

矩阵理论学习笔记(一)

线性代数基础

线性空间与子空间

如果数集 P 中任意两个数做某一个运算之后结果仍然在 P 中，我们就称作数集 P 对这个运算是封闭的。

加减乘除运算以及他们的线性组合封闭的数集 P 称为**数域**。

线性空间的定义

1、什么是线性空间？

设 V 是一非空集合， P 是一个数域 在 V 中定义加法：
 $v = \alpha + \beta$ ；在 V 与 P 之间定义数量乘法： $\delta = k\alpha$ 。如果
加法与数量乘法满足

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$5) 1\alpha = \alpha$$

$$2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$6) k(l\alpha) = (kl)\alpha$$

$$3) \exists 0 \in V, \forall \alpha \in V, \text{有 } \alpha + 0 = \alpha$$

$$7) (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$$

$$4) \forall \alpha \in V, \exists \beta \in V, \text{s.t. } \alpha + \beta = 0$$

$$8) k(\alpha + \beta) = k\alpha + l\beta$$

则 V 称为数域 P 上的线性空间。

一个线性空间的一组基就是该线性空间的一组极大无关组，常记作 $\dim V = n$ 。

3. 线性空间的基和维数

定义：在 V 中有 n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ，而
 V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关，则称 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 V
的一组基， n 就是线性空间的维数。

一个线性空间是否是另一个线性空间的子空间只需证明加法封闭性和数乘封闭性。

证明：全体与 A 可交换的矩阵组成一个子空间。

平凡子空间：空间 V 的平凡子空间指 0 空间和 V 空间本身，其他维数的空间都是非平凡子空间，即从 1 维到 $n-1$ 维的空间都是非平凡子空间。

维数定理

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间，则，

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \quad (1)$$

直和

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间，若对 $\forall \alpha \in V_1 + V_2$,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 (\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2) \quad (2)$$

且是唯一的，这个和 $V_1 + V_2$ 就称为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$.

Tips:判断是否是直和的方式为 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.