Teorema del muestreo

Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
13 de marzo de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

- Introducción
- Definiciones
- El teorema de Whittaker-Shannon-Nyquist
- Muestreo uniforme 2D
- Reconstrucción de señales
- Límite de Gabor
- Producto espacio-ancho de banda
- Ejemplo

Introducción

Las señales físicas (luz, sonido, etc..) son usualmente continuas, sin embargo, los elementos para registrarlas y lograr su almacenamiento digital son discretos. Una cámara tiene un número finito de pixeles, los micrófonos usan conversores análogo-digitales que evalúan la señal cada cierto tiempo, y los computadores almacenan la información como cadenas de valores discretos (bits).

El proceso de convertir una señal continua en una señal discreta se denomina muestreo, y es un pilar de la teoría de la información, el análisis digital y el modelado computacional de sistemas físicos. En esta clase veremos los fundamentos de la teoría del muestreo, y las condiciones óptimas para muestrear una señal continua minimizando la pérdida de información.

Definiciones

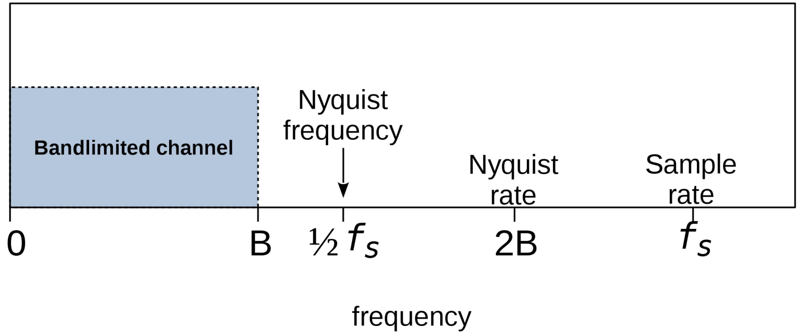
Ancho de banda: La extensión de una señal en el espacio de frecuencias.

Banda limitada: Una señal que con ancho de banda finita.

Frecuencia de Nyquist: La máxima frecuencia que se puede reproducir a partir de una señal con un muestreo determinado.

Tasa de muestreo: La frecuencia a la que se muestrea una señal. Es el inverso del intervalo de muestreo.

Relationship of Nyquist frequency & rate (example)



El teorema de Whittaker-Shannon-Nyquist

Originalmente derivado para señales temporales.

“Si una señal no contiene frecuencias mayores a B, se puede determinar completamente con muestras de sus valores tomadas cada 1/(2B) segundos”

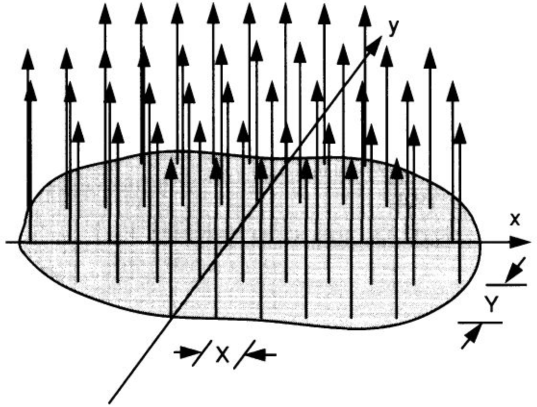
En el caso 2D las frecuencias y el intervalo de muestreo es espacial.

Corolario

“Dado un muestreo en intervalos de 1/B, la máxima frecuencia que puede reproducirse es B/2”

Muestreo uniforme 2D

Para realizar un muestreo uniforme, se multiplica la función a muestrear por un “peine” 2D. Así la señal muestreada es



$$g_s(x, y) = \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) g(x, y).$$

Donde X y Y determinan el intervalo de muestreo en la dirección x,y respectivamente. La TF de la señal será de la forma

$$G_s(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\left\{\text{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right\} \otimes G(f_X, f_Y)$$

Muestreo uniforme 2D

Recordemos que la FT de la funcion peine 2D sera

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right\} = XY\,\mathrm{comb}(X f_X)\,\mathrm{comb}(Y f_Y)$$

donde

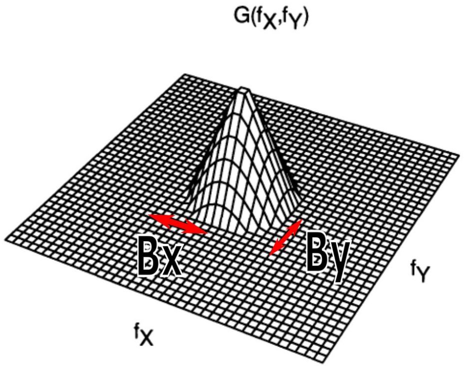
$$XY\,\mathrm{comb}(X f_X)\,\mathrm{comb}(Y f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_X - \frac{n}{X}, f_Y - \frac{m}{Y}\right).$$

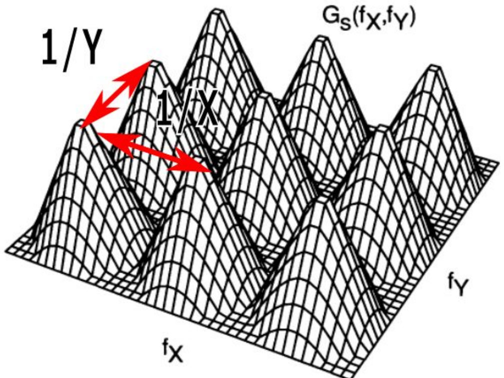
Muestreo uniforme 2D

Luego la TF de la señal muestreada es

$$G_s(f_X, f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(f_X - \frac{n}{X}, f_Y - \frac{m}{Y}\right).$$

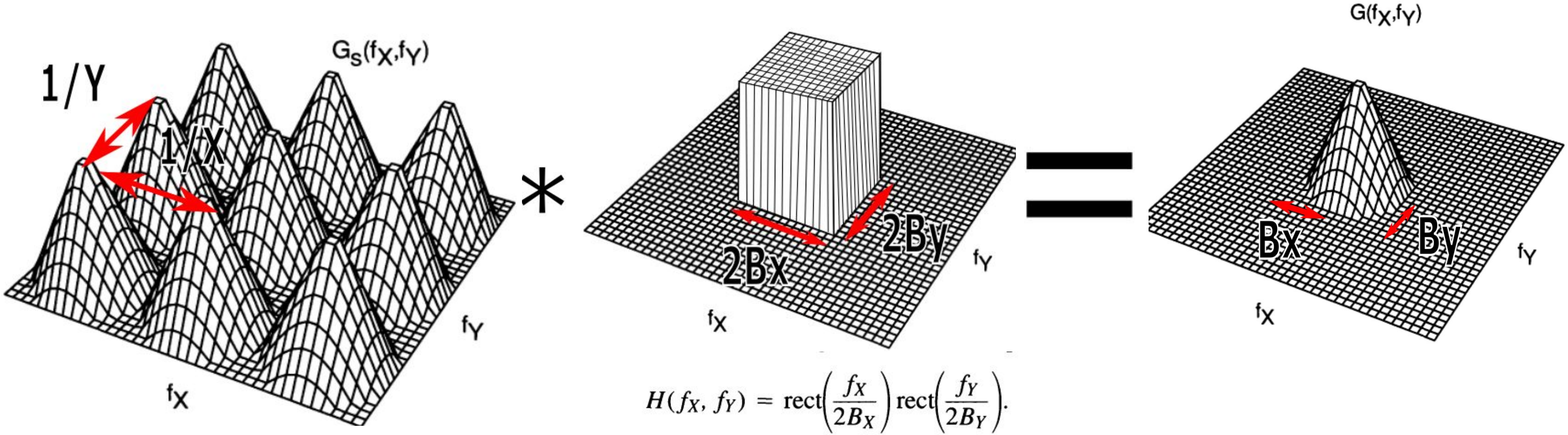
Esto implica que el espectro de g va a ser replicado periódicamente en intervalos 1/X y 1/Y.





Reconstrucción de señales

Observemos el espectro de la señal muestreada. Si la distancia entre replicas es mayor que 2 veces el ancho de banda de la señal original, y multiplicamos el espectro muestreado por una ventana de tamaño Bx, By, obtenemos el espectro original.



$$H(f_X, f_Y) = \mathrm{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right).$$

Reconstrucción de señales

De lo anterior, podemos ver que la condición suficiente para reconstruir la señal original es que el intervalo de muestreo sea

$$X \leq \frac{1}{2B_X} \qquad \text{and} \qquad Y \leq \frac{1}{2B_Y}.$$

Un intervalo menor no mejora la reconstrucción. Al mayor intervalo posible que cumple la condición anterior se le llama muestreo de Nyquist o tasa de Nyquist. Uno mayor hace que las réplicas del espectro se superpongan, distorsionando el espectro de la señal muestreada y la señal reconstruida. Si se cumple esta condición de muestreo se verifica que

$$G_s(f_X, f_Y)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) = G(f_X, f_Y).$$

Reconstrucción de señales

Así, podemos escribir la señal reconstruida como

$$\left[\operatorname{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)g(x, y)\right] \otimes h(x, y) = g(x, y)$$

donde

$$h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right)\right\} = 4B_X B_Y \operatorname{sinc}(2B_X x)\operatorname{sinc}(2B_Y y).$$

Luego para un muestreo de X y Y, tenemos que

$$g(x, y) = 4B_X B_Y XY \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(nX, mY)\operatorname{sinc}[2B_X(x - nX)]\operatorname{sinc}[2B_Y(y - mY)].$$

Si se muestrea con la tasa de Nyquist, tenemos

$$g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_X}, \frac{m}{2B_Y}\right)\operatorname{sinc}\left[2B_X\left(x - \frac{n}{2B_X}\right)\right]\operatorname{sinc}\left[2B_Y\left(y - \frac{m}{2B_Y}\right)\right].$$

Esta es la llamada fórmula de la interpolación de Whittaker-Shannon.

Limite ancho de banda-tamaño espacial

Dennis Gabor estableció que existe una límite para el ancho temporal y frecuencial de una señal. A esta relación se le llama principio de límite de Gabor o principio incertidumbre de Heisenberg-Gabor, por su relación con el principio de incertidumbre de la mecánica cuántica. Establece que

“Una señal no puede tener duración limitada y banda limitada simultáneamente, con excepción de una señal cero en todo el tiempo”

$$W_B T_D \geq 1$$

Donde W_B es el ancho de banda de la señal y T_D su duración. En análisis 2D o de imágenes el análogo sería el tamaño espacial y la máxima frecuencia espacial.

Producto espacio-ancho de banda

Aunque el límite de Gabor impide que una señal tenga tamaño y espectro finito, en la práctica, las señales físicas tendrán valores **significativos** sólo en una región finita. Esto permite representarlas con un número finito de muestras.

Si g(x,y) tiene valores significativos sólo en la región

$$-L_x < x < L_x,\ -L_y < y < L_y$$

y g es muestreada de forma uniforme cumpliendo la condición de Nyquist, entonces, el número de muestras necesarias para reproducir g es

$$M = 16 L_X L_Y B_X B_Y,$$

A este producto se le conoce como el producto espacio-ancho de banda.

Deficiencias del teorema de interpolación

Recordemos la forma de la señal reconstruida con el teorema de la interpolación

$$g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_X}, \frac{m}{2B_Y}\right) \operatorname{sinc}\left[2B_X\left(x - \frac{n}{2B_X}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[2B_Y\left(y - \frac{m}{2B_Y}\right)\right].$$

!Nunca es cero! El uso de una ventana cuadrada para filtrar el espectro da lugar a una función reconstruida con tamaño infinito. Consecuencia del límite de Gabor. A la energía por fuera del tamaño real de la señal se le conoce como pérdida o “leakage”. Además de la pérdida, la naturaleza infinita de la función sinc hace que el rango dinámico (la diferencia entre el valor máximo y mínimo) de la señal se reduzca.

Ventanas

Se pueden usar distintos filtros o ventanas para reducir la pérdida y aumentar el rango dinámico, a cambio de distorsionar la señal en sus bordes.