozat a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

Az $(a_n)$ sorozat tehát monoton csökkenő a második tagtól kezdve és alulról korlátos, ezért a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel alapján $(a_n)$ konvergens.

**3. lépés.** Kiszámítjuk a sorozat határértékét. Legyen

$$\alpha := \lim(a_n).$$

Az eddigiekből az következik, hogy $\alpha \geq 0$. Fontos észrevétel azonban az, hogy az $\alpha > 0$ egyenlőtlenség is igaz. Ez az állítás a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből, valamint a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hiszen

$$a_n^m \geq A, \ \ a_n \to \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^m \to \alpha^m \geq A > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha > 0.$$

Az $(a_n)$ sorozatot megadó rekurzív összefüggésben az $n \to \infty$ határátmenetet véve az $\alpha$ határértékre egy egyenletet kapunk. Valóban, ha alkalmazzuk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (itt használjuk az $\alpha > 0$ egyenlőtlenséget), akkor az adódik, hogy

$$\alpha \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{m}\left(\underbrace{\frac{A}{a_n^{m-1}}}_{\to \frac{A}{\alpha^{m-1}}} + (m-1) \cdot \underbrace{a_n}_{\to \alpha}\right) \to \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right).$$

A határérték egyértelműsége miatt

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$m\,\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^m = A.$$

# 16. A Cauchy-féle konvergenciakritérium sorozatokra

**6. Tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium).** *Legyen $(a_n)$ egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

***Bizonyítás.***

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens, és $A := \lim(a_n)$ a határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A konvergencia definíciója szerint

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $\forall m, n > n_0$ index esetén

$$|a_n - a_m| = \Big|(a_n - A) + (A - a_m)\Big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $(a_n)$ Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $(a_n)$ Cauchy-sorozat. Több lépésen keresztül látjuk be, hogy $(a_n)$ konvergens.

**1. lépés.** Igazoljuk, hogy $(a_n)$ korlátos sorozat.

A Cauchy-sorozat definíciójában $\varepsilon = 1$-hez van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\forall m, n > n_1\colon |a_n - a_m| < 1.$$

Legyen $m = n_1 + 1$. Ekkor minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n| = \Big|(a_n - a_{n_1+1}) + a_{n_1+1}\Big| \le |a_n - a_{n_1+1}| + |a_{n_1+1}| < 1 + |a_{n_1+1}|.$$

Következésképpen az

$$|a_n| \le \max\Big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_1}|,\ 1 + |a_{n_1+1}|\Big\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, azaz a sorozat valóban korlátos.

**2. lépés.** A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $(a_n)$-nek létezik egy $(a_{\nu_n})$ konvergens részsorozata. Jelölje

$$A := \lim(a_{\nu_n}) \in \mathbb{R}.$$

**3. lépés.** Belátjuk, hogy $\lim(a_n) = A$ is igaz.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $A$ definíciójából következik, hogy

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon \Big|a_{\nu_n} - A\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az $(a_n)$ Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon/2$-höz

$$\exists n_3 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_3\colon |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (vagyis $(\nu_n)$ szigorúan monoton növekvő), ezért $\nu_n \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$, amit teljes indukcióval lehet igazolni.

Ha $n > n_0 := \max\{n_2, n_3\}$, akkor $\nu_n > n_0$, ezért $n$ és $m := \nu_n$ is nagyobb, mint $n_2$ és $n_3$, tehát alkalmazhatók a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor

$$|a_n - A| = \Big|(a_n - a_{\nu_n}) + (a_{\nu_n} - A)\Big| \le |a_n - a_m| + |a_{\nu_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy az $(a_n)$ sorozat valóban konvergens, és $\lim(a_n) = A$.