第 2 次作业: 第 1 题

模型部分

最大公约数的求法

设 $x = qy + p$，其中 x \ge y, y > p$，现在证明

$$\gcd(x, y) = \gcd(y, p).$$

对于 x 与 y 的任意公因数 r，有 $r|x$ 且 $r|y$，又因为 $x = qy + p$，所以 $r|p$。因此 r 是 y 和 p 的公因数。由 r 的任意性知 $\gcd(x, y) | \gcd(y, p)$。同理可得 $\gcd(y, p) | \gcd(x, y)$。由于它们互相整除，所以 $\gcd(x, y) = \gcd(y, p)$。

在代码中，我使用递归的方式来求解二者的最大公约数：

```
int CP_GCDLCM::gcd(int x, int y) {
    return y ? gcd(y, x % y) : x;
}
```

其中 `x % y` 即为式中的 p。

最小公倍数的求法

由唯一分解定理知任意正整数 x 可被唯一表示为质数幂的乘积：

$$x = \prod_{i=1} p_i^{\alpha_i},$$

其中 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots$。

假设需要求 $x = \prod_{i=1} p_i^{\alpha_i}$ 和 $y = \prod_{i=1} p_i^{\beta_i}$ 的最小公倍数。则由定义知

$$\begin{aligned} \operatorname{lcm}(x, y) &= \prod_{i=1} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}, \\ \gcd(x, y) &= \prod_{i=1} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}. \end{aligned}$$

注意到 $\alpha_i + \beta_i = \max(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \beta_i)$，故

$$\begin{aligned} xy &= \prod_{i=1} p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{i=1} p_i^{\beta_i} \\ &= \prod_{i=1} p_i^{\alpha_i + \beta_i} \\ &= \prod_{i=1} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} \cdot \prod_{i=1} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \\ &= \operatorname{lcm}(x, y) \cdot \gcd(x, y), \end{aligned}$$

因此 $\operatorname{lcm}(x, y) = \dfrac{xy}{\gcd(x, y)}$。

如何编译及运行

在 `hw2/prob1/GCDLCM/` 目录下，执行

```
g++ CP_GCDLCM.h CP_GCDLCM.cpp CP_GCDLCMMain.cpp -o CP_GCDLCMMain.exe
```

即可编译得到可执行文件 `CP_GCDLCM.exe`。运行该可执行文件，输入

```
10 4
```

即可得到满足作业要求的输出：

```
2
20
请按任意键继续. . .
```

其中第一行表示输入的两个正整数的最大公约数，第二行表示输入的两个正整数的最小公倍数。

验证部分

在本次作业中，我设计了五组数据：

测试点编号	测试数据	最大公约数	最小公倍数
1	$x = 1, y = 1001$	1	1001
2	$x = 1000000007, y = 1000000009$	1	1000000016000000063
3	$x = 40000, y = 40000$	40000	40000
4	$x = 4551, y = 147723$	123	5465751
5	$x = 124634, y = 460282$	1234	46488482

其中覆盖了：

- 两个数中有一个为正整数 1 的特殊情况（测试点 1）；
- 两个数互质的特殊情况（测试点 1，2）；
- 两个数相乘会超出 `int` 表示范围，但在 `long long` 表示范围内的特殊情况（测试点 2）；
- 两个数相同的特殊情况（测试点 3）；
- 两个数分别随机的情况（测试点 4，5）。

我认为，这样的测试数据覆盖了绝大多数可能的极端情况；如果我的程序能在这些数据下通过，则大概率也能通过更普遍的输入数据。