高等微积分教程(下)习题解答

Clever_Jimmy(xze22@mails.tsinghua.edu.cn)

2023 年 7 月 26 日

目录

1 多元函数及其微分学 **4**
1.1 习题1.1解答 4
1.2 习题1.2解答 5
1.3 习题1.3解答 7
1.4 习题1.4解答 10
1.5 习题1.5解答 15
1.6 习题1.6解答 19
1.7 习题1.7解答 22
1.8 习题1.8解答 25
1.9 习题1.9解答 25
1.10 第1章总复习题解答 31

2 含参积分及广义含参积分 **32**
2.1 习题2.1解答 32
2.2 习题2.2解答 34
2.3 习题2.3解答 35
2.4 第2章总复习题解答 37

3 重积分 **40**
3.1 习题3.1解答 40
3.2 习题3.2解答 40
3.3 习题3.3解答 41
3.4 习题3.4解答 52
3.5 习题3.5解答 56
3.6 第3章总复习题解答 60

4 曲线积分与曲面积分 **61**
4.1 习题4.1解答 61
4.2 习题4.2解答 61
4.3 习题4.3解答 67
4.4 习题4.4解答 70
4.5 习题4.5解答 74
4.6 习题4.6解答 77
4.7 习题4.7解答 82
4.8 第4章总复习题解答 87

5 常数项级数 **90**

5.1 习题5.1解答 90
5.2 习题5.2解答 92
5.3 习题5.3解答 95
5.4 习题5.4解答 98
5.5 第5章总复习题解答 98

6 函数项级数 **99**

6.1 习题6.1解答 99
6.2 习题6.2解答 100
6.3 习题6.3解答 103
6.4 第6章总复习题解答 108

7 Fourier 级数 **110**

7.1 习题7.1解答 110
7.2 习题7.2解答 110
7.3 第7章总复习题解答 110

1 多元函数及其微分学

1.1 习题1.1解答

第1题 证明: n 维 Euclid 空间中的距离 $\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_n$ 满足正定性、对称性与三角不等式.

证明 不妨设 $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\mathbf{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 则 $\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}$.

(1) 正定性: 显然 $\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}\geq 0$, 且 $\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_n=0$ 当且仅当 $\forall i\in[1,n]$ 均有 $x_i-y_i=0$, 此即 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

(2) 对称性: 显然 $\|\mathbf{Y}-\mathbf{X}\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_n$

(3) 三角不等式: 再设 $\mathbf{Z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$. 要证 $\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_n\leq\|\mathbf{X}-\mathbf{Z}\|_n+\|\mathbf{Z}-\mathbf{Y}\|_n$, 只需证 $\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n(z_i-y_i)^2}$. 由于

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}&=\sqrt{\sum_{i=1}^n[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)^2+\sum_{i=1}^n(z_i-y_i)^2-2\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)(z_i-y_i)}\\&\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)^2+\sum_{i=1}^n(z_i-y_i)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)^2\sum_{i=1}^n(z_i-y_i)^2}}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n(z_i-y_i)^2}\end{aligned}$$

其中不等号由柯西不等式得到. 故三角不等式得证.

第2题 求下列集合 Ω 的内部、外部、边界和闭包.

(1) Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 的子集, $\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$;

(2) Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 的子集, $\Omega=\{(x,y,z)|1\leq x^2+y^2+z^2<4\}$.

解 (1) 内部: $\varnothing$, 外部: $\{(x,y)|x^2+y^2\neq 1\}$, 边界: $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 闭包: $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$.

(2) 内部: $\{(x,y,z)|1<x^2+y^2+z^2<4\}$, 外部 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2<1\vee x^2+y^2+z^2>4\}$, 边界: $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\vee x^2+y^2+z^2=4\}$, 闭包: $\{(x,y,z)|1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}$.

第3题 证明下列命题:

(1) 已知 $S\subset\mathbb{R}^n$, 则 S 为开集 $\iff S=\mathring{S}$;

(2) 若 $S\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, 则 $S\cap\partial S=\varnothing$;

(3) 任意多个开集之并为开集; 有限个开集之交为开集;

(4) 若 $A,B\subset\mathbb{R}^n$, 记 $S=A\cap B,T=A\cup B$, 则 $\mathring{S}=\mathring{A}\cap\mathring{B},\mathring{T}\supset\mathring{A}\cup\mathring{B}$;

(5) 若 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则集合 $\mathring{A}$ 的内部等于 $\mathring{A}$.

证明

第4题

证明

第5题

证明

第6题

证明

第7题 下列集合中, 哪些是连通的, 哪些是非连通的?

(1) $D = \{(x, y)|y \neq 0\}$;

(2) $D = \{(x, y)|0 < x^2 + y^2 \leq 2\}$;

(3) $\Omega = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \neq 0\}$;

(4) $\Omega = \{(x, y, z)|1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

解 (1) 不是. (2) 是. (3) 是. (4) 是.

第8题

解

第9题 证明: $\mathbb{R}^n$ 中的收敛点列必为有界点列.

证明

1.2 习题1.2解答

第3题 已知 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 设 $\begin{cases} m = x + y, \\ n = \frac{y}{x}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x = \frac{m}{n+1}, \\ y = \frac{nm}{n+1}. \end{cases}$ 因此 $f(m,n) = x^2 - y^2 = \frac{m^2(1-n)}{1+n} \quad (n \neq -1)$. 而当 $n = -1$ 时显然有 $f(m,n) = 0$. 故

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(1-y)}{1+y}, & y \neq -1, \\ 0, & y = -1. \end{cases}$$

第4题 如果 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对任意实数 t 满足 $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则称 f 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 k 次齐次式, 下列函数是否为齐次式? 若是, 求出次数 k.

(1) $f(x,y,z) = \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$;

(2) $f(x,y,z) = \sqrt{x^3+y^3+z^3} + xyz$;

(3) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

解 (1) $f(tx, ty, yz) = \frac{(tx)^3+(ty)^3+(tz)^3}{(tx)(ty)(tz)} = \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = t^0 f(x,y,z)$. 因此 $k = 0$.

(2) $f(tx,ty,tz) = \sqrt{(tx)^3+(ty)^3+(tz)^3} + (tx)(ty)(tz) = t^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3+y^3+z^3} + t^3 xyz$. 因此不是齐次式.

(3) $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(tx_i)(tx_j) = t^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = t^2 f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 因此 $k = 2n^2$.

第6题 $\mathbb{R}^2$ 的子集 D 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 $F: (x,y) \mapsto (u,v)$ 为 $\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = xy, \end{cases}$ 其中定义域 D 是由四条曲线 $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, xy = 1, xy = 2$ 围成的平面区域, 求 F 的值域 $F(D)$, 并问: 在 D 内的直线 $x = a$ 映射为何曲线?

解 由题知 $F(D)$ 中区域被夹在 $x^2 - y^2 = 1$ 和 $x^2 - y^2 = 4$ 之间, $xy = 1$ 和 $xy = 2$ 之间. 因此 $F(D) = \{(u,v) | 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 2\}$.

因为当 $x = a$ 时 $u = a^2 - y^2, v = ay$, 所以消去 y 可得曲线 $a^2 u + v^2 = a^4 (1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 2)$.

第7题 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 $F: (x,y) \mapsto (u,v)$ 为 $\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2}, \\ v = \frac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$

问: (1) $O - xy$ 平面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 映射为 $O - uv$ 平面上的什么曲线?

(2) $O - xy$ 平面上的线段 $y = x (0 < x \leq 1)$ 映射为 $O - uv$ 平面上的什么曲线?

解 (1) 解得 $\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2}, \\ y = \frac{v}{u^2+v^2}. \end{cases}$ 代入 $x^2 + y^2 = R^2$ 得 $u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2}$.

(2) 代入 $y = x (0 < x \leq 1)$ 得 $v = u (v \geq \dfrac{1}{2})$.

1.3 习题1.3解答

第1题 下列函数当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 其极限是否存在? 若存在, 求出极限.

(1) $\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(3) $(x^2+y^2)e^{-x-y}$;

(5) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

(7) $\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$;

(9) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

(11) $\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$;

解 (1) 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $x^2+y^2\to 0$. 因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\arcsin u}{u}=1$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)e^{-x-y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}e^{-x-y}=0$.

(5) 当 (x,y) 沿直线 $x=0$ 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\frac{-y^2}{y^2}=-1$. 当 (x,y) 沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2}=1$. 两者不相等, 故极限不存在.

(7) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx^3-x$ 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\dfrac{x^3-(kx^3-x)^3}{x+(kx^3-x)}=\dfrac{-k^3x^9+3k^2x^7-3kx^5+2x^3}{kx^3}=\dfrac{-k^3x^6+3k^2x^4-3kx^2+2}{k}\to\dfrac{2}{k}\quad(x\to 0)$. 因此极限随着 k 的变化而变化, 故极限不存在.

(9) 当 (x,y) 沿直线 $x=0$ 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\dfrac{1}{y^2}\to+\infty,\quad y\to 0$. 故极限不存在.

(11) 当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\dfrac{x^8}{(x^2+x^4)^3}>\dfrac{1}{x^4}\to+\infty,\quad x\to 0$. 故极限不存在.

第2题 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left.\dfrac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=3\\ y=0}}=\dfrac{\ln 3}{3}$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}e^y\cdot\dfrac{x^2}{e^x}+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}\dfrac{1}{e^x}\cdot y^2e^y=0\cdot 0+0\cdot 0=0$

(5) 由于 $0\le\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

第3题 讨论下列累次极限与二重极限是否存在, 若存在求值.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $\lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to0^+}}\dfrac{x^y}{1+x^y}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

解 (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{x^y}{1+x^y}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}=\lim\limits_{y\to0^+}1=1$. 由 1.3.1 节结论知 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to0^+}}\dfrac{x^y}{1+x^y}$ 不存在.

(3) 显然累次极限均不存在. 因为 $0\le\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\le|x+y|$, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x+y|\to0$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$.

第4题 (1) 举例说明累次极限存在性与二重极限的存在性互不包含;

(2) 证明: 若二元函数 f 在某一点的两个累次极限和二重极限都存在, 则这三个值相等.

解 (2) 由于 $f(x,y)$ 的二重极限存在, 不妨设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$. 再设 $g(x)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$, 即证 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$. 由定义知 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$ 使得在 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时有 $|f(x,y)-A|<\dfrac{\epsilon}{2}$. 左右两侧取极限可知 $\lim\limits_{y\to y_0}|f(x,y)-A|\le\dfrac{\epsilon}{2}$. 由于绝对值函数是连续函数, 因此可以转化为 $\left|\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)-A\right|\le\dfrac{\epsilon}{2}<\epsilon$, 即 $|g(x)-A|<\epsilon$. 观察此时 δ 的取值范围, 发现有 $0<|x-x_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$. 故由定义可知 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$. 此即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$. 由对称性可知 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$. 命题得证.

第5题 用定义证明函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

解

第6题 判断下列函数的在 $(0,0)$ 点的连续性.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\ne0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

解 (1) 因为 $0\le\left|\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\left|(x+y)\left(1+\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)\right|\le\dfrac{3}{2}(x+y)$, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3}{2}(x+y)=0$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 因此该函数在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1\neq 0=f(0,0)$, 所以该函数在 $(0,0)$ 处不连续.

(3) 因为 $0\le\left|\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\le\left|\dfrac{x^2+y^2}{(2xy)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{2}}\right|$, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{2}}=0$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 因此该函数在 $(0,0)$ 处连续.

(4) 考虑极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. 当 (x,y) 沿着 $y=k\sqrt{x}$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有 $f(x,y)=f(x,k\sqrt{x})=\dfrac{k^2}{1+k^4}$ 随着 k 的变化而变化. 因此该极限不存在. 故该函数在 $(0,0)$ 处不连续.

第7题 考察下列函数在平面上的连续性, 并指出在哪些点上函数是连续的.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y^2}{x^3+y^3}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

解 (1) 当 $x+y\neq 0$ 的时候显然函数是连续的. 现只需考察 $x+y=0$ 时的情况即可. 当 $x+y=0$ 且 (x,y) 不趋向于 $(0,0)$ 时, 显然分子不为 0, 但分母趋向于 0, 极限不存在, 因此在 $x+y=0(x\neq 0)$ 的区域内不连续. 最后再考察 $(x,y)\to(0,0)$ 的情况. 假设 (x,y) 沿着 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(kx)^2}{x^3+(kx)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-k^2x}{(1+k^3)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-k^2}{2x(1+k^3)}$ 极限不存在. 因此函数在 $(0,0)$ 处也不连续. 综上所述, 函数在除了 $x+y=0$ 这条直线外的区域都连续.

(2) 先固定 $x=x_0$, $f(x,y)=f(x_0,y)=\dfrac{x_0}{y^2e^{\frac{x_0^2}{y^2}}}\to 0,\quad y\to 0$. 再考虑当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限值. 不妨设 (x,y) 沿着 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(kx)^2}e^{\frac{1}{k^2}}$ 不存在. 因此该函数在 $(0,0)$ 处不连续, 在平面上其他区域内都连续.

第8题 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}f(x,y)=+\infty$, 证明: f 有最小值.

证明 记 $f(0,0)=A$. 因为 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)=+\infty$, 所以 $\exists r_0>0$ 使得 $\forall (x,y)$ 满足 $x^2+y^2>r_0^2$, 都有 $f(x,y)>A$. 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le r_0^2\}$ 为一有界闭集, 故 D 中可以取到最小值. 不妨设 $f(x_0,y_0)$ 为 D 中最小值. 由于 $(0,0)\in D$, 则 $f(x_0,y_0)\le f(0,0)=A$. 所以 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x_0,y_0)\le f(x,y)$. 所以 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在最小值.

第9题 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)=o(\rho^m), g(x,y)=o(\rho^n)$, 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 证明:

(1) $f(x,y)+g(x,y)=o(\rho^k), k=\min\{m,n\}$,

(2) $f(x,y)g(x,y)=o(\rho^{m+n})$.

证明 (1) 由题知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\rho^m}=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{g(x,y)}{\rho^n}=0$. 不妨设 $m\le n$. 因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+g(x,y)}{\rho^m}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{f(x,y)}{\rho^m}+\rho^{n-m}\dfrac{g(x,y)}{\rho^n}\right)=0+0=0$. 由定义知 $f(x,y)+g(x,y)=o(\rho^k)$, 其中 $k=\min\{m,n\}$.

(2) 由题知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\rho^m}=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{g(x,y)}{\rho^n}=0$. 因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)g(x,y)}{\rho^{m+n}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{f(x,y)}{\rho^m}\cdot\dfrac{g(x,y)}{\rho^n}\right)=0\cdot 0=0$. 由定义知 $f(x,y)g(x,y)=o(\rho^{m+n})$.

第10题 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 讨论下列无穷小的阶(若有阶, 求阶; 若无阶, 说明理由).

(1) $\sin(x^2+y^2)$;

(2) $\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$;

(3) $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(4) $x+y+2xy$;

解 (1) 记 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$. 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\sin\rho^2}{\rho^2}=1$. 故为 2 阶无穷小.

(2) 记 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$. 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\ln(1+\rho)}{\rho}=1$. 故为 1 阶无穷小.

(3) 记 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$. 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^k}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho}}{\rho^k}$ 不可能为一固定常数, 所以无阶.

(4) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y+2xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^k}$ 不可能为一固定常数, 所以无阶.

1.4 习题1.4解答

第1题 求下列函数的偏导数:

(1) $z=ax^2y+bxy^2$;

(3) $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$;

(5) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y^2})$;

(7) $z=\cos(1+2^{xy})$;

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2axy+by^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=ax^2+2bxy$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}$.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{y}{y^2-x^2-x\sqrt{x^2-y^2}}$.

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin(1+2^{xy})\cdot 2^{xy}\cdot\ln(2^y)=-2^{xy}y\sin(1+2^{xy})\ln 2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin(1+2^{xy})\cdot 2^{xy}\cdot\ln(2^x)=-2^{xy}x\sin(1+2^{xy})\ln 2$.

第2题 考察下列函数在坐标原点的可微性.

(1) $f(x,y)=\sqrt{|x|}\cos y$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=|x-y|\,\phi(x,y)$, 其中 $\phi(x,y)$ 在原点的某个邻域内连续, 且 $\phi(0,0)=0$.

解 (1) 由于 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x|}}{\Delta x}$ 不存在, 所以该函数在原点不可微.

(2) 由于 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, $f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$, 所以 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-0-0-0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{2\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$. 由于沿着 $\Delta y=k\Delta x$ 趋于 $(0,0)$ 时极限值为 $\dfrac{2k}{1+k^2}$ 随着 k 的变化为变化, 所以该函数在原点不可微.

(3) 由于 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, $f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$, 所以 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-0-0-0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2}$. 由于沿着 $\Delta y=k\Delta x$ 趋于 $(0,0)$ 时极限值为 $\dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$ 随着 k 的变化而变化, 所以该函数在原点不可微.

(4) 由于 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\,\phi(\Delta x,0)}{\Delta x}=0$, $f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{|\Delta y|\,\phi(0,\Delta y)}{\Delta y}=0$,

故

$$\begin{aligned}
\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\,\phi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\
&\le \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(|x|+|y|)\phi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\
&\le \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}\phi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\sqrt{2}\phi(\Delta x,\Delta y)\to 0
\end{aligned}$$

所以该函数在原点可微.

第4题 求下列函数的全微分:

(1) $u=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$, 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$;

(3) $z=(x+y)^2$;

(5) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$;

(7) $u=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$;

解 (1) 记 $\mathbf{r}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. $\mathrm{d}u=2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$. 代入得 $\mathrm{d}u\big|_{\mathbf{r}}=(\sqrt{2}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-\mathrm{d}z)\cos 1$.

(3) 由于 $z=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, 故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x+2y$. 所以 $\mathrm{d}z=2(x+y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

(5) 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=-\dfrac{2x}{(x+y)^2}$, 故 $\mathrm{d}z=\dfrac{2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{(x+y)^2}$.

(7) $\mathrm{d}u=\dfrac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2+z^2}=\dfrac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)}{1+x^2+y^2+z^2}$.

第7题 设 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 存在, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 连续, 证明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

证明 考虑函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的该变量 $\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$. 利用一元函数的中值定理得

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)\\
&= f_y(x_0+h,y_0+\mu k)k+f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0),\quad \mu\in(0,1)\\
&= f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)k+\beta k,
\end{aligned}$$

其中 $\beta=f_y(x_0+h,y_0+\mu k)-f_y(x_0,y_0)$.

由题知 $f_y(x,y)$ 连续, 因此 $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\beta(h,k)=0$. 由题知 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 存在, 这说明 $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)$ 是关于 h 的一阶无穷小. 不妨记 $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\lambda h$. 故 $\Delta f=\lambda h+f_y(x_0,y_0)k+\beta k=\lambda h+f_y(x_0,y_0)k+o(\rho)$. 此即 f 在点 (x_0,y_0) 处可微. 命题得证.

第8题 设函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, 证明: 函数 f 在原点处连续、偏导数存在, 但沿方向 $l=(a,b)(ab\neq 0)$ 的方向导数不存在.

证明 由于 f 是初等函数的复合, 所以函数 f 在原点处连续. 因为 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0, f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$, 所以 f 在原点处的偏导数均存在. 设 l 单位化得 $l_0=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{N}$. 则沿着 l_0 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l_0}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(d\cos\theta,d\sin\theta)-f(0,0)}{d}=\sqrt[3]{\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{d}}$. 由于 $\theta\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{N}$, 故该极限不存在. 因此题中所表述的方向导数不存在. 命题得证.

第11题 求下列函数在点 P_0 处沿方向 l 的方向导数.

(1) $z=\cos(x+y),P_0=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),l=(3,-4)$;

(3) $z=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_ix_j,P(1,1,\cdots,1),l=(-1,-1,\cdots,-1)$;

解 (1) 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin(x+y)$, 且将 l 单位化后得到 $r=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$, 所以 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=-\dfrac{3}{5}\sin(0+\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{4}{5}\sin(0+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{5}$.

(3) 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}=2\sum\limits_{j=1}^{n}x_j$, 且将 l 单位化后得到 $r=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}},-\dfrac{1}{\sqrt{n}},\cdots,-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 所以将 $P(1,1,\cdots,1)$ 代入得 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=2\sum\limits_{j=1}^{n}n\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=-2n\sqrt{n}$.

第12题 求下列数量场的梯度.

(1) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$;

解 (1) 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 故 $\nabla u=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

(3) 由于 $\forall i\in[1,n],\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=1$, 故 $\nabla u=(1,1,\cdots,1)$.

第13题 已知函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz$ 及点 $P(1,1,1)$, 求 u 在 P 点的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 的最值, 并指出取得最值时的方向, 以及哪个方向的方向导数为零.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-y-z, \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y-x+z, \dfrac{\partial u}{\partial z}=2z-x+y$. 因此在 P 点处梯度的方向为 $(0,2,2)$, 单位化可得 $l_0=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 将 $P(1,1,1)$ 以及 $\pm l_0$ 代入可得 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 方向为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 最小值为 $-2\sqrt{2}$, 方向为 $\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 对任意一个垂直于梯度的方向 $(k,1,-1)(k\in\mathbb{R})$ 或 $(k,-1,1)(k\in\mathbb{R})$,都有方向导数为 0.

第14题 求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(1) $u=\cos^2(ax-by)$;

(3) $u=xe^{-xy}$;

解 (1) 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2\cos(ax-by)\cdot(-\sin(ax-by))\cdot a=-a\sin(2ax-2by)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2\cos(ax-by)\cdot(-\sin(ax-by))\cdot(-b)=b\sin(2ax-2by)$, 故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2a^2\cos(2ax-2by)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2b^2\cos(2ax-2by)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2ab\cos(2ax-2by)$.

(3) 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{-xy}+-xye^{-xy}=(1-xy)e^{-xy}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xe^{-xy}\cdot(-x)=-x^2e^{-xy}$, 故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=ye^{-xy}(xy-2)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xe^{-xy}(xy-2)$.

第15题 证明下列函数满足相应的等式.

(1) $u=2\cos^2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)$ 满足 $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$;

(3) $\begin{cases} u=e^x\cos y, \\ v=e^x\sin y \end{cases}$ 满足 Cauchy-Riemann 条件 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$, 且分别满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$;

证明 (1) 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin(2x-y)$, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\cos(2x-y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\cos(2x-y)$. 代入有 $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\cos(2x-y)+\cos(2x-y)=0$. 命题得证.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y, \dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y, \dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$. 代入可知其满足 Cauchy-Riemann 条件. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cos y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cos y, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^x\sin y, \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^x\sin y$. 代入可知其分别满足 Laplace 方程. 命题得证.

1.5 习题1.5解答

第1题 求下列变换所确定的向量值函数 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ 的 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, 并指出在哪些区域 Jacobi 矩阵可逆.

(1) $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+y^2}, \\ v = \arctan \dfrac{y}{x}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v = \dfrac{y}{x^2+y^2}; \end{cases}$

解 (1)

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) & \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

且 $\det J \neq 0 \iff x^2+y^2 \neq 0$, 故在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 处 Jacobi 矩阵可逆.

(3)

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

且 $\det J \neq 0 \iff x^2+y^2 \neq 0$, 故在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 处 Jacobi 矩阵可逆.

第2题 求变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\cos\theta\cos\phi, \\ z = r\sin\phi, \end{cases}$ $r > 0, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le pi$ 确定的向量值函数 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,\theta,\phi) \\ f_2(r,\theta,\phi) \\ f_3(r,\theta,\phi) \end{pmatrix}$ 的 Jacobi 矩阵.

解

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

第3题 求下列复合函数的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ (已知 f 为可微函数).

(1) $z = \arctan\dfrac{u}{v}, u = x^2 + y^2, v = xy$;

(3) $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$;

(5) $z = xy + \dfrac{y}{x}f(xy)$;

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{1}{v}}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot 2x + \dfrac{-\dfrac{u}{v^2}}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot y = \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^4+3x^2y^2+y^4}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{1}{v}}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot 2y + \dfrac{-\dfrac{u}{v^2}}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot x = \dfrac{x(y^2-x^2)}{x^4+3x^2y^2+y^4}$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = f_1'(x^2-y^2, e^{xy})\cdot 2x + f_2'(x^2-y^2, e^{xy})\cdot ye^{xy} = 2xf_1' + ye^{xy}f_2'$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = f_1'(x^2-y^2, e^{xy})\cdot(-2y) + f_2'(x^2-y^2, e^{xy})\cdot xe^{xy} = -2yf_1' + xe^{xy}f_2'$.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = y + \dfrac{y^2f'(xy)x - yf(xy)}{x^2} = y + \dfrac{y^2f'(xy)}{x} - \dfrac{yf(xy)}{x^2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = x + \dfrac{f(xy) + yxf'(xy)}{x} = x + yf'(xy) + \dfrac{f(xy)}{x}$.

第4题 已知函数 $z = u\ln(u-v)$, 其中 $u = e^{-x}, v = \ln x$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\
&= \left(\ln(u-v) + \frac{u}{u-v}\right)\cdot(-e^{-x}) + \frac{u}{u-v}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= -e^{-x}\ln(e^{-x}-\ln x) - \frac{e^{-2x}}{e^{-x}-\ln x} - \frac{e^{-x}}{x(e^{-x}-\ln x)}
\end{aligned}$$

第5题 已知函数 $u = f(x,y)$, 其中 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, f 可微, 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

证明 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + r\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$, 所以代入得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}$$

命题得证.

第6题 设 f 可微, $u=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$, 证明: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u+xy$.

证明 由于 $\frac{\partial u}{\partial x}=y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),\frac{\partial u}{\partial y}=x+f'\left(\frac{y}{x}\right)$, 所以代入得

$$\begin{aligned}x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}&=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+xy+yf'\left(\frac{y}{x}\right)\\&=2xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)\\&=u+xy\end{aligned}$$

命题得证.

第7题 设 $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 证明: $u(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足 Laplace 方程.

证明 $\frac{\partial u}{\partial x}=u_1'\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+u_2'\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1'\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u_2'\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\\&=u_{11}'\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)^2-(u_{12}'+u_{21}')\frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}+u_{22}'\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2\\&\quad+u_1'\frac{-2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}+u_2'\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=u_{11}'\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2+(u_{12}'+u_{21}')\frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}+u_{22}'\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)^2\\&\quad+u_2'\frac{-2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}+u_1'\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

由题知 f 满足 Laplace 方程, 则 $u_{11}'+u_{22}'=0$. 则

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_{11}'\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)^2&-(u_{12}'+u_{21}')\frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}+u_{22}'\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2\\
&+u_1'\frac{-2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}+u_2'\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\\
&+u_{11}'\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2+(u_{12}'+u_{21}')\frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}+u_{22}'\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)^2\\
&+u_2'\frac{-2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}+u_1'\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}\\
&=(u_{11}'+u_{22}')\left[\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2+\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)^2\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

命题得证.

第8题 已知变换 $\begin{cases} w=x+y+z,\\ u=x,\\ v=x+y, \end{cases}$ 化简方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 以 w 为因变量, u,v 为自变量.

解 化简得 $z=-x-y+w$. 因此

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial x}-1=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-1=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial y}-1=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-1=\frac{\partial w}{\partial v}-1.
\end{aligned}
$$

故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$
则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\\
=&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)-\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)\\
=&\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial w}{\partial u}
\end{aligned}
$$

所以化简为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial w}{\partial u}=0.$

第9题 向量值函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{U}),\mathbf{U}=\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 均可微, 求复合函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{f}\circ\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 的 Jacobi 矩阵和全微分.

(1) $\begin{cases} y_1 = u_1 + u_2 \\ y_2 = u_1 u_2 \\ y_3 = \dfrac{u_2}{u_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ u_2 = \dfrac{y}{x^2+y^2}; \end{cases}$

解 (1) 因为

$$J_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ -\dfrac{y}{x} & \dfrac{x^2+y^2}{x} \end{pmatrix},$$

所以 $J = J_{\mathbf{f}} J_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ -\dfrac{y}{x} & \dfrac{x^2+y^2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$, 且全微分 $\mathrm{d}\mathbf{Y} = J \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$.

1.6 习题1.6解答

第2题 下列方程中, 在哪些点附近可以确定一个函数 $y = y(x)$ 或 $z = z(x, y)$, 并求出相应的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(1) $(x^2+y^2)^2 = a^2(y^2-x^2)$;

(2) $e^{-(x+y+z)} = x+y+z$;

解 (1) 设 $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - a^2(y^2-x^2)$. 在满足 $y_0 \neq 0, x_0^2+y_0^2 \neq \dfrac{a^2}{2}$ 的点附近可以确定 $y = y(x)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{2x^3+(2y^2+a^2)x}{2y^3+(2x^2-a^2)y}$.

(2) 设 $F(x,y,z) = e^{-(x+y+z)} - (x+y+z)$. 在 $\mathbb{R}^2$ 上的所有点附近都可以确定 $z = z(x,y)$, 且 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{-e^{-(x+y+z)}-1}{-e^{-(x+y+z)}-1} = -1, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{-e^{-(x+y+z)}-1}{-e^{-(x+y+z)}-1} = -1$.

第3题 下列方程均确定了函数 $z = z(x,y)$, 分别求解下列各表达式的值.

(1) $f(ax-cz, ay-bz) = 0$, f 可微, 计算: $c\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $f(x, x+y, x+y+z) = 0$, f 二阶可微, 计算: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\dfrac{f_1'\cdot a}{f_1'\cdot(-c)+f_2'\cdot(-b)}=\dfrac{f_1'\cdot a}{f_1'\cdot c+f_2'\cdot b}$. 同理 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f_2'\cdot a}{f_1'\cdot c+f_2'\cdot b}$. 故 $c\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f_1'\cdot ac}{f_1'\cdot c+f_2'\cdot b}+\dfrac{f_2'\cdot ab}{f_1'\cdot c+f_2'\cdot b}=a$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\dfrac{f_1'+f_2'+f_3'}{f_3'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\dfrac{f_2'+f_3'}{f_3'}$. 故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\
&=-\frac{[(f_{11}''+f_{12}''+f_{13}''\cdot\frac{\partial z}{\partial x})+(f_{21}''+f_{22}''+f_{23}''\cdot\frac{\partial z}{\partial x})+(f_{31}''+f_{32}''+f_{33}''\cdot\frac{\partial z}{\partial x})]\cdot f_3'}{(f_3')^2}\\
&-\frac{(f_1'+f_2'+f_3')(f_{31}''+f_{32}''+f_{33}''\frac{\partial z}{\partial x})}{(f_3')^2}\\
&=-\frac{(f_{11}''+2f_{12}''+f_{22}'')}{f_3'}+\frac{2(f_1'+f_2')(f_{13}''+f_{23}'')}{(f_3')^2}-\frac{(f_1'+f_2')^2f_{33}''}{(f_3')^3}
\end{aligned}$$

第4题 设方程 $f(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 确定了函数 $u=u(x,y,z)$, 其中 f 可微, 证明:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}.$$

证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}}=-\frac{f_x'\cdot(-2x)}{f_x'\cdot(2u)+f_y'\cdot(2u)+f_z'\cdot(2u)}=\frac{x}{u}\cdot\frac{f_x'}{f_x'+f_y'+f_z'}$$

同理有 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{u}\cdot\dfrac{f_y'}{f_x'+f_y'+f_z'}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{u}\cdot\dfrac{f_z'}{f_x'+f_y'+f_z'}$. 故 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{f_x'+f_y'+f_z'}{f_x'+f_y'+f_z'}=\dfrac{1}{u}$. 命题得证.

第5题 方程组 $\begin{cases}x=u+v,\\ y=u-v,\\ z=u^2v^2\end{cases}$ 能否确定 z 是 x,y 的函数? 如果能, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$; 如果不能, 说明理由.

解 由方程组可解得

$$\begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2}, \\ v = \dfrac{x-y}{2}. \end{cases}$$

因此 $z = u^2v^2 = \dfrac{1}{16}(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$ 是 x, y 的函数. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{4}(x^3 - xy^2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{4}(y^3 - x^2y)$.

第6题 方程组 $\begin{cases} x + y + z + z^2 = 0, \\ x + y^2 + z + z^3 = 0 \end{cases}$ 在点 $P(-1, 1, 0)$ 附近能否确定向量值函数 $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x)$, 如果能确定, 求出 $y'(-1), z'(-1)$.

解 记 $F(x,y,z) = x+y+z+z^2, G(x,y,z) = x+y^2+z+z^3$. 计算得 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2z \\ 2y & z+3z^2 \end{pmatrix}$. 由于 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 故能确定向量值函数 $\mathbf{f}(x)$. 且有 $y(-1) = 1, z(-1) = 0$. 对 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 求导得 $\begin{cases} 1 + y'(x) + z'(x) + 2z(x)z'(x) = 0, \\ 1 + 2y(x)y'(x) + z'(x) + 3z^2(x)z'(x) = 0. \end{cases}$ 将 $x = 1$ 代入有 $\begin{cases} 1 + y'(-1) + z'(-1) = 0, \\ 1 + 2y'(-1) + z'(-1) = 0. \end{cases}$ 解得 $y'(-1) = 0, z'(-1) = -1$.

第9题 求下列向量值函数的逆映射的 Jacobi 矩阵以及 Jacobi 行列式.

(1) $\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u = x^3 - y^3, \\ v = xy^2; \end{cases}$

解 (1) $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. $|J| = \dfrac{1}{4(x^2+y^2)}$.

(3) $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{6x^3y + 3y^4} \begin{pmatrix} 2xy & 3y^2 \\ -y^2 & 3x^2 \end{pmatrix}$. $|J| = \dfrac{1}{6x^3y + 3y^4}$.

第10题 下列由可微向量值函数 $\mathbf{g} : (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ 和 $\mathbf{f} : (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ 复合而成的复合向量值函数 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内能否确定可微的逆向量值函数 $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^{-1}$?

(1) $\begin{cases} u = \xi^2 - \eta^2, \\ v = 2\xi\eta, \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = e^x \cos y, \\ \eta = e^x \sin y, \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (1, 0)$;

(3) $\begin{cases} u = \xi^5 + \eta, \\ v = \eta^5 - \xi, \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = x^3 - y^3, \\ \eta = x^2 + 2y^2, \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (1, 0).$

解 (1) $\mathbf{g}$ 的逆映射的 Jacobi 矩阵为 $J_g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\xi & -2\eta \\ 2\eta & 2\xi \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2(\xi^2+\eta^2)} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}.$

$\mathbf{f}$ 的逆映射的 Jacobi 矩阵为 $J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{e^{2x}} \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$
当 $x = x_0 = 1, y = y_0 = 0$ 时, $|J_f| \neq 0, |J_g| \neq 0$, 故能确定. 且 $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵为 $J_f J_g$.

(3) $\mathbf{g}$ 的逆映射的 Jacobi 矩阵为 $J_g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5\xi^4 & 1 \\ -1 & 5\eta^4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{25\xi^4\eta^4+1} \begin{pmatrix} 5\eta^4 & -1 \\ 1 & 5\xi^4 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{f}$ 的逆映射的 Jacobi 矩阵为 $J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ 2x & 4y \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{12x^2y+6xy^2} \begin{pmatrix} 4y & 3y^2 \\ -2x & 3x^2 \end{pmatrix}.$
当 $x = x_0 = 1, y = y_0 = 0$ 时, J_f 前的系数分母为 0, 故 J_f 不存在, 不能确定.

1.7 习题1.7解答

第1题 求下列曲面在给定点的切平面方程和法线方程.

(1) $z = x^2 + y^2$, 点 $P(1, 2, 5)$;

(3) $(2a^2 - z^2)x^2 = a^2y^2$, 点 $P(a, a, a)(a \neq 0)$;

(5) $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = av, \end{cases}$ 点 $(u, v) = (u_0, v_0)$;

解 (1) 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$, 所以切平面的表达式为 $z = z_0 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$. 将 $P(1, 2, 5)$ 代入得 $z = 2x + 4y - 5$. 法线的表达式为 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$.

(3) 记 $F(x, y, z) = (2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2$. 则 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x(2a^2 - z^2), \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2a^2y, \dfrac{\partial F}{\partial z} = -2x^2z$. 代入 $P(a, a, a)$ 得切平面表达式为 $x - y - z + a = 0$, 法线表达式为 $x - a = a - y = a - z$.

(5)

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 0 & a \end{vmatrix} = a\sin v$$

$$B = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -a\cos v$$

$$C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

代入 (u_0, v_0) 可得切平面为 $a\sin v_0(x-u_0\cos v_0) - a\cos v_0(y-u_0\sin v_0) + u_0(z-av_0) = 0$, 法线为 $\dfrac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \dfrac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \dfrac{z-av_0}{u_0}$.

第2题 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点 P, 使得过 P 点的法线与坐标轴正方向成等角.

解 记 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$. 则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{2y}{b^2}, \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{2z}{c^2}$. 因此在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $\left(\dfrac{2x_0}{a^2}, \dfrac{2y_0}{b^2}, \dfrac{2z_0}{c^2}\right)$. 由于与三个坐标轴的正方向成等角, 因此有 $\dfrac{2x_0}{a^2}=\dfrac{2y_0}{b^2}=\dfrac{2z_0}{c^2}$. 结合 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 解得满足条件的点 P 有两个, $P_1=\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right), P_2=\left(-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

第3题 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于 $x+4y+6z=0$ 的切平面.

解 设切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$. 记 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2=21$. 因为 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial F}{\partial y}=4y, \dfrac{\partial F}{\partial z}=6z$, 所以切平面的法向量为 $(2x_0,4y_0,6z_0)$. 因为改平面平行于 $x+4y+6z=0$, 所以 $\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{4y_0}{4}=\dfrac{6z_0}{6}$. 解得法平面为 $x+4y+6z=21$ 或 $x+4y+6z=-21$.

第4题 (1) 曲面 $xyz=a^3$ 上的任一点的切平面与坐标平面围成的四面体的体积为定值;

(3) 曲面 $z=x^2+y^2$ 与直线 $l:\begin{cases} x+2z=1, \\ y+2z=2 \end{cases}$ 垂直的切平面;

(5) 设 f 可微, 曲面 $z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的所有切平面相交于一个定点.

证明 (1) 设 $F(x,y,z)=xyz-a^3$. 则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz, \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz, \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy$. 假设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则切平面的表达式为 $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$ 与坐标轴交点分别为 $(x_0,0,0),(0,y_0,0),(0,0,z_0)$. 体积即为 $\dfrac{1}{6}x_0y_0z_0=\dfrac{1}{12}a^3$ 为定值.

(3) 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$, 所以设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$. 而该直线能被表示为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$, 因此有 $2x_0=2y_0=2$. 解得切点为 $(1,1,2)$. 所以切平面为 $2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y}=f'\left(\dfrac{x}{y}\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=f\left(\dfrac{x}{y}\right)+y\cdot f'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{xf'\left(\dfrac{x}{y}\right)}{y}$.

因此在 (x_0,y_0) 处的切平面的表达式为 $f'\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)(x-x_0)+[f\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)-\dfrac{x_0f'\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)}{y_0}](y-y_0)+y_0f'\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)-z=0$, 过定点 $(0,0,0)$.

第5题 求曲线 $l:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6,G(x,y,z)=x+y+z$. 则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y,\dfrac{\partial F}{\partial z}=2z$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}=\dfrac{\partial G}{\partial y}=\dfrac{\partial G}{\partial z}=1$. 因此代入 $P(1,-2,1)$, 有切线方程满足

$$\begin{cases}2(x-1)-4(y+2)+2(z-1)=0,\\(x-1)+(y+2)+(z-1)=0.\end{cases}$$

法平面的方程则为 $-(x-1)+(z-1)=0$, 即为 $x-z=0$.

第6题 证明: 螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos t,\\y=a\sin t,\\z=bt\end{cases}$ 的切线与 z 轴形成定角.

证明 设切点在 $t=t_0$ 处. 则切向量为 $\mathbf{n}=(-a\sin t_0,a\cos t_0,b)$, 记沿着 z 轴正方向的单位向量为 $\mathbf{k}=(0,0,1)$. 该切线与 z 轴正方向所夹角度 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 为定值.

第7题 已知函数 f 可微, 若 T 为曲面 $S:f(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面, l 为 T 上任意一条过 P 的曲线, 求证: 在 S 上存在一条曲线, 该曲线在 P 处的切线恰好为 l.

证明 不妨设要求的曲线为 L. 现在构造 L 如下: 过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 有法向量 $\mathbf{n}$, 由于 $\mathbf{n}$ 和 l 相互垂直, 因此张成了一个平面 Q. 取 L 为 Q 和 S 的交线, 则 L 与平面 Q 相切, 且它在 P 处的切线恰好为 l. 因此命题得证.

1.8 习题1.8解答

第1题 分别写出下列函数在点 O 处带有二阶 Peano 余项和 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

(1) $z=\cos(x^2+y^2)$;

(2) $z=e^{x^2-y^2}$;

(3) $u=\ln(1+x+y+z)$.

解 (1) 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x\sin(x^2+y^2),\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y(x^2+y^2)$, 所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4x^2\cos(x^2+y^2)-2\sin(x^2+y^2),\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4y^2\cos(x^2+y^2)-2\sin(x^2+y^2),\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xy\cos(x^2+y^2)$. 因此带有二阶 Peano 余项的 Taylor 公式为 $z=1+o(x^2+y^2)$, 因此带有二阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式为 $z=1-(x^2+y^2)\sin(\theta^2(x^2+y^2))-2\theta^2(x^2+y^2)^2\cos(\theta^2(x^2+y^2)),\theta\in(0,1)$.

(2) 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}$, 所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(4x^2+2)e^{x^2-y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4y^2-2)e^{x^2-y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xye^{x^2-y^2}$. 因此带有二阶 Peano 余项的 Taylor 公式为 $z=1+x^2-y^2+o(x^2+y^2)$, 带有二阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式为 $z=1+(x^2-y^2)e^{\theta^2(x^2-y^2)}(1+2\theta^2(x^2-y^2)),\theta\in(0,1)$.

(3) 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{1+x+y+z}$, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{1}{(1+x+y+z)^2}$. 因此带有二阶 Peano 余项的 Taylor 公式为 $z=x+y+z-\dfrac{1}{2}(x+y+z)^2+o(x^2+y^2+z^2)$, 带有二阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式为 $z=x+y+z-\dfrac{1}{2(1+\theta x+\theta y+\theta z)^2}(x+y+z)^2,\theta\in(0,1)$.

第2题 写出下列函数在指定点处的 Taylor 公式

(2) $z=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 在点 $(0,0)$ 处的二阶 Taylor 多项式;

解 (2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\sin x}{\cos y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}$. 因此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\cos x}{\cos y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos^2 y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{(\sin^2 y+\cos y)\cos x}{\cos^3 y}$. 故 $R_2(x,y)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}x^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}xy+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}y^2)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2$. 因此在 $(0,0)$ 处的二阶 Taylor 多项式为 $z=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2$.

1.9 习题1.9解答

第1题 研究下列函数的极值.

(1) $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$;

(2) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$;

(4) $z=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{x_{n-1}}+\dfrac{2}{x_n},\quad x_i>1$;

(5) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}, \quad x, y, z > 0.$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6y$. Hesse 矩阵为 $H = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$. 驻点有 $(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)$. 代入 Hesse 矩阵判断正定性、负定性知极小值点为 $(2,2)$, 极大值点为 $(0,0)$. 因此极小值为 $z(2,2) = -8$, 极大值为 $z(0,0) = 0$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1), \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{2x}(2y+2)$. Hesse 矩阵为 $H = \begin{pmatrix} e^{2x}(4x+4y^2+8y+4) & (4y+4)e^{2x} \\ (4y+4)e^{2x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}$. 驻点为 $(\dfrac{1}{2}, -1)$. 代入 Hesse 矩阵, 为正定的. 因此有极小值为 $z\left(\dfrac{1}{2}, -1\right) = -\dfrac{e}{2}$.

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = 1 - \dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = \dfrac{1}{x_{i-1}} - \dfrac{x_{i+1}}{x_i^2}, \quad (2 \le i \le n-1), \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = \dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{2}{x_n^2}$. 因此 Hesse 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2x_2}{x_1^3} & -\dfrac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{x_1^2} & \dfrac{2x_3}{x_2^3} & -\dfrac{1}{x_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{x_2^2} & \dfrac{2x_4}{x_3^3} & -\dfrac{1}{x_3^2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{x_3^2} & \dfrac{2x_5}{x_4^3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{4}{x_n^3} \end{pmatrix}$$

驻点为 $(2^{\frac{1}{n+1}}, 2^{\frac{2}{n+1}}, \cdots, 2^{\frac{n}{n+1}})$. 代入 Hesse 矩阵知其为正定的, 因此有极小值 $z(2^{\frac{1}{n+1}}, 2^{\frac{2}{n+1}}, \cdots, 2^{\frac{n}{n+1}}) = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}, \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2}$. Hesse 矩阵为 $\begin{pmatrix} \dfrac{y^2}{2x^3} & -\dfrac{y}{2x^2} & 0 \\ -\dfrac{y}{2x^2} & \dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3} & -\dfrac{2z}{y^2} \\ 0 & -\dfrac{2z}{y^2} & \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3} \end{pmatrix}$. 驻点为 $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$ 和 $\left(-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right)$. 代入 Hesse 矩阵知极小值点为 $(\dfrac{1}{2}, 1, 1)$. 因此极小值为 $u(\dfrac{1}{2}, 1, 1) = 4$.

第2题 函数 $z = z(x,y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求 $z = z(x,y)$ 的极值.

解 记 $F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$. 因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} =$

$\dfrac{4y}{2z+8x-1}$. 因此在极值点有 $\begin{cases}4x_0+8z_0=0,\\ y_0=0.\end{cases}$ 代入方程有 $2(-2z_0)^2+z_0^2+8(-2z_0)z_0-z_0+8=0$, 化简得 $7z_0^2+z_0-8=0$. 解得 $z_{01}=1.z_{02}=-\dfrac{8}{7}$. 经检验 Hesse 矩阵也满足条件, 所以极小值为 1, 极大值为 $-\dfrac{8}{7}$.

第4题 求下列函数在给定区域的最值.

(2) $z=xy(4-x-y),(x,y)\in\{x+y\le 6,y\ge 0,x\ge 1\}$.

解 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4y-y^2-2xy,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4x-x^2-2xy$, 所以驻点满足方程

$$\begin{cases}4y-y^2-2xy=0\\ 4x-x^2-2xy=0\end{cases}$$

解得 $(x,y)=(0,0),(0,4),\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right),(4,0)$. 再加上 $x\ge 1$ 的条件后, 只剩下 $z\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{64}{27}$ 和 $z(4,0)=0$.

再考虑边界上的极值. 当 $y=0$ 时 $z\equiv 0$. 当 $x=1$ 时 $z=y(3-y)\in\left[0,\dfrac{9}{4}\right]$. 当 $x+y=6$ 时 $z=-2xy\in[-18,0]$.

综上可得 z 有最大值 $\dfrac{64}{27}$, 最小值 -18.

第5题 证明下列各题

(1) 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭区域. $f(x,y)$ 在 D 上连续, 在 D 内可微, 且满足方程 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=kf(x,y)(k>0)$, 若在 D 的边界上有 $f(x,y)=0$, 试证 $f(x,y)$ 在 D 上恒为 0.

(2) 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$. 且在 $x^2+y^2=1$ 上, $u(x,y)\ge 0$. 证明: 当 $x^2+y^2\le 1$ 时, $u(x,y)\ge 0$.

证明 (1) 反证法. 假设 $\exists P(x_0,y_0)$ 使得 $f(x_0,y_0)\ne 0$. 不妨设 $f(x_0,y_0)>0$. 则由题知 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P=kf(x_0,y_0)>0$. 因此 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$ 和 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P$ 中至少有一个为正数. 不妨设 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P>0$. 则 $f(x,y)$ 从 $f(x_0,y_0)$ 沿着 x 方向单调递增. 而 $f(x_0,y_0)>0$, 所以沿着该方向到边界时, 有边界点函数值也为正数, 矛盾. 因此 $f(x,y)\equiv 0$.

(2) 反证法. 假设 $\exists P(x_0,y_0)$ 使得 $u(x_0,y_0)<0$, 且 u 在 $P(x_0,y_0)$ 处取得极小值. 则在极小值点 $P(x_0,y_0)$ 处的 Hesse 矩阵的迹为 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_P+\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_P>0$. 这与题目 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_P+\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_P=u(x_0,y_0)<0$ 矛盾. 因此当 $x^2+y^2\le 1$ 时, $u(x,y)\ge 0$.

第6题 证明函数 $z(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值点而无极小值.

证明 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x, \dfrac{\partial z}{\partial y}=(\cos x-1-y)e^y$, 所以 Hesse 矩阵为

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(1+e^y)\cos x & -e^y\sin x\\ -e^y\sin x & (\cos x-y-2)e^y\end{pmatrix}$$

且驻点为 $(2k\pi,0)$ 和 $((2k+1)\pi,2)$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$. 将 $(2k\pi,0)$ 代入 H, 有 $H_1=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 负定. 因此 $(2k\pi,0),k\in\mathbb{Z}$ 为极大值点, 且有无穷多个. 将 $((2k+1)\pi,2)$ 代入 H, 有 $H_2=\begin{pmatrix}e^2+1 & 0\\ 0 & -5e^2\end{pmatrix}$ 不定. 因此 $((2k+1)\pi,2),k\in\mathbb{Z}$ 不为极值点. 所以没有极小值点.

第7题 求下列函数在给定条件下的条件极值.

(1) $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ \text{s.t.}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}u=x-2y+2z,\\ \text{s.t.}x^2+y^2+z^2=1;\end{cases}$

解 (1) $L=x^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1\right)$. $L'_x=2x+\dfrac{\lambda}{a}, L'_y=2y+\dfrac{\lambda}{b}$. 因此有方程组 $\begin{cases}2x+\dfrac{\lambda}{a}=0\\ 2y+\dfrac{\lambda}{b}=0\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\\ \lambda=-\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}\end{cases}$. 此时有 $z=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为极小值.

(2) $L=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. $L'_x=1+2\lambda x, L'_y=-2+2\lambda y, L'_z=2+2\lambda z$. 因此有方程组 $\begin{cases}1+2\lambda x=0\\ -2+2\lambda y=0\\ 2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$. 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\\ z=-\dfrac{2}{3}\\ \lambda=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{2}{3}\\ z=\dfrac{2}{3}\\ \lambda=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$. 因此有极小值 $u\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)=-3$, 极大值 $u\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)=3$.

第8题 求函数 $u=x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz$ 在区域 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 内的最值.

解

1. 考虑内点处的极值. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-2y, \dfrac{\partial u}{\partial y}=4y-2x-2z, \dfrac{\partial u}{\partial z}=2z-2y$. 因此驻点满足 $x=y=z$. 此时 $u=0$.

2. 考虑边界点处的极值. $L=x^2+2y^2+z^2-2yz-2xy+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$. $L'_x=2x-2y+2\lambda x, L'_y=4y-2z-2z+2\lambda y, L'_z=2z-2y+2\lambda z$. 因此有方程组 $\begin{cases}2x-2y+2\lambda x=0\\4y-2z-2z+2\lambda y=0\\2z-2y+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$.

   解得 $(x,y,z)=(0,0,0),\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right),\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3},\mp\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2}),$. 故有最大值 $u\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3},\mp\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=12$, 最小值 $u(k,k,k)(k\in\mathbb{R})\equiv 0$.

第9题 求解下列问题.

(1) 求椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x+y=4$ 的距离的最值;

(3) 求椭圆面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 内接长方体的体积最值;

解 (1) 设椭圆上的某一点为 $P(\cos\theta,2\sin\theta),\theta\in(-\pi,\pi]$. 距离为 $d=\dfrac{|\cos\theta+2\sin\theta-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|4-\sqrt{5}\cos\varphi\right|}{\sqrt{2}}\in[\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2},\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}]$. 因此最大值为 $\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$, 最小值为 $\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$.

(3) 易知该长方体关于原点中心对称. 设长方体的某一个顶点为 $P(a\cos\theta\cos\varphi,b\cos\theta\sin\varphi,c\sin\theta)$. 则体积为 $V=8\left|xyz\right|=8abc\cos^2\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi=4abc\sin\theta(1-\sin^2\theta)\sin 2\varphi\in(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{9}abc]$. 因此体积最大值为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$, 无最小值.

第10题 求解下列问题.

(3) 已知矩形的周长为 $2p$, 将它绕其一边旋转成的圆柱体的体积最大值为多少?

解 设矩形的一边长为 x, 则邻边长为 $p-x$. 绕长为 $p-x$ 的边旋转而成的圆柱体体积为 $\pi x^2(p-x)=\dfrac{\pi}{2}x\cdot x\cdot(2p-2x)\leq\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x+x+2p-2x}{3}\right)^3=\dfrac{4p^3\pi}{27}$. 因此圆柱体的体积最大值为 $\dfrac{4p^3\pi}{27}$.

第11题 求解下列问题.

(1) 求函数 $u=x^2y^2z^2$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 下的最大值, 并证明:

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\leq\frac{x^2+y^2+z^2}{3};$$

(2) 类似 (1), 证明: $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ 有

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}.$$

证明 (1) 设 $L = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$, 则

$$\begin{aligned} L'_x &= 2xy^2z^2 + 2x\lambda = 0 \\ L'_y &= 2x^2yz^2 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z &= 2x^2y^2z + 2z\lambda = 0 \end{aligned}$$

解得有极大值点满足 $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{a^2}{3}$, 因此有 $x^2y^2z^2 \leq \left(\dfrac{a^2}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3$. 此即 $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$.

(2) 同理, 拓展至 n 元, 有 $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. 而由 n 元均值不等式有 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$. 将 $a_1 = \dfrac{1}{b_1}, a_2 = \dfrac{1}{b_2}, \cdots, a_n = \dfrac{1}{b_n}$ 代入有 $\dfrac{\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}}{n} \geq \dfrac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}}$, 不等式两边同时取倒数, 有 $\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n} \geq \dfrac{n}{\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}}$. 此即 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$. 命题得证.

第13题 弹簧在弹性限度内的伸长 x 与所受拉力 y 满足关系式 $y = a + bx$, 试根据下列数据确定弹性系数 b.

x_i/cm	2.6	3.0	3.5	4.3
y_i/kg	0	1	2	3

解 由题可列出方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.6 \\ 1 & 3.0 \\ 1 & 3.5 \\ 1 & 4.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

则 $A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.6 & 3.0 & 3.5 & 4.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2.6 \\ 1 & 3.0 \\ 1 & 3.5 \\ 1 & 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13.4 \\ 13.4 & 46.5 \end{pmatrix}$, $A^\top \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.6 & 3.0 & 3.5 & 4.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22.9 \end{pmatrix}$

因此方程即

$$\begin{pmatrix} 4 & 13.4 \\ 13.4 & 46.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22.9 \end{pmatrix}$$

解得 $a = -4.326, b = 1.739$.

1.10 第1章总复习题解答

第15题 设 $f(x,y)$ 是可微函数, 且满足以下条件: $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$, 试证明: 对于任意的 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, 都存在点 (x_0, y_0), 使得 $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{v}$.

证明 作辅助函数 $g(x,y) = f(x,y) - v_1 x - v_2 y$, 则

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{v_1 x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{v_2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$$

考虑 $g(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的极小值点 $P(x_0, y_0)$, 有 $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, 此即 $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{v}$.

第17题 已知点 $P(a,b)$ 在曲线 $f(x,y) = 0$ 上, 点 $Q(c,d)$ 在曲线 $g(x,y) = 0$ 上, 其中 f, g 可微, 证明: 若 $|PQ|$ 为两条曲线的距离, 则 $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{f_1'(a,b)}{f_2'(a,b)} = \dfrac{g_1'(c,d)}{g_2'(c,d)}$. 利用此结论求椭圆 $x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0$ 与直线 $x - y - 8 = 0$ 的距离.

解 由于 $|PQ|$ 为两条曲线间的距离, 故由题知 $\vec{PQ} \parallel \nabla f(a,b) \parallel \nabla g(c,d)$. 此即

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{f_1'(a,b)}{f_2'(a,b)} = \frac{g_1'(c,d)}{g_2'(c,d)}$$

在此例中, $f_1'(x,y) = 2x + 2y, f_2'(x,y) = 2x + 10y - 16, g_1'(x,y) = 1, g_2'(x,y) = -1$. 代入有方程

$$\begin{cases} \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{2a+2b}{2a+10b-16} = \dfrac{1}{-1}, \\ a^2 + 2ab + 5b^2 - 16b = 0, \\ c - d - 8 = 0. \end{cases}$$

解得 $|PQ| = \min\{6\sqrt{2} + 4, 6\sqrt{2} - 4\} = 6\sqrt{2} - 4$.

2 含参积分及广义含参积分

2.1 习题2.1解答

第1题 证明: $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续.

证明 反证法. 假设 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续, 那么对任意 $\epsilon>0$, 比如 $\epsilon=\dfrac{1}{3}$, 则存在 $\delta>0$, 使得只要 $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta$, 就有 $|\sin(x_1^2+y_1^2)-\sin(x_2^2+y_2^2)|<\epsilon=\dfrac{1}{3}$. 取 $(x_1,y_1)=(0,\sqrt{n\pi}),(x_2,y_2)=(0,\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}})$, 则当 n 足够大时可以保证 $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta$. 但此时

$$
\begin{aligned}
\left|\sin(x_1^2+y_1^2)-\sin(x_2^2+y_2^2)\right| &= \left|\sin(n\pi)-\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right| \\
&= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

当 n 取 2 的倍数的时候有 $|\sin(x_1^2+y_1^2)-\sin(x_2^2+y_2^2)|=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}=\epsilon$. 矛盾. 因此 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续.

第2题 已知函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续, 且 $\lim\limits_{\|X\|\to+\infty}f(X)$ 存在, 求证: f 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

证明 记 $L=\lim\limits_{\|X\|\to+\infty}f(X)$, 则 $\exists M_0>0$, 使得 $\forall\epsilon>0,\|X\|>M_0$, 都有 $|f(X)-L|<\dfrac{\epsilon}{2}$. 对于 $\|X\|\le M_0$ 的有界闭区域, f 在上面是一致连续的, 现只需要考虑 $\|X\|>M_0$ 的区域. 由于 $\forall X,X'$ 满足 $\|X\|,\|X'\|>M_0,\|X-X'\|<\delta$, 有 $|f(X)-f(X')|\le|f(X)-L|+|f(X')-L|<\dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon$, 所以 f 在 $\|X\|>M_0$ 的区域上也是一致连续的. 故 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.

第3题 证明: 函数 $f(X)$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上一致连续的充要条件是: 对 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的任何两个点列 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-Y_n\|=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(X_n)-f(Y_n))=0$.

证明 先证必要性: 假设 $f(X)$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上一致连续, 则对于任意点列 $\{X_n\},\{Y_n\}$: $\forall\epsilon>0,\exists\delta_0>0$ 使得 $\forall X,X''\in\Omega,\|X-X'\|<\delta_0$ 有 $\|f(X)-f(X')\|<\epsilon$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-Y_n\|=0$, 故按定义展开有 $\exists M>0,\forall n>M$, 有 $\|X_n-Y_n\|<\delta_0$ 从而 $\|f(X_n)-f(Y_n)\|<\epsilon$. 故由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f(X_n)-f(Y_n)\|=0$.

再证充分性: 反证法. 假设 $f(X)$ 不一致连续, 则 $\exists\epsilon_0>0,\forall delta>0,\exists X_0,X_0'\in\Omega$ 满足 $\|X_0-X_0'\|<\delta$ 但 $\|f(X_0)-f(X_0')\|\ge\epsilon_0$. 取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\exists X_n,Y_n$ 使得 $\|X_n-Y_n\|<\delta_n=\dfrac{1}{n}$, 则由条件知 $\|f(X_n)-f(Y_n)\|\ge\epsilon_0$. 由此, $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-Y_n\|=0$ 但 $\|f(X_n)-f(Y_n)\|\ge\epsilon_0$ 恒成立, 说明其极限不为 0. 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f(X_n)-f(Y_n)\|=0$ 矛盾. 故假设错误, $f(X)$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

第4题 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos yx}{1+x^2}\mathrm{d}x(-\infty<y<+\infty)$;

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\sin x\mathrm{d}x(0<t_0\le t<+\infty)$;

(6) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+(x+t)^2}(0\le t<+\infty)$;

解 (2) 考虑 $f(x)=\cos(yx),g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则对任意 $A<0,B>0,y\in\mathbb{R}$ 均有 $\left|\int_A^B f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$ 有界, 且 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 关于 x 单调递减. 由于不含 y, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 对于 y 一致成立. 由 Dirichlet 判别法知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos yx}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(4) 考虑 $f(x)=\sin x,g(x)=e^{-tx}$, 则对任意 $A>0,t\in[t_0,+\infty)$ 有 $\left|\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$ 有界, 且 $g(x)=e^{-tx}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 对于任意 $t\in[t_0,+\infty)$ 一致成立. 有 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(6) 考虑含参积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+(x+t)^2}$, 则 $I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(x+t)}{1+(x+t)^2}=\arctan(x+t)\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}-\arctan t$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

第5题 证明: 积分 $\int_0^{+\infty}e^{-tx}\dfrac{\sin 3x}{x+t}\mathrm{d}x(0\le t<+\infty)$ 一致收敛.

证明 先证明函数 $\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin 3x}{x+t}\mathrm{d}x$ 关于 $t>0$ 一致收敛. 由于 $\int_0^A\sin 3x\mathrm{d}x$ 不含 t 且对充分大的 A 均有界, 并且 $\dfrac{1}{x+t}$ 关于 x 单调递减且趋于 0 对于任意 $t>0$ 一致成立, 故由 Dirichlet 判别法知 $f(x,t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin 3x}{x+t}\mathrm{d}x$ 关于 $t>0$ 一致收敛.

再考虑 $g(x,t)=e^{-tx}$, 它关于 x 单调递减且趋于 0 对于任意 $t>0$ 一致成立. 由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}e^{-tx}\dfrac{\sin 3x}{x+t}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x,t)g(x,t)\mathrm{d}x$ 对于 $t>0$ 一致收敛.

第6题 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 中连续, 如果对于每一个 $t\in[\alpha,\beta)$, $\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 均收敛, 但 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 均发散, 证明: $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上非一致收敛.

证明 反证法. 假设 $\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛, 则由定义知 $\forall\epsilon>0,\exists A>0,\forall A',A''>A,\forall t\in[\alpha,\beta)$, 有 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x,t)\mathrm{d}x\right|<\epsilon$. 考虑数列 $\{t_n\}=\{\beta-\dfrac{1}{n}\}\to\beta,n\to+\infty$, 由于 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 因此对 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x,t_n)\mathrm{d}x\right|<\epsilon$ 取 $n\to+\infty$ 的极限, 有 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x,\beta)\mathrm{d}x\right|\le\epsilon$. 但这与 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散矛盾. 因此假设不成立. 命题得证.

第8题 证明: 积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ 在包含 $t=0$ 的区间上不一致收敛.

证明 反证法. 假设积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ 在包含 $t=0$ 的区间上一致收敛, 不妨设该区间为 $[a,b]$, 其中 $0\in[a,b]$. 由于 $\frac{\sin tx}{x}$ 在带状域 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续, 且广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ 在包含 $t=0$ 的区间上一致收敛, 则该广义积分 $I(t)$ 是连续的. 但 $I(t)=\begin{cases}0, t=0,\\ \frac{\pi}{2}, t\neq 0\end{cases}$ 并不连续, 矛盾. 因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ 在包含 $t=0$ 的区间上不一致收敛.

2.2 习题2.2解答

第1题 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^3 x^2\cos ax\mathrm{d}x$.

解 (1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim\limits_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=1$.

(2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^3 x^2\cos ax\mathrm{d}x=\int_0^3\lim\limits_{a\to 0}x^2\cos ax\mathrm{d}x=\int_0^3 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3=9$.

第2题 求下列函数的导函数.

(1) $F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}\mathrm{d}y$;

(3) $F(x)=\int_0^t\frac{\ln(1+tx)}{x}\mathrm{d}x$;

解 (1) $F'(x)=\int_x^{x^2}-y^2e^{-xy^2}\mathrm{d}y+e^{-x^5}\cdot 2x-e^{-x^3}=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}\mathrm{d}y$.

(3) $F'(t)=\int_0^t\frac{1}{1+tx}\mathrm{d}x+\frac{\ln(1+t^2)}{t}$.

第3题 设 $f(x)$ 可微, 且 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}y$, 求 $F''(x)$.

解 由于 $F'(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y+2xf(x)$, 所以 $F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x)$.

第4题 证明: $u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$ 是弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解, 其中 $\varphi\in C^2,\psi\in C^1$.

证明 由题知

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2}[\psi'(x+at)+\psi'(x-at)],\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{a^2}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)]+\frac{a}{2}[\psi''(x+at)-\psi''(x-at)].\end{aligned}$$

且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2a}[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)]+\frac{1}{2a}[\psi''(x+at)-\psi''(x-at)].$$

代入则可验证 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

第5题 计算下列积分.

(1) $\int_0^1 \dfrac{\arctan x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (提示: $\dfrac{\arctan x}{x}=\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y$);

解

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\sin\theta\int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2\theta y^2}\mathrm{d}y\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\tan\theta\int_0^1 \frac{1}{1+(y^2+1)\tan^2\theta}\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+(y^2+1)\theta^2}\\
&= \int_0^1\mathrm{d}y\frac{1}{y^2+1}\arctan(\theta\sqrt{y^2+1})\Big|_{\theta=0}^{\theta=+\infty}\\
&= \int_0^1\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\mathrm{d}y\\
&= \frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+1})\Big|_0^1\\
&= \frac{\pi}{2}\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

2.3 习题2.3解答

第1题 计算下列积分.

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x(a,b>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin yx\mathrm{d}x(a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x(a,b>0)$(提示: 将 $\cos ax-\cos bx$ 写成积分的形式, 并且 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{2}$).

解 (1) 因为 $\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}=x\int_a^b e^{-x^2y}\mathrm{d}y$, 故

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x\int_a^b e^{-x^2y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x^2\int_a^b e^{-x^2y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\int_a^b e^{-\theta y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin yx\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2a}\left(e^{-ax^2}\sin(yx)\Big|_0^{+\infty}-y\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos(yx)\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos(yx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{y}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}
\end{aligned}
$$

(3) 由于 $\cos ax-\cos bx = x\int_a^b\sin yx\mathrm{d}y$, 故

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_a^b\sin(yx)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{yx}\mathrm{d}(yx)\int_a^b\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi}{2}(b-a).
\end{aligned}
$$

第2题 利用对参变量的求导, 求下列积分.

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}\mathrm{d}x(t>0)$(提示: 利用 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$);

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(y+x^2)^{n+1}}=\dfrac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!}y^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(y>0)$(提示: 利用 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{y+x^2}$ 的值).

解 (1) 考虑 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\mathrm{d}x$, 则其 n 阶导数为 $I^{(n)}(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}\mathrm{d}x$ 即为所求. 注意到

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{t}x)^2}\mathrm{d}(\sqrt{t}x)\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

因此有 $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}\mathrm{d}x=I^{(n)}(t)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}(-1)^nt^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

(2) 考虑 $I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{y+x^2}$, 则 $\dfrac{(-1)^n}{n!}I^{(n)}(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(y+x^2)^{n+1}}$ 即为所求. 由于

$$\begin{aligned}
I(y)&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{y+x^2}\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)}{y\left(1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)^2\right)}\\
&=y^{-\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}\\
&=\frac{\pi}{2}y^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

因此 $I^{(n)}(y)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}(-1)^ny^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. 故 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(y+x^2)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n}{n!}I^{(n)}(y)=\dfrac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!}y^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

2.4 第2章总复习题解答

第1题 证明: $f(x,y)=\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上不一致连续.

证明 取点列 $\{X_n\}=(\sqrt{n\pi},\sqrt{n\pi}),\{Y_n\}=\left(\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)$. 对于足够大的 n, $\forall\delta>0$, 都能有 $\|X_n-Y_n\|=\sqrt{2}\left(\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}-\sqrt{n\pi}\right)<\delta$, 但取 $\epsilon_0=1$, 有

$$\begin{aligned}
|f(X_n)-f(Y_n)|&=\left|\sin(n\pi)-\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|\\
&=1\geq\epsilon_0
\end{aligned}$$

因此 $f(x,y)=\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上不一致连续.

第4题 利用对参变量的微分, 求下列积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 不妨设 $a,b>0$. 记 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$ 为关于 b 的函数, a 为常数. 则

$$\begin{aligned}
I'(b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b\cos^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b}{a^2\tan^2 x + b^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2b}{a^2u^2 + b^2}\mathrm{d}\arctan u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2b}{(a^2u^2+b^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= 2b\cdot \left.\frac{\arctan u - \frac{a}{b}\arctan\left(\frac{a}{b}u\right)}{b^2-a^2}\right|_{u=0}^{u=+\infty} \\
&= \frac{\pi}{a+b}
\end{aligned}$$

因此 $I(b) = \pi\ln(a+b)+C$, 其中 C 为某一待定常数. 由于 $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a^2) = \pi\ln a$, 所以 $C = \pi\ln a - \pi\ln(a+a) = -\pi\ln 2$. 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x = I(b) = \pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(2) 设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$. 则

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+(a\tan x)^2}\cdot\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(a\tan x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+(ax)^2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\arctan x - a\arctan(ax)\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2(a+1)}
\end{aligned}$$

因此 $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1)+C$. 由于 $I(0)=0$, 所以 $C=0$. 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x = I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1)$.

第6题 计算下列积分的值.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x (y\geq 0)$;

解 (1) 设 $I(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$, 则

$$
\begin{aligned}
I'(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{\arctan xy}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{1+(xy)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-y^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-y^2} \left(\arctan(x) - y \arctan(yx)\right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2(1+y)}
\end{aligned}
$$

因此 $I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y) + C$. 由 $I(0) = 0$ 知 $C = 0$. 因此 $I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y)$.

3 重积分

3.1 习题3.1解答

3.2 习题3.2解答

第2题 证明: $1.96 < \iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} < 2.$

证明 由于 $\cos^2 x+\cos^2 y \in [0,2]$, 因此

$$1.96 < \frac{200}{102} < \iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} < \frac{200}{100} = 2.$$

第3题 比较下列各组积分值的大小.

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-2)^2\le 2\}$;

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由直线 $x=0, y=0, x+y=\dfrac{1}{2}, x+y=1$ 围成.

解 (1) 由于在 D 上有 $x+y\ge 1$, 因此 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 由于在 D 上有 $xy \ge \ln(x+y)$, 因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

第4题 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭矩形, 非负函数 $f(x,y)\in C(D)$, 证明: 若 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, 则 $f(x,y)=0, \forall (x,y)\in D$.

证明 反证法. 假设 $\exists P_0(x_0,y_0)$ 使得 $f(x_0,y_0)\ne 0$, 则 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall (x,y)\in B(P_0,\delta)$, 均有 $f(x,y)>0$. 因此 $\iint\limits_{B(P_0,\delta)\subset D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$. 而其他区域上 $f(x,y)$ 非负, 所以 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \iint\limits_{B(P_0,\delta)\subset D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$. 与题目条件矛盾. 故 $f(x,y)=0, \forall (x,y)\in D$.

第5题 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 计算极限 $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{1}{r^2} \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明 由于 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 的某个邻域内连续, 不妨记为 $B(O,\delta)$, 因此由多元函数的中值定理可得 $\exists\xi,\eta\in(0,\min\{\delta,r\})$ 使得 $\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2 f(\xi,\eta)$. 故

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0^+}\frac{f(\xi,\eta)}{r^2}\pi r^2 = \pi f(0,0)$$

3.3 习题3.3解答

第1题 用二重积分的几何意义求下列二重积分的值.

(1) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|\,|x|+|y|\le 1\}$;

解 (1) 这个积分是半径为 R 的上半球的体积, 因此 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

(2) 这个积分是底面半径为 R, 高度为 R 的圆锥的体积, 因此 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

(3) 这个积分是一个对角线长度为 2 的正方形的面积, 因此 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$.

第2题 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_I \dfrac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=[0,1]^2$;

(2) $\iint\limits_I x\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$;

(3) $\iint\limits_I \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=[0,\pi]^2$.

解 (1)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_I \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x^2\arctan y\Big|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_I x\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1 x\cos(xy)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x \\
&= -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_I \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi} \sin(x+y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} -\cos(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\pi}\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

第3题 设函数 $f(x,y)$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数, 计算$\iint\limits_I \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d}\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f(x,d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,c)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \\
&= f(x,d)\Big|_a^b - f(x,c)\Big|_a^b \\
&= f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)
\end{aligned}
$$

第4题 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分.

(1) $D=\{(x,y)|x+y\le 1, y-x\le 1, y\ge 0\}$;

(2) $D=\{(x,y)|y\ge x-2, x\ge y^2\}$;

(3) $D=\{(x,y)|\dfrac{2}{x}\le y\le 2x, 1\le x\le 2\}$.

解 (1) 由题知 $y-1\le x\le 1-y$, 因此 $y\in[0,1]$. 故 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(2) 由题知 $y^2 \le x \le y+2$, 因此 $y \in [-1,2]$. 故 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(3) 按题目所给约束, 有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{2}{x}}^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

第5题 在直角坐标系中画出下列积分的积分区域, 并交换积分次序.

(1) $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{2\sqrt{1-x}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

解 (1)

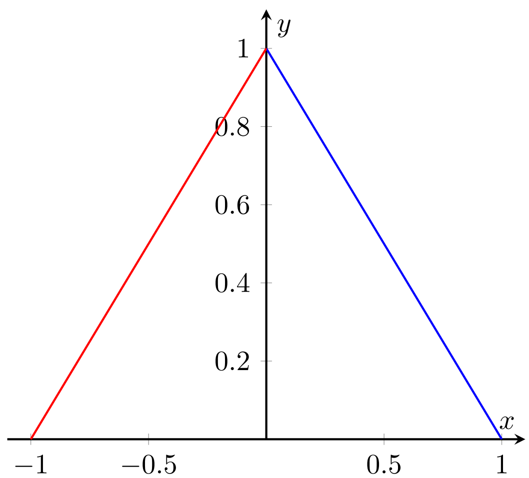

图 1: 习题3.3第5题(1)

由图知 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(2)

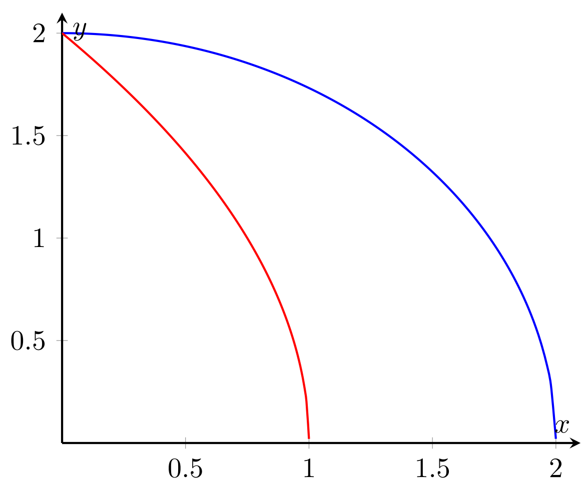

图 2: 习题3.3第5题(2)

由图知 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2\sqrt{1-x}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{1-\frac{1}{4}y^2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(3)

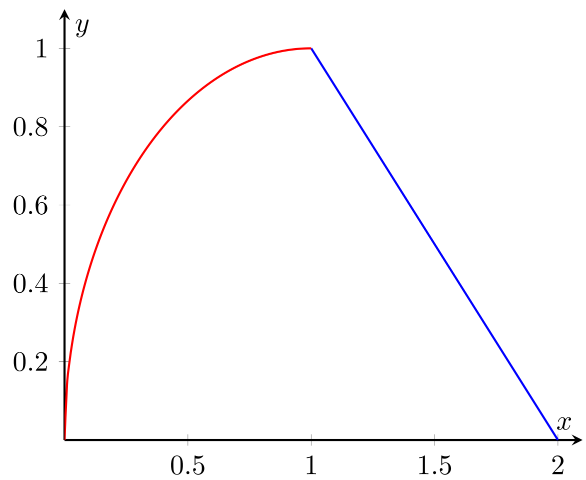

图 3: 习题3.3第5题(3)

由图知 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

第6题 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x,y)|4x \geq y^2, x \leq 1\}$;

(3) $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\}$;

(5) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是以 $y=x, y=x+1, y=1, y=4$ 为边的平行四边形区域;

(7) $\iint\limits_D \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x,y)|0 \leq x, y \leq \pi\}$;

(9) $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ 以及 x 轴围成;

解 (1)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{2}\mathrm{d}y \int_{\frac{1}{4}y^2}^{1} xy^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x=\frac{1}{4}y^2}^{x=1}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{32}y^6\right)\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{224}y^7\right)\Big|_{-2}^{2} \\
&= \frac{32}{21}
\end{aligned}$$

(2) 考虑 $D_{\rho,\varphi}=\{(\rho,\varphi)|0\le\rho\le R,0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\}$, 则由对称性可知 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_{\rho,\varphi}}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{\rho,\varphi}}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}\sin 2\varphi\rho^4\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{R^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{R^4}{16}(-\cos 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{R^4}{8}\end{aligned}$$

故 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_{\rho,\varphi}}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\frac{R^4}{2}$.

(5)

$$\begin{aligned}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^4 Dy\int_{y-1}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\\&=\int_1^4\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Big|_{x=y-1}^{x=y}\mathrm{d}y\\&=\int_1^4\left(2y^2-y+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y\right)\Big|_1^4\\&=\frac{71}{2}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi\cos(x+y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^\pi\sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\pi}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi 2\sin x\mathrm{d}x\\&=2\cos x\Big|_0^\pi\\&=-4\end{aligned}$$

(9)

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)} y^2\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=0}^{y=y(x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 a(1-\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{16a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{32a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8 u\mathrm{d}u \\
&= \frac{64a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u\mathrm{d}u \\
&= \frac{64a^4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7!!}{8!!} \\
&= \frac{35}{12}\pi a^4
\end{aligned}
$$

第8题 利用第7题结论, 计算积分

$\iint\limits_D x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$.

解 由于 D 关于 x 轴对称且关于 y 轴对称, 且第一个被积函数关于 y 为奇函数, 所以第一个积分式为 0. 同理, 第二个被积函数关于 y 也为奇函数, 所以第二个积分式也为 0. 此即 $\iint\limits_D x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

第9题 分别求出由平面 $z=x-y, z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所围成的两个空间几何体的体积.

解 记 $D_1=\{x^2+y^2\le 2x, y\ge x\}, D_2=\{0\le x\le 1, 0\le y\le x\}, D_3=\{x^2+y^2\le 2x, x\ge 1\vee y\le 0\}$. 容易验证总积分区域 $D=D_1+D_2+D_3$.

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1+D_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1+r\cos\theta-r\sin\theta)\mathrm{d}r\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_3} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1+r\cos\theta-r\sin\theta)\mathrm{d}r\\ &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{3}+\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

因此 $V_1=\int\limits_{D_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{D_1+D_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}, V_2=\int\limits_{D_2+D_3} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{D_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{6}+\frac{3\pi}{4}$.

第10题 求由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$, 柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=1, z=0$ 围成的空间几何体的体积.

解 体积为

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+x^2-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{88}{105}\end{aligned}$$

第11题 画出下列积分区域的图形, 并将二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的累次积分.

(1) $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x^2+(y-1)^2\le 1\}$;

(2) $D=\{(x,y)|x^2+(y-a)^2\le a^2, (x-a)^2+y^2\le a^2\}$.

解 (1) 由图知 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(2) 由图知 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

第12题 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|2x\le x^2+y^2\le 4x\}$;

(3) $\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由 $x^2+y^2=x+y$ 围成的平面区域;

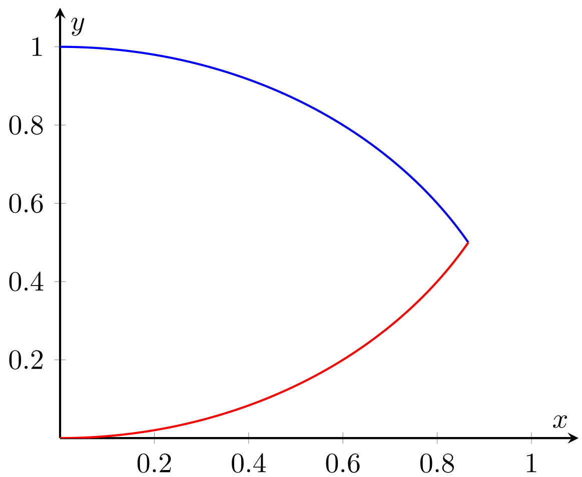

图 4: 习题3.3第11题(1)

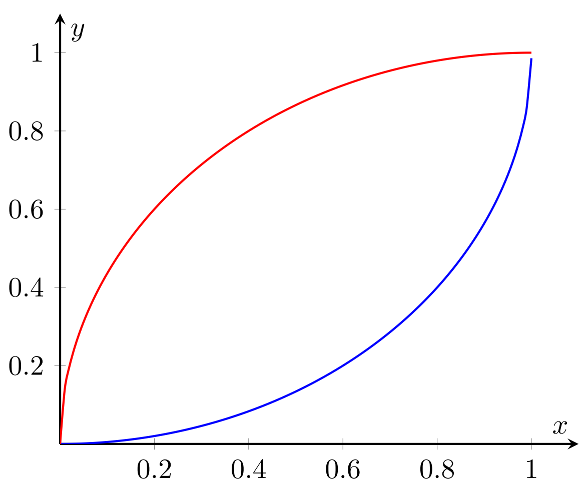

图 5: 习题3.3第11题(2), 此时取 a=1

(5) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\le 0, y\le 0\}$;

解 (1) 代换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则区域变为 $D_{r,\theta}=\{2\cos\theta\le r\le 4\cos\theta, \theta\in[0,\pi]\}$. 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{r,\theta}} r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r^3\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi} 60\cos^4\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 120\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 120\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \\ &= \frac{45}{2}\pi\end{aligned}$$

(3) 做坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\sin\theta+\cos\theta} r^2(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3-\cos 4\theta}{2}+2\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(5) 做坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8} \\ &= \frac{\pi^2}{16}\end{aligned}$$

第13题 求下列曲线所围图形的面积.

(1) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 所围图形 (圆外部分) 的面积 $(a>0)$;

(2) 心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $x^2+y^2=\sqrt{3}ay$ 所围图形 (心脏线内部) 的面积 $(a>0)$.

解 (1) 考虑 $D=\{a\le\rho\le a\sqrt{2\cos 2\theta},-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}\vee\frac{5\pi}{6}\le\theta\le\frac{7\pi}{6}\}$. 则面积

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_D\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2\end{aligned}$$

(2) 考虑 $D=\{0\le\rho\le\sqrt{3}a\sin\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{3}\}\bigcup\{0\le\rho\le a(1+\cos\theta),\frac{\pi}{3}\le\theta\le\pi\}$. 则面积

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_D\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a\sin\theta}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\frac{3\pi-3\sqrt{3}}{4}a^2\end{aligned}$$

第14题 通过恰当的变量代换, 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由 $xy=2,xy=4,y=x,y=3x$ 在第一象限所围成的平面区域;

(2) $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由 $xy=1,xy=2,x^2-y^2=1,x^2-y^2=2$ 所围成的平面区域;

解 (1) 做坐标变换 $(u,v)=(xy,\frac{y}{x})$, 则 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{4v}$. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^3\mathrm{d}v\int_2^4\frac{D(x,y)}{D(u,v)}u^2\mathrm{d}u\\&=\int_1^3\frac{1}{4v}\mathrm{d}v\int_2^4u^2\mathrm{d}u\\&=\frac{\ln 3}{4}\cdot\frac{56}{3}\\&=\frac{28\ln 3}{3}\end{aligned}$$

(2) 做坐标变换 $(u,v)=(x^2-y^2,xy)$, 则 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}$. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^2\mathrm{d}v\int_1^2\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\sqrt{u^2+4v^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}v\int_1^2\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

第15题 求下列图形围成区域的面积.

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, 其中 $a_1b_2\neq a_2b_1$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 与 $x=0,y=0$.

解 (1) 做坐标变换 $(u,v)=(a_1x+b_1y+c_1,a_2x,b_2y,c_2)$, 则 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$. 因此 $S=\iint\limits_{u^2+v^2\le 1}\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\dfrac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}$.

(2) 做坐标变换 $(u,v)=(\sqrt{x},\sqrt{y})$, 则 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=4uv$. 因此 $S=\iint\limits_{u+v\le\sqrt{a},u,v\ge 0}\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{u+v\le\sqrt{a},u,v\ge 0}4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\dfrac{1}{6}a^2$.

第16题 设函数 $f(t)$ 连续, 证明:

(1) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$.

(2) $\iint\limits_{D}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$, D 是由 $xy=1,xy=2,y=x,y=4x$ 所围成的第一象限的区域.

证明 (1) 做坐标变换 $(u,v)=(x+y,x-y)$, 则 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|f(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

(2) 做坐标变换 $(u,v)=(xy,\dfrac{y}{x})$, 则 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\dfrac{1}{4v}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^4\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathrm{d}v\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_1^4\frac{1}{4v}\mathrm{d}v\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u\\
&=\ln 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

第17题 设函数 $f(t)$ 连续, $f(t)>0$, 求积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由对称性, 记 $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $2S=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{f(x)+f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi R^2$. 故 $S=\dfrac{1}{2}\pi R^2$. 因此 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=aS+bS=\dfrac{a+b}{2}\pi R^2$.

第18题 设函数 $f(t,s)$ 连续, 求 $F(x)=\int_0^x\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 的导函数.

解 记 $g(x,t)=\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s$, 则 $F(x)=\int_0^x g(x,t)\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^x\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t+g(x,x)\\&=\int_0^x f(t,x^2)\cdot 2x\mathrm{d}t+\int_{x^2}^{x^2}f(x,s)\mathrm{d}s\\&=2x\int_0^x f(t,x^2)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

3.4 习题3.4解答

第3题 利用三重积分的几何意义, 求下列三重积分的值.

(1) $\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\}$;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le 1-x-y,0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\}$.

解 (1) 由题知, 这个积分的值是一个底面半径为 H 高为 H 的圆锥的体积, 因此为 $\dfrac{1}{3}\pi H^3$.

(2) 由题知, 这个积分的值是一个由三条两两垂直的长为 1 的边构成的正四面体的体积, 因此为 $\dfrac{1}{6}$.

第4题 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为直角坐标下的累次积分.

(1) $\Omega=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$;

(2) $\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le x^2+y^2,x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$.

解 (1) 由 $\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ 得 $-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$. 因此 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y$

(2) 由 $x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0$ 得到 $1-x\le y\le 1,0\le x\le 1$. 因此 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

第5题 计算下列三重积分的值.

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 是由马鞍面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1,z=0$ 所围成的空间区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}x\cos(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 是由曲面 $x=\sqrt{y}$ 与平面 $x=0,z=0,y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的区域.

解 (1) 由题知 $\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le xy\}$. 因此

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^{xy} xy^2z^3\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{4}x^5y^6\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \frac{1}{28}x^{12}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{364}\end{aligned}$$

(3) 由题知 $\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}-z, 0\le x\le \sqrt{y}\}$. 因此

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} x\cos(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}-z} \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} x\cos(y+z)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}-z} y\cos(y+z)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-z-\cos z\right)\mathrm{d}z\\ &= \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

第6题 计算累次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y \frac{\cos z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z$ 的值.

解 积分区域为 $\Omega=\{0\le z\le y\le x\le 1\}$. 因此

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y \frac{\cos z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}z\int_z^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{\cos z}{(1-z)^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}z\int_z^1 (1-y)\frac{\cos z}{(1-z)^2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos z\mathrm{d}z\\ &= \frac{\sin 1}{2}\end{aligned}$$

第7题 计算下列三重积分的值.

(1) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega=\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$;

(3) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le x^2+y^2, x+y\le 1, x,y\ge 0\}$;

(5) $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2+(z-2)^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$;

解 (1) 做坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_r^1 r^2 \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2(1-r)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 r^2(1-r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \frac{z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \frac{z}{x^2+y^2}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(5)

做坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$ 则 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, 其中

$$\Omega_1 = \{0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\},$$
$$\Omega_2 = \{0 \le r \le 4\cos\varphi, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 r^5\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^2 r^5\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi\mathrm{d}\sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\mathrm{d}\sin\theta \\
&= \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^5\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^5\mathrm{d}r \\ &= \frac{1024}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^7\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{1024}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi)\cos^7\varphi\mathrm{d}\cos\varphi \\ &= \frac{1024}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (u^7-u^9)\mathrm{d}u \\ &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}+\frac{8}{5} \\ &= \frac{29}{15}\end{aligned}$$

第8题 做适当的变量代换, 计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$;

解 (1) 作代换 $\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\sin\varphi, \end{cases}$ 有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\mathrm{d}r \\ &= 4\pi abc\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\ &= 4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\alpha\cos\alpha\mathrm{d}\sin\alpha \\ &= 4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\alpha-\sin^4\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= 4\pi abc\cdot(\frac{1}{2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2})\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2 abc}{4}\end{aligned}$$

第10题 设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+|t^3|$, 求 $f(t)$.

解 注意到 $f(t)$ 为偶函数, 因此暂时先考虑 $t\ge 0$ 时的情况, 此时 $f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+t^3$. 作变换 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\sin\varphi,\end{cases}$, 则

$$\begin{aligned} f(t)&=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+t^3\\ &=t^3+\int_0^\pi \sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-t}^t r^2f(r)\mathrm{d}r\\ &=t^3+12\pi\int_{-t}^t r^2f(r)\mathrm{d}r\\ &=t^3+24\pi\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r \end{aligned}$$

对等式左右两侧求导, 有 $f'(t)=3t^2+t^2f(t)$. 解得 $f(t)=Ce^{8\pi t^3}-\dfrac{1}{8\pi}(t\ge 0)$. 又因为 $f(0)=0$ 且 $f(t)$ 为偶函数, 因此

$$f(t)=\frac{1}{8\pi}e^{8\pi|t^3|}-\frac{1}{8\pi}$$

第11题 函数 $f(x,y,z)$ 连续, 计算极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 将积分中值定理推广到三维, 有 $\exists\xi,\eta,\zeta\in(0,r)$ 使得 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{4}{3}\pi r^3f(\xi,\eta,\zeta)$. 代入则有

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^3}\frac{4}{3}\pi r^3 f(\xi,\eta,\zeta)\quad \xi,\eta,\zeta\in(0,r)\\ &=\frac{4}{3}\pi f(0,0,0) \end{aligned}$$

3.5 习题3.5解答

第1题 求下列曲面的面积.

(1) 柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分;

(2) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $z^2=2x$ 内的部分;

(3) 由曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所包围的空间几何体的表面积.

解 (1) 只考虑 $z \geq 0$ 部分的面积 S_1. 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, 因此 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-a}^{a} 2a\mathrm{d}x \\
&= 4a^2
\end{aligned}$$

由对称性知 $S = 2S_1 = 8a^2$.

(2) 在 xy 面上的投影为 $D_{xy} = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 2x\}$, 是一个以 $(1,0)$ 为圆心, 1 为半径的圆, 面积为 π. 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 故 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}$. 因此

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi$$

(3) 两者的交线为 $x^2+y^2 = a(2a-\sqrt{x^2+y^2})$. 积分区域为 $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq a(2a-\sqrt{x^2+y^2})\}$, 化简后即为 $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq a^2\}$. 先考虑 $z = 2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 带来的上表面面积 S_1. 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 故 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\pi a^2
\end{aligned}$$

再考虑 $x^2+y^2 = az$ 带来的下表面面积 S_2. 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{a}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{a}$, 故 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2+4(x^2+y^2)}{a^2}}$. 极坐标变换后, 有

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\cdot\sqrt{1+\frac{4r^2}{a^2}}\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{a}\int_0^a r\sqrt{a^2+4r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{4a}\int_{a^2}^{5a^2}\sqrt{u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)a^2
\end{aligned}
$$

因此表面积为 $S=S_1+S_2=\dfrac{\pi}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)a^2$.

第2题 求下列曲面所包围的均匀物体的质心.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$;

解 (1) 积分区域为 $\Omega=\{(x,y,z)|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$. 做坐标变换 $\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta, \\ x=br\sin\varphi\sin\theta, \\ z=cr\cos\varphi, \end{cases}$，则 $\left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi$. 因此

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\right|\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}abc \\
&= \frac{\pi}{6}abc
\end{aligned}
$$

对 xy 平面的静力矩为

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\right|cr\cos\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc^2r^3\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}abc^2 \\
&= \frac{\pi}{16}abc^2
\end{aligned}
$$

由对称性知 $M_{yz}=\dfrac{\pi}{16}a^2bc, M_{xz}=\dfrac{\pi}{16}ab^2c$. 因此质心坐标为 $\left(\dfrac{3a}{8},\dfrac{3b}{8},\dfrac{3c}{8}\right)$.

第3题 求解下列问题.

(1) 物体在 $P(x,y,z)$ 的点密度为 $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \Omega=\{(x,y,z)|0\leq x,y,z\leq 1\}$, 求物体的质心;

解 (1) 总质量为

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1(x+1)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

对 xy 平面的静力矩为

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint\limits_{\Omega} z(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 z(x+y+z)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

因此 $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{5}{9}$. 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\dfrac{5}{9}$. 因此质心坐标为 $\left(\dfrac{5}{9},\dfrac{5}{9},\dfrac{5}{9}\right)$.

第4题 求下列曲面所包围的均匀物体关于 z 轴的转动惯量.

(1) $z=x^2+y^2, x+y=\pm1, x-y=\pm1, z=0$;

解 (1) 设积分区域为 $\Omega=\{(x,y,z)|z\le x^2+y^2, x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$.

$$
\begin{aligned}
J_z' &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} (x^2+y^2)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x^2+y^2)^2\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{28}{15}x^5+4x^4-4x^3+\frac{8}{3}x^2-x+\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{90}
\end{aligned}
$$

由对称性知 $J_z=4J_z'=4\cdot\dfrac{7}{90}=\dfrac{14}{45}$.

3.6 第3章总复习题解答

4 曲线积分与曲面积分

4.1 习题4.1解答

4.2 习题4.2解答

第1题 计算下列曲线积分.

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}l$, 其中 L 为 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的三条边;

(2) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$;

(3) $\int_L y^2\mathrm{d}l$, 其中 L 为摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$;

(4) $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l$, 其中 L 为星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$.

解 (1) $L=L_1+L_2+L_3$, 其中 $L_1=\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad L_2=\begin{cases} x=x, \\ y=1-x, \end{cases} \quad L_3=\begin{cases} x=0, \\ y=y, \end{cases} \quad (0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$. 因此

$$\begin{aligned}
\int_L (x+y)\mathrm{d}l &= \int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}l+\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}l+\int_{L_3}(x+y)\mathrm{d}l \\
&= \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1 \sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2} \\
&= \sqrt{2}+1
\end{aligned}$$

(2) 设 $\begin{cases} x=1+\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$ 则 $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned}
\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l &= \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u \\
&= 8
\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{a^2(a-\cos t)^2+(a\sin t)^2}=\sqrt{2}a\sin\frac{t}{2}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_L y^2 \mathrm{d}l &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot \sqrt{2}a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 4\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 8\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\sin^3 u\mathrm{d}u \\
&= 32\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u \\
&= 32\sqrt{2}a^3\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} \\
&= \frac{256}{15}a^3
\end{aligned}
$$

(4) $\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t = 3a\left|\sin t\cos t\right|\mathrm{d}t$. 只考虑 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ 的情况.

$$
\begin{aligned}
\int_{L'}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cdot 3a(\sin t\cos t)\mathrm{d}t \\
&= 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\cos t\mathrm{d}t \\
&= 3a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{1}{6}\sin^6 t-\frac{1}{6}\cos^6 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= a^{\frac{7}{3}}
\end{aligned}
$$

由对称性知 $\int_L(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l = 4\int_{L'}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l = 4a^{\frac{7}{3}}$.

第2题 计算下列曲线积分.

(1) $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}l$, 其中 L 为双纽线右半支 $r^2 = a^2\cos 2\theta(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}, a>0)$;

(2) $\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l$, 其中 L 为螺线 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t(0\le t\le 2\pi)$;

(3) $\int_L xyz\mathrm{d}l$, 其中 L 的参数方程为 $x = t, y = \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}, z = \frac{1}{2}t^2(0\le t\le 1)$;

(4) $\int_L x\mathrm{d}l$, 其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2 = 4$ 在第一象限部分的边界.

解 (1) 由题知 $\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2\cos 2\theta} = \frac{r^2}{a}$. 而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}l &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} \\
&= \sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2+(\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2} \\
&= \sqrt{(\mathrm{d}r)^2+r^2(\mathrm{d}\theta)^2}
\end{aligned}
$$

对 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 微分得到 $\mathrm{d}r=-\dfrac{a^2\sin 2\theta}{r}\mathrm{d}\theta$, 代入有 $\mathrm{d}l=\sqrt{\left(-\dfrac{a^2\sin 2\theta}{r}\mathrm{d}\theta\right)^2+r^2(\mathrm{d}\theta)^2}=\dfrac{1}{r}\sqrt{r^4-(a^2\sin 2\theta)^2}\mathrm{d}\theta$. 结合 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 知 $\mathrm{d}l=\dfrac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}l &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\cdot\frac{r^2}{a}\cdot\frac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= a^3\left(\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}
\end{aligned}
$$

(2) $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+3^2}=\sqrt{13}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l &= \int_0^{2\pi}(4+9t^2)\cdot\sqrt{13}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{13}(4t+3t^3)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 24\sqrt{13}\pi^3+8\sqrt{13}\pi
\end{aligned}
$$

(3) $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2t})^2+t^2}=(t+1)\mathrm{d}t$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_L xyz\mathrm{d}l &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3}t^{\frac{9}{2}}\cdot(t+1)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{11}{2}}\left(\frac{1}{13}t+\frac{1}{11}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{16\sqrt{2}}{143}
\end{aligned}
$$

(4) $L=L_1+L_2+L_3$, 其中 $L_1=\begin{cases}x=0,\\ y=2\cos\theta,\\ z=2\sin\theta,\end{cases}$ $L_2=\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=0,\\ z=2\sin\theta,\end{cases}$ $L_3=\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\\ z=0,\end{cases}$ $(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$. 因此

$$\begin{aligned}\int_L x\mathrm{d}l &= \int_{L_1} x\mathrm{d}l + \int_{L_2} x\mathrm{d}l + \int_{L_3} x\mathrm{d}l \\ &= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\cdot 4\mathrm{d}\theta \\ &= 8\end{aligned}$$

第4题 曲线 $y=\ln x$ 的线密度 $\rho(x,y)=x^2$, 试求曲线在 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=\sqrt{15}$ 之间的质量.

解 $M=\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}l$, 其中 L 是 $y=\ln x(\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15})$. 而 $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$, 因此

$$\begin{aligned}M &= \int_L \rho(x,y)\mathrm{d}l \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \\ &= \frac{56}{3}\end{aligned}$$

第5题 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于曲面 $z=a+\frac{x^2}{a}$ 与 $z=0$ 之间的面积 $(a>0)$.

解 积分区域为 $L=\{(x,y)|x^2+y^2=a^2\}=\{(x,y)|x=a\cos\theta,b=a\sin\theta,0\le\theta\le 2\pi\}$. 而 $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta$, 因此

$$\begin{aligned}S &= \int_L z\mathrm{d}l \\ &= \int_0^{2\pi}(a+a\cos^2\theta)a\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(3+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 3\pi a^2\end{aligned}$$

第6题 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad 0\le t\le\pi$ 的形心.

解 $\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{a^2(a - \cos t)^2 + (a \sin t)^2} = \sqrt{2}a \sin \frac{t}{2}.$
总质量

$$\begin{aligned} M &= \int_L \mathrm{d}l \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2}a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \mathrm{d}u \\ &= 2\sqrt{2}a \end{aligned}$$

对 x 轴的静力矩

$$\begin{aligned} M_x &= \int_L y \mathrm{d}l \\ &= \int_0^{\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{2}a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u \mathrm{d}u \\ &= 4\sqrt{2}a^2 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \end{aligned}$$

对 y 轴的静力矩

$$\begin{aligned} M_y &= \int_L x \mathrm{d}l \\ &= \int_0^{\pi} a(t - \sin t) \cdot \sqrt{2}a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} t \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t - \sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} \sin t \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin u \mathrm{d}u - 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 u \cos u \mathrm{d}u \\ &= 4\sqrt{2}a^2(-u \cos u + \sin u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4\sqrt{2}a^2}{3} \sin^3 u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\sqrt{2}a^2 - \frac{4\sqrt{2}a^2}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \end{aligned}$$

因此形心在 $\left(\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}\right)$ 即 $(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3})$ 处.

第7题 求螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{b}{2\pi}t(0 \le t \le 2\pi)$ 绕 x 轴旋转的转动惯量 (线密度为 1).

解 $\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{b^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$. 因此

$$\begin{aligned}
J_x &= \int_L (y^2 + z^2)\mathrm{d}l \\
&= \int_0^{2\pi} \left(a^2\sin^2 t + \left(\frac{b}{2\pi}t\right)^2\right) \frac{\sqrt{b^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{b^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cdot \frac{1 - 2\cos 2t}{2} + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot t^2\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{b^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \cdot \left(\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3}\right) \sqrt{b^2 + 4\pi^2 a^2}
\end{aligned}$$

第8题 圆周 $L : x^2 + y^2 = -2y$ 上每点的质量线密度等于 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 求曲线 L 的质量与曲线 L 对 x 轴的静力矩.

解 设 $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = -1 + \sin\theta, \end{cases} \quad (-\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, 此时恒有 $\cos\frac{\theta}{2} \ge \sin\frac{\theta}{2}$.

曲线 L 的质量为

$$\begin{aligned}
M &= \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}l \\
&= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi - \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\sqrt{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 8
\end{aligned}$$

对 x 轴的静力矩为

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_L y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - 1)(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\varphi\sin\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{3}\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi - \cos\varphi - \sin\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{32}{3}
\end{aligned}$$

4.3 习题4.3解答

第1题 计算下列第一类曲面积分.

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$, 其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$;

(3) $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 是四面体 $x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 的边界面;

解 (1) 做坐标变换 $\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta, \\ y = a\sin\varphi\sin\theta, \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$, 则积分区域变为 $D=\{(a\sin\varphi\cos\theta, a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi)|0\leq \varphi\leq\dfrac{\pi}{2}, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$. $\mathrm{d}S = a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$. 由对称性知 $\iint\limits_S (x+y)\mathrm{d}S = 0$. 因此

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S &= \iint\limits_S z\mathrm{d}S \\
&= \iint\limits_S a\cos\varphi\cdot a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= a^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{\pi a^3}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi a^3
\end{aligned}$$

(3) 将 S 分解为

$$S_1=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\},$$
$$S_2=\{(x,y,z)|x+y+z\leq 1,x=0,y\geq 0,z\geq 0\},$$
$$S_3=\{(x,y,z)|x+y+z\leq 1,x\geq 0,y=0,z\geq 0\},$$
$$S_4=\{(x,y,z)|x+y+z\leq 1,x\geq 0,y\geq 0,z=0\}.$$

对于 S_1, 由于 $x+y+z=1$, 所以 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_1}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}&=\iint\limits_{S_1}\frac{\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}\\&=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}\\&=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\sqrt{3}\left(\ln(x+1)-\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1\\&=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

同理 $\iint\limits_{S_4}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\ln 2-\frac{1}{2}$, 再考虑 S_2:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_2}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}&=\iint\limits_{S_2}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+y)^2}\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}\\&=\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\\&=-\left(\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}\right)\Big|_0^1\\&=1-\ln 2\end{aligned}$$

同理 $\iint\limits_{S_3}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=1-\ln 2$. 因此总和为

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+S_3+S_4\\&=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+(1-\ln 2)+(1-\ln 2)+\ln 2-\frac{1}{2}\\&=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2\end{aligned}$$

第2题 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截部分的面积 $(a>0)$.

解 进行坐标变换 $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos\theta, \\ y = \dfrac{a}{2}\sin\theta, \end{cases}$ 则积分区域变为 $L = \{(x,y)|x = \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta, y = \frac{a}{2}\sin\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. 同时 $\mathrm{d}l = \frac{a}{2}\mathrm{d}\theta, z^2 = a^2 - ax = \frac{a^2}{2}(1-\cos\theta)$. 不妨只考虑 $z > 0$ 的部分.

$$\begin{aligned} \int_L z\mathrm{d}l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\theta)} \cdot \frac{a}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= -a^2\cos\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{2\pi} \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

由对称性, $z < 0$ 的区域所截面积也为 $2a^2$, 因此全面积为 $4a^2$.

第3题 求抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 在 $z \in [0,1]$ 部分的质量, 其中质量面密度为 $\sigma = z$.

解 抛物面的面积元素为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

进行坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则有

$$\begin{aligned} \iint\limits_{0\leq x^2+y^2\leq 2} \sigma\mathrm{d}S &= \iint\limits_{0\leq x^2+y^2\leq 2} \frac{x^2+y^2}{2} \cdot \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{2}\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 u\sqrt{1+u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{15}(3u-2)(u+1)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^2 \\ &= \frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi \end{aligned}$$

第8题 求锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $z^2 = 2x$ 内的面积.

解 锥面的面积元素为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

锥面被柱面所截部分记作 S (其面积也记为 S), 它在 xy 平面上的投影区域是圆域 $D_{xy} = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 2x\}$, 所以

$$S = \iint\limits_S 1\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi$$

4.4 习题4.4解答

第1题 计算下列第二类曲线积分.

(1) $\int_{L^+} \dfrac{x^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, 其中 L^+ 是星形线在第一象限中的弧段 $\begin{cases}x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t,\end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, 正向为 $(0,a)$ 到 $(a,0)$;

(2) $\int_{\bar{AB}} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, 其中路径是从点 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,3,4)$ 的直线段;

(3) $\int_{L^+} \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + b\mathrm{d}z$, 其中 L^+ 是螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 上由参数 $t=0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段有向弧段.

解 (1) $\mathrm{d}x = -3a\cos^2 t\sin t, \mathrm{d}y = 3a\sin^2 t\cos t$, 正向参数值为 t 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 0. 因此

$$\begin{aligned}\int_{L^+} \frac{x^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{a^2\cos^6 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t - a^2\sin^6 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)}{a^{\frac{5}{3}}(\cos^5 t+\sin^5 t)}\mathrm{d}t \\ &= 3a^{\frac{4}{3}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t \\ &= 3a^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \\ &= -\frac{3\pi}{16}a^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

(2) 设路径上的任意一点 P 可被表示为 $P(1+t, 1+2t, 1+3t)$, 正向参数值为 t 从 0 到 1, 则

$$\begin{aligned}\int_{\bar{AB}} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z &= \int_0^1 [(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (14t+6)\mathrm{d}t \\ &= (7t^2+6t)\Big|_0^1 \\ &= 13\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t, \mathrm{d}y=a\cos t\mathrm{d}t, \mathrm{d}z=b\dot{t}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{L^+}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+b\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-a\sin t\cdot(-a\sin t)+a\cos t\cdot a\cos t}{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}+b^2\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(1+b^2)\mathrm{d}t\\&=2\pi(1+b^2)\end{aligned}$$

第2题 计算下列第二类曲线积分.

(1) $\int_{L^+}(x^2-y^2)\mathrm{d}x$, 其中 L^+ 是抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的弧段;

(3) $\oint_{L^+}\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中 L^+ 是 $x^2+y^2=a^2$, 逆时针为正向;

(5) $\int_{L^+}xyz\mathrm{d}z$, 其中 L 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=y,\end{cases}$ 从 z 轴正向看去是逆时针方向.

解 (1) 将 $y=x^2$ 代入, 有

$$\begin{aligned}\int_{L^+}(x^2-y^2)\mathrm{d}x&=\int_0^2(x^2-x^4)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2\\&=-\frac{56}{15}\end{aligned}$$

(3) 设 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$, 正向参数值为 t 从 0 到 2π, 则 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=-a\sin t+a\cos t$. 故

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}&=\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin t+a\cos t}{a\cos t+a\sin t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t\\&=\ln|\cos x+\sin x|\Bigg|_0^{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$

(5) 设 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\end{cases}$, 正向参数值为 t 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t\mathrm{d}t$. 故

$$\begin{aligned}
\int_{L^+} xyz\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{16}
\end{aligned}$$

第3题 计算 $\int_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

(1) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$, L 是由 $x=y, x=1, y=0$ 围成的三角形的边界, 逆时针为正向;

(3) $\mathbf{F}=F\mathbf{i}$, L 是由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限由点 $(0,b)$ 到点 $(a,0)$ 的弧段;

解 (1) 将 L^+ 拆成 3 段: $L_1^+=\begin{cases}x=t,\\ y=0,\end{cases}$ $L_2^+=\begin{cases}x=1,\\ y=t,\end{cases}$ $L_3^+=\begin{cases}x=1-t,\\ y=1-t,\end{cases}$, 正向参数值均为 t 从 0 到 1, 则

$$\begin{aligned}
\int_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{L_1^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}+\int_{L_2^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}+\int_{L_3^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \int_0^1 (0,t)\cdot(1,0)\mathrm{d}t+\int_0^1(-t,1)\cdot(0,1)\mathrm{d}t+\int_0^1(t-1,1-t)\cdot(-1,-1)\mathrm{d}t \\
&= 0+1+0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

(3) 设 $\begin{cases}x=a\sin\theta,\\ y=b\cos\theta,\end{cases}$, 正向参数值为 θ 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(F,0)\cdot(a\cos\theta,-b\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} aF\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= aF
\end{aligned}$$

第4题 今有一平面力场 $\mathbf{F}$, 大小等于点 (x,y) 到坐标原点的距离, 方向指向坐标原点.

(1) 计算单位质量的质点 P 沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的弧段从点 $(a,0)$ 移动到点 $(0,b)$ 时, 力 $\mathbf{F}$ 所做的功;

(2) 计算质点 P 沿上述椭圆逆时针绕一圈时, 力 $\mathbf{F}$ 所做的功.

解 (1) 设 $\mathbf{r}=(a\cos\theta,b\sin\theta)$, 则 $\mathbf{F}=(-a\cos\theta,-b\sin\theta)$. 所求的功

$$\begin{aligned}W_1&=\int_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a\cos\theta,-b\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta,b\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin\theta\cos\theta-b^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2-b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{b^2-a^2}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{a^2-b^2}{2}\end{aligned}$$

(2) 同理可得

$$\begin{aligned}W_2&=\int_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\\&=\int_0^{2\pi}(-a\cos\theta,-b\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta,b\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}(a^2\sin\theta\cos\theta-b^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2-b^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\\&=0\end{aligned}$$

第5题 解答下列各题.

(1) 设一力场的力的大小与作用点到 z 轴的距离成反比, 方向垂直 z 轴且指向 z 轴, 一质点沿圆周 $\begin{cases}x^2+z^2=1,\\y=1,\end{cases}$ 由点 $(1,1,0)$ 经四分之一圆弧到达点 $(0,1,1)$ 时, 求该力场所做的功;

解 (1) 设 $\mathbf{F}=k\left(-\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2},0\right)$. 设 $\mathbf{r}=(\cos\theta,1,\sin\theta)$, 则 $\mathbf{F}=k\left(-\dfrac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta},-\dfrac{1}{1+\cos^2\theta},0\right)$. 因此总功

$$\begin{aligned}
W &= \int_{L^+} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k\left(-\frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta}, -\frac{1}{1+\cos^2\theta}, 0\right)\cdot(-\sin\theta, 0, \cos\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= k\int 0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{k}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 \\
&= \frac{k\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

4.5 习题4.5解答

第1题 计算下列第二类曲面积分, 其中 S^+ 是球面 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 的外侧.

(1) $\oint\limits_{S^+} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;

(2) $\oint\limits_{S^+} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;

(3) $\oint\limits_{S^+} z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

解 (1) 由对称性知 $\oint\limits_{S^+} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$.

(2) 记上半球面为 S_1^+, 满足 $z=R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 下半球面为 S_2^+, 满足 $z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 则 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$. 换元 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, 则 $D_{r\theta}=\{(r,\theta)|0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi\}$. 因此

$$I_1=\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(R+\sqrt{R^2-r^2})\mathrm{d}\theta$$

$$I_2=\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(-R+\sqrt{R^2-r^2})\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}
I &= I_1+I_2 \\
&= 4\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r \\
&= -\frac{4\pi}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

(3) 同 (2) 可知

$$\begin{aligned}I &= I_1' + I_2' \\ &= 8\pi\int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{8\pi R^3}{3}\end{aligned}$$

第3题 计算下列曲面积分.

(1) $\iint_{S^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围立方体表面的外侧;

(2) $\iint\limits_{S^+} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=3$ 所截部分的外侧;

解 (1) 设 $S_1 = \{(x,y,z)|0\le x,y\le 1, z=0\}$. 由对称性知 $\iint_{S^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 3\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3$.

(2) 将 S^+ 分为三个部分: S_1^+ 上底面, S_2^+ 下底面, S_3^+ 侧面.

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S_1^+} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{S_1^+} z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{S_1^+} 9\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= 9\pi\end{aligned}$$

由对称性知 $\iint\limits_{S_2^+} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint\limits_{S_3^+} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0$.

故 $\iint\limits_{S^+} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 9\pi$.

第4题 计算 $\iint\limits_{S^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{A} = \dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, S^+ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧.

解 做坐标变换 $\begin{cases}x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $A = \dfrac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)} = R^2\sin^2\varphi\cos\theta$, $B = \dfrac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)} = R^2\sin^2\varphi\sin\theta$, $C = \dfrac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)} = R^2\sin\varphi\cos\varphi$. 积分区域为 $D_{\varphi\theta} = \{(\varphi,\theta)| -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le 0, 0\le\theta\le 2\pi\}$. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}&=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)\cdot(R^2\sin^2\varphi\cos\theta,R^2\sin^2\varphi\sin\theta,R^2\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=R^2\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=-2\pi R^2\end{aligned}$$

第5题 求流速场 $\mathbf{V}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$ 由里往外穿过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一象限部分的流量.

解 做坐标变换 $\begin{cases}x=\sin\varphi\cos\theta,\\y=\sin\varphi\sin\theta,\\z=\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $A=\dfrac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)}=\sin^2\varphi\cos\theta$, $B=\dfrac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)}=\sin^2\varphi\sin\theta$, $C=\dfrac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)}=\sin\varphi\cos\varphi$. 积分区域为 $D_{\varphi\theta}=\{(\varphi,\theta)|0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\}$. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+}\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}&=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}(\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta,\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta,\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi)\cdot(\sin^2\varphi\cos\theta,\sin^2\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}(\sin^4\varphi\sin\theta\cos^2\theta+\sin^3\varphi\cos\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+1\cdot\frac{\pi}{16}\\&=\frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

第7题 $\iint\limits_{S^+}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$, 其中 S 是螺旋面 $x=u\cos v,y=u\sin v,z=av$ 在

$$D_{uv}=\{(u,v)|0\le u\le1,0\le v\le2\pi\}$$

的部分, 上侧为正.

解 $A=\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}=a\sin v$, $B=\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}=-a\cos v$, $C=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=u$. 因此

$$\begin{aligned}
&\iint_{S^+}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\
&=\iint_{D_{uv}}(u^2,u^2\sin^2 v,a^2v^2)\cdot(a\sin v,-a\cos v,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\iint_{D_{uv}}(au^2\sin v-au^2\sin^2 v\cos v+a^2uv^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\int_0^1 u^2\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}a\sin v\mathrm{d}v+\int_0^1 u^2\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\sin^2 v\cos v\mathrm{d}v+\int_0^1 u\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}a^2v^2\mathrm{d}v\\
&=0+0+\frac{4\pi^3a^2}{3}\\
&=\frac{4\pi^3a^2}{3}
\end{aligned}$$

4.6 习题4.6解答

第1题 利用 Green 公式计算下列曲线积分.

(1) $\oint_{L^+}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L^+ 是以 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 为顶点的三角形的边界, 逆时针为正;

(3) $\oint_{L^+}(x^2+y)\mathrm{d}x-(x-y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的正向边界;

解 (1) $X=(x+y)^2, Y=-(x^2+y^2)$, 因此由 Green 定理

$$\begin{aligned}
\oint_{L^+}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y&=\oint_{L^+}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_D(-2x-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(4x+2y)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1(3x^2-2x-1)\mathrm{d}x\\
&=-1
\end{aligned}$$

(3) $X=x^2+y, Y=y^2-x$. 由 Green 定理知

$$\oint_{L^+}(x^2+y)\mathrm{d}x-(x-y^2)\mathrm{d}y=\oint_{L^+}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi ab$$

第2题 计算 $\int_{L^+}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L^+ 为

(1) 区域 $D=\{(x,y)|a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$ 的正向边界 $(b>a>0)$;

(3) 正方形 $D=\{(x,y)|\,|x|+|y|\le 1\}$ 的逆时针方向;

解 (1) $X=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, Y=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$, 因此 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$. 由 Green 定理知 $\int_{L^+}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$.

(3) 考虑 $D^*=\{(x,y)|x=\epsilon\cos\theta, y=\epsilon\sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi\}$, 正方向为 θ 从 2π 到 0. 因此 $\int_{\partial D\cup D^*}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$. 而

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D^*}\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}&=\int_{2\pi}^{0}\frac{\epsilon^2(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)+\epsilon^2(\sin\theta-\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\epsilon^2}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}\theta\\
&=2\pi
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int_{L^+}\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{D\cup D^*}\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\int_{D^*}\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-2\pi
$$

第3题 计算下列曲线积分.

(1) $\int_{L^+}(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 是从点 $(0,0)$ 经上半圆周 $(x-2)^2+y^2=4$ 到点 $(4,0)$ 的弧段;

(3) $\int_{L^+}\left(\ln\dfrac{y}{x}-1\right)\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$, 其中 L 是从点 $(1,1)$ 出发到点 $(3,3e)$ 的任何一条不与坐标轴相交的简单曲线.

解 (1) $X=1+xe^{2y}, Y=x^2e^{2y}-y^2$. 设 $A(0,0), B(4,0)$, 正方向由 B 到 A. 则 AB 和 L 围成的图形 D 满足: $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(2xe^{2y}-2xe^{2y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 由于 $\int_{BA}X\mathrm{d}x=\int_4^0(1+x)\mathrm{d}x=-12$, 故由 Green 定理

$$
\int_{L^+}(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{BA}X\mathrm{d}x=12
$$

(3) $X=\ln\dfrac{y}{x}-1, Y=\dfrac{x}{y}$, 因此 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$. 所以这个曲线积分与路径无关, 此时可以先沿着 x 轴正方向, 再沿着 y 轴正方向的路径来计算这个积分.

$$
\begin{aligned}
\int_{L^+}\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y &= \int_1^3\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x+\int_1^{3e}\frac{3}{y}\mathrm{d}y \\
&= -x\ln x\Big|_1^3+3\ln y\Big|_1^{3e} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

第4题 计算下列区域的面积.

(1) 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$ 所围区域 $(a>0)$;

解

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_L y\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3 t)\cdot(-3a^2\cos^2 t\sin t)\mathrm{d}t \\
&= 12a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t\right) \\
&= 12a^2\cdot\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2
\end{aligned}
$$

第5题 已知 $f(u)$ 连续可微, L 为任意一条分段光滑曲线, 证明:

(1) $\oint_{L^+} f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$;

(2) $\oint_{L^+} f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$.

证明 (1) $X=yf(xy), Y=xf(xy)$, 因此 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)=\dfrac{\partial X}{\partial y}$. 由定理 4.6.3 和定理 4.6.4 得 $\oint_{L^+} f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$.

(2) $X=xf(x^2+y^2), Y=yf(x^2+y^2)$, 因此 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=2xyf'(x^2+y^2)=\dfrac{\partial X}{\partial y}$. 由定理 4.6.3 和定理 4.6.4 得 $\oint_{L^+} f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$.

第6题 设 D 是平面区域, ∂D 为逐段光滑曲线, $(\bar{x},\bar{y})$ 为 D 的形心, $\sigma(D)$ 是 D 的面积, 证明:

(1) $\oint_{\partial D} x^2\mathrm{d}y=2\sigma(D)\bar{x}$;

(2) $\oint_{\partial D} xy\mathrm{d}y=\sigma(D)\bar{y}$.

证明 (1) 由 Green 定理 $\oint_{\partial D} x^2\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由定义 $\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sigma(S)}$. 因此 $\oint_{\partial D} x^2\mathrm{d}y=2\sigma(D)\bar{x}$.

(2) 由 Green 定理 $\oint_{\partial D} xy\mathrm{d}y = \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由定义 $\bar{y} = \dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sigma(S)}$. 因此 $\oint_{\partial D} xy\mathrm{d}y = \sigma(D)\bar{y}$.

第8题 设 D 是平面区域, ∂D 为逐段光滑曲线, $\mathbf{n}$ 为 D 的单位外法向, $u, v \in C^2(D)$, 证明:

(1) $\oint_{\partial D} \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l = \iint\limits_D \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\oint_{\partial D} v\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l = \iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(3) $\oint_{\partial D} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}l = \iint\limits_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

其中 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$.

证明 $\mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y), \mathbf{n} = \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{|\mathrm{d}\mathbf{l}|}, -\dfrac{\mathrm{d}x}{|\mathrm{d}\mathbf{l}|}\right)$.

(1) 由 Green 定理,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l &= \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

(2) 由 Green 定理,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l &= \oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

(3) 由 (2) 知,

$$\oint_{\partial D}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l-\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l$$

$$=\left(\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\left(\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \nabla v\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第9题 设 L 为逐段光滑曲线, $\mathbf{n}$ 为 L 所围区域的单位外法向, $\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle$, $\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle$ 分别表示 $\mathbf{n}$ 与 x 轴、y 轴正向的夹角, 计算: $\oint_L(x\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle+y\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle)\mathrm{d}l$.

解 设 L 所围区域为 D, 面积为 S. $\mathrm{d}\mathbf{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$, 则 $\mathbf{n}=\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l},-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right)$. 由 Green 定理,

$$\begin{aligned}\oint_L(x\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle+y\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle)\mathrm{d}l&=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2S\end{aligned}$$

第10题 求解下列常微分方程.

(1) $(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $e^y\mathrm{d}x+(xe^y-2y)\mathrm{d}y=0$;

(3) $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$;

(4) $\left(\cos x+\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 原方程可化为 $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3-xy-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}\sin 2y\right)=0$, 因此解为 $\dfrac{1}{3}x^3-xy-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}\sin 2y=C$.

(2) 原方程可化为 $\mathrm{d}(xe^y-y^2)=0$, 因此解为 $xe^y-y^2=C$.

(3) 原方程可化为 $\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2}=-\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 因此解为 $\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}=C$.

(4) 原方程可化为 $\mathrm{d}\left(\sin x+\dfrac{x}{y}+\ln y\right)=0$, 因此解为 $\sin x+\dfrac{x}{y}+\ln y=C$.

第11题 解下列方程.

(1) $(y\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(3x^2+y)\mathrm{d}x+(2x^2y-x)\mathrm{d}y=0$;

(5) $(x^2-\sin^2 y)\mathrm{d}x+x\sin 2y\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 有积分因子 e^y. 原方程可化为 $\mathrm{d}(e^y(y\sin x+x\cos x-\sin x))=0$. 因此解为 $e^y(y\sin x+x\cos x-\sin x)=C$.

(3) 有积分因子 $\frac{1}{x^2}$. 原方程可化为 $\mathrm{d}\left(3x-\frac{y}{x}+y^2\right)=0$. 同时, $x=0$ 也是原方程的解. 因此解为 $3x^3-xy+x^2y^2=Cx^2$.

(5) 有积分因子 $\frac{1}{x^2}$. 原方程可化为 $\mathrm{d}\left(x+\frac{\sin^2 y}{x}\right)=0$. 同时, $x=0$ 也是原方程的解. 因此解为 $x^3+x^2\sin^2 y=Cx^2$.

4.7 习题4.7解答

第2题 计算曲面积分 $\oint\limits_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 S^+ 为:

(1) 不包含也不经过原点的半径为 R 的球面外侧;

(2) 不包含也不经过原点的任意封闭曲面的外侧;

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=\epsilon^2(\epsilon>0)$;

(4) 包含原点在其内部的任意封闭曲面的外侧.

解 $X=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Y=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Z=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. 因此 $\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$.

(1) 由 Gauss 公式, 该积分值为 0.

(2) 由 Gauss 公式, 该积分值为 0.

(3) 设此球面为 Γ, 该积分值为 J. 由对称性知 $J=3\oint\limits_{\Gamma^+}Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. 对于 $z>0$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y, z=\sqrt{\epsilon^2-x^2-y^2}$. 对于 $z<0$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y, z=-\sqrt{\epsilon^2-x^2-y^2}$. 因此

$$\begin{aligned}
J&=\frac{6}{\epsilon^3}\iint\limits_D\sqrt{\epsilon^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{6}{\epsilon^3}\int_0^\epsilon r\sqrt{\epsilon^2-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\
&=2\pi\cdot\frac{9}{2}(\epsilon^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^\epsilon\\
&=4\pi
\end{aligned}$$

(4) 设积分区域为 A, 则由 Gauss 公式, $\oint\limits_{\Gamma^-\cup A^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$. 因此

$$
\begin{aligned}
&\oint\limits_{A^+} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=-\oint\limits_{\Gamma^-} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=4\pi
\end{aligned}
$$

第3题 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分.

(1) $\oint\limits_{S^+} x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 的外侧;

(3) $\oint\limits_{S^+}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(y+2z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z^2-1)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$, 其中 S^+ 为平面 $x+y+z=1$ 及与三个坐标平面所围四面体的表面, 外侧为正;

(5) $\oint\limits_{S^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{r}}{r^3},\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},r=||\mathbf{r}||$, S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 外侧为正;

解 (1) $X=x^3,Y=y^3,Z=z^3$, 且 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 由 Gauss 公式

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{S^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint\limits_{\Omega}3R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=4\pi
\end{aligned}
$$

(3) $X=x+2y+3z,Y=y+2z,Z=z^2-1$. 由 Gauss 公式

$$
\begin{aligned}
&\oint\limits_{S^+}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(y+2z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z^2-1)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint\limits_{\Omega}(0+0+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(5) 由第2题 (4) 得 $\oint\limits_{S^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=4\pi$.

第4题 求向量场 $\mathbf{A}$ 通过闭曲面 S (从里向外) 的通量 $\Phi=\oint\limits_{S^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

(1) $\mathbf{A}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(2) $\mathbf{A} = (x-y+z)\mathbf{i} + (y-z+x)\mathbf{j} + (z-x+y)\mathbf{k}$, S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

解 (1) 由第3题 (1) 得 $\Phi = \dfrac{12}{5}\pi R^5$.

(2) $X = x-y-z, Y = y-z+x, Z = z-x+y$. 由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint\limits_{S^+} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{\Omega} (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 4\pi abc\end{aligned}$$

第5题 利用 Stokes 公式计算下列积分.

(1) $\oint_{L^+} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看上去, 为逆时针方向;

(3) $\oint_{L^+} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$, 其中 L 是以 $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)(a,b,c>0)$ 为顶点的三角形的边界, 方向为 $A \to B \to C \to A$.

解 (1) 取 $\mathbf{n} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 记 D 为球 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的截面. 由 Stokes 公式

$$\oint_{L^+} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} (-1,-1,-1) \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S$$

故 $\oint_{L^+} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \sqrt{3}\iint\limits_{D} \mathrm{d}S = -\sqrt{3}\pi R^2$.

(3) 由 Stokes 公式

$$\oint_{L^+} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z = \iint\limits_{S^+} -2z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - 2x\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

考虑其中的 $\oint_{L^+} y^2\mathrm{d}x = \iint\limits_{S^+} 2y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 在 xy 平面内的投影 $D_{xy} = \{(x,y)|0 \le x \le a, 0 \le y \le b - \dfrac{b}{a}x\}$.

$$\begin{aligned}\oint_{L^+} y^2\mathrm{d}x &= \iint_D 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b-\frac{b}{a}x} 2y\mathrm{d}y\\ &= \int_0^a \left(b-\frac{b}{a}x\right)^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{a}{3b}\left(\frac{b}{a}x-b\right)^3\bigg|_0^a\\ &= \frac{ab^2}{3}\end{aligned}$$

由对称性知 $\oint_{L^+} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=\dfrac{ab^2+bc^2+ca^2}{3}$.

第6题 试验证下列微分式为某个三元函数 $u(x,y,z)$ 的全微分, 并求出该函数.

(1) $\dfrac{1}{x^2}(yz\mathrm{d}x-zx\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z)$;

(2) $\dfrac{1}{(x+z)^2+y^2}[y\mathrm{d}x-(z+x)\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z]$.

解 (1) 记 $u(x,y,z)=-\dfrac{yz}{x}+C$, 则 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x^2}(yz\mathrm{d}x-zx\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z)$.

(2) 记 $u(x,y,z)=\arctan\dfrac{x+z}{y}+C$, 则 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{\left(\frac{x+z}{y}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\dfrac{x+z}{y}\right)=\dfrac{1}{(x+z)^2+y^2}[y\mathrm{d}x-(z+x)\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z]$.

第7题 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值.

(1) $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$;

(2) $\int_{(1,-1,1)}^{(1,1,-1)} y^2z\mathrm{d}x+2xyz\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z$;

解 (1) 记 $u(x,y,z)=xy+yz+zx$, 则 $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z=u(1,2,1)-u(0,0,0)=5$.

(2) 记 $u(x,y,z)=xy^2z$, 则 $\int_{(1,-1,1)}^{(1,1,-1)} y^2z\mathrm{d}x+2xyz\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z=u(1,1,-1)-u(1,-1,1)=-2$.

第8题 求向量场 $\mathbf{A}=\dfrac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}+a\mathbf{k}$ 沿下列曲线的环量 $\Gamma=\oint_{L^+}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

(1) 圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=\epsilon^2,\\ z=0,\end{cases}\quad \epsilon>0$;

(2) 圆周 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=r^2,\\ z=2,\end{cases}\quad r>2$.

解 (1) 做坐标变换 $\begin{cases} x=\epsilon\cos\theta, \\ y=\epsilon\sin\theta, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_{L^+} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\epsilon\sin\theta\cdot(-\epsilon\sin\theta)+\epsilon\cos\theta\cdot\epsilon\cos\theta}{\epsilon^2}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

(2) $X=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. 设 (1) 中环路为 L_1, 本题环路为 L_2, L_1 与 L_2 构成的区域为 D. 由于 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$, 故由 Stokes 定理,

$$\oint_{L_1^-} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}+\oint_{L_2^+} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

故 $\oint_{L_2^+} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=-\oint_{L_1^-} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\oint_{L_1^+} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=2\pi$.

第12题 若向量场的积分与路径无关, 就称向量场为保守场, 考察下列向量场是否为保守场, 如果是, 求出相应的势函数, 并计算积分 $\int_{(4,0,1)}^{(2,1,-1)} \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$:

(1) $\mathbf{V}=y\cos(xy)\mathbf{i}+x\cos(xy)\mathbf{j}+\sin z\mathbf{k}$;

(3) $\mathbf{V}=(6xy+z^2)\mathbf{i}+(3x^2-z)\mathbf{j}+(3xz^2-y)\mathbf{k}$;

解 (1) $X=y\cos(xy), Y=x\cos(xy), Z=\sin z$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(X,Y,Z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

因此该向量场是保守场, 且 $u(x,y,z)=\sin(xy)-\cos z$. 故

$$\begin{aligned}\int_{(4,0,1)}^{(2,1,-1)} \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= u(2,1,-1)-u(4,0,1) \\ &= \sin 2\end{aligned}$$

(3) $X=6xy+z^2, Y=3x^2-z, Z=3xz^2-y$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(X,Y,Z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \\ &= (2z-3z^2)\mathbf{j} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

因此该向量场不是保守场.

4.8 第4章总复习题解答

第1题 证明: $\left|\int_L \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\right| \leq \int_L \|\mathbf{V}\|\mathrm{d}l$.

证明 设 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{V}$ 的单位法向量, $\mathbf{t}$ 为 $\mathbf{r}$ 的切向量. 由于 $\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \|\mathbf{V}\|\mathrm{d}l\cdot\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{t}\rangle \leq \|\mathbf{V}\|\mathrm{d}l$, 故 $\left|\int_L \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\right| \leq \int_L \|\mathbf{V}\|\mathrm{d}l$.

第2题 设曲面 $S: z=f(x,y), (x,y)\in D$, S^+ 的法方向向上, $F\in C(\mathbb{R}^3)$, 求证:

(1) $\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D} F(x,y,f(x,y))\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = -\iint\limits_{D} F(x,y,f(x,y))\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明 (1) $\mathbf{n}=(-f_x,-f_y,1)$ 为 S^+ 的法向量.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &= \iint\limits_{D}(F,0,0)\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\mathrm{d}S \\ &= \iint\limits_{D} F\cdot\frac{-f_x}{|\mathbf{n}|}\cdot|\mathbf{n}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint\limits_{D} F(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的对称性知命题得证.

第3题 设闭曲线 $L: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$, L^+ 的方向为 t 增大的方向, 证明: 由 L 围成区域的面积可以表示成 $S=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t$.

证明 由于

$$
\begin{aligned}
S &= \oint_{L^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

故命题得证.

第4题 设 $L \subset \mathbb{R}^2$ 为光滑闭曲线, 逆时针为正向, $\mathbf{n}$ 为 L 的外法线单位向量, $\mathbf{a}$ 为一固定向量, 求证: $\oint_L \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{a}\rangle \,\mathrm{d}l = 0$.

证明 不妨设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ 为单位向量. 设 L 围成的区域为 D. $\mathbf{n} = \left(-\frac{\mathrm{d}y}{|\mathrm{d}l|}, \frac{Dx}{|\mathrm{d}l|}\right)$. 由 Green 定理

$$
\begin{aligned}
\oint_L \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{a}\rangle \,\mathrm{d}l &= \oint_L a_y\mathrm{d}x - a_x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}
$$

第5题 设 S 为闭曲面, $\mathbf{a}$ 为常向量, $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 S 的单位法向量, 证明: $\oint_S \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{a}\rangle \,\mathrm{d}S = 0$.

证明 不妨设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ 为单位向量. 设 S 为成的区域为 Ω. 由 Gauss 定理

$$
\begin{aligned}
\oint_S \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{a}\rangle \,\mathrm{d}S &= \oint_S (a_x\cos\alpha, a_y\cos\beta, a_z\cos\gamma)\cdot \mathrm{d}S \\
&= \iiint\limits_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}
$$

第8题 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一空间区域, $\partial\Omega$ 为逐段光滑曲线, $\mathbf{n}$ 为 Ω 的单位外法向, $u, v \in C^2(\Omega)$, 证明:

(1) $\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S = \iiint\limits_\Omega \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\oint\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S = \iiint\limits_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(3) $\oint\limits_{\partial\Omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iiint\limits_\Omega \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2},\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

证明 (1) 设 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 由 Gauss 定理,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S&=\oint_{\partial D}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha,\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\cdot\mathrm{d}S\\&=\iiint\limits_D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint\limits_D\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

(2) 由 Gauss 定理,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S&=\oint_{\partial D}(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha,v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,v\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\cdot\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint\limits_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

(3) 由 (2) 知,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}&\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\\u&v\end{vmatrix}\mathrm{d}l&=\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}l-\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}l\\&=\left(\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_D\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)-\left(\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_D\nabla v\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\\&=\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_D\begin{vmatrix}\Delta u&\Delta v\\u&v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

5 常数项级数

5.1 习题5.1解答

第2题 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和序列 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$ 存在, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = L$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n+1} - u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = L$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = L$, 级数收敛.

第3题 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和序列 $S_n = \dfrac{2n}{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, 求:

(1) u_n 的通项公式;

(2) 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性.

解 (1) 当 $n = 1$ 时, $u_1 = S_1 = 1$. 当 $n \geq 2$ 时, $u_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{2n}{n+1} - \dfrac{2(n-1)}{n} = \dfrac{2}{n(n+1)}$. 因此 $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(2) 由题知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$. 该级数收敛.

第4题 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 中 $u_n > 0$, 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff$ 级数 $(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$ 收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\implies$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n+1}$ 收敛.

证明 (1) $\implies$: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则新的级数的部分和数列为 $\{S_{n_k}\}$, $\{S_{n_k}\}$ 为 $\{S_n\}$ 的子列, 有相同的收敛性, 且收敛到同一数.

$\impliedby$: 取 $n_k = k$, 则得证.

(2) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^*$, 有 $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \epsilon$. 对 $n' = 2n + 2 > N, p' = 2p - 1 > 0$, 有 $\left| \sum\limits_{k=2n+3}^{2n+2p+1} u_k \right| < \epsilon$. 因此 $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_{2k+1} \right| < \left| \sum\limits_{k=2n+3}^{2n+2p+1} u_k \right| < \epsilon$. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n+1}$ 收敛.

第5题 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = 0$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)(u_{n+1} - u_n)$ 收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$, 故 $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall \epsilon > 0, \forall n \geq N$, 有 $|nu_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$. $\forall p > 0$, 显然 $n+p \geq N$, 因此也有 $|(n+p+1)u_{n+p+1}| < \dfrac{\epsilon}{3}$. 对上述 $\epsilon > 0$, 考虑 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(k+1)(u_{k+1}-u_k)\right| = \left|(n+p+1)u_{n+p+1}-(n+1)u_{n+1}-\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|$.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛, 则 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(k+1)(u_{k+1}-u_k)\right| = \left|(n+p+1)u_{n+p+1}-(n+1)u_{n+1}-\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right| < \epsilon$, 则 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right| < 3\epsilon$. 这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

反之, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(k+1)(u_{k+1}-u_k)\right| = \left|(n+p+1)u_{n+p+1}-(n+1)u_{n+1}-\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right| < 3\epsilon$, 这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛.

命题得证.

第6题 利用定义判断下列级数的敛散性, 对收敛的级数求和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}100\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{2n^3+n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

解 (1) 由于 $S_n = 100\times 1\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{400}{3}(1-4^{-n})$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}100\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = \dfrac{400}{3}$.

(3) 由于 $S_n = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+3}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = \dfrac{1}{3}$.

(5) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在, 所以该级数发散.

(7) 由于 $\arctan\dfrac{1}{2n^2} = \arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}$, 所以 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\arctan\dfrac{1}{2k-1}-\arctan\dfrac{1}{2k+1}\right) = \arctan 1-\arctan\dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = \dfrac{\pi}{4}$.

(9) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 且后者发散, 故级数发散.

第7题 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+m)}(m>0, m\in\mathbb{Z})$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}&=\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

5.2 习题5.2解答

第1题 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$;

解 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n-1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}<1$, 故由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\ln n\geq n-1$, 因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

(5) 由于 $\frac{1+n^2}{1+n^3}\leq\frac{1}{n-1},\forall n\geq 2$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2\geq 1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$. 显然 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛. 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ 收敛.

(7) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=2$, 故由推论 5.2.1 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ 收敛.

第2题 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{n^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\frac{\pi}{3^n}$;

解 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2n+1}=0<1$, 故由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)!}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\dfrac{3}{n}\sqrt[n]{n}=0<1$, 故由根值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n}{n^n}$ 收敛.

(5) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\dfrac{\pi}{3^n}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi n^3}{3^n}$, 且显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi n^3}{3^n}$ 收敛, 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 收敛.

第3题 判断下列级数的敛散性.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n!}{n!}$;

解 (2) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{3}\right)^n$ 且显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{3}\right)^n$ 收敛, 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛.

(4) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{4}{3}}\cdot u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n}{n+1}}\cdot n\ln\dfrac{n+2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n}{n+1}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\dfrac{n+2}{n}=2$. 故由推论 5.2.1 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{n}$ 收敛.

(6) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n!}{n!}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!}<2+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$, 且显然 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$ 收敛, 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n!}{n!}$ 收敛.

第4题 设 $u_n,v_n>0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证明 由于 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, 故将左式从 $n=1$ 连续乘到 $n=k$ 得到 $\dfrac{u_{k+1}}{u_1}\leq\dfrac{v_{k+1}}{v_1}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_1}{v_1}v_n$ 收敛. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_1}{v_1}v_n$. 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

第5题 设 $u_n>0$, 数列 $\{nu_n\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 收敛.

证明 设 $nu_n\leq M,\forall n\in\mathbb{N}^*$, 因此 $u_n\leq\dfrac{M}{n}$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 收敛.

第6题 设 $u_n,v_n>0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 均发散, 考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{v_n,u_n\}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{v_n,u_n\}$ 的敛散性.

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{v_n,u_n\}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{v_n,u_n\}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{v_n,u_n\}$ 发散.

取 $u_n=v_n=n$, 则此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{v_n,u_n\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散. 取 $u_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{n^2}, & n=2k\end{cases}$, $v_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & n=2k-1,\\ n, & n=2k\end{cases}$ $k\in\mathbb{N}^*$, 则此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{v_n,u_n\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{v_n,u_n\}$ 既可能发散, 也可能收敛.

第7题 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$ 正确吗? 请举例说明.

解 不正确. 考虑 $u_n=\dfrac{1}{n^2}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1$, 不小于 1. 矛盾.

第8题 利用 Raabe 判别法, 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$, $p,q>0$.

解 (1) $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\dfrac{1+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$. 取 $\rho=2$, 则当 $n\geq 100$ 时有 $\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\geq\rho=2$. 由 Raabe 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$ 收敛.

(2)

$$
\begin{aligned}
n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)&=n\left(\frac{q+n+1}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-p}-1\right)\\
&=n\left(\frac{q+n+1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{p}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)-1\right)\\
&=\frac{n(p+q)}{n+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

因此, 由 Raabe 判别法知, 当 $p+q>1$ 时该级数收敛, 当 $p+q\leq 1$ 时该级数发散.

第10题 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{u_n+1}$ 的敛散性相同.

证明 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{u_n}{u_n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+1)=1$, 由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{u_n+1}$ 收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{u_n+1}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_n+1}=0$, 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{u_n}{u_n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+1)=1$, 由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

5.3 习题5.3解答

第1题 举出相应的例子.

(1) $u_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散;

(2) $u_n>0$, $\{u_n\}$ 单调递减, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散.

解 (1) 构造 $u_n=\begin{cases}\dfrac{2}{k}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{k}, & n=2k,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 发散.

(2) 构造 $u_n=1+\dfrac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. 由于前者发散, 后者收敛, 故两者之和发散.

第3题 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$, 能否断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛?

解 不可以. 构造 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$, 则满足

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}\\&=1\end{aligned}$$

但显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 不收敛.

第4题 判断下列级数绝对收敛、条件收敛还是发散.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{n^2}}{n!}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$;

(13) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$;

(14) $1-\ln 2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}+\cdots$.

解 (1) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 为 Leibniz 级数, 故该级数收敛. 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

发散. 故原级数条件收敛.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$, 且前者发散, 后者收敛, 故原级数发散.

(5) 由于 $\left|\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right|\leq\dfrac{1}{2^n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

(7) 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2^{(2k-1)^2}}{(2k-1)!}+\frac{2^{(2k)^2}}{(2k)!}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{(2k-1)^2}}{(2k)!}\cdot(2^{4k-1}-2k)\end{aligned}$$

显然 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^{(2k-1)^2}}{(2k)!}\cdot(2^{4k-1}-2k)\neq 0$. 故该级数发散.

(9) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 为 Leibniz 级数, 故该级数收敛. 而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right|&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

故该级数的通项加上绝对值后发散. 综上所述, 该级数条件收敛.

(11) 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2k+(-1)^{2k}}}+\frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt{2k+1+(-1)^{2k+1}}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

为 Leibniz 级数, 因此该级数收敛. 而

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

故该级数的通项加上绝对值后发散. 综上所述, 该级数条件收敛.

(13)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots \\
=&\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) \\
=&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n-1} \\
\geq&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}
\end{aligned}$$

故原级数发散.

(14)

$$\begin{aligned}
&1-\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}+\cdots \\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right) \\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right) \\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\ln n+\gamma+\epsilon_n-\ln(n+1)\right) \\
=&\gamma
\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0, \gamma=0.577216\cdots$. 故原级数绝对收敛.

第6题 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

证明 由于 $(a_n+b_n)^2\leq 2(a_n^2+b_n^2)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(a_n^2+b_n^2)$ 收敛, 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛.

不妨设 $a_n>0$. 由于 $\frac{a_n}{n}\leq a_n^2+\frac{1}{4n^2}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{4n^2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$ 收敛, 故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

第7题 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 且 $a_n \le c_n \le b_n$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

证明 由于 $0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛, 故由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

第9题 设正项数列 $\{u_n\}$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.

证明 由于正项数列 $\{u_n\}$ 单调减少, 故 $\lim_{n\to\infty} u_n \ge 0$. 假设 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛, 矛盾. 故 $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$, 不妨设为 c. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{1+c} < 1$$

由根值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.

5.4 习题5.4解答

5.5 第5章总复习题解答

6 函数项级数

6.1 习题6.1解答

第2题 求下列函数项级数的收敛域, 并指出使级数绝对收敛、条件收敛的 x 的范围.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\ln x}{3}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{x}\right)^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin\dfrac{x}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$;

解 (1) 该级数每一项都为正数, 故绝对收敛域等于收敛域. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{ne^{-nx}} = e^{-x}$, 故当 $x<0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 当 $x>0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 又因为当 $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散, 故该级数的绝对收敛域为 $(0,+\infty)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ln x}{3}\right)^n = \dfrac{\ln x}{3-\ln x}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(\dfrac{\ln x}{3}\right)^n\right)$. 因此当 $\left|\dfrac{\ln x}{3}\right|<1$, 即 $x\in(e^{-3},e^3)$ 时级数收敛. 当 $x=e^{-3}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散. 当 $x=e^3$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ 发散. 故该级数的收敛域为 (e^{-3},e^3).

再考虑绝对收敛域. 由于当 $\left|\dfrac{\ln x}{3}\right|<1$, 即 $x\in(e^{-3},e^3)$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\ln x}{3}\right|^n = 0$, 故该级数的绝对收敛域也为 (e^{-3},e^3).

(3) 由于对任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{x}$ 不存在, 因此收敛域为 $\varnothing$.

(4) 该级数每一项都为正数, 故绝对收敛域等于收敛域. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}{x^n\sin\frac{x}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{2\cos\frac{x}{2^{n+1}}} = \dfrac{x}{2}$, 因此当 $x\in(-2,2)$ 时该级数收敛. 当 $x=\pm2$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} x^n\cdot\dfrac{x}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\pm2)^{n+1}}{2^n} \neq 0$, 此时该级数发散. 故该级数的绝对收敛域为 $(-2,2)$.

(5) 当 $x\in(-1,1)$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n} = 1\neq 0$, 故此时该级数发散. 当 $x=-1$ 时该级数不存在. 当 $x=1$ 时, 该级数等于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$ 发散.

考虑 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1+x^n}{1+x^{n+1}}$. 当 $|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{1}{x^n}+x}\right| = \dfrac{1}{|x|} < 1$, 该级数绝对收敛. 综上所述, 该级数在 $\{x\,|\,|x|>1\}$ 上收敛, 且绝对收敛.

第3题 下列函数项级数在收敛域上是否一致收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos nx}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx + \sin n^x}{n^{1.001}}$;

解 (1) 由于 $\left|\dfrac{1-\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{2}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ 收敛, 因此由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos nx}{n^2}$ 在收敛域上一致收敛.

(3) 由于 $e^{nx^2} \ge 1 + (nx^2) + \dfrac{1}{2}(nx^2)^2$, 故

$$\left|\frac{x^3}{e^{nx^2}}\right| \le \frac{|x^3|}{1+(nx^2)+\frac{1}{2}(nx^2)^2} \le \frac{|x^3|}{(nx^2)+\frac{1}{2}(nx^2)^2} \le \frac{|x^3|}{2\sqrt{(nx^2)\cdot\frac{1}{2}(nx^2)^2}} = \frac{|x^3|}{\sqrt{2n^3}\,|x^3|} = \frac{1}{\sqrt{2n^3}}.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n^3}}$ 收敛, 因此由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$ 在收敛域上一致收敛.

(5) 由于 $\left|\dfrac{\cos nx + \sin n^x}{n^{1.001}}\right| \le \dfrac{2}{n^{1.001}}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^{1.001}}$ 收敛, 因此由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx + \sin n^x}{n^{1.001}}$ 在收敛域上一致收敛.

第4题 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否一致收敛?

解 一致收敛. 记 $u_n(x) = (-1)^n$. 由于 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \le 1$ 部分和有界, 且 $v_n(x) = \dfrac{1}{x+2^n}$ 对于任意的 $x \in [0,+\infty)$ 都单调且一致趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

第5题 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ 在 $x \in (-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 但不绝对收敛.

证明 记 $u_n(x) = (-1)^n$. 由于 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \le 1$ 部分和有界, 且 $v_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$ 对于任意的 $x \in (-\infty,+\infty)$ 都单调且一致趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

当 $x=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+n}$ 发散, 因此该级数不绝对收敛.

6.2 习题6.2解答

第2题 设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{x}{2^n}$, 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(x)\mathrm{d}x$.

解 记 $u_n(x)=\dfrac{1}{2^n}, v_n(x)=\tan\dfrac{x}{2^n}, I=\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$. 由于 $v_n(x)$ 对任意固定的 $x\in I$ 均单调递减, 且 $|v_n(x)|\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 在 I 上一致有界, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 与 x 无关, 在 I 上一致收敛, 故由 Abel 判别法知 $S(x)$ 在 I 上一致收敛. 故可以将积分与求和符号交换次序:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(x)\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{x}{2^n}\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=\frac{\pi}{3}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{6}}\\&=\ln2-\frac{\ln3}{2}\end{aligned}$$

第3题 证明:

$$\int_0^1x^x\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\cdots.$$

证明 由于 $x^x=e^{x\ln x}=1+(x\ln x)+\dfrac{1}{2}(x\ln x)^2+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln x)^n}{n!}$, 且 $|x\ln x|\in(0,1),\forall x\in(0,1)$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln x)^n}{n!}<\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$. 而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln x)^n}{n!}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛. 因此可以交换积分与求和的次序:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^x \mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 (x\ln x)^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{\ln^n x}{n+1}\mathrm{d}(x^{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}\ln^n x}{n+1}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{nx^n \ln^{n-1} x}{n+1}\mathrm{d}x \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{nx^n \ln^{n-1} x}{n+1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{n(n-1)x^n \ln^{n-2} x}{(n+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{n!x^n}{(n+1)^n}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \cdots
\end{aligned}
$$

命题得证.

第4题 证明: 函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$ 是 $(1,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 要证明函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$ 是 $(1,+\infty)$ 上的连续函数, 只需证 $f(x)$ 在任意 $x = x_0 > 1$ 处连续即可. $\forall x_0 > 1$, 取 $r \in (1, r_0)$, 则 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{r^n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{r^n}$ 收敛. 故由 Weierstrass 判别法知级数在 $[r,+\infty)$ 上一致收敛. 因此 $f(x)$ 在任意 $x = x_0 > 1$ 处连续. 命题得证.

第5题 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 对任意的 x 绝对收敛, 但在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ 绝对收敛, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 对任意的 x 绝对收敛. 接下来考虑 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \\
&= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^p}{1-\frac{1}{1+x^2}} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^p}{(1+x^2)^n}
\end{aligned}
$$

取 $n = p = N+1, x = \sqrt{\sqrt[N+1]{2}-1}, \epsilon = \dfrac{1}{4}$, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) &= \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^p}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{1+\sqrt[N+1]{2}-1}\right)^{N+1}}{(1+\sqrt[N+1]{2}-1)^{N+1}} \\
&= \frac{1-\frac{1}{2}}{2} \\
&= \frac{1}{4} = \epsilon
\end{aligned}
$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛.

第6题 证明: 函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 进一步证明在 $(0, +\infty)$ 上可微.

证明 首先, $u_n(x) = ne^{-nx}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上连续可导, $u_n'(x) = -n^2 e^{-nx}$. 其次, $\forall \delta > 0$, $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n\delta}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n\delta}$ 收敛. 所以由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $(\delta, +\infty)$ 上一致收敛. 由于 δ 可以任意小, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上一致收敛. 最后, $\exists x = x_0 = 1$ 时 $f(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{e^n}$ 收敛. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微.

6.3 习题6.3解答

第1题 求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{(2n-1)2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n} x^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}(x-1)^n (p>0)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (x+a)^{2n}$;

解 (1) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, 故 $R = \dfrac{1}{q} = +\infty$. 收敛域为 $\mathbb{R}$.

(3) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^3(2n-1)}{2(2n+1)} = \dfrac{x^3}{2}$, 当 $x \in (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ 时级数收敛. 故 $R = \sqrt[3]{2}$. 当 $x = -\sqrt[3]{2}$ 时为 Leibniz 级数, 收敛; 当 $x = \sqrt[3]{2}$ 时可化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2n-1}$, 发散. 故收敛域为 $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

(5) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n} = 1$, 故 $R = \dfrac{1}{q} = 1$. 当 $x = -1$ 时为 Leibniz 级数, 收敛; 当 $x = 1$ 时可化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n} \geq -1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, 发散. 故收敛域为 $[-1, 1)$.

(7) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^p}} = 1$, 故 $R = \dfrac{1}{q} = 1$. 当 $x = 0$ 时为该级数为 Leibniz 级数, 收敛. 当 $x = 2$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}(x-1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. 若 $p > 1$, 则级数收敛; 若 $0 < p \leq 1$, 则级数发散.

综上所述, 当 $p > 1$ 时, 收敛域为 $[0, 2]$; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 收敛域为 $[0, 2)$.

(9) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2(x+a)^2 = 2(x+a)^2$, 当 $x \in \left(-a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时级数收敛. 故 $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $x = -a \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时级数均发散. 故收敛域为 $\left(-a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

第2题 求下列幂级数的收敛域与和函数.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) x^{2n+1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$;

解 (1) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n(n-1)}} = 1$, 故 $R = \dfrac{1}{q} = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时级数均收敛, 故收敛域为 $[-1, 1]$. 设和函数为 $S(x)$, 则当 $x \neq 1$ 时 $S''(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. 积分可得 $S(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$. 当 $x = 1$ 时 $S(x) = 1$. 因此

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ x + (1-x)\ln(1-x), & x \in [-1, 1). \end{cases}$$

(3) 由于 $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$, 故 $R = \dfrac{1}{q} = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时级数均发散, 故收敛域为 $(-1, 1)$. 设和函数为 $S(x)$. 因此

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+2}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^4}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^2} \\
&= \frac{4x^3-2x^5}{(1-x^2)^2} - \frac{x^3}{1-x^2} \\
&= \frac{3x^3-x^5}{(1-x^2)^2} \quad x \in (-1,1)
\end{aligned}
$$

(5) 由于 $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n(n+1)}{2}} = 1$, 故 $R = \dfrac{1}{q} = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时级数均发散, 故收敛域为 $(-1,1)$. 设和函数为 $S(x)$. 因此

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \in (-1,1)
\end{aligned}
$$

第3题 将下列函数在 x_0 点展成幂级数, 并求收敛域.

(1) $\cos x, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

(3) $\ln(1+x), x_0 = 2$;

(5) $\sin x^2, x_0 = 0$;

(7) $\dfrac{1}{x-1}, x_0 = -1$;

(9) $\dfrac{x}{(x-1)(x+3)}, x_0 = 0$;

(11) $\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x_0 = 0$;

解 (1) $f(x) = \cos x, f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$. 因此

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n
$$

收敛域为 $\mathbb{R}$.

(3) $f(x) = \ln(1+x), f^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & n = 0, \\ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, & n \geq 1. \end{cases}$ 因此

$$
f(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}(x-2)^n
$$

由 $|x-2|<3$ 解得 $x\in(-1,5)$. 因为当 $x=-1$ 时级数发散, 当 $x=5$ 时级数收敛, 故收敛域为 $(-1,5]$.

(5) $f(x)=\sin x^2$. 由于 $\sin x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, 因此

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

收敛域为 $\mathbb{R}$.

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$. 因此

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n$$

由 $|x+1|<2$ 解得 $x\in(-3,1)$. 因为当 $x=-3$ 时级数收敛, 当 $x=1$ 时级数发散, 故收敛域为 $[-3,1)$.

(9) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{3}{2(x-3)}+\dfrac{1}{2(x-1)}, f^{(n)}(x)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$. 因此

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\right)x^n$$

由 $|x|<1$ 解得 $x\in(-1,1)$. 因为当 $x=\pm1$ 时级数均发散, 故收敛域为 $(-1,1)$.

(11) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. 由于

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad x\in[-1,1]$$

因此

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{x^2+1})&=\int_0^x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\quad x\in[-1,1]\end{aligned}$$

收敛域为 $[-1,1]$.

第4题 将下列函数在 $x_0=0$ 点展到指定的项.

(1) $e^{\sin x}$, 展到 x^3 项;

(3) $\cos^3 x$, 展到 x^4 项;

解 (1) 由 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 以及 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 得

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x) \\
&= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

(3) 由 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 得

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^3 \\
&= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

第7题 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 3$ 处条件收敛, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间.

解 由题知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R_1 = 3$. 因此 $q_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R} = \frac{1}{3}$. 所以 $q_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n a_n} = \frac{1}{3}$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛半径 $R_2 = \frac{1}{q_2} = 3$, 即收敛区间为 $(-2, 4)$.

第9题 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2, 证明:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径 $R \geq R_1 R_2$.

证明 (1) 由题知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $|x| \leq \min\{R_1, R_2\}$ 时同时收敛. 因此, 当 $|x| \leq \min\{R_1, R_2\}$ 时一定有 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 收敛. 故其收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

(2) 由题知 $q_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, q_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}, q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n b_n|}$. 而 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}$. 故 $q \leq q_1 q_2$. 由于 $q_1 = \frac{1}{R_1}, q_2 = \frac{1}{R_2}, q = \frac{1}{R}$, 所以 $R \geq R_1 R_2$.

6.4 第6章总复习题解答

第4题 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a), \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 有一个发散, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上非一致收敛.

证明 使用反证法. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛. 不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 发散. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 则

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0, \text{s.t.}\ \forall n > N, p \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon, \forall x \in (a,b).$$

由于 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 故不等式两端同时取极限 $x \to a$, 得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(a) \right| \le \epsilon$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 收敛, 与题目矛盾, 因此假设不成立. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上非一致收敛.

第8题 考查下列函数项级数在指定区间的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right), x \in (0, +\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right), x \in (-1, 1)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \dfrac{1}{3} \le |x| \le 3$;

解 (1) 假设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 则其一般项一致趋于 0. 但取 $\epsilon = \ln 2$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, 取 $n = N+1, x = (N+1)\ln^2(N+1)$, 则

$$\left| \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right) \right| = \ln(1+1) = \ln 2 = \epsilon.$$

这说明其一般项并非一致趋于 0., 矛盾. 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(2) 由于 $\left| \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right) \right| \le \left| \dfrac{x}{n \ln^2 n} \right| \le \dfrac{1}{n \ln^2 n} \quad (-1 < x < 1)$, 且 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛, 故由 Weierstrass 定理知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 在 $(-1,1)$ 上一致收敛.

(3) 只需说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{\sqrt{n!}}$ 在 $[1,3]$ 上一致收敛即可. 由于 $\left| \dfrac{n^2 x^n}{\sqrt{n!}} \right| \le \dfrac{n^2 3^n}{\sqrt{n!}}$, 因此只需要说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 3^n}{\sqrt{n!}}$ 收敛, 即可使用 Weierstrass 判别法证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{\sqrt{n!}}$ 在 $[1,3]$ 上一致收敛. 下证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 3^n}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 设 $u_n = \dfrac{n^2 3^n}{\sqrt{n!}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2 3^n}{\sqrt{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[2n]{n!}}=0<1$$

故由根值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2 3^n}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 当 $\dfrac{1}{3}\le|x|\le 3$ 时一致收敛.

7 Fourier 级数

7.1 习题7.1解答

7.2 习题7.2解答

7.3 第7章总复习题解答