6430300269 นางสาว ญาณิศา แสงจำนงค์

6. X,Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน มี PDF ดังฟังก์ชัน

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

จงหา

ก. P[X > Y]

ข. $r_{X,Y}$

ค. Cov[X,Y]

$$f_{x,y} = f_{x}(x) \cdot f_{y}(y)$$

$$= 2x \cdot 2y$$

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ก. $P[X > y]$

$$P[X>y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 2xy^2 \Big|_0^x dx$$

$$= (2x \cdot x^2) - (2x \cdot 0^2)$$

$$= 2x^3$$

$$= \int_0^1 2x^3\,dx$$

$$= \int_0^1 2x^3\,dx$$

$$= \frac{x^4}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1^4}{2} - \frac{0^4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P[X>y] = \frac{1}{2}$$ ✱

ข. $r_{x,y}$

$$r_{x,y} = E[xy] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{x,y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^2 xy \cdot 4xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^2 4x^2y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x^2y^3}{3}\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{32x^2}{3}\,dx$$

$$= \frac{32x^3}{9}\Big|_0^1$$

$$\therefore r_{x,y} = E[xy] = \frac{32}{9}$$ ✱