Day 1题解

CSHwang

1 TREE

1.1 Solution 1

暴力
期望得分10pt

1.2 Solution 2

当$M = N - 1$时，给出的图为树。
此时，$F(1, i)$等价于节点1到节点i的最长边。直接DFS统计即可。
时间复杂度$O(N)$，期望得分20pt

1.3 Solution 3

当$M = N$时，给出的图为基环树。
DFS找出环。环内和环外节点分开考虑计算答案即可。
时间复杂度$O(N)$，期望得分20pt

1.4 Solution 4

最小生成树有个性质是，在所有生成树中，树的最长边最小。
该性质对于局部也同样满足，即$F(i, j)$等价于最小生成树上i节点到j节点的最长边。证明显然。
因此构造出最小生成树，然后DFS统计即可。
时间复杂度$O(N \log N)$，期望得分100pt

2 XOR

2.1 Solution 1

题目等价于给出若干个线性方程，求其变量。

直接高斯消元求解即可。

时间复杂度$O(TN^3)$，期望得分20pt

2.2 Solution 2

设$s_i = a_1\ xor\ a_2\ ...\ xor\ a_i$，那么三元组$(x, y, k)$等价于$s_{x-1}\ xor\ s_y = k$。

考虑构造一个无向图，每个三元组(x, y, k)相当于一条边权为k的无向边$(x-1, y)$

那么现在问题就变成了是否存在一个填补方案A，使得任意一条边权为c的边(u, v)都有$A_u\ xor\ A_v = c$

当$k_i \le 1$时，如果有解，则必定存在一个$A_i \le 1$的填补方案。

而对于图内的一个联通块，当一个元素确定时，整个联通块的填补方案就确定了。

基于这点，只需要枚举每个联通块内任意一个元素的填补方案，并判断是否可行即可。

时间复杂度$O(TN)$，期望得分30pt

2.3 Solution 2.5

注意到xor运算每一位互相独立，因此将A_i拆成31位，每一位分别判断是否可行即可。

时间复杂度$O(TN \log k_i)$，期望得分50-100pt

2.4 Solution 3

我们不妨先假设$k_i, A_i \leq 1$。

有一个比较显然的结论是，任意一个联通块内，合法填补方案的个数只能是0或2。因为如果存在一个合法填补方案，那么将所有节点$xor\ 1$后就能得到另外一种填补方案，而且对任何一个节点进行修改都会导致解的不合法。

现在拓宽k_i, A_i的取值范围，令$k_i, A_i < 2^{31}$

因为xor运算每一位互相独立，根据上文的结论可知，任意一个联通块内，合法填补方案的个数只能是0或2^{31}。

基于这点，判断某个联通块是否合法时，只需要任意选择一个元素填补，并判断是否可行即可。

时间复杂度$O(TN)$，期望得分100pt

3 ARRAY

3.1 Solution 1

按题意模拟。
时间复杂度$O(NM)$，期望得分10pt

3.2 Solution 2

因为k不变，所以相同询问的答案是一样的。
现在的问题就是如何求出询问的答案。
考虑DP。设$f(i)$表示询问$p = i$时的答案，显然有$f(i) = f(i + a_i + k) + 1$。预处理出$f$数组即可。
时间复杂度$O(N + M)$，期望得分40pt

3.3 Solution 2.5

对不同的k分别做DP。
时间复杂度$O(kN)$，期望得分50pt

3.4 Solution 3

注意到对单个询问暴力的时间复杂度实质上是$O(\frac{N}{k})$。
换言之，当k比较大时，一次暴力的时间复杂度是不高的。
考虑对k分块处理。设定阈值m，当$k \le m$时，DP计算出答案。当$m \le k$时，暴力处理询问。
根据均值不等式得$m = \sqrt{N}$。时间复杂度$O(M\sqrt{N})$，期望得分100pt