Funciones muestreadas y la transformada de Fourier discreta

Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
20 de marzo de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

- Introducción
- Muestreo de una función
- Soporte y ancho de banda efectivo
- Transformada de Fourier discreta
- Coordenadas, índices, centrado y desplazamiento “Shift”
- Extensión periódica
- Convolución periódica
- Ejercicios

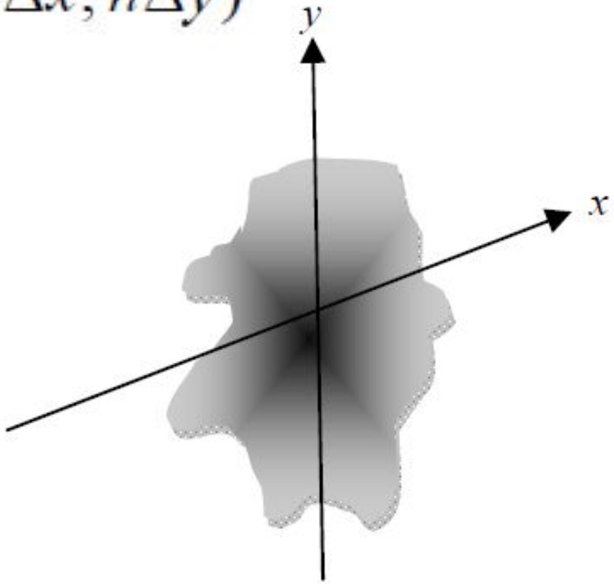
Introducción

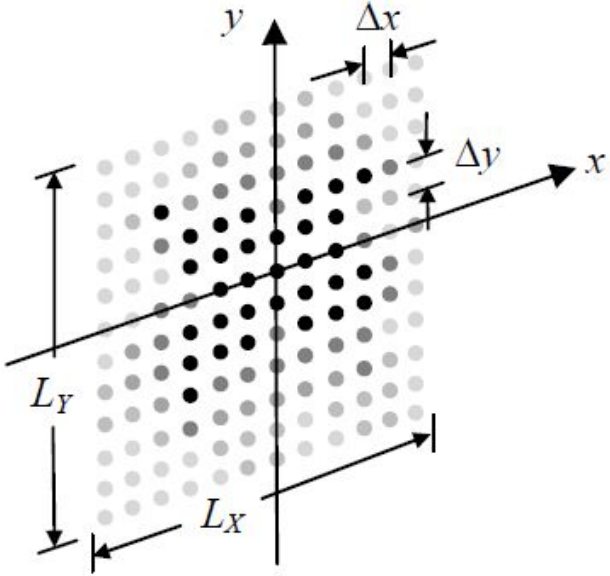
- La representación discreta de una función y la respectiva aplicación de los métodos de Fourier se puede sintetizar en un acto: balanceo entre problemas computacionales aceptables y los recursos de cómputo disponibles.
- Objetivo: estudiar las características e implicaciones de la discretización de la transformada de Fourier

Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Consideremos una función g(x,y) continua que se desea muestrear de manera uniforme con intervalos de muestreo Δx y Δy, tal que

$$g(x,y) \rightarrow g(m\Delta x, n\Delta y)$$





Muestreo de una función y el teorema de muestreo

m y n son números enteros y $1/\Delta x$ y $1/\Delta y$, representan las ratas de muestreo. Si la región es rectangular, entonces se tienen MXN muestras, y se puede definir la variación de la siguiente forma:

$$m = -\frac{M}{2}, \ldots, \frac{M}{2} - 1 \,, \quad n = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

Donde N y M son pares (por razones de eficiencia en el algoritmo de la fft). Se si desea modelar un área física específica, se debe cumplir que

$$L_X = M\Delta x \,, \qquad L_Y = N\Delta y$$

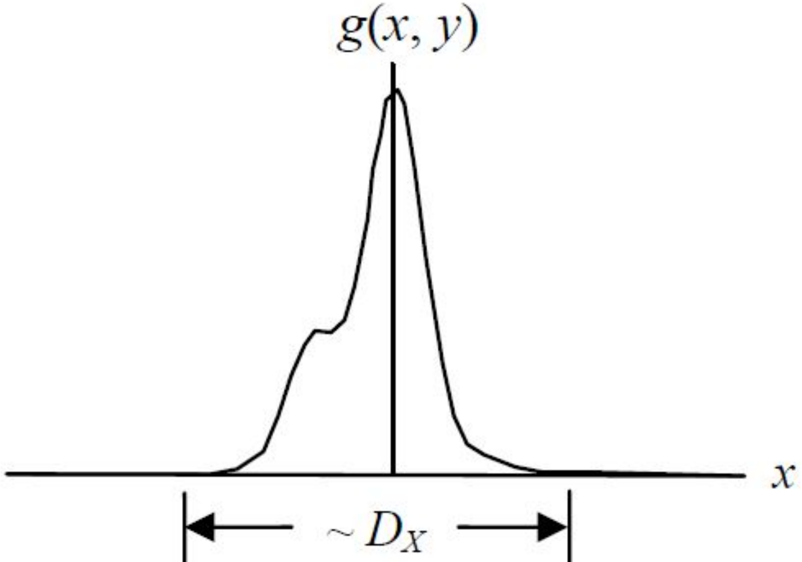
Donde L representa la longitud de lado en la dirección x y y.

Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Definiciones

Soporte de la función g(x,y): representa la región del espacio donde se tiene la mayor parte de los valores significativos de la función. Esta región se puede ver como una región rectangular de lado Dx y Dy, y siempre debe cumplir:

$$D_X < L_X \,, \qquad D_Y < L_Y \,.$$

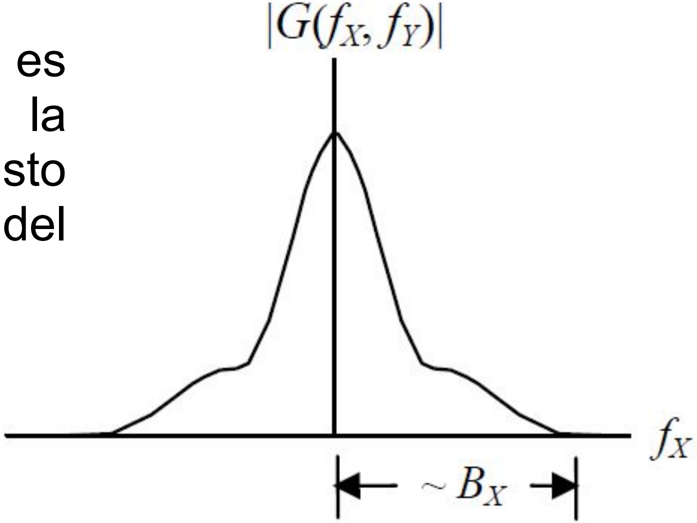


Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Ancho de banda: representa la región del espacio de frecuencias donde se tiene la mayor parte de los valores significativos de la función.

¡Recordemos! Para una función de banda limitada es posible recuperar exactamente la información de la función continua a partir de la función muestreada. Esto solo es posible si se cumplen las condiciones del teorema de Whittaker-Shannon-Nyquist:

$$\Delta x < \frac{1}{2B_X}, \quad \Delta y < \frac{1}{2B_Y}$$

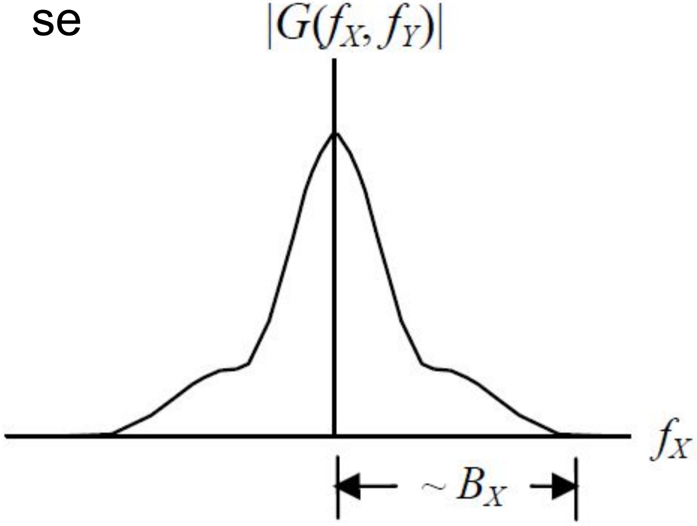


donde Bx y By es el ancho de banda en la dirección x y y.

Muestreo de una función y el teorema de muestreo

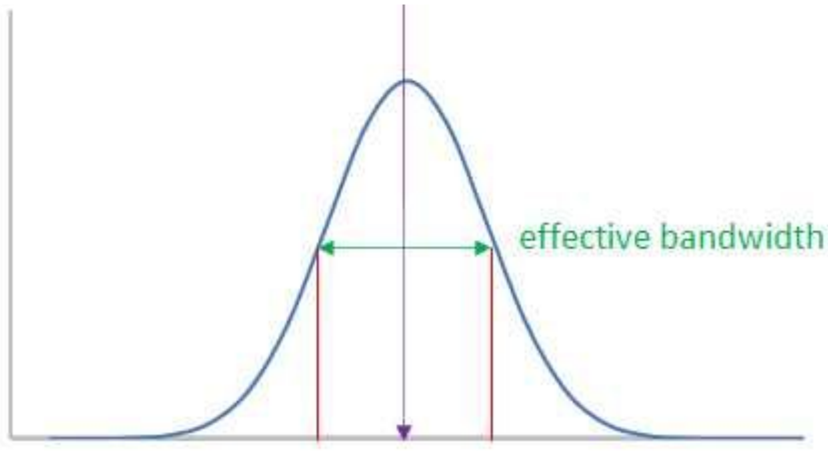
Frecuencia de Nyquist: representa la mitad de la rata de muestreo, y corresponde a la frecuencia máxima que se puede representar correctamente una vez se establece el intervalo de muestreo Δx y Δy

$$f_{NX} = \frac{1}{2\Delta x}, \quad f_{NY} = \frac{1}{2\Delta y}$$



Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Ancho de banda efectivo: en general una función de soporte finito cumple que no es de banda limitada, es decir, tiene un ancho de banda infinito. Para definir un ancho de banda efectivo se debe seleccionar el porcentaje total de energía que se quiere “procesar” y limitar la región en el espacio de las frecuencias que cubra dicha cantidad de energía.



Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Cálculo del Ancho de banda efectivo: se puede obtener un intervalo de muestreo que permita una representación buena de la función analítica, aún cuando se viola la hipótesis del teorema de muestreo.

$$f(x,y)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2w}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{2w}\right) \Rightarrow F(f_X,f_Y)=4w^2\,\mathrm{sinc}(2wf_X)\,\mathrm{sinc}(2wf_Y)$$

$$P_T=\int_{-\infty}^{\infty}\int\left(4w^2\right)^2\mathrm{sinc}^2(2wf_X)\,\mathrm{sinc}^2(2wf_Y)\,df_X df_Y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathrm{rect}^2\left(\frac{x}{2w}\right)\mathrm{rect}^2\left(\frac{y}{2w}\right)dxdy=4w^2$$

Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Cálculo del Ancho de banda efectivo: convirtiendo a coordenadas polares, y asumiendo que el espectro se limita por una ventana circular de radio B que cubre en 98% de la energía

$$\frac{1}{P_T}\int_0^{2\pi}\int_0^{B}\left(4w^2\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left[2w(\rho\cos\theta)\right]\operatorname{sinc}^2\left[2w(\rho\sin\theta)\right]\rho\, d\rho\, d\theta = 0.98$$

$$\Downarrow$$

$$B \approx \frac{5}{w} \xrightarrow[\Delta x < \frac{1}{2B_X}]{} \Delta x \leq \frac{w}{10}$$

Muestreo de una función y el teorema de muestreo

Cálculo del Ancho de banda efectivo: convirtiendo a coordenadas polares, y asumiendo que el espectro se limita por una ventana circular de radio B que cubre en 98% de la energía

Function	Effective Bandwidth B
$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2w}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{2w}\right)$	$\frac{5}{w}$
$\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{w}\right)$	$\frac{5}{w}$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\right]$	$\frac{0.79}{w}$

Transformada de Fourier discreta

Así como se discretiza la función g(x,y) es importante discretizar (muestrear) la transformada de Fourier desde su definición, lo que permite una implementación computacional a través de algoritmo de transformada rápida de Fourier. Partamos de la definición análitica:

$$G(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int g(x,y)\exp\left[-j2\pi(f_X x + f_Y y)\right]dxdy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots dxdy \rightarrow \sum_{n=-N/2}^{N/2-1}\sum_{m=-M/2}^{M/2-1}\ldots\Delta x\Delta y \qquad g(m\Delta x, n\Delta y) \rightarrow \tilde{g}(m,n)$$

$$\exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)] \rightarrow \exp\left[-j2\pi\left(\frac{p}{M\Delta x}m\Delta x + \frac{q}{N\Delta y}n\Delta y\right)\right] = \exp\left[-j2\pi\left(\frac{pm}{M} + \frac{qn}{N}\right)\right]$$

Transformada de Fourier discreta

Definiendo

$$f_X \to \frac{p}{M\Delta x}, \quad \text{where} \quad p = -\frac{M}{2}, \ldots, \frac{M}{2} - 1;$$

$$f_Y \to \frac{q}{N\Delta y}, \quad \text{where} \quad q = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1;$$

Como p y q son enteros, se puede obtener los intervalos de muestreo en el espacio de frecuencias como

$$\Delta f_X = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{L_X}, \quad \text{and} \quad \Delta f_Y = \frac{1}{N\Delta y} = \frac{1}{L_Y}$$

Transformada de Fourier discreta

Reemplazando en la definición análitica de la TF:

$$\tilde{G}(p,q)=\sum_{m=-M/2}^{M/2-1}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1}\tilde{g}(m,n)\exp\left[-j2\pi\left(\frac{pm}{M}+\frac{qn}{N}\right)\right]$$

Que representa la transformada de Fourier discreta de la función muestreada g. La transformada inversa es

$$\tilde{g}(m,n)=\frac{1}{MN}\sum_{p=-N/2}^{M/2-1}\sum_{q=-M/2}^{N/2-1}\tilde{G}(p,q)\exp\left[j2\pi\left(\frac{pm}{M}+\frac{qn}{N}\right)\right]$$

Transformada de Fourier discreta

A tener en cuenta:

- Existe una diferencia entre la TF directa e inversa, dada por el factor 1/MN, es importante para asegurar el teorema integral de Fourier y para corregir unidades y balance de energía.
- La DFT se materializa en la FFT
- Uso de matrices cuadradas que sean una potencia de 2.

Condiciones para la correcta aplicación de la FFT:

- Función muestreada
- Función centrada
- Función desplazada

Coordenadas, índices, centrado y desplazamiento

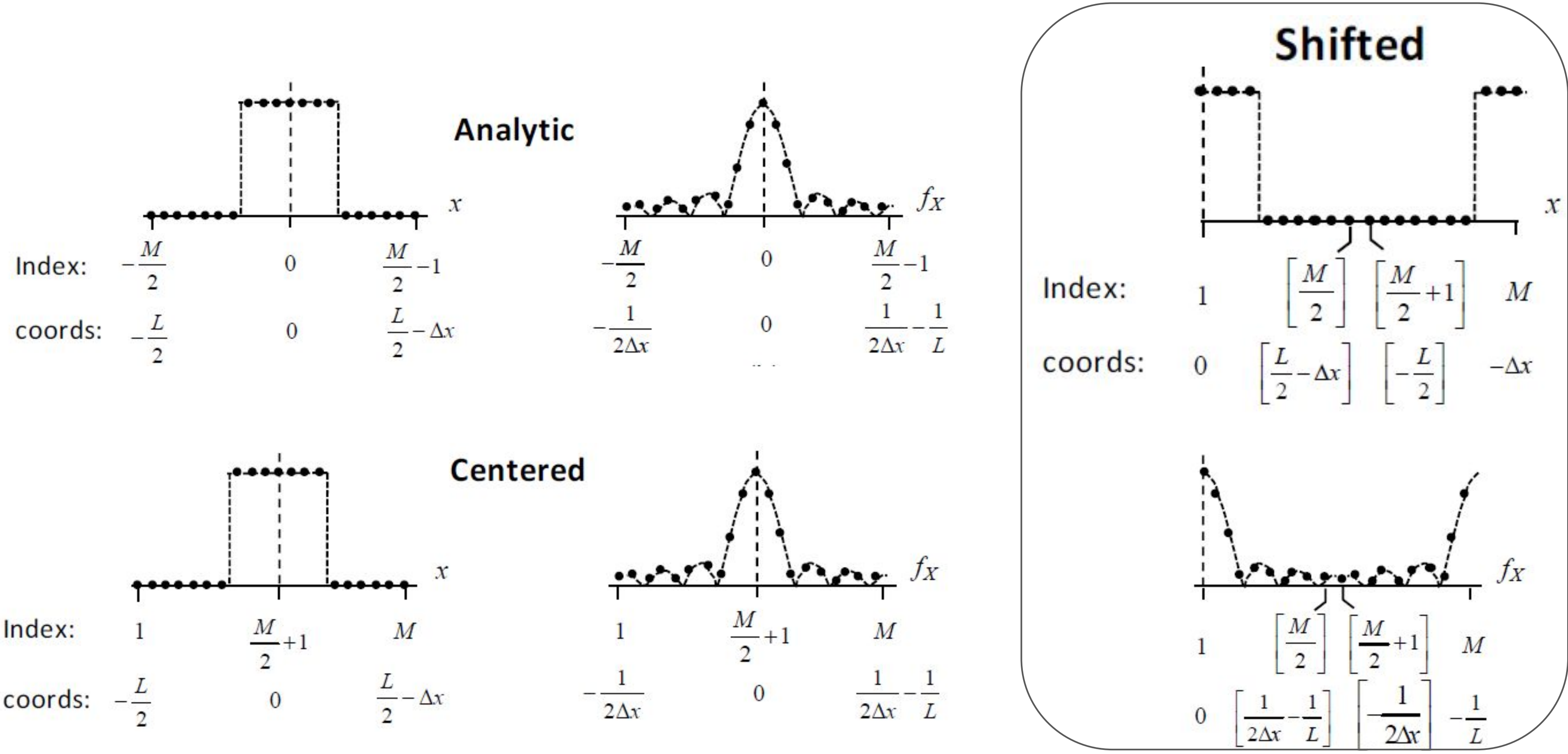
Consideremos muestreo uniforme y regiones cuadradas: L_x=L_y; N=M y Δx=Δy

- Sistema de coordenadas

$$x \rightarrow \left[-\frac{L}{2} \; : \; \Delta x \; : \; \frac{L}{2} - \Delta x \right] \qquad f_X \rightarrow \left[-\frac{1}{2\Delta x} \; : \; \frac{1}{L} \; : \; \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{L} \right]$$

- Índices: rótulo (m) a cada entrada del arreglo donde se almacena la información de la función muestreada. Matbalob (1,2,3,...,M); python: (0,1,2,...,M-1).
- Centrado: implica que la coordenada cero (x=0) coincida con la mitad del arreglo: m=M/2+1
- Shift: hacer que la entrada de la función en la coordenada x=0 coincida con el índice m=0 (ó 1)

Coordenadas, índices, centrado y desplazamiento



Extensión periódica

Aunque en general los teoremas de la TF análitica aplican al caso computacional, existen diferencias en algunos resultados entre ambos escenarios. El principal de ellos es la extensión periódica:

$$f(x) = \left[f(x) \cdot \mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right] \mathrm{rect}\left(\frac{x}{L} \right)$$

$$F(f_X) = \left[F(f_X) * \Delta x \, \mathrm{comb}(\Delta x f_X) \right] * L \, \mathrm{sinc}(L f_X)$$

Pero el algoritmo produce un resultado muestreado y periódico que se puede modelar como

$$F_P(f_X) = \left\{ \left[F(f_X) * \Delta x \, \mathrm{comb}(\Delta x f_X) \right] * L \, \mathrm{sinc}(L f_X) \right\} \cdot L \, \mathrm{comb}(L f_X)$$

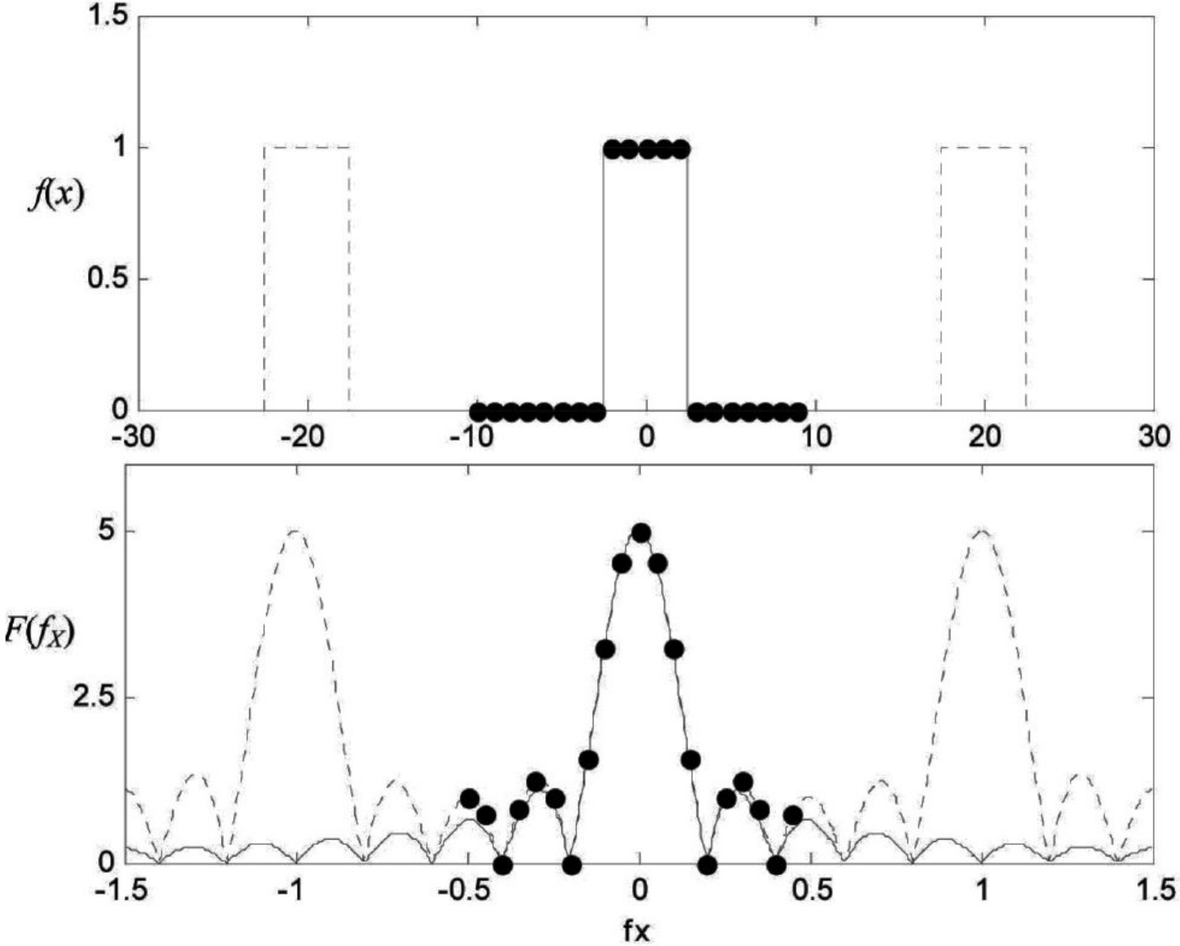
Extensión periódica

Tomando transformada inversa:

$$f_P(x) = \left\{ \left[f(x) \cdot \mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right] \mathrm{rect}\left(\frac{x}{L} \right) \right\} * \mathrm{comb}\left(\frac{x}{L} \right)$$

El espectro obtenido por la FFT es como si en lugar de comenzar con una función f, comenzaremos con una función periódica!!!

Extensión periódica



Convolución periódica

Recordando el teorema de la convolución y su uso para el cálculo de Convoluciones:

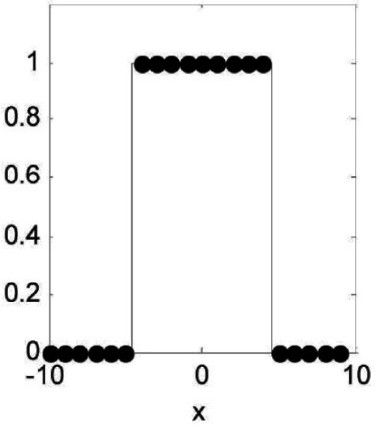
$$g_2 = g_1 \otimes h \qquad\qquad G_2(f_X, f_Y) = H(f_X, f_Y)\, G_1(f_X, f_Y)$$

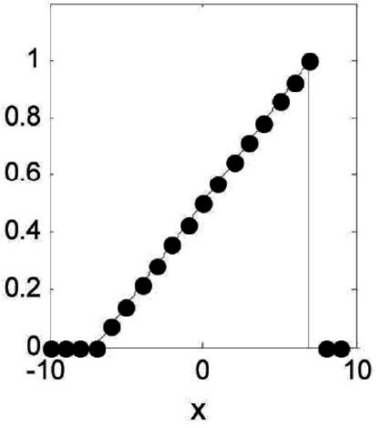
Con la transformada inversa en la ecuación de G_2 se obtiene el valor de g_2.

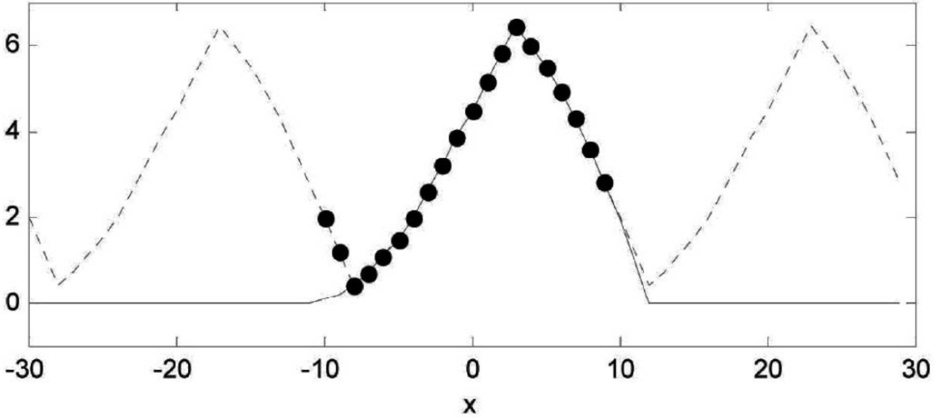
Si computacionalmente cada función es realmente una versión periódica de la misma, se tendrá una convolución de cada réplica de las funciones originales.

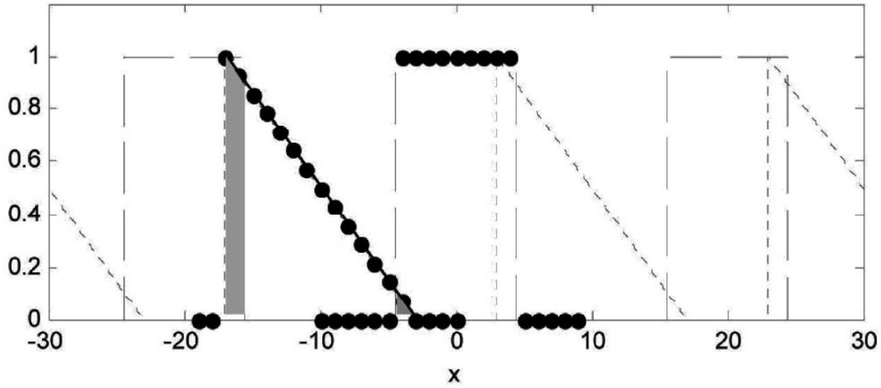
$$f(x) * h(x) \Longrightarrow f_P(x) * h_P(x)$$

Convolución periódica









Convolución periódica

¿Como solucionar el problema?

Asegurando que los soportes de cada función, sumados, no excedan la longitud de lado.

$$D_1 + D_2 < L$$

En las figuras anteriores $D_1 = 9$ and $D_2 = 15$, pero $L = 20$.