Difracción
Fresnel y Fraunhofer

Jennyfer Alexandra Morales Marín

Instituto de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Abril 05 2021

Contenido

- Aproximación de Fresnel

- Ejemplo de difracción de Fresnel
    - Apertura Rectangular

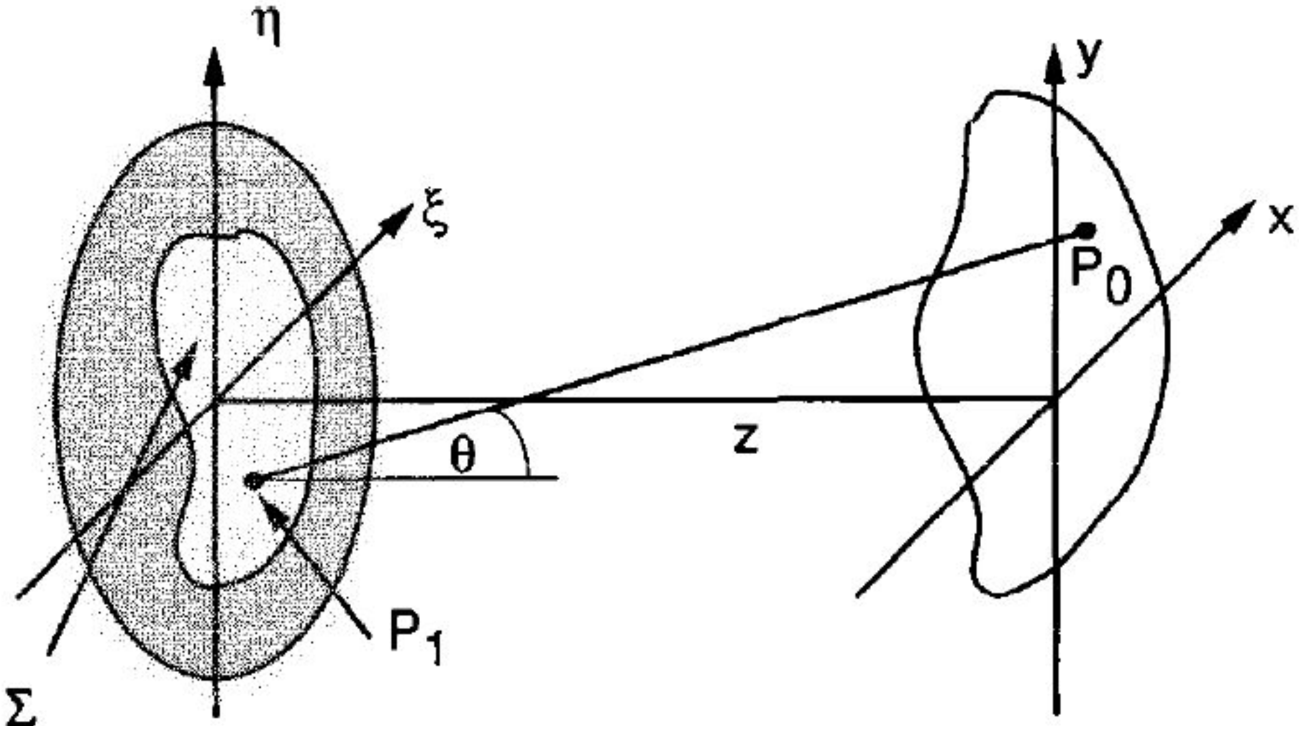
- Aproximación de Fraunhofer

- Ejemplos de difracción de Fraunhofer
    - Apertura Rectangular
    - Apertura Circular
    - Ejemplos particulares

- Ejemplos de difracción de Fresnel y Fraunhofer (propagadores)
    - Apertura Rectangular
    - Apertura Circular

Principio Huygens-Fresnel

$U_1(\xi,\eta)$



$U_2(x,y)$

$$U_2(x,y)=\iint U_1(\xi,\eta)h\left(x-\xi,y-\eta\right)d\xi d\eta$$

Aproximación de Fresnel

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \ldots ,$$

$$r_{12} \approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]$$

El campo de Fresnel

$$U_2(x,y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right] \times \iint\left\{U_1(\xi,\eta)\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\right\}\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)\right]d\xi d\eta.$$

Las siguientes sustituciones de la variable de frecuencia para la transformación

$$f_\xi \to \frac{x}{\lambda z},\ f_\eta \to \frac{y}{\lambda z}$$

Un criterio más flexible es el número de Fresnel

$$z^3 >> \left(\frac{\pi}{4\lambda}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^2\right)_{\max}$$

$$N_F = \frac{w^2}{\lambda z} \leq 1$$

Apertura Rectangular

Supongamos que una abertura cuadrada de ancho 2W se ilumina normalmente por una onda plana monocromática de amplitud de la unidad. La distribución del campo complejo inmediatamente detrás de la abertura es

$$U(\xi, \eta) = \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right).$$

La forma de convolución de la ecuación de difracción de Fresnel es más conveniente para este problema, luego

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-w}^{w} \exp\left\{ j\frac{\pi}{\lambda z}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right\} d\xi d\eta.$$

Esta expresión se puede separar en el producto de dos integrales unidimensionales,

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j} \mathcal{I}(x)\mathcal{I}(y)$$

dónde

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-w}^{w} \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(\xi - x)^2\right] d\xi \qquad \mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-w}^{w} \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(\eta - y)^2\right] d\eta.$$

Apertura Rectangular

Para reducir estas integrales a las expresiones relacionadas con las integrales de Fresnel, se realiza el cambio de variables

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(\xi - x) \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(\eta - y),$$

luego

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp\left(j \frac{\pi}{2} \alpha^2\right) d\alpha \qquad \mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \exp\left(j \frac{\pi}{2} \beta^2\right) d\beta,$$

donde los límites de la integración son

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w + x) \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w - x) \qquad \beta_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w + y) \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w - y).$$

El numero Fresnel $N_F = w^2/\lambda z,$

Variables de distancia normalizadas en la región de observación

$$X = x/\sqrt{\lambda z} \qquad Y = y/\sqrt{\lambda z},$$

Apertura Rectangular

Reduciendo expresiones más simples para los límites de la integración.

$$\alpha_1 = -\sqrt{2}\left(\sqrt{N_F} + X\right) \qquad \alpha_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{N_F} - X\right) \qquad \beta_1 = -\sqrt{2}\left(\sqrt{N_F} + Y\right) \qquad \beta_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{N_F} - Y\right)$$

Las integrales I(x) y I(y) están relacionadas con las integrales de Fresnel C(z) y S(z).

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \qquad S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Señalando que

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\mathrm{a}^2\right) d\alpha = \int_0^{\alpha_2} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha,$$

Apertura Rectangular

podemos escribir

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)\right] + j\left[S(\alpha_2) - S(\alpha_1)\right]\right\} \qquad \mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[C(\beta_2) - C(\beta_1)\right] + j\left[S(\beta_2) - S(\beta_1)\right]\right\}$$

Finalmente, la distribución de campo compleja

$$\boxed{U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{2j}\{[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + j[S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]\} \times \{[C(\beta_2) - C(\beta_1)] + j[S(\beta_2) - S(\beta_1)]\}.}$$

La intensidad del campo de onda $I(x, y) = |U(x, y)|^2$

En este caso está dado por

$$\boxed{I(x, y) = \frac{1}{4}\{[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)]^2 + [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]^2\} \times \{[C(\beta_2) - C(\beta_1)]^2 + [S(\beta_2) - S(\beta_1)]^2\}.}$$

Aproximación de Fraunhofer

El campo de Fresnel

$$U_2(x,y)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]\times\iint\left\{U_1(\xi,\eta)\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\right\}\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)\right]d\xi d\eta.$$

Las siguientes sustituciones de la variable de frecuencia para la transformación

$$f_\xi\rightarrow\frac{x}{\lambda z},\quad f_\eta\rightarrow\frac{y}{\lambda z}$$

Suponiendo que

$$z>>\left(\frac{k(\xi^2+\eta^2)}{2}\right)_{\max}$$

Aproximación de Fraunhofer

$$exp\left[j\frac{k}{2z}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right] \qquad z >> \left(\frac{k(\xi^2+\eta^2)}{2}\right)_{\max}$$

$$exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{2}{k\left(\xi^2+\eta^2\right)}\right)_{max}^{0}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]$$

$$exp\left[0\right]\approx 1$$

Aproximación de Fraunhofer

El campo de Fraunhofer

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z} \left(x^2 + y^2 \right) \right] \times \iint U_1(\xi, \eta) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta.$$

$$z >> \left(\frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2} \right)_{\max}$$

Un criterio más flexible es el número de Fresnel

$$N_F = \frac{w^2}{\lambda z} << 1.$$

Aproximación de Fraunhofer

El campo de Fraunhofer

$$U_2(x,y) = \frac{exp(jkz)}{j\lambda z} exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] F\left[U_1(\xi,\eta)\right]$$

La distribución de intensidad

$$I(x,y) = |U(x,y)|^2$$