Circuitos RC, RL y RLC en serie como filtros electrónicos

César Antonio Hoyos Peláez, Valentina Pérez Cadavid y Sebastián Montoya Hernández

Los circuitos RC, RL y RLC son componentes esenciales en la electrónica y la ingeniería eléctrica, utilizados en una amplia variedad de aplicaciones, desde el filtrado de señales hasta la protección de circuitos. Estos circuitos permiten controlar el flujo de corriente y la respuesta de frecuencia de un sistema, lo que los convierte en herramientas fundamentales en el diseño de filtros electrónicos.

En teoría de circuitos, un filtro modifica la amplitud o fase de las componentes correspondientes a frecuencias en una señal, estos no añaden ni cambian las componentes, pero son capaces de variar la amplitud y fase de las ya existentes, es decir, modifica la onda que aparece en la entrada de la forma deseada a la salida. Idealmente los filtros deben cortar la atenuación de una determinada señal en las frecuencias escogidas, pero los filtros reales correspondientes a circuitos electrónicos no tienen este comportamiento y este tiende a una exponencial.

Circuito RC

Este circuito se forma por una resistencia, un condensador y una fuente de voltaje variable sinusoidal. Por las leyes de Kirchhoff se tiene la siguiente expresión:

$$V(t) = V_R + V_C = IR + Q/C \quad (1)$$

donde $V_R = IR$ representa el voltaje que cae en la resistencia, mientras que $V_C = Q/C$ representa el voltaje que cae en el capacitor. Derivando con respecto al tiempo se obtiene que:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt}R + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

Pero por definición, la variación de la carga en el tiempo es igual a la corriente inducida en el circuito. En este caso, se supone que la Ec. (2) tiene como solución una onda en el voltaje y la corriente, en donde estas tienen un desfase dado por un valor α. Así, introduciendo esto en la Ec. (2) se tiene:

$$\frac{d}{dt}[V_p sin(wt)] = R\frac{d}{dt}[I_p sin(wt + \alpha)] + \frac{1}{C}I_p sin(wt + \alpha) \quad (3)$$

Operando sobre la Ec. (3) se puede obtener mediante desarrollos algebraicos la siguiente expresión:

$$V_p w\, cos(wt) = RI_p w[cos(wt)cos(\alpha) - sin(wt)sin(\alpha)] + \frac{1}{c}I_p[cos(wt)sin(\alpha) + sin(wt)cos(\alpha)] \quad (4)$$

De la Ec. (4) tomando solo lo que acompaña las funciones trigonométricas dependientes de las frecuencias se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$V_p w = RI_p cos(\alpha) + \frac{1}{C}I_p sin(\alpha) \quad (5)$$

$$0 = \frac{1}{C}I_p cos(\alpha) - RI_p sin(\alpha) \quad (6)$$

De la Ec. (6) se puede deducir el desfase entre la onda que representa el voltaje y la corriente encontrando así que el desfase entre ellas depende de la frecuencia:

$$\alpha \; = arctan(\frac{1}{RCw}) \qquad (7)$$

Adicionalmente de la Ec. (5) se pueden encontrar el valor de la amplitud de la corriente:

$$I_p \; = \frac{wC}{\sqrt{1 + (wRC)^2}} V_p \qquad (8)$$

Introduciendo el valor de la EC. (8) en la ecuación que representa la caída de voltaje se tiene que:

$$V_R \; = \frac{V_p}{\sqrt{1 + 1/(wRC)^2}} \qquad (9)$$

En donde se puede notar a partir de la Ec. (9) que si $w \approx \infty$ se tiene que $V_R \approx V_{P.}$ Adicionalmente, en el caso de que $w \approx 0$ se tiene $V_R \approx 0$.

Por otro lado, si se introduce la Ec. (8) en la expresión que representa el voltaje que cae en el capacitor y tomando solo el módulo al desarrollar la integral se encuentra que:

$$V_C \; = \frac{V_p}{\sqrt{1 + (wRC)^2}} \qquad (10)$$

Donde se puede notar que a partir de la Ec. (10) que si $w \approx 0$ se tiene que $Vc \approx Vp$. Así mismo, en el caso que $w \approx \infty$ se cumple que $Vc \approx 0$.

Por otro lado, para este tipo de sistemas es posible encontrar la frecuencia de corte mediante la siguiente expresión:

$$F_c \; = \frac{1}{2\pi RC}$$

Circuito RL

El circuito RL está constituido por una resistencia y un inductor el cual se puede considerar físicamente como una bobina en la cual se da una variación de campo magnético en su interior lo cual a su vez permite generar una corriente inducida. A partir de la ley de mayas se llega a la expresión:

$$V(t) \; = \; RI(t) \; + \; L\frac{d}{dt}I \qquad (11)$$

En donde el voltaje que cae en la resistencia viene dado por $VR = IR$ y el voltaje que cae en la inductancia se representa mediante la expresión

$$V_L = \; L\frac{d}{dt}I$$

Para resolver el circuito, se supone inicialmente que el voltaje y la corriente están representados por ondas sinusoidales con un desfase. Introduciendo el concepto expuesto anteriormente en la Ec. (11) se tiene:

$$V_p sin(wt) = RI_p sin(wt + \alpha) + LwI_p cos(wt + \alpha) \quad (12)$$

Desarrollando la Ec. (12) igualando en la base de Fourier se consiguen las siguientes dos expresiones:

$$V_p = RI_p cos(\alpha) - LwI_p sin(\alpha) \quad (13)$$
$$0 = RI_p sin(\alpha) + LwI_p cos(\alpha) \quad (14)$$

De la Ec. (14) se puede deducir que el desfase entre el voltaje y la corriente viene dado por:

$$\alpha = arctan(-\frac{Lw}{R}) \quad (15)$$

Por otro lado, elevando al cuadrado las Ec's (13) y (14) y sumando el resultado del cuadrado de estas dos expresiones, se obtiene que la amplitud de la corriente se puede representar como:

$$I_p = \frac{V_p}{\sqrt{R^2 + (wL)^2}} \quad (16)$$

Por tanto, a partir del resultado de la Ec. (16) se puede ver que el voltaje que cae en la resistencia viene dado por:

$$V_R = \frac{V_p}{\sqrt{1 + (wL/R)^2}} \quad (17)$$

Así, de la Ec. (17) se puede ver que cuando $w \approx 0$ implica que $V_R = V_p$. Así mismo, se puede deducir el caso cuando $w \approx \infty$ se obtiene $V_R = 0$.
Ahora, analizando el voltaje que cae en el inductor el cual se puede deducir a partir de la integral de la corriente en función del tiempo por la inductancia y tomando solo el valor positivo descartando la parte ondulatoria. Se deduce que:

$$V_L = \frac{V_p}{\sqrt{1 + (R/wL)^2}} \quad (18)$$

De la Ec. (18) se puede evidenciar que cuando $w \approx 0$ se tiene que $V_L \approx 0$. Así mismo, se obtiene que cuando $w \approx \infty$ se evidencia que $V_L \approx V_p$

Por otro lado, para este tipo de sistemas es posible encontrar la frecuencia de corte mediante la siguiente expresión

$$F_c = \frac{R}{2\pi L}$$

Circuito RLC

El circuito RLC está constituido por una resistencia, un inductor y un capacitor. Por ley de mallas se tiene que el voltaje total es

$$V(t) = V_R + V_L + V_C \qquad (19)$$

En donde cada uno de los anteriores voltajes representa el voltaje de caída en ellos y ya fueron descritos previamente. Derivando con respecto al tiempo la Ec. (19) se tiene que:

$$\frac{d}{dt}V(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right) + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{c} \qquad (20)$$

La Ec. (20) se puede solucionar con métodos de ecuaciones diferenciales, pero en este caso dado que la señal de entrada está representada por una onda, entonces se supone que el voltaje y la corriente están representados por ondas sinusoidales desfasados es cierto valor. Por tanto, realizando desarrollos algebraicos se llegan a las siguientes dos expresiones:

$$V_p w = -LI_p w^2 sin(\alpha) + RI_p wcos(\alpha) + \frac{1}{c}I_p sin(\alpha) \quad (21)$$

$$0 = -LI_p w^2 cos(\alpha) - RI_p wsin(\alpha) + \frac{1}{c}I_p cos(\alpha) \quad (22)$$

Recordando la expresión para el trinomio cuadrado y sumando las ecuaciones (21) y (22) se encuentra que la amplitud de la corriente viene dada por:

$$I_p = \frac{V_p}{\sqrt{R^2 + (wL - 1/wc)^2}}$$

Donde la frecuencia máxima de resonancia se da cuando $wL = 1/wc$. Adicionalmente, se puede calcular la frecuencia de resonancia mediante la siguiente ecuación

$$F_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Referencias

- Chen, W. K. (Ed.). (2018). *Passive, active, and digital filters*. Crc Press.
- Wanhammar, L., & Wanhammar, L. (2009). Passive Filters. *Analog Filters Using MATLAB*, 77-131.
- Jorge Hernan López Botero. 2022. Laboratorio Avanzado I. Unidad I.
- Maheswari, L. K., & Anand, M. M. S. (2009). *Analog electronics*. PHI Learning Pvt. Ltd..