CAPÍTULO 1

Matemática financeira

Matthew Micah Wrigh/Getty Images

Mesa de operações para simulação de negócios na Bovespa – Bolsa de Valores de São Paulo. Espaço Raymundo Magliano Filho aberto à visitação. Os operadores de câmbio e os executores de operações no mercado financeiro são profissionais que compram ou vendem ativos na bolsa. Esses profissionais possuem formações diversas, como: Estatística, Matemática, Administração ou Economia. Todas elas se relacionam de alguma forma com a Matemática financeira.

1 O dinheiro e a Matemática

O dinheiro tem feito parte da história do mundo nos últimos 3 milênios; antes disso, o comércio era realizado por meio de trocas entre produtos e/ou serviços, prática chamada de escambo. Com o aumento do fluxo comercial e também das relações comerciais entre diferentes povos, o escambo tornou-se uma operação cada vez mais inviável, pois ficou difícil decidir quantas unidades de um produto x seriam equivalentes a certo número de unidades de um produto y. O dinheiro nasceu da necessidade de se referir a todos os produtos com uma mesma escala de valores, e provavelmente tenha surgido simultaneamente na Mesopotâmia e na China antes de 1000 a.C. A partir daí, o dinheiro se torna a peça-chave na organização e no estabelecimento de todas as sociedades.

O *shekel* era uma unidade antiga utilizada na Mesopotâmia para definir tanto um peso específico de cevada quanto quantidades equivalentes de materiais como prata, bronze e cobre. O uso de uma única unidade para definir tanto a massa quanto o valor da moeda é um conceito semelhante ao da libra britânica – originalmente definida como massa de uma libra de prata (equivalente a 457 gramas), passou a designar também o nome da moeda.

Na China, as primeiras unidades padrões de trocas adotadas foram as espadas e alguns outros tipos de armas e ferramentas. Dessa forma, era possível que um comerciante chinês perguntasse a outro: "Quantas espadas você me dá por 20 sacos de arroz?". Por volta de 1000 a.C. os chineses, no lugar de utilizar armas e ferramentas reais, passaram a utilizar réplicas delas, em miniatura e fundidas em bronze. Assim, as trocas de produtos por armas ou ferramentas passaram a ser feitas, não com os objetos reais, mas com os modelos deles – mais fáceis de transportar e guardar. A figura ao lado mostra espadas chinesas em miniatura representando o primeiro dinheiro de que se tem notícia. Os buracos nos cabos serviam para passar uma corda que mantinha as "espadinhas" juntas, facilitando seu transporte e manuseio.

World History Archive/Alamy/Latinstock

"Espadinhas" utilizadas como dinheiro na China entre 475 a.C.-221 a.C. À esquerda, "espadinha" do estado Zhao (403 a.C.) e, à direita, do estado Yan (222 a.C.).

Entretanto, a forma desse dinheiro que imitava objetos reais ainda não era muito prática. Com o passar do tempo, por volta de 600 a.C. surgiu o dinheiro na forma "mais ou menos" redonda, ou seja, as moedas. Elas apareceram no reino da Lídia (que atualmente é o oeste da Turquia).

Antigo reino da Lídia (700 a.C.-546 a.C.)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: Adaptado de DUBY, G. *Atlas historique mondial*. 2. ed. Paris. 2007. p. 12.

Akg-Images/Latinstock

Moeda da Lídia, que mostra um leão (símbolo de Lídia) e um touro (povos rivais) lutando. Do período entre 561 a.C.-546 a.C., fim do reinado de Aliates e início do reinado de Creso (o último rei de Lídia). Medidas da moeda: 1,54 cm × 1,18 cm.

O rei Aliates, que governou a Lídia entre 600 a.C.-560 a.C., cunhou moedas de diversos tamanhos fundidas em um metal que os gregos chamavam de *electrum* – uma mistura de ouro e prata obtidos em uma mina na localidade de Sárdis (veja o mapa da página anterior). O valor de cada moeda era determinado pelo seu peso e pela figura cunhada no metal, a garantia do rei. A figura ao lado mostra uma dessas moedas, que tinha peso de quase 220 g.

As moedas se espalharam pelo mundo e cada governante mandava cunhar as suas com imagens que caracterizavam aspectos do lugar onde foram cunhadas, do próprio governante e de sua cultura.

A figura ao lado mostra uma moeda grega cunhada em Tebas. A moeda desse período, de dominação tebana na Grécia (c. 371 a.C.-323 a.C.), geralmente mostra de um lado um escudo e do outro algum objeto ou símbolo representativo da cultura grega.

Granger/Granger/Fotoarena

Moeda de prata grega que mostra um escudo (simbolizando a força do exército) e uma ânfora (antigo vaso de barro grego, com formas ovais e duas alças/asas simétricas). Cunhada em c. 365 a.C.

Com o dinheiro surgiu a operação de empréstimo. Quem tem dinheiro pode emprestar a quem precisa por um período determinado de tempo. Quem tomou emprestado deverá pagar, no momento da devolução do dinheiro, um valor adicional pelo "aluguel" da quantia que tomou emprestada. Esse valor adicional é o juro. Na verdade, os juros já existiam antes do dinheiro; há registros de que na Babilônia, por volta de 2000 a.C., já havia o empréstimo de sementes para agricultores. Estes, na safra seguinte, deveriam devolver a mesma quantidade acrescida de sementes adicionais.

A primeira operação da Matemática financeira foi o câmbio. Mesmo na Antiguidade cada país cunhava suas moedas e o comércio precisava estabelecer as equivalências entre elas. Nas viagens era sempre necessário trocar moedas de um país por moedas de outro país e isso era feito por pessoas especializadas, chamadas cambistas, que cobravam uma pequena taxa pela transação. Operações envolvendo câmbio existem até hoje. Em pouco tempo os cambistas acumularam enormes quantidades de dinheiro e passaram à atividade seguinte, que foi guardar dinheiro dos outros, devolvendo quando pedissem.

Entretanto, foi natural que ocorresse ao cambista a seguinte ideia: "Por que guardo grandes quantidades de dinheiro sem lucro algum sobre ele? É pouco provável que todos os proprietários do dinheiro que guardo peçam, ao mesmo tempo, sua devolução. Assim, posso emprestar parte desse dinheiro para outras pessoas cobrando uma taxa adicional no vencimento do prazo estipulado". Nascia aí o conceito de banco, palavra que tem origem no fato de que o antigo cambista trabalhava sentado em um banco de madeira em algum lugar do mercado. Quem não tinha dinheiro suficiente para fechar certo negócio recorria então ao banqueiro. Rapidamente os bancos se transformaram em instituições sólidas – inicialmente entre os babilônios e egípcios, depois entre os gregos e romanos –, e acumularam enormes fortunas. As taxas de juros variavam de acordo com o país e a época. Para dar um exemplo, na antiga Roma a taxa básica de juros era de 8,33% no ano 1 d.C., baixando posteriormente para 4% e subindo para 14% no século III.

Se uma dívida não era paga na data determinada, ela continuava e os juros incidiam sobre um valor aumentado, ou seja, o valor inicial mais os juros devidos do período anterior. Estes são os chamados juros compostos, que os antigos chamavam de "juros sobre juros", prática feita até hoje. Um dos mais antigos problemas de Matemática financeira aparece em um tablete da Babilônia antiga, onde, naquela época, os juros anuais eram de 20% ao ano. Nessas condições, em quanto tempo uma dívida não paga dobrava de valor? Em aproximadamente 3,8 anos ou aproximadamente 3 anos e 10 meses.

2 Situação inicial

> **Fique atento!**
> Para calcular 1% de uma quantia, basta dividir essa quantia por 100:
> 1% de 5 000 = $\frac{5\,000}{100}$ = 50

Entre as inúmeras aplicações da Matemática está a de auxiliar na resolução de problemas de ordem financeira, como cálculo do valor de prestações, pagamento de impostos, rendimento de poupança e outros.

Por exemplo, uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R$ 1800,00, usando o dinheiro que está aplicado em um fundo de investimento que rende 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual destes planos de pagamento é mais vantajoso:

- pagar à vista;

ou

- pagar em duas prestações iguais de R$ 903,00, uma delas como entrada e a segunda depois de um mês.

Permita aos alunos refletir sobre essa situação-problema, que será abordada novamente no exercício resolvido 16.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Reúna-se com um colega e tentem resolver esse problema com os conhecimentos que vocês já têm. Considerem que vocês têm R$ 1800,00 e que podem tanto optar por pagar à vista quanto aplicar no fundo de investimento, tirando o dinheiro necessário para o pagamento das prestações.

Esse problema e outros, que envolvem assuntos de Matemática financeira, serão estudados e resolvidos neste capítulo.

Provavelmente será necessária alguma explicação inicial sobre o contexto. Ajude-os a entender que o dinheiro pode ser gasto ou aplicado e, se aplicado, pode ser retirado em partes para os pagamentos, mas o restante continua rendendo.

3 Porcentagem

No Ensino Fundamental estudamos que a porcentagem é uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela.

Veja os exemplos:

a) 50% é o mesmo que $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 0,50 ou 0,5 (metade).

b) 75% é o mesmo que $\frac{75}{100}$ ou $\frac{3}{4}$ ou 0,75.

c) 25% é o mesmo que $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$ ou 0,25 (um quarto).

d) 5% é o mesmo que $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ ou 0,05.

> **Fique atento!**
> 100% = 1; 200% = 2; 300% = 3; 400% = 4; ...

Lembre aos alunos que é importante escolher a forma de resolução mais conveniente para cada problema.

Exercícios resolvidos

1. O salário de Felipe é de R$ 2 000,00 por mês e o de Renato corresponde a 85% do salário de Felipe. Qual é o salário de Renato?

Resolução:

85% de R$ 2 000,00:

$$\frac{85}{100} \cdot 2\,000 = \frac{17}{20} \cdot 2\,000 = 1\,700 \text{ ou}$$

$$0{,}85 \cdot 2\,000 = 1\,700 \text{ ou}$$

$$\frac{85}{100} = \frac{x}{2000} \Rightarrow 100x = 170\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{170\,000}{100} = 1700$$

O salário de Renato é R$ 1 700,00.

2. Leia esta notícia:

"As vendas de carros, caminhões e ônibus novos caíram 26,55% em 2015 em relação ao ano passado, informou a federação dos concessionários, a Fenabrave, nesta quarta-feira (6). Foram emplacados 2 569 014 veículos 0 km – as motos são contadas à parte. Foi o terceiro ano seguido de baixa, porém mais aguda que nos períodos anteriores. Em 2014, o declínio foi de 7,15% sobre 2013, com 3 497 810 emplacamentos."

Fonte: G1. Disponível em: <http://g1.globo.com/carros/noticia/2016/01/venda-de-veiculos-cai-2655-em-2015-o-3-ano-seguindo-de-baixa.html>. Acesso em: 6 maio 2016.

De acordo com a notícia, quantos veículos foram emplacados em 2013?

Resolução:

Sendo x o número de veículos vendidos em 2013, temos:

$$100\% - 7{,}15\% = 92{,}85\%$$

$$92{,}85\%x = 3\,497\,810 \Rightarrow 0{,}9285x = 3\,497\,810 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\,497\,810}{0{,}9285} \simeq 3\,767\,162$$

Foram emplacados cerca de 3 767 162 veículos.

3. Observe esta outra notícia:

"Mais 2,4 milhões de consumidores tiveram os nomes incluídos em cadastro de devedores, entre janeiro e setembro, deste ano [2015], de acordo com dados da Confederação Nacional dos Dirigentes Lojistas (CNDL) e do Serviço de Proteção ao Crédito (SPC) Brasil, divulgados hoje (9). No final de setembro, havia 57 milhões de consumidores registrados em cadastro de devedores. Esse total equivale a 38,9% da população adulta do país (faixa de 18 a 94 anos). Em setembro, comparado a igual período de 2014, o número de consumidores com contas atrasadas subiu 5,45%. Na comparação com agosto deste ano, houve recuo de 0,59%."

Fonte: Agência Brasil. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2015-10/quase-40-da-populacao-adulta-esta-incluida-em-cadastros-de-inadimplentes>. Acesso em: 6 maio 2016.

De acordo com a notícia, responda:

a) De quanto era a população adulta do Brasil nessa data?

b) Desses 57 milhões de consumidores, que porcentagem representa os 2,4 milhões que tiveram os nomes incluídos em cadastro de devedores, entre janeiro e setembro de 2015?

Resolução:

a) 38,9% $\rightarrow$ 57 milhões

100% $\rightarrow$ x milhões

$$\frac{38{,}9}{100} = \frac{57\,000\,000}{x} \Rightarrow 38{,}9x = 5\,700\,000\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 146\,529\,563$$

A população adulta era de aproximadamente 147 milhões.

b) *1ª maneira:*

?% de 57 000 000 = 2 400 000

$$\frac{2\,400\,000}{57\,000\,000} = \frac{24}{570} = \frac{4}{95} \simeq 0{,}04 = \frac{4}{100} = 4\%$$

(aproximadamente)

2ª maneira:

$$\frac{x}{100} = \frac{2\,400\,000}{57\,000\,000} \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{24}{570} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 570x = 2\,400 \Rightarrow x \simeq 4$$

Logo, 2,4 milhões correspondem a aproximadamente 4% de 57 milhões.

Para refletir

Qual é o valor de 10% de R$ 8,00 e de 1% de R$ 8,00?

R$ 0,80 e R$ 0,08

4. (Uncisal) Ao publicar um artigo científico, um pesquisador recebeu um bônus de 15% sobre o seu salário. Se sobre o seu salário não incide nenhum desconto, não houve nenhuma outra bonificação e o bônus foi de R$ 975,00, qual a remuneração do pesquisador no mês em que recebeu o prêmio?

a) R$ 1 121,25

b) R$ 2 096,25

c) R$ 2 122,05

d) R$ 6 500,00

e) R$ 7 475,00

Resolução:

O salário do pesquisador é uma incógnita. Vamos considerá-lo um "x" qualquer.

Salário sem bonificação = x

$$\overbrace{0{,}15x}^{\text{bonificação}} = 975 \text{ reais} \Rightarrow \underbrace{x}_{\text{salário}} = 6\,500 \text{ reais}$$

Então, o pesquisador receberá o salário normal (6 500) mais a bonificação (975), o que totaliza um valor de R$ 7 475,00. Logo, a alternativa correta é a alternativa **e**.

Atividade em dupla Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Calcule e responda:

a) Qual é o valor de 60% de 95? 57

b) Quanto por cento de 70 é igual a 56? 80%

c) 6 é 15% de que número? 40

d) Quanto vale 3,5% de R$ 650,00? R$ 22,75

e) R$ 75,20 correspondem a 20% de que quantia? R$ 376,00

f) Em relação a um total de R$ 300,00, a quantia de R$ 171,00 corresponde a quanto por cento? 57%

g) 0,5% de R$ 85,00 dá um valor maior ou menor do que 1% de R$ 170,00? Menor.

Para refletir

Se x indica uma quantia, podemos representar 60% de x por $\frac{60x}{100}$ ou $\frac{3x}{5}$ ou $0{,}6x$. Como se representa 75% de $(x + 9)$? $0{,}75x + 6{,}75$

2. O salário de Roberto, em 2016, era de R$ 1 200,00 mensais. Em 2017, ele passou a ganhar R$ 1 400,00 mensais. De quanto por cento foi o seu aumento? Aproximadamente 16,7%.

3. O volume total de água que entra e sai por dia no nosso organismo varia de 1 500 mL a 3 000 mL. Aproximadamente 47% desse volume origina-se das bebidas ingeridas, como água, sucos, refrigerantes, chás, etc. De acordo com esses dados, determine a quantidade mínima e máxima, em mililitros, da água que entra e sai do nosso organismo proveniente de bebidas que ingerimos. De 705 mL a 1 410 mL.

4. *Caderneta de poupança*

A caderneta de poupança é a mais tradicional aplicação financeira do mercado. A partir de 2012 a remuneração da poupança passou a depender da data da aplicação. Para depósitos feitos até 3 de maio de 2012, a remuneração continuou de 6,17% ao ano mais a TR. Entretanto, para depósitos feitos a partir de 4 de maio de 2012, sempre que a taxa Selic ficar igual ou menor do que 8,5% ao ano, o rendimento da poupança passará a ser 70% da taxa Selic mais a TR.

Você sabia?

A Taxa Referencial (TR) é um índice criado pelo governo para complementar os juros pagos na poupança.

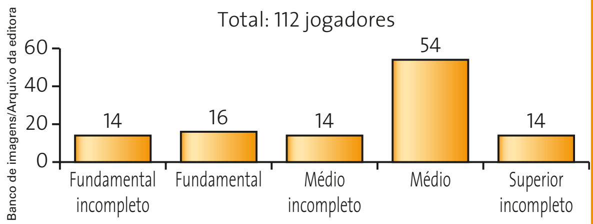
A taxa Selic é a taxa básica de juros utilizada como referência pela política monetária do Brasil.

Com base nesse texto, responda:

a) Se a taxa Selic for de 10% ao ano, qual será a remuneração da poupança a ser somada com a TR para um depósito feito em janeiro de 2016? 6,17% ao ano.

b) Se a taxa for de 8% ao ano, qual será a remuneração da poupança a ser somada com a TR para um depósito feito em janeiro de 2016? 5,6% ao ano.

5. (Enem) A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissonais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: *O Globo*, 27 jul. 2005.

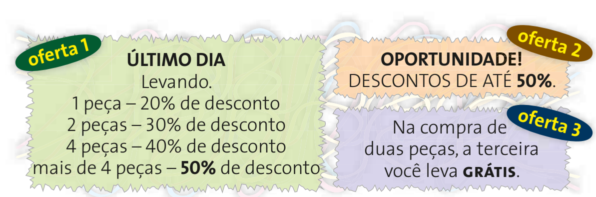
De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

a) 14%. b) 48%. c) 54%. x d) 60%. e) 68%.

6. O salário líquido de Antonela é de R$ 1 100,00. Sabe-se que são descontados 17% do seu salário para o pagamento de impostos. Qual é o salário bruto de Antonela? R$ 1 325,30

7. *Tomando decisões nas liquidações*

Ana Maria quer aproveitar as liquidações para fazer compras. Observem algumas ofertas que ela encontrou.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual dessas ofertas vale a pena aproveitar? Discuta com seus colegas. Respostas pessoais.

b) Comparem a **oferta 1** com a **oferta 3**. Em qual delas é mais vantajoso comprar 2 peças? Na oferta 3.

8. *Biologia*

(Enem) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer e 500 são casos diagnosticados de enfisema. Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente:

a) 740.

b) 1100.

c) 1310.

d) 1620.

x e) 1750.

Leitura

Conceito de inflação: o que é e como se forma?

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

A inflação é um conceito econômico que representa o aumento persistente e generalizado do preço de uma cesta de produtos em um país ou região durante um período definido de tempo. Se, por exemplo, uma cesta de produtos custa R$ 100,00 em julho e passa a ser vendida por R$ 150,00 em agosto, verifica-se uma inflação de 50% no mês. Ela também representa a queda do poder aquisitivo do dinheiro em relação à elevação dos preços de bens e serviços. Quando a inflação está em um nível muito baixo, ocorre a estabilização dos preços e, assim, o valor dos produtos não aumenta.

A inflação já foi o grande drama da economia brasileira, e sempre merece grande atenção e acompanhamento do governo e da sociedade. A partir dos anos 1980, vários planos fracassaram na tentativa de impedir o seu crescimento. Mas, desde 1994, com a implantação do Plano Real, ela está relativamente sob controle. [...]

Causas

- Inflação monetária: emissão exagerada e descontrolada de dinheiro por parte do governo.
- Inflação de demanda: demanda por produtos (aumento no consumo) maior do que a capacidade de produção do país.
- Inflação de custos: aumento nos custos de produção (máquinas, matéria-prima, mão de obra) dos produtos.

Indicadores

No Brasil, existem vários índices que medem a inflação e são referenciais. Os principais são: IGP ou Índice Geral de Preços (calculado pela Fundação Getúlio Vargas), IPC ou Índice de Preços ao Consumidor (medido pela Fipe – Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas), INPC ou Índice Nacional de Preços ao Consumidor (medido pelo IBGE) e IPCA ou Índice de Preços ao Consumidor Amplo (também calculado pelo IBGE).

O IPC, por exemplo, considera o consumo de famílias com renda até 33 salários mínimos que vivem no Rio de Janeiro e em São Paulo. O IGP-M é calculado a partir de outros índices. O IPCA, de maior abrangência, pesquisa famílias com renda de até 40 salários mínimos em pelo menos 10 grandes capitais brasileiras. Já o ICV, calculado pelo Dieese, considera apenas os preços de alimentação, transporte, saúde e habitação, praticados na cidade de São Paulo.

Fonte: O economista. Disponível em: <www.oeconomista.com.br/inflacao-o-que-e-e-como-se-forma/>. Acesso em: 9 maio 2016.

- A inflação brasileira em 2015 foi de 10,67% (IPCA). Assim, se uma cesta básica custava cerca de R$ 308,00 em dezembro de 2014, quanto ela custava em dezembro de 2015? Custava cerca de R$ 340,86.

4 Fator de atualização

O fator de atualização (f) é a razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente ou futuro). Constitui uma ferramenta importante no trabalho com Matemática financeira.

Na divisão entre dois valores quaisquer $\left(\frac{A}{B}, \text{ com } B \neq 0\right)$, só existem três resultados possíveis: ou resulta em 1, ou é maior do que 1, ou é menor do que 1.

Quando o resultado da divisão é 1, os dois valores são iguais; portanto, nenhum é maior nem menor do que o outro. Um valor é 100% do outro. Por isso, diz-se que $f = 1$ é o fator neutro.

No caso de a divisão resultar em números maiores do que 1, como $\frac{A}{B} = 1{,}05$, podemos entender o resultado de duas formas diferentes:

1ª) A é 5% maior do que B;

ou

2ª) A é 105% de B (portanto, 5% maior).

Ambas as interpretações são corretas e seu uso depende do melhor contexto. No caso de a divisão resultar em número menor do que 1, por exemplo $\frac{A}{B} = 0{,}90$, também podemos entender o resultado de duas formas diferentes:

1ª) A é 10% menor do que B;

ou

2ª) A é 90% de B (portanto, 10% menor).

Também aqui a escolha da melhor interpretação depende do contexto.

Na prática, se a opção for pela primeira interpretação, então precisamos aprender a obter a taxa percentual i a partir do valor do fator de atualização.

- Se $f > 1$, $f = 1 + i$; portanto, a taxa é $i = f - 1$, em números decimais.
- Se $f < 1$, $f = 1 - i$; portanto, a taxa é $i = 1 - f$, em números decimais.

Assim:

- $f = 1{,}05$
  $i = f - 1 = 0{,}05 \Rightarrow \text{taxa} = 0{,}05 = \frac{5}{100} = 5\%$ (maior do que...)
- $f = 0{,}90$
  $i = 1 - f = 0{,}10 \Rightarrow \text{taxa} = 0{,}10 = \frac{10}{100} = 10\%$ (menor do que...)

Aumentos e descontos

Na comparação de dois valores diferentes de uma mesma grandeza, $f > 1$ significa **aumento** (ou **acréscimo** de valor) e $f < 1$ significa **desconto** (ou perda de valor), pois o valor da grandeza variou no tempo e o valor mais antigo é a base de comparação. O fator $f = 1$, que é o fator neutro, significa que não houve variação:

$$f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor velho}}$$

$f > 1 \rightarrow$ aumento
$f < 1 \rightarrow$ desconto
$f = 1 \rightarrow$ não houve variação

Aumentos e descontos sucessivos

Para compor vários aumentos e/ou descontos, basta multiplicar os vários fatores individuais e assim obter o fator "acumulado", que nada mais é do que o fator de atualização entre o primeiro e o último valor considerado, independentemente dos valores intermediários.

$$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot \ldots$$

O fator acumulado é também um fator de atualização e deve ser interpretado como tal.

Exercícios resolvidos

5. (Vunesp-SP) Se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de:

a) 11%.
b) 11,1%.
c) 11,2%.
d) 11,3%.
e) 11,4%.

Resolução:

$f_1 = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

$f_2 = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow f_{\text{acumulado}} = 1{,}06 \cdot 1{,}05 = 1{,}113$

Ou seja, inflação de 11,3%.

Portanto, alternativa **d**.

6. (UEL-PR) Em uma liquidação os preços dos artigos de uma loja são reduzidos em 20% de seu valor. Terminada a liquidação, e pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem devem ser acrescidos os preços da liquidação?

a) 27,5%
b) 25%
c) 22,5%
d) 21%
e) 20%

Resolução:

$f_1 = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$

$f_2 = ?$

$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 = 1$ ($f = 1$ significa que não houve alteração: voltou ao valor original)

Assim:

$f_{\text{acumulado}} = 0{,}80 f_2 = 1 \Rightarrow f_2 = \dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$

Como $f_2 > 1$, então:

$f_2 = 1 + i = 1{,}25 \Rightarrow i = 0{,}25 = 25\%$

Assim, alternativa **b**.

7. Um fogão, cujo preço à vista é de R$ 680,00, tem um acréscimo de 5% no seu preço se for pago em 3 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

Resolução:

1ª maneira:

5% de 680 = 0,05 · 680 = 34 (acréscimo)

680 + 34 = 714 (preço em 3 prestações iguais)

714 : 3 = 238 (valor de cada prestação)

2ª maneira:

$t = 5\% = 0{,}05$

$f = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

$680 \cdot 1{,}05 = 714$

$714 : 3 = 238$

Então, o valor de cada prestação é de R$ 238,00.

8. A tabela a seguir mostra a variação do preço do dólar em uma semana qualquer, em termos percentuais. No valor acumulado desses 5 dias, o que aconteceu com o preço do dólar? (Subiu? Caiu? Quanto por cento?)

Dia	Variação
Segunda-feira	−2,35%
Terça-feira	1,37%
Quarta-feira	1,05%
Quinta-feira	−0,13%
Sexta-feira	0,21%

Resolução:

Temos de compor as cinco variações para poder emitir um julgamento. Para isso, precisamos dos fatores de atualização de cada variação:

$f_1 = 1 - 0{,}0235 = 0{,}9765$

$f_2 = 1 + 0{,}0137 = 1{,}0137$

$f_3 = 1 + 0{,}0105 = 1{,}0105$

$f_4 = 1 - 0{,}0013 = 0{,}9987$

$f_5 = 1 + 0{,}0021 = 1{,}0021$

Assim: $f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5 =$

$= 0{,}9765 \cdot 1{,}0137 \cdot 1{,}0105 \cdot 0{,}9987 \cdot 1{,}0021 \simeq 1{,}00107$

Como $f_{\text{acumulado}} > 1$, então:

$f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}00107 = 0{,}107\%$

Então, o dólar teve uma pequena alta de cerca de 0,107%.

Exercícios

9. Escreva no caderno o fator de atualização correspondente a cada situação:

a) 3% de aumento $f = 1{,}03$

b) 3% de desconto $f = 0{,}97$

c) 15% de aumento $f = 1{,}15$

d) 15% de desconto $f = 0{,}85$

e) 230% de aumento $f = 3{,}3$

f) 3 000% de aumento $f = 31$

10. Interprete cada fator de atualização, definindo se é aumento ou desconto e qual é o valor da taxa.

a) $f = 1{,}13$ Aumento de 13%.

b) $f = 0{,}70$ Desconto de 30%.

c) $f = 2$ Aumento de 100%.

d) $f = 0{,}95$ Desconto de 5%.

e) $f = 30$ Aumento de 2 900%.

11. Avalie o efeito acumulado de cada situação a seguir, definindo qual é o aumento ou o desconto equivalente.

a) Aumento de 3% e aumento de 5%. Aumento de 8,15%.

b) Aumento de 10% e desconto de 20%. Desconto de 12%.

c) Três aumentos de 10%. Aumento de 33,1%.

d) Dois aumentos de 6% e três descontos de 4%. Desconto de 0,6%.

12. Investi R$ 11 000,00 em um fundo de aplicação de um banco e hoje, após 3 meses, tenho R$ 11 440,00. Qual foi o rendimento percentual obtido nesse período de 3 meses? 4%

13. O preço de uma camisa passou de R$ 50,00 para R$ 59,00. Qual foi o aumento percentual desse preço? 18%

14. Um objeto que custava R$ 70,00 teve seu preço aumentado em R$ 10,50. De quanto por cento foi o aumento? O aumento foi de 15%.

15. Uma mercadoria custava R$ 80,00 e seu preço foi reajustado (aumentado) em 5%. Se sobre o novo preço for dado um desconto de 5%, ela voltará a custar R$ 80,00? Justifique sua resposta. Calcule os preços após o aumento e após o desconto.
Após o aumento: R$ 84,00 e após o desconto: R$ 79,80.

16. O mesmo modelo de um fogão está sendo vendido em duas lojas do seguinte modo:

- na 1ª loja, sobre o preço de R$ 800,00 há um desconto de 8%;
- na 2ª loja, sobre o preço de R$ 820,00 há um desconto de 10%.

Qual dessas ofertas é a mais conveniente para o cliente? A da 1ª loja.

17. O Índice Bovespa (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo – Ibovespa) é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Ele indica o retorno financeiro (valorização e lucro) de um valor de 100 pontos teoricamente aplicado em ações em 2/1/1968. O quadro abaixo mostra a variação percentual desse índice em 4 anos. Se o Ibovespa fechou o ano de 2015 com 43 349,96 pontos, com quantos pontos ele estava no fim de 2011 (ou seja, antes de 2012)?
Aproximadamente 56 740 pontos.

Ano	Variação
2015	−13,3%
2014	−2,9%
2013	−15,5%
2012	7,4%

Disponível em: <www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoTaxaMediaCrescimento.aspx?Indice=IBOVESPA&idioma=pt-br>. Acesso em: 6 maio 2016.

18. A quantia de R$ 1 890,00 foi repartida entre 3 pessoas da seguinte forma: Marta recebeu 80% da quantia de Luís, e Sérgio recebeu 90% da quantia de Marta. Quanto recebeu cada pessoa?
Luís: R$ 750,00, Marta: R$ 600,00 e Sérgio: R$ 540,00.

19. Uma calça teve um aumento de 7% e passou a custar R$ 59,00. Qual era o preço antes do aumento? R$ 55,14

20. Um posto de gasolina aumentou seus preços em 5% em fevereiro e 3% em janeiro. Se o etanol custa agora R$ 2,59, quanto custava antes dos aumentos? R$ 2,39

21. O fluxo de veículos em determinada rua passou de 3 por hora para 3 por minuto depois que ela foi asfaltada. Qual foi o aumento percentual do fluxo de veículos nessa rua? 5 900%

22. O que vocês preferem quando vão comprar algo: receber um único desconto de 55% ou dois descontos sucessivos de 30%? Justifiquem do ponto de vista financeiro. O desconto de 55% é maior.

23. O dólar caiu 3% em janeiro. Em fevereiro caiu mais x%. Se no bimestre a queda acumulada foi de 5%, de quanto por cento foi a queda do dólar em fevereiro? 2,06%

24. Em uma promoção, o preço de um celular passou de R$ 499,00 para R$ 399,00. Qual foi o desconto nessa promoção? Cerca de 20%.

5 Termos importantes de Matemática financeira

Vamos supor que uma pessoa aplique certa quantia (**capital**) em uma caderneta de poupança por determinado período (**tempo**). A aplicação é semelhante a um **empréstimo** feito ao banco. Então, no fim desse período, essa pessoa recebe uma quantia (**juros**) como compensação. O valor dessa quantia é estabelecido por uma porcentagem.

Ao final da aplicação, a pessoa terá em sua conta a quantia correspondente ao **capital** (***C***) mais os **juros** (***j***), que é conhecida como **montante** (***M***), ou seja, $M = C + j$. A razão $i = \frac{j}{C}$ é a taxa de crescimento do capital, também conhecida como **taxa de juros** (***i***), e será sempre associada ao período da operação.

Veja o exemplo a seguir:

Um banco oferece rendimento de 0,8% ao mês. Se uma quantia de R$ 600,00 for aplicada nesse banco, vejamos que quantia o cliente terá em sua conta no fim de 1 mês:

$0{,}8\%$ de $600 = 0{,}008 \cdot 600 = 4{,}8$

$600{,}00 + 4{,}80 = 604{,}80$

No fim de 1 mês de aplicação, a quantia será de R$ 604,80.

Nesse problema, temos:

- 0,8% ao mês: taxa de juros (i)
- R$ 600,00: capital (C) ou principal
- 1 mês: tempo (t)
- $j = C \cdot i$ ou $i = \frac{j}{C}$
- R$ 4,80: juros (j)
- $M = C + j$
- R$ 604,80: montante (M)
- unidade monetária (UM): real

Fique atento!
O valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Por exemplo, R$ 100,00 hoje provavelmente valem mais do que R$ 100,00 daqui a um ano.

Juros simples

Se um capital C é aplicado durante t unidades de tempo e a taxa i de juros por unidades de tempo incide apenas sobre o capital inicial, os juros j são chamados **juros simples:**

$j = i \cdot C$: juros obtidos no fim de 1 período

$j = (i \cdot C)t$: juros obtidos no fim de t períodos

Assim, as fórmulas são $j = C \cdot i \cdot t$ e $M = C + j$. Mas evite depender delas, o mais importante é compreender os conceitos que envolvem os juros simples.

Você sabia?
Na internet, pode-se acessar uma calculadora financeira *on-line* em <www.webcalc.com.br/financas/calc_fin.html>. Acesso em: 16 maio 2016.

Fique atento!
Nem sempre conhecer uma fórmula significa compreendê-la.

Veja um exemplo:

Pedro emprestou de um banco R$ 10 000,00. Dois meses depois, pagou R$ 10 400,00. Os juros pagos por Pedro foram de R$ 400,00 e a taxa de juros foi de $\frac{400}{10\,000} = \frac{4}{100} = 4\%$ ao bimestre. Nesse caso, o principal (ou capital), que era a dívida inicial de Pedro, é de R$ 10 000,00; o montante, que era a dívida na época do pagamento, é de R$ 10 400,00.

Exercício resolvido

9. *Parcelar ou não?*

Muitas vezes o comprador possui o dinheiro para pagar à vista, mas escolhe a prazo.

Nesses casos, é comum que sejam cobrados juros que encarecem o produto.

Acompanhe a situação:

Cícera decidiu comprar um berço para seu filho João Gabriel.

A loja oferece dois planos de pagamento:

I. À vista por R$ 500,00.

II. Em duas parcelas iguais de R$ 300,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra.

Caso Cícera opte pelo pagamento a prazo, qual a taxa mensal de juros que ela pagará?

a) 20% b) 25% c) 35% d) 40% e) 50%

Resolução:

A 1ª prestação (na compra parcelada) é paga no ato da compra e, dessa forma, não incidem juros sobre ela.

Preço à vista: R$ 500,00 (esse é o valor da mercadoria sem juros)

Preço a prazo: R$ 600,00 = R$ 300,00 + R$ 300,00

Após pagar a 1ª parcela, à vista, o valor que o cliente estará devendo é:

R$ 500,00 − R$ 300,00 = R$ 200,00

Se optar por efetuar o pagamento da 2ª parcela após 1 mês, terá de pagar R$ 300,00 (e não R$ 200,00); logo, os juros cobrados serão $\dfrac{300 - 200}{200} = 0{,}50 = 50\%$ ao mês.

Ou ainda $j = C \cdot i \cdot t$, em que $j = 100$, $C = 200$ e $t = 1$:

$100 = 200 \cdot i \cdot 1 \Rightarrow i = 0{,}5 = 50\%$ ao mês.

Portanto, alternativa **e**.

Juros compostos

Vejamos o seguinte problema:

Um capital de R$ 40 000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês durante 3 meses. Qual foi o montante no fim dos 3 meses?

No **sistema de juros simples**, calculamos:

- juros produzidos em 1 mês: 2% de 40 000 = $0{,}02 \cdot 40\,000 = 800$
- juros produzidos em 3 meses: $800 \cdot 3 = 2\,400$
- montante ao final de 3 meses: $40\,000 + 2\,400 = 42\,400$

Logo, no fim dos 3 meses o montante será de R$ 42 400,00.

No **sistema de juros compostos**, temos:

- juros produzidos no 1º mês: 2% de 40 000 = 800
- montante no fim do 1º mês: $40\,000 + 800 = 40\,800$
- juros produzidos no 2º mês: 2% de 40 800 = 816
- montante no fim do 2º mês: $40\,800 + 816 = 41\,616$
- juros produzidos no 3º mês: 2% de 41 616 = 832,32
- montante no fim do 3º mês: $41\,616 + 832{,}32 = 42\,448{,}32$

Logo, no fim dos 3 meses o montante será de R$ 42 448,32.

Você sabia?
É costume usar juros compostos nas aplicações financeiras.

Fique atento!
No regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados sobre o montante anterior. Assim, juros de 10% ao mês dão, em dois meses, juros de 21% e não juros de 20%.

Observe que no sistema de juros simples os juros foram de R$ 2 400,00 e no de juros compostos foram de R$ 2 448,32. O que gerou essa diferença?

Essa diferença foi gerada pelo fato de que, no sistema de juros compostos, deve-se calcular os juros no fim de cada período, **formando um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte**, até esgotar o tempo da aplicação (é o que chamamos "juros sobre juros").

Agora, acompanhe como calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante (M), produzido por um capital (C), aplicado à taxa i ao período, no fim de t períodos:

	Início	Juros	Montante no fim do período
1º período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1 + i)$
2º período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3º período	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
...			

Fique atento!
Observe que a sequência (C, M_1, M_2, ...) é uma PG de razão $1 + i$.

No fim de t períodos, o montante será:

$$M = C(1 + i)^t$$

Fique atento!
No regime de juros compostos de taxa i, um capital C transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante $M_n = C(1 + i)^n$.

Podemos então escrever que, no sistema de juros compostos, o capital C, aplicado à taxa i ao período, produz juros j e gera um montante M no fim de t períodos.

$$M = C(1 + i)^t$$

e

$$j = M - C$$

Fique atento!

- Usando fator de atualização, podemos escrever o montante $M = C \cdot f^t$, em que $f = 1 + i$.
- A primeira fórmula ao lado mostra que uma quantia C hoje se transformará, depois de t períodos de tempo, em uma quantia igual a $C(1 + i)^t$, ou seja, para obter o valor futuro basta multiplicar o atual por $(1 + i)^t$.

Veja a situação que foi resolvida mês a mês, usando agora as fórmulas acima:

C: R\$ 40 000,00
i: 2% ao mês (0,02)
t: 3 meses

- montante no fim de 3 meses:
  $M = C(1 + i)^t = 40\,000(1{,}02)^3 = 40\,000 \cdot 1{,}061208 = \text{R\$ } 42\,448{,}32$
- juros produzidos nos 3 meses:
  $j = 42\,448{,}32 - 40\,000 = \text{R\$ } 2\,448{,}32$

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 13

10. Quanto receberá de juros, no fim de um semestre, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R\$ 6 000,00 à taxa de 1% ao mês?

Resolução:

C: 6 000
t: 1 semestre = 6 meses
i: 1% (0,01) ao mês

Fique atento!
$(1{,}01)^6 = 1{,}0615$ é fator acumulado em 6 meses.

$M = 6\,000(1 + 0{,}01)^6 = 6\,369{,}120904$

Consideramos $M = \text{R\$ } 6\,369{,}12$ e
$j = 6\,369{,}12 - 6\,000{,}00 = 369{,}12$.

Logo, a pessoa receberá R\$ 369,12 de juros.

11. Paula tomou um empréstimo de R\$ 3 000,00 em um banco, a juros de 1% ao mês. Dois meses depois, ela pagou R\$ 1 500,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o débito. Qual é o valor desse último pagamento?

Resolução:

Após 2 meses, o montante da dívida será dado por:
$M = C \cdot (1 + i)^2$

Então, temos que:
$M = 3\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^2 \Rightarrow M = 3\,060{,}30$

Como pagou R\$ 1 500,00, resta um saldo de:
$3\,060{,}30 - 1\,500{,}00 = 1\,560{,}30$

Novo montante da dívida:
$M = 1\,560{,}30 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 1\,575{,}90$

O último pagamento foi de R\$ 1 575,90.

12. O capital de R\$ 2 000,00, aplicado a juros compostos, rendeu, após 4 meses, juros de R\$ 165,00. Qual foi a taxa de juros mensal?

Resolução:

C: 2 000
t: 4 meses
j: 165
M: 2 165 = 2 000 + 165
i: ?

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 2\,165 = 2\,000(1 + i)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + i)^4 = \dfrac{2\,165}{2\,000} \Rightarrow (1 + i)^4 = 1{,}0825 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1{,}0825} \Rightarrow 1 + i = 1{,}020015981 \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}020015981 \Rightarrow 2{,}0015981\%$

Portanto, a taxa de juros foi de aproximadamente 2% ao mês.

Resolvido passo a passo

13. (UFSM-RS) A chegada da televisão no Brasil facilitou o acesso à informação. Com o avanço da tecnologia, os aparelhos estão cada dia mais modernos e consequentemente mais caros. Um consumidor deseja adquirir uma televisão com tecnologia de última geração. Enquanto aguarda o preço da televisão baixar, ele aplica o capital disponível de R\$ 3 000,00 a juros simples de 0,8% ao mês em uma instituição financeira, por um período de 18 meses. O montante, ao final desse período, é igual a:

a) R\$ 7 320,00.
b) R\$ 5 400,00.
c) R\$ 4 320,00.
d) R\$ 3 432,00.
e) R\$ 3 240,00.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
É dado um problema básico de juros simples que traz no enunciado os valores do capital inicial e da taxa de juros mensal e o período de aplicação.

b) O que se pede?
Pede-se o montante ao final dessa aplicação que dura 18 meses.

2. Planejando a solução

Por se tratar de um problema de juros simples, utilizaremos as fórmulas do montante e dos juros/rendimento:

$M = C + J$

$$J = \overbrace{C}^{\text{capital inicial}} \cdot \underbrace{i}_{\text{taxa de juros}} \cdot \overbrace{t}^{\text{tempo de aplicação}}$$

Antes de realizar o cálculo dos juros/rendimento é interessante transformar a taxa de juros em valor decimal para lidar melhor com ela.

3. Executando o que foi planejado

- Transformando a taxa de juros em valor decimal temos: $0{,}8\% = \dfrac{0{,}8}{100} = 0{,}008$
- Calculando os juros/rendimento:
  $J = 3\,000 \cdot 0{,}008 \cdot 18 = 432$ reais
- Calculando o montante ao final de 18 meses:
  $M = 3\,000 + 432 = 3\,432$ reais

4. Verificando

Ao mês o capital disponível de R$ 3 000,00 rende R$ 24,00, resultante do cálculo:

$$3000 \cdot \frac{8}{1\,000} = 24$$

Assim, como sabemos que a aplicação foi de 18 meses, ao final desse período o capital disponível terá rendido $24 \cdot 18 = 432$ reais. Logo, fica verificado que o montante resultante da aplicação é R$ 3 432,00.

5. Emitindo a resposta

Alternativa **d**.

6. Ampliando o problema

a) O mesmo consumidor da questão base decidiu aumentar o montante obtido da aplicação para comprar uma televisão que será lançada daqui a um ano com valor inicial igual a R$ 4 500,00. A instituição financeira tem rendimento de 2% ao mês. Sendo assim, o consumidor terá ao final da segunda aplicação dinheiro suficiente para adquirir a TV? Se não, quanto faltará para completar o valor da TV?
Não. Faltarão aproximadamente 244,32 reais.

b) Discussão em equipe
Converse com seus colegas sobre a rapidez do avanço tecnológico e os reflexos desse processo para a sociedade, no que diz respeito aos mais variados aspectos sociais e econômicos. Relatem as experiências vivenciadas com o mundo tecnológico e os "frutos" que vocês conseguiram coletar com ela.

14. Em quanto tempo um capital dobrará se for aplicado, a juros compostos, à taxa de 30% ao ano?

Resolução:

$M = C \cdot f^{\,t}$

$M = 2C$

$2C = C \cdot 1{,}3^t \Rightarrow 1{,}3^t = 2 \Rightarrow \log 1{,}3^t = \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}3} = 2{,}64 \text{ anos} \simeq 2 \text{ anos e } 8 \text{ meses}$

Logo, o tempo deve ser de aproximadamente 2 anos e 8 meses.

15. Qual deve ser o tempo para que a quantia de R$ 30 000,00 gere o montante de R$ 32 781,81, quando aplicada à taxa de 3% ao mês, no sistema de juros compostos?

Resolução:

C: 30 000; M: 32 781,81; i: 3% ao mês (0,03); t: ?

$M = C(1+i)^t \Rightarrow (1+i)^t = \dfrac{M}{C} \Rightarrow (1{,}03)^t = \dfrac{32\,781{,}81}{30\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}03)^t = 1{,}092727 \Rightarrow \log(1{,}03)^t = \log 1{,}092727 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot \log 1{,}03 = \log 1{,}092727 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}092727}{\log 1{,}03} = 3$

O tempo deve ser de 3 meses.

16. *Situação-problema inicial do capítulo*

Uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R$ 1800,00 usando o que tem depositado na caderneta de poupança, que está rendendo 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual plano de pagamento é mais vantajoso:

- pagar à vista;

ou

- pagar em duas prestações iguais de R$ 903,00 cada uma, a primeira como entrada e a segunda depois de um mês.

Resolução:

Pagando à vista: toda a quantia de R$ 1800,00 será gasta (sobrará 0).

Pagando em duas prestações de R$ 903,00: como a caderneta de poupança utiliza o sistema de juros compostos, após o pagamento da primeira prestação sobrará a quantia de R$ 897,00, que renderá juro de 1% até o pagamento da segunda prestação. Veja:

1% de 897 = 8,97

$M = 897 + 8{,}97 = 905{,}97$

$905{,}97 - 903 = 2{,}97$

Logo, o segundo plano de pagamento é o melhor, pois ainda sobrará a quantia de R$ 2,97.

Exercícios

25. Quanto renderá a quantia de R$ 600,00, aplicada a juros simples, com a taxa de 2,5% ao mês, ao final de 1 ano e 3 meses? R$ 225,00 de juros.

26. Um capital de R$ 800,00, aplicado a juros simples com uma taxa de 2% ao mês, resultou no montante de R$ 880,00 após certo tempo. Qual foi o tempo de aplicação? 5 meses.

27. Uma dívida de R$ 750,00 foi paga 8 meses depois de contraída e os juros foram de R$ 60,00. Sabendo que o cálculo foi feito usando juros simples, qual foi a taxa de juros? 1% ao mês.

28. Um capital aplicado a juros simples rendeu, à taxa de 25% ao ano, juros de R$ 110,00 depois de 24 meses. Qual foi esse capital? R$ 220,00

29. Se uma mercadoria cujo preço é de R$ 200,00 for paga em 6 meses, com taxa de 20% ao ano, quanto será pago de juros no sistema de juros simples? R$ 20,00

30. Calcule o montante produzido por R$ 5 000,00 aplicado à taxa de 6% ao bimestre, após um ano, no sistema de juros compostos. R$ 7 092,59

31. Um capital de R$ 900,00 foi aplicado a juros de 18% ao ano durante 2 anos. Quanto rendeu de juros:

a) em porcentagem? 39,24%

b) em reais? R$ 353,16

32. Uma dívida de R$ 700,00 foi contraída a juros compostos de 2% ao mês para ser quitada em 4 meses.

a) Quanto deverá ser pago para quitar a dívida? R$ 757,70

b) Qual a taxa de juros acumulada nesse período de 4 meses? 8,24%

33. Carlos deixou R$ 800,00 aplicados por 3 anos em um fundo de investimento. Se o rendimento médio desse fundo foi de 1% ao mês, quanto Carlos tinha ao final desse período? R$ 1 144,62

34. Afonso depositará R$ 1 000,00 hoje na poupança, que rende, em média, 0,7% ao mês. Daqui a 6 meses, depositará mais R$ 1 000,00. Daqui a 1 ano, quanto ele terá na poupança? R$ 2 130,05

35. Investindo um capital a juros mensais de 4%, em quanto tempo vocês triplicarão seu capital? 28 meses.

36. Quando Luísa nasceu, seu pai investiu para ela R$ 600,00 em um fundo de investimento que rende, em média, 1,2% ao mês. Em quanto tempo Luísa terá mais de R$ 650,00? Em 7 meses.

37. Após quanto tempo, à taxa de 4% ao mês, a aplicação de R$ 1 000,00 renderá juros de R$ 170,00 no sistema de juros compostos? 4 meses.

38. Uma pessoa deseja aplicar R$ 10 000,00 a juros compostos e, no fim de 3 meses, obter um montante de R$ 11 248,64. Qual deve ser a taxa de juros? 4% ao mês.

39. (FGV-SP) Um capital de R$ 10 000,00, aplicado a juro composto de 1,5% ao mês, é resgatado ao final de 1 ano e 8 meses no montante, em reais, aproximadamente igual a:

a) 11 605,00.

b) 12 986,00.

x c) 13 456,00.

d) 13 895,00.

e) 14 216,00.

Dados:

x	x^{10}
0,8500	0,197
0,9850	0,860
0,9985	0,985
1,0015	1,015
1,0150	1,160
1,1500	4,045

40. (UEMT) Uma financiadora oferece empréstimos, por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

1ª) taxa de 11,4% ao mês, a juros simples;

2ª) taxa de 10% ao mês, a juros compostos.

Marcos tomou um empréstimo de R$ 10 000,00, optando pela primeira condição, e Luís tomou um empréstimo de R$ 10 000,00, optando pela segunda condição. Quanto cada um pagou de juros? Marcos pagou R$ 4 560,00 e Luís, R$ 4 641,00.

Conexão entre juros e funções

Consideremos uma dívida de R$ 10 000,00 paga com juros de 40% ao ano.

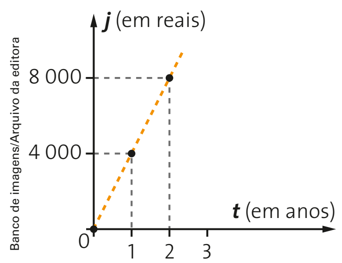
1º) No sistema de **juros simples**, os juros são obtidos em função do tempo de aplicação, por meio da equação $j = 10\,000 \cdot 0{,}4t$ ou $j = 4\,000t$.

Essa função tem uma equação do tipo da função linear ($f(x) = ax$), cujo gráfico é uma "reta" que passa pela origem.

A função linear foi estudada no Capítulo 3 do Volume 1 desta coleção.

Observe a tabela e o gráfico abaixo:

t	0	1	2	...
$j = f(t) = 4\,000t$	0	4 000	8 000	...



Banco de imagens/Arquivo da editora

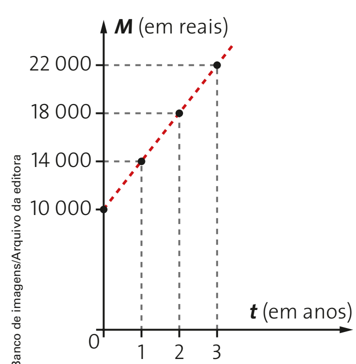
Fique atento!
Em $j = 4\,000t$, os valores de j são diretamente proporcionais aos valores de t e o coeficiente de proporcionalidade é 4 000.

2º) Ainda no sistema de **juros simples**, o montante é obtido em função do tempo, e a equação dessa função é $M = 10\,000 + 4\,000t$ ou $M = 4\,000t + 10\,000$, que é do tipo da função afim ($f(x) = ax + b$), cujo gráfico é uma "reta" que passa pelo ponto (0, 10 000).

Observe a tabela e o gráfico abaixo:

A função afim foi estudada no Capítulo 3 do Volume 1 desta coleção.

t	0	1	2	3	4	...
$M = g(t) = 4\,000t + 10\,000$	10 000	14 000	18 000	22 000	26 000	...



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento!
Para $t = 0$, $M = 10\,000$, que é o capital da dívida.
O acréscimo anual é de 4 000 reais.

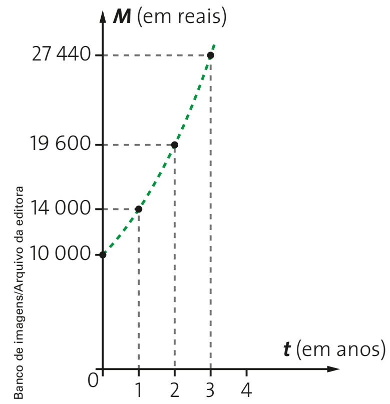
A sequência dos montantes a partir do primeiro ano (14 000, 18 000, 22 000, 26 000, ...) é uma PA de razão 4 000, cujo termo geral é dado por:

$$M_n = M_1 + (n-1)r \Rightarrow M_n = 14\,000 + (n-1) \cdot 4\,000 \Rightarrow M_n = \underbrace{4\,000n}_{\text{aumento anual}} + \underbrace{10\,000}_{\text{capital}}$$

3º) Já no sistema de **juros compostos**, o montante é obtido em função do tempo por meio da equação $M = 10\,000 \cdot 1{,}4^t$, que envolve uma variação do tipo exponencial ($f(x) = a \cdot b^x$). Veja a tabela e o gráfico a seguir:

A função exponencial foi estudada no Capítulo 5 do Volume 1 desta coleção.

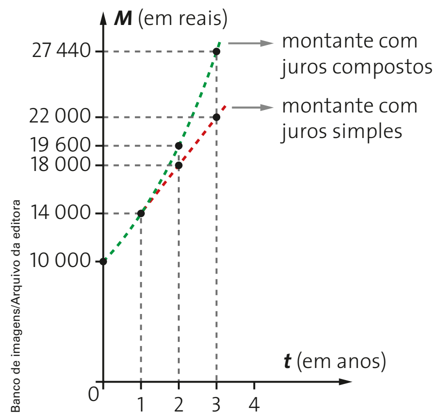
t	0	1	2	3	4	...
$M = h(t) = 10\,000 \cdot 1{,}4^t$	10 000	14 000	19 600	27 440	38 416	...



Como já estudamos, a sequência dos montantes a partir do primeiro ano (14 000, 19 600, 27 440, 38 416, ...) é uma PG de razão 1,4, cujo termo geral é dado por:

$$M_n = M_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow M_n = 14\,000 \cdot 1{,}4^{n-1} \Rightarrow M_n = 14\,000 \cdot \frac{(1{,}4)^n}{1{,}4} = 10\,000 \cdot (1{,}4)^n$$

4º) Vamos agora comparar os gráficos do 2º e do 3º itens, colocando-os em um mesmo sistema de eixos:



Observe que a intersecção dos gráficos ocorre no ponto (1, 14 000). Isso significa que após o período, nesse caso 1 ano, os montantes a juros simples e a juros compostos coincidem. A partir desse ponto, o gráfico do montante a juros compostos está sempre acima do gráfico do montante a juros simples, ou seja, para qualquer valor de t (em anos), $t > 1$, o montante da dívida a juros compostos é maior do que o montante a juros simples.

6 Equivalência de taxas

Considere a seguinte situação-problema:

Se um investimento rende 3% ao ano, quanto renderá em 10 anos?

$i = 3\% = 0{,}03$

Capital inicial: C → Montante após 1 ano: $C(1 + 0{,}03)$ → Montante após 2 anos: $C(1 + 0{,}03)^2$ → ... → Montante após 10 anos: $C(1 + 0{,}03)^{10}$

Se I é a taxa de juros acumulada em 10 anos e i é a taxa de juros relativa a 1 ano, temos:

$$1 + I = (1 + i)^{10}$$

pois 10 anos equivalem a 10 períodos iguais a 1 ano.

Fique atento!
Se i é a taxa de juros relativa a 1 ano, a taxa de juros relativa a n anos é I tal que $1 + I = (1 + i)^n$.

No problema, temos:

$1 + I = (1 + 0{,}03)^{10} \Rightarrow 1 + I = (1{,}03)^{10} \Rightarrow 1 + I \simeq 1{,}3439 \Rightarrow I \simeq 0{,}3439 = 34{,}39\%$

Portanto, o investimento renderá aproximadamente 34,39% em 10 anos.

É possível provar que, se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativa ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativa ao período t, e se $T = nt$, então:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

Fique atento!
- Taxa de juros é uma taxa de crescimento.
- Quando dizemos "12% ao ano com capitalização mensal" estamos falando em "1% ao mês".

Exercícios resolvidos

17. Qual é a taxa de juros mensal equivalente a uma taxa anual de 50%?

Resolução:

$I = 50\% = 0{,}5$

$1 + 0{,}5 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 1{,}5 = (1 + i)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}5} = 1{,}034 \Rightarrow i = 0{,}034 = 3{,}4\%$

Portanto, a taxa mensal é de 3,4%.

Fique atento!
Use uma calculadora científica para extrair a raiz de índice 12.

18. Paula investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual é a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Paula?

Resolução:

Nesse caso, $i = 0{,}5\%$ ao mês.

I = taxa anual equivalente

$1 + I = (1 + 0{,}005)^{12} \Rightarrow I \simeq 0{,}0617 = 6{,}17\%$

A taxa anual de juros é de 6,17%.

Fique atento!
Nesse exemplo, a taxa de 6% ao ano é chamada **taxa nominal**. E a taxa de 6,17 ao ano é chamada **taxa efetiva**.

19. Qual é a taxa de juros anual equivalente a uma taxa mensal de 2%?

Resolução:

$i = 2\% = 0{,}02$

$1 + I = (1 + 0{,}02)^{12} \Rightarrow 1 + I \simeq 1{,}268 \Rightarrow$

$\Rightarrow I \simeq 0{,}268 = 26{,}8\%$

Portanto, a taxa anual é de 26,8%.

20. Para se proteger contra abusos, as pessoas precisam conhecer o Código de Defesa do Consumidor, instituído pela Lei n. 8.078, de 11 de setembro de 1990. Em relação aos financiamentos, por exemplo, a lei diz que os comerciantes devem informar aos consumidores a taxa de juros mensal e anual e outras informações pertinentes (número de parcelas, total a ser pago, etc.) quando estiverem anunciando uma venda a prazo.
Suponha que o gerente de *marketing* de uma loja tenha sugerido que a taxa anual de financiamento exibida nos folhetos publicitários não seja maior do que 70%, pois pesquisas indicam que taxas maiores do que essa assustam o consumidor.

Que taxa mensal máxima essa loja deve cobrar para atender à sugestão do gerente de *marketing*?

Resolução:

Temos $i = 70\% = 0{,}7$.

$1 + 0{,}7 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 1{,}7 = (1 + i)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}7} \simeq 1{,}045 \Rightarrow i = 0{,}045 = 4{,}5\%$

A taxa mensal máxima deve ser de 4,5% ao mês.

Exercícios

41. Em uma cultura de bactérias, o número delas aumenta à taxa de 20% por minuto. Quanto crescerá esse número em 8 minutos? 329,98%

42. Uma seringa retira, de cada vez, 2% do remédio de um frasco. Depois de 10 vezes, quanto restará do remédio inicialmente existente no frasco? 81,71%

43. O número de torcedores de um time de futebol diminui 6% ao ano. Depois de 12 anos, quanto restará dos torcedores inicialmente existentes? 47,59%

44. Segundo o IBGE, a população do Brasil cresceu 0,87% em 2014. Se continuar crescendo à taxa de 0,87% ao ano, qual será seu crescimento em 2014? 9,05%

45. Qual é a taxa de juros anual equivalente a uma taxa mensal de 1%? 12,68%

46. Qual é a taxa de juros anual equivalente a uma taxa bimestral de 3%? 19,4%

47. Qual é a taxa de juros mensal equivalente a uma taxa de juros anual de 130%? 7,2%

48. A renda *per capita* é definida como o quociente do produto interno bruto (PIB) pela população economicamente ativa. Se nos próximos dez anos a população crescer 0,87% ao ano, quanto deverá crescer anualmente o PIB para que a renda *per capita* aumente 10% na próxima década? Aproximadamente 1,84%

O cartão de crédito: amigo ou vilão?

Kenneth Man/Shutterstock

India Picture/Shutterstock

O cartão de crédito é um dos principais meios de pagamento atualmente. É um cartão de plástico que pode ou não conter um *chip*. Nos cartões com *chip* o pagamento só é efetuado mediante a digitação de uma senha.

Cada cartão de crédito possui um **limite**, ou seja, um valor máximo que se pode gastar e pagar por isso depois.

Todas as compras que o consumidor faz com o cartão de crédito são acumuladas para serem pagas mensalmente, em data previamente acertada com a empresa de crédito. Essas compras vêm discriminadas no que se chama **fatura** e o consumidor deve pagar pelo menos uma parte do valor total (conhecida como pagamento mínimo). O que não for pago é passado para a fatura do mês seguinte, acrescido de juros.

Os juros cobrados pelos cartões de crédito são um dos mais altos do mercado financeiro, por isso, pode não compensar passar a dívida para o mês seguinte. O ideal é sempre controlar os gastos e pagar a totalidade da fatura na data certa, todo mês, assim os juros do cartão são evitados.

Como o consumidor não percebe o dinheiro sendo gasto, é comum consumidores inexperientes gastarem demais e depois não conseguirem pagar a fatura, que vem muito alta. Nesses casos, é aconselhável fazer um empréstimo pessoal no banco, ou retirar dinheiro de alguma aplicação financeira, e pagar toda a fatura, para que a dívida não cresça no mês seguinte.

As operadoras de cartão, geralmente os bancos que emitem o cartão de uma empresa de crédito, costumam cobrar do consumidor uma taxa anual (**anuidade**) para manutenção da conta. Essa taxa varia de operadora para operadora e pode chegar a zero em determinados casos. Sempre vale a pena ligar para a operadora e negociar o valor dessa taxa.

Se o consumidor sempre pagar a fatura total, em dia, os gastos extras que ele poderá ter são a anuidade do cartão e, em alguns casos, o seguro.

O lucro das empresas de crédito vem dos estabelecimentos comerciais e dos altos juros cobrados nas faturas em atraso. No caso dos estabelecimentos comerciais, a empresa de crédito repassa ao lojista os valores das compras feitas com cartão, descontando uma taxa pelo serviço. Por exemplo, se o consumidor usa o cartão para comprar um produto de R$ 100,00, o consumidor pagará R$ 100,00 na fatura do cartão e o lojista receberá R$ 96,00 da empresa de crédito. Nesse caso, a taxa pelo serviço é de 4% sobre o valor da compra. A vantagem para o lojista é que ele sempre receberá da empresa de crédito; assim, se o consumidor não pagar, quem assume o prejuízo é a empresa de crédito, não o lojista. Então, vender no cartão é certeza de recebimento, ainda que recebendo um valor um pouco menor.

Assim, o cartão de crédito geralmente traz facilidades tanto para o consumidor quanto para o vendedor. Esse tipo de pagamento vem se consolidando mundialmente como uma das principais formas de pagamento, principalmente devido ao crescente comércio *on-line*.

Taxa de juro do cartão de crédito vai a 431,4% ao ano

A taxa de juros do rotativo do cartão de crédito subiu 99,8 pontos percentuais ao longo de 2015, alcançando 431,4% ao ano em dezembro de 2015. Em relação a novembro daquele mesmo calendário, a taxa subiu 16,1 pontos percentuais. O rotativo é a linha de crédito pré-aprovada no cartão e inclui saques feitos na função crédito do meio de pagamento. As concessões do rotativo de cartão de crédito somaram R$ 25,916 bilhões em dezembro, com queda de 3,7% perante o mês anterior, mas alta de 1,6% no comparativo com o fim de 2014. A inadimplência na modalidade correspondeu a 40,3%. Em novembro, estava em 37,8%. A inadimplência média do mercado foi de 3,4% no fim de 2015.

Fonte: O valor. Disponível em: <www.valor.com.br/financas/4412306/taxa-de-juro-do-cartao-de-credito-vai-4314-ao-ano-aponta-bc>. Acesso em: 16 maio 2016.

O Sistema Financeiro Nacional

No Brasil, o conjunto de instituições que possibilitam a ligação entre pessoas e empresas que dispõem de dinheiro para emprestar e pessoas e empresas que necessitam de dinheiro e se oferecem para tomá-lo emprestado é denominado **Sistema Financeiro Nacional**. Fazem parte desse sistema os bancos comerciais, a Caixa Econômica Federal, as cooperativas de crédito e as instituições similares. Esse sistema, que movimenta vultosos recursos diariamente, é regulamentado por lei e permeia todo o território nacional, influenciando a vida de todos os brasileiros.

Quem empresta dinheiro no mercado financeiro tem por motivação os juros que pode ganhar durante o tempo em que o seu dinheiro estiver emprestado. Esses juros são calculados por meio de porcentagens e sistemas de juros simples e juros compostos. Para o cálculo das porcentagens e desses juros, é necessário conhecer técnicas de Matemática. Matemática financeira é o ramo da Matemática que trata dos métodos utilizados para efetuar esses cálculos.

A taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) é a média de juros que o governo brasileiro paga por empréstimos tomados dos bancos. Quando a taxa Selic é alta, os bancos preferem emprestar ao governo porque ele paga muito bem e o banco tem todas as garantias de recebimento. Quando a Selic é baixa, os bancos preferem emprestar dinheiro à população.

Quando existe risco de inflação alta, o Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central aumenta a taxa Selic e a inflação geralmente recua.

VIANA, Josimar. *O Sistema Financeiro Nacional*. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_unioeste_mat_pdp_lucia_catarina_matte.pdf>. Acesso em: 9 maio 2016.

Agora, responda:

1. Após ter lido o texto *O cartão de crédito: amigo ou vilão?*, na sua opinião quais são as vantagens e desvantagens de utilizar um cartão de crédito? Resposta pessoal.
2. Com base no trecho da reportagem *Taxa de juro do cartão de crédito vai a 431,4% ao ano* e desconsiderando a taxa de manutenção do cartão, quanto uma pessoa pagaria às operadoras de cartões de crédito ao contrair uma dívida de 100 reais em dezembro de 2015 e depois atrasar sua fatura por 3 meses? R$ 152,09
3. Quanto o governo gastaria a mais ao final de um ano com o aumento de 0,5% na taxa anual de juros, supondo-se que ele tenha tomado um empréstimo de R$ 1 000 000 000,00 de bancos? R$ 5 000 000,00
4. Sabendo que em janeiro de 2016 a taxa Selic era de 14,25% ao ano, suponha que o Brasil resolva fazer uma sequência de redução da sua taxa básica de juros. A redução proposta consistiria em reduzir 0,05 ponto percentual (ao ano) da taxa Selic a cada mês até atingir a taxa de 0,1% ao ano. Em quanto tempo a taxa básica de juros do Brasil chegará a esse valor? 283 meses.
5. De acordo com o Banco Central do Brasil, em janeiro de 2016 foi cobrada de pessoas físicas uma taxa média de aproximadamente 187% ao ano no cheque especial.
   a) Quanto o governo pagará de juros a cada R$ 1 000,00 que tomou emprestado dos bancos ao final de um ano, tendo como base a taxa Selic de 14,25% ao ano? R$ 142,50
   b) Quanto um cidadão que utiliza R$ 1 000,00 do seu cheque especial pagará após um ano, tendo como base a taxa do cheque especial? R$ 1 870,00