Miniproyecto #2

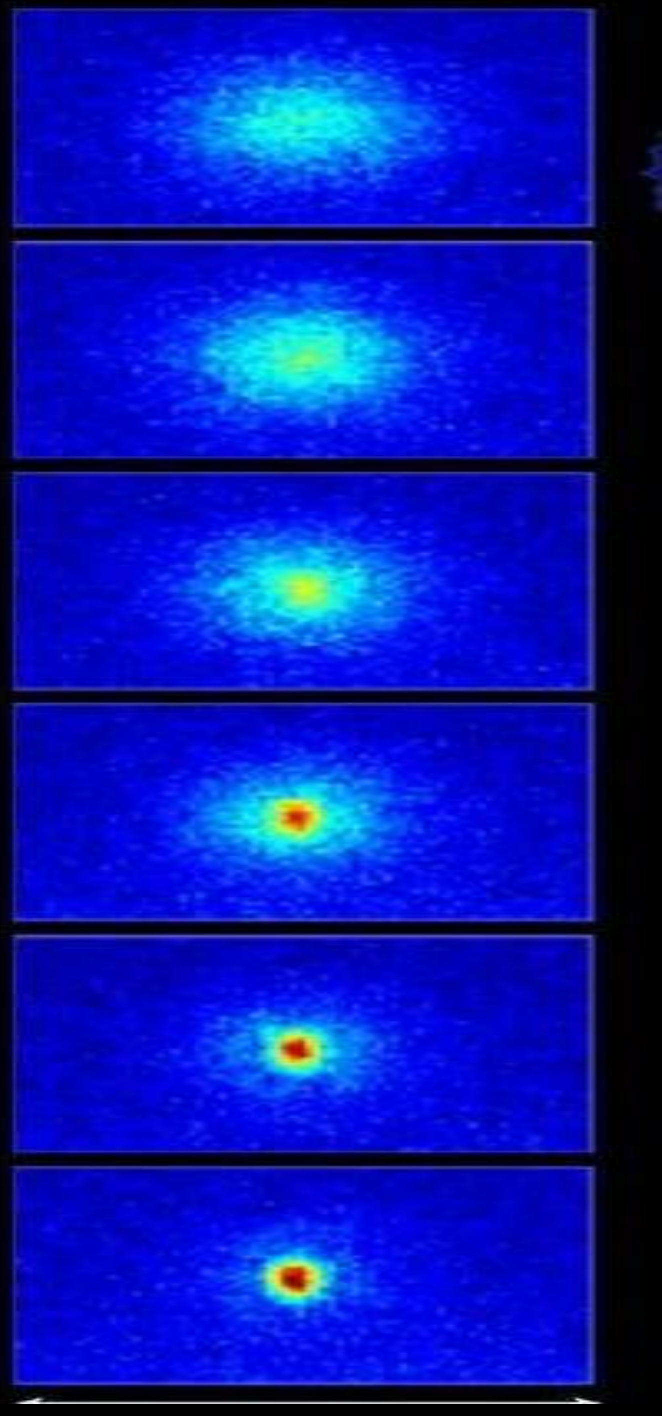
Where are the particles when the box is hot?

César Antonio Hoyos Peláez

Curso: Física Estadística

Semestre: 2023-II

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia UdeA, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Contenido

1. Introducción.

2. Partícula en un pozo infinito de potencial conectado a un reservorio de temperatura T.

3. Dos bosones en un pozo infinito de potencial.

4. Dos fermiones en un pozo infinito de potencial.

5. Dos bosones en contacto con un reservorio térmico a temperatura T.

6. Dos fermiones en contacto con un reservorio térmico a temperatura T.

7. Dos fermiones con espín en un pozo de potencial infinito.

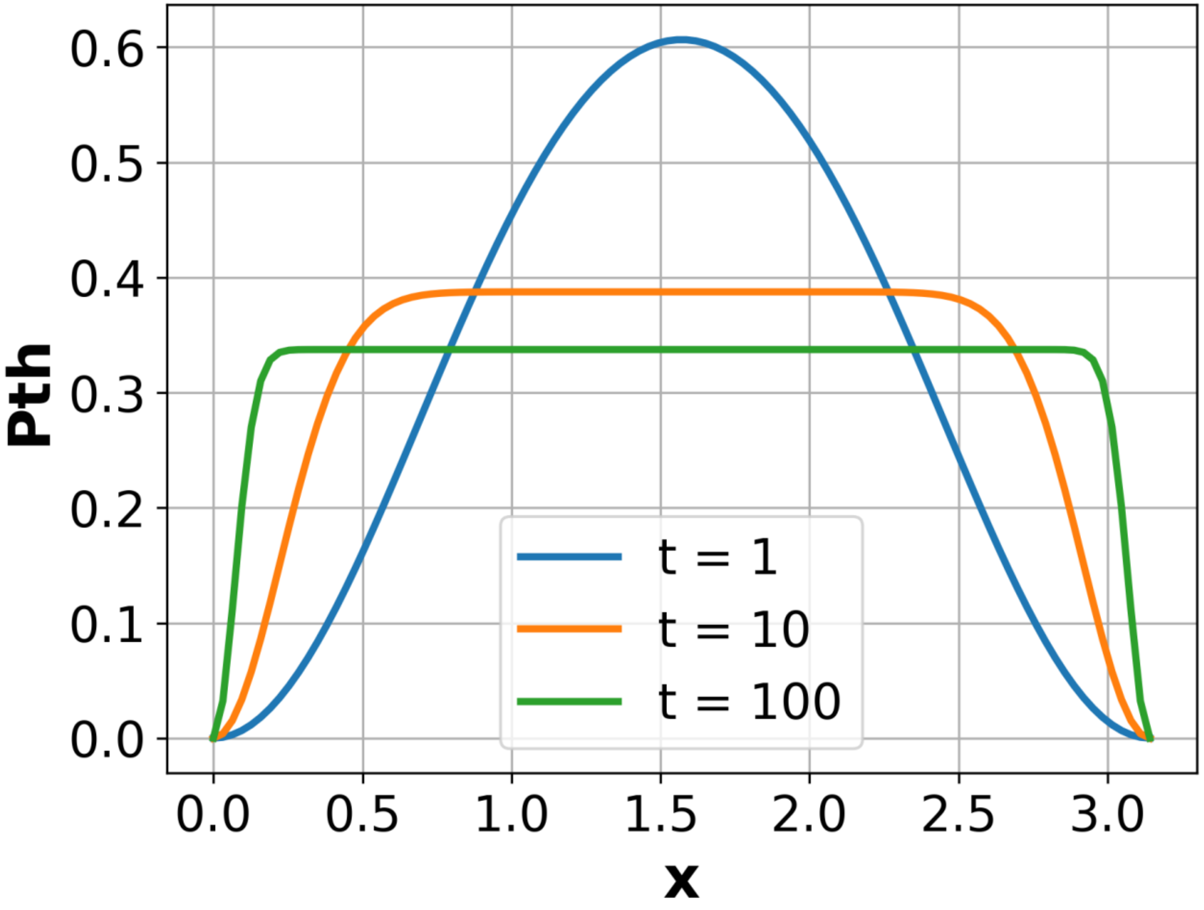
8. Dos fermiones con espín en un pozo de potencial infinito conectado a un reservorio de temperatura T.

Partícula en pozo de potencial infinito a T

$$\psi_n(X,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin(\frac{n\pi}{L}X) exp(-i\frac{2\pi E_n t}{\hbar})$$

Calculo de la densidad de probabilidad de encontrar una partícula de masa m en un pozo de potencial infinito de ancho L en contacto con un reservorio térmico de temperatura T.

$$\boxed{P_{th}(x,t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(sin(nx))^2 exp(-\frac{n^2}{t})}{\sum_{n=1}^{\infty} exp(-\frac{n^2}{t})}}$$

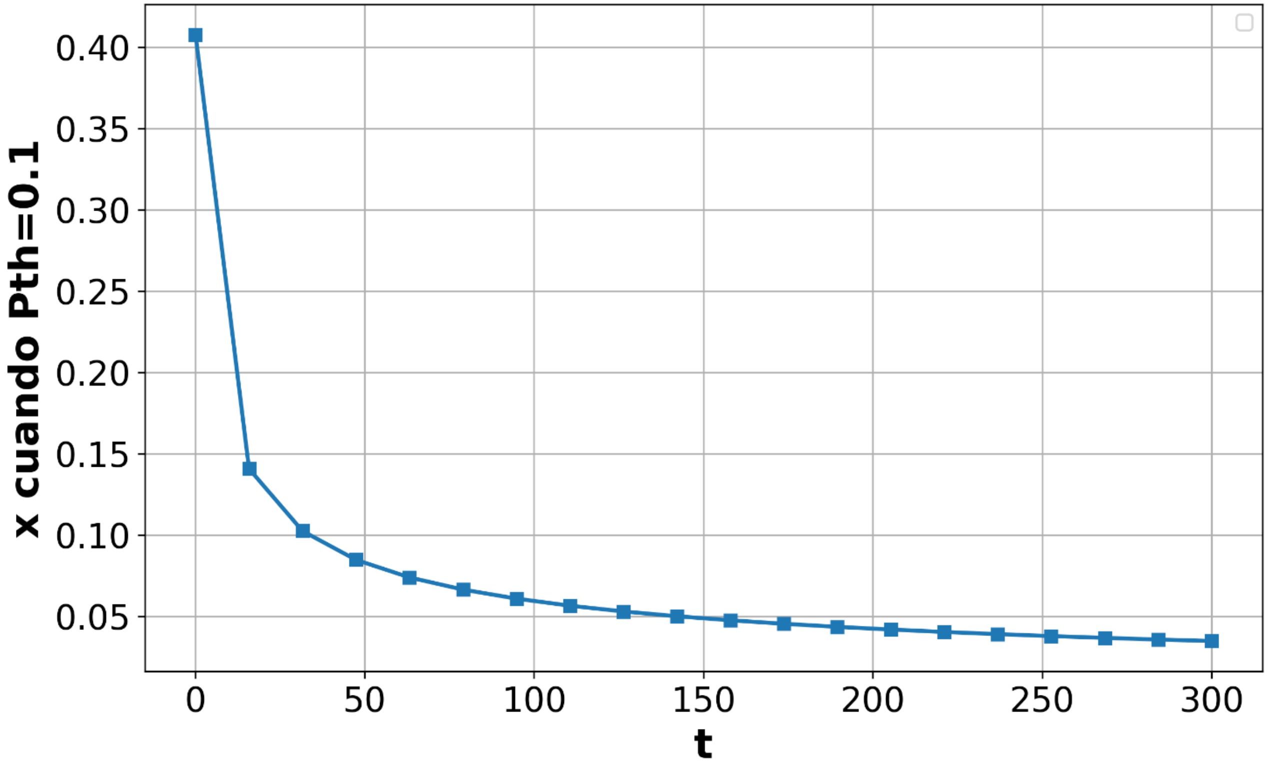


Partícula en pozo de potencial infinito a T

$$P_{th}(x,t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (sin(nx))^2 exp(-\frac{n^2}{t})}{\sum_{n=1}^{\infty} exp(-\frac{n^2}{t})}$$

Se gráfica x en función de la temperatura. Es decir, para que valor de x, con una temperatura fija dada se tiene que:

$$P_{th}(x?, t \rightarrow dada) = 0.1$$



Dos bosones

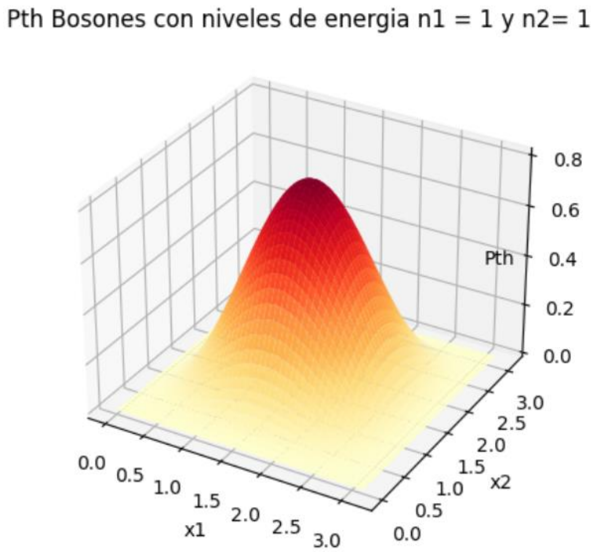
Para los bosones se tiene:

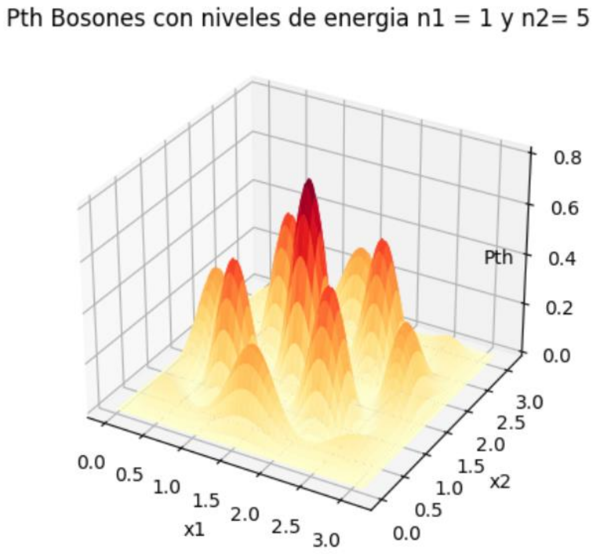
1. Partículas con espín entero (no se considera).
2. Función de onda simétrica.
3. Exentos de exclusión.

$$\psi^b_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2) + \phi_{n_1}(x_2)\phi_{n_2}(x_1)]$$

$$\downarrow$$

$$P^b_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{2}{\pi^2}[sin(n_1x_1)sin(n_2x_2)+sin(n_1x_2)sin(n_2x_1)]^2$$





Dos fermiones

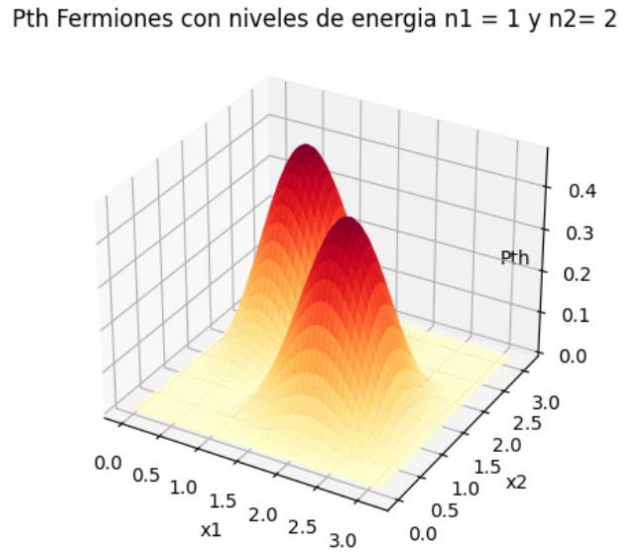
Para los fermiones se tiene:

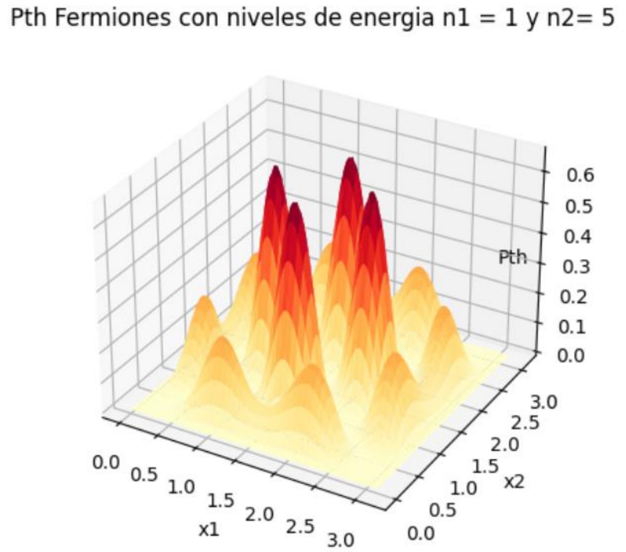
1. Partículas con espín semi-impar (no se considera).
2. Función de onda antisimétrica.
3. Cumplen principio de exclusión de Pauli.

$$\psi^{f}_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2) - \phi_{n_1}(x_2)\phi_{n_2}(x_1)]$$

$$\downarrow$$

$$P^{f}_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{2}{\pi^2}[sin(n_1x_1)sin(n_2x_2) - sin(n_1x_2)sin(n_2x_1)]^2$$



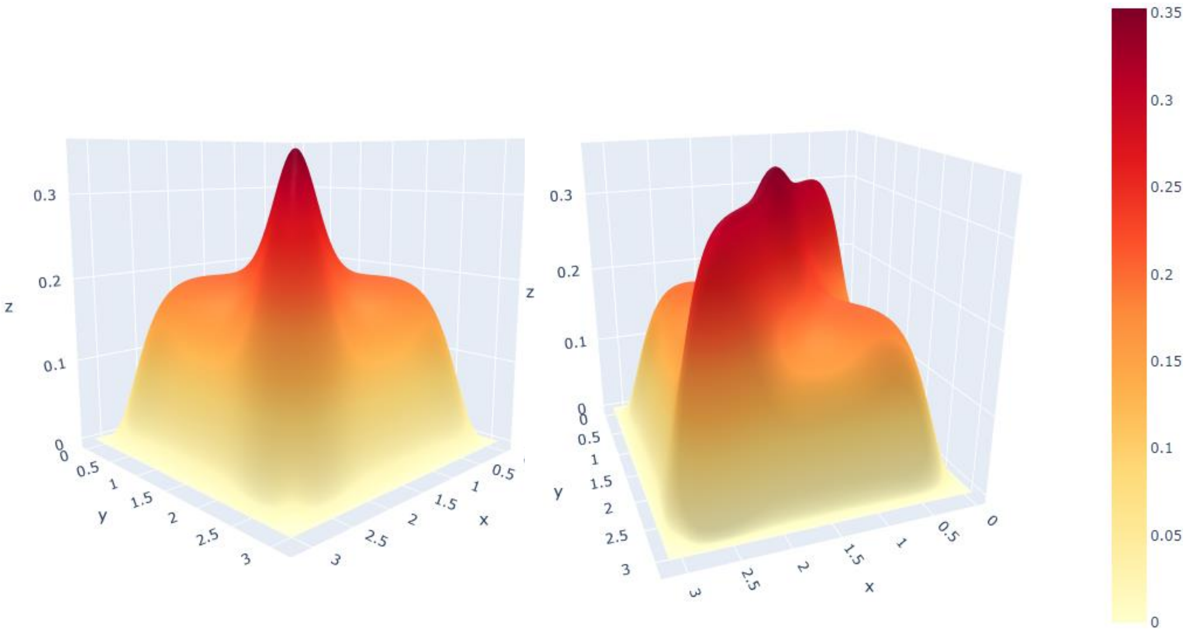


Dos bosones en contacto con reservorio térmico

Para un sistema de N partículas y degeneración fija g la cantidad de microestados posibles es:

$$\Omega = \binom{g+N-1}{N} \rightarrow \Omega = \binom{n_{max}+N-1}{N}$$

$$\boxed{\sum_{n_1=1}^{3}\sum_{n_2=n_1}^{3}} \rightarrow \boxed{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}$$



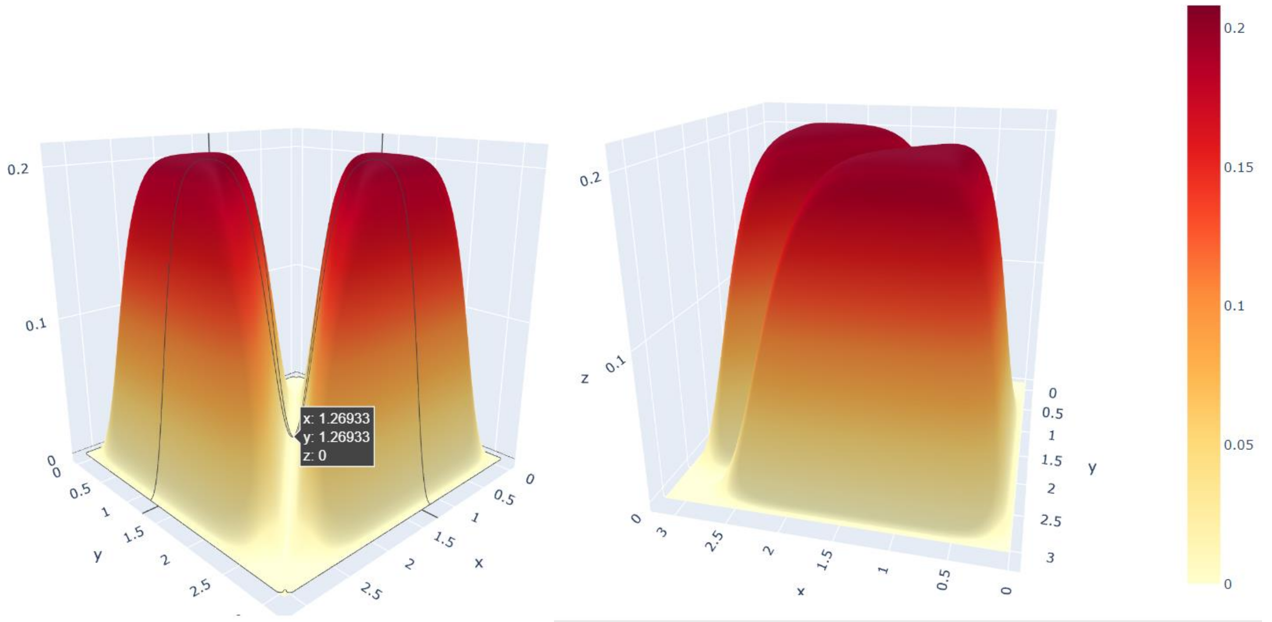
$$P_{th}^{b}(x_1,x_2,t) = \frac{2}{\pi^2}\frac{\sum_{n_1=1}^{n_{max}}\sum_{n_2=n_1}^{n_{max}}[sin(n_1x_1)sin(n_2x_2)+sin(n_1x_2)sin(n_2x_1)]^2 exp(-\frac{n_1^2+n_2^2}{t})}{\sum_{n_1=1}^{n_{max}}\sum_{n_2=n_1}^{n_{max}} exp(-\frac{n_1^2+n_2^2}{t})}$$

Dos fermiones en contacto con reservorio térmico

De manera similar para el caso de fermiones se tiene que la cantidad de microestados posibles es:

$$\Omega = \binom{g}{N} \rightarrow \Omega = \binom{n_{max}}{N}$$

$$\boxed{\sum_{n_1=1}^{2} \sum_{n_2=n_1+1}^{3}} \leftrightarrow \boxed{(1,2),(1,3),(2,3)}$$

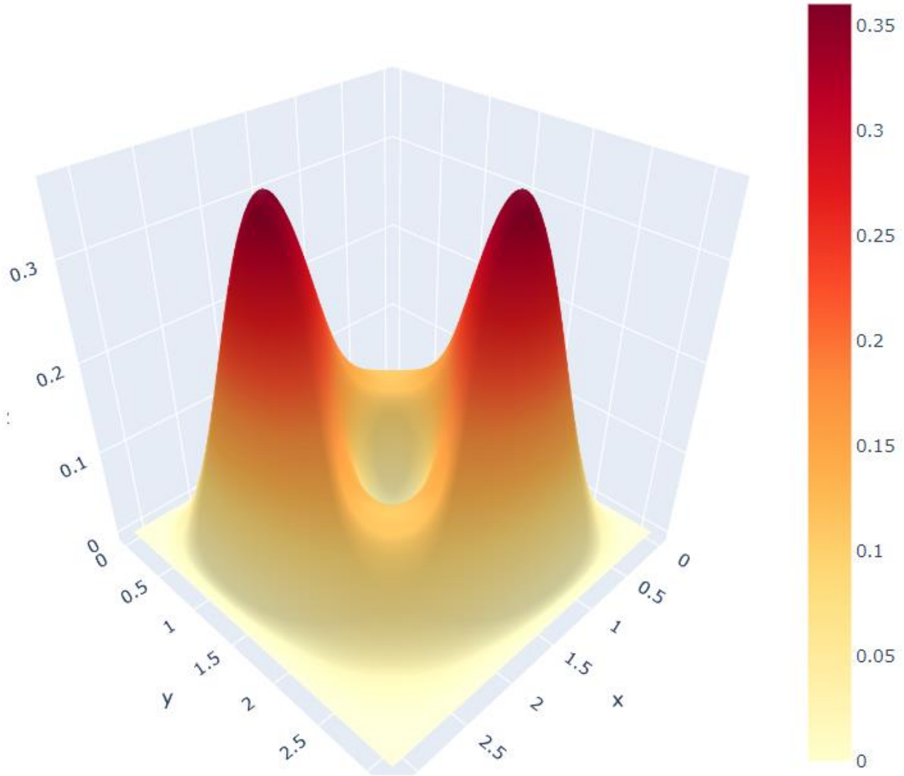


$$P_{th}^{f}(x_1,x_2,t) = \frac{2}{\pi^2}\frac{\sum_{n_1=1}^{n_{max}-1}\sum_{n_2=n_1+1}^{n_{max}}[sin(n_1x_1)sin(n_2x_2) - sin(n_1x_2)sin(n_2x_1)]^2 exp(-\frac{n_1^2+n_2^2}{t})}{\sum_{n_1=1}^{n_{max}-1}\sum_{n_2=n_1+1}^{n_{max}} exp(-\frac{n_1^2+n_2^2}{t})}$$

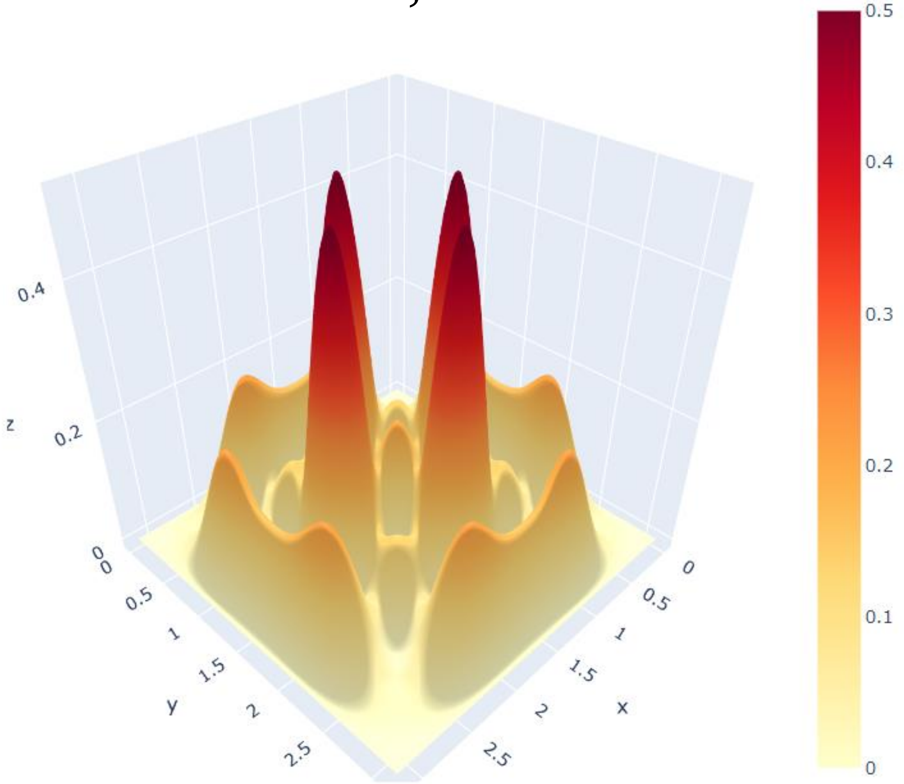
Dos fermiones con espín

$$P_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}[\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2) + \phi_{n_1}(x_2)\phi_{n_2}(x_1)]^2) + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}[\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2) - \phi_{n_1}(x_2)\phi_{n_2}(x_1)]^2)$$

n1 = 1; n2 = 2



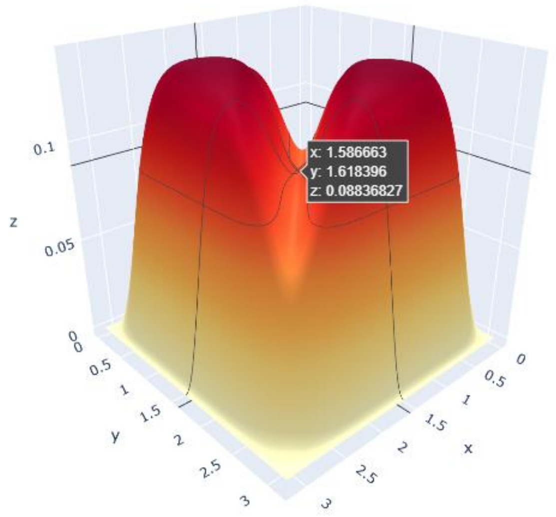
n1 = 1; n2 = 5

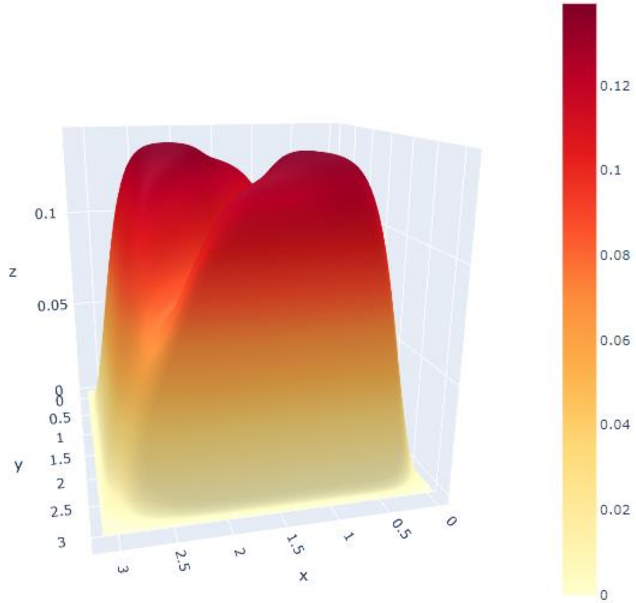


Dos fermiones con espín en contacto con reservorio térmico

$$P_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}[\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2) + \phi_{n_1}(x_2)\phi_{n_2}(x_1)]^2) + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}[\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2) - \phi_{n_1}(x_2)\phi_{n_2}(x_1)]^2)$$

$$P_{th}(x_1,x_2,t) = \frac{\sum_{n_1=1}^{n_{max}}\sum_{n_2=n_1}^{n_{max}} P_{n_1,n_2}(x_1,x_2)exp[-\frac{n_1^2+n_2^2}{t}]}{\sum_{n_1=1}^{n_{max}}\sum_{n_2=n_1}^{n_{max}} exp[-\frac{n_1^2+n_2^2}{t}]}$$





Conclusiones y perspectivas

- Los resultados obtenidos demuestran que los bosones exhiben un comportamiento simétrico, mientras que los fermiones tienen un comportamiento antisimétrico. Esto se debe a las consideraciones de simetría o anti simetría de la función de onda.

- Cuando un sistema de fermiones o bosones se pone en contacto con un reservorio térmico la densidad de probabilidad se vuelve uniforme.

- Al introducir fermiones con espín ½ en el sistema se evidencia que la función densidad de probabilidad tiene una componente de simetría, la cual proviene de considerar la función de onda espacial asociada a un singlete de espín.

- Este trabajo puede ser extendido al estudio de:
  - Observar y demostrar el comportamiento de la función densidad de probabilidad y densidad de probabilidad termalizada en el caso de fermiones que tengan un espín superior.
  - Analizar el caso para mayor cantidad de bosones y fermiones.

Referencias

[1] Miranda, E. N. (2019). Where are the particles when the box is hot?. European Journal of Physics, 40(6), 065401.

[2] Galindo, A., & Pascual, P. (2012). Quantum mechanics I. Springer Science & Business Media.