

Problema 4.1:

Considera una onda plana de longitud de onda λ que incide en dos piezas de vidrio de diferente espesor y índice de refracción como se muestra en la figura. Encuentra una expresión para la diferencia entre los trayectos ópticos(longitud) para los dos partes del haz entre los planos a y b.

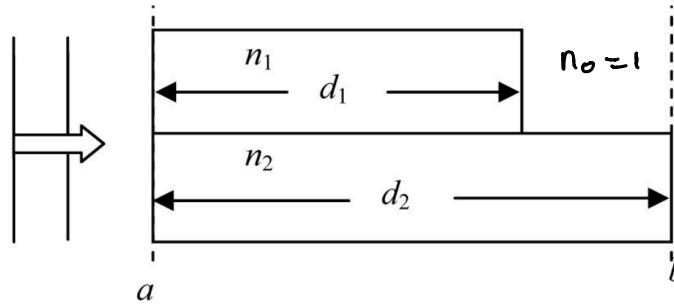


Figure 4.4 Plane wave propagation through two differing pieces of glass.

Para la luz que se propaga una distancia d en un medio de índice de refracción n , se define la longitud óptica (OPL) como:

$$\text{OPL} = nd$$

El OPL multiplicado por k es lo que nos dará la distancia z de propagación.

$$\Delta \text{OPL} = (\Delta \phi)_{\text{rayo 1}} - (\Delta \phi)_{\text{rayo 2}} \rightarrow \text{Desfase por diferencia de caminos.}$$

$$\Delta \text{OPL} = [n_1 d_1 + n_0(d_2 - d_1)] - n_2 d_2$$

Alcanzando $n_0 = 1$, ya que el medio es el vacío

$$\begin{aligned}\Delta \text{OPL} &= n_1 d_1 + d_2 - d_1 - n_2 d_2 \\ &= (n_1 - 1) d_1 - (n_2 - 1) d_2\end{aligned}$$

Multiplicando $\Delta \text{OPL} \cdot k$ nos da el cambio de fase

$$k \cdot \Delta \text{OPL} = (n_1 - 1) k d_1 - (n_2 - 1) k d_2$$

Problema 4.2:

Para la iluminación de una onda plana ($\lambda = 0.5 \text{ um}$) de una abertura de diámetro 1 mm determinar el rango de distancias de propagación que son adecuadas para los regímenes de difracción Rayleigh-Sommerfeld, Fresnel y Fraunhofer.

Tenemos que

$$\lambda = 0.5 \text{ um}$$

$$D = 1 \text{ mm} \rightarrow w = 0.5 \text{ mm}$$

→ Rango de propagación Rayleigh-Sommerfeld.

Para que esta propagación sea válida, se debe cumplir la distancia de propagación entre la fuente y el punto de observación, debe ser mucho mayor a la longitud de onda

$$z \gg \lambda \rightarrow \text{Definición del Voigt.}$$

Luego,

$$z \gg 0.5 \text{ um}$$

→ Rango de propagación de Fresnel.

Para este caso utilizamos la definición del número de Fresnel, $N_F = \frac{w^2}{\lambda z} \leq 1 \rightarrow$ si se cumple esto podemos decir que estamos en el campo de Fresnel

En este caso utilizamos la definición del Goodman

por tanto $w = 0.5 \text{ mm}$ (Voigt $w = 1 \text{ mm}$), así que vamos desdor la definición de la función $\operatorname{erfc}(z)$ en cada libro.

de aquí

$$z \geq \frac{w^2}{\lambda}$$

→ Podemos hacer, suponiendo que z es positivo, lo cual tiene sentido

$$z \geq \frac{(0.5 \text{ mm})^2}{0.5 \text{ um}} \approx 0.5 \text{ m}$$

$$z \geq 0.5 \text{ m}$$

→ Rango de propagación de Fraunhofer.

También tenemos el criterio del número de Fresnel, pero para distancias de propagación mucho más largas.

$$\frac{w^2}{\lambda z} \ll 1$$

$$z \gg \frac{w^2}{\lambda} = \frac{(0.5 \text{ mm})^2}{0.5 \mu\text{m}}$$

$$z > 50.5 \text{ m}$$

De aquí podemos utilizar la expresión utilizada por el voz para el desarrollo computacional

$$z > 10 \frac{w^2}{\lambda} = 10 \frac{(0.5 \text{ mm})^2}{0.5 \mu\text{m}}$$

$$z > 5 \text{ m}$$

Problema 4.3:

Compruebe que la función transferencia de Fresnel es la transformada de Fourier de la función respuesta al impulso de Fresnel.

Debemos probar que si:

$$h_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{i\kappa}{2z}(x^2 + y^2)\right] \rightarrow \text{Función respuesta al impulso.}$$

Toca probar que la función de transferencia

$$H_z(f_x, f_y) = e^{ikz} \exp[i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]$$

es el resultado de una T.F. de la función respuesta al impulso. Es decir, mostrar que

$$H_z = \mathcal{F}\{h_z\}$$

Vacuums

$$\mathcal{F}\{h_z\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{i\kappa}{2z}(x^2 + y^2)\right] \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy$$

$$= \frac{e^{ikz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{j\kappa}{2z}(x^2 + y^2)\right] \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy$$

$$\text{Maciendo } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$= \exp[jkz] \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\pi\left(\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda z}}x\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda z}}y\right)^2\right)\right] \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy$$

Utilizando la siguiente transformada (Tabla 2.1 Godmann)

$$\begin{aligned} F\{ \exp[j\pi(a^2x^2 + b^2y^2)] \} &= \frac{j}{|ab|} \exp\left[-j\pi\left(\frac{f_x^2}{a^2} + \frac{f_y^2}{b^2}\right)\right] \\ &= \frac{\exp[jkz]}{\lambda z} \cdot \boxed{\frac{1}{\lambda z}} \exp\left[-j\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)\right] \\ &= \frac{\exp[jkz]}{j\lambda z} (\lambda z) \exp\left[-j\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)\right] \end{aligned}$$

Finalmente encontramos

$$F\{h_z\} = \exp[jkz] \exp[-j\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]$$

Comparando con la función H_z dada en el problema, hay una diferencia de un $(-)$ en la fase.

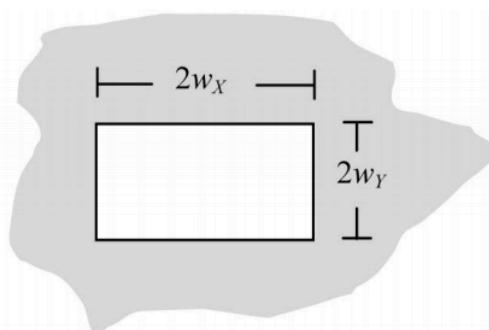
Pero si comparamos la expresión (4.21) del libro de Goodman, la demostración sería correcta. Por tanto

$$H_z = F\{h_z\}$$

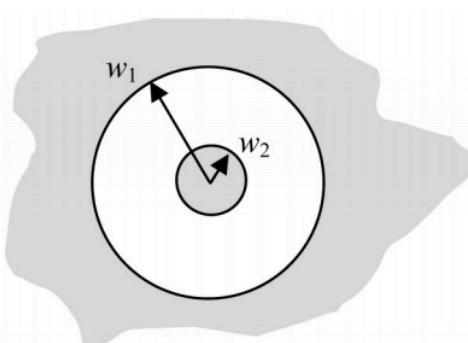


Problema 4.4:

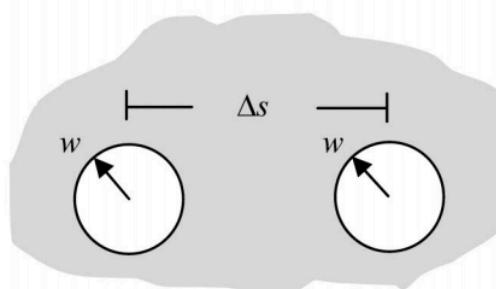
Determine expresiones analíticas para el campo de Fraunhofer y los patrones de irradiancia para las siguientes aberturas (mostradas en la **fig 4.5**) iluminadas con una onda plana. Grafique las imágenes de los patrones de irradiación de Fraunhofer y los perfiles para las aberturas en el computador. Elegir la adecuada distancia de propagación z y el tamaño de la longitud L en el plano de observación.



(a)



(b)



(c)

→ Solución a)

$z = \infty$

Tenemos que el campo de Fraunhofer es:

$$U_2(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right\} \iint U_1(\xi, \eta) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta$$

Además teniendo en cuenta el mapeamiento

$$f_x = \frac{x}{\lambda z} \quad y \quad f_y = \frac{y}{\lambda z}$$

Como trabajamos una abertura rectangular, nuestra función será de la forma

$$\operatorname{rect}\left[\frac{x}{2w_x}\right] \operatorname{rect}\left[\frac{y}{2w_y}\right]$$

Recordaremos de las tablas de transformadas:

$$\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(ax)\operatorname{rect}(by)\} = \frac{1}{|ab|} \operatorname{sinc}\left[\frac{fx}{a}\right] \operatorname{sinc}\left[\frac{fy}{b}\right]$$

Teniendo en cuenta que $a = \frac{1}{2w_x}$, $b = \frac{1}{2w_y}$, $f_x = \frac{x}{\lambda z}$, $f_y = \frac{y}{\lambda z}$

obtenemos:

$$E \left\{ \operatorname{rect} \left[\frac{x}{2w_x} \right] \operatorname{rect} \left[\frac{y}{2w_y} \right] \right\} = 4w_x w_y \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_x}{\lambda z} x \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_y}{\lambda z} y \right]$$

finalmente tenemos la expresión para el campo de

$$U_2(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] 4w_x w_y \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_x}{\lambda z} x \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_y}{\lambda z} y \right]$$



Expresión para el campo en el plano de observación.

Ahora hallamos la intensidad (o irradiancia) de este campo, ésta se calcula como el módulo cuadrado del campo en el plano de observación.

$$I(x, y) = |U_2(x, y)|^2 = U_2 U_2^*$$

Nos queda:

$$I(x, y) = \left\{ \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] 4w_x w_y \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_x}{\lambda z} x \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_y}{\lambda z} y \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{\exp(-jkz)}{-jkz} \exp \left[-j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] 4w_x w_y \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_x}{\lambda z} x \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{2w_y}{\lambda z} y \right] \right\}$$

Entonces ..

$$I(x, y) = \left(\frac{4w_x w_y}{\lambda z} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{2w_x}{\lambda z} x \right] \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{2w_y}{\lambda z} y \right]$$

En este caso nos dan las modulaciones

$$\lambda = 0.633 \text{ nm}$$

$$W_x = 0.1 \text{ mm} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Medio ancho, por lo que vamos con la figura.} \\ W_y = 0.05 \text{ mm} \end{array} \right.$$

Como estamos en el dominio de Fraunhofer para llegar al adecuado z, tomamos la fórmula

$$z > \frac{10 w^2}{\lambda}$$

$$z > 0.15 \text{ m}$$

→ Tomaremos un z mayor
en este orden.

y para L, utilizamos la expresión

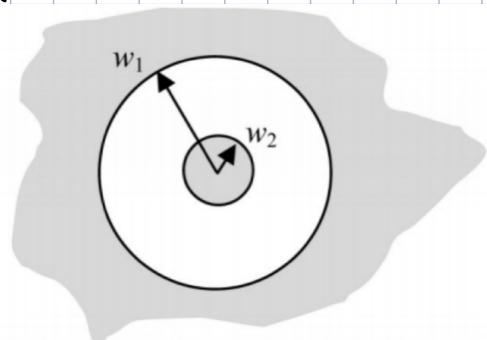
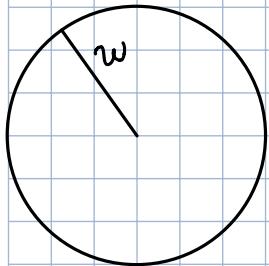
$$L = 5 \left(1.22 \frac{\lambda z}{w} \right)$$

Dado que elegí $z = 1 \text{ m}$, entonces, obtengo

$$L = 0.07 \text{ m}$$

→ Solución 6)

Primero demostramos la fórmula para una
abertura circular



(b)

Tomamos una abertura circular

$$\text{circ} \left[\frac{q}{w} \right]$$

Donde w es el radio de la apertura y
q es una coord. de radio en el plano de la apertura.

Dado que tenemos simetría circular, entonces la función es $\psi(r, \theta) = \psi(r)$.

En coord. cartesianas se tiene (para el campo de Fraunhofer)

$$J_2(x, y) = \frac{c \exp(jkx)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right] F \{ J_1(\xi, \eta)\}$$

Dado que $r^2 = x^2 + y^2$, quedamos la simetría circular, esto nos queda

$$J_2(r) = \frac{\exp(jkr)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z} r^2\right] F \{ \psi(r_0)\}$$

La transformada de Fourier para una función con simetría circular es

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-2\pi j(f_x x + f_y y)] dx dy = T$$

Haciendo los cambios de variable

$$x = r \cos \theta_0, \quad y = r \sin \theta_0$$

$$f_x = r \cos \theta, \quad f_y = r \sin \theta$$

Nos queda:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r_0) \exp\left[-2\pi j r r_0 (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta)\right] dr d\theta = F(r, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r_0) \exp\left[-2\pi j r r_0 \cos(\theta_0 - \theta)\right] dr_0 d\theta \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de funciones de Bessel

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ia \cos(\theta - \phi)} d\theta$$

Multiplicando por $i = \frac{2\pi}{2\pi}$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} f(r_0) J_0(2\pi r_0) dr_0$$

Dado que la onda incidente es plana y suponiendo que incide sobre una abertura circular de radio w , tomamos la función $\text{circ}\left(\frac{r}{w}\right)$ en $z=0$. Por definición de la circ aplicamos la relación

$$\frac{R}{a} J_0(ar) = \int_0^R J_0(ar) r dr$$

y tomando $F\{ \text{circ}\left(\frac{r_0}{w}\right) \} = w J_0(2\pi wr)$. Luego para el campo de Fresnel far tomamos.

$$U_2(x, y) = \frac{e^{ikz}}{iz} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] F\left\{ \text{circ}\left(\frac{r_0}{w}\right) \right\}$$

$$= \frac{e^{ikz}}{iz} w \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \frac{J_0\left(\frac{2\pi w r}{\lambda z}\right)}{\frac{r}{\lambda z}}$$

$$= w e^{ikz} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \frac{J_0\left(\frac{2\pi w r}{\lambda z}\right)}{r}$$

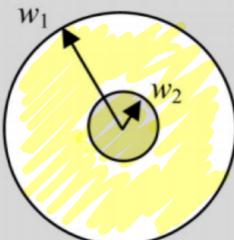
la cual finalmente escribimos como (clase de Alexandra)

$$U_2(x, y) = w \frac{e^{ikz}}{j} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \frac{J_0\left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

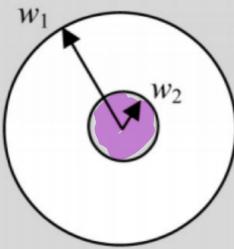
Por tanto la distribución de intensidad

$$I(x, y) = w^2 \frac{\left\{ J_0\left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \right\}^2}{x^2 + y^2}$$

Dado que tenemos una superposición de dos círculos, ascribimos al campo de Fraunhofer como:

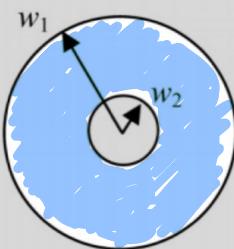


(b)



(b)

lo que está en blanco.



(b)

Encontramos

- : círculo exterior

$$\mathcal{J}(x,y) = \frac{w_1}{j} e^{ikz} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2z}\right] \frac{\frac{J_1\left(\frac{2\pi w_1 \sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- : Círculo interior

$$\mathcal{J}(x,y) = \frac{w_2}{j} e^{ikz} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2z}\right] \frac{\frac{J_1\left(\frac{2\pi w_2 \sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

El resultado de una diferencia entre estos dos círculos me da el resultado, que sirve

- : Campo de Fraunhofer para la abertura dada

$$\mathcal{J}(x,y) = [\mathcal{J}(x,y)]_{w_1} - [\mathcal{J}(x,y)]_{w_2}$$

$$\mathcal{J}(x,y) = \frac{w_1}{j} e^{ikz} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2z}\right] \frac{\frac{J_1\left(\frac{2\pi w_1 \sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$- \frac{w_2}{j} e^{ikz} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2z}\right] \frac{\frac{J_1\left(\frac{2\pi w_2 \sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ocurriendo obtenemos:

$$J(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j} \left[\exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \right] w_1 J_1\left(\frac{2\pi w_1}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right) - w_2 J_1\left(\frac{2\pi w_2}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y la distribución de intensidad sería:

$$I(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left[w_1 J_1\left(\frac{2\pi w_1}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right) - w_2 J_1\left(\frac{2\pi w_2}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \right]^2$$

hallamos los valores z y L adecuados.

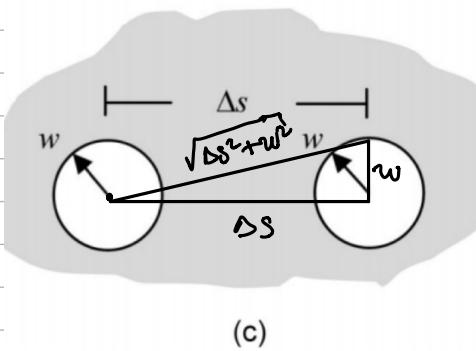
$$z > \frac{10w^2}{\lambda} \rightarrow \text{utilizamos el mayor } w$$

$$z > \frac{10(1 \text{ mm})^2}{0.633 \mu\text{m}} = 15.8 \text{ m}$$

$$\text{y por tanto } L = 5 \left(1.22 \frac{\lambda z}{w} \right)$$

$$L = 0.06 \text{ m}$$

→ Solución c)



$$w = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y sabemos que para un solo circulo tenemos:

$$J_1(x, y) = w \frac{e^{jkz}}{j} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \frac{J_1\left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ahora desarrollaremos la siguiente convolución para el campo de antena

$$\mathbf{U}_1 = \text{circ} \left(\frac{r}{w} \right) \otimes \left(\delta(x - \frac{\Delta S}{2}) + \delta(x + \frac{\Delta S}{2}) \right)$$

Con esto estaría describiendo los dos círculos que se encuentran en el plano de contrata

$$\mathbf{U}_1 = \text{circ} \left(\frac{r}{w} \right) \otimes \delta(x - \frac{\Delta S}{2}) + \text{circ} \left(\frac{r}{w} \right) \otimes \delta(x + \frac{\Delta S}{2})$$

Debemos aplicar la TF a este campo \mathbf{U}_1

$$\mathbf{U}_2 = F \left\{ \text{circ} \left(\frac{r}{w} \right) \otimes \delta(x - \frac{\Delta S}{2}) \right\} + F \left\{ \text{circ} \left(\frac{r}{w} \right) \otimes \delta(x + \frac{\Delta S}{2}) \right\}$$

$$= F \left\{ \text{circ} \left(\frac{r}{w} \right) \left\{ F \left\{ \delta(x - \frac{\Delta S}{2}) \right\} + F \left\{ \delta(x + \frac{\Delta S}{2}) \right\} \right\} \right\}$$

$$= w \frac{e^{j k z}}{j} \exp \left[\frac{j k (x^2 + y^2)}{2z} \right] \frac{\mathcal{F}_1 \left(\frac{2\pi r w}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[F \left\{ \delta \left(x - \frac{\Delta S}{2} \right) \right\} + F \left\{ \delta \left(x + \frac{\Delta S}{2} \right) \right\} \right]$$

Recordando que: (Recorrido del shift)

$$F \left\{ g(x-a) \right\} = G(f_x) \exp[-j 2\pi f_x a]$$

Aplicando esto sobre la delta:

$$F \left\{ \delta \left(x - \frac{\Delta S}{2} \right) \right\} = F \left\{ \delta(x) \right\} \exp \left[-j 2\pi f_x \left(\frac{\Delta S}{2} \right) \right]$$

Además recordando que: $F \left\{ \delta(x) \right\} = 1$ y $f_x = \frac{x}{\lambda z}$

$$F \left\{ \delta \left(x - \frac{\Delta S}{2} \right) \right\} = \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda z} x \Delta S \right]$$

Luego:

$$F \left\{ \delta \left(x - \frac{\Delta S}{2} \right) \right\} + F \left\{ \delta \left(x + \frac{\Delta S}{2} \right) \right\} = \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda z} x \Delta S \right] + \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} x \Delta S \right]$$

$$= \cos \left(\frac{\pi x \Delta S}{\lambda z} \right) - j \sin \left(\frac{\pi x \Delta S}{\lambda z} \right) + \cos \left(\frac{\pi x \Delta S}{\lambda z} \right) + j \sin \left(\frac{\pi x \Delta S}{\lambda z} \right)$$

$$= 2 \cos \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right)$$

finalmente obtenemos:

$$U_2(x, y) = 2w \frac{e^{jkz}}{j} \exp \left[jk \left(\frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right] \frac{J_1 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right)$$

Por tanto, la intensidad es al módulo cuadrado de este campo

$$I(x, y) = \frac{4w^2}{x^2 + y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \cos^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right)$$

$$\left(\frac{2}{\lambda z} \right)^2 \left[w^2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} r \right)}{\frac{w}{\lambda z} r} \right]^2 \cos^2 \left(\pi \frac{\Delta s}{\lambda z} x \right)$$

Ejercicio 4.5:

Suponga que una onda plana incide en la abertura de la fig 4.5c) se atenúa en diferentes cantidades al pasar por cada orificio. El campo que sale de un agujero tiene una magnitud A_1 , y el que sale del otro agujero tiene una magnitud A_2 . Encuentre la expresión analítica de la irradiancia de Fraunhofer para esta apertura. Grafique y tome como valores $A_1 = 1$ y $A_2 = 0.4$.

Podemos partir de la expresión que tenemos ahora, después de haber desarrollado la convolución

$$= W \frac{e^{jkz}}{j} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)\right] \frac{\bar{S}_1\left(\frac{2\pi w}{\lambda z}\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[F\left\{ \delta\left(x-\frac{\Delta S}{2}\right) \right\} + F\left\{ \delta\left(x+\frac{\Delta S}{2}\right) \right\} \right]$$

Sólomente que en este caso introducimos un término A_1 y A_2 en cada uno de los respectivos sumandos.

$$= W \frac{e^{jkz}}{j} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)\right] \frac{\bar{S}_1\left(\frac{2\pi w}{\lambda z}\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[A_1 F\left\{ \delta\left(x-\frac{\Delta S}{2}\right) \right\} + A_2 F\left\{ \delta\left(x+\frac{\Delta S}{2}\right) \right\} \right]$$

Realizamos los mismos sumandos de ahora.

$$A_1 F\left\{ \delta\left(x-\frac{\Delta S}{2}\right) \right\} + A_2 F\left\{ \delta\left(x+\frac{\Delta S}{2}\right) \right\} = A_1 \exp\left[-j\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right] + A_2 \exp\left[j\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right]$$

$$= A_1 \cos\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right) - j A_1 \sin\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right) + A_2 \cos\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right) + j A_2 \sin\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right)$$

$$= (A_1 + A_2) \cos\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right) + j(A_2 - A_1) \sin\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right)$$

el campo \bar{U}_2 nos queda:

$$\bar{U}_2(x,y) = W \frac{e^{jkz}}{j} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)\right] \frac{\bar{S}_1\left(\frac{2\pi w}{\lambda z}\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot$$

$$\left\{ (A_1 + A_2) \cos\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right) + j(A_2 - A_1) \sin\left(\pi \frac{x\Delta S}{\lambda z}\right) \right\}$$

Ahora hallamos la irradiancia definida como $I = U_2 \bar{U}_2^*$

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \frac{w^2}{x^2+y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right) \left[(A_1+A_2) \cos \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) + j(A_2-A_1) \sin \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right] \\
&\cdot \left[(A_1+A_2) \cos \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) - j(A_2-A_1) \sin \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right] \\
&= \frac{w^2}{x^2+y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right) \\
&\left[(A_1+A_2)^2 \cos^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) + j(A_1+A_2)(A_2-A_1) \sin \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \cos \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right. \\
&\left. - j(A_1+A_2)(A_2-A_1) \sin \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \cos \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) + (A_2-A_1)^2 \sin^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right] \\
&= \frac{w^2}{x^2+y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right) \left\{ (A_1^2+A_2^2) \cos^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) + (A_2^2+A_1^2) \sin^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right. \\
&\left. + 2A_1 A_2 \cos^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) - 2A_1 A_2 \sin^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right\} \\
&= (A_1^2+A_2^2) \frac{w^2}{x^2+y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right) \\
&\left\{ 1 + \frac{2A_1 A_2}{A_1^2+A_2^2} \left[\cos^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) - \sin^2 \left(\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Usando las fórmulas doble, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= (A_1^2+A_2^2) \frac{w^2}{x^2+y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right) \\
&\left\{ 1 + \frac{2A_1 A_2}{A_1^2+A_2^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{(A_1^2+A_2^2) w^2}{x^2+y^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right) \left\{ 1 + \frac{A_1 A_2}{A_1^2+A_2^2} \cos \left(2\pi \frac{x \Delta s}{\lambda z} \right) \right\}$$