

Sistemas formadores de imagen

Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
19 de abril de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

- Introducción
- Respuesta al impulso de una lente positiva
- Modelo generalizado
- Aperturas y pupilas
- Pupilas simples
- Condiciones muestreo
- Objetos rugosos
- Formación de imagen bajo iluminación incoherente

Introducción

Aunque es posible obtener el comportamiento de un sistema óptico simulando paso por paso la propagación de la luz por el mismo, este es un proceso extremadamente ineficiente. En el caso de los sistemas ópticos lineales, existe una alternativa mucho más efectiva: Determinar la función respuesta al impulso del sistema. Una vez determinada, es posible obtener el resultado a la salida del sistema simplemente con una convolución entre la entrada y la función respuesta al impulso. Hoy veremos algunos ejemplos de cómo lograr esto.

La respuesta al impulso de una lente positiva.

Para hallar la respuesta al impulso, debemos propagar un impulso (delta de dirac) desde el plano de entrada (distancia z_1), hasta la lente (distancia focal f) y luego de la lente al plano de salida (distancia z_2). Al propagar una delta con coordenadas (ξ, η) hasta la lente obtenemos

$$U_l(x, y) = \frac{1}{j\lambda z_1} \exp\left\{j\frac{k}{2z_1}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\}.$$

El efecto de la lente sobre el campo incidente puede describirse como

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y) P(x, y) \exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right].$$

y luego este resultado es propagado de nuevo hasta el plano de salida.

La respuesta al impulso de una lente positiva.

Tal que

$$h(u, v; \xi, \eta) = \frac{1}{j\lambda z_2} \iint_{-\infty}^{\infty} U_i'(x, y) \exp \left\{ j \frac{k}{2z_2} [(u - x)^2 + (v - y)^2] \right\} dx dy$$

donde u, v son las coordenadas en el plano de salida. Así, la función respuesta al impulso de la lente es

$$\begin{aligned} h(u, v; \xi, \eta) &= \frac{1}{\lambda^2 z_1 z_2} \exp \left[j \frac{k}{2z_2} (u^2 + v^2) \right] \exp \left[j \frac{k}{2z_1} (\xi^2 + \eta^2) \right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{f} \right) (x^2 + y^2) \right] \\ &\times \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{\xi}{z_1} + \frac{u}{z_2} \right) x + \left(\frac{\eta}{z_1} + \frac{v}{z_2} \right) y \right] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

La respuesta al impulso de una lente positiva.

El argumento en la exponencial cuadrática es el responsable de “ensanchar” la respuesta al impulso, causando el borroneo propio de las imágenes desenfocadas. Este término se hace 0 si

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{f} = 0.$$

esta es la ecuación de la lente de la óptica geométrica. Esto corresponde a la formación de imagen de del plano z_1 en el plano z_2 por la lente f . Los términos cuadráticos fuera de la integral se pueden despreciar bajo dos condiciones:

1. El término dependiente de las coordenadas en el plano imagen u,v es despreciable si solo nos interesa la intensidad de la imagen.
2. El término dependiente de las coordenadas de entrada tiene efectos más complejos, pero se puede despreciar si el tamaño (soporte) del objeto en el plano de entrada es menos de $\frac{1}{4}$ de la pupila de la lente. (ver Goodman pp. 110-112)

La respuesta al impulso de una lente positiva.

Con las consideraciones anteriores, llegamos a que la respuesta al impulso de una lente es

$$h(u, v; \xi, \eta) \approx \frac{1}{\lambda^2 z_1 z_2} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \times \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{\xi}{z_1} + \frac{u}{z_2} \right) x + \left(\frac{\eta}{z_1} + \frac{v}{z_2} \right) y \right] \right\} dx dy.$$

con $P(x, y)$ la pupila de la lente. Si definimos la magnificación como

$$M = -\frac{z_2}{z_1},$$

donde el menos es porque estamos usando las distancias z_1 y z_2 como positivas, obtenemos

$$h(u, v; \xi, \eta) \approx \frac{1}{\lambda^2 z_1 z_2} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \times \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda z_2} [(u - M\xi)x + (v - M\eta)y] \right\} dx dy.$$

La respuesta al impulso de una lente positiva.

De este último resultado, si además hacemos el cambio de variable

$$\tilde{\xi} = M\xi \quad \tilde{\eta} = M\eta$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda z_2} \quad \tilde{y} = \frac{y}{\lambda z_2} \quad \tilde{h} = \frac{1}{|M|} h.$$

podemos escribir el objeto como

$$U_g(u, v) = \frac{1}{|M|} U_o\left(\frac{u}{M}, \frac{v}{M}\right)$$

La respuesta al impulso de una lente positiva.

Finalmente obtenemos que la función respuesta al impulso de la lente es dada por

$$\tilde{h}(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda z_2 \tilde{x}, \lambda z_2 \tilde{y}) \exp[-j2\pi(u\tilde{x} + v\tilde{y})] d\tilde{x} d\tilde{y}$$

y la imagen es dada por

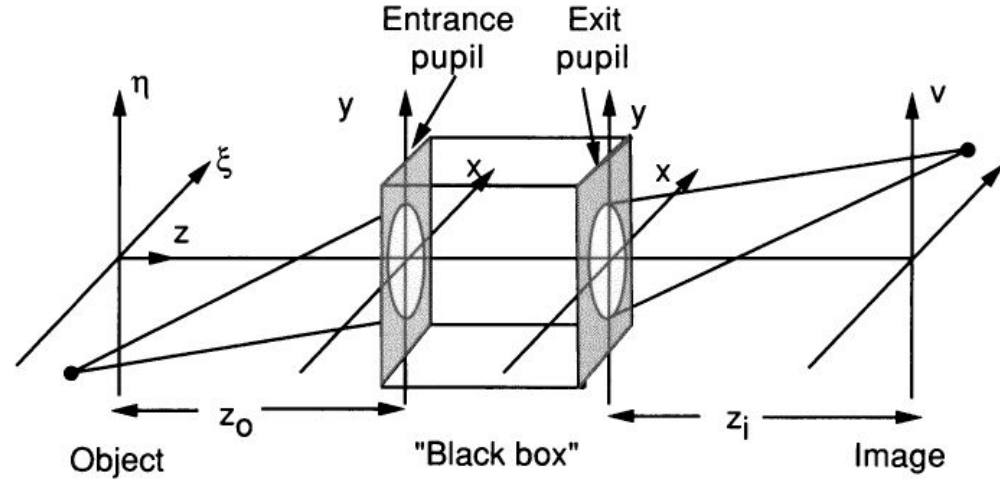
$$U_i(u, v) = \tilde{h}(u, v) \otimes U_g(u, v)$$

$$U_g(u, v) = \frac{1}{|M|} U_o\left(\frac{u}{M}, \frac{v}{M}\right)$$

Modelo generalizado

Un sistema óptico ideal es aquel en el cual si entra una onda esférica divergente en la pupila de entrada, en la pupila de salida se obtiene una onda esférica que converge a un punto del plano imagen. Un sistema limitado por difracción es aquel en el cual la onda esférica a la salida es solo perturbada por la forma de la pupila de salida.

En un sistema limitado por difracción, la función respuesta al impulso es la FT de la pupila de salida. A las desviaciones de la fase esférica en la salida de un sistema óptico se les llama aberraciones.

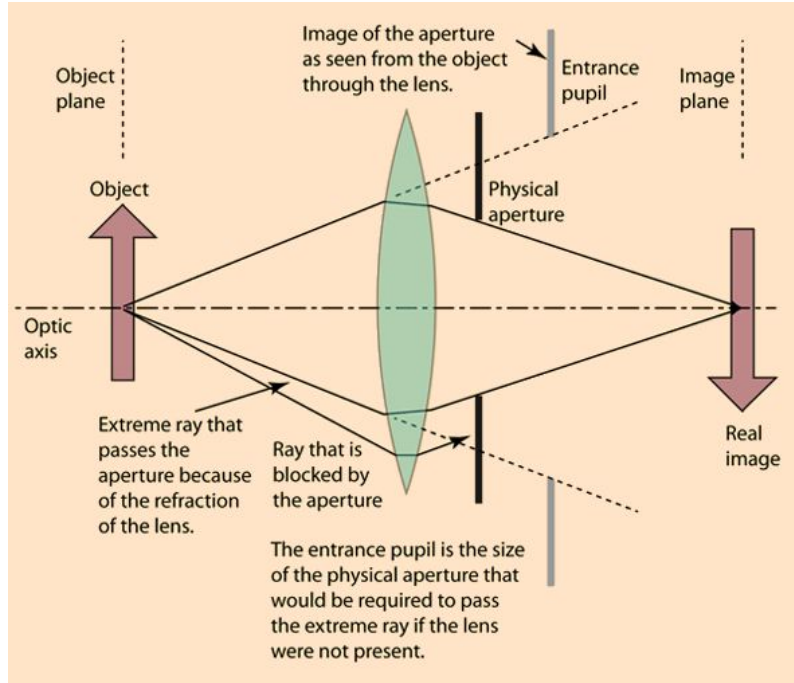


$$h(u, v) = \frac{A}{\lambda z_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda z_i} (ux + vy) \right\} dx dy.$$

$$U_g(u, v) = \frac{1}{|M_t|} U_o \left(\frac{u}{M_t}, \frac{v}{M_t} \right).$$

$$U_i(u, v) = h(u, v) \otimes U_g(u, v),$$

Aperturas y pupilas



En un sistema de formación de imagen, las pupilas no siempre corresponden a una apertura física.

-La pupila de entrada es la imagen vista desde el plano objeto de la menor apertura del sistema óptico formada por todos los elementos ópticos que preceden la apertura.

-La pupila de salida es la imagen de la menor apertura vista desde el plano imagen formada por todos los elementos que la preceden.

Pupilas simples

-Para una pupila cuadrada

$$P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{2w_{XP}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2w_{XP}}\right).$$

$$H(f_U, f_V) = \text{rect}\left(\frac{-\lambda z_{XP} f_U}{2w_{XP}}\right) \text{rect}\left(\frac{-\lambda z_{XP} f_V}{2w_{XP}}\right).$$

-Pupila circular

$$P(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{w_{XP}}\right),$$

$$H(f_U, f_V) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{f_U^2 + f_V^2}}{f_0}\right),$$

La función de transferencia es la pupila de salida, y determina hasta qué frecuencias del campo de entrada pueden ser reproducidas por el sistema óptico. En general, si se observa la irradiancia de la imagen, la frecuencia de corte estará dada por

$$2f_0 = \frac{2w_{XP}}{\lambda z_{XP}}.$$

$$2f_0 = \frac{1}{\lambda(f/\#)}.$$

$$f/\# = \frac{z_{XP}}{D_{XP}}.$$

Condiciones muestreo

Para simular un sistema limitado por difracción requerimos que $2f_0 \leq f_N$, donde f_N es la frecuencia de Nyquist del campo de entrada. Como esa frecuencia es $1/\Delta u$, con Δu el intervalo de muestreo

$$\Delta u \leq \frac{\lambda(f / \#)}{2}, \quad L = M\Delta u, \quad L \leq M \frac{\lambda(f / \#)}{2}.$$

Formación de imagen bajo iluminación incoherente

En la iluminación incoherente, el objeto se puede considerar como una colección de muchos puntos que irradian con fase aleatorias independientes entre sí y que cambian muy rápidamente. En este caso, el modelo de formación de imagen es

$$I_i(u, v) = |h(u, v)|^2 \otimes I_g(u, v),$$

Donde h es la función respuesta al impulso coherente. Así

- Iluminación coherente: formación de imagen lineal respecto al campo.
- Iluminación incoherente: formación de imagen lineal respecto a la irradiancia.

Formación de imagen bajo iluminación incoherente

La función $|h(u, v)|^2$ es llamada la función de dispersión de punto o point spread function (PSF). En frecuencias, un sistema bajo iluminación incoherente produce un campo de la forma

$$G_i(f_U, f_V) = \mathcal{H}(f_U, f_V) G_g(f_U, f_V),$$

Donde \mathcal{H} es la función de transferencia óptica (OTF por sus siglas en inglés).

$$\mathcal{H}(f_U, f_V) = \frac{\mathfrak{I}\{|h(u, v)|^2\}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(u, v)|^2 du dv}.$$

La OTF es la autocorrelación normalizada de la función de transferencia coherente

$$\mathcal{H}(f_U, f_V) = H(f_U, f_V) \star H(f_U, f_V) \big|_{norm}.$$

Pupilas simples: caso incoherente

-Pupila cuadrada: Aplicamos la transformada de Fourier de la función de transferencia, y luego su módulo cuadrado.

$$|\mathfrak{F}\{H(f_U, f_V)\}|^2 = \left(\frac{4w_{XP}^2}{\lambda^2 z_{XP}^2} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{2w_{XP}}{\lambda z_{XP}} u \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{2w_{XP}}{\lambda z_{XP}} v \right).$$

De aquí, haciendo aplicando el teorema de la autocorrelación con la transformada inversa tenemos

$$H(f_U, f_V) \star H(f_U, f_V) = \frac{4w_{XP}^2}{\lambda^2 z_{XP}^2} \Lambda \left(\frac{\lambda z_{XP}}{2w_{XP}} f_U \right) \Lambda \left(\frac{\lambda z_{XP}}{2w_{XP}} f_V \right).$$

Tras normalizar, tenemos que

$$\mathcal{H}(f_U, f_V) = \Lambda \left(\frac{\lambda z_{XP}}{2w_{XP}} f_U \right) \Lambda \left(\frac{\lambda z_{XP}}{2w_{XP}} f_V \right), \quad 2f_0 = \frac{2w_{XP}}{\lambda z_{XP}},$$

Pupilas simples: caso incoherente

-Pupila circular: Hallar analíticamente la OTF es considerablemente mas difícil.
(Ver goodman página 143).

$$\mathcal{H}(f_U, f_V) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right) - \left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right)^2} \right], & \rho \leq 2\rho_0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{f_U^2 + f_V^2}$$

$$2\rho_0 = \frac{2w_{XP}}{\lambda z_{XP}} = \frac{1}{\lambda f / \#}.$$