矩阵理论学习笔记（二）

酉空间的分解与投影

零空间（N(A)）

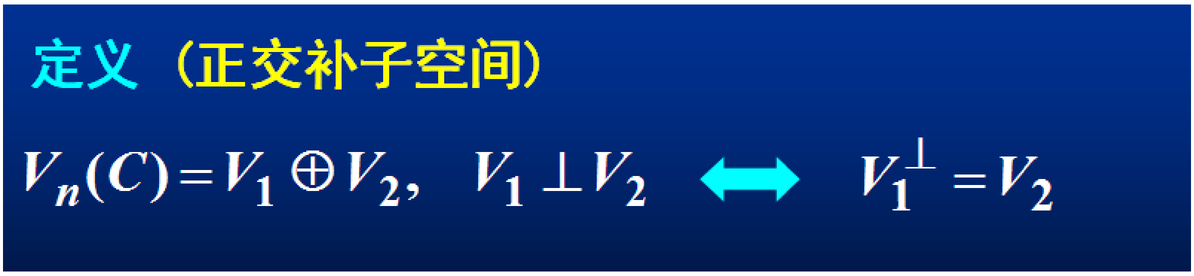
即$Ax=0$的解构成的空间，由于x本质是对A列向量的线性组合，A一共有n个列向量，所以零空间是R^n的子空间。矩阵A秩为r时，自由列为$n-r$列，对应$n-r$个自由变元，赋值后就构成了零空间的$n-r$个基向量。维数为$n-r$。

酉空间定义

欧几里得空间就是定义了内积的实线性空间，**而酉空间是欧几里得空间的定义推广到复线性空间。**

正交补子空间

说明：$V_n(C)$表示酉空间，n表示维数，C是复数，表示复数域内的n维空间，即酉空间。



详细描述：一个空间V的子空间V_1和V_2不仅要满足直和的关系，还要相互正交。**这样的空间称V_2为V_1的正交子补空间**，简称**正交补**。

回顾：正交补表示空间V中的向量x使得向量x与子空间V_1中的每个向量内积为0，相互正交，由所有x组成的向量空间称V_1的**正交补空间。**

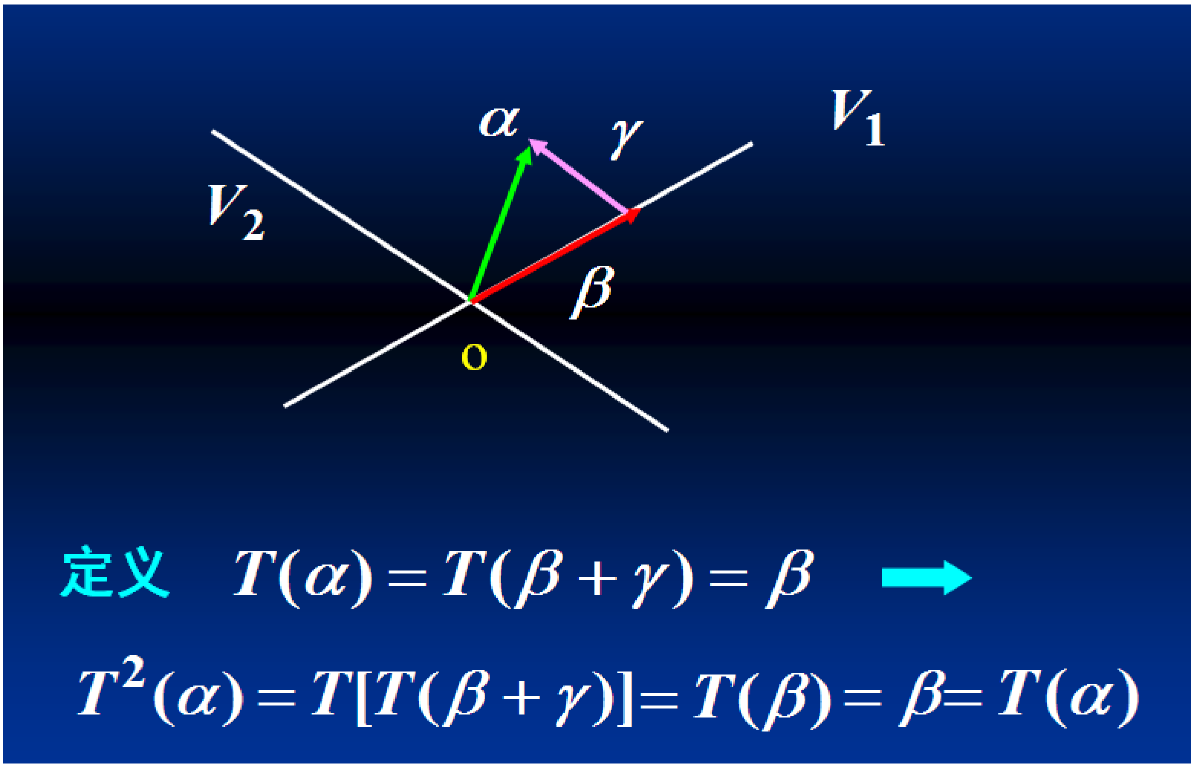
拓展：正交补分解实际上就是在分正交基，直和分解实际上就是在分解基向量。

定理：$V_n(C)$的任意子空间V_1都有唯一的正交补。

投影

具有下列性质的变换我们称之为**线性变换**：

$$\begin{aligned} T(\alpha+\beta)&=T(\alpha)+T(\beta) \\ T(k\alpha)&=kT(\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

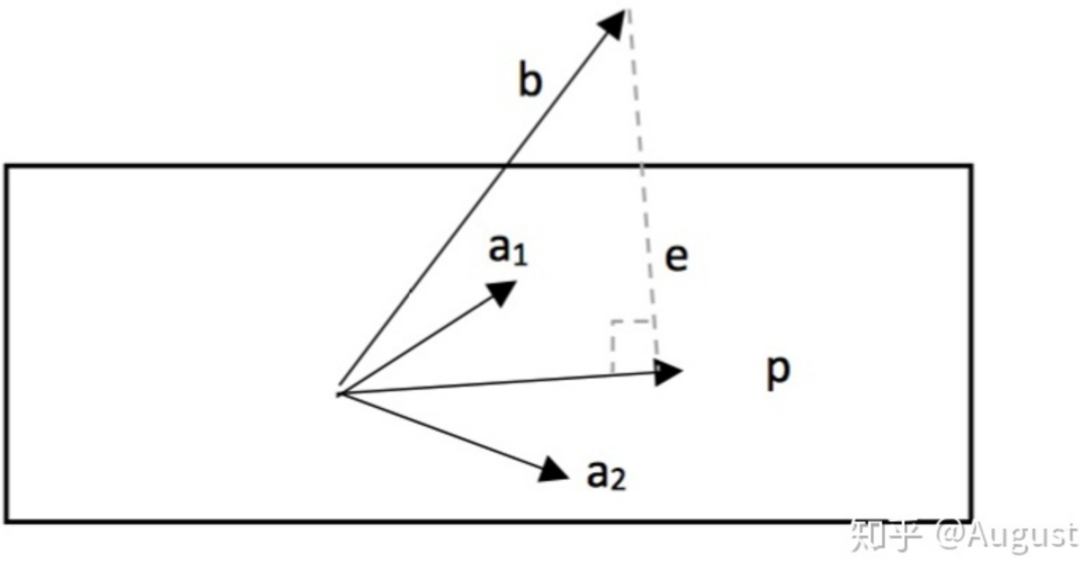


几何上，T把平面上的点沿着坐标轴V_2的方向投影到坐标轴V_1上，因此，T是限制V_1上的恒等变换，具有$T^2=T$的性质。

投影：$T^2=T$等价于T是$V_n(C)$上的投影。

投影T的值域表示为$R(T)$，投影T的核（或者零空间）表示为$N(T)$。我们有

$$V_n(C)=R(T)\oplus N(T) \tag{2}$$



投影矩阵

假设平面的一组基为a_1,a_2，则投影向量$p=x_1a_1+x_2a_2$，即$p=Ax$，其中，$A=[\,a_1 \quad a_2\,]$，$x=[\,x_1 \quad x_2\,]$。

由$e=b-Ax$和$e\perp A$得到

$$\begin{aligned} A^Te=0 \\ A^T(b-Ax)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

解得

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb \, p = Ax = A(A^TA)^{-1}A^Tb \tag{4}$$

因此，投影矩阵为$A(A^TA)^{-1}A^T$，这里$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$，表示两个基向量构成的矩阵，不可逆。

拓展

最小二乘法与投影的关系

假设三个点$(1,1),(2,2),(3,2)$，求拟合直线，假设拟合直线为$b = C + Dt$，代入三个点的方程为

$$\begin{cases} C + D & = 1 \\ C + 2D & = 2 \\ C + 3D & = 2 \end{cases} \tag{5}$$

转化为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

即方程$Ax = b$无解，但是采用投影来拟合，$A^TAx = A^Tb$有解，于是两边同乘A^T后求解，即得到参数值，为最小二乘法的核心方程。

附录

4个基本子空间

设矩阵A大小为$m \times n$，

行空间$C(A^T)$

大小为R^n的子空间，由所有行的线性组合构成，维数为r。

列空间$C(A)$

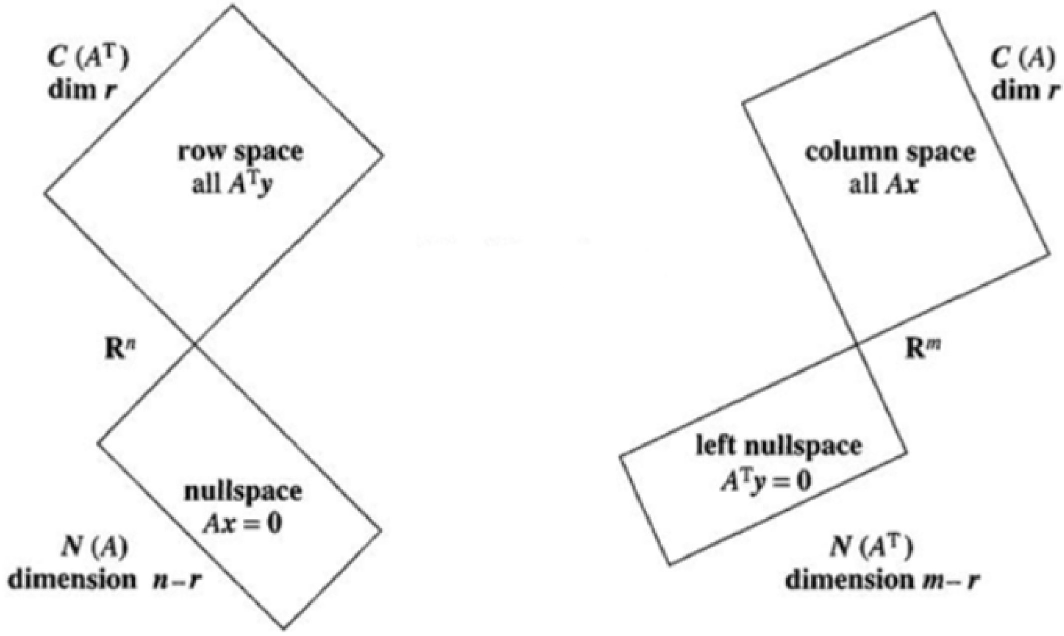
大小为R^m的子空间，由所有列的线性组合构成，维数为r。

零空间$N(A)$

大小R^n的子空间，由所有$Ax = 0$的解的线性组合构成，维数为$n - r$。

左零空间$(N(A^T))$

大小为R^m的子空间，由所有$A^Ty = 0$或者$y^TA = 0^T$的解的线性组合构成，维数为$m - r$。


$C(A^T)$
dim r
row space
all A^Ty
$\mathbf{R}^n$
nullspace
$Ax = 0$
$N(A)$
dimension $n-r$
$C(A)$
dim r
column space
all Ax
$\mathbf{R}^m$
left nullspace
$A^Ty = 0$
$N(A^T)$
dimension $m-r$