סיכום קורס מבנים דיסקרטיים – סמסטר ב' תש"פ מדעי המחשב (הועתק מסיכומים מהדרייב) עריכה: אייל לוי

אוניברסיטת אריאל בשומרון

הערה: כל החומר במסמך הועתק מסיכומים משנים קודמות ולכן ייתכנו שינויים. יש להפעיל שיקול דעת! אשתדל לעדכן את הסיכומים לקראת תקופת מבחנים

חלק א: קומבינטוריקה

<u>הגדרה</u>: ענף במתמטיקה העוסק במנייה של עצמים המקיימים תנאי מסוים בקבוצות בנות מניה.

סוגי בעיות:

- בעיות מניה – מספר הפתרונות לבעיה מסוימת.
- בעיות חיפוש ואופטימיזציה – מציאת הפתרון האופטימאלי.
- בעיות הכרעה – האם קיים פתרון לבעיה.

כללי מניה בסיסיים:

<u>עיקרון הסכום</u>: תהיינה A, B קבוצות סופיות וזרות. אז מתקיים:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות וזרות אחת מהשנייה מתקיים:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

<u>עיקרון המכפלה</u>: תהיינה A, B קבוצות סופיות. אז מתקיים:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות מתקיים:

$$|A_1 \times A_2 \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

<u>עיקרון המשלים:</u> רצוי = סה"כ פחות לא רצוי.

<u>עיקרון שובך היונים:</u>

- אם מכניסים יותר מ k איברים לתוך k תאים אז קיים לפחות תא אחד בו יימצאו 2 איברים או יותר.
- אם מכניסים $kn+1$ איברים לתוך n תאים אז בהכרח לפחות אחד מהתאים יכיל לפחות $k+1$ איברים.

משפט ארדש – סקרש: לכל סדרה באורך $ab+1$ של מספרים ממשיים שונים יש תת סדרה עולה באורך $a+1$ או תת סדרה יורדת באורך $b+1$.

<u>תמורה (פרמוטציה)</u>: מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה:

$n!$ - כלומר, למקום הראשון קיימים n אפשרויות, למקום השני קיימים $n-1$ אפשרויות, וכן הלאה.

<u>**חליפות עם חזרות**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>עם</u> חזרות ו<u>עם</u> חשיבות לסדר הבחירה: (k יכול להיות גדול מ n).

n^k - כלומר לכל אחד מ k האיברים קיימים n אפשרויות.

- <u>**חליפות**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>ללא</u> חזרות ו<u>עם</u> חשיבות לסדר הבחירה:

$\frac{n!}{(n-k)!}$ - כלומר, למקום הראשון קיימים n אפשרויות, למקום השני קיימים $n-1$ אפשרויות, וכן הלאה עד מקום k שבו קיימים $n-k+1$ אפשרויות.

- <u>**צירופים**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>ללא</u> חזרות ו<u>ללא</u> חשיבות לסדר הבחירה:
  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - כלומר, בהתחלה מונים בחירת k איברים מתוך n ללא חזרות ו**עם** חשיבות לסדר הבחירה, ומקבלים שמנינו את הקבוצה כמספר התמורות שלה ולכן מחלקים ב $k!$.
  <u>זהות</u>: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

<u>**חלוקות**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>עם</u> חזרות ו<u>ללא</u> חשיבות לסדר הבחירה: (k יכול להיות גדול מ n).

$\binom{k+n-1}{k}$ - כלומר, מסדרים את האיברים לפי החזרות (איברים חוזרים יהיו סמוכים אחד לשני) ומתייחסים לכל האיברים כאיברים זהים, כעת הבעיה היא כזו: מספר האפשרויות לחלק k איברים זהים ל n תאים כך שסה"כ יש לנו בשורה אחת k איברים ו $n-1$ מחיצות כדי ליצור n תאים (סה"כ: $k+n-1$ עצמים), נשאר רק לבחור היכן לשים את המחיצות (או לחלופין, היכן לשים בין המחיצות את k האיברים) וזו בעיית צירופים (ללא חזרות וללא חשיבות לסדר).

סיכום הנוסחאות:

	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם חזרות	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$
ללא חזרות	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

<u>הבינום של ניוטון</u>:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} a^i b^{n-i}$$

<u>זהות פסקל</u>:
חלוקת הבחירה של k איברים מתוך n ל -2 סוגי קבוצות: קבוצות שמכילות את האיבר הראשון ובהן נותר לבחור $k-1$ איברים מתוך $n-1$ שנשארו (ללא הראשון). וקבוצות שאינן מכילות את האיבר הראשון ובהן צריך לבחור את k האיברים מתוך $n-1$ שנשארו (ללא הראשון).

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

<u>משולש פסקל</u>:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

<u>תכונות של משולש פסקל:</u>

1. כל שורה במשולש סימטרית סביב האמצע שלה.
2. כל איבר מתקבל מסכום 2 האיברים שמעליו.
3. סכום השורה ה – n במשולש הוא: 2^{n-1}.
4. סכום הערכים במקומות הזוגיים בשורה שווה לסכום הערכים במקומות האי זוגיים.
5. בשורה ה n במשולש נמצאים המקדמים של הפיתוח: $(a+b)^{n-1}$.
6. הסדרה בצלע החיצונה היא: ... ,1,1,1,1,1
7. הסדרה בקו השני היא: ... ,1,2,3,4 (המספרים הטבעיים).
8. הסדרה בקו השלישי היא: ... ,1,3,6,10 (המספרים המשולשים).

<u>מספרי קטלן</u>: ... 1,1,2,5,14,42,132,429,1430

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

C_n מונה את מספר הדרכים לשים סוגריים על $n+1$ גורמים שונים.

<u>עיקרון ההכלה וההדחה</u>:
תהיינה A, B קבוצות סופיות. אז מתקיים:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות מתקיים שגודל האיחוד שווה לסכום המתחלף:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \cdots$$

חלק ב': רקורסיה ופתרון נוסחאות נסיגה

<u>**נוסחאות נסיגה**</u>

<u>הגדרה</u>: נוסחא רקורסיבית: נוסחא המחשבת תוצאה של בעיה מסוימת המתבססת על חישוב של אותה בעיה עבור ערכים קודמים.

לכל נוסחת נסיגה נגדיר:

- בסיס/ תנאי עצירה: פתרון של הנוסחא עבור הערך הפשוט ביותר.
- צעד רקורסיבי: חישוב המסתמך על התוצאה של ערך/ערכים קודמים.

<u>**הגדרה רקורסיבית:**</u>

<u>**קבוצה**</u>**:** הגדרה רקורסיבית של קבוצה תתבצע באופן הבא:

<u>בסיס</u>: איבר או קבוצת איברים שידוע לנו שהם שייכים לקבוצה.
<u>צעד רקורסיבי</u>: שייכות של איבר כללי לקבוצה על סמך איברים אחרים שנמצאים כבר בקבוצה.

לדוגמא: קבוצת המספרים הטבעיים מוגדרת באופן הבא:
$0 \in \mathbb{N}$ - <u>בסיס</u> ,
$x \in \mathbb{N}$ גורר ש $x+1 \in \mathbb{N}$ - <u>צעד רקורסיבי</u>.
ועכשיו, אם נרצה לדעת האם איבר a שייך לקבוצה, נצטרך לחזור אחורה עד הבסיס כדי לדעת האם האיברים הקודמים שייכים לקבוצה וכך נדע עבור האיבר עצמו.

<u>**פונקציה**</u>**:** הגדרה רקורסיבית של פונקציה תתבצע באופן הבא:

<u>בסיס/תנאי התחלה</u>: הערכים שהפונקציה מחזירה עבור האיבר/האיברים הראשונים.
<u>צעד רקורסיבי</u>: הפונקציה עצמה שבתוכה יש קריאה לפונקציה עבור איברים קודמים.

לדוגמא: פונקציה המחשבת עצרת $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ מוגדרת באופן הבא:
$f(0) = 1$ – <u>תנאי התחלה</u> ,
$f(n) = n * f(n-1)$ עבור $n > 0$ - <u>צעד רקורסיבי</u>.

<u>**שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה**</u>

<u>המטרה</u>: להגיע מנוסחת נסיגה לנוסחא מפורשת (נוסחא שמציבים בה n ומקבלים מיידית את התשובה).

<u>שיטת הניחוש/ הצבה חוזרת</u>:

אם נתונה פונקציה רקורסיבית $f(n)$ אז נפתור ע"י הצבת $f(n-1)$ ואז נציב $f(n-2)$ וכן הלאה עד תנאי ההתחלה.

לדוגמא: $f(n) = 2 * f(n-1)$, $f(0) = 3$.
נציב: $f(n-1) = 2 * f(n-2)$ בנוסחא ונקבל אחרי הצבה אחת:
$f(n) = 2 * 2 * f(n-2)$
נמשיך ונציב:
$f(n-2) = 2 * f(n-3)$ בנוסחא
ונקבל אחרי 2 הצבות:
$f(n) = 2 * 2 * 2 * f(n-3)$
עד שרואים את החוקיות ומנחשים שהפתרון אחרי $k-1$ הצבות
יהיה: $f(n) = 2^k f(n-k)$.
צריך להגיע ל $f(0)$ ולכן נציב:
$k = n$ (כי $n-k = n-n = 0$)
ונקבל: $f(n) = 2^n f(0)$,
נציב את $f(0)$ ונקבל נוסחא מפורשת: $f(n) = 3 * 2^n$.

כאשר משתמשים בשיטת הניחוש, צריך להוכיח את התוצאה ע"י אינדוקציה.

<u>פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות ע"י הפולינום האופייני</u>:

אם נתונה פונקציה רקורסיבית מהצורה הבאה:

$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k)$ עם k תנאי התחלה:
$f(1) = c_1, f(2) = c_2, \ldots, f(k) = c_k$
(<u>הערה</u>: תנאי ההתחלה יכולים להיות מ 0 עד $k-1$),
כלומר: נוסחא התלויה ב k האיברים הקודמים.ואין לנוסחא איבר חופשי (לדוגמא: $f(n) = 2f(n-1) + \mathbf{2}$). אז נפתור את הנוסחא ע"י השלבים הבאים:

1. נציב: $f(n) = x^n$, $f(n-1) = x^{n-1}$, $f(n-2) = x^{n-2}$, ... $f(n-k) = x^{n-k}$. ונקבל את הפולינום האופייני:
   $x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_k x^{n-k}$
2. נפתור את המשוואה (מסדר k) ונקבל את הפתרונות: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
3. כעת, <u>אם קיבלנו k פתרונות שונים</u>, הנוסחא תראה כך:
   $f(n) = b_1 {x_1}^n + b_2 {x_2}^n + \cdots + b_k {x_k}^n$, נותר למצוא את המקדמים: $b_1, b_2, \ldots, b_k$. נמצא את המקדמים ע"י הצבת תנאי ההתחלה ונקבל מערכת של k משוואות עם k נעלמים:

$$f(1) = b_1 {x_1}^1 + b_2 {x_2}^1 + \cdots + b_k {x_k}^1$$
$$f(2) = b_1 {x_1}^2 + b_2 {x_2}^2 + \cdots + b_k {x_k}^2$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$f(k) = b_1 {x_1}^k + b_2 {x_2}^k + \cdots + b_k {x_k}^k$$

נציב את הפתרונות של $b_1, b_2, \ldots, b_k$ בנוסחא:
$f(n) = b_1 {x_1}^n + b_2 {x_2}^n + \cdots + b_k {x_k}^n$ וזו הנוסחא המפורשת.
<u>אם יש פתרונות זהים</u>: לדוגמא: $x_1 = x_2$ אז אין לנו k פתרונות שונים ולכן, נכפול את x_1 או את x_2 ב n ונקבל:
$f(n) = b_1 {x_1}^n + \boldsymbol{n} b_2 {x_2}^n + \cdots + b_k {x_k}^n$. אם יש ריבוי של פתרונות (m פתרונות זהים, לדוגמא: $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$), נכפול כל פתרון זהה ב n (חוץ מהראשון) כדי לקבל m פתרונות שונים והנוסחא תראה כך:
$f(n) = b_1 {x_1}^n + \boldsymbol{n} b_2 {x_2}^n + \boldsymbol{n^2} b_3 {x_3}^n + \cdots + \boldsymbol{n^{m-1}} b_m {x_m}^n + \cdots + b_k {x_k}^n$.

חלק ג': תורת הגרפים

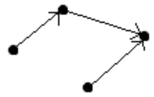
<u>תורת הגרפים</u>

הגדרה: ענף במתמטיקה העוסק בתכונותיהם של גרפים.

מושגים:

גרף: קבוצה של צמתים (קודקודים) וקבוצה של קשתות בין הקודקודים.

- גרף מכוון: גרף שבו יש משמעות לכיוון של הקשת. סימון: $D=(V,E)$. כאשר V היא קבוצת הצמתים (הקודקודים). ו $E\subseteq V\times V$ היא קבוצת הקשתות (זוגות סדורים). לכל קשת יש כיוון: $e=(u,v)$ היא קשת שיוצאת מ u ומגיעה ל v.



- גרף לא מכוון: אין משמעות לכיוון של הקשת. סימון: $G=(V,E)$. כך שבמקרה זה: $E\subseteq\{\{u,v\}|\ u,v\in V\}$.

גרף פשוט: גרף שבין כל 2 צמתים יש לכל היותר קשת אחת ואין קשת מקודקוד לעצמו.

גרף לא פשוט:

שכנות: 2 קודקודים יקראו שכנים אם קיימת קשת ביניהם.

דרגה של צומת: מספר הקשתות המחוברות לצומת.

סימון: degree (v).

- בגרף מכוון יש דרגת כניסה: מספר הקשתות הנכנסות לצומת. indegree(v)
  ודרגת יציאה: מספר הקשתות היוצאות מהצומת. outdegree(v).
- עלה: קודקוד בעץ שהדרגה שלו היא 1.
- צומת מבודד: קודקוד שהדרגה שלו היא 0.
- גרף שדרגות כל הצמתים בו שווה ל k נקרא גרף k - רגולרי.

משפט: סכום כל הדרגות בגרף הוא זוגי (כי כל קשת "תורמת" 2 דרגות: כניסה ויציאה) ושווה ל $2|E|$ (פעמיים מספר הקשתות). $\sum_{v\in V}\text{degree}(v)=2|E|$

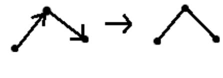
גרף ריק: גרף שבו אין קשתות. סימון N_n כאשר n - מספר הקודקודים.

גרף שלם: גרף שבו בין כל 2 קודקודים יש קשת. סימון k_n כאשר n - מספר הקודקודים.

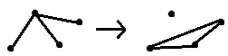
קליקה: תת גרף שבו בין כל 2 קודקודים יש קשת. (תת גרף שלם)

גרף אינסופי: גרף שבו קבוצת הצמתים היא אינסופית.

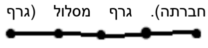
גרף תשתית: גרף התשתית של גרף מכוון הוא גרף שאינו מכוון שבו יש אותם קודקודים ואותם קשתות כמו במכוון רק ללא הכיוון.



גרף משלים: הגרף המשלים שיסומן כ $\bar{G}$, של גרף G הוא גרף עם אותם קודקודים כך שבמקום שלא הייתה קשת בגרף המקורי יש קשת ב $\bar{G}$ ובמקום שהייתה קשת ב G אין קשת ב $\bar{G}$.



מסלול: סדרה של קשתות סמוכות בגרף (כך שסוף קשת מתחברת לתחילת חברתה). גרף מסלול (גרף שכולו מסלול אחד) יסומן כ P_n.



- מסלול פשוט: מסלול שלא עובר באף צומת יותר מפעם אחת.
- מסלול אוילר: מסלול העובר בכל הקשתות בגרף בדיוק פעם אחת.
  - מסלול אוילר קיים אם ורק אם יש בדיוק 0 או 2 צמתים בעלי דרגה אי זוגית.
- מסלול המילטוני: מסלול העובר בכל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת.
- אורך של מסלול – מספר הקשתות במסלול.

מרחק בין 2 קודקודים: כמות הקשתות במסלול **<u>הקצר</u>** ביותר בין 2 הקודקודים. אם אין מסלול אז המרחק שווה לאינסוף. מרחק מקודקוד לעצמו שווה 0.

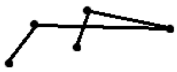
פונקצית המרחק בגרף לא מכוון מקיימת:

$$d(u,v)=d(v,u)$$

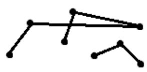
$$d(u,v)+d(v,w)\ge d(u,w)$$

קוטר של גרף: המרחק הגדול ביותר בגרף. אם הגרף אינו קשיר אז הקוטר הוא אינסוף.

גרף קשיר: גרף לא מכוון שבו בין כל שני צמתים קיים מסלול (אפשר להגיע מכל קודקוד לחברו).

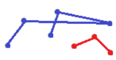


גרף לא קשיר:



רכיב קשירות: תת גרף קשיר מקסימאלי (כלומר, הגרף מתפרק לתתי גרפים כך שמכל קודקוד בתת גרף הראשון אי אפשר להגיע לאף קודקוד בתת הגרף השני.

רכיבי הקשירות:



מעגל: מסלול לא ריק המתחיל ומסתיים באותו צומת. גרף מעגל הוא גרף שכולו מעגל. יסומן כ C_n כאשר n - מספר הקודקודים.

- מעגל פשוט: מעגל שלא עובר באף צומת יותר מפעם אחת.
- מעגל אוילר: מעגל העובר בכל הקשתות בגרף בדיוק פעם אחת.
  - מעגל אוילר קיים אם ורק אם אין צמתים בעלי דרגה אי זוגית.
- מעגל המילטוני: מעגל העובר בכל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת.

עץ: גרף קשיר ללא מעגלים. סימון T_n כאשר n - מספר הקודקודים.

- עץ בינארי: עץ שיש לו שורש ולכל קודקוד יש לכל היותר 2 בנים (והדרגה בעץ היא לכל היותר 3).

יער: גרף ללא מעגלים. (לא חייב להיות קשיר, כל רכיב קשירות הוא עץ).

גרף דו צדדי: גרף שאפשר לחלק את הקודקודים שלו ל 2 קבוצות זרות כך שלא קיימת קשת בין 2 קודקודים השייכים לאותה קבוצה.

גרף דו צדדי מלא: גרף דו צדדי בו נמצאות כל הקשתות האפשריות. סימון: $K_{n,m}$ כאשר n קודקודים בצד אחד ו m קודקודים בצד שני.

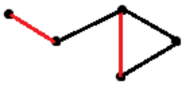
גרף מישורי: גרף שניתן לייצג אותו במישור מבלי שהקשתות יחתכו זו את זו.

גרף שאינו מישורי:

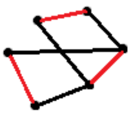
- פאה בגרף: פאה בגרף היא השטח הכלוא בין צלעות הגרף. הפאה החיצונה נספרת גם היא ונקראת הפאה האינסופית. קבוצת הפאות תסומן בד"כ ב F.
  בגרף  יש 3 פאות.
- נוסחת אוילר: יהא G גרף מישורי קשיר, V - קבוצת הקודקודים, E - קבוצת הצלעות ו F - קבוצת הפאות. אז מתקיים: $|V|-|E|+|F|=2$.
- הכללת הנוסחא לגרפים לא קשירים: $|V|-|E|+|F|=1+c$ כאשר c - מספר רכיבי הקשירות בגרף.
- משפט: בגרף מישורי מתקיים: $|E|\le 3\cdot|V|-6$
- משפט: בגרף מישורי קיים קודקוד אחד לפחות שדרגתו קטנה או שווה ל 5.

גרף k - צביע: גרף שניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב k צבעים כך שכל 2 קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. מספר הצביעה של הגרף הוא ה k המינימאלי שנדרש כדי לצבוע את הקודקודים בצורה חוקית ויסומן כ: $\chi(G)$.

זיווג בגרף: זיווג בגרף G הוא אוסף של קשתות מהגרף כך שאין 2 קשתות מהאוסף שנוגעות בקודקוד משותף.



זיווג מושלם: זיווג מושלם ב G הוא זיווג שבו משתתפים כל הקודקודים בגרף. (חלוקת קודקודי הגרף לזוגות כך שכל זוג קודקודים מחוברים בקשת)

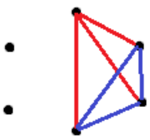


<u>משפטים בתורת הגרפים</u>

- בגרף קשיר לא מכוון עם n יש לפחות $n-1$ צלעות.
- בכל גרף G המקיים: $|E|\ge|V|$ ו $|V|\ge 3$ יש מעגל.
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם הוא 2 צביע.
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים מאורך איזוגי.
- כל עץ הוא גרף דו צדדי.
- משפט ארבעת הצבעים: כל גרף מישורי הוא 4 – צביע.
- משפט טורן: הגרף בעל n קודקודים ומספר קשתות מקסימאלי שאינו מכיל קליקה בגודל $t+1$ הוא גרף המחולק ל t קבוצות צמתים זרות מאותו גודל (עד כמה שאפשר) ושלכל צומת יש קשת לכל שאר הצמתים בקבוצות האחרות.
- משפט Hall (משפט החתונה): יהא $G=(V\uplus U,E)$ גרף דו צדדי, $|V|=|U|$, אם לכל תת קבוצה של קודקודים $S\subseteq V$ מתקיים: $|S|\le|\Gamma(S)|$ כאשר $\Gamma(S)$ מייצג את אוסף השכנים של קודקודי S אז קיים ב G זיווג מושלם.

- מסקנה: יהא G גרף דו צדדי k רגולרי אז קיים ב G זיווג מושלם.
- משפט רמזי: לכל n טבעי קיים גרף שלם כך שאם נצבע את הקשתות שלו ב 2 צבעים בהכרח נקבל תת גרף שלם (קליקה) בגודל n.
  - לכל גרף K_n, אם נצבע את הקשתות שלו ב 2 צבעים שונים, בהכרח נקבל קליקה בגודל $R_{n,m}$ הצבועה כולה באחד מן הצבעים כאשר $R_{n,m}$ הוא מספר רמזי.

  משפט רמזי עבור K_6:



  - מספר רמזי $R(m,n)=r$ אומר שאם נצבע את K_r ב 2 צבעים (כחול ואדום) אז בהכרח נקבל K_m צבועה כולה בכחול או K_n צבועה כולה באדום. מהדוגמא לעיל רואים כי: $R(3,3)=6$ - אם נצבע את K_6 ב 2 צבעים (אדום וכחול) נקבל בהכרח קליקה בגודל 3 (משולש) הצבועה כולה באדום או קליקה בגודל 3 הצבועה כולה בכחול.

5.1. מונחים בסיסיים מתורת הגרפים

הגדרה 5.1.1: תהי V קבוצה סופית לא ריקה, ותהי E קבוצה של זוגות איברים שונים מתוך V.
הזוג $G = (V,E)$ נקרא **גרף לא-מכוון**, אם E קבוצה של זוגות לא-סדורים.
הזוג $G = (V,E)$ נקרא **גרף מכוון**, אם E קבוצה של זוגות סדורים.
איברי הקבוצה V נקראים **קדקודים** או **צמתים**.
איברי הקבוצה E נקראים **צלעות** (בגרף לא מכוון) או **קשתות** (בגרף מכוון).
במקרה של גרף לא-מכוון נסמן צלע בין הקדקודים u,v על ידי $\{u,v\}$.
במקרה של גרף מכוון נסמן צלע מ- u ל- v על ידי (u,v).
נסמן לרוב את מספר הקדקודים על ידי n ואת מספר הצלעות על ידי m. לגרף עם n קדקודים נקרא לעתים **גרף מסדר n**.

הגדרה 5.1.3: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. נאמר ששני קדקודים $u,v\in V$ **שכנים** (או **סמוכים**) אם קיימת צלע המחברת ביניהם, כלומר $\{u,v\}\in E$. במקרה זה נאמר גם שהצלע $\{u,v\}$ **חלה** בקדקודים u,v. אנו נסמן את קבוצת כל השכנים של קדקוד u על ידי $\Gamma(u)$, כלומר:
$\Gamma(u) = \{v \mid \{u,v\} \in E\}$.
כמו-כן, אם $S\subseteq V$ קבוצה של קדקודים, אז הקבוצה $\Gamma(S) = \{v \mid \exists\, u\in S, \{u,v\}\in E\}$ היא קבוצת כל השכנים של קדקודים ב- S.
בדומה, יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון. נאמר שקדקוד v **שכן** של קדקוד u אם קיימת צלע מכוונת מ- u אל v, כלומר $(u,v)\in E$. נאמר שהצלע (u,v) **חלה** בקדקוד u. בדומה אפשר להגדיר לכל קדקוד u את קבוצת השכנים שלו $\Gamma(u)$, ולכל קבוצה של קדקודים S את קבוצת השכנים שלה $\Gamma(S)$.

הגדרה 5.1.4: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. **הדרגה** של קדקוד $v\in V$ היא מספר הצלעות החלות ב- v, והיא תסומן על ידי $\text{degree}(v)$.

משפט 5.1.5: בגרף לא-מכוון $G = (V,E)$ מתקיים $\sum_{v\in V} \text{degree}(v) = 2|E|$.

הוכחה: נספור לכל קדקוד v את מספר הצלעות החלות בו, כלומר נסכם את כל הדרגות. כל צלע $\{u,v\}$ תיספר פעמיים - עבור u ועבור v. ומכאן מתקבל השוויון. □

מסקנה 5.1.6: בגרף לא-מכוון $G = (V,E)$ יש מספר זוגי של קדקודים שדרגתם אי-זוגית.
הוכחה: לא ייתכן שבגרף לא-מכוון יש מספר אי-זוגי של קדקודים שדרגתם אי-זוגית, כי $\sum_{v\in V} \text{degree}(v) = 2|E|$, כלומר סכום הדרגות הוא מספר זוגי. □

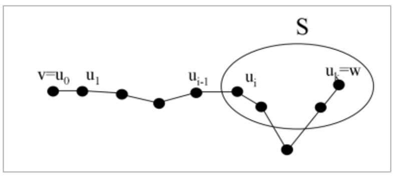
הגדרה 5.1.7: יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. סדרה של קדקודים $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ כך ש- $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ לכל $i = 0,1,\dots p-1$, וכך שהצלעות $\{v_i,v_{i+1}\}$ כולן שונות זו מזו, נקראת **מסלול** (או **מסילה**). אם כל הקדקודים לאורך המסלול שונים זה מזה אז המסלול **פשוט**.
אם $v_0 = v_p$ אז המסלול נקרא **מעגל**. אם כל הקדקודים לאורך המעגל שונים זה מזה (פרט לקדקוד ההתחלה והסיום כמובן), אז זהו **מעגל פשוט**.
אורך המסלול $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ שווה ל- p, כלומר למספר הצלעות לאורכו.
יהיו $u,v\in V$ שני קדקודים. **המרחק** בין u ל- v מוגדר כאורך המזערי של מסלול ביניהם, ומסומן על ידי $d(u,v)$, או $d_G(u,v)$ כאשר רוצים להבהיר שהמרחק מחושב בגרף G. אם אין מסלול בין u ל- v אז מגדירים $d(u,v) = \infty$. **קוטר** הגרף הוא המרחק המקסימלי בגרף בין זוג קדקודים כלשהם. באופן דומה מגדירים מושגים אלה לגרפים מכוונים.

טענה 5.1.9: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון, ויהיו $u,v,w\in V$. פונקצית המרחק בין קדקודים מקיימת:
1. $d(u,v) \ge 0$, ו- $d(u,v) = 0$ אם ורק אם $u = v$.
2. $d(u,v) = d(v,u)$.
3. $d(u,v) + d(v,w) \ge d(u,w)$ (אי-שוויון המשולש).

פונקציה המקיימת את תנאים 1-3 נקראת **מטריקה**.
הוכחה: תכונות 1,2 ברורות מהגדרת אורכו של מסלול בין שני קדקודים. אי-שוויון המשולש נובע מכך שאם יש לנו מסלול מ- u ל- v ומסלול מ- v ל- w, הרי יש לנו מסלול מ- u ל- w שעובר דרך הקדקוד v. אולם ייתכן שהמסלול הקצר ביותר מ- u ל- w הוא מסלול אחר שאינו עובר דרך הקדקוד v. □

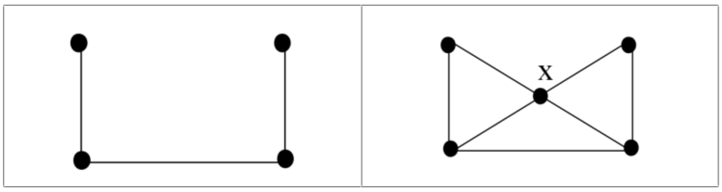
הגדרה 5.1.10: גרף לא-מכוון נקרא **קשיר** אם יש מסלול בין כל זוג קדקודים. גרף מכוון נקרא **קשיר חזק** אם לכל שני קדקודים $a,b\in V$ יש מסלול מ- a ל- b ומסלול מ- b ל- a.
שימו לב שלדרישה החזקה יותר בגרף מכוון יש טעם. הרי, קיומו של מסלול מקדקוד a לקדקוד b אינו מבטיח קיומו של מסלול מ- b ל- a בגרף מכוון.

טענה 5.1.12: אם $G = (V,E)$ גרף לא מכוון קשיר ואם $S \ne \emptyset$ קבוצה חלקית ממש ל- V, אז יש קדקוד $u \notin S$ כך שיש ל- u שכן ב- S.
הוכחה: יהי $v\notin S$ קדקוד כלשהו (יש קדקוד כזה כי $S \ne V$). נבחר קדקוד $w\in S$ כלשהו. מכיוון שהגרף G קשיר, יש מסלול $P = (v = u_0,u_1,\dots,u_k = w)$ בין v ל- w. הקדקוד הראשון לאורך המסלול P הוא v, והוא איננו שייך לקבוצה S. הקדקוד האחרון לאורך המסלול P הוא w, והוא שייך לקבוצה S. לכן, יש אינדקס ראשון $i > 1$ כך ש- $u_i \in S$. כלומר, $u_{i-1} \notin S$ ויש לו שכן u_i השייך ל- S. ולכן אפשר לבחור $u = u_{i-1}$. ראו תרשים 5.1.4. □



תרשים 5.1.4: הוכחת טענה 5.1.12.

הגדרה 5.1.13: יהי $G = (V,E)$ גרף. אם $x\in V$ קדקוד כלשהו, אז הגרף $\mathbf{G \setminus \{x\}}$ הוא הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת הקדקוד x וכל הצלעות החלות בו. אם $S\subseteq V$ קבוצת קדקודים, אז הגרף $\mathbf{G \setminus S}$ הוא הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת כל הקדקודים ב- S והשמטת כל הצלעות החלות בהן. באותו אופן אם $e\in E$ צלע כלשהי, אז הגרף $\mathbf{G \setminus \{e\}}$ הוא הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת הצלע e.
נאמר שגרף $G' = (V',E')$ הוא **תת-גרף** של G אם $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, וכן לכל צלע $\{u,v\}\in E'$ מתקיים $u,v\in V'$. תת-גרף G' ייקרא **תת-גרף פורש** של G, אם $V' = V$.



תרשים 5.1.5: משמאל הגרף G, ומימין הגרף $G\setminus\{x\}$.

טענה 5.1.14: בגרף קשיר לא מכוון עם n קדקודים יש לפחות $n-1$ צלעות.
הוכחה: יהי G גרף לא מכוון עם n קדקודים ו- m צלעות. נוכיח באינדוקציה על m שאם $m < n-1$ אז ב- G יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות. מכך ינבע שבגרף קשיר יש לפחות $n-1$ צלעות, כי אחרת אם $m \le n-2$ אז בגרף יש לפחות שני רכיבי קשירות, בסתירה לכך שהוא קשיר.
בסיס האינדוקציה: $m = 0$. ברור שבגרף עם n קדקודים וללא צלעות יש n רכיבי קשירות.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $m-1 \ge 0$ צלעות ונוכיח לגרף עם $m > 0$ צלעות. יהי G גרף כזה, ותהי e צלע כלשהי ב- G. לפי הנחת האינדוקציה בגרף $G\setminus\{e\}$ יש לפחות $n-m+1$ רכיבי קשירות. נוסיף כעת את הצלע e בחזרה. ייתכנו שני מקרים:
א. אם הצלע e מחברת שני קדקודים השייכים לאותו רכיב קשירות בגרף $G\setminus\{e\}$ הרי שגם ב- G יש $n-m+1$ רכיבי קשירות.
ב. אם e מחברת שני קדקודים השייכים לשני רכיבי קשירות שונים בגרף $G\setminus\{e\}$, אז ב- G יש רכיב קשירות אחד פחות מאשר ב- $G\setminus\{e\}$, כלומר יש ב- G $n-m$ רכיבי קשירות (במקרה זה גורמת הוספת הצלע $e = \{u,v\}$ למיזוגם של שני רכיבי קשירות, זה של הקדקוד u וזה של הקדקוד v).

בכל מקרה הראינו שב- G יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות ובכך הושלמה ההוכחה. □

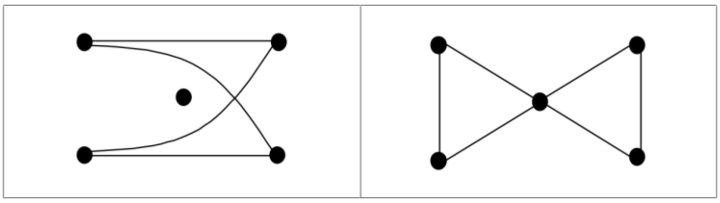
טענה 5.1.15: בגרף בעל $n \ge 3$ קדקודים ו- $m \ge n$ צלעות יש מעגל.
הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקדקודים n בגרף.
בסיס האינדוקציה: $n = 3$. הגרף היחיד עם $n = 3$ קדקודים ו- $m \ge 3$ צלעות הוא המשולש, וזהו כמובן מעגל.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $n-1 \ge 3$ קדקודים ונוכיח לגרף G עם n קדקודים. ייתכנו שני מקרים:
א. אם יש ב- G קדקוד כלשהו x שדרגתו 1, אז נתבונן בגרף $G\setminus\{x\}$. בגרף הזה יש $n-1$ קדקודים ו- $m-1 \ge n-1$ צלעות, ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש בו מעגל. אולם המעגל הזה קיים כמובן גם בגרף G.
ב. אחרת, הדרגה של כל הקדקודים בגרף G היא לפחות 2. במקרה זה יהי v_0 קדקוד כלשהו ב- G. נצא מהקדקוד v_0 ונטייל על צלעות הגרף באופן כלשהו, כאשר אנחנו מקפידים שלא לסגת מיד אל הצלע שממנה באנו זה עתה. מכיוון שהדרגה של כל קדקוד היא לפחות 2, אז לא ניתקע באף קדקוד. מכיוון שהגרף סופי אנו נגיע בשלב כלשהו לקדקוד שכבר ביקרנו בו קודם לכן, ואז לפנינו מעגל כנדרש.

הראינו בכל מקרה שיש ב- G מעגל, ולכן הטענה נכונה. □

טענה 5.1.16: יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון ותהי $e\in E$ צלע. אז הגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר אם ורק אם הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו ב- G.
הוכחה: עלינו להוכיח שני כיוונים. נניח תחילה כי $e = \{x,y\}$ והגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר. לכן יש מסלול פשוט P מ- x ל- y בגרף $G\setminus\{e\}$. אם נוסיף את הצלע e למסלול P אז נקבל מעגל פשוט בגרף G הכולל את הצלע e.

ולהיפך, נניח כעת ש- C הוא מעגל פשוט בגרף G הכולל את הצלע e ונוכיח שהגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר. בהינתן שני קדקודים כלשהם u,v בגרף $G\setminus\{e\}$, נרצה להוכיח שיש ביניהם מסלול כלשהו בגרף $G\setminus\{e\}$. מכיוון ש- G קשיר אז יש מסלול Q ב- G בין u ל- v. אם Q מסלול גם בגרף $G\setminus\{e\}$ אז סיימנו. אחרת, הצלע $e = \{x,y\}$ מופיעה במסלול Q, כלומר Q הוא מהצורה $Q = (u,\dots,x,y,\dots,v)$. נראה שגם במקרה זה אפשר להגיע מ- u ל- v בדרך עקיפה. יהי $C\setminus\{e\}$ המסלול המתקבל מהמעגל C לאחר השמטת הצלע e. נתבונן במסלול $Q' = \{u,\dots,x,C\setminus\{e\},y,\dots,v\}$, כלומר במקום ללכת ישירות מ- x ל- y, נלך דרך המסלול $C\setminus\{e\}$. המסלול Q' הוא מסלול ב- $G\setminus\{e\}$, ולכן גם במקרה זה ניתן להגיע מ- u ל- v כנדרש. □

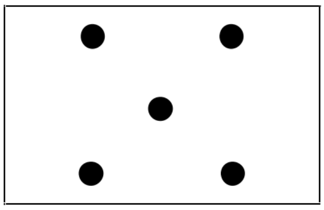
הגדרה 5.1.17: יהי $G = (V,E)$ גרף. **הגרף המשלים** של G הוא הגרף $\overline{G} = (V,\overline{E})$, כאשר קבוצת הקדקודים של $\overline{G}$ זהה לזו של G, ואילו שני קדקודים u,v יהיו שכנים ב- $\overline{G}$ אם ורק אם אינם שכנים ב- G.



תרשים 5.1.6: גרף והמשלים שלו.

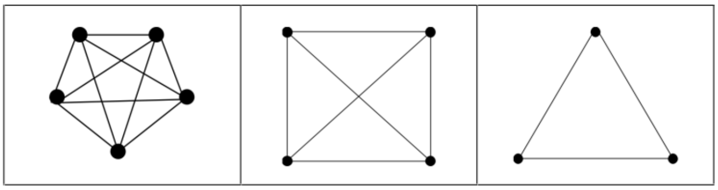
הגרף הריק והגרף השלם

הגדרה 5.2.1: גרף ללא צלעות נקרא **הגרף הריק**. הגרף הריק על n קדקודים יסומן על ידי N_n.



תרשים 5.2.1: הגרף N_5.

הגדרה 5.2.2: גרף לא-מכוון שבו מופיעות כל הצלעות האפשריות נקרא **גרף שלם**. הגרף השלם על n קדקודים יסומן על ידי K_n. הגרף K_n נקרא גם **קליקה מסדר n** או ***n-קליקה***.



תרשים 5.2.2: מימין K_3, במרכז K_4 ומשמאל K_5.

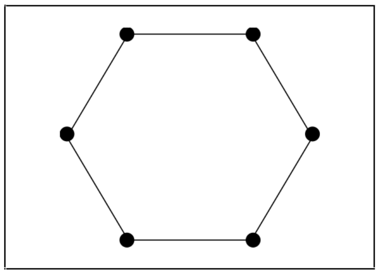
משפט 5.2.3: בגרף השלם הלא-מכוון K_n יש $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ צלעות.

הוכחה: מספר הזוגות הלא סדורים $\{x,y\}$ שאפשר לבחור מתוך קבוצה בת n איברים הוא $\binom{n}{2}$, ומספר זה שווה למספר הצלעות בגרף. □

הגדרה 5.2.4: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון, ותהי $S \subseteq V$. נאמר ש- S קבוצה **בלתי-תלויה** של קדקודים או **אנטי-קליקה** אם אין צלעות בין הקדקודים ב- S. כלומר, לכל $x,y \in S$ מתקיים $\{x,y\} \notin E$.

גרף המעגל וגרף המסלול

הגדרה 5.2.5: גרף בעל n קדקודים שנראה כמו מעגל, נקרא **גרף המעגל** (ולפעמים סתם מעגל), ויסומן על ידי C_n. פורמלית, קבוצת הקדקודים של הגרף היא $V = \{0,1,\ldots,n-1\}$ וקבוצת הצלעות היא $E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid i = 0,1,\ldots,n-1\}$.



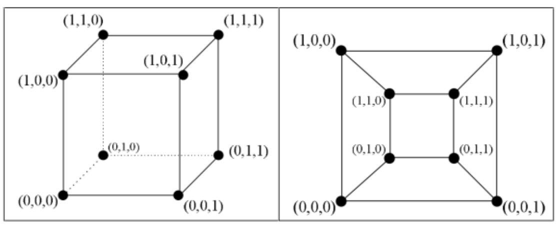
תרשים 5.2.3: הגרף C_6.

הגדרה 5.2.6: גרף בעל n קדקודים שהוא מסלול פשוט נקרא **גרף המסלול** (או סתם מסלול), ויסומן על ידי P_n. פורמלית קבוצת הקדקודים היא $V = \{1,2,\ldots,n\}$ וקבוצת הצלעות היא $E = \{\{i,i+1\} \mid i = 1,2,\ldots,n-1\}$.

תרשים 5.2.4: הגרף P_5.

קוביות

הגדרה 5.2.7: נתבונן בגרף שקבוצת הקדקודים שלו היא אוסף כל הסדרות $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ כאשר $a_i \in \{0,1\}$, ויש צלע בין כל שתי סדרות השונות בדיוק בקואורדינטה אחת. הגרף הזה נקרא **גרף הקוביה ה- n ממדית**, והוא מסומן על ידי Q_n.



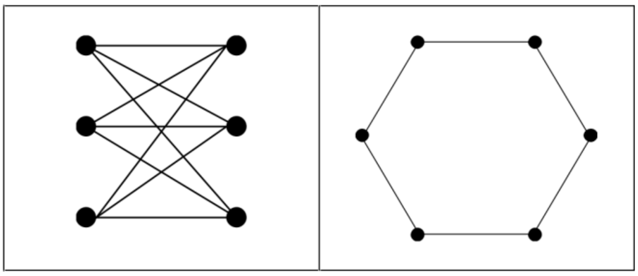
תרשים 5.2.5: שני שרטוטים של הגרף Q_3.

משפט 5.2.9: בגרף Q_n יש 2^n קדקודים ו- $n \cdot 2^{n-1}$ צלעות.

הוכחה: ברור שמספר הקדקודים הוא 2^n כי זהו מספר הסדרות באורך n של אפסים ואחדים. אשר למספר הצלעות - לכל קדקוד יש n שכנים, ולכן סכום הדרגות הוא $n \cdot 2^n$. כל צלע נספרה פעמיים (משפט 5.1.5), ולכן מספר הצלעות הוא $|E| = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$. □

גרפים רגולריים

הגדרה 5.2.10: גרף לא-מכוון G נקרא **רגולרי** אם לכל הקדקודים בו יש אותה דרגה. אם לכל הקדקודים יש דרגה d אז הגרף נקרא גרף **d-רגולרי**.

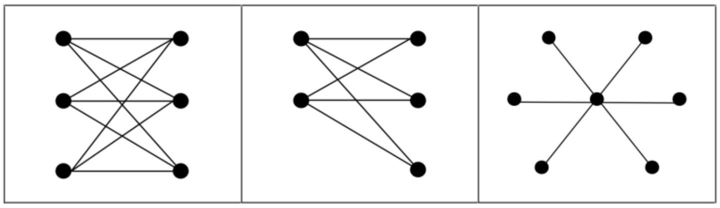


תרשים 5.2.7: C_6 הוא גרף 2-רגולרי, ו- $K_{3,3}$ הוא גרף 3-רגולרי.

גרף דו-צדדי

הגדרה 5.2.12: גרף $G = (V,E)$ ייקרא **דו-צדדי** אם ניתן לחלק את קבוצת קדקודי הגרף V לשתי קבוצות זרות V_1,V_2, כך שכל הצלעות בגרף הן בין קדקודים ב- V_1 ל- V_2. לפעמים נרצה להדגיש שלפנינו גרף דו-צדדי ונסמן אותו כ- $G = (V_1,V_2,E)$.

גרף דו-צדדי שלם הוא גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$ שבו קיימות כל הצלעות האפשריות בין V_1 ל- V_2. אם $|V_1| = s$ ו- $|V_2| = t$, נסמן את הגרף הדו-צדדי השלם על ידי $K_{s,t}$.



תרשים 5.2.8: מימין $K_{1,6}$, באמצע $K_{2,3}$ ומשמאל $K_{3,3}$.

משפט 5.2.13: בגרף דו-צדדי שלם $K_{s,t}$ מספר הצלעות הוא $s \cdot t$.

משפט 5.2.14: בגרף דו-צדדי רגולרי $G = (V_1,V_2,E)$ מתקיים $|V_1| = |V_2|$.

הוכחה: נניח ש- G גרף d- רגולרי. לכן, $|E| = |V_1| \cdot d = |V_2| \cdot d$ ומכאן $|V_1| = |V_2|$. □

משפט 5.2.15: גרף הוא דו-צדדי אם ורק אם כל המעגלים שלו (לאו דווקא הפשוטים) הם באורך זוגי.

הוכחה: יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי. נתבונן על מעגל כלשהו בגרף. נצא מקדקוד $v_1 \in V_1$ הנמצא במעגל הזה ונטייל לאורך המעגל. כל צלע שעליה אנחנו מטיילים מעבירה אותנו לצדו השני של הגרף. לכן, דרוש מספר זוגי של צלעות כדי לחזור לקדקוד v_1 שבו התחלנו ולסגור את המעגל.

ולהיפך, נניח שכל המעגלים בגרף $G = (V,E)$ הם באורך זוגי ונראה ש- G דו-צדדי. נניח ש- G קשיר. אחרת, נוכיח את הטענה לכל רכיב קשירות בנפרד.

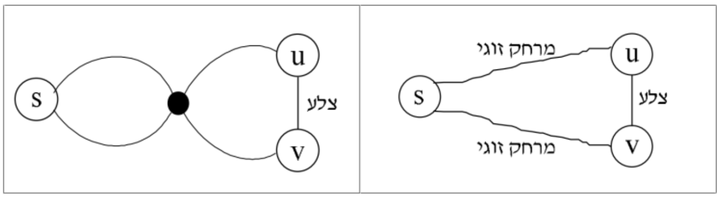
יהי $s \in V$ קדקוד כלשהו בגרף G. נגדיר את V_1,V_2 באופן הבא:

$V_1 = \{u \in V \mid \text{המרחק בין s ל- u זוגי}\}$, $V_2 = \{v \in V \mid \text{המרחק בין s ל- v אי-זוגי}\}$.

(כזכור, המרחק של קדקוד v כלשהו מ- s הוא האורך המזערי של מסלול מ- s ל- v).

הקבוצות V_1, V_2 הן כמובן חלוקה של קבוצת הקדקודים V. נוכיח כעת שאכן הגרף $G = (V_1,V_2,E)$ דו-צדדי, כלומר אין צלעות ששני קדקודיהן ב- V_1 ואין צלעות ששני קדקודיהן ב- V_2.

נניח בשלילה שיש צלע $\{u,v\}$ בין קדקודים $u,v \in V_1$. לכן, המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v, המסלול הקצר ביותר מ- s ל- u והצלע $\{u,v\}$ יוצרים מעגל, לאו דווקא פשוט, שאורכו אי-זוגי (ראו תרשים 5.2.9) וזו סתירה. באותו אופן מראים שאין צלעות בין קדקודים ב- V_2. □



תרשים 5.2.9: מעגל אי-זוגי פשוט ולא פשוט.

טענה 5.2.16: אם לכל המעגלים הפשוטים ב- G אורך זוגי, אז גם לכל המעגלים הלא פשוטים אורך זוגי.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה ונביט במעגל C לא פשוט בעל אורך אי-זוגי מזערי. היות ש- C אינו פשוט יש קדקוד x ב- C שעוברים דרכו פעמיים. נניח שהמעגל C הוא:

$$C = (y_0,\ldots,y_r = x, y_{r+1},\ldots,y_s = x, y_{s+1},\ldots,y_t = y_0)$$

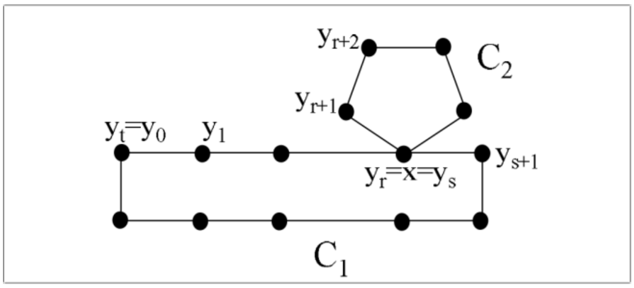
(היעזרו בתרשים 5.2.10). גם:

$$C_1 = (x = y_s, y_{s+1},\ldots,y_t = y_0, y_1,\ldots,y_r = x)$$

הוא מעגל ואורכו $c_1 = r+t-s$ וגם:

$$C_2 = (y_r = x, y_{r+1},\ldots,y_s = x)$$

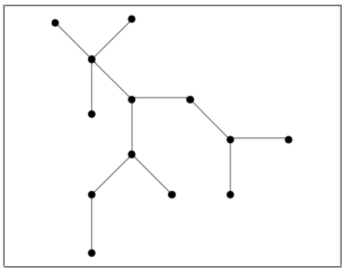
מעגל ואורכו $c_2 = s-r$. כמו-כן הסכום $c_1 + c_2 = (r+t-s) + (s-r) = t$ הוא אי-זוגי, כי t הוא אורכו של המעגל C. לכן אחד מבין c_1,c_2 אי-זוגי בניגוד למינימליות של t (C הוגדר כמעגל בעל אורך אי-זוגי מזערי). □



תרשים 5.2.10: המעגל C המורכב מהמעגלים C_1 ו- C_2 בהוכחת טענה 5.2.16.

עצים

הגדרה 5.2.17: גרף לא-מכוון שאיננו מכיל מעגלים נקרא **יער**. יער קשיר נקרא **עץ**. עץ הכולל n קדקודים יסומן (במידה שהדבר ברור מההקשר) על ידי T_n. קדקוד בעץ שדרגתו 1 נקרא **עלה**.



תרשים 5.2.11: גרף קשיר ללא מעגלים - עץ.

משפט 5.2.18: כל עץ עם $n \ge 2$ קדקודים מכיל עלה.
הוכחה: נצא מקדקוד כלשהו בעץ ונלך לאורך מסלול היוצא ממנו מבלי לסגת מיד אל הצלע האחרונה שממנה באנו. מספר הקדקודים בעץ סופי, ואיננו מבקרים בקדקוד פעמיים כי העץ חסר מעגלים. לכן, נגיע בהכרח לקדקוד שממנו איננו יכולים להתקדם יותר. דרגתו של קדקוד כזה היא 1. □

משפט 5.2.19: מספר הצלעות בעץ בעל n קדקודים הוא $m = n-1$.
הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה: $n = 1$, ואכן מספר הצלעות הוא $m = 0$.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לעצים עם $n-1$ קדקודים ונוכיח לעץ T_n עם n קדקודים. T_n עץ ולכן יש בו לפי משפט 5.2.18, עלה x. נוריד את x ואת הצלע שחלה בו ונקבל עץ T_{n-1} (ראו תרגיל 6). על פי הנחת האינדוקציה מספר הצלעות בעץ T_{n-1} הוא $n-2$. נוסיף את הקדקוד x ואת הצלע שלו, ונקבל שב- T_n יש בסה"כ $n-1$ צלעות. □

טענה 5.2.20: גרף G הוא עץ אם ורק אם:
1. G קשיר ומינימלי בתכונה זו, היינו השמטה של צלע כלשהי מ- G יוצרת גרף לא קשיר.
2. G אינו מכיל מעגלים ומקסימלי בתכונה זו, היינו הוספת צלע כלשהי ל- G יוצרת מעגל.

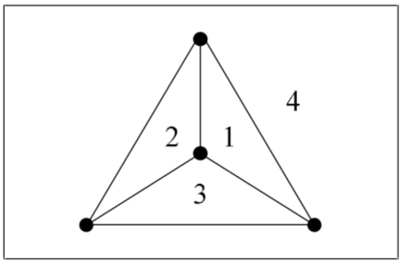
טענה 5.2.21: גרף קשיר עם n קדקודים ו- $(n-1)$ צלעות הוא עץ.

משפט 5.2.22: גרף G הוא קשיר אם ורק אם יש ל- G עץ פורש.
הוכחה: ברור שאם ל- G יש עץ פורש אז G קשיר, כי עץ הוא קשיר והוספת צלעות אינה פוגעת בקשירות.
נוכיח כעת שאם G קשיר אז יש לו עץ פורש. נביט בתת-גרפים פורשים של G שהם קשירים (למשל G עצמו). מבין אלה נביט בתת-גרף הפורש H שיש לו מספר מזערי של צלעות. נוכיח ש- H עץ פורש של G.
יהי k מספר הצלעות של H. בהכרח $k \ge n-1$, אחרת H אינו קשיר (טענה 5.1.14). אם $k = n-1$, אז בהכרח H עץ פורש (טענה 5.2.21). אם $k \ge n$, אז H מכיל מעגל (טענה 5.1.15) לכן, יש צלע e במעגל הזה ב- H שאפשר להשמיט, וגם התת-גרף $H\backslash\{e\}$ קשיר (טענה 5.1.16). אולם זו סתירה למינימליות של H שהוגדר כתת-גרף הפורש עם המספר המזערי של צלעות. □

גרפים מישוריים

הגדרה 5.2.27: גרף G נקרא **מישורי** אם ניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תיחתכנה.

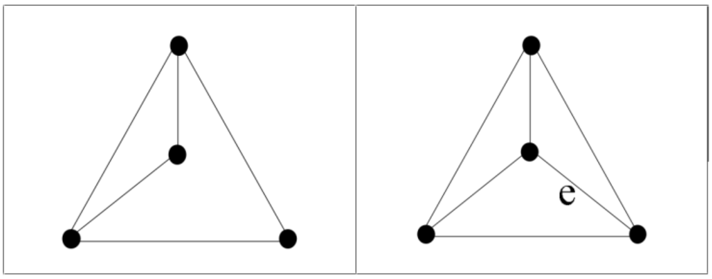
הגדרה 5.2.28: נתבונן בהצגה מישורית של גרף מישורי G. כל אזור החסום על ידי צלעות הגרף נקרא **פאה**. האזור שאינו חסום על ידי צלעות הגרף נקרא **הפאה החיצונית** או **הפאה האינסופית** של הגרף.



תרשים 5.2.15: ארבע הפאות של הגרף ממוספרות. הפאה החיצונית ממוספרת ב- 4.

משפט 5.2.29 (נוסחת אוילר): יהי G גרף מישורי קשיר. אז $n + f - m = 2$, כאשר n מספר הקדקודים, m מספר הצלעות ו- f מספר הפאות של הגרף G.
הוכחה: נקבע את מספר הקדקודים n, ונוכיח את המשפט באינדוקציה על מספר הצלעות m של הגרף. מכיוון ש- G קשיר בהכרח $m \ge n-1$ (טענה 5.1.14).
בסיס האינדוקציה: $m = n-1$. במקרה זה G הוא עץ (טענה 5.2.21). הפאה היחידה היא הפאה האינסופית, כלומר $f = 1$. מכיוון ש- $m = n-1$ נוסחת אוילר מתקיימת.

שלב האינדוקציה: נוכיח לגרף קשיר עם $m \ge n$ צלעות. לפי טענות 5.1.15 ו- 5.1.16, יש ב- G צלע e השייכת למעגל שהשמטתה אינה מנתקת את הגרף. לכן, בגרף $G' = G\backslash\{e\}$ יש $n' = n$ קדקודים ו- $m' = m-1$ צלעות והוא קשיר. מכאן, על פי הנחת האינדוקציה לגבי G' מתקיים $n' - m' + f' = 2$, כאשר n', m', f' הם מספר הקדקודים, הצלעות והפאות של G' בהתאמה. נשים לב כי השמטת הצלע e גורמת למיזוג של שתי הפאות שבהן היא גובלת (תרשים 5.2.16). לכן, מספר הפאות f' בגרף G' קטן ב- 1 ממספר הפאות ב- G, כלומר $f' = f-1$. יוצא אם כך: $n - m + f = n - (m-1) + (f-1) = n' - m' + f' = 2$. □



תרשים 5.2.16: שתי פאות מתאחדות כתוצאה מהשמטת הצלע e.

משפט 5.2.30: יהי G גרף מישורי קשיר עם $3 \le n$ קדקודים ו- m צלעות. אז $m \le 3(n-2)$.
הוכחה: יהי t_F מספר הצלעות החלות בפאה F. כל פאה מכילה לפחות שלוש צלעות ולכן $t_F \ge 3$ לכל פאה F. מאידך, $2m \ge \sum_F t_F$ מפני שכל צלע משותפת לכל היותר לשתי פאות ולכן נמנית לכל היותר פעמיים בסכום הזה (הסבירו מדוע לא בהכרח **בדיוק** פעמיים. ראו תרגיל 7). לכן $2m \ge \sum_F t_F \ge 3f$. כלומר $f \le \frac{2}{3}m$, כאשר f מספר הפאות של G. נשתמש כעת בנוסחת אוילר ונקבל:

$$2 = n - m + f \le n - m + \frac{2}{3}m$$

ולכן $m \le 3(n-2)$ כנדרש. □

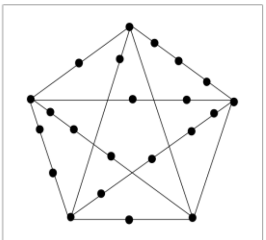
מסקנה 5.2.31: הגרף K_5 אינו מישורי.
הוכחה: מספר הקדקודים של הגרף K_5 הוא $n = 5$ ומספר הצלעות הוא $m = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. לו היה K_5 מישורי היינו מקבלים ממשפט 5.2.30 ש- $10 \le 3(5-2) = 9$ וזו סתירה. □

מסקנה 5.2.32: הגרף $K_{3,3}$ אינו מישורי.
הוכחה: הטיפול בגרף $K_{3,3}$ קצת יותר מורכב. נניח בשלילה ש- $K_{3,3}$ מישורי. כאן $n = 6,\ m = 9$ ולכן לפי נוסחת אוילר $f = 5$. נחזור לאי-שוויון $18 = 2m \ge \sum_F t_F$, כאשר t_F הוא מספר הצלעות החלות בפאה F. בסכום $\sum_F t_F$ אנו מסכמים במקרה זה חמישה מספרים טבעיים, ולכן ערכם הממוצע הוא לכל היותר $\frac{1}{5}\sum_F t_F \le \frac{18}{5} = 3.6$. לכן, חייבת להיות פאה F שמספר צלעותיה אינו עולה על הממוצע, כלומר יש בה לכל היותר $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ צלעות. ואולם בגרף $K_{3,3}$ אין משולשים (הוא גרף דו-צדדי ולכל מעגליו אורך זוגי, משפט 5.2.15). □

משפט חשוב של קורטובסקי Kuratowski אומר שבמובן מסוים הגרפים $K_5, K_{3,3}$ "אחראיים" תמיד לאי מישוריות של גרפים. גרף המתקבל מהחלפה של כל צלע ב- K_5 במסלול כלשהו כאשר המסלולים זרים, נקרא **הומיאומורף** של K_5 (בדומה אפשר להגדיר גם הומיאומורף של $K_{3,3}$). ראו לדוגמה תרשים 5.2.18.

קל לראות שכל גרף שהוא הומיאומורף של K_5 או של $K_{3,3}$ אף הוא אינו מישורי. אך גם ההיפך נכון (וקשה להוכחה!). אנו מביאים את המשפט הבא ללא הוכחה.

משפט 5.2.33 (Kuratowski): הגרף G אינו מישורי אם ורק אם הוא מכיל תת-גרף שהוא הומיאומורף של K_5 או תת-גרף שהוא הומיאומורף של $K_{3,3}$.



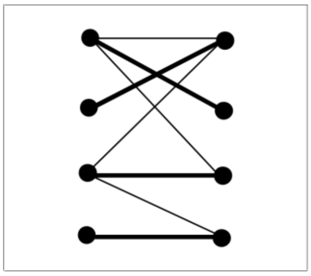
תרשים 5.2.18: הומיאומורף של K_5.

משפט 5.2.34: בכל גרף מישורי $G = (V,E)$ קיים קדקוד שדרגתו לכל היותר 5.
הוכחה: נראה כי הדרגה הממוצעת של קדקודי G קטנה ממש מ- 6, ולכן חייב להיות לפחות קדקוד אחד שדרגתו אינה עולה על הממוצע, ולכן קטנה מ- 6. ואכן, הדרגה הממוצעת של קדקודי הגרף היא $\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\text{degree}(v)$. אולם לפי משפט 5.1.5, סכום דרגות כל הקדקודים שווה ל- $2|E|$. כמו-כן לפי משפט 5.2.30, $|E| \le 3(|V|-2)$. משילוב כל העובדות האלה נקבל:

$$\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\text{degree}(v) = \frac{1}{|V|}\cdot 2\cdot |E| \le \frac{1}{|V|}\cdot 2\cdot 3(|V|-2) = 6\frac{|V|-2}{|V|} < 6$$ □

5.4 זיווגים בגרפים

הגדרה 5.4.1: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. **זיווג** ב- G הוא אוסף M של צלעות שלאף שתיים מהן אין קדקוד משותף. הזיווג M נקרא **מושלם** אם כל קדקודי הגרף משתתפים בזיווג. אם $\{u,v\}\in M$ נאמר שהקדקודים u ו- v **מזווגים** על ידי הזיווג M.



תרשים 5.4.1: זיווג מושלם בגרף דו-צדדי. צלעות הזיווג מודגשות.

משפט 5.4.2 (Hall): בגרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$, $|V_1| = |V_2|$, יש זיווג מושלם אם ורק אם לכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

הוכחה: עלינו להוכיח הכרחיות ומספיקות.

הכרחיות: הוכחת ההכרחיות פשוטה ביותר. ודאי שלא ניתן לשדך את כולם אם יש קבוצה של גברים שאוסף כל הנשים שהם מכירים קטן ממספרם. פורמלית נאמר כך: נניח שיש בגרף G זיווג מושלם, ותהי $S\subseteq V_1$. לכל קדקוד $s\in S$ יש בן-זוג בזיווג, ולכן $|\Gamma(S)| \geq |S|$ (זהו למעשה מקרה פרטי של עיקרון שובך היונים, ראו סעיף 4.5).

מספיקות: נניח כעת שלכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$. נוכיח באינדוקציה על מספר הקדקודים n ב- V_1 שיש זיווג מושלם M ב- G.

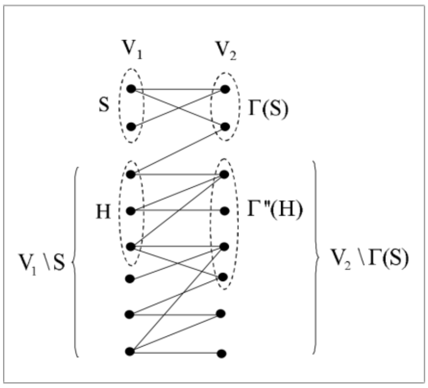
בסיס האינדוקציה: $|V_1| = |V_2| = n = 1$. הגרף G כולל במקרה זה שני קדקודים וצלע ביניהם, ולכן הטענה מובנת מאליה.

שלב האינדוקציה: נניח כעת נכונות לגרפים שבהם $|V_1| = n-1$ ונוכיח לגרפים שבהם $|V_1| = n$.

ייתכנו שני מקרים:

1. לכל קבוצה חלקית ממש $S \subsetneq V_1$ מתקיים אפילו האי-שוויון החזק יותר$|\Gamma(S)| \geq |S| + 1$: יהי $x\in V_1$ קדקוד כלשהו. לפי ההנחה יש ל- x שכן (בעצם על פי ההנחה יש ל- x אפילו לפחות שני שכנים). נבחר אחד מהם $y\in V_2$. נכלול את הצלע $\{x,y\}$ בזיווג M המבוקש ונשמיט את הקדקודים x,y מהגרף. יהי $G' = G\backslash\{x,y\}$ הגרף החדש, ונסמן על ידי $\Gamma'(S)$ את קבוצת השכנים של S בגרף G'. קל לראות שבגרף החדש G' לכל קבוצה $S\subseteq V_1\backslash\{x\}$ מתקיים $|\Gamma'(S)| \geq |S|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם ב- G'. נוסיף לזיווג הזה את הצלע $\{x,y\}$ ונקבל זיווג מושלם בגרף המקורי G.
2. קיימת לפחות קבוצה אחת חלקית ממש $S \subsetneq V_1$, כך ש- $|\Gamma(S)| = |S|$: במקרה זה נתבונן בגרף הדו-צדדי $G_S = (S, \Gamma(S), E_S)$, כאשר E_S היא קבוצת כל הצלעות בין קדקודים מ- S ל- $\Gamma(S)$. קל לוודא שגם הגרף הזה מקיים את הנחת המשפט, וכן שבגרף הזה יש פחות קדקודים מאשר בגרף המקורי G, שהרי $|S| < |V_1|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה קיים זיווג מושלם M_S ב- G_S. נשמיט מהגרף G את קבוצות הקדקודים S ו- $\Gamma(S)$ ואת כל הצלעות ביניהם. יהי $G'' = (V_1\backslash S, V_2\backslash\Gamma(S), E'')$ הגרף המתקבל, ותהי $H\subseteq V_1\backslash S$ קבוצה כלשהי. נסמן על ידי $\Gamma''(H)$ את קבוצת השכנים של H בגרף G''. אז מתקיים $|\Gamma''(H)| \geq |H|$. אחרת, אם נניח בשלילה ש- $|\Gamma''(H)| < |H|$, אז בגרף G היה מתקיים:
$$|\Gamma(H\cup S)| = |\Gamma''(H)| + |\Gamma(S)| < |H| + |S| = |H\cup S| .$$
השוויון הראשון נכון כיוון שהקבוצות $\Gamma(S)$ ו- $\Gamma''(H)$ מהוות חלוקה של קבוצת השכנים של $H\cup S$ ב- G. ואילו השוויון האחרון נכון כיוון ש- H,S קבוצות זרות (ראו תרשים 5.4.2). אולם זאת סתירה לכך שבגרף G לכל קבוצה $T\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(T)| \geq |T|$ (הסתירה מושגת לקבוצה $T = S\cup H$). לכן גם הגרף G'' מקיים את תנאי המשפט. מכאן לפי הנחת האינדוקציה יש בגרף G'' זיווג מושלם M''. נוסיף לזיווג הזה את הזיווג M_S ונקבל זיווג מושלם $M = M_S \cup M''$ בגרף G המקורי.

קיבלנו בכל מקרה זיווג מושלם M ב- G, ולכן המשפט נכון. □



תרשים 5.4.2: מקרה 2 בהוכחת הכיוון השני של משפט Hall.

מסקנה 5.4.3: יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי d-רגולרי. אז יש ב- G זיווג מושלם.

הוכחה: תהי $S\subseteq V_1$ ותהי F קבוצת כל הצלעות החלות ב- S. הגרף d-רגולרי ולכן $|F| = d\cdot|S|$. תהי H קבוצת כל הצלעות החלות ב- $\Gamma(S)$. שוב מכיוון שהגרף d-רגולרי אז $|H| = d\cdot|\Gamma(S)|$. אולם $F \subseteq H$, כי כל צלע שחלה בקדקוד של S חלה גם ב- $\Gamma(S)$. ולכן, $|F| \leq |H|$. לכן, $d\cdot|S| \leq d\cdot|\Gamma(S)|$ ומכאן $|S| \leq |\Gamma(S)|$ לכל קבוצה $S\subseteq V_1$. לכן, לפי משפט 5.4.2 יש זיווג מושלם ב- G. □

איזומורפיזם

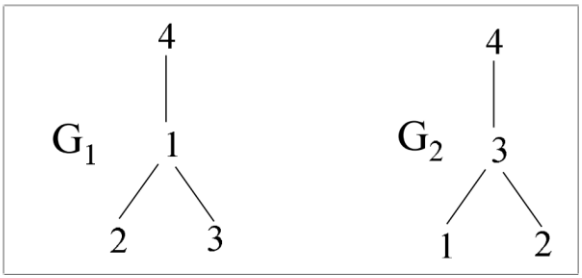
הגדרה 5.6.7: יהיו $G_1 = (V_1,E_1)$ ו- $G_2 = (V_2,E_2)$ שני גרפים לא-מכוונים. נאמר ש- G_1,G_2 **איזומורפיים** אם ישנה פונקציה חח"ע ועל $f:V_1\rightarrow V_2$ כך ש- $\{x,y\}\in E_1$ אם ורק אם $\{f(x),f(y)\}\in E_2$.

במילים פשוטות, שני הגרפים שונים זה מזה רק **בשמות** שנתנו לקדקודים.

דוגמה 5.6.8: שני העצים שבתרשים 5.6.9 איזומורפיים כפי שמוכיחה הפונקציה $f:V_1\rightarrow V_2$ הבאה:

$f(1) = 3,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 4$.

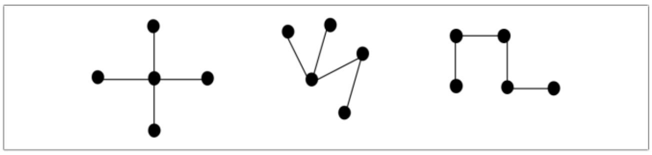
רשימת הצלעות בגרף G_1 היא $\{1,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, ואילו הצלעות ב- G_2 הן $\{f(1), f(4)\} = \{3,4\}$, $\{f(1), f(2)\} = \{3,1\}$, $\{f(1), f(3)\} = \{3,2\}$.



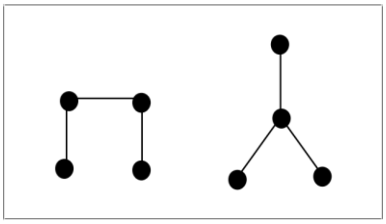
תרשים 5.6.9: שני עצים מתויגים איזומורפיים.

קל לראות שאיזומורפיזם הוא יחס שקילות בין גרפים מתויגים. ואכן נחזור ונביט ב- 16 העצים המתויגים מסדר 4 שבתרשים 5.6.5, ונקבץ אותם למחלקות שקילות של עצים מתויגים איזומורפיים. מתקבלות בדיוק שתי מחלקות שקילות, האחת כוללת את 12 העצים בצורת האות "חית", והשנייה את 4 העצים בצורת מזלג. לכל מחלקת שקילות כזאת אנו קוראים עץ לא מתויג אחד. ואכן, יש בדיוק שני עצים לא מתויגים מסדר 4 כפי שראינו בתרשים 5.6.8.

נסמן את מספר העצים הלא מתויגים בעלי n קדקודים ב- U_n. ראינו כבר ש- $U_1 = U_2 = U_3 = 1$ ואילו $U_4 = 2$. קל לבדוק ש- $U_5 = 3$ כפי שניתן לראות בתרשים 5.6.10.



תרשים 5.6.10 : כל העצים הלא מתויגים השונים בעלי 5 קדקודים.



תרשים 5.6.8: עצים לא-מתויגים מסדר 4.