Ejercicio 5.1:

Asuma una abertura circular con radio *w = 0.05 m* iluminado por una onda plana. Donde \lambda = *0.5 um.* Asuma una distancia de propagación de *1000 m* y simule un arreglo de tamaño *500x500 muestras*. Asuma el muestro critico para la propagación de Fresnel.

- **(a)** Encuentre la longitud *L1*, el intervalo de muestreo \delta x , y la frecuencia de Nyquist *FN*.
- **(b)** Determine el ancho de *banda efectivo B1*. Es *B1<FN?* Cuántas muestras abarcan el diamétro de la función circular?
- **(c)** Determine el número de Fresnel. Está la distancia de propagación dentro de la región de Fresnel?
- **(d)** Usando el valor encontrado para *L1* en el literal (a). Simule la propagación de Fresnel para distancias de 500, 1000 y 2000 m. Pruebe las simulaciones *TF* y *IR.*

Datos

0.5 m

0.001 m

500 cycles/m.

$w = 0.05 \text{ m}$

$\lambda = 0.5 \times 10^{-6} \text{ m}$

$z = 1000 \text{ m}$

$M = 500$: muestras sobre un eje.

Sol a)

Como la hipótesis nos dice asumir el muestreo critico para la propagación de Fresnel. Para hallar el muestreo tenemos Así utilizando la expresión 5.14 del libro tenemos:

$$M = \frac{\lambda z}{\Delta x^2} = \frac{L^2}{\lambda z}$$

Calculamos Δx

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\lambda z}{M}} = \sqrt{\frac{(0.5 \times 10^{-6} \text{ m})(1000 \text{ m})}{500}}$$

$\boxed{\Delta x = 1 \text{ mm}}$

Así, usamos la expresión para muestreo critico

$$\Delta x = \lambda z / L$$

Luego

$$L = \frac{\lambda z}{\Delta x} = \frac{(0.5\times10^{-6}\,m)(1000\,m)}{(1\times10^{-3}\,m)}$$

$$L = 0.5 \quad m$$

La frecuencia de Nyquist es la máxima frecuencia que se puede representar en el espacio de frecuencias, dada por la expresión

$$f_{Nx} = \frac{1}{2\Delta x} = \frac{1}{2(1\times10^{-3}\,m)}$$

$$f_{Nx} = 500 \quad \text{ciclos}/m$$

Sol 6)

Hallamos el ancho de banda efectivo.

Dado que tenemos una abertura circular, el ancho de banda efectivo se puede hallar como:

$$B = \frac{5}{w} \quad : \text{convención de Goodman.}$$

$$B = \frac{5}{0.05\ m}$$

$$B = 100 \quad \text{ciclos}/m$$

- ¿Es $B < f_{Nx}$? \\ sí es menos ya que $f_{Nx} = 500$ ciclos/m > $B = 100$ ciclos/m

- ¿Cuántas muestras abarcan el diámetro de la función circular?

$$\Delta x = \frac{1}{2B_1} = \frac{1}{2(100 \text{ ciclos/m})} = 5\times10^{-3} \text{ m}$$

$$M = \frac{L}{\Delta x} = \frac{0.5 \text{ m}}{5\times10^{-3} \text{ m}} = 100 \text{ muestras.}$$

Sol c)

Determina el número de Fresnel.

$$N_F = \frac{w^2}{\lambda z} = \frac{(0.05 \text{ m})^2}{(0.5\times10^{-6} \text{ m})(1000 \text{ m})}$$

$$\boxed{N_F = 5}$$

¿Está distancia de propagación está dentro de la región de Fresnel?

No, para estar dentro de la región de Fresnel se debe cumplir $N_F < 1$.

Ejercicio 5.3:

Un diagnostico útil para simular propagaciones es computar la potencia en el plano fuente y en el plano de observación. Asumiendo no absorbción o dispersión de la luz, lo cual es verdadero para las simulaciones presentadas en este libro, la potencia(dimesionalmente en watts) debe conservarse. En otras palabras, el plano fuente y el plano de observación deben contener la misma potencia óptica. Si no, hay problemas en el código o problemas de muestreo. La potencia es la integral de intensidad(irradiancia), definida:

$$P = \iint I \, dx dy.$$

Para la **sqr_beam** ejemplo en este capitulo:

(a) Agregue el código para computar la potencia en el plano fuente y en el plano de observación para varias propagaciones.

(b) Hay discrepancias en algunos casos de este ejemplo con respecto a los planos fuente y de observación?

Solucionado en python.

Ejercicio 5.5:

Haz gaussiano. Los métodos de Fourier son muy útiles para simular la propagación de un lasér. Un rayo de lasér obedece la aproximación paraxial, la cual es válida para la aproximación de Fresnel. Además, la función gaussiana para describir el pérfil del haz es más indulgente en términos de artefactos de muestreo que un haz de apertura cuadrada o circular con soporte similar. Los textos de Lasér definen la distribución de irradiancia para un haz gaussiano propagandose en la dirección z como:

$$I(x,y,z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \exp\left[-2\,\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}\right] \qquad (5.26)$$

Donde x,y son las variables espaciales, **Io** es la irrandiancia de la fuente evaluada en el centro(x,y = 0), **wo** = radio del haz de fuente e^-2(donde z=0), y **w(z)** es el radio del haz a una distancia z. El radio del haz está dado por:

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \qquad (5.27)$$

Donde **z_R** := es el rango de Rayleight definido por:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Para las siguientes preguntas, asuma que el campo óptico en el plano fuente(z=0) es:

$$U_0(x,y) = A_0 \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}\right]$$

donde wo = 1 mm, \lambda = 0.633 um, y Ao = 1 [V/m]. Para ser exactos,

$$I_0 = |A_0|^2/2\eta \qquad [W/m^2]$$

donde $\eta = 377\,\Omega.$ en el espacio libre.

a) asuma una longitud de 15 mm y un arreglo de 250x250 elementos. Cree el haz gaussiano de la ecuación (5.29) en la matriz de origen, simule la propagación de Fresnel para 1m, 5m y 10m. Compara los resultados obtenidos con los que muestra la forma analitica(ec 5.26).

b) Cuál es la distancia de propagación para el muestro critico? Prueba el criterio de ancho de banda de origen una distancia de propagación de 10m.

c) Derive la expresión de irradiancia para el campo Uo. Muestre que este resultado es consistente con la expresión analitica en la ecuación (5.26)

Datos:

$L = 15\times10^{-3}$ m $M = 250$ muestras

$w_0 = 1\times10^{-3}$ m $\lambda = 0.633\times10^{-6}$ m

→ Solución b)

También sabemos que $dx = L/M$ de esto obtenemos

$$dx = 6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Calculo de B_1 por el criterio de ancho de banda.

$$B_1 \leq \frac{L}{2\lambda z} = \frac{15 \times 10^{-3} \text{ m}}{2(0.633 \times 10^{-6} \text{m})(10 \text{ m})} = 1184.8 \text{ ciclos/m}$$

$$\approx 1185 \text{ ciclos/m}$$

Por tanto

$$\boxed{B_1 \leq 1185 \text{ ciclos/m.}}$$

De la expresión

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{L} \longrightarrow z = L\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}\left(\frac{L}{M}\right) = \frac{L^2}{\lambda M}$$

$$\boxed{z = 1.42 \text{ m}}$$ → Distancia de propagación crítica.

→ Solución c)

El campo U_0 viene dado por

$$U_0(x,y) = A_0 \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}\right]$$

Tenemos que el campo de Fraunhofer es:

$$U_2(x_2,y_2) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] \iint U_1(\xi,\eta) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)\right] d\xi d\eta$$

Que de forma más comprimida sería

$$U_2(x_2,y_2) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] F\{U_1(\xi,\eta)\}$$

Debemos realizar la TF de el campo U_0

$$\mathcal{F}\left\{A_0 \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right]\right\} = A_0 \mathcal{F}\left\{\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right]\right\}$$

$$= A_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-j2\pi(f_x x + f_y y)\right] dx\, dy$$

Podemos aplicar separación de variables:

$$= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-j2\pi(f_x x)\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-j2\pi(f_y y)\right] dy$$

$$= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2} - j2\pi(x f_x)\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{w_0^2} - j2\pi(f_x y)\right] dy.$$

Realicemos una de estas integrales y claro, la otra tendrá la misma forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2} - j2\pi(x f_x)\right] dx$$

Completamos cuadrado en el argumento que hay dentro de la exponencial

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0} + j\pi f_x w_0\right)^2 - \pi^2 f_x^2 w_0^2\right] dx$$

Hacemos la sustitución

$$u = \frac{x + j\pi f_x w_0^2}{w_0} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{w_0} \qquad \rightarrow dx = w_0\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-u^2 - \pi^2 f_x^2 w_0^2\right] w_0\, du$$

$$= w_0 \exp[-\pi^2 f_x^2 w_0^2] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)\,du$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} w_0 \exp\left[-\pi^2 f_x^2 w_0^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2)\,du.$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} w_0}{2} \exp\left[-\pi^2 f_x^2 w_0^2\right] \operatorname{erf}(u)$$

Utilizando la integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ obtenemos:

$$I = \sqrt{\pi} w_0 \exp\left[-\pi^2 w_0^2 f_x^2\right]$$

Así

$$U_2(x_2, y_2) = A_0 \pi w_0^2 \frac{\exp(ikz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] \exp\left[-\pi^2 w_0^2 \left(f_x^2 + f_y^2\right)\right]$$

Pero recordamos los cambios de escala

$$f_x \to \frac{x}{\lambda z} \quad y \quad f_y \to \frac{y}{\lambda z}$$

$$\boxed{U_2(x_2, y_2) = A_0 \pi w_0^2 \frac{\exp(ikz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] \exp\left[-\frac{\pi^2 w_0^2}{\lambda^2 z^2}\left(x^2+y^2\right)\right]}$$

Recordamos que $I = U U^*$ → Irradiancia.

$$\boxed{I = \frac{A_0^2 \pi^2 w_0^4}{\lambda^2 z^2} \exp\left[-2\frac{\pi^2 w_0^2}{\lambda^2 z^2}\left(x^2+y^2\right)\right]} \quad *$$

Acá tenemos lo siguiente

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \to w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)$$

Dado que estamos en el dominio de Fraunhofer podemos tomar z muy grande y además $z >> z_R$

$$w^2(z) = w_0^2 \left(\frac{z}{z_R}\right)^2$$

Dado esto, empezamos a transformar (*)

$$I = A_0^2 \left(\frac{z_R^2}{z^2}\right) \exp\left[-2\frac{\pi}{\lambda}\frac{z_R}{z^2}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$I = A_0^2 \left(\frac{w_0^2}{w_0^2}\right)\left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \exp\left[-2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{w_0^2}{w_0^2}\right)\frac{z_R}{z^2}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$I = A_0^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \exp\left[-\frac{2}{w_0^2}\frac{z_R^2}{z^2}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$I = A_0^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \exp\left[-\frac{2}{w_0^2\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$\boxed{I = A_0^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \exp\left[-2\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w^2(z)}\right]}$$