חוברת תרגילים עם פתרונות - בדידה – סמסטר ב' תש"פ מדעי המחשב

עריכה: אייל לוי

אוניברסיטת אריאל בשומרון

תרגול 1 – כללי מניה בסיסיים (לחץ לפתרונות)

עקרון החיבור והמכפלה

1. בספריה יש 6 ספרים שונים באנגלית, 5 ספרים שונים בצרפתית ו- 10 ספרים שונים בעברית.
   א. בכמה דרכים ניתן לבחור ספר אחד בשפה כלשהי?
   ב. בכמה דרכים ניתן לבחור 3 ספרים אחד בכל שפה?
2. לחברה שיוצרת חולצות ב- 12 צבעים, יש סוג לבנים וסוג לבנות. לכל מין ניתן להסיג חולצה ב- 4 גדלים שונים וניתן להסיג חולצה במחיר של שלושה רמות של איחוד. כמה סוגים שונים של חולצות יוצרת החברה?
3. יש אפשרות של 3 אוטובוסים שונים או 2 רכבות שונות כדי להגיע מ- A ל- B ו- 2 אוטובוסים שונים או 3 רכבות שונות כדי להגיע מ- B ל- C.
   א. כמה סה"כ דרכים יש כדי להגיע מ- A ל- C?
   ב. כמה סה"כ דרכים יש כדי להגיע מ- A ל- C כאשר מותר להשתמש או רק באוטובוס או רק ברכבת?
4. כמה מחלקים חיוביים יש למספר 2000?
5. בקבוצה של 56 בנים, כל בן מכיר 6 בנות וכל בת מכירה 7 בנים (כאשר יחס ההיכרות הוא הדדי), כמה בנות יש בקבוצה?
6. בכמה דרכים שונות ניתן להושיב 8 אנשים בשורה אחת?
7. בחדר 4 דלתות ו 8 חלונות, לחדר נכנסים דרך דלת ויוצאים דרך חלון. בכמה דרכים שונות ניתן לעשות זאת?
8. בחדר n דלתות. מה מספר האפשרויות השונות להיכנס לחדר דרך דלת אחת ולצאת דרך דלת אחרת?
9. במערכת מחשב מסוימת מקצים לכל משתמש שם משתמש בן 5 אותיות (קטנות) באנגלית. כמה שמות משתמש שונים ניתן לקבוע אם:
   א. מותר שאות תחזור על עצמה באותו שם משתמש?
   ב. אסור שאות תחזור על עצמה באותו שם משתמש?
10.
   א. כמה מספרים דו ספרתיים קיימים? (מספר אינו יכול להתחיל בספרה 0)
   ב. כמה מספרים דו ספרתיים הם אי זוגיים?
   ג. כמה מספרים דו ספרתיים מתחלקים ב 5 ללא שארית?
   ד. כמה מספרים דו ספרתיים אינם מתחלקים ב 5?
   ה. בכמה מספרים דו ספרתיים אי זוגיים הספרות שונות זו מזו?
   ו. כמה מספרים 4 ספרתיים קיימים?
   ז. בכמה מספרים 4 ספרתיים הספרה 1 אינה מופיעה?
   ח. בכמה מספרים 4 ספרתיים אין ספרות צמודות זהות?
11. סיסמת מחשב בנויה מ 5 תווים: 2 אותיות (קטנות) באנגלית ו 3 ספרות. כמה סיסמאות מחשב שונות תיתכנה?
12. מהו מספר הדרכים למלא טופס טוטו (16 משחקים בסימונים x,1,2)?
13. מטילים 3 קוביות משחק שונות, כמה תוצאות שונות תיתכנה?
14. כמה מילים שונות בנות 2 אותיות, אשר לפחות אחת מהן היא: A ניתן ליצור מהאותיות A-Z?
15. במסיבה n משתתפים. כל אחד אומר לשני שלום ולוחץ את ידו
   א. כמה אמירות שלום נאמרו במסיבה?
   ב. כמה לחיצות ידיים נלחצו במסיבה?
16. בכמה אופנים שונים ניתן להציב על גבי לוח שחמט ריק 2 צריחים, באופן שלא יאיימו זה על זה, אם: (צריחים מאיימים זה על זה אם הם באותה שורה או עמודה)
   א. ל – 2 הצריחים צבעים שונים?
   ב. ל – 2 הצריחים אותו צבע? (הניחו כי גם צריחים מאותו הצבע מאיימים זה על זה).
17. מהו מספר האפשרויות השונות לבחירת ועד בן 3 אנשים מתוך 30 אנשים כאשר:
   א. בוועד 3 תפקידים שונים?
   ב. אין הבדלי תפקידים בין חברי הוועד? (כמובן כל איש בוועד ממלא תפקיד אחד בלבד)
18. מושיבים n אנשים על גבי ספסל. מהו מספר האפשריות לסידורים, אם:
   א. 2 מתוכם חייבים לשבת זה לצד זה?
   ב. אסור ש 2 מתוכם יישבו זה לצד זה?
   ג. 4 מתוכם חייבים לשבת זה לצד זה?
   ד. k מתוכם חייבים לשבת זה לצד זה?
19. מהו מספר האפשרויות לסידור n אנשים סביב שולחן עגול?
20. מושיבים 5 זוגות סביב שולחן עגול. מהו מספר האפשריות לסידורים, באופן שבין כל 2 נשים ישב גבר?
21.
   א. בכמה מספרים 10 ספרתיים כל הספרות שונות זו מזו?
   ב. בכמה מספרים n ספרתיים כל הספרות שונות זו מזו?
22. בכמה מספרים בין 1000 ל 10000 מופיעות:
   א. הספרות: 3, 5, 7, 8 בלבד?
   ב. הספרות: 0, 3, 5, 7, 8 בלבד?
23. יש 2 מועמדים לתפקיד A, 4 מועמדים לתפקיד B ו 2 מועמדים לתפקיד C. מה מספר האפשרויות לבחירת 3 אנשים לתפקידים C,B,A (אחד לכל אחד)?
24. מבחן מכיל 5 קבוצות של שאלות, המורכבות בהתאמה מ 4, 2, 3, 5, 10 שאלות. תלמיד צריך להשיב על שאלה אחת מכל קבוצה. מה מספר האופנים לבחירת שאלות במבחן זה?
25. בקיבוץ בוחרים 2 אנשים לתפקיד יו"ר וגזבר. יש 4 מועמדים ל – 2 תפקידים אלו. מה מספר אופני הבחירה?
26. 3 אנשים נכנסים למונית ובה 6 מושבים. בכמה אופנים הם יכולים להתיישב.
27. מסובבים 2 סביבוני חנוכה. מה מספר התוצאות האפשריות?
28. כספת נפתחת ע"י צירוף של 6 ספרות. צירוף זה מתקבל מסיבוב של 6 שרשראות של ספרות. בכל שרשרת כזו יש 10 ספרות: מ -0 עד 9. כמה הרכבים של 6 ספרות אפשריים?

תרגול 2 – בעיות מניה בסיסיות

1. נתון א"ב סופי המכיל את כל הספרות $9-0$ ואת כל האותיות a-z.
   א. כמה מחרוזות באורך k ניתן לייצר מא"ב זה?
   ב. כמה מחרוזות באורך k המתחילות באות אנגלית ניתן לייצר מא"ב זה?
2. בתחרות שש-בש אזורית מעניקים לזוכים (היחידים) במקומות הראשון, השני והשלישי מדליות: זהב, כסף וארד בהתאמה. אם בתחרות מתמודדים 10 שחקנים, כמה רשימות זוכים במדליות תיתכנה?
3. בכמה דרכים ניתן לבחור זוג אנשים מתוך n אנשים?
4. בכיתה 4 בנות ו 9 בנים. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד שיכלול 2 בנות ו 3 בנים?
5. בחינה מורכבת מ 3 חלקים: בחלק א' יש לענות על 3 שאלות מתוך ה 5, בחלק ב' יש לענות על 4 שאלות מתוך 6 ובחלק ג' יש לענות על 2 שאלות מתוך 3. בכמה דרכים שונות יוכל נבחן לבחור את השאלות עליהן יענה?
6. מהו מספר הסדרות הבינאריות המורכבות מ x אפסים ו y אחדות?
7. כמה מילים שונות בנות 9 אותיות (לאו דווקא בעלות משמעות) ניתן ליצור מ – 7 "a" ו – 2 "b"?
8. נתונים n אחדים ו m אפסים $(m > n)$.
   א. מהו מספר האפשרויות השונות לסדרם בשורה, כך שאין שני אחדים סמוכים?
   ב. מהו מספר האפשרויות השונות לסדרם בשורה, כך שיש לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים?
9. בהינתן קבוצה בת n איברים, כמה תתי-קבוצות בגודל של לפחות k יש לה?
10. מהו מספר הדרכים לחלוקת קבוצה בת 4 איברים ל 2 תתי קבוצות זרות ומשלימות?
11. מעוניינים לאחסן 10 ספרים ב 2 קופסאות, אשר בכל אחת מהן מקום ל 6 ספרים, בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם:
   א. 2 הקופסאות שונות זו מזו?
   ב. 2 הקופסאות זהות?
12. בכמה דרכים ניתן לחלק 4 נשים ו 10 גברים ל 2 קבוצות בנות 7 אנשים כל אחת, כך שבכל קבוצה תהיה לפחות אישה אחת.
13. בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 2n אנשים ל n זוגות:
   א. עם חשיבות לסדר בין הזוגות?
   ב. ללא חשיבות לסדר בין הזוגות?
14. מטילים k קוביות משחק זהות, כמה תוצאות שונות תיתכנה?
15. כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$?
16. כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש לאי השוויון: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k$?
17. בכמה דרכים שונות ניתן לפזר 20 כדורים זהים ב 4 תאים שונים כאשר: בתא השני יהיו לפחות 3 כדורים, בתא השלישי יהיו לפחות 2 כדורים ובתא הרביעי יהיו לפחות 5 כדורים?
18. כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ המקיימים: $0 \leq x_1 \leq 20,\ 3 \leq x_2 \leq 20,\ 2 \leq x_3 \leq 20,\ 5 \leq x_4 \leq 20$.
19. כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש לאי השוויון: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 12$ כאשר: $x_i \in \{0,1,\ldots,20\}$.

תרגול 3 – הבינום של ניוטון וזהויות

1. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
2. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
3. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
4. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
5. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ ע"י הוכחה קומבינטורית.
6. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
7. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
8. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n * 2^{n-1}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית
9. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$ ע"י הוכחה קומבינטורית.
10. הוכח את הזהות הבאה: $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

תרגול 4 – הכלה והדחה

1. במאורת עכברים מתגוררים עכברים שכולם אוהבים גבינה. ישנם 2 סוגי גבינה. לכל עכבר יש זנב, שיכול להיות ארוך או קצר. ידוע כי:
   - 10 עכברים הם בעלי זנב ארוך.
   - 9 עכברים אוהבים גבינה רכה.
   - 7 בעלי זנב ארוך אוהבים גבינה רכה.
   - 5 עכברים אוהבים גבינה קשה.
   - 4 בעלי זנב ארוך אוהבים גבינה קשה.
   - 2 עכברים אוהבים את 2 סוגי הגבינות.

   א. כמה בעלי זנב ארוך אוהבים את 2 סוגי הגבינות?
   ב. כמה בעלי זנב קצר אוהבים את 2 סוגי הגבינות?
   ג. כמה עכברים במאורה.
2. בקבוצה יש סטודנטים שמתגוררים או בחיפה או בתל אביב, ידוע כי מתוכם:
   - 16 סטודנטים מתגוררים בחיפה.
   - 15 סטודנטים לומדים קומבינטוריקה למדעי המחשב.
   - 12 סטודנטים לומדים קומבינטוריקה למדעי המחשב ומתגוררים בחיפה.
   - 10 סטודנטים לומדים אלגברה א'.
   - 7 סטודנטים לומדים אלגברה א' ומתגוררים בחיפה.
   - 5 סטודנטים לומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א'.

   כל סטודנט לומד לפחות אחד מהקורסים קומבינטוריקה למדעי המחשב ואלגברה א'

   א. כמה סטודנטים מתגוררים בחיפה ולומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א'?
   ב. כמה סטודנטים מתגוררים בתל אביב ולומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א'?
   ג. כמה סטודנטים יש בקבוצה?
3. לראובן 8 חברים. בכל ערב הוא מזמין בדיוק 4 חברים לארוחת ערב. ראובן הבטיח שכל חבר יוזמן לפחות פעם אחת. בכמה דרכים יכול ראובן להזמין את חבריו לארוחות ערב במשך שבעה ימים רצופים ועדין לקיים את הבטחתו?
4. כמה פרמוטציות שונות של 22 אותיות הא"ב העברי קיימות, שבהן לא מופיעה אף אחת מהמחרוזות, "אינ", "גדולה" , "כמו" , "ביתר"?
5. מטילים 9 קוביות משחק שונות:

   א. בכמה מההטלות האפשריות ישנן בדיוק 3 קוביות שמראות את המספר 6.
   ב. בכמה מההטלות האפשריות לא קיים אף מספר כך ש 3 קוביות בדיוק מראות אותו?
   ג. בכמה מההטלות האפשריות יש לפחות מספר אחד כך ש 3 קוביות בדיוק מראות אותו?
6. בכמה אופנים ניתן להושיב n זוגות אנשים סביב שולחן עגול כך שאף אחד לא ישב ליד בן הזוג שלו?
7. בתור לכרטיסי צילום עומדים n סטודנטים. מה מספר האפשרויות לסדר מחדש את התור כך ששום סטודנט לא יראה לפניו את אותו סטודנט שהוא רואה עכשיו.
8. בכיתה כל תלמיד הוא בעל צמה או פירסינג בגבה. ידוע כי 30 מתלמידי הכיתה הינם בעלי צמה וכי ל 42 מתוכם יש פירסינג בגבה. אם ל 20 תלמידים יש צמה ופירסינג בגבה, כמה תלמידים בכיתה?
9. בקרב 100 אומנים, 30 מנגנים, 25 מציירים ו 8 מנגנים ומציירים. כמה מתוך אותם אומנים אינם מנגנים ואינם מציירים?
10. כמה מספרים בין 1 ל 3000 אינם מתחלקים לא ב 3 ולא ב 5?
11. כמה מספרים בין 1 ל 3000 אינם מתחלקים לא ב 3 ,לא ב 5 ולא ב 7?
12. בכמה מספרים 4 ספרתיים יש לפחות ספרה אחת שהיא 2, לפחות ספרה אחת שהיא 3 ולפחות ספרה אחת שהיא 4?
13. מטילים n קוביות משחק שונות

    א. מהו מספר התוצאות האפשריות להטלה זו?
    ב. מהו מספר התוצאות האפשריות בהטלה זו, בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1-6 לפחות פעם אחת?
14. בכמה דרכים ניתן לפזר 80 כדורים זהים ב 5 תאים שונים, כך שבאף תא לא יהיו יותר מ 24 כדורים?
15. כמה פתרונות שלמים המקיימים: $1 \le x_1, x_2, \dots, x_6 \le 4$ יש למשוואה $\sum_{i=1}^{6} x_i = 20$.
16. בכמה דרכים שונות ניתן לקבל את הסכום 18 בסדרה של 4 הטלות של קוביית משחק?
17. מה מספר הסידורים (ללא חזרות) של MATHEMATICS שאינן מכילות את התת-סדרות MAT, CAT, THE?
18. מה מספר הפתרונות (בטבעיים) למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$ כאשר לכל i, $i \le x_i \le 3i$?
19. נתונה קבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. כמה סדרות שונות באורך $2n$ ניתן ליצור מאברי הקבוצה, כך שכל איבר יופיע פעמיים ולא יהיו שני איברים זהים סמוכים?
20. א. בכמה דרכים ניתן להציב על לוח שחמט 8 צריחים כך שלא יאיימו זה על זה?

    ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שאף צריח לא יוצב על האלכסון הלבן (האלכסון הראשי)?
    ג. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם על כל הצריחים להיות על משבצות לבנות אך לא על האלכסון?
21. בכמה דרכים ניתן להושיב n זוגות על ספסל כך שאף אישה לא תשב לצד בעלה?
22. בכמה אפשרויות אפשר לסדר את האותיות $\{a, a, b, b, c, c, d, d\}$ כך שלא יהיה אף זוג צמוד של אותה אות?
23. הוכח את הזהות: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i+k-1}{k} = \binom{k-1}{k-n}$ בדרך קומבינטורית.

תרגול 5-6 – נוסחאות נסיגה

הגדרה רקורסיבית

תן הגדרה רקורסיבית לקבוצות הבאות (רשום גם תנאי התחלה):

א. קבוצת השלמים המתחלקים ב 5 ללא שארית.
ב. קבוצת המספרים הטבעיים המסתיימים בספרה 2 או 5.
ג. הקבוצה: $A = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ עם תנאי התחלה: $8 \in A$.
ד. הקבוצה: $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.
ה. הקבוצה: $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{N}\}$

בניית נוסחאות נסיגה

1. רשום נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר תתי הקבוצות מתוך קבוצה בגודל n.
2. מצא נוסחת נסיגה (כולל תנאי התחלה) למספר הדרכים לבניית מספר טבעי (גדול מ 0) מאורך n בו:

   א. אין 2 ספרות זוגיות סמוכות ואין 2 ספרות אי זוגיות סמוכות.
   ב. אין 2 ספרות זוגיות סמוכות.
3. רשום נוסחת נסיגה למספר המילים באורך n מעל $\{a, b, c, d\}$ בהן לא מופיע הרצף ab ולא הרצף: bc.
4. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש n אנשים היושבים על ספסל כך שאף אדם לא יתרחק ביותר מכסא אחד ממקום ישיבתו המקורי? רשום נוסחת נסיגה מתאימה.
5. רשום נוסחת נסיגה למספר המילים באורך n מעל הא"ב העברי בהן לא מופיעות זוג אותיות זהות ברצף.
6. כמה תתי קבוצות של $\{1,2, \dots n\}$ ישנן, כך שכל תת קבוצה אינה מכילה זוג מספרים עוקב? רשום נוסחא רקורסיבית.
7. מה מספר האפשרויות לסדר n אנשים בשורה כך שאף אחד לא יישאר במקומו?
   רשום נוסחא רקורסיבית.
8. מצאו נוסחת נסיגה למילים הבינאריות באורך n שלא מופיע בהן הרצף 101.
9. מכונת ממתקים מחזירה עודף במטבעות של 1,2 או 5 שקלים. אם היא צריכה להחזיר עודף של n שקלים, בכמה דרכים היא יכולה להחזיר את העודף?

פתרון נוסחאות נסיגה

1. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות ע"י שימוש בשיטת ההצבה החוזרת

   א. $f(n) = f(n-1) + 2n \quad , f(1) = 2$
   ב. $f(n) = 4f(n-1) \quad , f(1) = 5$
   ג. $f(n) = 3f(n-1) + 2 \quad , f(1) = 1$
   ד. $f(n) = n^2 f(n-1) \quad , f(1) = 1$
   ה. $f(n) = 3f(n-1)^2 \quad , f(1) = 2$
2. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות ע"י שימוש בפולינום האופייני:

   א. $f(n) = 2f(n-1) \quad , f(1) = 3$
   ב. $3f(n) = 2f(n-1) + f(n-2) \quad , f(0) = 7, f(1) = 3$
   ג. $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2) \quad , f(0) = 0, f(1) = 2$
   ד. $f(n) = 5f(n-1) + 6(n-2) \quad , f(0) = 1, f(1) = 3$
   ה. $f(n) - 6f(n-1) + 8f(n-2) = 0 \quad , f(0) = 0, f(1) = 2$
   ו. $f(n) = -5f(n-1) - 9(n-2) \quad , f(0) = 3, f(1) = 4$
   ז. $f(n) + 2f(n-1) + f(n-2) + 2f(n-3) = 0$
   $, f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1$
   ח. $f(n) = -f(n-1) + 4f(n-2) + 4f(n-3)$
   $, f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3$
   ט. $f(n) - 6f(n-1) + 9f(n-2) = 0 \quad , f(0) = 2, f(1) = 3$
   י. $f(n+1) = 5f(n) - 6f(n-1) = 0 \quad , f(0) = 1, f(1) = 3$
   יא. $f(n+1) = 6f(n) - 9f(n-1) = 0 \quad , f(0) = 1, f(1) = 4$
   יב. $f(n) + 4f(n-1) - 3f(n-2) - 18f(n-3) = 0$
   $, f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 13$
   יג. $f(n) = 3f(n-2) - 2f(n-3) \, , f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 8$
   יד. $f(n) + 6f(n-1) + 12f(n-2) + 8f(n-3) = 0$
   $, f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 8$
   טו. $f(n+4) = 4f(n+3) - 6f(n+2) + 4f(n+1) - f(n),$
   $f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 8$
   טז. $f(1) = 2 \;,\; f(0) = 1 \;,\; f(n) = 3f(n-1) + 2n$
   יז. $f(2) = 3 \;,\; f(0) = 1 \;,\; f(n) = f(n-1) + 5 + n$
   יח. $f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2) + 3 + n^2$
   יט. $f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2) - 2f(n-3) + 2$

תרגול 7 – קצב גידול של פונקציות

1. *הוכח או הפרך את הטענות הבאות:*

   א. $2n^4 + n = O(n^5)$
   ב. $\sqrt{n} + \left(\frac{n}{9}\right)^2 = \Theta(n^2)$
   ג. $\binom{n}{5} = \Omega(n^5)$
   ד. $(\ln n^2)^n = O(2^n)$
   ה. $2^{\frac{n}{2}} = \Theta(2^n)$
   ו. $(n!)^{(n!)} = o(n^n)$
   ז. $(\sqrt{\log n})^{\log n} = \Omega(n^k)$ *עבור* $1 < k \in N$ *כלשהו.*
   ח. $e^{\frac{1}{n}} = \Omega(n^k)$ *עבור* $1 < k \in N$ *כלשהו.*
   ט. $k^{\log n} = o(n^2)$ *עבור* $1 < k \in N$ *כלשהו.*
   י. $(2 + \frac{1}{\ln n})^{n^2} = \Theta(3^n)$
2. *מצא הערכה אסימפטוטית (חסם הדוק) לפונקציות הבאות, הוכח!*

   א. $(\sqrt[3]{n} + (\ln n)^2)^{\sqrt{n}}$
   ב. $\sum_{k=1}^{n} k^2$
   ג. $\binom{n}{4}$
   ד. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\log n}}{2^k}$
3. *הוכח או הפרך את התכונות הבאות:*

   א. *אם* $f = O(g)$ *אז* $f + g = \Theta(g)$
   ב. *אם* $f = O(g)$ *אז* $f \cdot g = \Theta(g^2)$
   ג. $O(f)$ *טרנזיטיבי.*

תרגול 8 – תורת הגרפים 1

1. א. יהא k מספר אי זוגי. הוכח: קיים גרף k רגולרי מסדר n אם ורק אם n זוגי.

ב. תן 3 דוגמאות לגרפים 3 רגולריים מסדר 10. הראה שאינם איזומורפיים.

2. הוכח שהעובדות הבאות שקולות: (1) G עץ. (2) G גרף מקסימאלי ללא מעגלים.

3. יהי G גרף פשוט מסדר גדול מ 1. הוכח: קיימים 2 קודקודים ב G עם דרגה זהה.

4. מצא את הגרפים הפשוטים בהם יש <u>בדיוק</u> 2 קודקודים עם דרגה זהה.

5. הוכח: לכל גרף G מתקיים: G קשיר או הגרף המשלים של G קשיר.

6. הוכח: גרף G קשיר אם ורק אם G אינו איחוד זר של גרפים.

7. האם קיים גרף עם סדרת הדרגות הבאה:
   א. 3,3,3,3,3,3
   ב. 3,3,3,3,3
   ג. 1,1,2,3,4,5

8. האם ייתכן כי בגרף G בו דרגת כל קודקוד שווה ל 3 יהיו 100 צלעות?

9. מהו הקוטר המרבי של גרף קשיר עם n קודקודים?

10. יהי G גרף לא מכוון ולא קשיר עם 2 רכיבי קשירות. הוכח כי הקוטר של הגרף המשלים של G הוא לכל היותר 2.

11. הוכח כי אם בגרף G יש n קודקודים , $n+4$ קשתות וכל הדרגות לפחות 3, אז $n \geq 8$.

12. הוכח כי אם בגרף n קודקודים שדרגת כולם לפחות 3 ואין בו מעגל באורך לכל היותר 4 אז: $n \geq 10$.

13. הוכח שהגרף עם 100 קודקודים שדרגת כולם היא לפחות 50 הוא גרף קשיר.

14. הוכח כי אם בגרף פשוט עם n קודקודים אין משולש אז יש בו לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ קשתות.

15. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט עם n קודקודים. k מספר טבעי כלשהו ו $u,v \in V$ קודקודים לא סמוכים בעלי דרגה שהיא לפחות: $\frac{n+k}{2}$.
הוכח: ל u ו v לפחות $k+2$ שכנים משותפים.

16. הוכיחו כי בכל קבוצה בת מספר זוגי של אנשים יש לפחות 2 אנשים שמספר המכרים המשותף שלהם זוגי.

17. יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. הוכח כי אם לכל $e \in E$ הגרף: $G-\{e\}$ הוא עץ, אז G הוא מעגל.

18. כמה מעגלים פשוטים שונים ייתכנו לכל היותר בגרף בעל n קודקודים?

19. הוכח כי אם הגרף הדו צדדי: $G=(V,E)$ עם חלוקה ל 2 קבוצות A ו B מכיל מעגל המילטוני אז $|A|=|B|$.

20. יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכח ש G קשיר ושהקוטר של G הוא לכל היותר 2.

21. הוכח שכל עץ בעל $n \geq 2$ (n סופי) קודקודים מכיל עלה.

22. הוכח שמספר הצלעות בעץ בעל n קודקודים הוא $n-1$.

23. הוכח כי אם משמיטים עלה מעץ מקבלים גרף שהוא עץ.

24. הוכח שאם בגרף $G=(V,E)$ מתקיים: $|E| \geq |V|$ אז ב G יש מעגל.

תרגול 9 – תורת הגרפים 2

25. יהי G גרף פשוט כאשר: $|V|=n$ ו $|E|=m$ ($m,n \in N^+$) הוכח: אם $m<n-1$ אז יש ב G לפחות $n-m$ רכיבי קשירות.

26. יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, ותהא $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, הוכח כי קיים $v \notin S$ כך שיש ל v שכן ב S.

27. יהא T עץ. הוכח כי לאחר הוספה של קודקוד וחיבורו בדיוק לקודקוד אחד ב T נקבל עץ.

28. הוכח: G גרף דו צדדי אם ורק אם כל המעגלים בו הם באורך זוגי.

29. הוכח כי k_5 אינו מישורי.

30. הוכח: גרף חסר מעגלים הוא 2 צביע.

31. יהי G גרף מישורי עם k רכיבי קשירות ועם קבוצת פאות F, הוכח כי מתקיים:

$|V|-|E|+|F|=1+k$.

32. הוכח שבגרף G שמספר הצביעה שלו הוא $\chi(G)=k$ יש לפחות $\binom{k}{2}$ צלעות.

33. יהא G גרף פשוט בעל מספר צביעה $\chi(G)=k$ הוכח שיש ב G לפחות kקודקודים שדרגתם לפחות $k-1$.

34. הוכח כי בעץ יש יותר עלים מאשר קודקודים מדרגה שהיא לפחות 3.

35. יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ גרפים מישוריים על אותה קבוצת קודקודים. הוכח כי הגרף $G=(V,E_1 \cup E_2)$ הוא 12 צביע.

36. יהיו $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ 2 עצים על אותה קבוצת קודקודים. הוכח כי קיים קודקוד $v \in V$ שסכום דרגותיו ב 2 העצים הוא לכל היותר 3.

37. הוכח: כל גרף מישורי הוא 6 צביע.

38. יהא G גרף על 6 קודקודים. הוכח: אם אין ב G משולש אז ב $\bar{G}$ יש משולש.

39. הוכח שעבור $K_{n,m}$ מתקיים: $\chi(K_{n,m})=\max(n,m)$.

40. יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ גרפים 3 - צביעים על אותה קבוצת קודקודים. הוכח כי הגרף $G=(V,E_1 \cup E_2)$ הוא 9 צביע.

תרגול 10 – תורת הגרפים וקומבינטוריקה

41. יהא K_n הגרף השלם על n קודקודים. מהו מספר האפשרויות להסיר צלעות מהגרף כך שהגרף יישאר קשיר?

42. מהו מספר הקליקות K_r שיש בתוך הגרף השלם K_n?

43. נתון גרף G לא מכוון עם 3 רכיבי קשירות כאשר גודל כל אחד מהם הוא 10,20,30. מה מספר האפשרויות להוסיף 2 צלעות כך שהגרף יהפוך להיות קשיר?

44. א. הוכח כי $R(2,n)=n$ לכל n טבעי.

ב. הוכח כי $R(3,4)=9$.

45. נתון גרף דו צדדי $G=(A,B,E)$ כאשר $|A|=10$ ו $|B|=12$
   א. מהו מספר האפשרויות למספר הקשתות בגרף?
   ב. מהו מספר האפשרויות למספר הקשתות בגרף כך שכל קודקוד ב B יהיה לפחות עם דרגה 1?

46. מהו מספר האפשרויות לצבוע עץ באמצעות $n-k$ צבעים שונים ($k \geq 1$) כך שכל צבע יופיע לפחות פעם אחת?

47. מהו מספר האפשרויות לצבוע את K_n ב 2 צבעים כך שיהיה בגרף לפחות משולש אחד חד צבעי?

48. נתונים k מעגלים c_{2n} - בכל אחד מהמעגלים $2n$ צלעות, ונתונים r צבעים ($r<k$). מהו מספר האפשרויות לצבוע את קודקודי המעגלים כך שלא יהיו 2 קודקודים סמוכים הצבועים באותו צבע תוך שימוש בכל הצבעים, 2 צבעים לכל מעגל?

49. נתון גרף עץ בצורה הבאה: בגובה ה 0 של העץ יש שורש ולו 2 בנים. לכל בן יש 3 בנים (נכדים) וכן הלאה כך שלקודקוד בגובה i יש $i+2$ בנים. מהו מספר המסלולים הפשוטים בין השורש לקודקוד בגובה i בעץ?

פתרונות לתירגולים

חחח

עקרון החיבור והמכפלה

1.
- ג. $5+6+10=21$
- ד. $5*6*10=300$

2. $12*2*4*3=288$

3.
- ג. $(3+2)*(2+3)=25$
- ד. $(3*2)+(2*3)=12$

4. $2000=2^4*5^3\rightarrow 5*4=20$
5. $56*6=7A\rightarrow A=48$
6. $8!=40320$
7. $4*8=32$
8. $n*(n-1)$
9.
- ג. $26^5=11881376$
- ד. $26*25*24*23*22=7893600$

10.
- ט. $9*10=90$
- י. $9*5=45$
- יא. $9*2=18$
- יב. $90-18=72$
- יג. $5*4+4*5=40$
- יד. $9*10*10*10=9000$
- טו. $8*9*9*9=5832$
- טז. $9*9*9*9=6561$

11. $26^2*10^3=676000$
12. $3*3*\dots_{x16}*3=3^{16}=43046721$
13. $6*6*6=216$
14. $1*26+25*1=51$
15.
- ג. $n(n-1)$
- ד. $(n-1)+(n-2)+\dots+1$

16.
- ג. $64*49=3136$
- ד. $8*7*(7+6+5+4+3+2+1)=1568$

17. מהו מספר האפשרויות השונות לבחירת ועד בן 3 אנשים מתוך 30 אנשים כאשר:
- ג. $30*29*28=24360$
- ד. $\binom{30}{3}$

18. מושיבים n אנשים על גבי ספסל. מהו מספר האפשרויות לסידורם, אם:
- ה. $(n-1)!*2!$
- ו. $n!-(n-1)!*2!$
- ז. $(n-3)!*4!$
- ח. $(n-k-1)!*k!$

19. $(n-1)!$
20. $5!*4!$
21.
- ג. $9!*9$
- ד. עבור $0<n\leq 10$: $9*9*8*\dots$

22.
- ג. $4*4*4*4$
- ד. $4*5*5*5$

23. $2*4*2=16$
24. $10*5*3*2*4$
25. $4*3=12$
26. $6*5*4=120$
27. $4*4=16$
28. 10^6

תרגול 2 – בעיות מניה בסיסיות

1.
- ג. 36^k - אין הגבלה על הסימנים (36 סימנים סה"כ), יש חשיבות לסדר ויש חזרות.
- ד. $26*36^{k-1}$ – חייבים להתחיל באות אנגלית וכל שאר הסימנים כמו בסעיף א'.

2. $8*9*10$ – יש חשיבות לסדר (סוגי מדליות) ואין חזרות (אדם אחד לא יכול לזכות ב 2 מדליות).

3. $\binom{n}{2}$ – בחירת זוג אנשים מתוך n כאשר אין חשיבות לסדר ואין חזרות.

4. $\binom{4}{2}*\binom{9}{3}$ – נבחר 2 בנות מתוך ה 4 ואח"כ נבחר 3 בנים מתוך ה 9 אין חזרות ואין חשיבות לסדר.

5. $\binom{3}{2}*\binom{6}{4}*\binom{5}{3}$ – נבחר בחלק א 3 שאלות מ 5 , בחלק ב נבחר 4 מ 6 ובחלק ג נבחר 2 מ 3 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

6. $\binom{x+y}{x}$ - סה"כ הסימנים x+y (x אפסים ו y אחדות) , נבחר את x המקומות עבור האפסים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר וממילא ייבחרו y המקומות הנותרים עבור האחדות.

7. $\binom{9}{7}$ - סה"כ הסימנים 2+7 (7 a ו 2 b) , נבחר את 7 המקומות עבור ה a ללא חזרות וללא חשיבות לסדר וממילא ייבחרו 2 המקומות הנותרים עבור ה b.

8.
- ג. $\binom{m+1}{n}$ - בהנחה ש n<m (אחרת אין אפשרות שלא יהיו אחדות סמוכים). נסדר את m האפסים בצורה כזו שנשאיר בין כל 2 אפסים מקום פנוי לאחדות. מספר המקומות הפוטנציאלים הוא m+1 ולכן נבחר את n המקומות מתוך m+1 שבהם נשים את האחדות.
- ד. $\binom{n+1}{m}-\binom{m+n}{n}$ – נשתמש בשיטת המשלים – נחשב סה"כ האפשרויות לסדר m אפסים ו n אחדות בדומה לשאלה 6 ונחסיר את מספר המקרים בהם יש אפסים סמוכים בדומה לסעיף א' (רק שכאן זה עבור האפסים).

9. $\binom{n}{n}+\dots+\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$ – מספר תתי הקבוצות באורך k הוא בדיוק בחירת k איברים מתוך n איברי הקבוצה, כנ"ל לגבי תת קבוצה בגודל k+1 וכן הלאה.

10. $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$ – נבחר תת קבוצה עם 4 איברים והשנייה עם 0 איברים או שנבחר תת קבוצה עם 3 איברים והאיבר הנותר יהיה בקבוצה השנייה או שנבחר תת קבוצה עם 2 איברים וה 2 האחרים יהיו בקבוצה השנייה.

11.
- ג. $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}$ - נבחר 6 ספרים לקופסא מספר 1 וה 4 האחרים יהיו בשנייה או שנבחר 5 לקופסא הראשונה וה5 האחרים יהיו בשנייה או שנבחר 4 לראשונה וה 6 הנותרים יהיו בשניה.
- ד. $\binom{10}{5}+\binom{10}{6}$ - כמו סעיף א' , רק שאין מונים את 6-4 ו 4-6 כשתי אפשרויות נפרדות.

12. $\binom{12}{6}*\binom{4}{2}$ – אין חשיבות לסדר של הקבוצות ולכן נבחר 2 נשים ונחלק אותן אחת לכל קבוצה. לאחר מכן נשלים את הקבוצות ע"י בחירת 6 אנשים מתוך 12 הנותרים לאחת הקבוצות (וממילא ה 6 הנותרים יהיו בקבוצה השנייה).

13.
- ג. $\binom{2}{2}*\dots*\binom{2n-2}{2}*\binom{2n}{2}$ – נבחר 2 אנשים מתוך 2n הזוגות לזוג הראשון, מבין הנותרים, נבחר זוג נוסף וכן הלאה.
- ד. $\binom{2}{2}*\dots*\binom{2n-2}{2}*\binom{2n}{2}*\frac{1}{n!}$ - כמו ב א' רק שצריך להוריד את הסדר בין הזוגות (התמורות ביניהן).

14. $\binom{6-1+k}{k}$ – מספר התוצאות: n=6 , מספר הניסיונות: k עם חזרות על התוצאות של ההטלות וללא חשיבות לסדר.

15. $\binom{n-1+k}{k}$ - מספר המשתנים (התאים): n, מספר העצמים לחלוקה: k עם חזרות על הערכים של המשתנים וללא חשיבות לסדר.

16. $\binom{n+k}{k}$ - נוסיף משתנה נוסף שיקבל את ההפרשים בין k לסכום המשתנים ועכשיו הבעיה היא כמו בשאלה 15 רק שעכשיו ישנם n+1 משתנים.

17. $\binom{10+3}{10}$ - נכניס מראש לכל תא את כמות הכדורים המינימאלית הנדרשת בכל תא ונותר לנו לבחור 10 כדורים להכניס ל 3 תאים עם חזרות על התאים וללא חשיבות לסדר.

18. $\binom{10+3}{10}$ - מידול הבעיה זהה לשאלה 17.

19. $\binom{12+n}{12}-20^n$ – נשתמש בשיטת המשלים – סה"כ האפשרויות לערכים האי שליליים של המשתנים פחות סה"כ האפשרויות לפתרון האי שוויון $x_1+x_2+\dots+x_n\leq 12$ (בהתאם לשאלה 16).

תרגול 3 – הבינום של ניוטון וזהויות – תשובות

1. <u>הוכחה אלגברית</u>:

נשתמש בבינום של ניוטון:

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}*1^{n-k}*1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

2^n סופר את מספר כל תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n.

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ סופר את מספר תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n. ומכיוון ש k מקבל ערכים מ 0 עד n וכל k יוצר קבוצות הזרות אחת לשנייה, הסכום של כולם מונה את מספר כל תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n.

2. <u>הוכחה אלגברית</u>:

נשתמש בבינום של ניוטון:

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}*1^{n-k}*(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}*(-1)^k$$

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

נעביר אגפים ונקבל: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}$, כלומר, מספר תתי הקבוצות עם מספר איברים זוגי מתוך קבוצה בגודל n שווה למספר תתי הקבוצות עם מספר אי זוגי של איברים מתוך קבוצה בגודל n.

מכיוון שמספר כל תתי הקבוצות (זוגיים ואי זוגיים) הוא $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ אז לפי שאלה 1, מספיק להוכיח ש: $2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}$ (כי אם מספר הזוגיים והאי זוגיים שווה וסכומם הוא 2^n אז כמות האיברים רק בזוגיים הוא חצי מהכמות הזו). צד שמאל סופר את מספר תתי הקבוצות הזוגיים של קבוצה בגודל n – $(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots)$. צד ימין סופר את מספר תתי הקבוצות של n ללא האיבר האחרון כך: לכל אחת מתתי הקבוצות האלו, אם בחרנו כבר כמות זוגית של איברים אז האיבר האחרון לא ייכנס לקבוצה וקיבלנו קבוצה עם מספר זוגי של איברים, ואם מספר האיברים שבחרנו הוא אי זוגי, נוסיף את האיבר האחרון לקבוצה ושוב קיבלנו קבוצה עם מספר זוגי של איברים וכך למעשה מנינו את כל תתי הקבוצות הזוגיים של קבוצה בגודל n.

3. <u>הוכחה אלגברית</u>:

נתבונן בזהות: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$, לפי הבינום של ניוטון, נוכל לפתוח סוגריים:

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\binom{2n}{2}x^2+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}$$

אנו רוצים למצוא זהות השווה למקדם של x^n שבצד ימין של השוויון ולכן נתמקד בפתיחת הסוגריים במקדמים שנקבל עבור x^n. ונקבל:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}x^n+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}x^n+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}x^n=\binom{2n}{n}x^n$$

נשתמש בזהות: $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ ונשווה מקדמים:

$\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}=\binom{2n}{n}$ ומכאן קיבלנו: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

נשתמש בזהות: $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ ונתבונן בביטוי: $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

בצד ימין אנו סופרים את מספר האפשרויות לבחור n אנשים מתוך קבוצה של n גברים ו n נשים ללא חזרות ללא חשיבות לסדר.

בצד שמאל אנו בוחרים קודם k גברים מתוך קבוצת הגברים ומשלימים ל n אנשים ע"י בחירה של $n-k$ נשים. k יכול לקבל כל מספר מ 0 עד n (כי ייתכן ולא בחרנו גברים כלל או שכולם גברים או מספר כלשהו בין 0 ל n)

ולכן נחבר את כל האפשרויות. קיבלנו שצד ימין של המשוואה וצד שמאל מונים את אותו דבר.

4. <u>הוכחה אלגברית</u>:

$\frac{n!(n-m)!}{m!(n-m)!(k-m)!(n-m-k+m)!}=\frac{n!k!}{k!(n-k)!m!(k-m)!}$ נצמצם:

$\frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}$ מש"ל.

הוכחה קומבינטורית:

רוצים לבחור ועד של k אנשים מתוך n מועמדים ואז לבחור m נציגים לוועד מתוך האנשים שנבחרו לוועד. צד שמאל מגדיר את מספר האפשרויות לעשות זאת. בצד ימין בוחרים קודם את m הנציגים לוועד מתוך n המועמדים ואז משלימים את מספר אנשי הוועד ל k ע"י בחירת $k-m$ האנשים מתוך $n-m$ שנשארו.

5. הוכחה קומבינטורית:

רוצים לבחור k אנשים מתוך m גברים ו n נשים. בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות לעשות זאת (לפי הגדרה). בצד שמאל בוחרים קודם i גברים ומשלימים ל k אנשים ע"י בחירה של $k-i$ נשים. i יכול להיות כל מספר בין 0 ל k ולכן נחבר את האפשרויות. קיבלנו שאנו מונים את אותו דבר בשני צדדי השוויון.

6. הוכחה אלגברית:

$\frac{(2n)!}{2(2n-2)!} = 2 * \frac{n!}{2(n-2)!} + n^2$, נצמצם: $(2n-1)n = (n-1)n + n^2$
ונקבל: $2n^2 - n = 2n^2 - n$.

הוכחה קומבינטורית:

נשתמש בכך ש: $n = \binom{n}{1}$ ונתבונן בביטוי: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}$

בצד שמאל אנו מונים בחירה של 2 אנשים מתוך n גברים ו n נשים.

בצד ימין אנו מחברים את כל האפשרויות לבחירת האנשים כך: או שנבחרו 2 גברים או שנבחרו 2 נשים או שנבחר גבר אחד ואישה אחת.

7. הוכחה אלגברית:

נוכיח באינדוקציה על n: בסיס האינדוקציה: $n=0$, נקבל:
$1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$ ביטוי נכון.

הנחת האינדוקציה:
$\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$ מתקיים עד n כלשהו. צ"ל: שהטענה נכונה עבור $n+1$: $\sum_{i=0}^{n+1}\binom{k+i}{k} = \binom{n+k+2}{k+1}$.

נפתח את הסכום: $\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k} + \binom{k+n+1}{k} = \binom{n+k+2}{k+1}$ ולפי הנחת האינדוקציה: $\binom{n+k+1}{k+1} + \binom{k+n+1}{k} = \binom{n+k+2}{k+1}$ ומכאן:

$\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} + \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} = \frac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)!}$, מכנה משותף:

$(n+1)(n+k+1)! + (k+1)(n+k+1)! = (n+k+2)!$, נצמצם:

$(n+1) + (k+1) = (n+k+2)$ וקיבלנו ביטוי נכון.

הוכחה קומבינטורית:

בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות להכניס n כדורים זהים לתוך $k+2$ תאים (לפי ההגדרה – ללא חשיבות לסדר ועם חזרות).

בצד שמאל אנו מונים את מספר האפשרויות להכניס n כדורים זהים לתוך $k+2$ תאים כאשר בראשון יש כבר $n-i$ כדורים. לדוגמא: אם בראשון יש n כדורים אז מספר האפשרויות לפיזור שאר הכדורים הוא 1 ($\binom{k}{k}$) אם בראשון יש $n-1$ כדורים אז מספר האפשרויות לפיזור שאר הכדורים הוא: $\binom{k+1}{k}$. וכו'. מכיוון ש i יכול להיות כל מספר בין 0 ל n, נחבר את כל האפשרויות ואכן 2 צדדי המשוואה מונים את אותו מספר אפשרויות.

8. הוכחה אלגברית:

נתבונן בבינום של ניוטון עבור: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. נגזור את 2 האגפים לפי x ונקבל: $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$. נציב $x=1$ ונקבל: $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

הוכחה קומבינטורית:

נתבונן בביטוי: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1}$.

בצד ימין אנו מונים את מספר תתי הקבוצות כאשר בוחרים איבר אחד מתוך קבוצה עם n איברים. ואז בונים את כל תתי קבוצות המכילים את אותו איבר שבחרנו. בצד שמאל אנו קודם בונים את כל תתי הקבוצות בגודל k מתוך קבוצה בגודל n ואז בוחרים את האיבר המיוחד מתוך k האיברים שבקבוצה. אכן אנו מונים את אותם אפשרויות ב 2 הצדדים.

9. הוכחה קומבינטורית:

בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות לחלק $2n$ כדורים שונים ל 2 קבוצות: קבוצה א' וקבוצה ב' (יש חשיבות לשם הקבוצה). לכן לכל כדור יש 2 אפשרויות ובסה"כ: 2^{2n} אפשרויות. בצד שמאל אנו מחלקים את הכדורים ל 2 קבוצות מבלי להחליט מי קבוצה א' ומי קבוצה ב' ולכן נוסיף כדור נוסף שיצביע מי זו קבוצה א' (הקבוצה שהוא יהיה בתוכה). ועכשיו נבחר k כדורים לקבוצה אחת מתוך $2n+1$ הכדורים וממילא ייבחרו $2n+1-k$ הכדורים הנותרים לקבוצה השנייה. k יכול להיות כל מספר בין 0 ל n (לא מעבר ל n כי נקבל כפילויות שהרי אנו לא בוחרים את שם הקבוצה אלא הכדור הנוסף הוא זה שייבחר מי זו קבוצה א'). ומכאן ש 2 הצדדים מונים את אותו דבר.

10. הוכחה אלגברית:

$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$, נצמצם: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

הוכחה קומבינטורית:

בצד ימין אנו בוחרים 2 אנשים מתוך $n+1$ אנשים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר. בצד שמאל אנו בוחרים את 2 האנשים עם חשיבות לסדר – את הראשון מתוך $n+1$ האנשים ואז את השני מ n הנותרים. לבסוף אנו מחלקים בסידור שלהם – $2!$ כדי להוריד את המניה של חשיבות הסדר וכך אנו למעשה מונים את אותו דבר כמו בצד ימין.

תרגול 4 – הכלה והדחה

1. א. נגדיר: A – מספר העכברים בעלי זנב ארוך. B – בעלי זנב ארוך שאוהבים גבינה קשה C - בעלי זנב ארוך שאוהבים גבינה רכה. $B \cap C$ - בעלי זנב ארוך שאוהבים את 2 סוגי הגבינות. $|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$ ומכאן: $|B \cap C| = |B| + |C| - |A|$.

לפי הנתונים: $|B \cap C| = 4 + 7 - 10 = 1$.

ב. מכיוון ש 2 עכברים אוהבים את 2 סוגי הגבינות ואחד מהם הוא בעל זנב ארוך בהכרח השני בעל זנב קצר.

ג. בעלי זנב קצר שאוהבים גבינה רכה: $9 - 7 = 2$,

בעלי זנב קצר שאוהבים גבינה קשה: $5 - 4 = 1$, בעלי זנב קצר שאוהבים את 2 הסוגים: 1 ולכן סה"כ בעלי זנב קצר: $2 + 1 - 1 = 2$ ומכאן סה"כ עכברים במאורה: $10 + 2 = 12$.

2. א. נגדיר: A – סטודנטים מתגוררים בחיפה. B – סטודנטים שלומדים קומבינטוריקה למדעי המחשב ומתגוררים בחיפה. C - סטודנטים שלומדים אלגברה א' ומתגוררים בחיפה. $B \cap C$ - סטודנטים שלומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א' ומתגוררים בחיפה. $|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$ ומכאן: $|B \cap C| = |B| + |C| - |A|$.

לפי הנתונים: $|B \cap C| = 12 + 7 - 16 = 3$.

ב. 5 סטודנטים לומדים את 2 הקורסים ו 3 מהם גרים בחיפה ולכן 2 סטודנטים גרים בתל אביב ולומדים את 2 הקורסים.

ג.סטודנטים הגרים בתל אביב ולומדים קומבינטוריקה: $15 - 12 = 3$. סטודנטים הגרים בתל אביב ולומדים אלגברה א': $10 - 7 = 3$. סטודנטים הגרים בתל אביב ולומדים את 2 הקורסים: 2. ולכן מספר הסטודנטים הגרים בתל אביב: $3 + 3 - 2 = 4$ ומכאן סה"כ כל הסטודנטים בקבוצה: $16 + 4 = 20$.

3. נגדיר: A_i - החבר ה i ($1 \le i \le 8$) אינו מוזמן כלל. נקבל: סה"כ האפשרויות ללא הגבלה: $|U| = \binom{8}{4}^7$, $|A_i| = \binom{7}{4}^7$ - כי בכל יום מ 7 הימים ראובן בוחר 4 חברים להזמין (מתוך 7 הנותרים). $|A_i \cap A_j| = \binom{6}{4}^7$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5}{4}^7$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{4}{4}^7$, כל שאר החיתוכים הם 0 (כי ראובן צריך להזמין 4 חברים בכל יום ויישארו פחות מ 3). אנו מחפשים:

$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8|$, כלומר, כולם מוזמנים.

ולכן: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8| = \sum_{i=1}^{8}|A_i| - \sum_{1 \le i<j}^{8}|A_i \cap A_j| +$

$+ \sum_{1 \le i<j<k}^{8}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \le i<j<k<l}^{8}|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$

נציב: $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8}| = \binom{8}{4}^7 - \left[8 \cdot \binom{7}{4}^7 - \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4}^7 + \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4}^7 - \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}^7\right]$

4. נגדיר: A – מופיעה המחרוזת "אינ". B – מופיעה המחרוזת "גדולה". C – מופיעה המחרוזת "כמו". D – מופיעה המחרוזת "ביתר". $|A| = 20!$, $|B| = 18!$, $|C| = 20!$, $|D| = 19!$, $|A \cap B| = 16!$, $|A \cap C| = 18!$ $|A \cap D| = 0$, $|B \cap C| = 0$, $|B \cap D| = 15!$, $|C \cap D| = 17!$, $|A \cap B \cap C| = 0$, $|A \cap B \cap D| = 0$,

$|A \cap C \cap D| = 0$, $|B \cap C \cap D| = 0$, $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. ומכאן:
$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap D| - |C \cap D|$

נציב ונקבל את מספר הפרמוטציות בהן מופיעות המחרוזות ולכן לפי שיטת המשלים, התשובה תהיה: $22! - |A \cup B \cup C \cup D|$.

5. א. נבחר את הקוביות שמראות 6 : $\binom{9}{3}$. לכל אחת משאר הקוביות יש 5 אפשרויות. ובסה"כ: $\binom{9}{3} \cdot 5^6$.

ב. סה"כ: 6^9 אפשרויות. נגדיר: A_i ($1 \le i \le 6$) – בדיוק 3 קוביות מראות i.

$|A_i| = \binom{9}{3} \cdot 5^6$, $|A_i \cap A_j| = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot 5^3$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}$,

שאר החיתוכים – 0 כי אין אפשרות שמתוך 9 קוביות יהיו יותר מ 3 מספרים שמופיעים 3 פעמים. אנו מחפשים: $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6|$ ולכן התשובה:

$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6}| = 6^9 - [6 \cdot \binom{9}{3} \cdot 5^6 - \binom{6}{2} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot 5^3 + \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}]$

ג. כמו ב – ב' רק שבסעיף זה אנו מחפשים: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6|$

6. נגדיר A_i - הזוג ה i יושבים אחד ליד השני. $|A_i| = (2n-2)!\,2!$,

$|A_i \cap A_j| = (2n-3)!\,2^2$, ...

$\bigcap_{1 \le i1 < \cdots < ik}^{k}|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}| = (2n-k-1)!\,2^k$

ולכן התשובה: $(2n-1)! - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(2n-k-1)!\,2^k$.

7. נגדיר A_i - האדם ה i עדיין רואה את זה שהיה לפניו. $|A_i| = (n-1)!$,

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, ... $\bigcap_{1 \le i1 < \cdots < ik}^{k}|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}| = (n-k)!$

ולכן התשובה: $n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots = n! \cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

8. $30 + 42 - 20 = 52$

9. $100 - (30 + 25 - 8) = 53$

10. נגדיר A_3 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 3. A_5 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 5. ,
$|A_3| = \frac{3000}{3} = 1000$ $|A_5| = \frac{3000}{5} = 600$,

$|A_3 \cap A_5| = \frac{3000}{15} = 200$.

ולכן התשובה: $|\overline{A_3 \cup A_5}| = 3000 - (1000 + 600 - 200) = 1600$.

11. נגדיר A_3 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 3. A_5 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 5. A_5 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 7.

$|A_3| = \frac{3000}{3} = 1000$, $|A_5| = \frac{3000}{5} = 600$, $|A_7| = \left\lfloor\frac{3000}{7}\right\rfloor = 428$,

$|A_3 \cap A_5| = \frac{3000}{15} = 200$, $|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor\frac{3000}{21}\right\rfloor = 142$, $|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor\frac{3000}{35}\right\rfloor = 85$,

$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor\frac{3000}{105}\right\rfloor = 28$.

ולכן התשובה:

$|\overline{A_3\cup A_5\cup A_7}| = 3000-(1000+600+428-142-85-200+28)=1627$.

12. נגדיר: A_2 - המספרים שמופיעה בהם הספרה 2 , A_3 - המספרים שמופיעה בהם הספרה 3 , A_4 - המספרים שמופיעה בהם הספרה 4. אנו מחפשים $|A_2\cap A_3\cap A_4|$.

$|A_2\cap A_3\cap A_4| = |U| - |\overline{A_2\cap A_3\cap A_4}| = 9000 - |\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}| = 9000 - (|\overline{A_2}|+|\overline{A_3}|+|\overline{A_4}| - |\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| - |\overline{A_2}\cap\overline{A_4}| - |\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| + |\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|) = 198$.

13. א. 6^n.

ב. נגדיר: A_i $(1\le i\le 6)$ – המספר i אינו מופיע כלל: $|A_i| = 5^n$, $|A_i\cap A_j| = 4^n$, $|A_i\cap A_j\cap A_k| = 3^n$ ... , $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_6| = 1$.

$|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_6}| = 6^n - [6\cdot5^n - \binom{6}{2}\cdot4^n + \binom{6}{3}\cdot 3^n - \cdots - 1]$.

14. סה"כ הדרכים ללא הגבלה: $\binom{80+5-1}{5-1}$. נגדיר A_i – $(1\le i\le5)$ בתא ה i יש יותר מ 24 כדורים. $|A_i| = \binom{55+5-1}{5-1}$, $|A_i\cap A_j| = \binom{30+5-1}{5-1}$, $|A_i\cap A_j\cap A_k| = \binom{5+5-1}{5-1}$, שאר החיתוכים – 0 כי לא ייתכן שביותר מ 3 תאים יהיו בכל אחד מהם לפחות 25 כדורים.

תשובה: $|\overline{\bigcup_{i=1}^5 A_i}| = |U| - [\sum_{i=1}^5|A_i| - \sum_{1\le i<j}^5|A_i\cap A_j| + \cdots + |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|]$

15. נשים 1 בכל משתנה ונקבל את המשוואה: $\sum_{i=1}^6 x_i = 14$ כאשר $0\le x_1,x_2,\ldots,x_6\le 3$

מידול הבעיה: בכמה דרכים ניתן לפזר 14 כדורים זהים ב 6 תאים שונים, כך שבאף תא לא יהיו יותר מ 3 כדורים. והפתרון באותה דרך כמו בשאלה 14.

16. זה בדיוק כמו מספר הפתרונות למשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ כאשר:

$1\le x_1,x_2,x_3,x_4\le 6$ והפתרון באותה דרך כמו בשאלה 15.

17. סה"כ הפרמוטציות: $\frac{11!}{2!2!2!}$. נגדיר: A_1 - הרצף MAT מופיע. A_2 - הרצף CAT מופיע. A_3 - הרצף THE מופיע. $|A_1| = 9! - \frac{7!}{2}$ כי יש 9! פרמוטציות כאשר *MAT* מופיע. ומורידים את הפרמוטציות בהן *MAT* מופיע פעמיים. $|A_2| = \frac{9!}{2}$, $|A_3| = \frac{9!}{4}$. $|A_1\cap A_2| = 7!$, $|A_1\cap A_3| = 7!+7!-5!$ (מופיע MATHE או מופיע MAT ו THE פחות המקרים שמופיע MAT פעמיים), $|A_2\cap A_3| = \frac{7!}{2}+\frac{7!}{2}$ (מופיע CATHE או מופיע CAT ו THE), $|A_1\cap A_2\cap A_3| = 2\cdot5!$ (מופיע CATHE ו MAT או MATHE ו CAT).

הפתרון: $|U| - |A_1\cup A_2\cup A_3|$.

18. מידול הבעיה לכדורים. נשים i כדורים בתא ה i ונקבל את המשוואה:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 15$ כאשר: $i\le x_i\le 2i$. בסה"כ האפשרויות: $\binom{15+5-1}{5-1}$. נגדיר: A_i $(1\le i\le5)$ – יש חריגה ממספר הכדורים המותר בתא ה i .

$|A_1| = \binom{12+5-1}{5-1}$, $|A_2| = \binom{10+5-1}{5-1}$, $|A_3| = \binom{8+5-1}{5-1}$, $|A_4| = \binom{6+5-1}{5-1}$

, $|A_5| = \binom{4+5-1}{5-1}$, $|A_1\cap A_2| = \binom{7+5-1}{5-1}$, $|A_1\cap A_3| = \binom{5+5-1}{5-1}$

$|A_1\cap A_4| = \binom{3+5-1}{5-1}$, $|A_1\cap A_5| = \binom{1+5-1}{5-1}$, $|A_2\cap A_3| = \binom{3+5-1}{5-1}$,

$|A_2\cap A_4| = \binom{1+5-1}{5-1}$, $|A_1\cap A_2\cap A_3| = \binom{0+5-1}{5-1} = 1$

כל שאר החיתוכים 0 כי החריגה יותר מ 15.

הפתרון: $|U| - |A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|$.

19. סה"כ הסידורים: $\frac{(2n)!}{2^n}$. נגדיר A_i $(1\le i\le n)$ – הסדרות בהן מופיע הרצף a_ia_i. $|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$ - סידור כל האיברים (חילוק בסדר הפנימי בין כל 2 איברים זהים (חוץ מ a_i שכבר סידרנו מראש))

חיתוך של k קבוצות: $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$ ולכן הפתרון הוא:

$\frac{(2n)!}{2^n} - [\binom{n}{1}\cdot\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} - \binom{n}{2}\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} + \cdots] = \sum_{k=0}^n (-1)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$

20. א. על כל סידור של הצריח הראשון בשורה הראשונה, יש 7 סידורים שונים לשני (חוץ מהעמודה שבה הוצב הראשון) , לשלישי 6 , וכן הלאה. ולכן התשובה: !8.

ב. נגדיר: A_i - הצריח ה i נמצא בעמודה ה i ולכן: $|A_i| = 7!$, חיתוך של k קבוצות: $(8-k)!$ ולכן הפתרון הוא:

$8! - [\binom{8}{1}\cdot7! - \binom{8}{2}\cdot6! + \cdots] = \sum_{k=0}^8(-1)^k\cdot\binom{8}{k}\cdot(8-k)!$.

ג. נפצל ל 2 קבוצות: הצריחים בשורות האי זוגיות ואלו שבשורות הזוגיות. סה"כ הסידורים לכל קבוצה: !4. נגדיר A_i - כמו בסעיף ב'. ולכן הפתרון יהיה:

$\sum_{k=0}^4(-1)^k\cdot\binom{4}{k}\cdot(4-k)!\cdot\sum_{k=0}^4(-1)^k\cdot\binom{4}{k}\cdot(4-k)!$.

21. דרך הפתרון זהה לשאלה 6.

22. נגדיר: A - הרצף aa מופיע. B - הרצף bb מופיע. C - הרצף cc מופיע. D - הרצף dd מופיע. $|A| = |B| = |C| = |D| = \frac{7!}{2!2!2!}$, $|A\cap B| = \cdots = \frac{6!}{2!2!}$,

$|A\cap B\cap C| = \cdots = \frac{5!}{2!}$, $|A\cap B\cap C\cap D| = 4!$. והתשובה:

$\frac{8!}{2!2!2!2!} - [\binom{4}{1}\frac{7!}{2!2!2!} - \binom{4}{2}\frac{6!}{2!2!} + \binom{4}{3}\frac{5!}{2!} - 4!]$.

23. רוצים להכניס k כדורים זהים ל n תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד. בצד ימין של המשוואה מכניסים לכל תא כדור אחד ונשאר לפזר $k-n$ כדורים ל n תאים ולפי ההגדרה (ללא חשיבות לסדר ועם חזרות): $\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$. ובצד ימין מגדירים: A_i - מספר האפשרויות לפזר את הכדורים כאשר יש 0 כדורים בתא ה i.

$|A_i| = \binom{n-1+k-1}{k}$ - כי נשאר לפזר k כדורים ל $n-1$ תאים. חיתוך של m קבוצות: $\binom{n-m+k-1}{k}$ סה"כ האפשרויות: $\binom{n+k-1}{k}$. ולכן קיבלנו:

$\binom{n+k-1}{k} - [\sum_{i=1}^n\binom{n-1+k-1}{k} - \sum_{1\le i\le j}^n\binom{n-2+k-1}{k} + \cdots] = \sum_{i=0}^n(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i+k-1}{k}$

ומכאן קיבלנו ששני צדדי המשוואה סופרים את אותו דבר.

תרגול 5-6 – נוסחאות נסיגה - תשובות

הגדרה רקורסיבית

א. בסיס: $0\in A$, תנאי רקורסיבי: $x\in A\to x+5\in A,\ x-5\in A$.

ב. בסיס: $2\in A$ ו $5\in A$, תנאי רקורסיבי: $x\in A\to x+10\in A$.

ג. בסיס: $8\in A$, תנאי רקורסיבי: $x\in A\to\frac{x}{2}\in A,\ 2x\in A$.

ד. בסיס: $0\in A$, תנאי רקורסיבי: $x\in A\to(\sqrt{x}+1)^2\in A$.

ה. בסיס: $(0,0)\in A$, תנאי רקורסיבי:

$(x,y)\in A\to(x+1,y)\in A,(x,y+1)\in A$.

בניית נוסחאות נסיגה

1. $f(n)=2f(n-1)$ כי מספר תתי הקבוצות הוא האם האיבר ה n שייך לקבוצה או לא כפול מספר תתי הקבוצות שאפשר לבנות משאר האיברים, $f(0)=1$ - הקבוצה הריקה.

2. א. $f(n)=5f(n-1)$ - לכל איבר יש רק 5 אפשרויות, אם הספרה הקודמת הייתה זוגית אז יש 5 אפשרויות (ספרות אי זוגיות) וכן להיפך. $f(1)=9$ - עבור הספרה הראשונה יש 9 אפשרויות.

ב. $f(n)=5f(n-1)+5\cdot5f(n-2)$ - $5\cdot5f(n-2)$ אומר שבחרנו ספרה זוגית ואז הספרה הקודמת לה צריכה להיות אי זוגית ו $5f(n-1)$ אומר שבחרנו ספרה אי זוגית ונותר לבחור את $n-1$ הספרות האחרות. $f(1)=9$ - עבור הספרה הראשונה יש 9 אפשרויות. $f(0)=1$ – אין אפשרויות ולכן לא נוסיף לכפל אפשרויות (1 ניטראלי לכפל).

3. מילה יכולה להתחיל ב c או ב d ואחריהן המילה נשארת תקינה ולכן יש להמשך המילה $2f(n-1)$ (2 עבור 2 האפשרויות: c ו d). או שהיא יכולה להתחיל ב b אבל נוריד מכך את האפשרות שהיא תתחיל ב bc ולכן נקבל: $f(n-1)-f(n-2)$ (כל המילים המתחילות ב b פחות אלו המתחילות ב bc). או שהמילה תתחיל ב a ונוריד את האפשרות ל ab (האפשרות שמילה באורך $n-1$ תתחיל ב bc היא

$f(n-2)-f(n-3)$ לפי החישוב לעיל) ובסה"כ מילים המתחילות ב a :

$f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)$ ולכן סה"כ נוסחת הנסיגה:

$f(n)=4f(n-1)-2f(n-2)+f(n-3)$ עם תנאי התחלה: $f(0)=1$, $f(1)=4$, $f(2)=14$.

4. נסתכל עם האיש הימני ביותר: אם הוא נשאר במקומו, נותר לסדר $f(n-1)$, ואם הוא התחלף עם האיש שיושב משמאלו נותר לסדר $f(n-2)$ ובסה"כ קיבלנו:

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ עם תנאי התחלה: $f(1)=1$, $f(2)=2$.

5. עבור המקום הראשון ישנן 22 אפשרויות. עבור כל מקום נוסף יש 21 אפשרויות (כדי לא לחזור על אותה האות שהופיעה במקום שלפני) ולכן בסה"כ: $f(n)=21*f(n-1)$ עם תנאי התחלה: $f(1)=22$.

6. נתבונן על האיבר הראשון: ישנן 2 אפשרויות: או שהאיבר לא נבחר ואז ישנן $f(n-1)$ אפשרויות לבחירת שאר האיברים. או שהאיבר כן נבחר לקבוצה ואז נותרו $f(n-2)$ אפשרויות כי האיבר העוקב לו כבר לא יכול להיבחר. ובסה"כ קיבלנו: $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ עם תנאי התחלה $f(0)=1$, $f(1)=2$

7. נתבונן על האיש שיושב ראשון: יש לו $n-1$ אפשרויות לסידור שונה. עבור שאר האנשים נפצל ל 2 מקרים: 1 התחלף עם i - נותר לסדר $f(n-2)$.

1 לא התחלף עם i - נותר לסדר $f(n-1)$ ולכן מספר האפשרויות בסה"כ הוא: $f(n)=(n-1)*[f(n-1)+f(n-2)]$ עם תנאי התחלה $f(1)=0$ ו $f(2)=1$

8. עבור המילים המתחילות ב 0 אין כל הגבלה ולכן זה בדיוק $f(n-1)$. ניקח את כל המילים המתחילות ב 1 $(f(n-1))$ ונוריד את המילים המתחילות ב 10 $(f(n-2))$. הורדנו גם את המילים המתחילות ב 101 כנדרש אבל גם את אלו המתחילות ב 100 ולכן נוסיף אותן בחזרה $(f(n-3))$ ובסה"כ קיבלנו: $f(n)=2f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)$ עם תנאי התחלה: $f(0)=1$ - המילה הריקה. $f(1)=2$, $f(2)=4$ - ללא הגבלות.

9. מקרה א': המטבע הראשון הוא 1: נותרו $n-1$ שקלים.

מקרה ב': המטבע הראשון הוא 2: נותרו $n-2$ שקלים.

מקרה ג': המטבע הראשון הוא 5: נותרו $n-5$ שקלים.

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-5)$ נמצא 5 תנאי התחלה:

$f(1)=1$ - רק מטבע 1, $f(2)=2$ - מטבע של 2 או 2 של 1 , $f(3)=3$ – 3 מטבעות של שקל או 2 של שקל ו 1 של 2, או 1 של 2 ו 2 של שקל. $f(4)=5$, $f(5)=9$.

פתרון נוסחאות נסיגה

.1

א. נציב: $f(n-1)=f(n-2)+2(n-1)$ ב $f(n)=f(n-1)+2n$ ונקבל:

$f(n)=f(n-2)+2(n-1)+2n$, נציב:

$f(n-2)=f(n-3)+2(n-2)$ ונקבל:

$f(n)=f(n-3)+2(n-2)+2(n-1)+2n$. ננחש שהפתרון יהיה אחרי k הצבות:
$f(n)=f(n-k-1)+2(n-k)+\cdots+2(n-1)+2n$

נגיע ל $f(1)$, נציב: $k=n-2$ ונקבל:

$f(n)=f(1)+2[2+\cdots+(n-1)+n]$ ומכאן:

$f(n)=2+2[2+\cdots+(n-1)+n]$, נוציא 2 גורם משותף:

$f(n)=2[1+2+\cdots+(n-1)+n]$, קיבלנו סכום סדרה חשבונית:

$f(n)=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=n(n+1)$. נוכיח את התוצאה באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $n=1$ נקבל: $f(1)=1*2=2$.

<u>הנחה</u>: $f(n)=n(n+1)$ נכון עד n כלשהו.

<u>מעבר</u>: נוכיח עבור $n+1$: $f(n+1)=(n+1)(n+2)$

לפי תנאי הנסיגה: $f(n+1)=f(n)+2(n+1)$ נציב:

$f(n)+2(n+1)=(n+1)(n+2)$, לפי הנחת האינדוקציה:

$n(n+1)+2(n+1)=(n+1)(n+2)$, פסוק אמת.

ב. נציב: $f(n-1)=4f(n-2)$ ב $f(n)=4f(n-1)$ ונקבל:

$f(n)=4\cdot 4f(n-2)$, נציב: $f(n-2)=4f(n-3)$ ונקבל:

$f(n)=4\cdot 4\cdot 4f(n-3)$. ננחש שהפתרון יהיה אחרי k הצבות:

$f(n)=4^{k+1}f(n-k-1)$. נגיע ל $f(1)$, נציב: $k=n-2$ ונקבל:

$f(n)=4^{n-1}f(1)$ ומכאן: $f(n)=5\cdot 4^{n-1}$

נוכיח את התוצאה באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $n=1$ נקבל: $f(1)=5\cdot 4^0=5$.

<u>הנחה</u>: $f(n)=5\cdot 4^{n-1}$ נכון עד n כלשהו.

<u>מעבר</u>: נוכיח עבור $n+1$: $f(n+1)=5\cdot 4^n$

לפי תנאי הנסיגה: $f(n+1)=4f(n)$ נציב:

$4f(n)=5\cdot 4^n$, לפי הנחת האינדוקציה:

$4\cdot 5\cdot 4^{n-1}=5\cdot 4^n$, פסוק אמת.

ג. נציב: $f(n-1)=3f(n-2)+2$ ב $f(n)=3f(n-1)+2$ ונקבל:

$f(n)=3(3f(n-2)+2)+2=3\cdot 3f(n-2)+3\cdot 2+2$, נציב:

$f(n-2)=3f(n-3)+2$ ונקבל:

$f(n)=3\cdot 3(3f(n-3)+2)+3\cdot 2+2$, נסדר:

$f(n)=3\cdot 3\cdot 3\cdot f(n-3)+3\cdot 3\cdot 2+3\cdot 2+2$

ננחש שהפתרון יהיה אחרי k הצבות:

$f(n)=3^{k+1}f(n-k-1)+2[1+3+3^2+\cdots+3^k]$. נגיע ל $f(1)$, נציב: $k=n-2$ ונקבל:
$f(n)=3^{n-1}f(1)+2[1+3+3^2+\cdots+3^{n-2}]$

נציב $f(1)$, ונפשט את סכום הסדרה ההנדסית שקיבלנו:

$f(n)=3^{n-1}+2\left[\frac{3^{n-1}-1}{2}\right]=3^{n-1}+3^{n-1}-1=2\cdot 3^{n-1}-1$

נוכיח את התוצאה באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $n=1$ נקבל: $f(1)=2\cdot 3^0-1=1$.

<u>הנחה</u>: $f(n)=2\cdot 3^{n-1}-1$ נכון עד n כלשהו.

<u>מעבר</u>: נוכיח עבור $n+1$: $f(n+1)=2\cdot 3^n-1$

לפי תנאי הנסיגה: $f(n+1)=3f(n)+2$ נציב:

$3f(n)+2=2\cdot 3^n-1$, לפי הנחת האינדוקציה:

$3(2\cdot 3^{n-1}-1)+2=2\cdot 3^n-1$, פסוק אמת.

ד. נציב: $f(n-1)=(n-1)^2f(n-2)$ ב $f(n)=n^2f(n-1)$ ונקבל:

$f(n)=n^2(n-1)^2f(n-2)$, נציב: $f(n-2)=(n-2)^2f(n-3)$ ונקבל:

$f(n)=n^2(n-1)^2(n-2)^2f(n-3)$. ננחש שהפתרון יהיה אחרי k הצבות:

$f(n)=n^2(n-1)^2\ldots(n-k)^2f(n-k-1)$. נגיע ל $f(1)$, נציב: $k=n-2$ ונקבל: $f(n)=$
$n^2(n-1)^2\ldots(2)^2f(1)$

$f(n)=n^2(n-1)^2\ldots(2)^2$ ומכאן: $f(n)=(n!)^2$

נוכיח את התוצאה באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $n=1$ נקבל: $f(1)=(1!)^2=1$.

<u>הנחה</u>: $f(n)=(n!)^2$ נכון עד n כלשהו.

<u>מעבר</u>: נוכיח עבור $n+1$: $f(n+1)=((n+1)!)^2$

לפי תנאי הנסיגה: $f(n+1)=(n+1)^2f(n)$ נציב:

$(n+1)^2f(n)=((n+1)!)^2$, לפי הנחת האינדוקציה:

$(n+1)^2(n!)^2=((n+1)!)^2$, פסוק אמת.

ה. נציב: $f(n-1)=3f(n-2)^2$ ב $f(n)=3f(n-1)^2$ ונקבל:

$f(n)=3(3f(n-2)^2)^2=3\cdot 3^2\cdot f(n-2)^4$, נציב: $f(n-2)=3f(n-3)^2$ ונקבל:
$f(n)=3(3(3f(n-3)^2)^2)^2=3\cdot 3^2\cdot 3^4\cdot f(n-3)^8$

. ננחש שהפתרון יהיה אחרי k הצבות:

$f(n)=3\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 3^{2^k}\cdot f(n-k-1)^{2^{k+1}}$. נגיע ל $f(1)$, נציב: $k=n-2$ ונקבל:

$f(n)=3^{1+2+4+\cdots+2^{n-2}}\cdot f(1)^{2^{n-1}}$ ומכאן: $f(n)=3^{2^{n-1}-1}\cdot 2^{2^{n-1}}$

נוכיח את התוצאה באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $n=1$ נקבל: $f(1)=3^{2^0-1}\cdot 2^{2^0}=2$.

<u>הנחה</u>: $f(n)=3^{2^{n-1}-1}\cdot 2^{2^{n-1}}$ נכון עד n כלשהו.

<u>מעבר</u>: נוכיח עבור $n+1$: $f(n+1)=3^{2^n-1}\cdot 2^{2^n}$

לפי תנאי הנסיגה: $f(n+1)=3f(n)^2$ נציב:

$3f(n)^2=3^{2^n-1}\cdot 2^{2^n}$, לפי הנחת האינדוקציה:

$3(3^{2^{n-1}-1}\cdot 2^{2^{n-1}})^2=3^{2^n-1}\cdot 2^{2^n}$, פסוק אמת.

.2

א. נגיע לפולינום האופייני: $x^n=2x^{n-1}$ ומכאן: $x=2$ ולכן הפתרון יהיה מהצורה: $f(n)=a\cdot 2^n$.
נמצא a, נציב תנאי התחלה:

$f(1)=3=a\cdot 2^1$ ומכאן: $a=\frac{3}{2}$. ולכן הנוסחא היא: $f(n)=\frac{3}{2}\cdot 2^n$.

ב. נגיע לפולינום האופייני: $3x^n=2x^{n-1}+x^{n-2}$ ומכאן: $3x^2-2x-1=0$

הפתרונות הם: $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{3}$ ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$f(n)=a\cdot 1^n+b\cdot(-\frac{1}{3})^n$. נמצא a,b, נציב תנאי התחלה:

$f(0)=7=a+b$, $f(1)=3=a+b\cdot(-\frac{1}{3})^1$ ומכאן: $a=4$, $b=3$.

ולכן הנוסחא היא: $f(n)=3+4\cdot(-\frac{1}{3})^n$.

תרגול 7 – קצב גידול של פונקציות

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. הטענה נכונה. הוכחה: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $2n^4+n\le c\cdot n^5$, נגדיל את צד שמאל: $2n^4+n\le 2n^5+n^5=3n^5\le c\cdot n^5$ ולכן נוכל לבחור $n_0=1$ ו $c=3$ (או יותר גדול) ואכן אי השוויון מתקיים.

דרך נוספת: $2n^4=O(n^4)$, $n=O(n)$ (לפי רפלקסיביות) ולכן:

$O(n)+O(n^4)=O(n^4)$ הקטן מ $O(n^5)$ (לפי המשפט של סכום סדרי גודל).

ב. הטענה נכונה. הוכחה: צ"ל א. $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2=O(n^2)$, ב. $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2=\Omega(n^2)$ נוכיח א: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2\le c\cdot n^2$, נגדיל את צד שמאל: $n^2+\left(\frac{n}{9}\right)^2=\frac{82\cdot n^2}{81}\le c\cdot n^2$ ולכן נוכל לבחור $n_0=1$ ו $c=\frac{82}{81}$ (או יותר גדול) ואכן אי השוויון מתקיים.

נוכיח ב: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2\ge c\cdot n^2$, נקטין את צד שמאל: $\left(\frac{n}{9}\right)^2=\frac{n^2}{81}\ge c\cdot n^2$ ולכן נוכל לבחור $n_0=1$ ו $c=\frac{1}{81}$ (או יותר קטן) ואכן אי השוויון מתקיים.

ג. הטענה נכונה. הוכחה: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\frac{n!}{5!(n-5)!}\ge c\cdot n^5$, נפשט את צד שמאל:

$(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n\ge c\cdot n^5$, נקבל פולינום ממעלה 5 ולכן לפי הדרך ב א' נקבל שיש שוויון בין הצדדים עבור c מסוים ולכן $\binom{n}{5}=\Omega(n^5)$.

ד. *הטענה לא נכונה. הוכחה: נניח בשלילה שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $(\ln n^2)^n\le c\cdot 2^n$, *נקבל:* $(2\ln n)^n\le c\cdot 2^n$. *נצמצם ב* 2^n *ונקבל:*

$(\ln n)^n\le c$, n שואף לאינסוף ולכן לא קיים קבוע המקיים את אי השוויון. סתירה.

ה. *הטענה לא נכונה.* $\sqrt{2}^n<2^n$ *(קטן ממש) ולכן לא ייתכן שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\sqrt{2}^n\ge c\cdot 2^n$ ולכן $2^{\frac{n}{2}}\ne\Omega(2^n)$.

ו. *הטענה לא נכונה. הוכחה: נקטין את צד שמאל:* $(n!)^{(n!)}>n^n\cdot n^{n-1}$ *ולא קיים c המקיים:* $n^n\cdot n^{n-1}<cn^n$ *(ולאחר צמצום)* $n^{n-1}<c$.

ז. *הטענה נכונה.* הוכחה: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $(\sqrt{\log n})^{\log n}\ge cn^k$, נצמיד log ל 2 האגפים: $log(\sqrt{\log n})^{\log n}\ge\log cn^k$ ונקבל לפי חוקי לוגריתמים: $\frac{\log n}{2}\cdot\log(log\ n)\ge\log c+k\cdot\log n$, n שואף לאינסוף ולכן נוכל להתעלם מהקבועים. מכאן: $\log n\cdot\log(log\ n)\ge c_1\cdot\log n$, נצמצם ב $\log n$ ונקבל: $\log(log\ n)\ge c_1$ ואכן פסוק זה נכון כי $\log(log\ n)$ שואף לאינסוף ולכן הוא גדול מכל קבוע.

ח. הטענה לא נכונה. *הוכחה: נניח בשלילה שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $e^{\frac{1}{n}}\ge c\cdot n^k$ *, נגדיל את צד שמאל ונקבל:* $e^{\ln n}\ge c\cdot n^k$ *ומכאן:*

$n\ge c\cdot n^k$ ולכן: $1\ge c\cdot n^{k-1}$. n שואף לאינסוף ולכן – סתירה.

ט. הטענה לא נכונה. *הוכחה: נניח בשלילה שלכל קבוע* $c>0$ *קיים* $n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $k^{\log n}<c\cdot n^2$ *,* נצמיד log ל 2 האגפים: $\log k^{\log n}<\log c\cdot n^2$ ונקבל לפי חוקי לוגריתמים: $\log n\cdot\log k<\log c+2\log n$, n שואף לאינסוף ולכן נוכל להתעלם מהקבועים. מכאן: $\log n<c\log n$ - עבור $0<c<1$ אי השוויון לא מתקיים בסתירה לכך שלכל c יש $n_0>0$ שממנו הטענה נכונה.

י. *הטענה לא נכונה עבור* $(2+\frac{1}{\ln n})^{n^2}=O(3^n)$ *. הוכחה: נניח בשלילה שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $(2+\frac{1}{\ln n})^{n^2}\le c\cdot 3^n$ *, נצמיד ln ל 2 האגפים ונקבל:* $ln(2+\frac{1}{\ln n})^{n^2}\le\ln c\cdot 3^n$ ולפי חוקי לוגריתמים:

$n^2\ln(2+\frac{1}{\ln n})\le\ln c+n\cdot\ln 3$, n שואף לאינסוף ולכן נוכל להתעלם מהקבועים. מכאן: $n^2\ln(2+\frac{1}{\ln n})\le c\cdot n$, נקטין את צד שמאל: $n^2\ln(2)\le c\cdot n$ ועדיין קיבלנו סתירה: $n^2\le c\cdot n$.

2. מצא הערכה אסימפטוטית (חסם הדוק) לפונקציות הבאות, הוכח!

א. נמצא O : נגדיל את הפונקציה: $(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n})^{\sqrt{n}}$ (כי $\sqrt[3]{n}$ יותר גדול מ $(\ln n)^2$) ונקבל: $(2\sqrt[3]{n})^{\sqrt{n}}=O(\sqrt[3]{n}^{\sqrt{n}})$.

נמצא Ω: נקטין את הפונקציה: $(\sqrt[3]{n})^{\sqrt{n}}$ ונקבל: $(\sqrt[3]{n})^{\sqrt{n}}=O(\sqrt[3]{n}^{\sqrt{n}})$

ולכן: $(\sqrt[3]{n}+(\ln n)^2)^{\sqrt{n}}=\Theta(\sqrt[3]{n}^{\sqrt{n}})$.

ב. נמצא O : נגדיל את הפונקציה: $\sum_{k=1}^{n}k^2\le\sum_{k=1}^{n}n^2=n^3=O(n^3)$

נמצא Ω: נקטין את הפונקציה:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}k^2+\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}k^2\ge\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}k^2\ge\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}(\tfrac{n}{2})^2=\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)^2=\left(\frac{n}{2}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\Omega(n^3)$$

ולכן: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\Theta(n^3)$.

ג. $\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=\Theta(n^4)+\Theta(n^3)+\Theta(n^2)+\Theta(n)+\Theta(1)=\Theta(n^4)$

ד. נמצא הערכה ל $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$ – זה סכום סדרה הנדסית אינסופית עם מנה $\frac{1}{2}$. ולכן הסכום הוא: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2=\Theta(1)$, $n^{\log n}=\Theta(n^{\log n})$ ולכן המכפלה ביניהם היא: $\Theta(n^{\log n})$.

3. הוכח או הפרך את התכונות הבאות:

א. נניח $f=O(g)$ צ"ל $f+g=\Theta(g)$. לפי ההנחה, קיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $f=c\cdot g$, נוסיף את g ל 2 האגפים ונקבל: $f+g=c\cdot g+g$ ומכאן: $f+g=(c+1)g$ ולכן: $f+g=\Theta(g)$.

ב. לא. דוגמא נגדית: $n=O(n^2)$ אבל: $n\cdot n^2\ne\Theta(n^2\cdot n^2)$.

ג. נניח $f=O(g)$ וגם $g=O(h)$, צ"ל: $f=O(h)$. לפי ההנחה: קיימים

$c_1,c_2,n_0,n_1>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $f\le c_1\cdot g$ וכן לכל $n\ge n_1$ מתקיים: $g\le c_2\cdot h$. נציב את g באי השוויון הראשון: $f\le c_1\cdot c_2\cdot h$ (זה נכון כי הצבנו פונקציה גדולה או שווה ל g) ולכן: $f=O(h)$.

תרגול 8 – תורת הגרפים 1 – תשובות

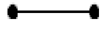
1. א. נוכיח ←: נניח בשלילה ש n איזוגי. אם קיים גרף k רגולרי כאשר k איזוגי נקבל לפי משפט סכום הדרגות: $\sum_{v\in V}\deg(v)=n*k$ - מספר איזוגי, בסתירה לכך שסכום הדרגות הוא $2|E|$.

נוכיח →: נראה שעבור n זוגי נוכל ליצור גרף k רגולרי. לפי משפט סכום הדרגות: $\sum_{v\in V}\deg(v)=n*k=2|E|$ נבחר: $k=\frac{2|E|}{n}$.

2. נוכיח ←: נניח G עץ, צ"ל G גרף מקסימאלי ללא מעגלים. נניח בשלילה ש G אינו מקסימאלי. לפי ההנחה, נוכל להוסיף את הצלע e ללא יצירת מעגל. בה"כ נניח שקודקודי הצלע הם u ו v. מכיוון ש G עץ, אז בהכרח הוא קשיר ולכן קיים מסלול בין u ל v ללא הוספת הצלע e. ולכן אם נוסיף את הצלע, נקבל מסלול נוסף בין u ל v ולכן קיבלנו מעגל. סתירה.

נוכיח →: נניח G גרף מקסימאלי ללא מעגלים, צ"ל G עץ. אין ב G מעגלים ולכן נותר להוכיח ש G קשיר. מכיוון ש G מקסימאלי אז בהכרח קיים מסלול בין כל 2 קודקודים u ו v (כי אחרת נוכל להוסיף צלע בין u ל v ללא יצירת מעגל) ולכן בהכרח G קשיר.

3. יהא G גרף מסדר n, מספר האפשרויות לדרגות בגרף הוא $n-1$, כי כל קודקוד יכול להיות מחובר ל 0 עד $n-1$ קודקודים, אבל אם יש קודקוד מדרגה 0 אז בהכרח אין קודקוד מדרגה $n-1$ וכן להיפך.
קיבלנו שיש n קודקודים ו $n-1$ דרגות שונות אפשריות ולכן לפי עיקרון שובך היונים קיימים לפחות 2 קודקודים בעלי דרגה זהה.

4.  - דרגת כל קודקוד היא 1.

5. יהא G גרף כלשהו. אם G קשיר – סיימנו. נניח ש G אינו קשיר. יהא $\overline{G}$ הגרף המשלים של G. צ"ל: $\overline{G}$ קשיר. יהיו $u,v\in V$, נוכיח שקיים מסלול ביניהם. מכיוון ש G אינו קשיר אז יש ב G לפחות 2 רכיבי קשירות. אם u,v נמצאים ברכיבי קשירות שונים של G אז לא היתה צלע ביניהם ב G ולכן ב $\overline{G}$ יש צלע ביניהם. נניח ש u,v נמצאים באותו רכיב קשירות ב G. אז קיים $w\in V$ קודקוד הנמצא ברכיב קשירות אחר ב G. ולכן ב $\overline{G}$ קיימת צלע בין w ל v ובין w ל u ולכן קיים מסלול ביניהם. מכאן $\overline{G}$ קשיר. מש"ל.

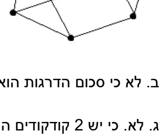
6. נוכיח →: יהא G גרף קשיר כלשהו. צ"ל: G אינו איחוד זר של גרפים. נניח בשלילה ש

$G=(V_1,E_1)\uplus(V_2,E_2)$. G קשיר ולכן עבור: $v\in V_1$ ו $u\in V_2$ כלשהם קיים מסלול ולכן בהכרח יש קשת ביניהם או שיש מסלול ביניהם. לפי ההנחה, $V_1\cap V_2=\emptyset$, $E_1\cap E_2=\emptyset$ ולכן לא קיימת קשת. נניח שיש מסלול ביניהם: $(v,t_1,t_2,\dots,t_k,u)$, מכיוון ש $v\in V_1$, $u\in V_2$ קיים קודקוד במסלול $w\in V_2$ כך שהקודקוד שלפניו $x\in V_1$. ולכן $(x,w)\in G$ בסתירה להנחה. מש"ל.

נוכיח ←: יהא G גרף כלשהו. נניח G אינו איחוד זר של גרפים. צ"ל: G קשיר.

יהיו $u,v\in V$, צ"ל: קיים מסלול ביניהם. נניח שאין מסלול ביניהם. מכאן שיש לפחות 2 רכיבי קשירות ולכן כל אחד מרכיבי הקשירות השונים יהיו גרפים זרים המרכיבים את G בסתירה לכך ש G אינו איחוד זר של גרפים. מש"ל

7. א. כן.



ב. לא כי סכום הדרגות הוא אי זוגי בסתירה למשפט: $\sum_{v\in V}degree(v)=2|E|$.

ג. לא. כי יש 2 קודקודים המחוברים לפחות ל 4 מתוך ה 5 האחרים ולכן לא ייתכן שקיימים 2 קודקודים בעלי דרגה 1.

8. לא, כי לפי משפט סכום הדרגות נקבל: $3|V|=2\cdot 100$ אבל 200 לא מתחלק ב 3.

9. $n-1$  - גרף עם מסלול באורך $n-1$.

10. בדומה להוכחה ב 5, נקבל שייתכנו 2 מצבים בגרף המשלים: u,v לא מחוברים ב G אז הם מחוברים ב $\overline{G}$ (והמרחק ביניהם הוא 1). ואם u,v מחוברים ב G. אז מחוסר קשירותו של G נובע שקיים w שאינו מחובר ל u,v ב G ולכן ב $\overline{G}$ הוא יהיה מחובר לשניהם ומכאן שהמסלול הוא באורך 2 לכל היותר לכל 2 קודקודים בגרף ומכאן שהקוטר של הגרף הוא לכל היותר 2. מש"ל.

11. לפי משפט סכום הדרגות, נקבל: $3n \geq 2(n+4)$ ומכאן: $n \geq 8$.

12. יהא G גרף על n קודקודים כך ש $\deg(v) \geq 3$ לכל $v \in V$ ואין בו מעגל עם פחות מ 5 צלעות. צ"ל: $n \geq 10$. יהא $u \in V$ כלשהו, לפי הנתונים, $\deg(u) \geq 3$, כלומר, ל u יש לפחות 3 שכנים שונים. לכל אחד מהשכנים יש לפחות 2 שכנים ייחודיים (מלבד u) כאשר אין קשת בין 3 השכנים של u כי אחרת נקבל מעגל באורך 3 ואין שכן משותף ל 2 מתוך השכנים של u כי אחרת נקבל מעגל באורך 4. ולכן בהכרח קיימים לפחות: $1+3+3*2=10$ קודקדים (u , 3 השכנים שלו ועוד 2 שכנים עבור כל שכן של u). מש"ל.

13. יהיו $u,v \in V$, צ"ל: קיים מסלול ביניהם. אם $(u,v) \in E$ סיימנו. אחרת, מתבונן בקבוצות השכנים של u,v: קבוצות אלו נחתכות כי לכל אחד מהם 50 שכנים מתוך 98 הקודקודים הנותרים ולכן קיים $w \in N(u) \cap N(v)$ ($N(x)$ – מסמן את קבוצת השכנים של x) ומכאן שקיים המסלול (u,w,v) ומכאן שהגרף קשיר. מש"ל.

14. נוכיח באינדוקציה על n: בסיס: $n=1$ - בגרף הריק עם קודקוד אחת יש $0 = \left\lfloor \frac{1^2}{4} \right\rfloor$ קשתות.

הנחה: נניח שהטענה נכונה לכל $1 \leq k < n$. צ"ל: נכונות הטענה עבור n. יהא G גרף פשוט על n קודקודים ללא משולש. אם G ללא קשתות – סיימנו. נניח כי יש ב G לפחות קשת אחת: $(u,v) \in E$ עבור $u,v \in V$. אם כך, נוריד את 2 הקודקודים (ואת הקשתות החלות בהם), קיבלנו גרף עם $n-2$ קודקודים וללא משולש ולכן לפי הנחת האינדוקציה, יש בגרף זה לכל היותר: $\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor$ קשתות. נמצא את מספר הקשתות שהורדנו ונוסיף למספר הקשתות בגרף שקיבלנו. נוסיף את מספר השכנים של u,v , בין u ל v יש קשת לפי ההנחה ולכן לא ייתכן שיש להם שכן משותף ולכן מספר השכנים (של u ו v) בסה"כ הוא לכל היותר $n-1$. ולכן:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + n - 1 = \left\lfloor \frac{n^2-4n+4+4n-4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$. מש"ל.

15. נסמן ב: M את קבוצת הקודקודים בגרף שאינם שכנים של u,v. מספר הקודקודים בגרף הוא: $|V| = |\{u,v\}| + |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)| + |M|$, נציב את הנתונים:

$n = 2 + \frac{n+k}{2} + \frac{n+k}{2} - |N(u) \cap N(v)| + |M|$ ומכאן: (נוריד את M ונקבל אי שוויון).

$|N(u) \cap N(v)| \geq -n+2+n+k$ ולכן: $|N(u) \cap N(v)| \geq k+2$ מש"ל.

16. נמיר את הבעיה לגרף שבו כל קודקוד מייצג אדם וכל צלע מייצגת היכרות. נשתמש בטענה: אם מספר הקודקודים בגרף הוא אי זוגי אז בהכרח קיים קודקוד אחד לפחות שדרגתו זוגית כי אחרת, סך כל הדרגות יהיה אי זוגי. נפרק למספר מקרים:

א. קיים אדם x עם מספר מכרים אי זוגי. לפי הטענה, קיים אדם y עם מספר מכרים זוגי מתוך השכנים של x. (ייתכן גם 0) ולכן מספר המכרים המשותפים שלהם הוא זוגי.

ב. לכולם מספר מכרים זוגי. נבחר אדם x כלשהו, מספר האנשים ש x לא מכיר הוא אי זוגי כי סה"כ יש מספר זוגי של אנשים פחות מספר זוגי ופחות x נקבל מספר אי זוגי. לפי הטענה, בקבוצה ש x לא מכיר קיים y המכיר בקבוצה זו מספר זוגי של אנשים. ומכיוון שסה"כ מספר האנשים ש y מכיר הוא זוגי אז גם מספר האנשים ש y מכיר מתוך השכנים של x הוא זוגי ולכן מספר השכנים המשותפים של x ו y בהכרח זוגי. מש"ל.

17. יהא $G=(V,E)$ גרף כלשהו. נניח שלכל $e \in E$ מתקיים $G-\{e\}$ עץ. צ"ל: G מעגל. יהיו $u,v \in V$ כלשהם. לפי ההנחה, מספר המסלולים בין u ל v הוא 2 מכיוון שאם יש ביניהם מסלול אחד ונוריד קשת $e \in E$ מהמסלול ביניהם נקבל שהגרף אינו קשיר בסתירה לכך שהוא עץ. ואם יש ביניהם יותר מ 2 מסלולים אז לאחר הסרת הקשת יהיו ביניהם לפחות 2 מסלולים ולכן יש בגרף מעגל, בסתירה לכך שהוא עץ. מכאן שבין כל 2 קודקודים בגרף G יש 2 מסלולים ולכן כולם נמצאים על מעגל ומכאן G מעגל. מש"ל.

18. $\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k} = 2^n - \frac{n(n-1)}{2} - n - 1$. – כי נבחר מתוך n הקודקודים את הקודקודים שירכיבו מעגל באורך 3, 4, וכו'.

19. מעגל המילטון חייב לעבור בכל הקודקודים פעם אחת בדיוק (למעט סגירת המעגל) ולכן, מכיוון שהגרף הוא דו צדדי, המעגל עובר לסירוגין בין קודקודי A ו B ואם קבוצה אחת תהיה יותר גדולה, בשלב מסוים נעבור על כל קודקודי הקבוצה הקטנה ולא נוכל לחזור אליה כדי להמשיך לעבור על קודקודי הקבוצה הגדולה. מש"ל.

20. יהא G גרף לא מכוון על n קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. צ"ל: G קשיר וקוטרו לכל היותר 2. נניח בשלילה שהקוטר גדול ממש מ 2. מכאן, קיימים קודקודים $u,v \in V$ כך שהמרחק ביניהם לפחות 3, u,v אינם שכנים כי המרחק ביניהם יהיה 1. נתבונן בקבוצות השכנים של u ו v: $N(u)$, $N(v)$. $N(v) \cap N(u) = \emptyset$ כי אם יהיה ל u,v שכנים משותפים אז המרחק ביניהם יהיה 2. ומכאן מספר הקודקודים בגרף: $|N(u)| + |N(v)| + |\{u,v\}| \leq n$ ומכאן, לפי הנתונים: $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 2 \leq n$ ולכן: $n+1 \leq n$ - סתירה. מש"ל.

21. יהא G עץ עם $n \geq 2$ קודקודים. נניח בשלילה שאין ב G עלים. לא ייתכן קודקוד מדרגה 0 כי הגרף לא יהיה קשיר (לא נוכל להגיע מהקודקוד בעל דרגה 0 לאחרים). ולכן בהכרח קיים קודקוד לפחות מדרגה 2. יהא $(u_0,u_1,\dots,u_k)$ $(u_0,u_1,\dots,u_k \in V)$ מסלול פשוט מקסימאלי ב G, u_0 אינו עלה ולכן קיים לו שכן נוסף מלבד u_1, נסמנו $v \in V$, אם $v \neq u_i$ לכל $1 \leq i \leq k$, אז נוכל להאריך את המסלול ע"י הוספת v בסתירה למקסימאליות של המסלול. אם $v = u_i$ לאיזה $1 \leq i \leq k$ נקבל $(v,u_0,u_1,\dots,v,\dots,u_k)$ מעגל בסתירה לכך ש G עץ. מש"ל.

22. נוכיח באינדוקציה על n: בסיס: $n=1$ יש $1-1=0$ קודקודים.

הנחה: הטענה נכונה עבור: $1 \leq k < n$. צ"ל: הטענה נכונה עבור n. יהא G עץ עם n קודקודים. לפי הטענה שבכל עץ קיים עלה (בשאלה הקודמת), בהכרח יש עלה ב G, נסיר אותו.

קיבלנו גרף עם $n-1$ קודקודים. גרף זה הוא עץ כי הורדת הצלע של העלה לא פגעה בקשירות הגרף (כי העלה מחובר בצלע רק מכיוון אחד ולא מפריד בין 2 קודקודים) וכן, לא יכולים להיווצר מעגלים ע"י הורדת קודקוד/צלע. ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, בגרף שהתקבל יש $n-2$ צלעות. נוסיף חזרה את הקודקוד והצלע שהסרנו ונקבל עץ G עם n קודקודים ו $n-1$ צלעות. מש"ל.

23. ההסבר הובא בפתרון השאלה הקודמת.

24. נוכיח באינדוקציה על n (מספר הקודקודים): בסיס: $n=3$ אז בהכרח: $m=3$ וקיבלנו גרף משולש – מעגל. הנחה: נניח נכונות לגרפים עם $n-1 \geq 3$ קודקודים ונוכיח עבור גרפים עם n קודקודים. יהא G גרף עם n קודקודים ו m צלעות. ייתכנו מספר מקרים: אם קיים קודקוד מדרגה לכל היותר 1, נסיר אותו ונקבל גרף עם $n-1$ קודקודים ו $m-1 \geq n-1$ (לפחות) צלעות ולכן לפי הנחת האינדוקציה, יש בגרף שהתקבל מעגל ולכן הוא קיים גם ב G.

אחרת, דרגת כל הקודקודים היא לפחות 2. יהא $v \in V$ קודקוד כלשהו בגרף, נטייל החל מקודקוד זה, מכיוון שדרגת כל קודקוד היא לפחות 2, לא ניתקע ומכיוון שהגרף סופי אז בהכרח נגיע בשלב כלשהו לקודקוד שכבר ביקרנו בו וסגרנו מעגל ב G. מש"ל.