

题目概况：

第一题为背包问题与组合数问题(过河卒)的结合，较易。

第二题为思维题，不需要特别技巧，启发我们在做题时对特殊情况的考虑。

第三题为排列 DP，需要一些处理技巧。

第四题为期望 DP，需要考虑单独元素对总体的贡献。

总体难度：

一二题在 Noip 难度左右，三四题高于 Noip 难度。

题解：

1.matrix (原创的都是水题)

$f_{i,j,k}$ 表示走到 (i,j) 、背包剩余容量为 k 时的最大价值。

$f_{i,j}$ 由 $f_{i-1,j}$ 和 $f_{i,j-1}$ 按普通 01 背包的方法转移。

时间复杂度 $O(N^2V)$ ，空间 $O(N^2V)$ 。

按行或对角线滚动数组，空间 $O(NV)$ 。

2.product (2015 年北大自招夏令营)

考虑最后出栈的是 i ，则 1 至 $i-1$ 在 i 入栈前就已经弹出，与 $i+1$ 至 n 的顺序没有关系，并且 $i+1$ 至 n 的惩罚值只跟他们的顺序与 $\sum t_j (1 \leq j < i)$ 有关即将 $[1,n]$ 的计算转化为两个子问题 $[1,i-1]$ 和 $[i+1,n]$ 。

令 $f_{l,r}$ 表示 $[l,r]$ 的最小惩罚值。

$$f_{l,r} = \min(f_{l,\text{mid}-1} + f_{\text{mid}+1,r} + (st_{\text{mid}-1} - st_{l-1}) * (sd_r - sd_{\text{mid}}) + (st_r - st_{l-1}) * d_{\text{mid}}) \quad (l \leq \text{mid} \leq r, \text{其中 } st \text{ 为时间前缀和, } sd \text{ 为惩罚前缀和})$$

时间复杂度 $O(N^3)$ 。

空间复杂度 $O(N^2)$ 。

3.wave (zjoi2012)

考虑一种排列的生成方式，每次加入一个数然后和前面的数交换或插入一个位置，再计算权值。

因为是绝对值，所以考虑从小往大加，但是发现在交换或插入后与前面序列的状态有关，不好转移，而 n 又较小，考虑添加状态方便转移。

在加入一个元素后我们决策其相邻的两个元素与其的大小关系，此时就加上它对答案的影响，这样一来，我们相当于将当前的序列割成了几段，后面的数只能插入段与段的间隙里，又考虑到两端间隙的特殊性，令 $f_{i,j,k,s}$ 表示考虑完前面 i 个数、有 j 个间隔、两端的间隔有 k 个、波动值为 s 的方案数，转移参(zi)见(xing)标(nao)称(bu)。

时间复杂度 $O(N^4)$ 。

空间复杂度 $O(N^3)$,用滚动数组。

4.inversion (cyb 集训队作业 CF258D)

因为逆序对是 (x,y) 的形式，那么考虑每一对 (i,j) 对答案的贡献。

$f_{i,j}$ 表示 $a_i > a_j$ 的概率，我们发现每一个操作只影响 $O(n)$ 个 f 值，于是可以处理出每一个 f 的初始值，每次更新受影响的值即可。

时间复杂度 $O(NM)$ 。

空间复杂度 $O(N^2)$ 。

总结：

对于此类问题，我们需要从题目性质入手，如(T2 栈的特性，T4 期望的特性)，转换成熟悉的模型，再进行优化。