Teoría escalar de la difracción

Santiago Bustamante
27 de marzo de 2021
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

- Ecuación de Helmholtz
- Representación fasorial del campo óptico
- Formulación de Rayleigh-Sommerfeld
- Aproximación de Fresnel

Ecuación de Helmholtz

Si u representa una componente del campo eléctrico (o magnético), de las ecuaciones de Maxwell sabemos que en ausencia de fuentes se cumple que

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Donde asumimos que en todo el tratamiento los campos se van a propagar en medios lineales, isotrópicos, homogéneos y no dispersivos, de manera en que no hayan acoplamientos de ningún tipo

$$\epsilon_{ijk\ldots}(\vec{r},\omega) \rightarrow \epsilon \quad \mu_{ijk\ldots}(\vec{r},\omega) \rightarrow \mu$$

Ecuación de Helmholtz

Vamos a buscar una solución de onda monocromática de la forma

$$u(\vec{r}, t) = \Re\{U(\vec{r}) \exp(-i\omega t))\}$$

Con lo cual la ecuación de onda se convierte en la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0$$

A U se le conoce como amplitud compleja o representación fasorial del campo y describe adecuadamente el campo óptico para luz monocromática.

Representación fasorial del campo óptico

U es una función compleja de la posición, lo que implica que puede ser representada por dos funciones reales A y ϕ, conocidas como amplitud y fase respectivamente.

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp[i\phi(\vec{r})]$$

Se suele medir U (y por lo tanto A) en unidades de campo eléctrico (V/m), de manera en que la intensidad del campo

$$I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2 = A^2(\vec{r})$$

es directamente proporcional a la densidad de potencia (W/m^2)

Representación fasorial del campo óptico

Por otro lado, la fase se mide en radianes. En un instante de tiempo t, los frentes de onda para un Φ constante en el intervalo $[0,2\pi)$ son todas las superficies que solucionan la ecuación

$$\phi(\vec{r}) - \omega t = \Phi + 2\pi n$$

para todo n entero. Notemos que los frentes de onda avanzan en la dirección en la que aumenta la fase, i.e. localmente avanza en la dirección definida por el vector $\nabla\phi$.

Notemos que A nos da una idea de la energía que lleva la luz, mientras que ϕ nos da una idea de la dirección en la que esta se propaga.

Algunas representaciones fasoriales útiles

1. Onda plana que se propaga en la dirección del vector de onda
2. Onda esférica divergente (onda producida por una fuente monocromática ubicada en el origen)
3. Onda esférica convergente
4. Onda parabólica. Esta es una aproximación paraxial de la onda esférica. Satisface la ecuación paraxial de Helmholtz.

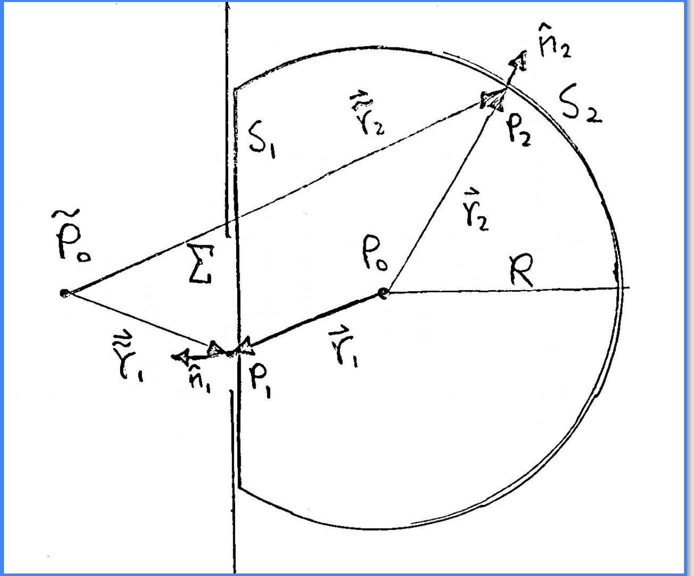
$$U_1(\vec{r}) = A\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$U_2(\vec{r}) = A\frac{\exp(ikr)}{r}$$

$$U_3(\vec{r}) = A\frac{\exp(-ikr)}{r}$$

$$U_4(\vec{r}) = A\frac{e^{\pm ikz}}{z}\exp\left[\pm i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]$$

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld



Consideremos un par de superficies S_1 y S_2 que juntos encierran un volumen V tal como se muestra en la figura. Para dos funciones bien comportadas U y G bien comportadas se satisface el teorema de Green

$$\iiint_V dV(U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) = \iint_{S_1+S_2} dS\left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right)$$

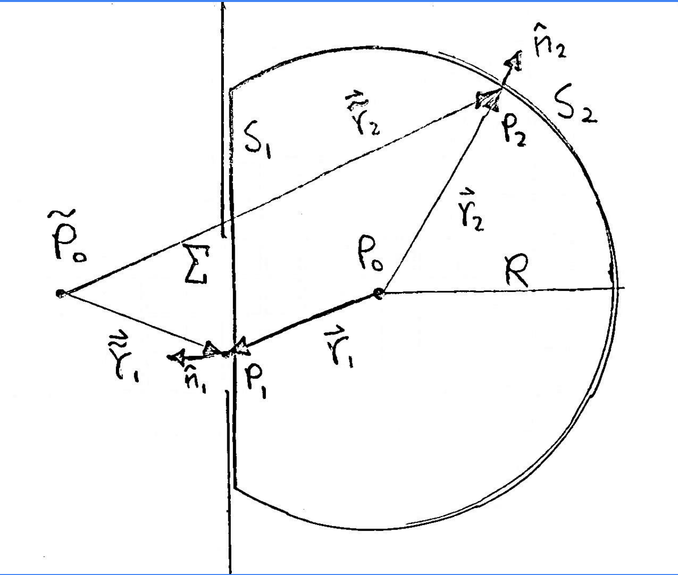
Si dentro de V, U satisface la ecuación de Helmholtz y G satisface la ecuación inhomogénea de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)G = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Donde el vector $\mathbf{r}_0$ representa el punto P_0, entonces el teorema de Helmholtz puede reescribirse como

$$U(\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1+S_2} dS\left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right)$$

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld



Una posible solución para G es

$$G(\vec{r}) = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{e^{ik|\vec{r}-\tilde{\vec{r}}_0|}}{|\vec{r}-\tilde{\vec{r}}_0|}$$

Donde el vector $\mathbf{r}_0$ tildado representa el punto P_0 tildado. Sobre la superficie S_2 se satisfacen las siguientes relaciones

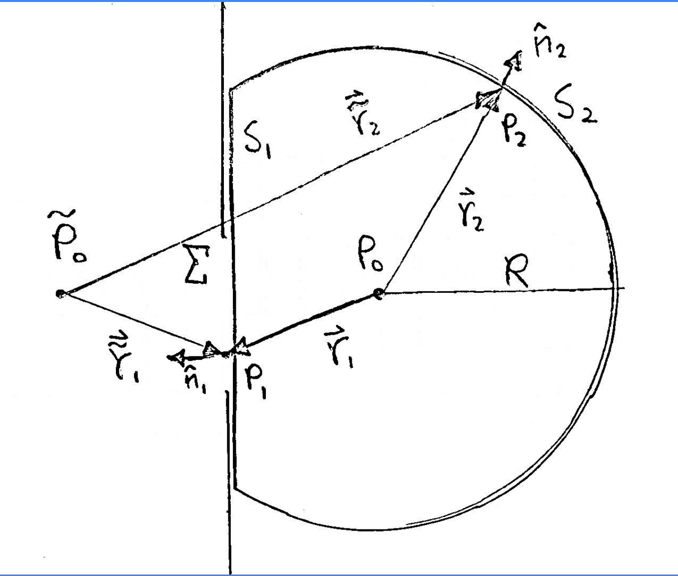
$$\tilde{r}_2 \geq r_2 = R \qquad |G(\vec{r}_2)| = \left| \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ik\tilde{r}_2}}{\tilde{r}_2} \right| \leq \frac{2}{R}$$

$$\frac{\partial G(\vec{r}_2)}{\partial n_2} = \left(ik - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R} - \left(ik - \frac{1}{\tilde{r}_2}\right)\frac{e^{ik\tilde{r}_2}}{\tilde{r}_2}\cos(\hat{n}_2, \tilde{\vec{r}}_2)$$

$$\frac{\partial G(\vec{r}_2)}{\partial n_2} \approx ik\left[\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ik\tilde{r}_2}}{\tilde{r}_2}\cos(\hat{n}, \tilde{\vec{r}}_2)\right] \qquad \left|\frac{\partial G(\vec{r}_2)}{\partial n_2}\right| \leq \frac{2k}{R}$$

Donde asumimos que R>>1/k.

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld



De manera en que

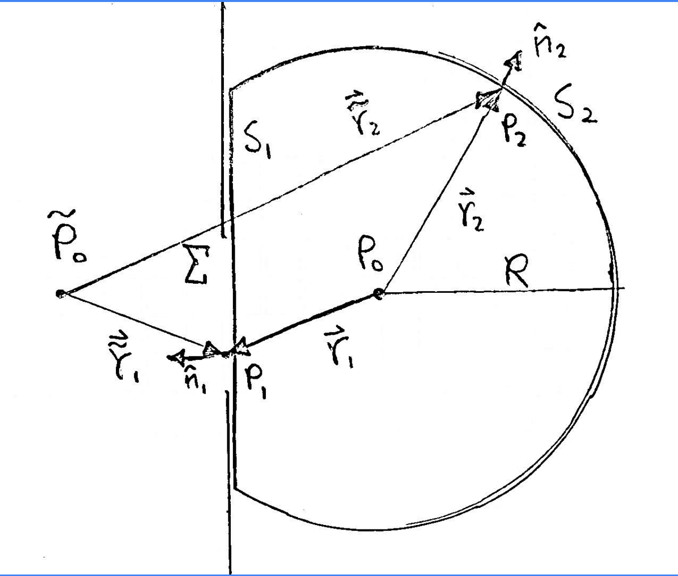
$$\left| \iint_{S_2} dS \left(U \frac{\partial G}{\partial n_2} - G \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) \right| \leq 2 \int_{\Omega_2} d\Omega R \left(k|U| + \left| \frac{\partial U}{\partial n_2} \right| \right)$$

Todas las desigualdades se obtuvieron utilizando la desigualdad triangular. Si hacemos $R \to \infty$ y exigimos

$$\lim_{R\to\infty} R \left(k|U| + \left| \frac{\partial U}{\partial n_2} \right| \right) = 0$$

Entonces la integral sobre S_2 desaparece. Esta condición es similar a la condición de radiación de Sommerfeld, que exige que no deben haber fuentes irradiando desde el infinito hacia el campo.

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld



Por otro lado, sobre la superficie S_1 se cumple que

$$\tilde{r}_1 = r_1 \qquad \cos(\hat{n}_1, \tilde{\vec{r}}_1) = -\cos(\hat{n}_1, \vec{r}_1)$$

$$G(\vec{r}_1) = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ik\tilde{r}_1}}{\tilde{r}_1} = 0$$

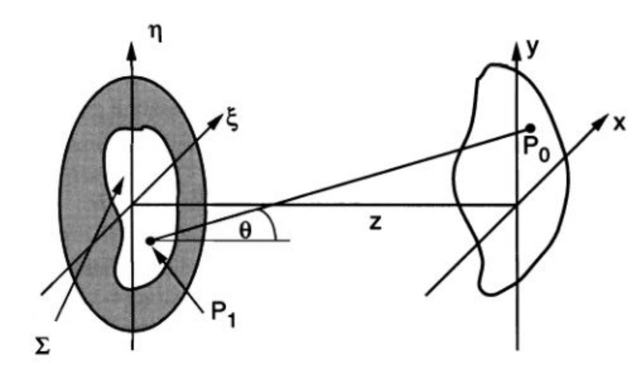
$$\frac{\partial G(\vec{r}_1)}{\partial n_1} = \left(ik - \frac{1}{r_1}\right)\frac{e^{ikr_1}}{r_1}\cos(\hat{n}_1, \vec{r}_1) - \left(ik - \frac{1}{\tilde{r}_1}\right)\frac{e^{ik\tilde{r}_1}}{\tilde{r}_1}\cos(\hat{n}_1, \tilde{\vec{r}}_1)$$

$$\frac{\partial G(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \approx i2k\frac{e^{ikr_1}}{r_1}\cos(\hat{n}, \vec{r}_1)$$

Donde asumimos que $r_1 >> 1/k$. Si en S_1 hay una pantalla con una apertura Σ, y decimos que U es cero en la sombra de la pantalla entonces

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma} dS\, U(\vec{r}_1)\frac{e^{ikr_1}}{r_1}\cos(\hat{n}, \vec{r}_1)$$

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld



La ecuación obtenida para el campo en el punto P_0 se conoce como la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld y es una representación matemática del principio de Huygens-Fresnel: La amplitud del campo en el punto P_0 es la suma de los campos generados por infinitas fuentes de ondas esféricas en Σ con amplitudes $A(\mathbf{r}_1)\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_1)/\lambda$ y desfases $[\phi(\mathbf{r}_1) - \pi/2]$. Siguiendo la geometría de la figura y escribiendo $\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_1)=z/r_1$ entonces podemos reescribir el principio de Huygens-Fresnel como

$$U_2(x,y) = \frac{z}{i\lambda}\iint_{\Sigma} d\xi\, d\eta U_1(\xi,\eta)\frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}$$

Siendo $U_2(x,y)=U(x,y,z)=U(\mathbf{r}_0)$ y $U_1(\xi,\eta)=U(\xi,\eta,0)=U(\mathbf{r}_1)$.

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld

Si pensamos en z como un parámetro entonces esta integral puede escribirse como una convolución

$$U_2 = U_1 \otimes h_z$$

Donde

$$h_z(x,y) = \frac{z}{i\lambda} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

Esta función respuesta tiene la forma de una onda esférica.

Formulación de Rayleigh-Sommerfeld

La difracción o propagación en el espacio libre es entonces un sistema lineal y espacialmente invariante. La función de transferencia asociada a este sistema es

$$H_z(f_x, f_y) = \exp\left[ikz\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]$$

Recordemos que para llegar hasta este punto exigimos:

- No hay acoplamiento en las ecuaciones de movimiento
- $z >> 1/k = \lambda/2\pi$
- Condición de radiación de Sommerfeld

Aproximación de Fresnel

Haciendo una aproximación en la fase de la función respuesta de la forma

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2} \approx z\left[1+\frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{z^2}\right]$$

Y en el denominador de la forma

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2 \approx z^2$$

La función respuesta toma la forma de una onda parabólica

$$h_z(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right]$$

Aproximación de Fresnel

La función de transferencia asociada es

$$H_z(f_x, f_y) = e^{ikz} \exp\left[i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)\right]$$

Esta es la aproximación de Fresnel. La forma de la función respuesta permite escribir la convolución como una transformada de Fourier

$$U_2(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \mathcal{F}\left\{U_1(\xi, \eta) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right]\right\}\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)$$

Utilizando x/λz y y/λz como las frecuencias de la transformada.

Aproximación de Fresnel

La aproximación de Fresnel es válida siempre y cuando

$$|z|^3 >> \frac{\pi}{4\lambda}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2_{max}$$

Donde el suscrito max indica el máximo valor de interés dado cierto problema y cierta geometría del plano de observación. Para la óptica geométrica, la aproximación paraxial es válida sólo para rayos que hagan ángulos pequeños (aproximadamente menores a 0.1 radianes) con respecto al eje óptico.

Aproximación de Fresnel

Otra forma menos restrictiva es verificar que el número de Fresnel

$$N_F = \frac{w^2}{\lambda z}$$

sea aproximadamente menor que 1, donde w es la mitad de la longitud característica de la apertura (si la apertura es cuadrada, w es la mitad de la longitud del cuadrado; si la apertura es circular, w es el radio del círculo).

Referencias:

- Joseph Goodman. Introduction To Fourier Optics.
- Voelz David. Computational Fourier Optics: A MATLAB Tutorial.

Muchas gracias por su atención!