Nombre: César Antonio Hoyos Paláez.

C.C : 1007328843.

Problema

Considerar un sistema de una partícula de masa m con energía cinética E_k (eV) que se dirige a un campo magnético uniforme B en dirección z, el vector velocidad de la partícula forma un ángulo de θ grados con B.

Parámetros computacionales

$E_k = 18.6$ eV

$\theta = 30°$

$m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg

$B = 600$ μT

Para generar la gráfica puede realizar 1000 iteraciones con pasos de 0.01.

Supongamos que la posición inicial de la partícula viene dada por $\vec{r}(0) = 0$ y su velocidad como $\vec{V}(0) = \vec{V_0} = (v_{0,x}, 0, v_{0,z})$.
Además, el campo magnético está en la dirección z, por tanto $\vec{B} = (0, 0, B)$

La ley que describe el mov. de una partícula en un campo electro-magnético es la fuerza de Lorentz. Así:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

Dado que no hay presencia de campo eléctrico, entonces $\vec{E} = 0$.
Por tanto:

2da Ley de Newton

$$m\vec{a} = q\vec{V} \times \vec{B}$$

La expresión anterior, en términos de velocidades se puede escribir como:

$$m\dot{\vec{V}} = q\vec{V}\times\vec{B} \qquad \text{donde} \qquad \dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Desarrollemos la ec. anterior de forma matricial con el fin de encontrar cada una de las componentes de la velocidad:

$$m\dot{\vec{V}} = q \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

Desde el problema original se tiene $B_x = B_y = 0$. Por tanto:

$$m(\dot{V}_x \hat{\imath} + \dot{V}_x \hat{\jmath} + \dot{V}_z \hat{k}) = q \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & B_z \end{pmatrix}$$

$$m(\dot{V}_x \hat{\imath} + \dot{V}_x \hat{\jmath} + \dot{V}_z \hat{k}) = q\hat{\imath}(V_y B_z) - q\hat{\jmath}(V_x B_z) + q\hat{k}(0)$$

Así, comparando los términos se tiene que

$$\begin{cases} m\dot{V}_x = qV_y B \\ m\dot{V}_y = -qV_x B \\ m\dot{V}_z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{V}_x = V_y (qB/m) \\ \dot{V}_y = -V_x (qB/m) \\ \dot{V}_z = 0 \end{cases}$$

Dado que hay un factor común desde la física se define la frecuencia ciclotrónica como:

$$\omega_c = qB/m$$

Por tanto, las ec's resultantes son:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \omega_c V_y & (1) \\ \dot{V}_y = -\omega_c V_x & (2) \\ \dot{V}_z = 0 \end{cases}$$

Ref: E. Reyes. Electrodinámica I.

$\longrightarrow$ El movimiento de la partícula en la dirección del campo no es afectado por la presencia del campo

Derivando la ec. (1) con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\dot{V}_x = \omega_c \frac{d}{dt} V_y \longrightarrow \ddot{V}_x = \omega_c \dot{V}_y$$

De (2)

$$\ddot{V}_x = \omega_c(-\omega_c V_x) \longrightarrow \boxed{\ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x = 0} \quad (3)$$

Por otro lado, derivando la ec. (2) con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{d}{dt}\dot{V}_y = -\omega_c \frac{d}{dt} V_x \longrightarrow \ddot{V}_y = -\omega_c(\omega_c V_y)$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{V}_y + \omega_c^2 V_y = 0} \quad (4)$$

Las ec's (3) y (4) son ec's diferenciales de segundo orden que tienen soluciones armónicas, por tanto:

$$\ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x = 0 \longrightarrow V_x = A\sin(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t) \quad (5)$$

$$\ddot{V}_y + \omega_c^2 V_x = 0 \longrightarrow V_y = C\sin(\omega_c t) + D\cos(\omega_c t). \quad (6)$$

• CI para (5)

Cuando $t=0$ $\quad V_x(0) = v_{0,x}$

$$v_{0,x} = B\cos(\omega_c \cdot 0) \longrightarrow v_{0,x} = B$$

• CI para (6)

Cuando to $\quad V_y(0)=0 \rightarrow D=0$

Así:

$$V_x = A\sin(\omega_c t) + v_{o,x}\cos(\omega_c t) \qquad (7)$$

$$V_y = C\sin(\omega_c t) \qquad (8)$$

Derivando (8) con respecto a t.

$$\dot{V}_y = C\omega_c \cos \omega_c t$$

De (2)

$$C\omega_c \cos \omega_c t = -\omega_c A\sin(\omega_c t) - \omega_c v_{o,x} \cos \omega_c t$$

Comparando componente a componente de la expresión anterior es fácil ver que

$$\boxed{A=0} \quad y \quad \boxed{C=-v_{o,x}}$$

Por tanto las ec's para V_x y V_y son:

$$\begin{cases} V_x = v_{o,x}\cos(\omega_c t) \\ V_y = -v_{o,x}\sin(\omega_c t) \end{cases}$$

Ahora para V_z se tenía:

$$\dot{V}_z = 0 \longrightarrow V_z = Et + F \qquad \text{con } E, F \text{ cte's}$$

Por un lado $\quad V_z(0) = v_{o,z} \rightarrow F = v_{o,z}$, Así:

$$V_z = Et + v_{o,z}$$

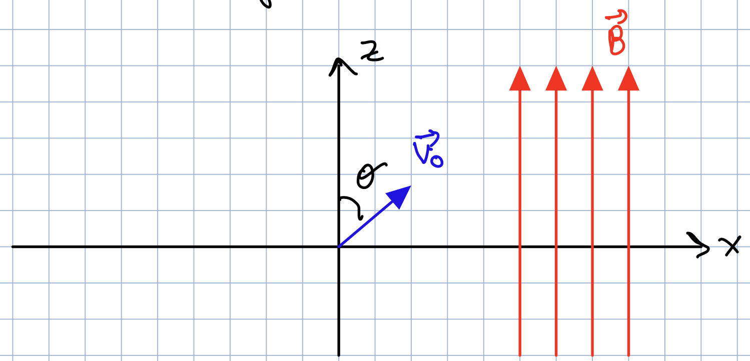
Derivando con respecto a t se tiene:

$$\dot{V}_z = E + 0 \longrightarrow \dot{V}_z = 0 \longrightarrow E = 0$$

Finall las ec's de la velocidad en función del tiempo son:

$$\begin{cases} V_x(t) = v_{0x}\cos(w_c t) \\ V_y(t) = -v_{0x}\sin(w_c t) \\ V_z(t) = v_{0z} \end{cases} \qquad (9)$$

Un diagrama del dibujo es.



$$\vec{V}_0 = v_{0,x}\,\hat{\imath} + v_{0,z}\,\hat{u}$$

$$v_{0,x} = V_0 \cos\theta$$

$$v_{0,z} = v_0 \sin\theta$$

Por tanto las ec's de la velocidad en función del tiempo son:

$$\boxed{\begin{aligned} V_x(t) &= V_0 \sin\theta \,\cos(w_c t) \\ V_y(t) &= -V_0 \sin\theta \,\sin(w_c t) \\ V_z(t) &= V_0 \cos\theta \end{aligned}} \qquad (10)$$

Para encontrar la posición de la partícula en función del tiempo es un proceso de integración de las ec's (9)

$$x(t) = v_{0x}\int_0^t \cos w_c t \, dt$$

$$= v_{0x}\,\frac{\sin w_c t}{w_c}\Big|_0^t = \frac{v_{0x}}{w_c}\sin w_c t$$

$$y(t) = -v_{ox}\int_0^t \sin(w_c t)\,dt = \frac{v_{ox}}{w_c}\cos(w_c t)\Big|_0^t$$

$$= \frac{v_{ox}}{w_c}\left[\cos w_c t - 1\right]$$

$$z(t) = v_{oz}\, t$$

Así:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_{ox}}{w_c}\sin(w_c t) \\ y(t) = \dfrac{v_{ox}}{w_c}\left[\cos(w_c t) - 1\right] \\ z(t) = v_{oz}\, t \end{cases} \qquad (11)$$

Reemplazando v_{ox} y v_{oz} se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_o \sin\theta}{w_c}\sin(w_c t) \\ y(t) &= \frac{v_o \sin\theta}{w_c}\left[\cos(w_c t) - 1\right] \\ z(t) &= v_o \cos\theta\, t \end{aligned}} \qquad (12)$$

A partir de las ec's (9) se puede encontrar la trayectoria de la partícula en el espacio de velocidades

$$\begin{cases} V_x(t) = v_{ox}\cos(w_c t) & (13) \\ V_y(t) = -v_{ox}\sin(w_c t) & (14) \\ V_z(t) = v_{oz} & (15) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado (13) y (14) a ambos lados, y sumando estas mismas expresiones, se tiene que:

$$\boxed{\begin{cases} V_x^2 + V_y^2 = v_{0x}^2 \\ V_z = v_{0z} \end{cases}}$$

$\rightarrow$ Esto muestra que en el plano xy se forma un círculo de radio v_{0x} y su centro sobre el eje V_z a una distancia v_{0z} del origen de V_z.

Por otro lado haciendo uso de las ec's (11) que representan como evoluciona la partícula en cada una de las coord. con respecto a t se puede construir la trayectoria que sigue la partícula en el espacio de las coord.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0x}}{w_c} \sin(w_c t) & (16) \\ y(t) = \frac{v_{0x}}{w_c}\left[\cos(w_c t) - 1\right] \rightarrow y(t) - \frac{v_{0x}}{w_c} = \frac{v_{0x}}{w_c}\cos(w_c t) & (17) \\ z(t) = v_{0z} t & (18) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado cada una de las ec's anteriores:

$$\begin{cases} x^2(t) = \frac{v_{0x}^2}{w_c^2}\sin^2(w_c t) & (19) \\ (y(t) + y_0)^2 = \frac{v_{0x}^2}{w_c^2}\cos^2(w_c t) & (20) \quad \text{donde } y_0 = \frac{v_{0x}}{w_c} \\ z^2(t) = v_{0z}^2 t^2 \end{cases}$$

Sumando (19) y (20)

$$x^2 + (y+y_0)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{w_c}\right)^2$$

$$z = v_{0z}\, t$$

→ Representa una circunferencia de radio v_{0x}/w_c que pasa por el punto $(0, -y_0, 0)$

Si el algoritmo se programa de forma correcta se debería ver una helicoide.