

Simulación de la propagación de a luz

Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
10 de abril de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

- Introducción
- Propagador de Fresnel: función de transferencia
- Propagador de Fresnel: respuesta al impulso
- Discretización del propagador de Fresnel
- Implementación en python (Sugerida en el libro de Voelz) usando el método de la convolución
- Ejemplo 1: abertura rectangular
- Ejemplo 2: abertura circular
- Propagador de Fraunhofer
- Ejercicios

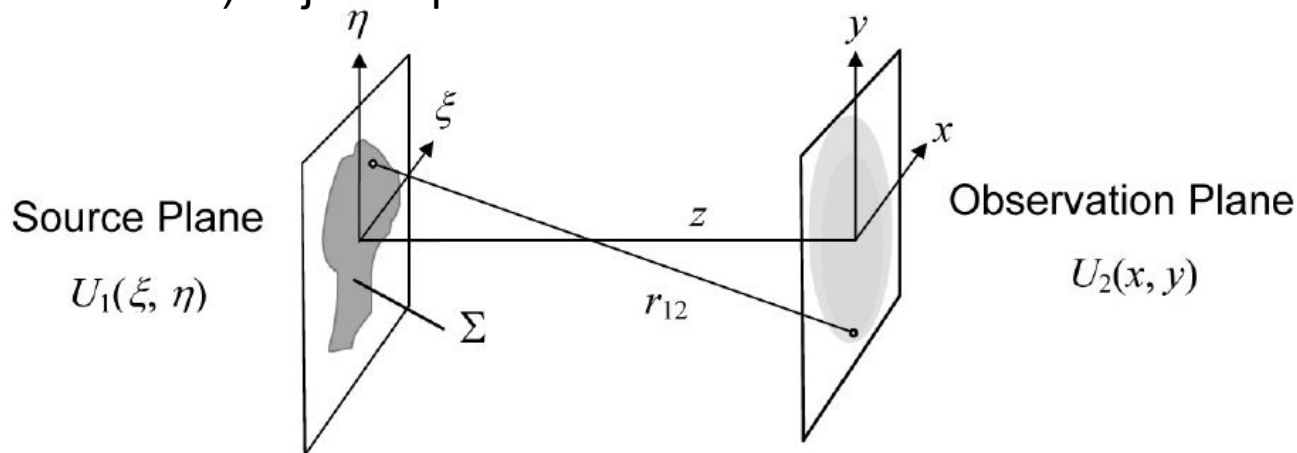
Simulación de la propagación de la luz

El uso de las expresiones de la difracción para los rangos de campo cercano (Fresnel) y campo lejano (Fraunhofer) tienen su potencial cuando se pueden interpretar como transformadas de Fourier, salvo algunas constantes de fase, de distintas funciones de pupila (o pupila generalizada) de las cuales es posible simular el efecto que tienen sobre el campo incidente sobre ellas en un plano de observación posterior al plano de la pupila.

En esta clase veremos cómo se usa la herramienta de la FFT para construir propagadores basados en las expresiones analíticas de la teoría escalar de la difracción, que permitan construir una herramienta de simulación computacional de amplio uso.

Propagador de Fresnel

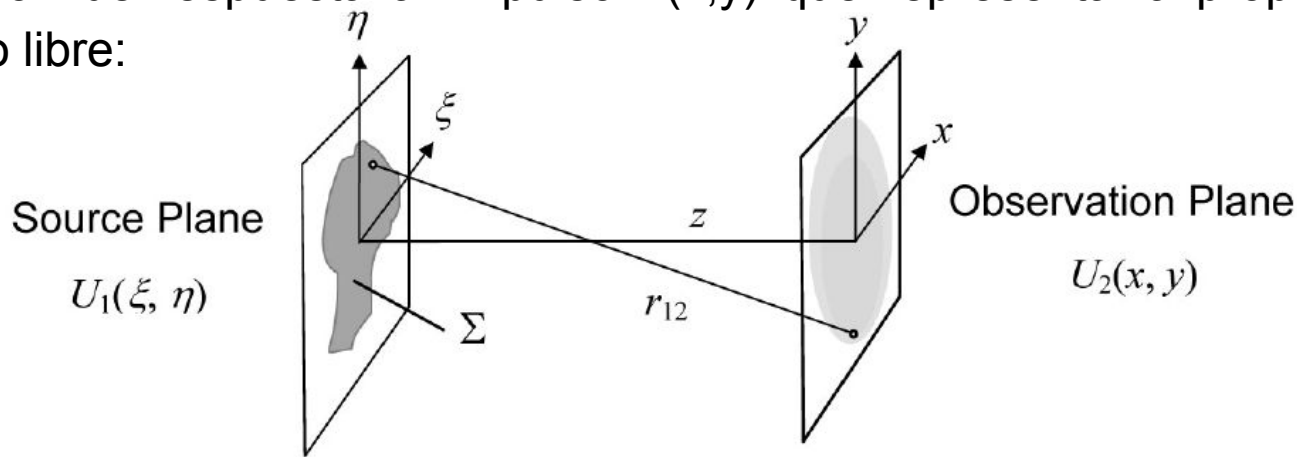
La expresión para el campo en el plano de observación, dado un plano fuente (o plano de abertura) bajo la aproximación de Fresnel es



$$U_2(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\ \times \iint \left\{ U_1(\xi, \eta) \exp\left[j\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \right\} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta.$$

Propagador de Fresnel

Que puede entenderse como una convolución entre el campo en el plano fuente y la función de respuesta al impulso $h(x,y)$ que representa la propagación en el espacio libre:



$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \{ \mathfrak{F} \{ U_1(x, y) \} \mathfrak{F} \{ h(x, y) \} \}$$

$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \{ \mathfrak{F} \{ U_1(x, y) \} H(f_X, f_Y) \}$$

$$\Rightarrow H(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_X\xi + f_Y\eta)] d\xi d\eta$$

Propagador de Fresnel: función de transferencia

Para la aproximación de Fresnel:

$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

$$H(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_X\xi + f_Y\eta)] d\xi d\eta$$

$$H(f_X, f_Y) = e^{jkz} \exp\left[j\pi\lambda z(f_X^2 + f_Y^2)\right]$$

Donde H es conocida como la función de transferencia bajo la aproximación de Fresnel. Así, el propagador de Fresnel se puede ver como la convolución:

$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{U_1(x, y)\}H(f_X, f_Y)\}$$

Propagador de Fresnel: función de respuesta al impulso

Para la aproximación de Fresnel:

$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

Donde $h(x,y)$ es conocida como la función de transferencia bajo la aproximación de Fresnel. Así, el propagador de Fresnel se puede ver como la convolución:

$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{U_1(x, y)\}\mathfrak{F}\{h(x, y)\}\}$$

Discretización del Propagador de Fresnel¹

Partamos de la expresión

$$\begin{aligned}\Gamma(\xi, \eta) = & \frac{i}{\lambda d} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}d\right) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(\xi^2 + \eta^2)\right] \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) h(x, y) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)\right] \\ & \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda d}(x\xi + y\eta)\right] dx dy.\end{aligned}$$

Respecto a nuestra notación:

$$\begin{aligned}U_2(x, y) = & \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\ & \times \iint \left\{ U_1(\xi, \eta) \exp\left[j\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \right\} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta.\end{aligned}$$

¹Seguiremos la notación y el trabajo de Schnars and Jüptner (2002), Meas. Sci. Technol. 13 (2002) R85–R101

Discretización del Propagador de Fresnel¹

- Cambios de variables:

$$v = \frac{\xi}{\lambda d}; \quad \mu = \frac{\eta}{\lambda d}$$

- Expresión obtenida: $\Gamma(v, \mu) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\pi\lambda d(v^2 + \mu^2)]$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) h(x, y) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)\right] \\ \times \exp[i2\pi(xv + y\mu)] dx dy.$$

- Como vimos, salvo el factor de fase esférico, la anterior expresión es una transformada de Fourier:

$$\Gamma(v, \mu) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\pi\lambda d(v^2 + \mu^2)]$$

$$\times \mathfrak{F}^{-1} \left\{ R(x, y) h(x, y) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)\right] \right\}$$

¹Seguiremos la notación y el trabajo de Schnars and Jüptner

Discretización del Propagador de Fresnel¹

- Parámetros de la discretización: región cuadrada (N X N); muestreo uniforme $x=\Delta x * l$ y $y=\Delta y * k$, con $\Delta x, \Delta y$ constantes. Teniendo en cuenta la relación de T.

Fourier:

$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta x}; \quad \Delta \mu = \frac{1}{N \Delta y}$$

- Se obtiene el campo Γ discretizado ($\square = \Delta \square * m$ y $\mu = \Delta \mu * n$)

$$\begin{aligned} \Gamma(m, n) &= \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\pi \lambda d (m^2 \Delta v^2 + n^2 \Delta \mu^2)] & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ & & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ &\times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} R(k, l) h(k, l) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda d} (k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)\right] \\ &\times \exp[i2\pi (k \Delta x m \Delta v + l \Delta y n \Delta \mu)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

¹Seguiremos la notación y el trabajo de Schnars and Jüptner (2002), Meas. Sci. Technol. 13 (2002) R85–R101

Discretización del Propagador de Fresnel¹

- Regresando a las variables originales: $\Delta\xi = \frac{\lambda d}{N \Delta x}$; $\Delta\eta = \frac{\lambda d}{N \Delta y}$
- Se obtiene el campo Γ discretizado:

$$\begin{aligned}\Gamma(m, n) = & \frac{i}{\lambda d} \exp\left[-i\pi\lambda d\left(\frac{m^2}{N^2 \Delta x^2} + \frac{n^2}{N^2 \Delta y^2}\right)\right] \\ & \times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} R(k, l) h(k, l) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)\right] \\ & \times \exp\left[i2\pi\left(\frac{km}{N} + \frac{ln}{N}\right)\right].\end{aligned}\tag{3.1}$$

¹Seguiremos la notación y el trabajo de Schnars and Jüptner (2002), Meas. Sci. Technol. 13 (2002) R85–R101

Discretización del Propagador de Fresnel¹

- La anterior expresión es el propagador (o transformada) de Fresnel discretizado. La matriz se obtiene multiplicando el campo Rh (o U) con la exponencial $\exp[-i\pi/(\lambda d)(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)]$ y aplicando la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\Gamma(m, n) = & \frac{i}{\lambda d} \exp\left[-i\pi\lambda d\left(\frac{m^2}{N^2\Delta x^2} + \frac{n^2}{N^2\Delta y^2}\right)\right] \\ & \times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} R(k, l)h(k, l) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)\right] \\ & \times \exp\left[i2\pi\left(\frac{km}{N} + \frac{ln}{N}\right)\right].\end{aligned}\tag{3.1}$$

¹Seguiremos la notación y el trabajo de Schnars and Jüptner (2002), Meas. Sci. Technol. 13 (2002) R85–R101

Discretización del Propagador de Fresnel¹

- La transformada de Fourier debe hacerse usando el algoritmo de transformada rápida de Fourier FFT. Aún así, la expresión por sí sola es muy ineficiente, y tiene problemas con los intervalos de muestreo en el plano de observación, pues no es el mismo que los intervalos de muestreo en el plano fuente

$$\Delta\xi = \frac{\lambda d}{N\Delta x}; \quad \Delta\eta = \frac{\lambda d}{N\Delta y}$$

Ejemplo: $\Delta x = 5 \text{ um}$; $d = 1 \text{ m}$; $N = 1024$ y $\text{Lambda} = 555 \text{ nm}$ se obtiene: $\Delta\xi = 108 \text{ um}$

¹Seguiremos la notación y el trabajo de Schnars and Jüptner (2002), Meas. Sci. Technol. 13 (2002) R85–R101

Implementación del Propagador de Fresnel: F. Transferencia

Usaremos los algoritmos propuesto por Voelz donde se usa el método de convolución

$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \{ \mathfrak{F} \{ U_1(x, y) \} H(f_X, f_Y) \}$$

$$H(f_X, f_Y) = e^{jkz} \exp \left[j\pi \lambda z (f_X^2 + f_Y^2) \right]$$

Implementación del Propagador de Fresnel: F. Respuesta al Impulso

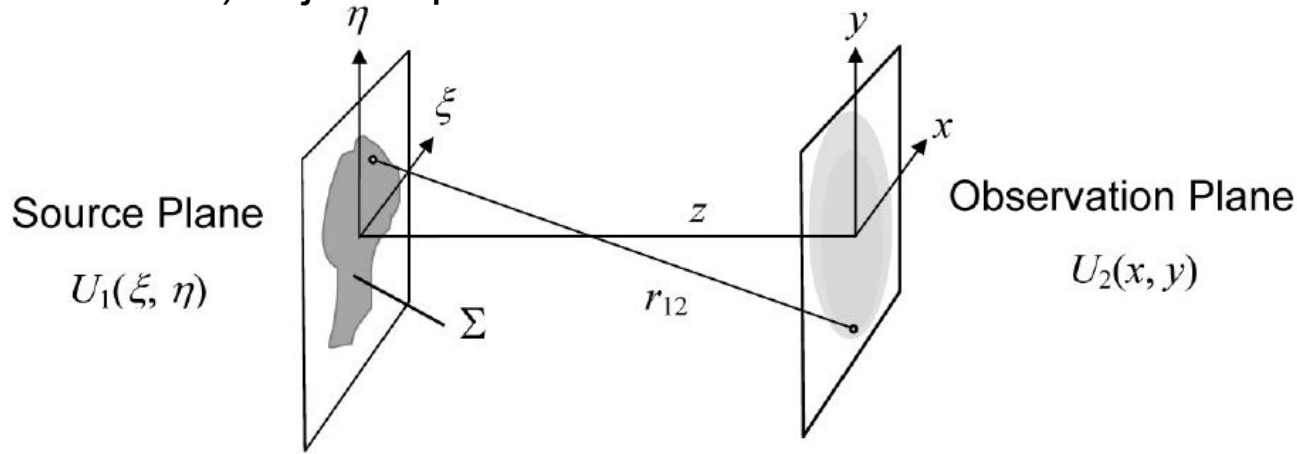
Usaremos los algoritmos propuesto por Voelz donde se usa el método de convolución

$$U_2(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \{ \mathfrak{F} \{ U_1(x, y) \} \mathfrak{F} \{ h(x, y) \} \}$$

$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]$$

Propagador de Fraunhofer

La expresión para el campo en el plano de observación, dado un plano fuente (o plano de abertura) bajo la aproximación de Fraunhofer es

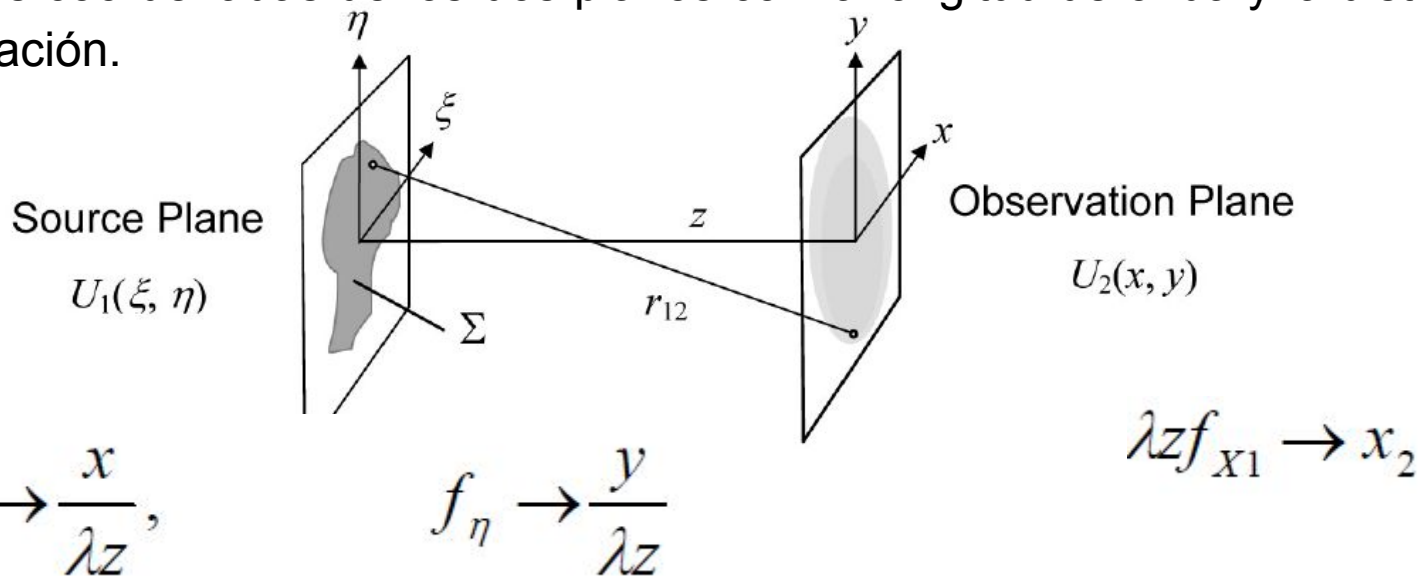


$$U_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x_2^2 + y_2^2)\right] \\ \times \iint U_1(x_1, y_1) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_2x_1 + y_2y_1)\right] dx_1 dy_1$$

Subíndices 1 para el plano de la fuente y subíndices 2 para el plano de observación

Propagador de Fraunhofer

En general las áreas de observación no son iguales pues existe una relación entre las coordenadas de los dos planos con la longitud de onda y la distancia de propagación.



Tarea: demostrar que

$$L_2 = \frac{\lambda z}{\Delta x_1}, \quad \text{and} \quad \Delta x_2 = \frac{\lambda z}{L_1}$$

Propagador de Fraunhofer

Con la anterior relación entre el espacio de la fuente y el espacio de observación se construye el sistema coordenado en el plano de observación:

$$x_2 = \left[\frac{-L_2}{2} : \Delta x_2 : \frac{L_2}{2} - \Delta x_2 \right] = \lambda z \left[\frac{-1}{2\Delta x_1} : \frac{1}{L_1} : \frac{1}{2\Delta x_1} - \frac{1}{L_1} \right]$$

$$L_2 = \frac{\lambda z}{\Delta x_1} \quad \Delta x_2 = \frac{\lambda z}{L_1}$$

Solo en la condición de muestreo crítico se da que la longitud de lado de ambos planos son la misma