

## STRING

枚举子串并暴力检验是否括号序列。时间复杂度  $O(N^3)$ ，期望得分 30。

考虑如何检验一个序列是否括号序列。用一个堆栈来维护左括号，并扫描整个序列。

当扫描到一个右括号时，相当于找到一个合法的括号序列。因此只需要在扫描过程中维护答案即可。时间复杂度  $O(N)$ ，期望得分 100。

## TREE

题目中该点权值与其所有祖先权值互质等价于该点权值与子树所有结点权值互质。

考虑不断执行以下操作。寻找一个元素  $a_i$  满足  $a_i$  与区间  $[L, R]$  内所有权值互质，将  $a_i$  点当作根并递归处理区间  $[L, i-1]$  和  $[i+1, R]$ 。

显然通过该操作能得到一个合法解。

两个数字互质，当且仅当两个数字不存在公共质因数。

因此将  $a_i$  分解质因数后，就能够在  $O(N \cdot \log(a_i))$  求出一个或下一个不满足互质的元素位置。

设上一个元素为  $pre_i$ ，下一个元素为  $next_i$ ；那么元素  $a_i$  与区间  $[L, R]$  内所有的权值互质等价于  $pre_i < L$  且  $R < next_i$ 。

考虑在寻找元素时，从区间两端向中间寻找合法元素，当找到合法元素就 break 掉。

对于一个元素分解质因数，可以在权值范围内进行线性筛，并记录每个数字的最小质因数。这样分解质因数时就能在  $\log(a_i)$  分解。

## JUMP

设  $dis(i, j)$  表示  $i$  到  $j$  的距离

$$\text{那么有 } 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n F(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lceil \frac{dis(i, j)}{k} \rceil$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lceil \frac{dis(i,j)}{k} \rceil \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{dis(i,j) + [k \nmid dis(i,j)](k - dis(i,j) \bmod k)}{k} \\
&= \frac{1}{k} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n dis(i,j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [k \nmid dis(i,j)](k - dis(i,j) \bmod k))
\end{aligned}$$

其中  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n dis(i,j)$  已知能  $O(N)$  求，  
因此只需要求出  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [k \nmid dis(i,j)](k - dis(i,j) \bmod k)$  即可。

因为  $dis(i,j) = d_i + d_j - 2d_{lca(i,j)}$ ，其中  $d_i = dis(root, i)$ 。所以只需要枚举  $lca(i,j)$  即可。

考虑当前枚举节点为  $i$ ，为了统计出答案，我们需要知道  $i$  子树内所有节点到  $i$  的路径长度对  $k$  取模的结果。这个可以 DP 在  $O(NK)$  内求出，设  $f(i,j)$  表示满足  $i$  子树内到  $i$  的路径长度对  $k$  取模结果为  $j$  的数目，转移显然。

统计答案时，则需要分别枚举两者对  $k$  取模的结果，统计的时间复杂度  $O(NK^2)$

总时间复杂度  $O(NK^2)$ ，期望得分 60pt

可以换种枚举方法。枚举路径的任意一个端点。

这样需要维护子树内信息和子树外信息。做两次 DP 即可求出。

时间复杂度  $O(NK)$ ，期望得分 100pt

可以在 DP 时维护子树内的路径和、数量，子树外的路径和、数量。这样可以避免对和式的处理。

因为这个 DP 比较无脑，此处就不具体展开了。

时间复杂度  $O(NK)$ ，期望得分 100pt

具体看参考程序。