Funciones de transmitancia, lentes y redes

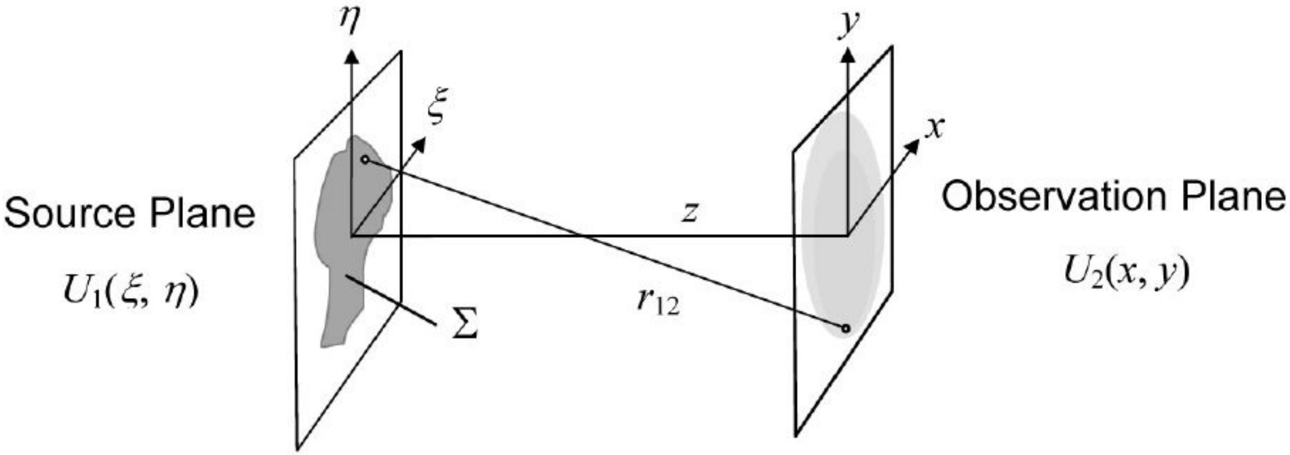
Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
17 de abril de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

- Introducción
- Funciones de transmitancia de fase y amplitud
- Tilt
- Enfoque
- Lente
- Redes y funciones periódicas: red cosenoidal y cuadrada
- Modelo periódico
- Lentes de Fresnel y Placas zonales hiperbólicas

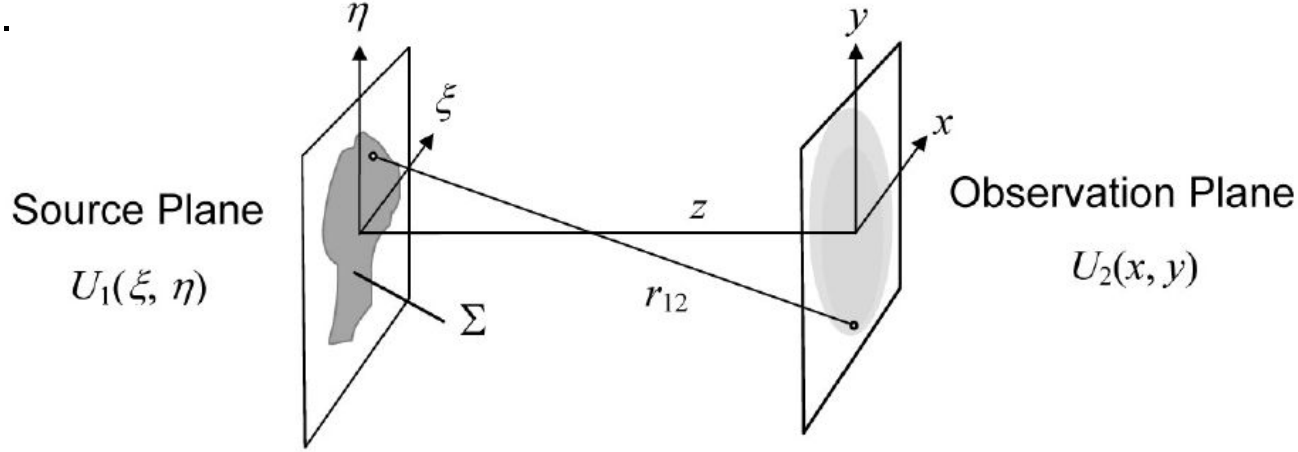
Funciones de transmitancia

En general los planos fuente que se usaron para el desarrollo de los propagadores fueron muy simples: aberturas simétricas iluminadas por ondas planas unitarias. En general las aberturas pueden ser más complejas, modificando tanto la fase como la amplitud del campo incidente.



Funciones de transmitancia

Las funciones de transmitancia son una representación matemática de un elemento óptico, y en general describe bien el efecto que tiene este elemento sobre el campo que incide sobre él. Este tipo de funciones no necesariamente se aplican solo en el plano fuente, en general se pueden tener sistemas compuestos por varias funciones de transmitancia localizadas a diferentes distancias en el sistema.



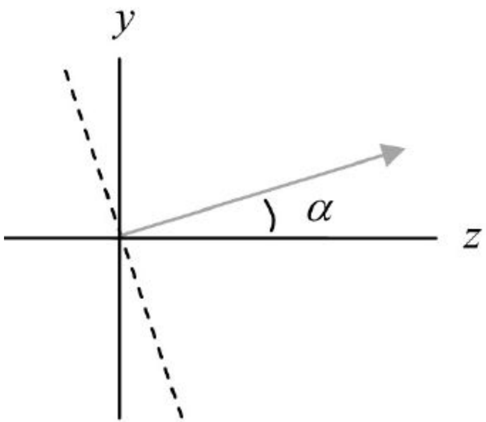
Funciones de transmitancia - Tilt

Consideremos una función que genera un tilt o prisma a un haz incidente, sin que existe algún cambio en su vergencia.

$$z = -y \tan \alpha$$

Como a medida que pasa el tiempo la fase es más negativa, el menos de la expresión anterior se cancela con el de la fase y posible escribir la función de transmitancia para el tilt como

$$\phi_Y(x, y) = ky \tan \alpha$$



$$\phi(x, y) = k(x \cos \theta + y \sin \theta) \tan \alpha$$

$$\theta = \tan^{-1}(y / x)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(r/z)$$

Funciones de transmitancia - Tilt

¡Precaución! No se puede tener un tilt muy alto para mantener el soporte y ancho de banda de la función con una buena representación

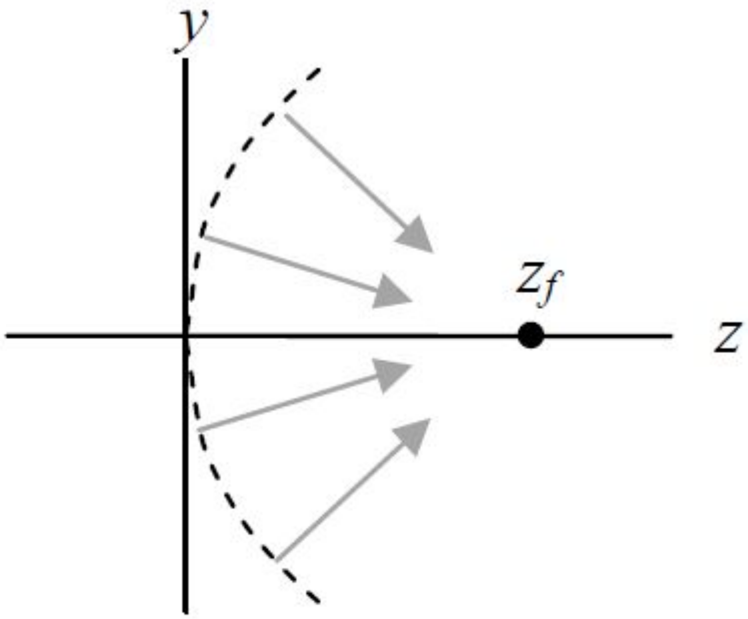
$$\Im\{U_1(x_1, y_1)\exp(jkx_1 \tan\alpha)\} = G_1\left(f_{X1} - \frac{\tan\alpha}{\lambda}, f_{Y1}\right)$$

$$B_1^{+T} = B_1 + \frac{\tan\alpha}{\lambda}$$

$$\alpha \leq \lambda\left(\frac{1}{2\Delta x_1} - B_1\right)$$

Funciones de transmitancia - enfoque

Entre los elementos de mayor uso se destacan aquellos que producen un enfoque al haz que incide sobre ellos, dotando el nuevo haz de vergencia.



$$\phi_S(x, y) = -k\sqrt{{z_f}^2 + x^2 + y^2}$$

Fase negativa: frente de onda convergente
Fase positiva: frente de onda divergente

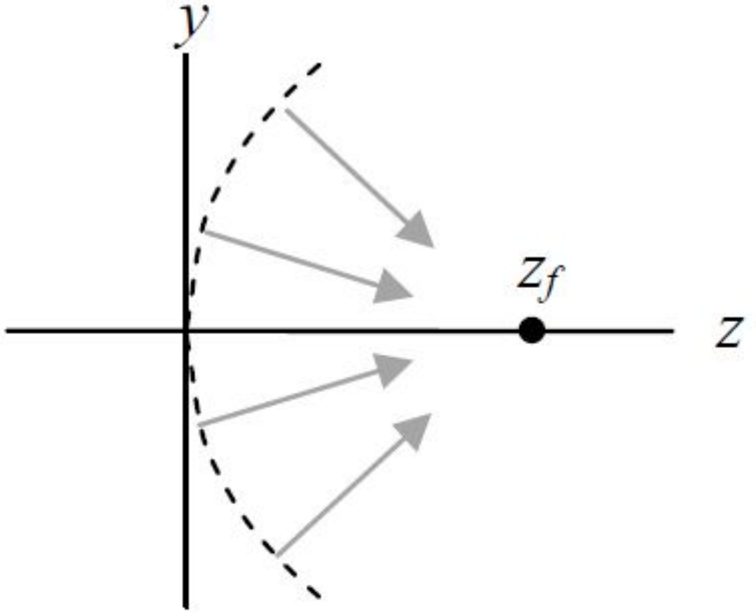
Funciones de transmitancia - enfoque

Haciendo una expansión binomial en la anterior expresión

$$\phi(x,y) = -\frac{k}{2z_f}\left(x^2 + y^2\right)$$

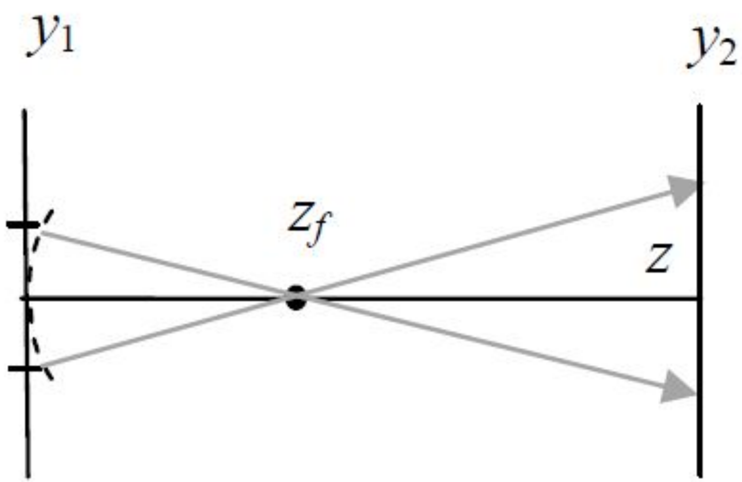
Que da lugar a la función de transmitancia

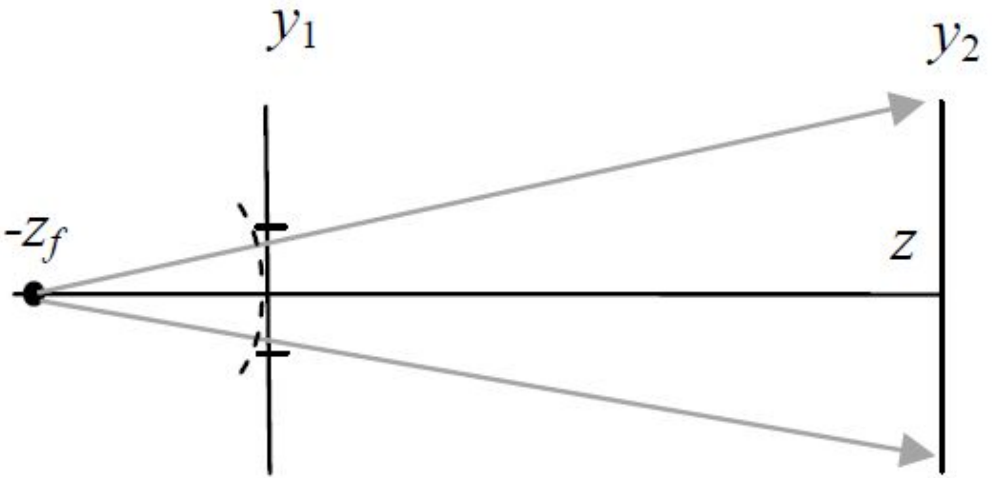
$$t_A(x,y) = \exp\left[-j\frac{k}{2z_f}\left(x^2 + y^2\right)\right]$$



Funciones de transmitancia - enfoque

Gráficamente el enfoque se representa como





El nuevo ancho de bandas de la función es

$$B_1^{+F} \approx B_1 + \frac{D_1/2}{\lambda |z_f|} \quad \xrightarrow[B_1^{+F} \leq 1/(2\Delta x)]{} \quad |z_f| \geq \frac{D_1/2}{\lambda}\left(\frac{1}{2\Delta x_1} - B_1\right)^{-1}$$

Funciones de transmitancia - lente

Una lente es un instrumento óptico que se encarga de enfocar o desenfocar la luz. Su función de transmitancia ideal es

$$t_A(x,y) = P(x,y)\exp\left[-j\frac{k}{2f}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

con f distancia focal y P(x,y) es una función de pupila. Una lente típica tiene una función de pupila correspondiente a una abertura circular:

$$P(x,y) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{w_L}\right)$$

con w_L el radio de la lente (tamaño)

Funciones de transmitancia - lente

El ancho de banda para una función pasando a través de una lente:

Onda plana incidiendo sobre la lente, ¿Por qué?

$$B_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|f|}{D_L} \geq \frac{\Delta x}{\lambda} \qquad D_L = 2w_L$$

El f-número de una lente se define como $|f|/D_L$

$$f\,/\# \geq \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Para una lente de diámetro 25 mm, f/#=10 e iluminación verde

$$\Delta x \leq 5\times10^{-6}\ \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad M \geq \frac{L}{\Delta x} = \frac{25\times10^{-3}}{5\times10^{-6}} = 5000$$

Funciones de transmitancia - lente

Implementación de la función de transmitancia de la lente con el propagador de Fresnel:

$$U_2(x,y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$\times\iint\left\{U_1(\xi,\eta)\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\right\}\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)\right]d\xi d\eta.$$

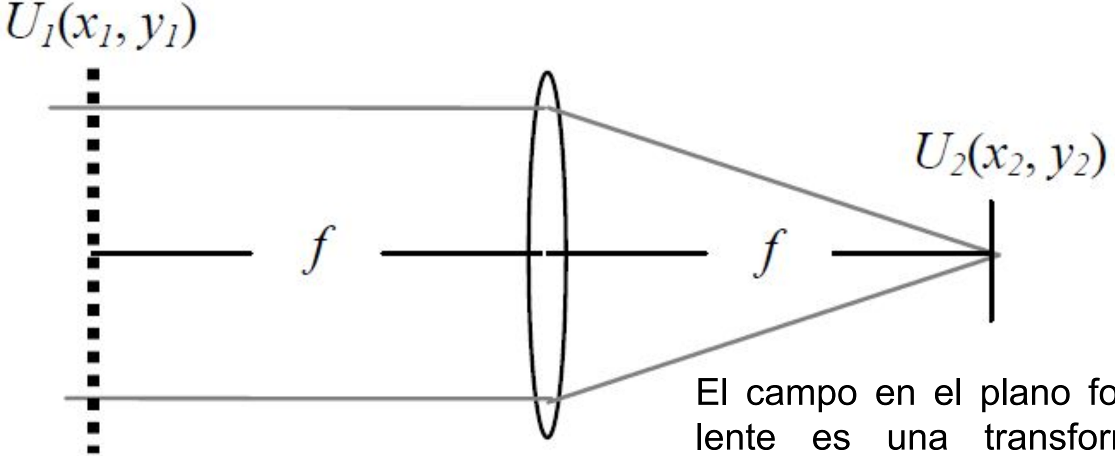
z=f

$$U_2(x_2,y_2) = \frac{\exp(jkf)}{j\lambda f}\exp\left[j\frac{k}{2f}\left({x_2}^2+{y_2}^2\right)\right]$$

$$\times\iint U_1(x_1,y_1)P(x_1,y_1)\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}\left(x_2x_1+y_2y_1\right)\right]dx_1dy_1$$

Funciones de transmitancia - lente

Lente como una transformada de Fourier



El campo en el plano focal posterior de la lente es una transformada de Fourier escalada del campo de entrada, con un viñeteo adicional debido a la pérdida de información por la luz viajando fuera del diámetro de la lente

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(jkf)}{j\lambda f}$$

$$\times \iint U_1(x_1, y_1) P\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}\left(x_2 x_1 + y_2 y_1\right)\right] dx_1 dy_1$$

Redes y funciones periódicas

Las redes son elementos ópticos de interés ya que son la base para el desarrollo de espectrofotómetros. La difracción usualmente se evalúa en la región de Fraunhofer. Una red cosenoidal de amplitud se representa por

$$t_A(x,y) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{P}\right)\right] \mathrm{rect}\left(\frac{x}{D_1}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{y}{D_1}\right)$$

$$P << D_1.$$

$$\#\,\text{samples across}\, P = M\,\frac{P}{L_1}.$$

Redes y funciones periódicas

Solución analítica

$$t_A(x,y) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{P}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{D_1}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{D_1}\right)$$

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(x_2{}^2 + y_2{}^2\right)\right]\frac{D_1{}^2}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{D_1}{\lambda z}y_2\right)$$
$$\times\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{D_1}{\lambda z}x_2\right) - \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left[\frac{D_1}{\lambda z}\left(x_2 + \frac{\lambda z}{P}\right)\right] - \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left[\frac{D_1}{\lambda z}\left(x_2 - \frac{\lambda z}{P}\right)\right]\right\}$$

Redes y funciones periódicas

Red cuadrada de amplitud

$$t_A(x,y) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{P/2}\right) * \frac{1}{P}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{P}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{D_1}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{D_1}\right)$$

Solución analítica

$$U_2(x_2,y_2) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}\left(x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\right)\right]\frac{D_1^{\,2}}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{D_1}{\lambda z}y_2\right)$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{sinc}\left[\frac{D_1}{\lambda z}\left(x_2 - n\frac{\lambda z}{P}\right)\right].$$

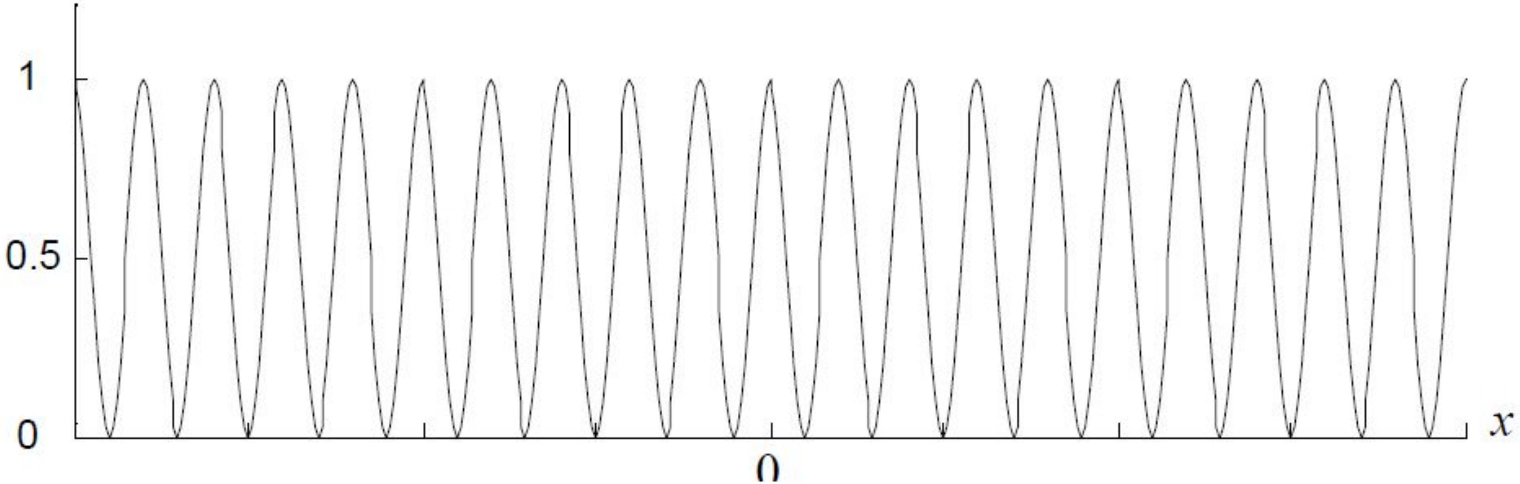
Redes y funciones periódicas

Modelo periódico

Supongamos que la red ajuste perfectamente el soporte y longitud de lado, tan que un número entero de periodos quepan en la longitud de lado, así

Solución analítica

$$\frac{L_1}{P} = \text{integer}$$



Redes y funciones periódicas

Modelo periódico

De esta forma, en virtud de la extensión periódica se tiene una red infinita (soporte infinito) y por lo tanto su ancho de banda debe ser finito, de hecho

$$\frac{L_1}{P} = \text{integer}$$