Ejercicio 2.1:

Para un intervalo de muestra Δx = 10 um y una longitud de lado L = 5 mm. ¿Cuál es el número de muestra **M**?¿Cuál es la frecuencia de Nyquist?¿Cuál es el intervalo de frecuencia de la muestra? ¿Cuál es el rango de coordenadas en el dominio espacial?¿Cuál es el rango de coordenadas en el dominio frecuencial?.

Datos para el problema:

$$\Delta x = 10\ \mu m = 10 \times 10^{-3}\ mm \qquad L = 5\ mm$$

$$\Delta x = 0.01\ mm$$

- Calculamos el número de muestra M.

Suponiendo que nuestra área de muestreo será un rectángulo podemos hacer

$$L = M\Delta x \rightarrow M = \frac{L}{\Delta x}$$

$$M = \frac{5\ mm}{0.01\ mm}$$

$$\boxed{M = 500}$$

- Ahora calculamos la frecuencia de Nyquist, la cual es la máxima frecuencia que se puede representar en el espacio de frecuencias.

$$f_{Nx} = \frac{1}{2\Delta x} = \frac{1}{2(0.01)} \rightarrow \boxed{f_{Nx} = 50\ mm^{-1}}$$

- Veamos el intervalo de frecuencia de la muestra

En este caso

$$\Delta f_x = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{L} \rightarrow \boxed{\Delta f_x = 0.2\ mm^{-1}}$$

- Veamos los rangos en los que se encuentran los valores tanto en el dominio espacial y en el frecuencial.

Rango en el dominio espacial

$$x \rightarrow \left[-\frac{L}{2} : \Delta x : \frac{L}{2} - \Delta x \right]$$

$$\rightarrow \boxed{\left[-2.5 \text{ mm} : 0.01 \text{ mm} : 2.49 \text{ mm} \right]}$$

Rango en el dominio frecuencial

$$f_x \rightarrow \left[-\frac{1}{2\Delta x} : \frac{1}{L} : \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{L} \right]$$

$$\rightarrow \boxed{\left[-50 \text{ mm}^{-1} : 0.2 \text{ mm}^{-1} : 49.8 \text{ mm}^{-1} \right]}$$

Ejercicio 2.2:
Considere lo siguiente:

a) $g(x,y) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{w} \right)$, $w = 1$ mm

b) $g(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2} \right)$, $w = 1$ mm

Para cada función determine lo siguiente. **1)** el ancho de banda efectivo. **2)** El máximo intervalo de muestreo Δx necesario para satisface el teorema del muestreo dado por el ancho de banda efectivo. **3)** Asuma 256 muestras(dimensiones lineales) hallar la longitud de lado máxima que se puede modelar.

- a) Calculamos el ancho de banda efectivo

Para funciones circ se tiene que el ancho de banda es:

$$B \approx \frac{5}{w}$$

Por tanto $\boxed{B \approx 5 \text{ mm}^{-1}}$

• a) Ahora calculamos el Δx necesario para satisfacer el teorema del muestreo, teniendo en cuenta el ancho de banda efectivo.

En este caso se tiene $\Delta x = \frac{w}{10}$

Luego

$$\boxed{\Delta x = 0.5 \ mm^{-1}}$$

• a) Si $M = 256$ muestras, hallamos la longitud máxima que se puede modelar

Se tiene $L_x = M \Delta x$

$L_x = (256)(0.5)$

$\boxed{L_x = 128 \ mm^{-1}}$ → Máxima longitud que se puede modelar.

Ahora realicemos el desarrollo para la función b).

$$g(x,y) = \exp\left(- \frac{x^2+y^2}{w^2}\right) \quad , w = 1 \ mm$$

Por definición tenemos que

$$f(x,y) = \exp\left(-\pi \frac{x^2+y^2}{w^2}\right) \longrightarrow B = \frac{0.79}{w}$$

La función f podemos operarla de la siguiente manera:

$$= \exp\left(- \frac{x^2+y^2}{\left(\frac{w}{\sqrt{\pi}}\right)^2}\right)$$

Aplicando esto sobre la función g y el valor dado inicial obtenemos $1 \ mm = \frac{w}{\sqrt{\pi}} \longrightarrow \boxed{w = \sqrt{\pi} \ mm}$

• Calculamos el ancho de banda efectivo

Para esta función en particular tenemos que

$$B = \frac{0.79}{w}$$

Dado que $w = \sqrt{\pi}$ mm se obtiene

$$\boxed{B = \frac{0.79}{\sqrt{\pi}} \text{ mm}}$$

- Veamos el máximo intervalo de muestreo Δx, el cual podamos calcular como

$$\Delta x = \frac{1}{2Bx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{0.79} \text{ mm}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\sqrt{\pi}}{1.58} \text{ mm}}$$

- Si $M = 256$ muestras, hallamos la longitud máxima que se puede modelar

$$L_x = M \Delta x$$

Reemplazando $M = 256$ y $\Delta x = \frac{\sqrt{\pi}}{1.88}$ mm, obtenemos:

$$L_x = (256)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{1.58} \text{ mm}\right)$$

$$\boxed{L_x = 287.2 \text{ mm}}$$

Ejercicio 2.3:

Cuál es el **soporte** de la siguiente función a lo largo de una dimenisón si se define donde la función cae al 1% de su pico.

$$g(x,y) = \exp\left[-\pi\left(\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\right]$$

Como solamente nos están pidiendo el soporte a lo largo de una dimensión podemos tomar $g(x, y=0) = g(x)$

$$g(x) = \exp\left(-\frac{\pi x^2}{w^2}\right)$$

Gráfica ilustrativa del problema.

Por definición, el valor donde la función toma el máximo es en $x=0$ (se puede ver desde la gráfica o también desde la expresión)

Luego, debemos calcular los valores de x donde esa función vale el 1% del pico de la función.

$$0.01 = \exp\left(-\pi\frac{\Delta^2}{w^2}\right)$$ → expresión para encontrar valores de x donde la función cae 1% de su pico.

• : la función vale 1%

• : Valor a encontrar en el cuál la función vale 1%

$$-\pi \frac{b^2}{w^2} = \ln(0.01)$$

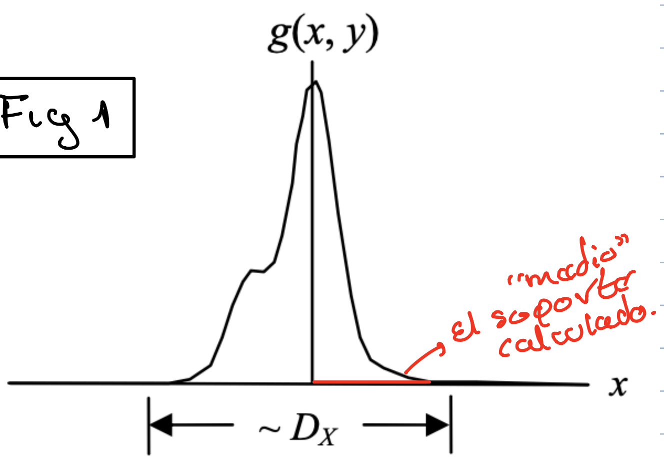
$$b^2 = -w^2 (-4.6)$$

$$b^2 = \frac{4.6 w^2}{\pi}$$

$$\boxed{b = 1.21 w}$$ → Medio soporte de la función.

De la definición, vemos que:

Fig 1



Por tanto el soporte será

$$\boxed{D_x = 2b = 2.42 w}$$

Ejercicio 2.4:
Cuál es el ancho de banda a lo largo de un eje para los siguientes casos:

a) $\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{w}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{w}\right)$

b) $\operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{w}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{y}{w}\right)$

→ sol a)

Como nos están pidiendo el ancho de banda solo en un eje es suficiente tomar la función en una sola variable (esto viene desde razones de la separación de variables)

Sea
$$f(x) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{w}\right)$$

Hallamos la transformada de Fourier de esta función. De la tabla 1.3 tenemos que

$$G(f_x) = \mathcal{F}\{f(x)\} = |w|\operatorname{rect}(wf_x)$$

De la definición de la función
$$\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1/2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

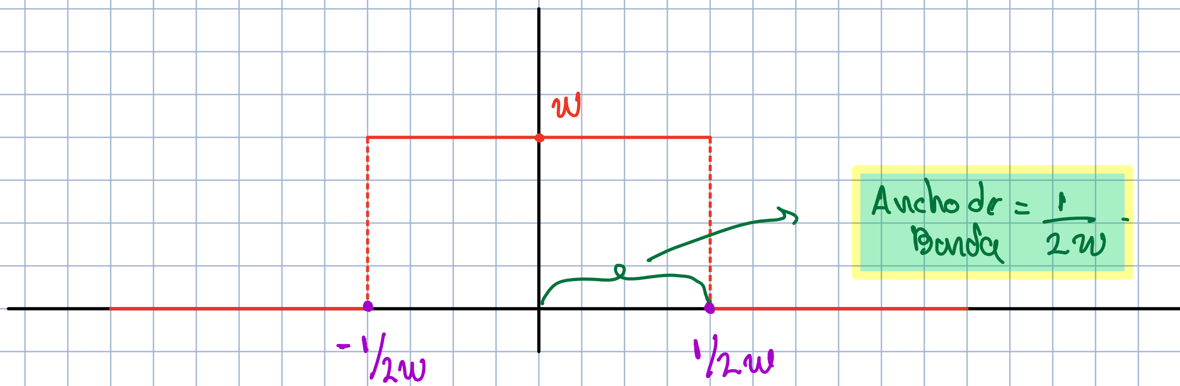
Tomamos esta definición para aplicarla

$$\operatorname{rect}(wf_x) = \begin{cases} 1 & |wf_x| < 1/2 \\ \frac{1}{2} & |wf_x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} -\frac{1}{2} < wf_x \quad y \quad wf_x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2w} < f_x \quad y \quad f_x < \frac{1}{2w} \end{cases}$$

$$|f_x| < \frac{1}{2w}$$

El máximo de la función se da donde $f_x = 0$ y este punto sería w



b) Sea

$$f(x) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{w}\right)$$

Hallamos la transformada de Fourier de $f(x)$

$$G(f_x) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{w}\right)\}$$

Recordemos el resultado del taller anterior

$$\mathcal{F}\{\Lambda(x)\,\Lambda(y)\} = \mathrm{sinc}^2(f_x)\,\mathrm{sinc}^2(f_y)$$

De aquí podemos notar que

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}^2(x)\} = \Lambda(f_x)$$

En analogía con la transformada pasada, se tiene que

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{w}\right)\} = |w|\,\Lambda(w f_x)$$

Ahora recordemos la definición de la función triangular.

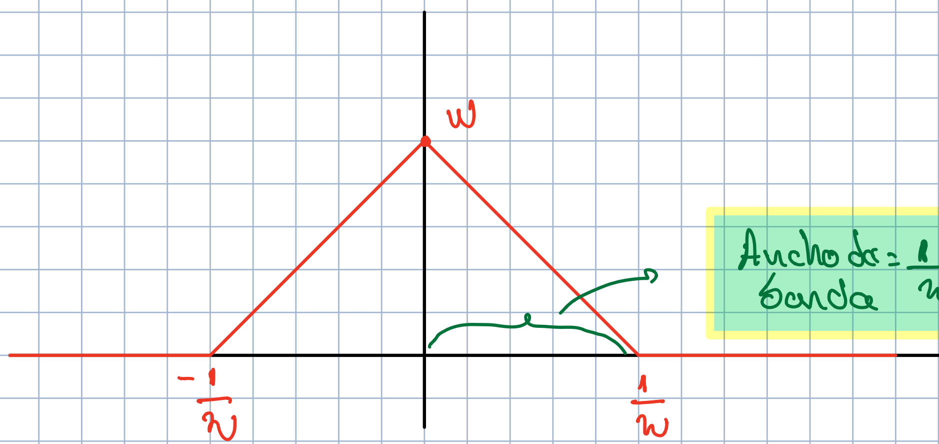
$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

En nuestro caso

$$\Delta(wf_x) = \begin{cases} 1 - |wf_x| & |wf_x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\rightarrow$ $-1 \leq wf_x$ y $wf_x \leq 1$

De aquí $|f_x| \leq \frac{1}{w}$



Ancho de banda $= \frac{1}{w}$

Ejercicio 2.5:

Considere las siguientes dos funciones:

1) $g_1(x,y) = \Lambda\left(\frac{x}{d}\right)\Lambda\left(\frac{y}{2d}\right)$

1) $g_2(x,y) = circ\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{d}\right)$

a) Cuál es la longitud lateral minima requerida para acomodar la convolución de estás dos funciones?

b) Cuál es el minimo de longitud requerido para acomodar la autocorrelación de g2(x,y)?

→ Solución a)

Para la solución de este punto debemos encontrar dos desigualdades

$$D_1(x) + D_2(x) < L_x$$

$$D_1(y) + D_2(y) < L_y$$

- : Soportes de la función $g_1(x,y)$ (Uno en cada dirección)
- : Soportes de la función $g_2(x,y)$ (Uno en cada dirección)

Hallemos los soportes de la función $g_1(x,y)$. Hallemos el soporte en cada dimensión:

$$g_1(x) = \Lambda\left(\frac{x}{d}\right)$$

Por definición

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

En nuestro caso:

$$\Lambda\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{d} & \left|\frac{x}{d}\right| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} -1 \leq \frac{x}{d} \text{ y } \frac{x}{d} \leq 1 \\ -d \leq x \text{ y } x \leq d \\ |x| \leq d \end{array}}$$

Por tanto el soporte para esta función es: (Fig 1)

$$\boxed{D_1(x) = 2d}$$

Siguiendo un procedimiento similar encontramos que:

$$\boxed{D_1(y) = 4d}$$

Ahora hallamos los soportes de la función $g_2(x,y)$. En este caso es más sencillo, ya que el soporte en la dirección x es igual al soporte en la dirección y.

Por definición

$$\mathrm{circ}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

En nuestro caso podemos tomar $y=0$ (por la simetría)

$$\mathrm{circ}(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

En nuestro caso

$$\mathrm{circ}\left(\frac{x}{d}\right) - \begin{cases} 1 & \frac{x}{d} < \frac{1}{2} \rightarrow x < \frac{d}{2} \\ & \vdots \end{cases}$$

Por tanto el soporte de está función sería

$$\boxed{D_2(x) = D_2(y) = d}$$

Finall, la longitud lateral mínima sería

$$\boxed{\begin{aligned} L_x &= 3d \\ L_y &= 5d \end{aligned}}$$ → Solución a).

→ Solución b).

Calculamos el mínimo de longitud requerido para la autocorrelación de $g_2(x,y)$.

Dado que la autocorrelación es como obtener la convolución de una función con su compleja conjugada, la ventaja que tenemos es que la función circ es limitada en el plano.

Anterior encontramos que el soporte de la función en cada eje era el mismo e igual a d, entonces la longitud mínima requerida sería

$$\boxed{\begin{aligned} 2d &= L_x \\ 2d &= L_y \end{aligned}}$$ → Solución parte b).