CAPÍTULO 7

Números complexos


João Prudente/Pulsar Imagens

Eletricistas realizando reparo na rede elétrica. A energia que usamos em casa é produzida por uma usina elétrica e é transmitida por corrente alternada. No sistema brasileiro de transmissão de energia elétrica o fluxo de elétrons dentro de um fio muda de direção 120 vezes por segundo. No caso da corrente alternada, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio de números complexos, a fim de facilitar os cálculos.

1 Retomando: conjuntos numéricos

Neste capítulo, estudaremos mais um conjunto numérico: o **conjunto dos números complexos** ($\mathbb{C}$).

Para entender alguns aspectos relevantes da necessidade desse novo conjunto, reúna-se com um colega e resolvam as equações abaixo, respeitando os conjuntos indicados em cada item.

Por exemplo, ao resolver uma equação em $\mathbb{N}$, não é possível obter resultados negativos nem fracionários, pois esses números não existem no conjunto $\mathbb{N}$.

a) Em $\mathbb{N}$: $x^2 - 25 = 0$; $S = \{5\}$

b) em $\mathbb{Z}$: $x^2 - 25 = 0$; $S = \{-5; 5\}$

c) em $\mathbb{N}$: $4x^2 - 25 = 0$; $S = \varnothing$

d) em $\mathbb{Z}$: $4x^2 - 25 = 0$; $S = \varnothing$

e) em $\mathbb{Q}$: $4x^2 - 25 = 0$; $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

f) em $\mathbb{N}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \varnothing$

g) em $\mathbb{Z}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \{\ \}$

h) em $\mathbb{Q}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \{\ \}$

i) em $\mathbb{R}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

j) em $\mathbb{N}$: $x^2 + 1 = 0$; $S = \varnothing$

k) em $\mathbb{Z}$: $x^2 + 1 = 0$; $S = \varnothing$

l) em $\mathbb{Q}$: $x^2 + 1 = 0$; $S = \varnothing$

m) em $\mathbb{R}$: $x^2 + 1 = 0$. $S = \{\ \}$

Essa introdução visa mostrar ao aluno que determinadas equações têm solução em um conjunto, mas não em outros. Dê alguns minutos para que as duplas concluam a tarefa e depois discuta oralmente os resultados obtidos por eles. Questione o motivo de algumas equações só terem solução em determinados conjuntos. Se necessário, ajude-os nessa conclusão importante, conduzindo-os a perceber esse fato. Os últimos quatro itens são o ponto de partida para o ensino do conjunto dos números complexos.

Entre os conjuntos numéricos já conhecidos tínhamos inicialmente o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

Para que a subtração fosse sempre possível, ele foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Fique atento!
Em $\mathbb{Q}$, a única divisão impossível é a divisão por 0.

Em $\mathbb{Q}$, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e a e b pertencentes a $\mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados de irracionais ($\mathbb{I}$).

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Portanto, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$ e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geqslant 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos.

2 Os números complexos aparecem

Em 1494, um renomado professor de matemática italiano, Frei Luca Pacioli (1445-1517), escreveu um livro intitulado *Suma de Aritmética e Geometria*, que foi muito difundido, uma vez que, pouco tempo antes, Gutenberg (c. 1397-1468) havia inventado uma prensa com tipos móveis. Nesse livro, que tratava de operações aritméticas, radicais, problemas do primeiro e do segundo graus, geometria e contabilidade, Pacioli faz a seguinte afirmação:

> Não há regra geral para solução de problemas do tipo “cubo e coisas igual a número”.

A expressão “cubo e coisas igual a número” é equivalente, na notação moderna, à equação $x^3 + px = q$. Pacioli dizia que não existia método algébrico para resolver essa equação e muitos matemáticos da época acreditaram nisso. Entretanto, pelo menos um deles não acreditou, pelo contrário, trabalhou na busca de uma solução e conseguiu. Era Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, do qual quase nada se sabe. Porém uma coisa é certa, Del Ferro conseguiu solucionar a equação do terceiro grau $x^3 + px = q$ em 1515. Não publicou nada, mas contou como era a solução para seu aluno Antonio Fiore, que começou a espalhar que ele era o único matemático que sabia resolver essa equação. Nessa época Niccolò Fontana de Brescia (1499-1557), mais conhecido pelo pseudônimo de Niccolò Tartaglia (que significa gago), engenheiro e professor em Veneza (Itália), soube que Fiore tinha a solução, mas tratou ele mesmo de encontrá-la e também conseguiu obtê-la.

Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano publicou seu famoso livro *Ars Magna*, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$.

O problema “Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?” corresponderia à equação $x^3 - 15x = 4$, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números “esquisitos”, mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.

Album/akg-images/Latinstock

Gravura de Girolamo Cardano (1501-1576). Colorizada.

Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números “funcionavam”. Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por $\sqrt{-1}$, como $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$.

Saiba mais sobre como Cardano conseguiu obter a resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$ na seção Leitura da página 196. A fórmula “secreta” divulgada por Cardano para resolução desse tipo de equação é expressa da seguinte maneira:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ocorre que, em alguns casos, essa fórmula dá resultados realmente estranhos. Por exemplo, considere a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$. De início não sabemos quantas raízes reais ela tem, mas certamente $x = -2$ é uma delas pois:

$$(-2)^3 - 6(-2) - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$

Porém, aplicando a fórmula temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

ou seja:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

Isso é muito estranho, pois a fórmula contém a raiz quadrada de números negativos $\left(\sqrt{-4}\right)$ e, apesar disso, sabemos que x é real. Nesse momento, as raízes quadradas de números negativos começaram a ser estudadas e os números complexos apareceram, porém demorou muito tempo para que esses números fossem aceitos. Também era comum alguns matemáticos dizerem que tinham que operar com raízes negativas (pois apareciam naturalmente em suas equações), mas que não sabiam exatamente o que significavam.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo **i** para representar a raiz quadrada de -1. Assim, $\sqrt{-121}$ passou a ser expresso por 11 i.


Album/akg-images/Latinstock

Retrato de Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Óleo sobre tela.

Finalmente, a representação geométrica dos números complexos foi elaborada em 1806 pelo matemático suíço Jean-Robert Argand (1768-1822). Anos depois, o matemático, astrônomo e físico alemão Carl Friedrich Gauss adotou essa representação e a divulgou em seus trabalhos (alguns pesquisadores defendem que Gauss chegou às mesmas conclusões de Argand de forma independente, veja na página 181). No final do século XVIII, Gauss fez com que a representação do plano complexo ficasse conhecida, tornando mais significativo seu estudo e favorecendo sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações.

3 Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos – os números complexos – devem ser tais que possam ser somados e multiplicados e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação realizadas com os números reais no conjunto $\mathbb{C}$ devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto $\mathbb{R}$ não seria um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Hoje, a notação preferida para definir os elementos do conjunto complexo é a forma algébrica.

Forma algébrica

Número complexo é todo número da forma:

$$\boxed{z = a + b\text{i}}$$

$$(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ e } \text{i}^2 = -1)$$

Essa é a **forma algébrica** ou **forma binomial** de escrever um número complexo. Observemos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z \;=\; \underbrace{a}_{\substack{\text{parte real}\\ \text{de } z\\ \downarrow\\ \text{Re}(z) = a}} \;+\; \underbrace{b}_{\substack{\text{parte}\\ \text{imaginária}\\ \text{de } z\\ \downarrow\\ \text{Im}(z) = b}}\,\text{i}$$

i é a unidade imaginária, tal que $\text{i}^2 = -1$.

Fique atento!
Como $\text{i}^2 = -1$, é comum encontrar quem defina $\text{i} = \sqrt{-1}$. Neste livro preferimos usar $\text{i}^2 = -1$.

A existência do **i** é que permite que no conjunto $\mathbb{C}$ exista raiz de índice par de números negativos, não definida no conjunto $\mathbb{R}$.

Por exemplo, se $x \in \mathbb{C}$ e $x^2 = -25$, então $x = \pm 5\text{i}$, pois:

$$-25 = (\text{i}^2) \cdot 25 = \text{i}^2 5^2 = (5\text{i})^2$$

Fique atento!
Estamos usando as propriedades da potenciação, agora para números complexos.

Se o número complexo possui a unidade imaginária (ou seja, se $b \neq 0$), ele é também chamado **imaginário**.

Devemos observar também que, se $b = 0$, temos $z = a$ (número real); e se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = b\text{i}$, que é um número imaginário puro.

Exemplos:

a) Em $z = 2 + 3\text{i}$, temos $\text{Re}(z) = 2$ e $\text{Im}(z) = 3$.

b) Em $z = 2 - 3\text{i}$, temos $\text{Re}(z) = 2$ e $\text{Im}(z) = -3$.

c) Em $z = 3$, temos $\text{Re}(z) = 3$ e $\text{Im}(z) = 0$. Portanto, z é real.

d) Em $z = -2\text{i}$, temos $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = -2$. Portanto, z é um número imaginário puro.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são intuitivas. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que i^2 é um número real e vale -1. Não há necessidade de decorar fórmulas.

Exemplos:

a) $(2 + 3\text{i}) + (-3 + 4\text{i}) = (2 - 3) + (3 + 4)\text{i} = -1 + 7\text{i}$

b) $(1 + \text{i}) - (3 + 2\text{i}) = (1 - 3) + (1 - 2)\text{i} = -2 - 1\text{i} = -2 - \text{i}$

c) $(1 + 2\text{i})(2 - 3\text{i}) = 1 \cdot 2 + 1(-3\text{i}) + 2\text{i} \cdot 2 + (2\text{i})(-3\text{i}) = 2 - 3\text{i} + 4\text{i} - 6\text{i}^2 = 2 + \text{i} - 6(-1) = 2 + \text{i} + 6 = 8 + \text{i}$

d) $(2 + 3\text{i})(2 - 3\text{i}) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3\text{i}) + 3\text{i} \cdot 2 + 3\text{i} \cdot (-3\text{i}) = 4 - \cancel{6}\text{i} + \cancel{6}\text{i} - 9(-1) = 4 + 9 = 13$

Exercícios resolvidos

1. Dados os números complexos $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$, calcule as operações indicadas nos itens abaixo:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 z_2$

c) z_1^2

d) $z_1 + z_2^2$

Resolução:

a) $z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (-2 + i) =$
$= (1 - 2) + (3 + 1)i = -1 + 4i$

b) $z_1 z_2 = (1 + 3i)(-2 + i) =$
$= 1(-2) + 1 \cdot i + 3i(-2) + 3i \cdot i =$
$= -2 + i - 6i + 3i^2 = -2 - 5i + 3(-1) =$
$= -5 - 5i$

c) $z_1^2 = (1 + 3i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 =$
$= 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i + 9(-1) = -8 + 6i$

d) $z_1 + z_2^2 = (1 + 3i) + (-2 + i)^2 =$
$= (1 + 3i) + [4 - 4i + i^2] =$
$= (1 + 3i) + [4 - 4i + (-1)] =$
$= (1 + 3i) + (3 - 4i) = 1 + 3i + 3 - 4i = 4 - i$

2. Determine o valor real de x para que o número complexo:

a) $z = (1 - 2x) + 3i$ seja um número imaginário puro.

b) $z = 6 - (3x - 5)i$ seja um número real.

Resolução:

a) Para que z seja um número imaginário puro é necessário que $\text{Re}(z) = 0$, pois $\text{Im}(z) = 3 \neq 0$.

Então:

$\text{Re}(z) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Verificando, vem:

$z = (1 - 2x) + 3i = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 3i =$

$= (1 - 1) + 3i = 0 + 3i = 3i$ (número imaginário puro)

Logo, $x = \frac{1}{2}$.

b) Para que z seja real é necessário que $\text{Im}(z) = 0$:

$\text{Im}(z) = -(3x - 5) = 0 \Rightarrow -3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Verificando, para $x = \frac{5}{3}$:

$z = 6 - \left(3 \cdot \frac{5}{3} - 5\right)i = 6 - (5 - 5)i =$

$= 6 - 0i = 6$ (número real)

Logo, $x = \frac{5}{3}$.

3. Efetue as operações indicadas nos itens abaixo:

a) $(1 + i)(1 - i)$

b) $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$

c) $(2 - 3i)^2 - (3 - i)2i$

Resolução:

a) $(1 + i)(1 - i) = 1 \cdot 1 - \cancel{1i} + \cancel{1i} - i^2 = 1 - i^2 =$
$= 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

b) $i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
$i^5 = i^4 i = 1i = i$
$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$
$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$
$i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Observe que as potências de **i** começam a se repetir depois de i^4. De modo geral, temos:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$
$i^{4n+1} = (i^4)^n i = 1 \cdot i = i$
$i^{4n+2} = (i^4)^n i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{4n+3} = (i^4)^n i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$

Ou seja:

$i^{4n+p} = i^p$

c) $(2 - 3i)^2 - (3 - i)2i =$
$= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 - (6i - 2i^2) =$
$= 4 - 12i + 9i^2 - 6i + 2i^2 = 4 - 18i - 11 =$
$= -7 - 18i$

4. Calcule o valor de:

a) i^{49}

b) i^{100}

c) $3i^{15} - i^{16}$

Resolução:

a) $i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^4)^{12} \cdot i = i$

Ou, de outra maneira:

$i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^2)^{24} i = (-1)^{24} i = 1i = i$

Portanto, $i^{49} = i$.

b) $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

Ou, de outra maneira:

$i^{100} = (i^4)^{25} \cdot i^0 = i^0 = 1$

Portanto, $i^{100} = 1$.

c) $i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7\, i = (-1)^7\, i = -1i = -i$

$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

Então, temos:

$3i^{15} - i^{16} = 3(-i) - 1 = -3i - 1$

Portanto, $3i^{15} - i^{16} = -1 - 3i$.

Fique atento!

$$i^{49} = i^1 = i \qquad \begin{array}{r|l} 49 & 4 \\ \cline{2-2} 09 & 12 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad i^{15} = i^3 = -i \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \end{array}$$

$$i^{100} = i^0 = 1 \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 25 \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad i^{74} = i^2 = -1 \qquad \begin{array}{r|l} 74 & 4 \\ \cline{2-2} 34 & 18 \\ 2 & \end{array}$$

5. Resolva a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Resolução:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

(impossível em $\mathbb{R}$)

Em $\mathbb{C}$ podemos resolvê-la. Assim, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-1)4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \text{ e } x'' = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

Verificando, vem:

$S = x' + x'' = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$

$P = x'x'' = (-2 + i)(-2 - i) = 4 + 2i - 2i - i^2 =$

$= 4 - (-1) = 5$

Satisfazendo então $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja,

$x^2 + 4x + 5 = 0$.

6. Encontre em cada item o número complexo z indicado.

a) $4z = z - (-9 + 6i)$

b) $z - i^{36} = i^{43} - z$

c) $iz = z - 1 + 5i$

Resolução:

a) $4z = z - (-9 + 6i) \Rightarrow 4z - z = -(-9 + 6i) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3z = 9 - 6i \Rightarrow z = 3 - 2i$

Logo, $z = 3 - 2i$.

b) $z - i^{36} = i^{43} - z \Rightarrow z + z = i^{43} + i^{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z = -i + 1 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$

Logo, $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$.

c) Como $z = a + bi$, temos:

$i(a + bi) = a + bi - 1 + 5i \Rightarrow$

$\Rightarrow -b + ai = (a - 1) + (b + 5)i \Rightarrow \begin{cases} -b = a - 1 \\ a = b + 5 \end{cases}$

Então:

$-b = b + 5 - 1 \Rightarrow -2b = 4 \Rightarrow b = -2$

$a = -2 + 5 = 3$

Logo, $z = 3 - 2i$.

7. Calcule o valor de:

a) $(1 + i)^{20}$;

b) $(1 + i)^{21}$.

Resolução:

a) $(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = [2i]^{10} =$

$= 2^{10} \cdot i^{10} = 1024 \cdot i^2 = -1024$

b) $(1 + i)^{21} = (1 + i)^{20} \cdot (1 + i) =$

$= -1024 \cdot (1 + i) = -1024 - 1024i$

Exercícios

Atividade em dupla

Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Resolva no caderno em $\mathbb{C}$ cada equação:

a) $x^2 + 25 = 0$ $x = \pm 5i$

b) $2x^2 + 98 = 0$ $x = \pm 7i$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$ $x' = 1 - i$ e $x'' = 1 + i$

d) $x^2 - 10x + 40 = 0$ $x' = 5 - \sqrt{15}\, i$ e $x'' = 5 + \sqrt{15}\, i$

2. Dados os números complexos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ e $z_3 = 2 - 2i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$ $5i$

b) $z_1 - z_2$ $2 - i$

c) $z_1 z_2$ $-7 + i$

d) $(z_1 + z_2)z_3$ $10 + 10i$

e) $(z_1 + z_2) + z_3$ $2 + 3i$

3. Determine o número z em cada caso:

a) $3z + 4i = z - 6i^{20}$ $z = -3 - 2i$

b) $3zi = z + i$ $z = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i$

4. Efetue:

a) i^9 i

b) i^{14} -1

c) i^{60} 1

d) i^{99} $-i$

e) i^{1035} $-i$

f) $(-i)^{16}$ 1

5. Sendo $z = 2 - 2i$, calculem:

a) z^2 $-8i$

b) z^8 $4\,096$

c) z^9 $8\,192 - 8\,192i$

6. Resolvam no caderno o sistema $\begin{cases} 3z_1 - z_2 = 1 - i \\ 5z_1 - 2z_2 = 1 + 3i \end{cases}$ de variáveis z_1 e z_2.

$z_1 = 1 - 5i$ e $z_2 = 2 - 14i$

7. Determinem o valor de x, real, para que o número complexo:

a) $(x^2 - x) + 3i$ seja um número imaginário puro; $x = 0$ ou $x = 1$

b) $x + (x^2 - 4)i$ seja um número real; $x = \pm 2$

c) $x + xi$ seja o número real 0. $x = 0$

8. Mostrem que os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ são soluções da equação $z_2 - 2z_1 + 2 = 0$.

Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.

4 Conjugado de um número complexo

A propriedade do inverso multiplicativo pode ser escrita da seguinte maneira: se $z \neq 0$, existe um único número complexo $\frac{1}{z}$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Como podemos determinar o número $\frac{1}{z}$ na forma algébrica?

Para isso, precisamos definir o que vem a ser o conjugado de um número complexo.

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.

Exemplos:

a) Se $z = 2 + 3i$, então $\overline{z} = 2 - 3i$.

b) Se $z = -3 - 4i$, então $\overline{z} = -3 + 4i$.

c) Se $z = 2$, então $\overline{z} = 2$.

d) Se $z = 5i$, então $\overline{z} = -5i$.

e) Se $z = i$, então $\overline{z} = -i$.

f) Se $z = 0$, então $\overline{z} = 0$.

Para refletir

Em que casos temos $z = \overline{z}$?

Quando z for real.

Exercícios resolvidos

8. Determine o número complexo z tal que $2z - 1 = \overline{z} + i$.

Resolução:

Consideremos $z = a + bi$.

Então:

$$2z - 1 = \overline{z} + i \Rightarrow 2(a + bi) - 1 = (a - bi) + i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a + 2bi - 1 = a - bi + i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2a - 1) + 2bi = a + (2b + 1)i$$

Igualando as partes reais e imaginárias, temos:

$$2a - 1 = a \Rightarrow a = 1$$
$$2b = -b + 1 \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

Logo, $z = 1 + \frac{1}{3}i$.

9. Dado $z \neq 0$, determine $\frac{1}{z}$ na forma $a + bi$ de tal modo que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (questão proposta anteriormente).

Resolução:

Basta multiplicar numerador e denominador por $\overline{z}$, ou seja, pelo conjugado de z, que é diferente de 0, pois $z \neq 0$. Assim:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \Rightarrow \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} =$$
$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Logo:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$$

Fique atento!

Se $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$ é o inverso multiplicativo de z e pode ser indicado também por z^{-1}.

10. Dado $z = 1 + 2i$, encontre o inverso multiplicativo de $z\left(\frac{1}{z} \text{ ou } z^{-1}\right)$.

Resolução:

1ª maneira:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1^2-(2i)^2} =$$
$$= \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Logo, $\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

2ª maneira:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

5 Divisão de números complexos

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$.

Exercícios resolvidos

11. Escreva na forma $a + bi$ o número complexo $\frac{1}{3 - i}$.

Resolução:

$$\frac{1}{3 - i} = \frac{1(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{9 + 1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

12. Efetue $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 + 5i} = \frac{(1 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{2 - 5i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} = \frac{12 - i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$.

13. Efetue $\frac{z}{\overline{z}}$ sabendo que $z = 2 + 3i$.

Resolução:

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{2 + 3i}{2 - 3i} = \frac{(2 + 3i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{4 + 6i + 6i + 9i^2}{4 + 6i - 6i - 9i^2} = \frac{4 + 12i - 9}{4 + 9} = \frac{-5 + 12i}{13} = \frac{-5}{13} + \frac{12}{13}i$$

Logo, $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{-5}{13} + \frac{12}{13}i$.

Exercícios

9. Determine $\overline{z}$ para:

a) $z = 1 + 5i$; $\overline{z} = 1 - 5i$

b) $z = 2i$; $\overline{z} = -2i$

c) $z = 0$; $\overline{z} = 0$

d) $z = -4 + 2i$; $\overline{z} = -4 - 2i$

e) $z = 5$; $\overline{z} = 5$

f) $z = 3 + 3i$; $\overline{z} = 3 - 3i$

g) $z = -1 - i$; $\overline{z} = -1 + i$

h) $z = \sqrt{2} - 2i$. $\overline{z} = \sqrt{2} + 2i$

10. Calcule $z\overline{z}$ nos casos:

a) $z = 3 - 4i$ 25

b) $z = 7i$ 49

c) $z = -1 - i$ 2

11. Encontre z tal que $\overline{z} + 2zi - 1 = 2$. $z = -1 - 2i$

12. Determine o inverso multiplicativo de z, sabendo que:

a) $z = 2 + 4i$ $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$

b) $z = -1 - 2i$ $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

c) $z = i$ $-i$

13. Efetue as divisões indicadas:

a) $\frac{2 + 3i}{1 + 2i}$ $\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$

b) $\frac{1}{3 + 2i}$ $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

c) $\frac{1 + 3i}{1 - i}$ $-1 + 2i$

d) $\frac{1 + i}{i}$ $1 - i$

e) $\frac{1 - i}{1 + i}$ $-i$

14. Escrevam no caderno na forma $z = a + bi$ os números complexos:

a) $z = \frac{1}{1 + i}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b) $z = \frac{(3 - 4i)(4 - 3i)}{3 - 2i}$ $\frac{50}{13} - \frac{75}{13}i$

15. (Fuvest-SP) Determine os números complexos $z + \overline{z} = 4$ e $z \cdot \overline{z} = 13$, em que $\overline{z}$ é conjugado de $\overline{z}$.
$2 + 3i, 2 - 3i$

16. Determine z tal que:

a) $i \cdot z = 4$ $z = -4i$

b) $(1 + i) \cdot z = 5 - i$ $z = 2 - 3i$

c) $(1 - 2i) \cdot z = 5$ $z = 1 + 2i$

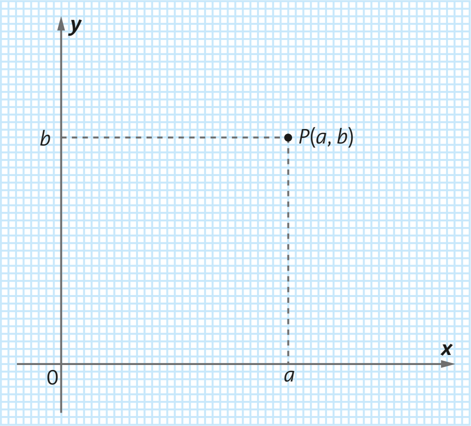
6 Representação geométrica dos números complexos

Conforme foi dito anteriormente, os números complexos podem ser representados de várias formas. Até agora vimos a forma algébrica $a + bi$. Outra maneira de representar um complexo z é por meio de um par ordenado de números reais. Assim, se $z = a + bi$, podemos escrever que $z = (a, b)$. (Gauss só usava essa notação.)

Também sabemos que a cada par de números reais (a, b) está associado um único ponto do plano. Logo, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto P do plano de coordenadas a e b, isto é, $P(a, b)$.

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**. Dizemos que o ponto $P(a, b)$ é a **imagem** (ou **afixo**) do número complexo $a + bi$.

Argand-Gauss: Jean Robert Argand e Johann Karl Friedrich Gauss. Como visto anteriormente, alguns pesquisadores defendem que Argand e Gauss, de forma independente e em épocas diferentes, tiveram a mesma ideia sobre a representação dos números complexos no plano. Porém, Argand não era um matemático suficientemente conhecido para que suas publicações tivessem algum destaque, de forma que somente quando Gauss publicou seu próprio trabalho, cerca de 30 anos depois de Argand, é que essas ideias foram aceitas. O reconhecimento a Argand foi póstumo.



Por exemplo, observe a representação geométrica dos seguintes números complexos: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2 + i$ e $z_5 = -2 + i$.

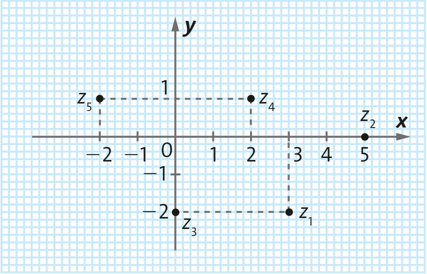
$z_1 = 3 - 2i \rightarrow (3, -2)$

$z_2 = 5 \rightarrow (5, 0)$

$z_3 = -2i \rightarrow (0, -2)$

$z_4 = 2 + i \rightarrow (2, 1)$

$z_5 = -2 + i \rightarrow (-2, 1)$



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observações:

1ª) Os números complexos reais pertencem ao eixo x, mantendo a correspondência segundo a qual para cada número real existe um ponto da reta.

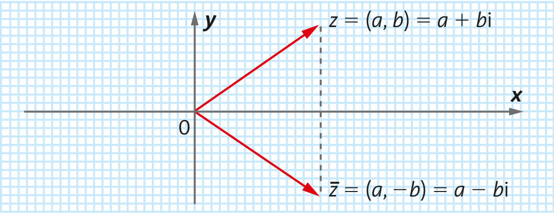
2ª) Os números imaginários puros pertencem ao eixo y.

3ª) Os demais números complexos ($a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de a e b.

4ª) Para cada número complexo existe um único ponto do plano e vice-versa.

Interpretação geométrica do conjugado

Geometricamente, o conjugado $\overline{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo x.



Exercícios resolvidos

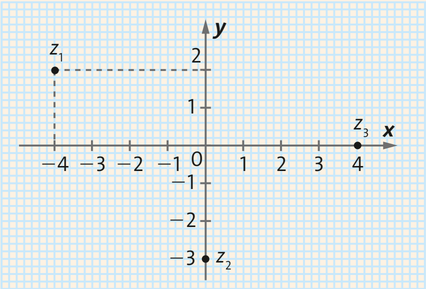
14. Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = 4$, localize, no plano complexo, os pontos correspondentes a cada número.

Resolução:

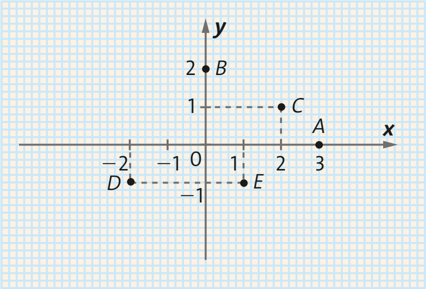
$z_1 = -4 + 2i \Rightarrow (-4, 2)$

$z_2 = -3i \Rightarrow (0, -3)$

$z_3 = 4 \Rightarrow (4, 0)$



15. Determine os números complexos correspondentes aos pontos A, B, C, D e E na figura abaixo.



Resolução:

$A(3, 0) \Rightarrow z = 3$

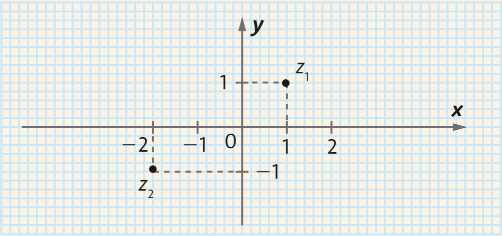
$B(0, 2) \Rightarrow z = 2i$

$C(2, 1) \Rightarrow z = 2 + i$

$D(-2, -1) \Rightarrow z = -2 - i$

$E(1, -1) \Rightarrow z = 1 - i$

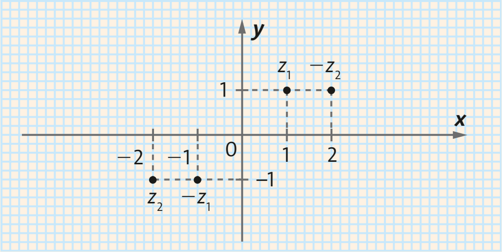
16. Dados os pontos correspondentes aos números complexos z_1 e z_2, descubra os pontos correspondentes aos números $-z_1$ e $-z_2$.



Resolução:

$P(1, 1) \Rightarrow z_1 = 1 + i \Rightarrow -z_1 = -1 - i \Rightarrow P'(-1, -1)$

$Q(-2, -1) \Rightarrow z_2 = -2 - i \Rightarrow -z_2 = 2 + i \Rightarrow Q'(2, 1)$



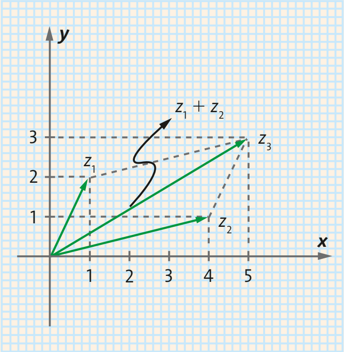
17. Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Resolução:

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem:



Observe que z_3 corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

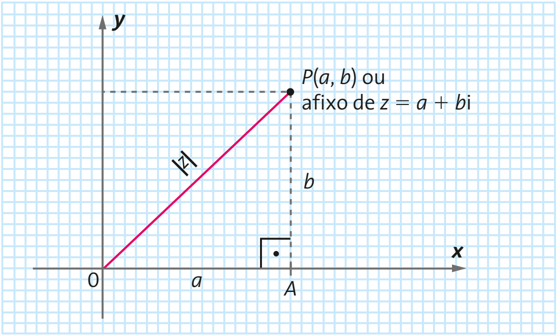
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

7 Módulo de um número complexo

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas *O* à imagem (ao afixo) de *z*.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OAP*, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observemos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes.

Então podemos dizer que, dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se **módulo** de *z* e indica-se por $|z|$ o número real positivo ou nulo dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observação: Uma conexão interessante com a Geometria analítica é que, pensando nos complexos *z* e *w* como pontos no plano, o **módulo** da diferença é a distância entre os dois pontos: $|z - w| = d(z, w)$.

Exercícios resolvidos

18. Determine o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = 3i$

c) $z = -1 - 2i$

d) $z = \frac{1}{2}$

e) $z = -3$

f) $z = 0$

Resolução:

a) Se $z = 2 + 3i$, então:

$|z| = |2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) Se $z = 3i$, então:

$|z| = |3i| = \sqrt{9} = 3$

c) Se $z = -1 - 2i$, então:

$|z| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

d) Se $z = \frac{1}{2}$, então:

$|z| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

e) Se $z = -3$, então:

$|z| = |-3| = 3$

f) Se $z = 0$, então:

$|z| = |0| = 0$

19. Descubra a distância do ponto $A(1, 2)$ ao ponto $B(5, -1)$.

Resolução:

1º processo:

$d(A, B) = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5$

2º processo:

$z = 1 + 2i$ e $w = 5 - i$

$z - w = -4 + 3i$

$d(A, B) = |z - w| = |-4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$

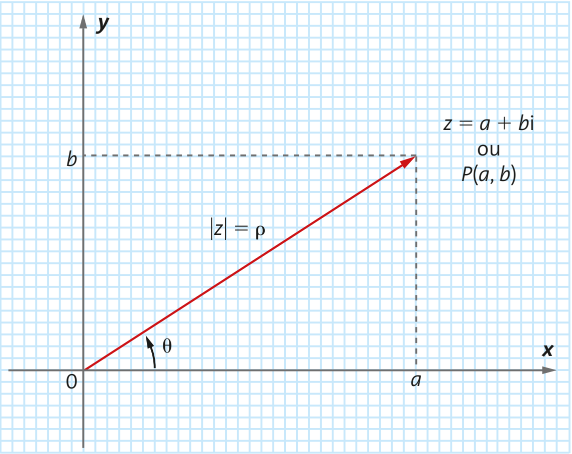
8 Forma trigonométrica dos números complexos

Sabemos que um número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto do plano, de coordenadas (a, b). Essas são as coordenadas cartesianas do ponto z. Veremos agora que esse mesmo ponto pode ser representado por suas **coordenadas polares**, que são:

1ª) o módulo do vetor $\overrightarrow{Oz}$, indicado por $|z|$ ou ρ, representando a distância do ponto P à origem do plano (supondo $|z| \neq 0$);

2ª) o ângulo θ, em que $0 \leqslant \theta < 2\pi$, que o vetor $\overrightarrow{Oz}$ forma com o eixo x. Esse ângulo θ é chamado **argumento** de z (ou **argumento principal** de z) e indicado por $\arg(z)$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Fique atento!
Devemos considerar θ a partir do eixo x, no sentido anti-horário.

$$z = a + bi,\ z \neq 0$$
$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\arg(z) = \theta$$

Já vimos em Trigonometria que:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \qquad (\text{com } 0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

Essas igualdades levam a:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \operatorname{sen}\theta\, i = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Portanto:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

que é chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** de z.

Exercícios resolvidos

20. Determine a representação geométrica e a forma trigonométrica do número complexo dado em cada item:

a) $z = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z = -1 + i$

c) $z = 2i$

d) $z = -3$

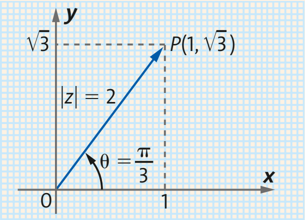
Resolução:

a) $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

Então:

$$|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$



Portanto, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

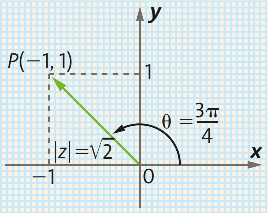
b) $a = -1$ e $b = 1$

Então:

$$|z| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) =$$

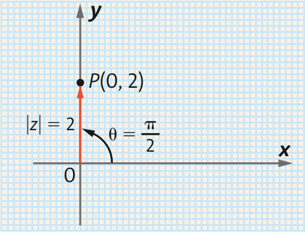
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

c) $a = 0$ e $b = 2$

Então:

$$|z| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

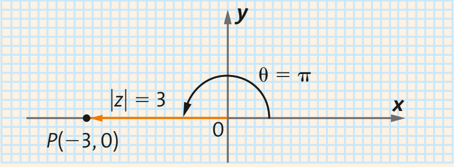
$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

d) $a = -3$ e $b = 0$

Então:

$$|z| = |-3| = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-3}{3} = -1 \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{0}{3} = 0 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = 3(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$$

21. Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 8\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

Resolução:

a) $$z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

b) $$z = 8\left[-\cos\frac{\pi}{6} + i\left(-\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 8\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -4\sqrt{3} - 4i$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 17, 20, 21, 24, 25 e 26 no Manual do Professor.

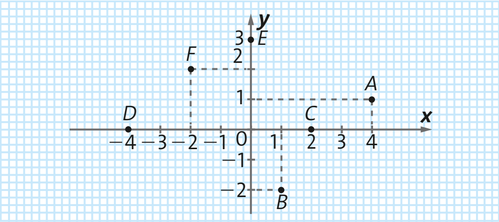
17. No caderno, em um mesmo plano complexo, localize os pontos correspondentes aos seguintes números complexos:

$z_1 = -3 + 3i$; $z_2 = 1 + 4i$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -4i$;

$z_5 = 2 - 3i$; $z_6 = 3$; $z_7 = -4$.

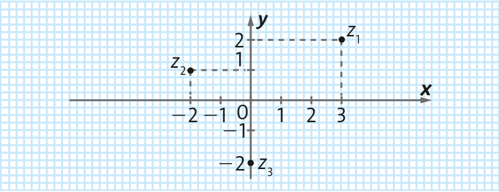
18. Escreva no caderno os números complexos correspondentes aos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* do plano:

$z_A = 4 + i$; $z_B = 1 - 2i$; $z_C = 2$; $z_D = -4$; $z_E = 3i$ e $z_F = -2 + 2i$



19. Dados os pontos correspondentes aos números complexos z_1, z_2 e z_3, descubra os pontos correspondentes aos números complexos $-z_1$, $-z_2$ e $-z_3$.

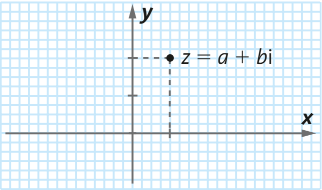
$-z_1 = (-3, -2)$; $-z_2 = (2, -1)$ e $-z_3 = (0, 2)$



20. No caderno, localize no plano complexo os números complexos dados abaixo e seus respectivos conjugados:

a) $z_1 = 1 + 3i$
c) $z_3 = 3i$
e) $z_5 = 3 - 2i$
b) $z_2 = -1 - i$
d) $z_4 = 3$

21. **DESAFIO** Copie no caderno o plano complexo a seguir e localize nele os números complexos $-z$, $\bar{z}$ e $-\bar{z}$.



22. Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 1 + i$ $\sqrt{2}$
b) $z = -3 - 2i$ $\sqrt{13}$
c) $z = -7$ 7
d) $z = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$ $\sqrt{5}$
e) $z = 3 + 4i$ 5
f) $z = 3i$ 3
g) $z = 3 + 4\sqrt{2}i$ $\sqrt{41}$
h) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ 2

23. Se $z_1 = 1 - 3i$ e $z_2 = 2 + 5i$, determinem:

a) $|z_1| + |z_2|$ $\sqrt{10} + \sqrt{29}$
b) $|z_1 z_2|$ $\sqrt{290}$
c) $|z_1 + z_2|$ $\sqrt{13}$
d) $|z_1||z_2|$ $\sqrt{290}$

24. No caderno, localizem graficamente o número complexo *z* tal que:

a) $|z| = 4$
b) $|z| > 4$
c) *z* é um imaginário puro e $|z| \geqslant 4$
d) $|z| \leqslant 2$
e) *z* é um imaginário puro e $|z| < 3$

Veja as respostas dos exercícios 25 e 26 na seção Respostas.

25. No caderno, dê a representação geométrica e a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) $\sqrt{3} + i$
b) $-\sqrt{3} + i$
c) $\sqrt{3} - i$
d) $-\sqrt{3} - i$

26. Escrevam no caderno a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) $6i$
b) $2 + 2i$
c) $-8\sqrt{3} + 8i$
d) 4
e) $2 - 2i$
f) -3
g) i

27. Escrevam no caderno a forma algébrica dos seguintes números complexos:

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ $z = \sqrt{3} + i$
b) $5(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0)$ $z = 5$
c) $\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$ $z = -i$
d) $4(\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$ $z = -4$
e) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica

Consideremos os números complexos z_1 e z_2, dados na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$$

Fique atento!
Na adição de arcos vale que:
$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$
$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$
Veja estas e outras relações trigonométricas no Capítulo 10.

O produto z_1z_2 é dado por:

$$z_1z_2 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)|z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) = |z_1||z_2|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) =$$

$$= |z_1||z_2|[(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) + i(\text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1)] =$$

$$= |z_1||z_2|[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto:

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Assim, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à primeira volta ($0 \leqslant \arg (z_1z_2) < 2\pi$).

Observação: A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual *basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos*, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos.

Dados os números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$
$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$

podemos obter o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, para $z_2 \neq 0$, assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)]$$

A demonstração dessa relação pode ser feita mostrando que o produto de

$\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)]$ por z_2 é igual a z_1.

Veja a demonstração no Manual do Professor.

Para refletir
Faça a demonstração mencionada.

Assim, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica, com o segundo número diferente de 0, é o número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à primeira volta $\left(0 \leqslant \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) < 2\pi\right)$.

Exercício resolvido

22. Sendo $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

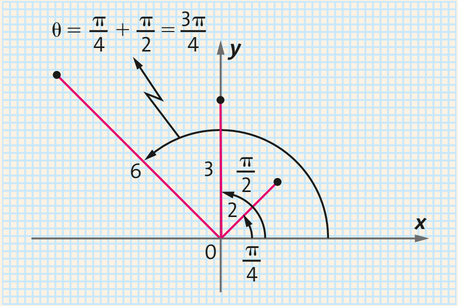
Resolução:

a) Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$z_1z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em z_1z_2 houve uma rotação positiva a z_1 de um ângulo igual ao ângulo de z_2. Ou seja, nesse caso houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a z_1. Como o argumento de z_1 era $\frac{\pi}{4}$ e z_1 recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto z_1 e z_2 passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo z_1z_2 é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$ ou $|z_1||z_2|$.

b) Substituindo z_1 e z_2 na fórmula dada, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

Você sabia?

$\frac{7\pi}{4}$ é o ângulo côngruo de $-\frac{\pi}{4}$ tal que $0 \leqslant \frac{7\pi}{4} < 2\pi$.

Potenciação de números complexos na forma trigonométrica – a primeira fórmula de De Moivre*

A potência z^n, $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{n \text{ fatores}}$.

Assim, se um número complexo z está escrito na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{\substack{\text{multiplicação de} \\ n \text{ fatores}}} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot ... \cdot |z|}_{\substack{\text{produto de} \\ n \text{ módulos}}}[\cos\underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{\substack{\text{soma de } n \\ \text{argumentos}}} + i \cdot \operatorname{sen}\underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{\substack{\text{soma de } n \\ \text{argumentos}}}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]} \text{ (fórmula de De Moivre)}$$

Para $n = 0$, temos:

$$z^0 = |z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)] = 1(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0) = 1(1 + 0) = 1$$

Assim, podemos dizer que a potência de ordem n de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n, reduzido à primeira volta ($0 \leqslant \arg(z^n) < 2\pi$).

---

* Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês.

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 24

23. Calcule a potência $(1 - i)^{10}$.

Resolução:

Uma das maneiras é utilizar as propriedades da potenciação ao elevar $(1 - i)$ à décima potência.

$$(1 - i)^{10} = \left[(1 - i)^2\right]^5 = \left[1 - 2i + i^2\right]^5 =$$
$$= \left[\cancel{1} - 2i - \cancel{1}\right]^5 = (-2i)^5 = (-2)^5 \cdot (i)^5 =$$
$$= -32i$$

Outra é desenvolver a expressão $(1 - i)^{10}$ usando o binômio de Newton. Uma terceira maneira é escrever o número complexo $(1 - i)$ na forma trigonométrica e usar a fórmula de De Moivre. Assim, temos: $z = 1 - i$, $a = 1$ e $b = -1$.

Então:

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{7\pi}{4}$$

Assim:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo:

$$z^{10} = (1 - i)^{10} =$$
$$= (\sqrt{2})^{10}\left[\cos\left(10 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(10 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

Mas:

$$(\sqrt{2})^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5$$

$$10 \cdot \frac{7\pi}{4} = \frac{70\pi}{4} = \frac{35\pi}{2}$$

$\dfrac{35\pi}{2}$ corresponde a oito voltas mais $\dfrac{3\pi}{2}$, isto é:

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2} = 8 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Ou seja, $\dfrac{35\pi}{2}$ é côngruo de $\dfrac{3\pi}{2}$.

Portanto:

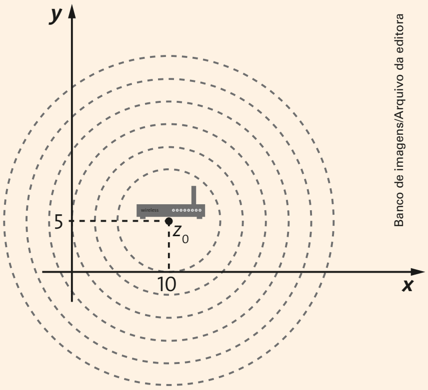
$$z^{10} = (1 - i)^{10} = 2^5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Na forma algébrica, temos:

$$z^{10} = (1 - i)^{10} = 32[0 + i(-1)] = 32 \cdot 0 - 32i = -32i$$

Resolvido passo a passo

24. (UFSM-RS) No plano complexo, o ponto z_0 representa o local de instalação de uma antena *wireless* na praça de alimentação de um *shopping*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos $z = x + yi$ que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação $|z - z_0| = 30$.

De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por:

a) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 900 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 775 = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 900 = 0$.
e) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 900 = 0$.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
São dados um gráfico que informa a posição da antena *wireless*, em coordenadas, e uma equação que representa o alcance máximo.

b) O que se pede?
Pede-se a equação da circunferência que é formada pelos pontos localizados no alcance máximo da antena.

2. Planejando a solução

Inicialmente, deve-se fazer uma representação das coordenadas de z_0 de forma “complexa”. Feito isso, deve-se lançá-lo na equação dada e executar a subtração. Posteriormente, deve-se utilizar um artifício matemático para elevar os termos do 1º membro da equação ao quadrado. Essa operação é fundamental para assemelhar a equação a uma que represente a circunferência.

3. Executando o que foi planejado

1º passo: formar z_0 a partir das coordenadas da antena

z_0 (10, 5)

$\therefore z_0 = 10 + 5i$

2º passo: executar a equação dada

$|z - z_0| = 30 \Rightarrow |x + yi - 10 - 5i| = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x - 10) + (y - 5)i| = 30$

3º passo: elevar os termos do primeiro membro da equação ao quadrado

$\sqrt{(x - 10)^2 + (y - 5)^2} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 - 900 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0 \rightarrow$ equação da circunferência.

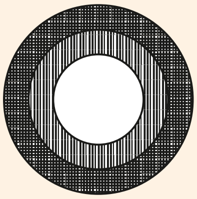
4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) O dono do *shopping* paga à empresa que lhe fornece sinal de internet de acordo com a intensão do sinal. Sabe-se que há três níveis de intensidade:

- 1º nível (mais intenso – compreende o primeiro terço do raio)
- 2º nível (sinal intermediário – anel que compreende o segundo terço do raio)
- 3º nível (sinal fraco – anel que compreende o último terço do raio)



(Taxa cobrada/m³)

▦ → Sinal fraco → R$ 1,00

▥ → Sinal intermediário → R$ 3,00

☐ → Sinal intenso → R$ 5,00

A partir das informações, quanto o *shopping* gasta com o serviço de internet? Considere $\pi = 3$. Gasta R$ 5 700,00 com o serviço de internet.

b) *Discussão em equipe*

A tecnologia vem avançando cada dia mais, e a cada evolução os aparatos tecnológicos vêm reduzindo de tamanho, e a transmissão de dados vem ocorrendo de forma surpreendente, inimaginável pela maioria da população há algumas décadas. Hoje é possível ter acesso à internet sem necessidade de fios, bem como recarregar um *smartphone* sem tê-lo plugado a uma tomada. Sendo assim, troque ideias com seus colegas sobre esse intenso processo de evolução tecnológica que vem ocorrendo e discutam sobre o seu reflexo para a sociedade como um todo. Tratem sobre a acessibilidade desses aparatos de acordo com as classes sociais. Eles melhoram ou pioram a desigualdade?

Exercícios

Veja a resposta do exercício 28 na seção Respostas.

28. Dados os números complexos $z = 6(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$ e $w = 3(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)$, calcule zw, w^2, $\frac{z}{w}$ e $\frac{w}{z}$.

29. Determine o número complexo z_1, sabendo que $z_2 = 10(\cos 20° + i \cdot \text{sen } 20°)$ e $z_1z_2 = 20\sqrt{3}\,(\cos 170° + i \cdot \text{sen } 170°)$.

29. $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

> **Fique atento!**
> Os números obtidos devem ter seus argumentos tal que $0 \leqslant \theta < 2\pi$ $(0° \leqslant \theta < 360°)$.

30. Calculem os valores das potências z^2, z^3 e z^9, sabendo que $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i, z^3 = -8$ e $z^9 = -512$

31. Usando a fórmula de De Moivre, calculem as potências:

a) $(1 - i)^3$ $-2 - 2i$

b) $\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^4$ $-8 - 8\sqrt{3}\,i$

32. Sabendo que $z_1 = 2(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$ e $z_2 = 3(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$, determinem:

a) z_1z_2 -6

b) $\frac{z_1}{z_2}$ $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

c) z_1^3 $8i$

d) z_2^{99} $3^{99}i$

Radiciação — raízes enésimas de números complexos

Assunto opcional

Dado um número complexo z e um número natural n, $n > 1$, definimos em $\mathbb{C}$:

Raiz enésima de z é um número complexo ω tal que $\omega^n = z$.

Exemplos:

a) $2, -2, 2i$ e $-2i$ são as raízes quartas do número complexo 16.
2, pois $2^4 = 16$
-2, pois $(-2)^4 = 16$
$2i$, pois $(2i)^4 = 16$
$-2i$, pois $(-2i)^4 = 16$
Há, portanto, em $\mathbb{C}$, quatro raízes quartas de 16.

b) i e $-i$ são as raízes quadradas do número complexo -1.
i, pois $i^2 = -1$
$-i$, pois $(-i)^2 = -1$
Há, portanto, em $\mathbb{C}$, duas raízes quadradas de -1.

c) 3 e -3 são as raízes quadradas do número complexo 9.
3, pois $3^2 = 9$
-3, pois $(-3)^2 = 9$
Há, portanto, em $\mathbb{C}$, duas raízes quadradas de 9.

d) $1, -1, i$ e $-i$ são as raízes quartas do número complexo 1.
1, pois $1^4 = 1$
-1, pois $(-1)^4 = 1$
i, pois $i^4 = 1$
$-i$, pois $(-i)^4 = 1$
Há, portanto, em $\mathbb{C}$, quatro raízes quartas de 1.

e) A única raiz quinta de 0 é 0, pois 0 é o único número complexo tal que $0^5 = 0$.
A pergunta então é: Quantas são as raízes enésimas de um número complexo $z \neq 0$ e como podemos determiná-las? Veremos isso com a **segunda fórmula de De Moivre**.

A segunda fórmula de De Moivre

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega|(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$$

de modo que $\omega^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números ω tal que:

$$[|\omega|(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)]^n = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$|\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha) = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Da igualdade:

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha) = z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

vem $|\omega|^n = |z|$, $\cos n\alpha = \cos\theta$ e $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\theta$.

De $|\omega|^n = |z|$, temos $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$ (sempre real e positivo).

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{(com } k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Mas, para que $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Assim, concluímos que:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$ (segunda fórmula de De Moivre)

para $k = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$

Após $k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos n raízes distintas.

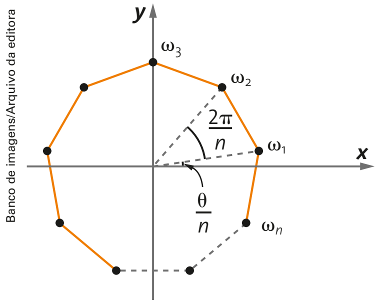
Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Assim, qualquer número complexo z, não nulo, admite n raízes enésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Geometricamente, as n raízes são vértices de um polígono regular de n lados.

Logo, sabendo uma delas e sabendo quantas são no total, é possível obter as $n - 1$ raízes desconhecidas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios resolvidos

25. Determine as raízes cúbicas de $-i$ e interprete-as geometricamente.

Resolução:

Escrevendo z na forma trigonométrica, temos:

$z = -i$

$a = 0$

$b = -1$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

Fique atento!

Números complexos da forma $z = ai$ têm argumento $\frac{\pi}{2}$ para $a > 0$ e $\frac{3\pi}{2}$ para $a < 0$.

Portanto:

$$z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, vem:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ (real positivo)

Como $n = 3$, então k poderá ser 0, 1 ou 2. Assim, temos:

- para $k = 0$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- para $k = 1$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- para $k = 2$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Observe que $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{4\pi}{6}$.

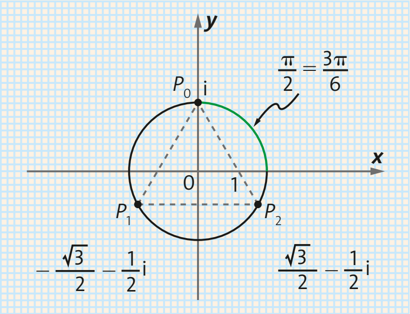
Assim, as raízes cúbicas de $-i$ são:

$$\omega_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$\omega_1 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega_2 = 1\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Interpretando geometricamente, as três raízes cúbicas estão sobre uma circunferência de raio $|\omega| = 1$ e dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{4\pi}{6}$ rad, formando um triângulo equilátero de vértices P_0, P_1 e P_2. Se calculássemos ω_3, encontraríamos $\omega_3 = \omega_0$ e P_3 coincidiria com P_0. E assim por diante: $P_4 \equiv P_1$, $P_5 \equiv P_2$, etc.



Banco de imagens/Arquivo da editora

26. Encontre as raízes quartas do número complexo $1 + i$.

Resolução:

$z = 1 + i$

$a = 1$

$b = 1$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Fique atento!

Para $a > 0$, temos:

$a + ai \rightarrow$ argumento $\frac{\pi}{4}$; $-a + ai \rightarrow$ argumento $\frac{3\pi}{4}$;

$-a - ai \rightarrow$ argumento $\frac{5\pi}{4}$; $a - ai \rightarrow$ argumento $\frac{7\pi}{4}$.

Portanto:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \Rightarrow \omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$$

Como $n = 4$, então k poderá ser 0, 1, 2 e 3. Assim:

- para $k = 0$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 0}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$

- para $k = 1$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{4} = \frac{9\pi}{16}$$

- para $k = 2$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} = \frac{\frac{17\pi}{4}}{4} = \frac{17\pi}{16}$$

- para $k = 3$:

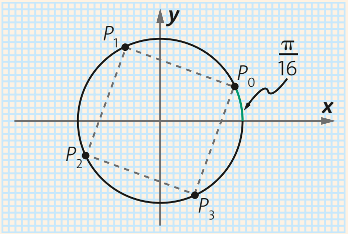
$$\frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{4} = \frac{25\pi}{16}$$

Observe que os argumentos $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}$ formam uma PA de razão $\frac{8\pi}{16}$. As raízes quartas de z são dadas por:

$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right) \qquad \omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right) \qquad \omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + \text{i}\cdot\text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right)$$

Geometricamente, as quatro raízes quartas estão sobre uma circunferência de raio $\sqrt[8]{2}$ e dividem a circunferência em quatro arcos congruentes a $\frac{8\pi}{16}$ rad, formando um quadrado de vértices P_0, P_1, P_2 e P_3.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

Veja as respostas dos exercícios 33 a 35 na seção Respostas.

33. Determinem as raízes quadradas dos seguintes números complexos e deem sua representação geométrica:

a) -4
b) $1 - \text{i}$

34. Determinem as raízes quartas dos seguintes números complexos e deem sua representação geométrica:

a) -1
b) $\sqrt{3} + \text{i}$

35. Encontrem as raízes cúbicas do número complexo 125 e deem sua representação geométrica.

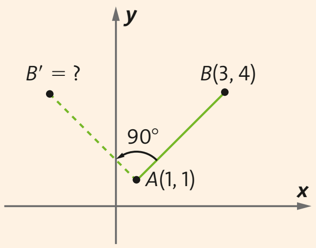
9 Aplicação à Geometria

Uma aplicação importante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é possibilitar a rotação de coordenadas no plano. Existem algumas aplicações de matrizes à computação gráfica, sendo uma delas a rotação de pontos em relação à origem. Esse mesmo papel exercido por uma matriz de rotação pode ser desempenhado pelos números complexos, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um ponto (a, b) deve ser rotacionado em relação à origem, em α graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo $a + bi$ pelo complexo $1(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$.

Exercícios resolvidos

27. Encontre as novas coordenadas do segmento de reta AB, com $A(1, 1)$ e $B(3, 4)$, após uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto A.

Resolução:



O ponto $A(1, 1)$ e o ponto $B(3, 4)$ representam geometricamente os complexos $w = 1 + i$ e $z = 3 + 4i$. Como a rotação é em torno do ponto A, devemos rotacionar apenas o número complexo t que equivale à diferença $z - w$ (no caso, $t = z - w = 2 + 3i$) e depois somá-lo novamente com w. Assim, para haver uma rotação de 90° no sentido anti-horário precisamos multiplicar por i e depois somar $t' + w$, pois a rotação é em torno de w:

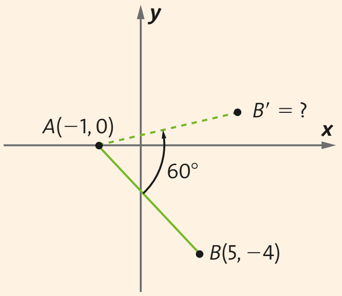
$t' = (2 + 3i) \cdot i = -3 + 2i$

$t' + w = -3 + 2i + 1 + i = -2 + 3i$

Assim, as novas coordenadas do ponto B são -2 e 3, ou seja, o ponto $A(1, 1)$ se mantém após a rotação e $B'(-2, 3)$.

28. Encontre as novas coordenadas do segmento de reta AB, com $A(-1, 0)$ e $B(5, -4)$, após uma rotação de 60° no sentido anti-horário em relação ao ponto A.

Resolução:



O complexo responsável pela rotação pedida é $1(\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$A(-1, 0) = w = -1$

$B(5, -4) = z = 5 - 4i$

O complexo t que representa AB é $(5 - 4i) - (-1) = 6 - 4i$.

Efetuando a rotação de t, temos:

$$t' = (6 - 4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= 3 + 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i$$

Então:

$$w + t' = -1 + \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i =$$

$= \left(2\sqrt{3} + 2\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)$, ou seja,

$B'\left(2\sqrt{3} + 2, 3\sqrt{3} - 2\right)$

O ponto A se mantém $A(-1, 0)$, após a rotação.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercício

Veja as respostas deste exercício na seção Respostas.

36. Qual número complexo, na forma algébrica, deve ser usado para se conseguir uma rotação de:

a) 45° anti-horário?

b) 180° anti-horário?

c) 90° horário?

Leitura

Um pouco mais de História

Apesar de encontrarmos menções a uma raiz quadrada de número negativo em autores da Antiguidade, foi apenas no século XVI, com os matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente.

Em 1539, Girolamo Cardano convenceu Niccolò Fontana Tartaglia a revelar seu método de resolver equações cúbicas, sob o juramento de que não o publicaria antes que Tartaglia o fizesse. Ao começar a estudar a fórmula de Tartaglia, Cardano deparou com raízes de números negativos. Escreveu para Tartaglia, relatando suas dificuldades com tais raízes, mas Tartaglia, arrependido de ter revelado sua fórmula, recusou-se a ajudá-lo. Provavelmente Tartaglia não havia entendido que os números complexos estavam surgindo na Matemática.

Em 1543, Cardano descobriu, ao conhecer o trabalho de Scipione del Ferro, que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver as equações cúbicas. Na óptica de Cardano, isso o desobrigava de seu juramento. Assim, publicou em 1545 sua obra *Ars Magna*, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas, além de todo o seu trabalho produzido após seu conhecimento da fórmula de Tartaglia. Cardano e Del Ferro foram creditados pela descoberta, e Tartaglia ficou furioso (hoje em dia a fórmula que resolve as equações cúbicas é chamada, em muitos países, fórmula de Cardano-Tartaglia).

Rafael Bombelli estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos irredutíveis das equações cúbicas, que levavam a raízes de números negativos. Foi o primeiro matemático a definir as regras de adição e multiplicação para raízes de números negativos. Com suas regras, a fórmula de Cardano-Tartaglia funcionava em qualquer caso, o que o deixava seguro de seus resultados. Foi o primeiro a dar importância aos números complexos.

Cardano não trabalhava com a notação $\sqrt{-15}$, nem Bombelli com $\sqrt{-n}$. Ao longo dos anos, cada matemático que tratava a questão o fazia de um modo diferente. Coube ao suíço Leonhard Euler, em um trabalho de 1777, mas só publicado em 1794, definir $\sqrt{-1}$ como sendo i, de forma que $i^2 = -1$ (como ele mesmo escreveu). Essa mesma notação foi depois usada pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss, em 1801, e essa notação acabou tornando-se padrão.

Em 1749, Euler (que já havia usado i para uma quantidade imaginária, mas sem definir seu significado, e até então só trabalhava com $\sqrt{-1}$) mostrou que, se $a + b\sqrt{-1}$ for raiz de uma equação, $a - b\sqrt{-1}$ também será. Mesmo assim, como a maioria até então, Euler ainda era reticente ao trabalhar com os números complexos.

A grande obra a favor dos números complexos apareceu em 1831, na qual Gauss inventou o termo "números complexos". Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. Gauss já visualizava os números complexos dessa forma desde 1811. Antes dele, matemáticos como o suíço Jean Robert Argand e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam escrito sobre a representação geométrica dos complexos no plano, porém a pouca representatividade desses matemáticos fez com que seus trabalhos não alcançassem a notoriedade merecida na época.

Finalmente, em 1837, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) galgou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (*a*, *b*) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

Pensando no Enem

Matriz do Enem: H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

1. Leia o trecho da letra da música a seguir e observe a ilustração.

O Segundo Sol

Cássia Eller

Quando o segundo sol chegar
Para realinhar as órbitas dos planetas
Derrubando com assombro exemplar
O que os astrônomos diriam
Se tratar de um outro cometa

Quando o segundo sol chegar
Para realinhar as órbitas dos planetas
Derrubando com assombro exemplar
O que os astrônomos diriam
Se tratar de um outro cometa

Não digo que não me surpreendi
Antes que eu visse você disse
E eu não pude acreditar
Mas você pode ter certeza

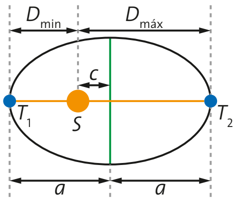
De que seu telefone irá tocar
Em sua nova casa
Que abriga agora a trilha
Incluída nessa minha conversão

Eu só queria te contar
Que eu fui lá fora
E vi dois sóis num dia
E a vida que ardia sem explicação
[...]

Fonte: letras.mus.br. Disponível em: <http://letras.mus.br/cassia-eller/12570/>. Acesso em: 11 maio 2016.

Considerando que o Sol está no ponto *S* indicado na ilustração, sendo a origem do plano cartesiano o centro da elipse, a excentricidade da órbita elíptica do planeta Terra, $e = 0{,}017$, a distância média da Terra até o Sol, 150 (em milhões de quilômetros), e que o segundo sol mencionado na música deverá ficar no outro foco da elipse, então, ele estaria posicionado, aproximadamente, em:

a) (−150; 0)
b) (−2,5; 0)
c) (0; 2,5)
d) (150; 0)
x e) (2,5; 0)

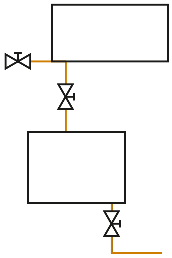


Fique atento!
Esta figura não está representada em proporção e a excentricidade está exagerada para melhor visualização.

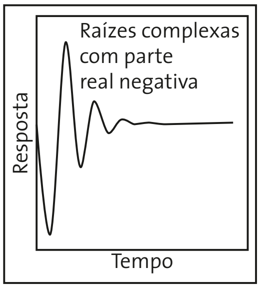
Matriz do Enem: H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

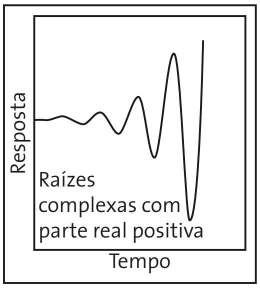
2. Leia o texto a seguir sobre uma das aplicações de números complexos.

Uma das aplicações está na **Engenharia de Controle**. Por exemplo, num sistema de controle da quantidade de água e da taxa de saída. Existe uma válvula que controla a taxa de entrada da água num tanque e existe uma evasão para outro tanque, como mostra o desenho ao lado.



O que os números complexos têm a ver com isso? Para controlar o nível de água de cada tanque existe um modelo matemático que faz esse controle, abrindo e fechando as válvulas através de um sistema elétrico que processa segundo esse modelo matemático. Dependendo do comportamento da função modelo, temos as duas opções graficamente:





Ou seja, se tivermos o número complexo com a parte real negativa, conforme aumenta o tempo, a resposta da função vai se estabilizando, convergindo para um valor. Se a parte real for positiva, conforme aumenta o tempo a resposta da função oscila e diverge. Também podemos aplicar este modelo para controlar temperaturas de tanques, fornos, ou seja, quando envolve dois tanques e tem algo para ser controlado, temos um sistema de 2ª ordem e ele vai ter os números complexos.

Fonte: Matemática Complexa. Disponível em: <https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/aplicacao-dos-numeros-complexos/engenharia-de-controle>. Acesso em: 11 maio 2016.

A alternativa em que temos dois números complexos e um deles corresponderá a uma função que vai se estabilizando, convergindo para um valor, e o outro, a uma função que vai divergindo, respectivamente, é:

a) $z_1 = -5 + 4i$; $z_2 = -7 + i$
b) $z_1 = 2i$; $z_2 = -8 + 9i$
x c) $z_1 = -6 - 3i$; $z_2 = 7 + 5i$
d) $z_1 = 5 - 4i$; $z_2 = 8 + 6i$
e) $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 5$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Ufac) Considere x um número real. Dados os números complexos $w_1 = (x - 7)i$ e $w_2 = -2 + (x + 7)i$, o único caso em que ocorre a igualdade $|w_1| = |w_2|$ é quando:

a) $x = 0$.

b) $x = \frac{1}{7}$.

x c) $x = -\frac{1}{7}$.

d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. (Uepa) O matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) foi um dos mais profícuos matemáticos de todos os tempos. Dentre suas contribuições tem-se $e^{xi} = \cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x)$, conhecida como relação de Euler. Nessa relação, quando x for igual a π obtém-se $e^{\pi i} + 1 = 0$, identidade que relaciona alguns dos mais importantes números da matemática. O módulo de $e^{(\pi/4)i}$ é:

a) 0

b) 1/2

x c) 1

d) 3/2

e) 2

Região Nordeste

3. (Unifacs-BA) Sobre o número complexo z dado pelo determinante da matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & i^{2\,012} \\ i & 1 \end{pmatrix}$, é correto afirmar-se que:

01. $|z| = 4$.

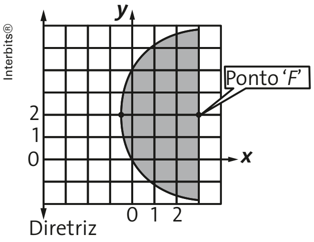
02. $|z| = 9$.

03. é um imaginário puro.

04. tem argumento principal $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

x 05. tem argumento principal $\theta = \frac{11\pi}{3}$.

4. (Uema) Uma família da cidade de Cajapió – MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida a seguir, coberta com uma folha quadriculada. Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será:



Interbits®

x a) $(y - 2)^2 = 7(2x + 1)$.

b) $(y + 2)^2 = 7(2x + 1)$.

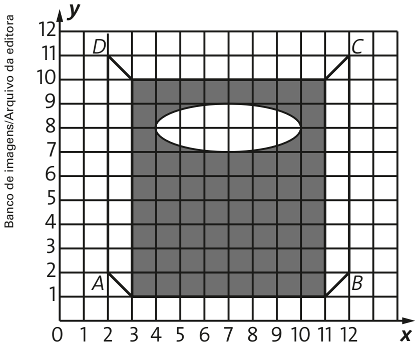
c) $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$.

d) $(y - 2)^2 = -7\left(2x - \frac{1}{7}\right)$.

e) $(y + 3)^2 = \frac{12}{7}(x - 1)$.

Região Centro-Oeste

5. (ESCS-DF) A figura a seguir ilustra, no sistema de coordenadas xOy, alguns pontos relativos ao esboço de um biombo de chumbo usado para proteção durante as seções de raio X. O biombo apresenta uma abertura na forma de elipse, onde será colocado um visor de vidro.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere que cada ponto (x, y) do sistema de coordenadas apresentado seja identificado por um número complexo $z = x + iy$, em que i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Nessa situação, se os números complexos z_A e z_C correspondem, respectivamente, aos pontos A e C, então a relação $\frac{z_A}{z_C}$ é igual a:

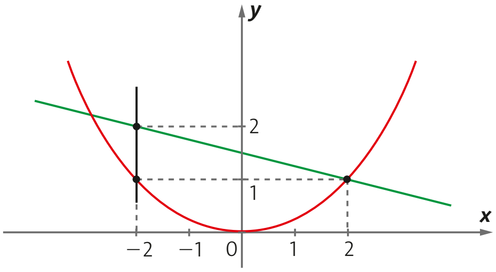
a) $\frac{66 - 2i}{265}$.

b) $\frac{2 - 23i}{23}$.

c) $\frac{33 + 2i}{23}$.

x d) $\frac{46 + 2i}{265}$.

6. (UFG-GO) A região do plano cartesiano, destacada na figura abaixo, é determinada por uma parábola, com vértice na origem, e duas retas.



Esta região pode ser descrita como o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, satisfazendo:

x a) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $\frac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$.

b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $-\frac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$.

c) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $4x^2 \leqslant y \leqslant -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$.

d) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $-4x^2 \leqslant y \leqslant -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$.

e) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $\frac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$.

Região Sudeste

7. (UPM-SP) Dadas as cônicas de equações:

(I) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ e
(II) $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$,

indique a alternativa **INCORRETA**.

a) Os gráficos de (I) e (II) são, respectivamente, uma circunferência e uma elipse.

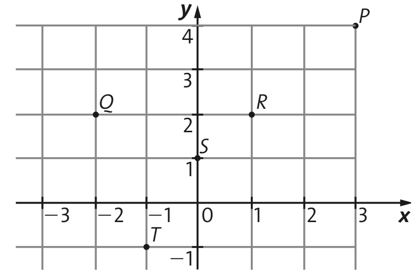
b) As duas cônicas têm centro no mesmo ponto.

x c) As duas cônicas se interceptam em dois pontos distintos.

d) O gráfico da equação (I) é uma circunferência de raio 3.

e) O gráfico da equação (II) é uma elipse com centro $C = (1, -4)$.

8. (Unifev) Considere o plano complexo bem como a representação dos afixos de cinco números complexos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sejam os números complexos $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 1 + 5i$ e $z_3 = -1 + 3i$. O afixo do número complexo $(z_1 + z_2 + z_3)^2$ é:

a) *R*.

b) *S*.

c) *Q*.

d) *T*.

x e) *P*.

Região Sul

9. (Udesc) A área delimitada por uma elipse cuja equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é dada por $A = ab\pi$. Então, a área da região situada entre as elipses de equações $16x^2 + 25y^2 = 400$ e $16x^2 + 9y^2 = 144$ é:

a) 12π u.a.

b) 20π u.a.

x c) 8π u.a.

d) 256π u.a.

e) π u.a.

10. (UEL-PR) Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

(Adaptado de: CARNEIRO, J. P. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*. 2004. v. 55. p. 18.)

Indique a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos $P(-3, 4)$ e $Q(2, -3)$ representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

a) $-18 + 17i$

b) $-6 - 12i$

c) $-1 + i$

d) $5 + 7i$

x e) $6 + 17i$