Análisis de sistemas y señales en 2 dimensiones

Walter Torres, Alejandro Vélez
Óptica de Fourier y procesamiento de la información
13 de marzo de 2021
Semestre 2021-1
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Contenido

- Introducción
- Definición y condiciones de existencia
- Teoremas
- Ejemplos
- Frecuencia espacial local
- Sistemas lineales
- Sistemas invariantes y método de convolución

Óptica información y comunicaciones

- Relación entre la óptica y las comunicaciones: ambas implican la recolección de información.
- Relación íntima: la matemática con que se describen ambas disciplinas es muy similar, basadas en el análisis de Fourier y en la teoría de sistemas lineales.
- Características especiales: linealidad e invarianza. Ambas propiedades permiten el estudio de los sistemas desde un análisis de frecuencias.

Definiciones

Linealidad: la respuesta de un sistema a varios estímulos que actúan simultáneamente es idéntica a la suma de las respuestas del sistema que cada componente del estímulo produce individualmente.

La teoría de los sistema lineales tiene la gran ventaja de que se puede expresar la respuesta de un sistema a un estímulo complejo, en términos de su respuesta a estímulos más elementales.

En general, la respuesta total del sistema se entiende como una combinación lineal de las respuestas del mismo a los estímulos elementales.

Definiciones

Coherencia espacial: es la propiedad de la luz por la cual dos ondas están perfectamente sincronizadas, es decir, su diferencia relativa de fase no cambia aleatoriamente. Esta propiedad permite que se presente el fenómeno de interferencia.

Una fuente de luz extendida es coherente si dos puntos de esa fuente son mutuamente coherentes. Una de las condiciones para que una fuente de luz sea coherente es que esta sea monocromática.

La teoría del curso se va a centrar en fuentes de iluminación coherente (con estímulos descritos por funciones complejas). El caso incoherente (estímulos compuesto por funciones reales) se deja como casos especiales.

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Nota: la teoría de Fourier será solo el formalismo matemático para la descripción de los sistemas ópticos.

Definición:

Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, dx\, dy.$$

Transformada inversa de Fourier (representación integral de Fourier)

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, df_X\, df_Y.$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Condiciones de existencia:

1. La función debe ser absolutamente integrable sobre el plano (x,y)
2. La función debe tener solo un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito
3. La función no debe tener discontinuidades infinitas.

Pero… la posibilidad física es una condición suficiente válida para la existencia de la transformada

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Transformada de Fourier generalizada: una función que estrictamente no cumpla alguna de las condiciones anteriores (y que no tenga transformada) se puede escribir como una secuencia de función que sí sean transformables. Así la transformada de la función original será un secuencia de transformadas.

Así, un estímulo complejo, puede descomponerse en funciones más elementales de las cuales se conozca la transformada.

En general la diferencia entre transformada y transformada generalizada se desprecia y se habla simplemente de transformada de Fourier de una función.

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Transformada de Fourier como una descomposición: la teoría de los sistemas lineales permite expresar un estímulo como una descomposición de estímulos elementales. La representación integral de la función g se puede ver como tal descomposición:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(j2\pi f t)\, df$$

Donde G representa los pesos en la combinación lineal que define a g. El exponencial complejo se entiende como la base de funciones en las que se expande g y se denota como Kernel de la transformada, y da cuenta de la dirección del campo (función g) para una frecuencia definida.

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Teoremas de la transformada de Fourier:

1. **Teorema de linealidad:** $$\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha\mathcal{F}\{g\} + \beta\mathcal{F}\{h\}$$

2. **Teorema de similaridad:** $$\mathcal{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|}G\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right)$$

3. **Teorema del desplazamiento:** $$\mathcal{F}\{g(x-a, y-b)\} = G(f_X, f_Y)\exp[-j2\pi(f_X a + f_Y b)]$$

4. **Teorema de Parseval:** $$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2\, dx\, dy = \iint^{\infty} |G(f_X, f_Y)|^2\, df_X\, df_Y$$

5. **Teorema de la convolución:** $$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)\, h(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta\right\} = G(f_X, f_Y)H(f_X, f_Y)$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Teoremas de la transformada de Fourier:

7. Teorema de autocorrelación:

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\, g^*(\xi - x, \eta - y)\, d\xi\, d\eta\right\} = |G(f_X, f_Y)|^2$$

$$\mathcal{F}\{|g(x,y)|^2\} = \iint_{-\infty} G(\xi,\eta)\, G^*(\xi - f_X, \eta - f_Y)\, d\xi\, d\eta.$$

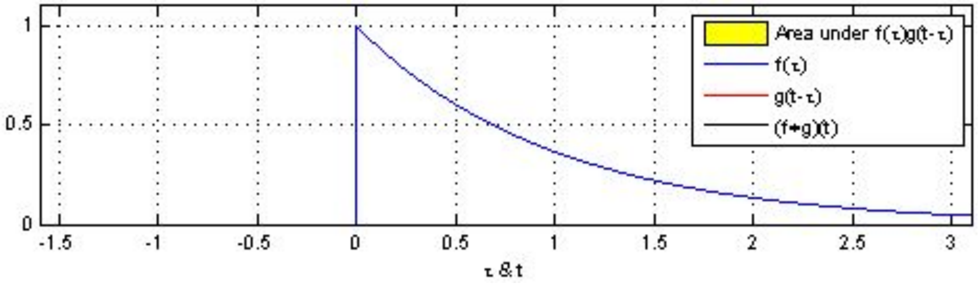
8. Teorema integral de Fourier

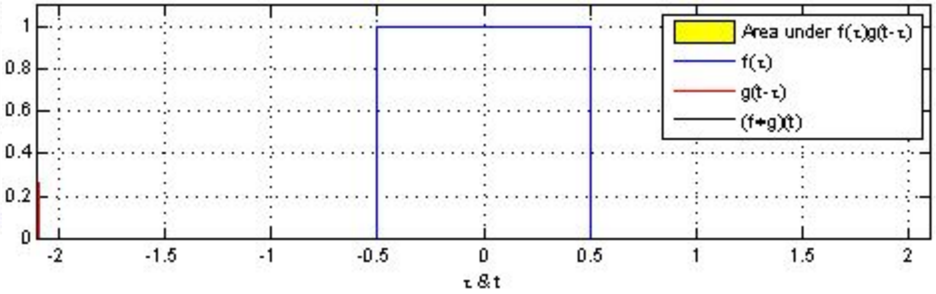
$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x,y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x,y)\} = g(x,y).$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Operación convolución**:**

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta$$

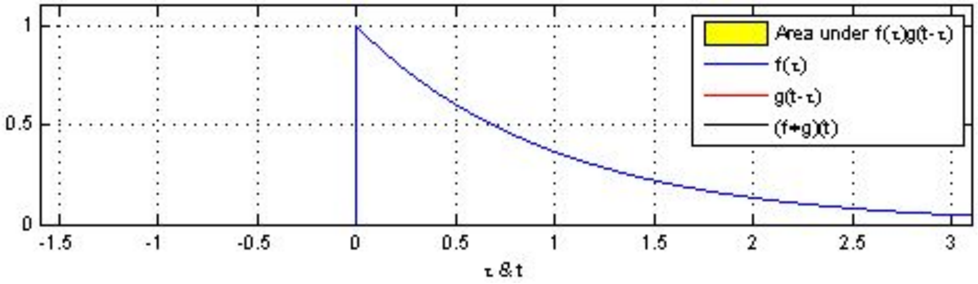


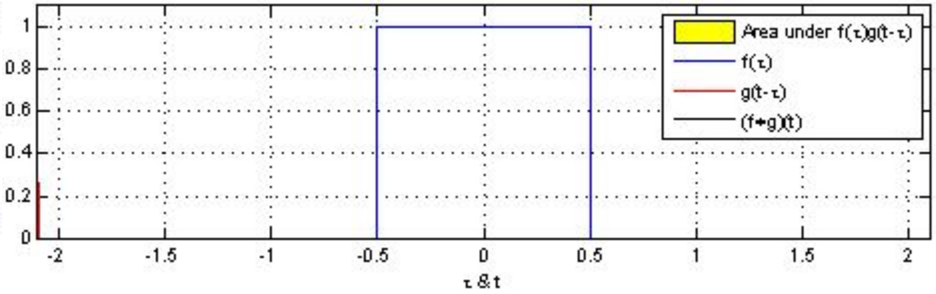


Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Operación convolución**:**

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\,h(x-\xi,\,y-\eta)\,d\xi\,d\eta$$





Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Funciones separables: Una función de dos variable se dice separable si esta se puede escribir como el producto de dos funciones cada una dependiendo de solo una variable independiente.

Caso rectangular:

$$g(x, y) = g_X(x)\, g_Y(y),$$

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_X(x) \exp[-j2\pi f_X x]\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g_Y(y) \exp[-j2\pi f_Y y]\, dy$$

$$= \mathcal{F}_X\{g_X\}\mathcal{F}_Y\{g_Y\}.$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Funciones separables

Caso circular:

$$g(r,\theta) = g_R(r)\, g_\Theta(\theta)$$

$$\mathcal{F}\{g(r,\theta)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(-j)^k \exp(jk\phi)\, \mathcal{H}_k\{g_R(r)\}$$

Donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\Theta(\theta) \exp(-jk\theta)\, d\theta$$

$$\mathcal{H}_k\{g_R(r)\} = 2\pi \int_0^{\infty} r\, g_R(r)\, J_k(2\pi r\rho)\, dr.$$

Es la transformada de Hankel de orden k y Jk es la función de Bessel de primer tipo y orden k

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Funciones separables

Caso con simetría circular

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\cos\theta$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = r\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} \qquad f_X = \rho\cos\phi$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{f_Y}{f_X}\right) \qquad f_Y = \rho\sin\phi.$$

$$g(r, \theta) = g_R(r)$$

Donde

$$G_o(\rho, \phi) = \int_0^\infty dr\, r g_R(r) \int_0^{2\pi} d\theta \exp[-j2\pi r\rho\cos(\theta - \phi)].$$

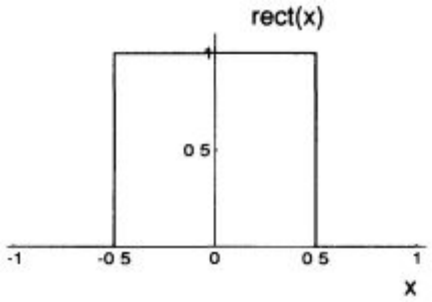
$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp[-ja\cos(\theta - \phi)]\, d\theta$$

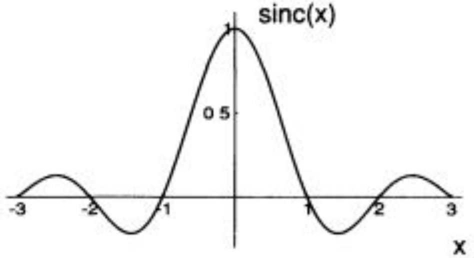
$$G_o(\rho, \phi) = G_o(\rho) = 2\pi\int_0^\infty r g_R(r) J_0(2\pi r\rho)\, dr$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Algunas funciones útiles
y sus transformadas

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$





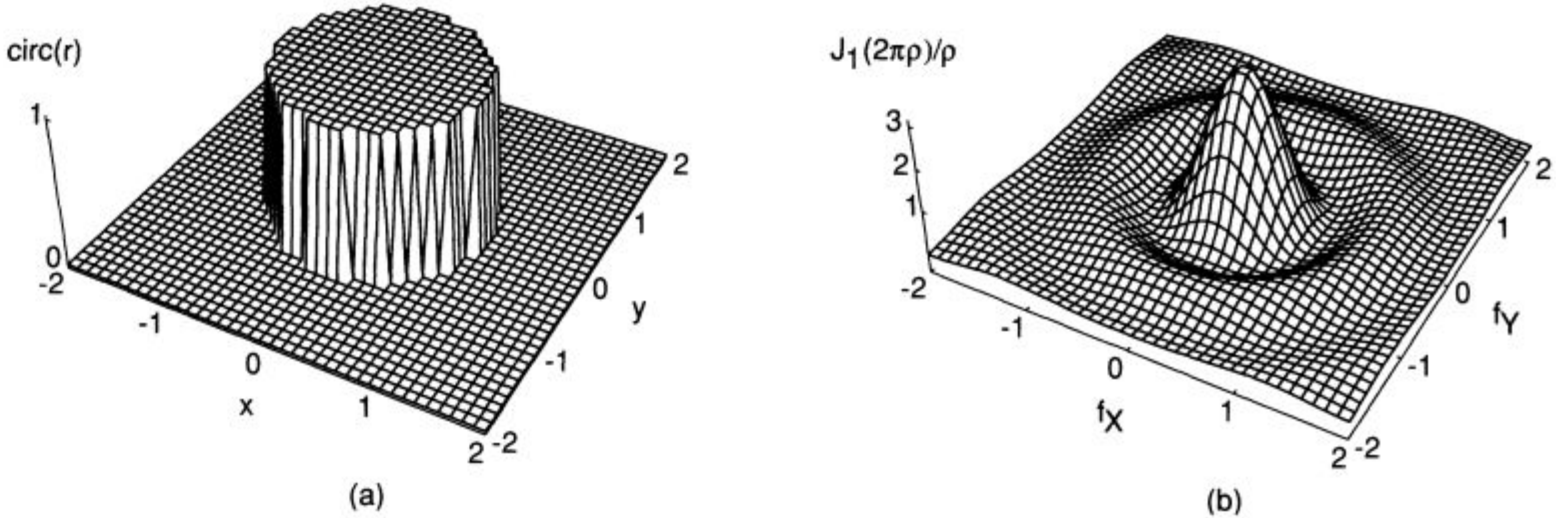
Function	Transform
$\exp[-\pi(a^2x^2 + b^2y^2)]$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} \exp\left[-\pi\left(\frac{f_X^2}{a^2} + \frac{f_Y^2}{b^2}\right)\right]$
$\text{rect}(ax)\,\text{rect}(by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} \text{sinc}(f_X/a)\,\text{sinc}(f_Y/b)$
$\Lambda(ax)\,\Lambda(by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} \text{sinc}^2(f_X/a)\,\text{sinc}^2(f_Y/b)$
$\delta(ax, by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert}$
$\exp[j\pi(ax + by)]$	$\delta(f_X - a/2, f_Y - b/2)$
$\text{sgn}(ax)\,\text{sgn}(by)$	$\frac{ab}{\lvert ab \rvert} \frac{1}{j\pi f_X} \frac{1}{j\pi f_Y}$
$\text{comb}(ax)\,\text{comb}(by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} \text{comb}(f_X/a)\,\text{comb}(f_Y/b)$
$\exp[j\pi(a^2x^2 + b^2y^2)]$	$\frac{j}{\lvert ab \rvert} \exp\left[-j\pi\left(\frac{f_X^2}{a^2} + \frac{f_Y^2}{b^2}\right)\right]$
$\exp[-(a\lvert x \rvert + b\lvert y \rvert)]$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} \frac{2}{1 + (2\pi f_X/a)^2} \frac{2}{1 + (2\pi f_Y/b)^2}$

Circle function
$$\text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Algunas funciones útiles y sus transformadas

$$\mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2}) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{x^2+y^2} = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Frecuencia espacial local: en general no es posible asociar una posición espacial a una frecuencia particular, pero esto se puede solucionar introduciendo la idea de frecuencia espacial.

Sea la función compleja $g(x, y) = a(x, y) \exp[j\phi(x, y)]$

si *a* varía suavemente, el interés cae sobre la variación de la fase. Se define la frecuencia espacial local como

$$f_{lX} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y) \qquad f_{lY} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y)$$

Para el caso del Kernel de la transformada de Fourier

$$f_{lX} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}[2\pi(f_X x + f_Y y)] = f_X \qquad f_{lY} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}[2\pi(f_X x + f_Y y)] = f_Y.$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales. Definiciones

Sistema: se define como un mapeo de un conjunto de funciones de entrada en un conjunto de funciones de salida. Se asume que el sistema es tal que muchas entradas puedan ser mapeadas en una sola salida. El sistema entonces se puede representar como un operador que actúa sobre la función de entrada g_1 que produce la función de salida g_2:

$$g_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\{g_1(x_1, y_1)\}.$$

Asumir un sistema lineal implica la linealidad del operador S{}

$$\mathcal{S}\{ap(x_1, y_1) + bq(x_1, y_1)\} = a\mathcal{S}\{p(x_1, y_1)\} + b\mathcal{S}\{q(x_1, y_1)\}.$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales e integral de superposición

Si una función de entrada, generalmente compleja, se puede descomponer en funciones elementales más simples, y se asume un sistema lineal, se genera una simplificación en la descripción del mapeo de dicho sistema:

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\, \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\, d\xi\, d\eta$$

De este modo la respuesta del sistema (función de salida) es

$$g_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\, \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\, d\xi\, d\eta \right\}$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales e integral de superposición

Si $g_1(\xi, \eta)$ se entiende sólo como un factor de peso, el sistema actuará solo sobre las funciones elementales (Delta de Dirac) generando una salida

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\, \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}\, d\xi\, d\eta.$$

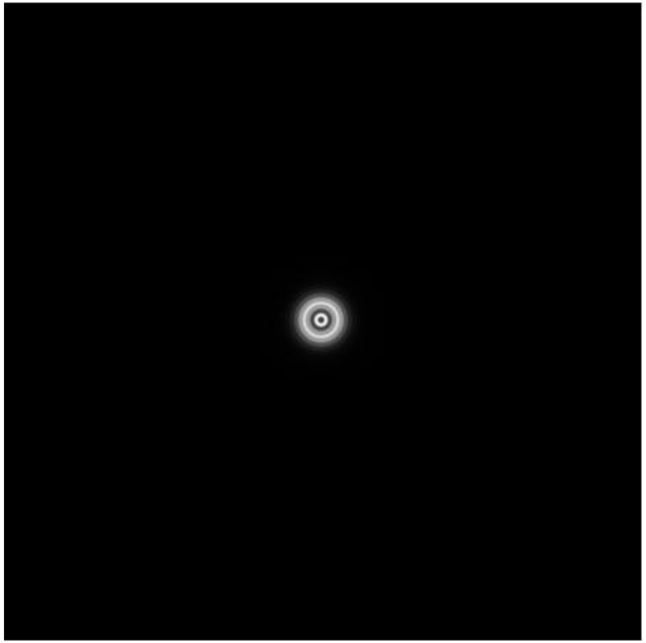
La respuesta del sistema a la función de impulso (elemental) en el punto (x,y) se denotará como $h(x_1,y_1)$ y estará definida en el espacio de las funciones de respuesta del sistema

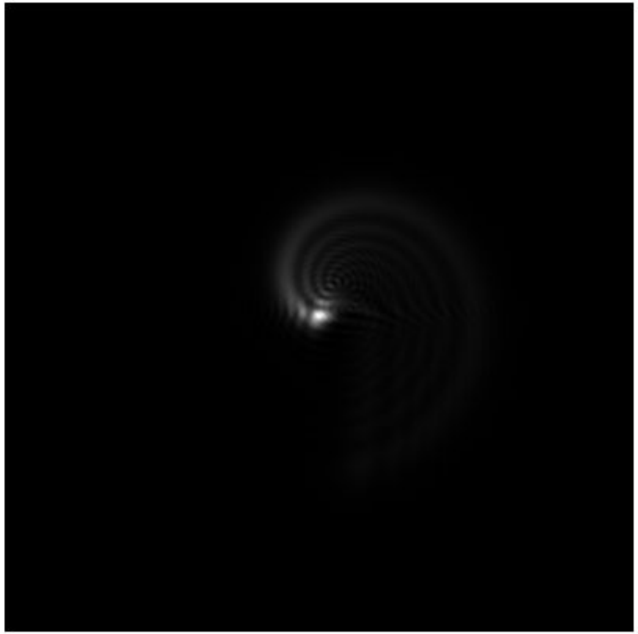
$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}.$$

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales e integral de superposición

Ejemplo de funciones de respuesta al impulso de elementos ópticos





Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales e integral de superposición

h se conoce como la función de respuesta al impulso del sistema (point-spread function) y denota la acción del sistema sobre un impulso unitario. De este modo la respuesta del sistema a la función de entrada completa es

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\, h(x_2, y_2; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Conocida como la integral de superposición.

Para conocer la salida de un sistema se debe conocer su respuesta a los impulsos (funciones de entrada) en cada una de las posiciones de dicho espacio de entrada

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales invariantes

Un sistema lineal es invariante si su función de respuesta al impulso h depende solo de la distancia entre la el punto de excitación y el punto de respuesta, matemáticamente,

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta).$$

En el caso de un sistema óptico invariante, la posición de la imagen va a cambiar con la posición del objeto, pero no va a cambiar su forma funcional. Para el caso del ojo humano, el parche isoplanático es la región sobre la cual las aberraciones de onda son constantes.

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales invariantes

Bajo la aproximación de un sistema isoplanático:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\, h(x_2 - \xi, y_2 - \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Que representan la convolución entre la función de entrada y la función de respuesta del sistema:

$$g_2 = g_1 \otimes h$$

Esta característica de los sistemas lineales permite un estudio muy sencillo de las funciones de salida del sistema

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales invariantes

Por el Teorema de la convolución:

$$G_2(f_X, f_Y) = H(f_X, f_Y)\,G_1(f_X, f_Y),$$

$$H(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_X\xi + f_Y\eta)]\, d\xi\, d\eta$$

H se conoce como la función de transferencia del sistema y representa su respuesta unitaria en el espacio de frecuencias.

Conociendo H, la respuesta del sistema se puede obtener como la transformada inversa del producto (regular) entre G1 y H.

Análisis de Fourier en 2 dimensiones

Sistemas lineales invariantes

Ejemplo formación de imagen con método de convolución