Condiciones de muestreo de los propagadores

Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
12 de abril de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

-Condiciones de muestreo en Fresnel

-Propagador respuesta al impulso

-Propagador función de transferencia

-Operaciones con función de transferencia

-Propagador de Rayleigh-Sommerfeld.

-Propagador de Espectro Angular.

Condiciones de muestreo en Fresnel

Recordemos la expresión de la transformada de Fresnel.

$$U_2(x,y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z}\left(x^2 + y^2\right)\right]$$
$$\times \iint \left\{ U_1(\xi,\eta) \exp\left[j \frac{k}{2z}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right]\right\} \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z}\left(x\xi + y\eta\right)\right] d\xi d\eta.$$

Aquí (x, y) y (η, ξ) son las coordenadas en el plano de observación y plano fuente, respectivamente.

Condiciones de muestreo en Fresnel

Si hacemos el siguiente cambio de variable

$$f_\xi \to \frac{x}{\lambda z}, \qquad f_\eta \to \frac{y}{\lambda z}.$$

Podemos escribir el campo en el plano de observación como

$$U_2(x,y) = F^{-1}\{F\{U_1(x,y)\}F\{h(x,y)\}\},$$

$$h(x,y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z}\exp\left(\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)\right),$$

PROP. RESPUESTA AL IMPULSO

$$U_2(x,y) = F^{-1}\{F\{U_1(x,y)\}H(f_X,f_Y)\}.$$

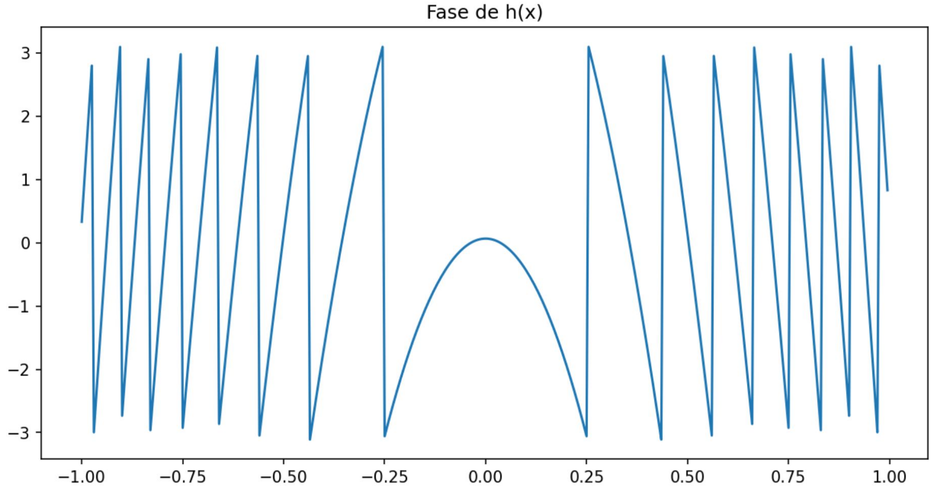
$$H(f_X,f_Y) = e^{jkz}\exp(-j\pi\lambda z(f_X^2+f_Y^2)).$$

PROP. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Si suponemos que U1 fue bien muestreado, la condición para la buena operación de un propagador será que h y H esten bien muestreadas.

Condiciones de muestreo en Fresnel

Para ambas formas de realizar la propagación, hay que muestrear una función de fase cuadrática. Este tipo de funciones que dependen del cuadrado de las coordenadas son llamadas funciones “Chirp”.



La condición de muestreo para la fase de una función que no es de banda limitada es

$$\Delta x \left| \frac{\partial \phi_h}{\partial x} \right|_{\max} \leq \pi,$$

Esta expresión implica que el máximo cambio de fase entre dos muestras consecutivas deber ser menor a pi. Derivando h y H, obtenemos que

Propagador respuesta al impulso

Si aplicamos la condición de muestreo de fase a tenemos que

$$h(x,y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp\left(\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)\right), \qquad \phi_h(x,y) = \frac{k}{2z}(x^2+y^2).$$

$$\left|\frac{\partial \phi_h(x,y)}{\partial x}\right| = \frac{kx}{z} \qquad \left|\frac{\partial \phi_h(x,y)}{\partial y}\right| = \frac{ky}{z}$$

$$\Delta x \leq \frac{\lambda z}{2|x_{\max}|}. \qquad \Delta y \leq \frac{\lambda z}{2|y_{\max}|}$$

Si el tamaño de la espacio es Lx Ly, entonces quedamos con

$$\Delta x \leq \frac{\lambda z}{L_x} \qquad \Delta y \leq \frac{\lambda z}{L_y}$$

Propagador respuesta al impulso

Dado un tamaño del espacio, un intervalo de muestreo, y una longitud de onda, es común definir la condición de muestreo en términos de la distancia de propagación, tal que

$$z \geq \frac{\Delta x L_x}{\lambda} \qquad z \geq \frac{\Delta y L_y}{\lambda}$$

A la distancia de propagación que cumple la igualdad se le llama distancia crítica. Violar la condicion de muestreo o distancia critica lleva a la aparicion de aliasing o replicas periodicas en la solucion.

Propagador función de transferencia

Ahora veamos el caso de la propagacion con funcion de transferencia, dado por

$$U_2(x,y) = F^{-1}\{F\{U_1(x,y)\}H(f_X,f_Y)\}.$$

$$H(f_X,f_Y) = e^{jkz}\exp(-j\pi\lambda z(f_X^2+f_Y^2)). \qquad \phi_H(x,y)=\pi\lambda z({f_x}^2+{f_y}^2)$$

Aplicamos la misma condición de muestreo, ahora en las coordenadas de frecuencias.

$$\Delta f_x\left|\frac{\partial\phi_H(f_x,f_y)}{\partial f_x}\right|\leq\pi \quad \Delta f_y\left|\frac{\partial\phi_H(f_x,f_y)}{\partial f_y}\right|\leq\pi$$

Propagador función de transferencia

Tras realizar las derivadas llegamos a que

$$\Delta f_x \leq \frac{1}{\lambda z 2 \left| f_{x\max} \right|} \quad \Delta f_y \leq \frac{1}{\lambda z 2 \left| f_{y\max} \right|}$$

Aquí, recordemos que $\Delta f_X = 1/L$, y $|f_{X\max}| = 1/2\Delta x$. De aquí llegamos a

$$\Delta x \geq \frac{\lambda z}{L_x} \quad \Delta y \geq \frac{\lambda z}{L_y}$$

Así, en términos de la distancia tenemos que

$$z \leq \frac{\Delta x L_x}{\lambda} \quad z \leq \frac{\Delta y L_y}{\lambda}$$

Conclusiones condiciones propagación Fresnel

-El campo fuente debe cumplir el criterio de Nyquist, es decir, el muestreo y el ancho de banda deben cumplir

$$B_1 \leq \frac{1}{2\Delta x}$$

-Para distancias mayores a la crítica, la función respuesta cumple las condiciones de muestreo, y la función de transferencia no. Para distancias mayores ocurre lo contrario.

-Debido a que limitamos el tamaño de la funcion chirp, en el propagador de funcion respuesta al impulso el tamaño del espacio de observación se ve limitado, y tendrá dimensiones $D_1 + \lambda z/\Delta x$ donde D1 es el soporte de la fuente.

-Esta misma limitación en el tamaño de la función chirp causa que las altas frecuencias de la fuente sean recortadas al usar el método de función de transferencia. Así,además de la condición de muestreo, el ancho de banda de la fuente será limitado por

$$B_1 \leq \frac{L}{2\lambda z}$$

1. D. G. Voelz and M. C. Roggemann, "Digital simulation of scalar optical diffraction: Revisiting chirp function sampling criteria and consequences," Appl. Opt. 48, 6132–6142 (2009).

Operaciones con las funciones de transferencia

Sea dos funciones de transferencia de Fresnel con distancias diferentes.

$$H_1(f_x, f_y) = \mathrm{e}^{jkz_1} \exp(-j\pi\lambda z_1(f_x{}^2 + f_y{}^2))$$

$$H_2(f_x, f_y) = \mathrm{e}^{jkz_2} \exp(-j\pi\lambda z_2(f_x{}^2 + f_y{}^2))$$

Se puede al multiplicar ambas funciones obtenemos

$$H_T(f_x, f_y) = \mathrm{e}^{jk(z_1+z_2)} \exp(-j\pi\lambda(z_1 + z_2)(f_x{}^2 + f_y{}^2))$$

Luego multiplicar dos funciones de transferencia nos da una función de transferencia para la suma de las distancias.

Se puede usar distancias negativas. Esto equivale a propagaciones en reversa. Las condiciones de muestreo aplican con el valor absoluto de la distancia.

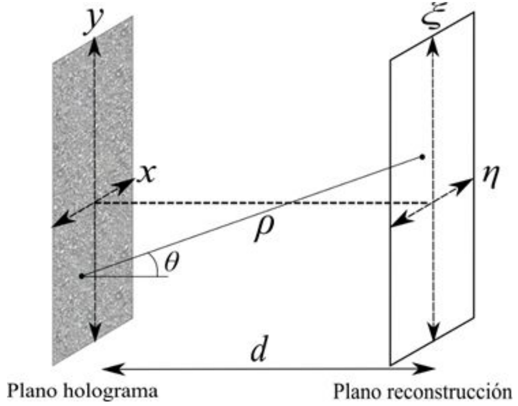
La función de transferencia final debe cumplir las condiciones de muestreo. Es decir, no importa si H1 y H2 cumplen las condiciones, si HT no las cumple el propagador presentará aliasing.

Propagadores exactos

Tanto la propagación usando la transformada de Fresnel en sus dos formas, como la propagación de fraunhofer, incorporan la aproximación paraxial, es decir, requieren que la distancia de propagación relativamente grande comparado con las dimensiones de la apertura. Además, suponen la propagación entre dos planos. Para ello, se puede construir un propagador usando la solución exacta de Rayleigh-Sommerfeld. Recordemos que tiene la forma

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\theta \, ds,$$

Propagador Exacto



Con los planos coordenados de la figura, podemos escribir la integral de Rayleigh-Sommerfeld así

$$U_2(\eta,\xi) = \frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_1(x,y)\frac{\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\rho\right)}{\rho}(\cos\theta)\,dxdy$$

Donde

$$\rho = \sqrt{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2 + d^2}$$

Luego podemos escribir la integral de Rayleigh-Sommerfeld como una convolución, tal que

$$U_2(x,y) = F^{-1}\{F\{U_1(x,y)\}F\{h(x,y)\}\},$$

$$h(x,y) = \frac{z}{i\lambda}\frac{\exp(jk\sqrt{d^2+x^2+y^2})}{z^2+x^2+y^2}$$

Propagador espectro angular

También se puede construir un propagador exacto por medio de la función de transferencia de Rayleigh-Sommerfeld. Este es conocido como propagador de espectro angular. Para realizarlo se debe tomar

$$U_2(x,y) = F^{-1}\{F\{U_1(x,y)\}H(f_X,f_Y)\}.$$

$$H(f_x,f_y) = \begin{cases} \exp\left(j2\pi \frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right) & si \quad \sqrt{f_x^{\,2}+f_y^{\,2}} < 1/\lambda \\ 0 \quad si \quad \sqrt{f_x^{\,2}+f_y^{\,2}} > 1/\lambda \end{cases}$$

El motivo de la condición sobre fx y fy es que si no se cumple, la función de transferencia tiene un valor real decreciente.

¡Aunque estos propagadores no son aproximados, debido a la discretización también están sujetos a condiciones de muestreo!

Equivalencia propagadores

Distancia	Exacto	Aproximación paraxial
“Corta”	Espectro Angular	Función de transferencia Fresnel
“Larga”	Rayleigh-Sommerfeld	Respuesta impulso Fresnel

En orden de complejidad computacional.

Fraunhofer < Fresnel FT < Fresnel IR < Espectro Angular < Rayleigh-Sommerfeld.

Los términos con raíz cuadrada de las soluciones exactas son muy costosos de evaluar.

Conclusiones

-Los propagadores tienen complejas condiciones de muestreo.

-Es posible operar sobre directamente sobre las funciones de transferencia para cambiar distancias de propagación sin generar nuevas funciones de transferencia.

-Aun si se usan propagadores sin aproximaciones, las condiciones el muestreo y la discretización hacen que la solución no sea igual a la analitica.

-Se puede verificar el principio de Babinet por medios computacionales.

-El propagador de Fresnel en sus dos variantes es suficiente para un gran rango de operaciones siempre que no incluyan distancias muy cortas o muy largas o planos oblicuos.