高等微积分教程(上)习题解答

Clever_Jimmy(xze22@mails.tsinghua.edu.cn)

2023 年 1 月 28 日

目录

1 实数系与实数列的极限

1.1 习题1.1解答

1.2 习题1.2解答

1.3 习题1.3解答

1.4 习题1.4解答

1.5 习题1.5解答

1.6 第1章总复习题解答

2 函数函数的极限与连续

2.1 习题2.1解答

2.2 习题2.2解答

2.3 习题2.3解答

第1题 证明本节的性质1与性质2.

解

第2题 证明定理2.3.1.

解

第3题 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=A^2$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)}=\sqrt{A}(A>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$

解

第4题 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>B$, 则 $\exists\delta>0$, 当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>B$.

解

第5题 证明定理2.3.2.

解

第6题 求下列极限(其中各题中的 m 与 n 均为正整数).

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(5-3x)(3x-1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$;

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}(5-3x)(3x-1)=(5-3\times 2)(3\times 2-1)=-5$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2-1}=2$

2.4 习题2.4解答

2.5 习题2.5解答

2.6 习题2.6解答

第4题 设 $f \in C[0,2a], f(0) = f(2a)$. 求证：$\exists \xi \in [0,a]$ 使得 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

证明 设 $F(x) = f(x) - f(x+a)$. 由 $f \in C[0,2a]$ 知 $F \in C[0,a]$. 注意到 $F(0) = f(0) - f(a)$, $F(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) = -F(0)$, 不妨设 $F(0) \leq 0 \leq F(a)$. 由介值定理知 $\exists \xi \in [0,a]$ 使得 $F(\xi) = 0$. 即得 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

2.7 第2章总复习题解答

3 函数的导数

3.1 习题3.1解答

3.2 习题3.2解答

3.3 习题3.3解答

3.4 第3章总复习题解答

4 导数应用

4.1 习题4.1解答

4.2 习题4.2解答

4.3 习题4.3解答

4.4 习题4.4解答

4.5 习题4.5解答

4.6 习题4.6解答

4.7 第4章总复习题解答

5 黎曼积分

5.1 习题5.1解答

5.2 习题5.2解答

5.3 习题5.3解答

5.4 习题5.4解答

5.5 习题5.5解答

5.6 习题5.6解答

5.7 习题5.7解答

5.8 第5章总复习题解答

6 广义黎曼积分

6.1 习题6.1解答

6.2 习题6.2解答

6.3 第6章总复习题解答

7 常微分方程

7.1 习题7.1解答

7.2 习题7.2解答

7.3 习题7.3解答

题目 求解下列微分方程.

(1) $y'' = 2x - \cos x, y(0) = 1, y'(0) = -1$;

(2) $xy'' + (y')^2 - y' = 0, y(1) = 1 - \ln 2, y'(1) = \frac{1}{2}$;

(3) $y'' = 3\sqrt{y}, y(0) = 1, y'(0) = 2$;

(4) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$;

(5) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$;

(6) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$;

(7) $xy'' - y' \ln y' + y' = 0$;

(8) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 = -1$;

(9) $(y'')^2 - y' = 0$.

解 (1) 等式左右两边积分, 可得 $y' = x^2 - \sin x + C_1$. 由 $y'(0) = -1$ 得 $C_1 = -1$, 故 $y' = x^2 - \sin x - 1$. 等式左右两边再次积分, 可得 $y = \frac{1}{3}x^3 + \cos x - x + C_2$. 由 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 0$, 故 $y = \frac{1}{3}x^3 + \cos x - x$.

(2) 设 $p = y'$, 则有 $xp' + p^2 - p = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p-p^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. 化简为 $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\right)\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 后, 积分得 $\ln\left|\frac{p-1}{p}\right| = \ln|x| + C_1$, 此即 $\frac{p-1}{p} = \frac{C_2}{x}$. 由于 $p(1) = y'(1) = \frac{1}{2}$, 因此 $C_2 = -1$. 故 $p = y' = 1 - \frac{1}{x+1}$. 再次积分得 $y = x - \ln(x + 1) + C$. 由于 $y(1) = 1 - \ln 2$, 故 $C = 0$. 所以 $y = x - \ln(x + 1)$.

(3) 设 $p = y'$, 则有 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 3\sqrt{y}$, 即 $p\mathrm{d}p = 3\sqrt{y}\mathrm{d}y$. 积分可得 $\frac{1}{2}p^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + C_1$. 由 $y'(0) = p(0) = 2$ 得 $C_1 = 0$, 故 $y' = p = 2y^{\frac{3}{4}}$(负值舍去). 此即 $\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{3}{4}}} = 2\mathrm{d}x$. 积分得 $4\sqrt[4]{y} = 2x + C_2$. 由于 $y(0) = 1$, 故 $C_2 = 4$. 所以 $y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4$.

(4) 注意到

$$\left(\frac{y'}{1 + x^2}\right) = \frac{(1 + x^2)y'' - 2xy'}{(1 + x^2)^2} = 0$$

因此 $y' = C_1(1 + x^2)$, 积分得 $y = C_1(\frac{1}{3}x^3 + x + C)$, 这等价于 $y = C_1(\frac{1}{3}x^3 + x) + C_2$.

(5) 设 $p = y'$, 则有 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{1-y}p^2 = 0$. 这个方程可以化简为 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2\mathrm{d}y}{y-1}$. 积分得 $\ln|p| = 2\ln|y - 1| + C_1$ 即 $|p| = e^{C_1}(y - 1)^2$. 由于 $p \equiv 0$ 也为方程的解, 故方程的解可表示为 $p = C_2(y - 1)^2$. 因此 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_2(y - 1)^2$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = C_2\mathrm{d}x$. 积分得 $\frac{1}{1-y} = C_2x + C_3$. 故原方程的解为 $y = 1 - \frac{1}{C_2x+C_3}$.

(6) 设 $p = y''$, 则有 $(p')^2 + p^2 = 1$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1-p^2}} = \pm\mathrm{d}x$, 或 $p^2 \equiv 1$.

对于前者而言, 积分得 $x = \arcsin p - C_1$, 即 $y'' = p = \sin(x + C_1)$(没有正负号是因为可以取 $C_1 \leftarrow C_1 + \pi$ 得到负号). 积分得 $y' = -\cos(x + C_1) + C_2$, 再积分得 $y = -\sin(x + C_1) + C_2x + C_3$.

对于后者而言, 易知有解 $y=\pm\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$.

(7) 注意到

$$\left(\frac{\ln y'-1}{x}\right)'=\frac{\left(\frac{y''}{y'}\right)x-\ln y'+1}{x^2}=\frac{xy''-y'\ln y'+y'}{x^2y'}=0$$

因此 $\frac{\ln y'-1}{x}=C_1$, 即 $\ln y'-1=C_1x$, 化简得 $\mathrm{d}y=e^{C_1x+1}\mathrm{d}x$. 积分得 $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}+C_2$.

(8) 设 $p=y'$, 则有 $1+p^2+p'(1+x)^2=0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. 积分得 $\arctan p=-\arctan x+C$, 即 $\frac{x+p}{1-xp}=\tan C=C_1$. 化简得 $p=\frac{C_1-x}{1+C_1x}$, 积分得 $y=\ln(1+C_1x)-\frac{1}{C_1}\cdot\frac{1}{1+C_1x}+C_2(C_1\neq 0)$, 或 $y=-\frac{1}{2}x^2+C_2(C_1=0)$.

(9) 设 $p=y'$, 则有 $(p')^2=p$, 即 $p'=\pm\sqrt{p}$, 化简得 $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{p}}=\pm\mathrm{d}x$, 或 $p\equiv 0$.

对于前者而言, 积分得 $x=\pm 2\sqrt{p}+C_1$, 即 $y'=p=\frac{1}{4}(x-C_1)^2$, 再次积分得 $y=\frac{1}{12}(x-C_1)^3+C_2$.

对于后者而言, 易知有解 $y=C_3$.

7.4 习题7.4解答

7.5 习题7.5解答

第1题

解

第2题

解

第3题

解

第4题

解

第5题 设曲线 $y=y(x)$ 满足 $4x^2y''-4xy'-y=0$, 过点 $(1,4)$, 且在点 $(1,4)$ 处与 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 $y=y(x)$.

解 设 $y=x^\lambda$, 则 $4\lambda(\lambda-1)+4\lambda-1=0$. 解得 $\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=-\frac{1}{2}$. 故通解为 $y=C_1\sqrt{x}+\frac{C_2}{\sqrt{x}}$. 求导得 $y'=\frac{C_1}{2\sqrt{x}}-\frac{C_2}{2x\sqrt{x}}$. 由题

$$\begin{cases}y(1)=4\\ y'(1)=1\end{cases}\implies\begin{cases}C_1+C_2=4\\ \frac{1}{2}(C_1-C_2)=1\end{cases}$$

解得 $C_1=3,C_2=1$. 故 $y=3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

第6题 设 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 为微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个解, 求常系数 a,b,c 及微分方程的通解.

解

第7题 已知连续函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x)=\sin x+\int_0^x(t-x)f(t)\mathrm{d}t,$$

求 $y=f(x)$.

解 $f(0)=0$. 由 $f(x)=\sin x+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 两边求导得 $f'(x)=\cos x+xf(x)-\big(xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\big)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 这蕴含着 $f'(0)=1$. 再次求导得 $f''(x)=-\sin x-f(x)$, 即 $y''+y=-\sin x$. 考虑方程 $z''+z=e^{-ix}$. 特征方程为 $\lambda^2+1=0,\lambda_1=i,\lambda_2=-i$. 因此 $\lambda=-i$ 为特征方程的一个根. 设其有特解 $Z(x)=Axe^{-ix}$, 代入有 $A=\frac{i}{2}$, 则 $Z(x)=\frac{i}{2}e^{-ix},\mathrm{Im}Z(x)=\frac{1}{2}x\cos x$. 故原微分方程有通解 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$. 又因为 $f(0)=0,f(1)=1$, 故 $C_1=0,C_2=\frac{1}{2}$. 因此 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

7.6 习题7.6解答

7.7 第7章总复习题解答