CARLOS A. CALLIOLI
Prof. Titular — Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)

HYGINO H. DOMINGUES
Prof. Adjunto — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas — UNESP (Rio Preto)

ROBERTO C. F. COSTA
Prof. Livre-Docente — Instituto de Matemática e Estatística — USP

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

6ª edição reformulada

12ª reimpressão

ATUAL EDITORA

ÍNDICE

1ª PARTE: ÁLGEBRA LINEAR

Capítulo 4 — Transformações Lineares

Capítulo 5 — Matriz de uma Transformação Linear

Capítulo 6 — Espaços com Produto Interno

Capítulo 7 — Determinantes

Capítulo 8 — Formas Bilineares e Quadráticas Reais

2ª PARTE: APLICAÇÕES

1ª PARTE:

ÁLGEBRA LINEAR

CAPÍTULO 1

Sistemas Lineares — Matrizes

1. SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo procederemos inicialmente a um estudo dos sistemas lineares sobre $\mathbb{R}$. Não nos moverá aqui nenhuma preocupação de formalismo ou rigor excessivos. Além disso limitar-nos-emos a ver sobre o assunto apenas o que é necessário para desenvolver os capítulos posteriores. De uma maneira geral este capítulo 1 constitui apenas um pré-requisito para o restante deste livro.

Definição 1 – Dados os números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ $(n \geqslant 1)$, à equação

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$$

onde os x_i são variáveis em $\mathbb{R}$, damos o nome de *equação linear sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$*.

Uma *solução* dessa equação é uma seqüência de n números reais(*) (não necessariamente distintos entre si), indicada por $(b_1, \ldots, b_n)$, tal que

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \beta$$

é uma frase verdadeira.

Exemplo – Dada a equação: $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, a terna ordenada $(1, 1, 0)$ é uma solução dessa equação pois $2 \cdot 1 - 1 + 0 = 1$ é verdadeira.

Definição 2 – *Um sistema de m equações lineares com n incógnitas* $(m, n \geqslant 1)$(**) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:

$$S: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

(*) Também chamada *n-upla* de números reais.

(**) Se m = n simplesmente *sistema linear de ordem n*.

Uma *solução* do sistema acima é uma n-upla $(b_1, \ldots, b_n)$ de números reais que é solução de *cada uma* das equações do sistema.

Exemplo — Dado o sistema

$$S: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

uma solução de S é (0, 3, 4). Notemos que essa solução não é única: a terna $\left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0\right)$ também é solução de S.

Se, no sistema S, tivermos $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, o sistema S será *homogêneo.* A n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ é solução de S neste caso e por isso todo sistema homogêneo é compatível, de acordo com a definição 3 a seguir. A solução $(0, 0, \ldots, 0)$ chama-se *solução trivial* do sistema homogêneo.

Definição 3 — Dizemos que um sistema linear S é *incompatível* se S não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado *compatível determinado.* Se um sistema linear S admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de *compatível indeterminado.*

Exemplos

1) Um sistema do tipo

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_1 + \ldots + 0x_n = \beta_i \quad (\beta_i \neq 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

é necessariamente incompatível: como nenhuma n-upla é solução da equação i-ésima, então nenhuma n-upla é solução do sistema.

2) Um sistema do tipo

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = \beta_1 \\ \quad x_2 \qquad\qquad = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad x_n = \beta_n \end{cases}$$

é compatível determinado e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é a sua solução única.

3) O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

é indeterminado pois, conforme vimos atrás, as ternas (0, 3, 4) e $\left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0\right)$ são soluções deste sistema. Conforme veremos, existem infinitas soluções deste sistema. Tente achar uma.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Interessa-nos considerar os sistemas que podem ser obtidos de S de uma das seguintes maneiras:

(I) *Permutar* duas das equações de S. É evidente que se S_1 indicar o sistema assim obtido, então toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

(II) *Multiplicar* uma das equações de S por um número real $\lambda \neq 0$. Indicando por S_1 o sistema assim obtido mostremos que toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

Devido a (I) podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira. Como as demais equações de S e S_1 coincidem basta verificar nossa afirmação quanto à primeira equação.

Se $(b_1, \ldots, b_n)$ é uma solução de S (conforme definição 2), então:

$$\alpha_{11}b_1 + \ldots + \alpha_{1n}b_n = \beta_1 \qquad (1)$$

Multiplicando por λ esta igualdade obteremos:

$$(\lambda\alpha_{11})b_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{1n})b_n = \lambda\beta_1 \qquad (2)$$

o que mostra que $(b_1, \ldots, b_n)$ é também solução da primeira equação de S_1.

Por outro lado, se $(b_1, \ldots, b_n)$ é solução de S_1, então a igualdade (2) é verdadeira. Dividindo (2) por λ obtemos (1). Portanto $(b_1, \ldots, b_n)$ pertence ao conjunto das soluções de S.

(III) *Somar* a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real. Deixamos como exercício a verificação de que o sistema:

$$S_1: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n = \beta_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\lambda\alpha_{i1} + \alpha_{j1})x_1 + \dots + (\lambda\alpha_{in} + \alpha_{jn})x_n = \lambda\beta_i + \beta_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

assim obtido e o sistema S ou são ambos incompatíveis ou admitem ambos as mesmas soluções. Sugerimos ao leitor que faça alguns casos particulares antes de tentar o caso geral.

Definição 4 – Dado um sistema linear S, uma qualquer das modificações explicadas acima em (I), (II) e (III) que se faça com esse sistema recebe o nome de *operação elementar com S.* Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é *equivalente* a S. Notação: $S_1 \sim S$. É fácil ver que para a relação $\sim$ assim definida valem as seguintes propriedades:

(a) $S \sim S$ (reflexiva);

(b) $S_1 \sim S \Longrightarrow S \sim S_1$ (simétrica);

(c) $S_1 \sim S$ e $S \sim S_2 \Longrightarrow S_1 \sim S_2$ (transitiva).

Convém frisar, por último, que em virtude do que já vimos neste parágrafo, se $S_1 \sim S$, então toda solução de S é solução de S_1 e vice-versa. Em particular, se S_1 é incompatível, o mesmo acontece com S.

Desta forma criamos um mecanismo extremamente útil para a procura de soluções de um sistema linear S. Procuramos sempre encontrar um sistema linear equivalente a S e que seja "mais simples". Veremos um exemplo. Consideremos o sistema:

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Para estudar este sistema deve-se aplicar a ele uma série de operações elementares visando fazer com que o número de coeficientes iniciais nulos seja maior em cada equação (a partir da segunda) do que na precedente. Vejamos como se pode fazer isso.

$$\begin{cases} x - \ y + \ z = 1 \\ 2x - \ y + \ z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \overset{*}{\sim} \begin{cases} x - y + z = \ \ 1 \\ \quad\ \ y - z = \ \ 2 \\ \ \ - y + z = -1 \end{cases} \overset{**}{\sim} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad\ \ y - z = 2 \\ \qquad\quad\ 0 = 1 \end{cases}$$

* Multiplicamos por -2 a primeira equação e somamos o resultado com a segunda equação; multiplicamos a primeira equação por -1 e somamos com a terceira.

** Somamos a segunda equação com a terceira.

Como este último sistema é incompatível, o mesmo acontece com o sistema S dado inicialmente.

3. SISTEMAS ESCALONADOS

Consideremos um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S: \begin{cases} \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad \alpha_{2r_2}x_{r_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{kr_k}x_{r_k} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\,x_n = \beta_{k+1} \end{cases}$$

onde $\alpha_{1r_1} \neq 0$, $\alpha_{2r_2} \neq 0, \ldots, \alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geqslant 1$.

Se tivermos $1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leqslant n$ diremos que S é um *sistema linear escalonado.* É claro que se $\beta_{k+1} = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo, num sistema escalonado o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente.

Exemplo de sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x - y - z - 3t = 0 \\ \qquad\qquad\ z - \ t = 1 \\ \qquad\qquad\quad\ \ 2t = 2 \end{cases}$$

Proposição 1 – Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

Demonstração – Sem perder a generalidade podemos supor:

$$S: \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Para cada $\alpha_{i1} \neq 0$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ multipliquemos por $(-\alpha_{i1})$ a primeira equação e somemos o resultado à equação i-ésima. Com algumas permutações convenientes de equações (se for o caso) obteremos um sistema S_1 do seguinte tipo:

$$S_1: \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad \gamma_{2r_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{2n}x_n = \beta_2' \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \gamma_{mr_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{mn}x_n = \beta_m' \end{cases}$$

onde $\gamma_{2r_1} \neq 0$ e $r_1 \geqslant 2$, que é equivalente a S.

Dividindo a segunda equação de S_1 por γ_{2r_1} obtemos um sistema S_2, ainda equivalente a S_1, com o qual começamos a repetir o raciocínio feito até aqui, porém a partir da sua segunda equação. Evidentemente, depois de aplicar um certo número finito de vezes esse raciocínio chegaremos a um sistema escalonado equivalente a S. ■

A importância dos sistemas escalonados reside na Proposição 1. Sendo todo sistema equivalente a um sistema escalonado, bastará que saibamos lidar com os sistemas escalonados e saibamos reduzir um sistema qualquer a um escalonado.

Nota: Convém observar que as equações do tipo $0 = 0$ que por ventura aparecerem no processo de escalonamento devem ser suprimidas, como é óbvio.

Exemplo – Escalonemos o seguinte sistema:

$$S: \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x \qquad\qquad + 2t = 1 \end{cases}$$

$$S \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ -z + 3x + 2y + 2t = 1 \\ -z + 2x - y - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ -\frac{14}{5}y - \frac{14}{5}t = 0 \\ -y + t = -4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ y - t = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

Observe o leitor que $(1, 2, 2, -2)$ é a única solução de S, pois é a única solução do sistema escalonado.

4. DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear S significa efetuar um estudo de S visando a classificá-lo segundo a definição 3. *Resolver* um sistema linear significa determinar todas as suas soluções. O conjunto dessas soluções recebe o nome de *conjunto solução* do sistema.

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Procedendo ao escalonamento de S chegaremos a uma das três seguintes situações:

(I) No processo de escalonamento, numa certa etapa, obtém-se um sistema:

$$S': \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + \dots + 0x_n = \beta_i \quad (\beta_i \neq 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Como S' é incompatível, então o mesmo se pode dizer de S. (Ver exemplo no parágrafo 2).

(II) Obtém-se um sistema escalonado do seguinte tipo:

$$S: \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n \end{cases}$$

Neste caso S' poderá ser transformado, por equivalência, no seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = \gamma_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = \gamma_n \end{cases}$$

Logo S é compatível determinado e $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ é a sua solução.

Exemplo – Discutir e resolver o seguinte sistema:

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$S \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y = -2 \\ 2y - 2z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3y = -2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\overset{*}{\sim} \begin{cases} x - y = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \overset{**}{\sim} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

---

* Somamos a terceira equação à segunda.

** Somamos a segunda equação à primeira.

Logo o sistema é compatível determinado e $\left(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é a sua solução.

Observação: Depois de conseguir o escalonamento poderíamos ter achado a solução do sistema por substituição do seguinte modo:

Como $z = \frac{1}{3}$ e $y - z = -1$, então $y - \frac{1}{3} = -1$. Daí $y = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$.

Agora, se na primeira equação do sistema substituirmos y por $-\frac{2}{3}$ e z por $\frac{1}{3}$, acharemos $x = 0$.

(III) Obtém-se um sistema escalonado do tipo abaixo:

$$S': \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_2}x_{r_2} + \ldots + \alpha_{1r_3}x_{r_3} + \ldots + \alpha_{1r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad x_{r_2} + \ldots + \alpha_{2r_3}x_{r_3} + \ldots + \alpha_{2r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad x_{r_3} + \ldots + \alpha_{3r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{r_p} + \ldots + \alpha_{pn}x_n = \beta_p \end{cases}$$

onde $p < n$.

É fácil então ir eliminando, por meio de operações elementares, o termo em x_{r_2} na primeira equação, os termos em x_{r_3} da primeira e segunda equações, ..., os termos em x_{r_p} da primeira à $(p-1)$-ésima equação. Por exemplo, multiplicando a segunda equação por $(-\alpha_{1r_2})$ e somando o resultado com a primeira eliminando o termo $\alpha_{1r_2}x_{r_2}$.

Feito isto, passamos para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, exceção feita à primeira. Teremos então algo como:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_{r_2} = f_2 \\ \cdots\cdots \\ x_{r_p} = f_p \end{cases}$$

onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1, j \neq r_2, \ldots, j \neq r_p$. A cada seqüência de valores que dermos então a estas $n - p$ variáveis (*variáveis livres*) obteremos valores para $x_1, x_{r_2}, \ldots, x_{r_p}$ e conseqüentemente uma solução do sistema. Como $p < n$, teremos mais do que uma solução (infinitas na verdade) e o sistema é *indeterminado* neste caso.

Exemplo – Discutir e resolver o sistema:

$$S: \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3 \end{cases}$$

$$S \sim \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y - z = -2 \\ -5y + z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y - \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} \end{cases} \sim \begin{cases} x - \frac{7}{5}z = \frac{1}{5} \\ y - \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Daí tiramos:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}z \\ y = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z \end{cases}$$

Logo, $\left\{\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}z, -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}$ é o conjunto de todas as soluções de S (*conjunto solução* de S). Dizemos também que $\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}z, -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z, z\right)$, com $z \in \mathbb{R}$, é a *solução geral* do sistema linear S.

RESUMO DA DISCUSSÃO

A discussão feita acima pode ser resumida do seguinte modo:

Suponhamos que um sistema tenha sido escalonado e, retiradas as equações do tipo $0 = 0$, restam p equações com n incógnitas.

(I) Se a última das equações restantes é

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = \beta_p \quad (\beta_p \neq 0)$$

então o sistema é *incompatível*;

Caso contrário, sobram duas alternativas:

(II) Se $p = n$ o sistema é *compatível determinado*;

(III) Se $p < n$, então o sistema é *compatível indeterminado*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ -2y + 5x + 2z = 2 \\ -3y + 4x + z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ 11x + 10z = 0 \\ 13x + 13z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ 11x + 10z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ x + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

De $z = 0$, tiramos $x = 0$ e daí teremos $y = -1$.

Resposta: $(0, -1, 0)$ é a única solução; o sistema é compatível determinado.

2. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ 2z + t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -2 + 5z - y \\ t = 1 - 2z \end{cases}$$

Resposta: $\{(-2 + 5z - y, y, z, 1 - 2z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema. O sistema é compatível indeterminado, pois tem infinitas soluções.

3. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - 2z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 2y + 2z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Resposta: O sistema é incompatível, por causa da igualdade $0 = 1$.

4. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = -3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = -5 \\ -y = -3 \\ -y = -3 \end{cases}$$

Daí: $y = 3$, $z = -\frac{1}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$.

Resposta: O sistema é compatível determinado, sendo $\left(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$ sua única solução.

5. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} -t + 3x + 3y - 2z = 2 \\ -2t + 5x + 2y + z = 1 \\ -t + 2x - y + 3z = -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} t - 3x - 3y + 2z = -2 \\ -x - 4y + 5z = -3 \\ -x - 4y + 5z = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} t - 3x - 3y + 2z = -2 \\ x + 4y - 5z = 3 \end{cases}$$

Daí: $x = -4y + 5z + 3$ e $t = -9y + 13z + 7$

Resposta: $\{(-4y + 5z + 3, y, z, -9y + 13z + 7) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto das soluções e portanto o sistema é compatível indeterminado.

6. Resolver o sistema homogêneo por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \quad 6y + 2z = 0 \\ \quad 3y + 7z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \quad y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \quad 3y + 7z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \quad y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \quad 6z = 0 \end{cases}$$

Daí: $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

O sistema admite somente a solução trivial (0, 0, 0), sendo portanto determinado.

7. Resolver o sistema homogêneo por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad -3z = 0 \\ -y - 3t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad y + 3t = 0 \\ \quad z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ \quad y + 3t = 0 \\ \quad z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2t = 0 \\ \quad y + 3t = 0 \\ \quad z = 0 \end{cases}$$

O conjunto $\{(2t, -3t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução; o sistema linear é compatível indeterminado. Observe que o valor da incógnita z é determinado, isto é, não depende de t.

8. Determinar o valor de *a* para que o sistema linear S admita uma única solução e determiná-la:

$$S: \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ \quad 3y = a \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ \quad -y = 0 \\ \quad 3y = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ \quad y = 0 \\ \quad 0 = a \end{cases}$$

Daí, necessariamente $a = 0$ e o sistema S é equivalente a $\begin{cases} x + y = 1 \\ \quad y = 0 \end{cases}$.

Resposta: $a = 0$ e $\{(1, 0)\}$ é a solução única de S.

9. Resolver o sistema:

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ -x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Solução: Este sistema *não* é linear, pois x e y aparecem em segundo grau. Mas podemos introduzir as variáveis $u = x^2$ e $v = y^2$ tomando-se então o sistema S em $\begin{cases} u + v = 34 \\ -u + v = 16 \end{cases}$ cuja solução (*única*) é $u = 9, v = 25$. Daí obtemos $x^2 = 9$ e $y^2 = 25$, ou seja, $x = \pm 3$ e $y = \pm 5$. Há portanto 4 soluções para o sistema S: (3, 5), (3, – 5), (– 3, 5) e (– 3, – 5).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolver os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2y = -3 \end{cases}$

2. Determinar os valores de *a* e *b* que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

compatível e determinado. Em seguida resolver o sistema.

3. Discutir os seguintes sistemas lineares (em função de *a*):

$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$ e $\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

4. Determinar os valores de *m* para os quais o sistema é determinado:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 1 \\ 2x - 2y - 2z - 3t = -1 \\ 2x - 2y - z - 5t = 9 \\ 3x - y + z - mt = 0 \end{cases}$$

5. Resolver os sistemas homogêneos abaixo:

a) $\begin{cases} 3 - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z + w - t = 0 \\ x - y - z + 2w - t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

6. Mostrar que um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas é compatível indeterminado se $n > m$.

5. MATRIZES

Definição 5 – Sejam $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$ dois números inteiros. Uma *matriz m X n real* é uma dupla seqüência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ ou apenas (a_{ij}), se não houver possibilidade de confusão quanto à variação dos índices.

Cada número que compõe uma matriz chama-se *termo* dessa matriz. Dada a matriz $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, ao símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os seus termos daremos o nome de *termo geral* dessa matriz.

Notações – Indicaremos por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $m \times n$. Se $m = n$, ao invés de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, usa-se a notação $M_n(\mathbb{R})$. Cada matriz de $M_n(\mathbb{R})$ chama-se *matriz quadrada de ordem n.* Em contraposição, quando $m \neq n$, uma matriz $m \times n$ se diz uma *matriz retangular.* Uma matriz 1×1 (a_{11}) se identifica com o número real a_{11}.

Cada matriz costuma ser denotada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

Exemplo – A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

é uma matriz real 3×2. Logo $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

LINHAS E COLUNAS

Dada uma matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

as m seqüências horizontais

$$A^{(1)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, A^{(m)} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

são chamadas *linhas* da matriz A, enquanto que as n seqüências verticais

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

são as *colunas* de A. É de se notar que cada $A^{(i)} \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ e cada $A_{(j)} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo – Na matriz 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

as linhas são $(1, 0, 1)$ e $(0, 6, -5)$ ao passo que as colunas são

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

IGUALDADE DE MATRIZES

Consideremos duas matrizes reais m × n: $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Dizemos que $A = B$ se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Exemplos

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ t = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. OPERAÇÕES COM MATRIZES

(a) ADIÇÃO

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes m × n. Indicamos por A + B e chamamos *soma* de A com B a matriz m × n cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

A operação que transforma cada par (A, B) de matrizes do mesmo tipo na matriz A + B chama-se *adição* de matrizes. É uma operação no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo – Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Para a adição de matrizes acima definida valem as seguintes propriedades:

(I) $A + (B + C) = (A + B) + C, \ \forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (*associativa*);

(II) $A + B = B + A, \ \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (*comutativa*);

(III) Existe uma matriz $O \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + O = A, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (existe *elemento neutro*);

IV) Dada uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz $(-A)$, também $m \times n$, tal que $A + (-A) = O$ (existe a *oposta* de qualquer matriz).

A verificação da propriedade associativa se faz assim:

Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, então

$$(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) \stackrel{*}{=}$$
$$= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = A + (B + C).$$

Quanto à (III) é fácil ver que:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz chama-se *matriz nula* $m \times n$.

Por último, se $A = (a_{ij})$, é evidente que $(-A) = (-a_{ij})$. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -1 & -a & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO

Dada uma matriz real $A = (a_{ij})$, $m \times n$, e dado um número real α, o *produto* de α por A é a matriz real $m \times n$ dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(*) Usamos nesta passagem a propriedade associativa da adição de números reais.

Para essa operação que transforma cada par (α, A) de $\mathbb{R} \times M_{m\times n}(\mathbb{R})$ na matriz real $\alpha A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, valem as seguintes propriedades:

(I) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

(II) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(III) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(IV) $1\,A = A$;

quaisquer que sejam as matrizes A e B e quaisquer que sejam os números reais α e β.

Provemos (II).

Suponhamos $A = (a_{ij})$. Então:

$$(\alpha + \beta) \cdot A = ((\alpha + \beta) \cdot a_{ij}) = (\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot a_{ij}) =$$
$$= (\alpha \cdot a_{ij}) + (\beta \cdot a_{ij}) = \alpha A + \beta A.$$

Exemplo – Se $\alpha = 2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, então $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(c) MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Consideremos a matriz $A = (a_{ij})$ de tipo $m \times n$ e a matriz $B = (b_{jk})$ de tipo $n \times p$. O *produto* $A \cdot B$ (também indicado por AB) é a matriz $m \times p$ cujo termo geral é dado por:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} \quad ^{*}$$

Usando a notação de matriz linha e a de matriz coluna a definição acima significa que

$$AB = \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B_{(1)} & \ldots & A^{(1)} \cdot B_{(p)} \\ A^{(2)} \cdot B_{(1)} & \ldots & A^{(2)} \cdot B_{(p)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{(m)} \cdot B_{(1)} & \ldots & A^{(m)} \cdot B_{(p)} \end{pmatrix}$$

(*) O símbolo Σ é uma letra do alfabeto grego, correspondente ao nosso S.

Nas condições acima, a operação que transforma cada par de matrizes (A, B) na matriz AB chama-se *multiplicação* de matrizes.

Exemplo – Sejam $A = \begin{array}{c} \scriptstyle a_{11} \quad a_{12} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$ e $B = \begin{array}{c} \scriptstyle a_{11} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ (a_{21}).

Então:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposição 2 – Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{kr})$ matrizes reais $m \times n$, $n \times p$ e $p \times q$, respectivamente. Então $A(BC) = (AB)C$.

Demonstração – O termo geral de $A(BC)$ é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kr} \right) \tag{1}$$

ao passo que o termo geral de $(AB)C$ é dado por:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kr} \tag{2}$$

As propriedades da adição e da multiplicação de números reais nos ensinam, contudo, que (1) = (2). Então a proposição está demonstrada. ∎

Proposição 3 – Sejam A, B e C matrizes reais $m \times n$, $n \times p$ e $n \times p$, respectivamente. Então $A(B + C) = AB + AC$.

Demonstração – Usa-se o mesmo tipo de raciocínio da demonstração anterior. Fica como exercício. ∎

Nota: Analogamente, se A e B são matrizes $m \times n$ e C é $n \times p$, então $(A + B)C = AC + BC$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sejam:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrizes de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Calcular $3(A - \frac{1}{2}B) + C$.

Solução

$$3(A - \frac{1}{2}B) + C = 3A - \frac{3}{2}B + C =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar a matriz $X \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (B - A)) - C$, sendo A, B e C as matrizes do exercício 1.

Solução

$\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (B - A)) - C \Longrightarrow X + A = 6(X + (B - A)) - 2C \Longrightarrow$

$\Longrightarrow X + A = 6X + 6B - 6A - 2C \Longrightarrow 5X = 7A - 6B + 2C \Longrightarrow X = \frac{1}{5}(7A -$

$- 6B + 2C)$. Logo

$$X = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 7 & 14 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 36 & 24 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 & 11 & -12 \\ -29 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{5} & -\frac{12}{5} \\ \frac{-29}{5} & \frac{-8}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Dadas as matrizes reais, 1×3, $A = (1 \quad 0 \quad 0)$, $B = (0 \quad 1 \quad 0)$ e $C = (0 \quad 0 \quad 1)$, determinar as matrizes X, Y e Z de $M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ tais que:

$$S: \begin{cases} 2X - Y + Z = A \\ X - 2Y + Z = B \\ 3X + Y - Z = C. \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} X - 2Y + Z = B \\ 2X \qquad\quad + Z = A \\ \qquad\qquad - Z = C \end{cases} \sim \begin{cases} X - 2Y + Z = B \\ \qquad 3Y - Z = A - 2B \\ \qquad 7Y - 4Z = C - 3B \end{cases} \sim$$

$$\sim\begin{cases} X + \quad Z - 2Y = B \\ \quad - \; Z + 3Y = A - 2B \\ \quad -4Z + 7Y = C - 3B \end{cases} \sim \begin{cases} X + Z - 2Y = B \\ \quad -Z + 3Y = A - 2B \\ \qquad\quad -5Y = -4A + 5B + C. \end{cases}$$

Daí: $Y = \frac{1}{5}(4A - 5B - C) = \frac{1}{5}((4 \quad 0 \quad 0) - (0 \quad 5 \quad 0) - (0 \quad 0 \quad 1)) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

Analogamente, $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -3 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

4. Dadas as matrizes A e B abaixo, determinar os produtos AB e BA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denomina-se *transposta* de A e indica-se por A^t a seguinte matriz $n \times m$: $A^t = (b_{ji})$, onde $b_{ji} = a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. Valem as seguintes relações:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $(A^t)^t = A$;

d) $(AB)^t = B^t A^t$;

desde que as operações aí indicadas estejam definidas. Provemos (IV) já que as três primeiras são imediatas.

Solução

Sejam $A = (a_{ij})$, $A^t = (b_{ji})$, $B = (c_{jk})$ e $B^t = (d_{kj})$.

Então $b_{ji} = a_{ij}$ e $d_{kj} = c_{jk}$. Supondo $AB = (r_{ik})$ e $B^tA^t = (s_{ki})$, temos:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}d_{kj} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}b_{ji} = s_{ki}$$

o que mostra que de fato $(AB)^t = B^tA^t$.

6. Para cada número real α consideremos a matriz:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) Mostrar que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$; b) Calcular $T_{-\alpha}$.

Solução

$$T_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = T_{\alpha+\beta}.$$

$$T_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = T_\alpha^t$$

7. Uma matriz quadrada A se diz *simétrica* se $A^t = A$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

a) Mostrar que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica. Mostre que o mesmo vale para matrizes anti-simétricas.

b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é uma matriz simétrica?

Solução

a) Sejam A e B as matrizes. Então $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$. Logo $A + B$ é simétrica. Analogamente, se A e B são anti-simétricas, $(A + B)^t = A^t + B^t = -A + (-B) = -(A + B)$.

b) $(AB)^t = B^tA^t = BA$, se A e B são simétricas. Como em geral $AB \neq BA$, então nem sempre o produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

8. Determinar todas as matrizes que comutam com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, todas as matrizes X de tipo 2×2 tais que $AX = XA$.

Solução

Suponhamos $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Então:

$$AX = XA \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x \\ y + t = x \\ 0 = z \end{cases}$$

Logo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x-y \end{pmatrix}$ onde x e y são números quaisquer.

9. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar uma matriz $X \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $AX = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução

Fazendo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ então $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Resolvamos o sistema obtido por escalonamento:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ -z = 1 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ 2y + t = 0 \\ -z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ -t = -2 \\ -z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ z = -1 \\ t = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Logo:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere as seguintes matrizes de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que $AB = BA$. Pode-se concluir daí que é válida a propriedade comutativa da multiplicação em $M_3(\mathbb{R})$?

Explique bem sua resposta.

2. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e se $AB = BA$, prove que:

a) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

3. Sendo A e B as matrizes do exercício proposto 1, determine matrizes $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$ de maneira que:

$$\begin{cases} 2X - Y = A + B \\ X + Y = A - B \end{cases}$$

4. O produto de duas matrizes anti-simétricas de mesma ordem é uma matriz anti-simétrica? Justifique sua resposta.

5. Determinar uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A \neq 0$ e $A^2 = AA = 0$ (matriz nula).

6. Efetue os produtos AB e BA onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = (1 \quad 2 \quad 1).$$

7. Mostrar que se:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

então $A^2 - 6A + 5I_2 = 0$ (matriz nula).

8. Mostrar que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

onde y é um número real não nulo, verificam a equação $X^2 = 2X$.

9. Determinar todas as matrizes quadradas de ordem 3 que comutam com a matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

onde *a* é um número real.

10. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mostre que $AB = BA$.

11. Seja B uma matriz real 2×2 que comuta com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Mostre que existem números reais a e b tais que:

$$B = aA + bI_2.$$

12. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $AB = 0$ (matriz nula), pode-se concluir que BA também é a matriz nula? Prove ou contra-exemplifique.

7. MATRIZES INVERSÍVEIS

Consideraremos neste parágrafo apenas matrizes quadradas de ordem n. Neste caso a multiplicação transforma cada par de matrizes de ordem n numa outra matriz, também de ordem n. E além das propriedades dadas pelas proposições 2 e 3 acima (*associativa* e *distributiva* em relação à adição) a multiplicação, neste caso, goza da propriedade de admitir elemento neutro que é a matriz

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e que evidentemente verifica as condições

$$AI_n = I_nA = A,$$

para toda matriz A de ordem n. A matriz I_n chama-se *matriz identidade de ordem n*.

Definição 6 – Uma matriz A de ordem n se diz *inversível* se, e somente se, existe uma matriz B, também de ordem n, de modo que:

$$AB = BA = I_n$$

Esta matriz B, caso exista, é única e chama-se inversa de A, indica-se por A^{-1}.

Exemplos

1) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível uma vez que, tomando

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 .$$

Logo adiante ensinaremos um algorítmo (processo) para determinar a inversa de uma matriz, caso esta inversa exista.

2) Se uma linha (ou coluna) de uma matriz A é nula, então A não é inversível. Suponhamos a linha i-ésima de A nula, isto é, $A^{(i)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Dada então uma matriz X qualquer de ordem n, como

$$(AX)^{(i)} = A^{(i)}X = (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$$

(ver definição de produto), então

$$AX = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \neq I_n, \text{ para toda matriz X.}$$

3) Se A e B são matrizes de ordem n, ambas inversíveis, então AB também é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

De fato

$$(AB) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n,$$

e analogamente $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (AB) = I_n$.

4) Se A é inversível, então A^{-1} também o é e vale a seguinte igualdade:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

DETERMINAÇÃO DA INVERSA

Daremos aqui um algoritmo (= método) para determinar a inversa de uma matriz A, caso A seja inversível. Contudo a demonstração do teorema em que se baseia esse método somente será feita no Apêndice I, ao fim do capítulo.

Definição 7 – Dada uma matriz A entendemos por *operações elementares*(*) *com as linhas de A*, uma qualquer das seguintes alternativas:

(I) *Permutar* duas linhas de A;

(II) *Multiplicar* uma linha de A por um número $\neq 0$.

(III) *Somar* a uma linha de A uma outra linha de A multiplicada por um número.

Se uma matriz B puder ser obtida de A através de um número finito dessas operações, diz-se que B *é equivalente* a A e escreve-se $B \sim A$. Para esta relação valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema – Uma matriz A é inversível se, e somente se, $I_n \sim A$. Neste caso, a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n em A^{-1}.

Demonstração

Está feita no apêndice 1, ao fim do capítulo.

Exemplos

1) Verificar se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é inversível e determinar A^{-1}, caso esta matriz exista.

Devemos orientar nosso trabalho no sentido de transformar (se possível) a matriz A na matriz I_3. Como essa mesma sucessão de operações levará I_3 em A^{-1}, então convém reunir A e I_3 numa mesma matriz e operar a partir daí.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3' = L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(*) Tal como para sistemas lineares, ver § 2.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3'' = L_2 + L_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3''' = \dfrac{L_3''}{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = L_2 - L_3''' \\ L_3''' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 - L_2' \\ L_2' \\ L_3''' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{+2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Logo a matriz A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Vejamos o mesmo problema com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como a matriz A é equivalente à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que não é inversível (tem uma linha nula) então A também não é inversível.

8. SISTEMAS DE CRAMER

Seja

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

um sistema linear de m equações com n incógnitas sobre $\mathbb{R}$. Se formarmos as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

de tipos $m \times n$, $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente, então S poderá ser escrito sob a forma matricial

$$AX = B$$

onde A recebe o nome de matriz dos coeficientes de S.

Um *sistema de Cramer* é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível. Se $AX = B$ é um sistema de Cramer, como

$$AX = B \Longleftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B,$$

então esse sistema é compatível determinado e sua única solução é dada por $A^{-1}B$. Em particular um sistema quadrado e homogêneo cuja matriz dos coeficientes é inversível só admite a solução trivial.

Exemplo – A matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que já vimos ser inversível (parágrafo 7); já determinamos também

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a solução do sistema é (0, 1, 0).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar se a matriz A abaixo é inversível e, se o for, determinar sua inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

Utilizaremos o processo explicado no §.7.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Logo A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Verificar se a seguinte matriz é inversível e determinar sua inversa, caso exista:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

O fato de a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que é equivalente a A, ter uma linha nula, basta para concluir que A não é inversível.

3. Mostrar que a matriz A abaixo é inversível e determinar sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

A inversa de A é portanto a matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Uma matriz quadrada A se diz *ortogonal* se A é inversível e $A^{-1} = A^t$.

a) Determinar se possível x e y em $\mathbb{R}$ a fim de que a matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

seja ortogonal.

b) Provar que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal.

Solução

a) $$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}y + \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}y + \sqrt{2}x & y^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 1 \\ y^2 + 2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ y^2 = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Portanto o problema em $M_2(\mathbb{R})$ não admite soluções pois as equações $x^2 = -1$ e $y^2 = -1$ não têm solução em $\mathbb{R}$.

b) Sejam A e B matrizes ortogonais de ordem n. Sendo A e B inversíveis, então já vimos que AB também é inversível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Daí

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t.$$

5. Determinar $a \in \mathbb{R}$ a fim de que a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

seja inversível em $M_3(\mathbb{R})$.

Solução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ se } a-1 \neq 0.$$

Logo A é inversível para $a \neq 1$. Se $a = 1$, então a matriz A é equivalente a uma matriz com uma linha nula e portanto não é inversível.

6. Resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solução

Façamos

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix}1\\ -4\\ 2\end{pmatrix}$$

Então o sistema fica $AX = B$. Já vimos no exercício resolvido nº 1, que a matriz A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Logo trata-se de um sistema de Cramer cuja solução é dada por:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -4\\ 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2}\\ 1 + 0 + (-2)\\ -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{2}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\ -1\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

A seqüência $\left(\frac{9}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$ é a solução do sistema.

7. Resolver o seguinte sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Solução

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que é inversível conforme já vimos (exercício resolvido 3) e sua inversa é a matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja A uma matriz quadrada inversível. Mostre que A^{-1} também é inversível e que $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Mostrar que a matriz real

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ e que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

3. Verificar quais das seguintes matrizes são inversíveis e determinar as inversas respectivas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Resolver os seguintes sistemas de Cramer:

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$

5. Determinar $m \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema abaixo seja de Cramer e, a seguir, resolvê-lo:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ x + 2y + mz = 0 \end{cases}$$

6. Sejam A, B e C matrizes reais de ordem n. Se A é inversível, prove que $AB = AC \Longrightarrow B = C$ e que $BA = CA \Longrightarrow B = C$.

7. Se A, B e C são matrizes inversíveis de mesma ordem, determinar a matriz X de maneira que $A(B^{-1}X) = C^{-1}A$.

8. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ calcular $A^2 = AA$, $A^3 = AAA, \ldots, A^n = A \ldots A$(n vezes).

9. Determinar x, y e z de modo que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

seja ortogonal.

10. Existe alguma matriz inversível A tal que $A^2 = 0$ (matriz nula)? Justifique.

APÊNDICE I

Matrizes Elementares

Definição 8 – Uma *matriz elementar* de ordem n é uma matriz E obtida de I_n por meio de uma e uma só operação elementar.

Exemplos

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são matrizes elementares. A primeira se obtém de I_3 multiplicando por 2 a segunda linha; a segunda se obtém de I_3 somando à segunda linha desta matriz a sua primeira linha multiplicada por 3.

Proposição 4 – Seja E uma matriz elementar de ordem n. Se aplicarmos, então, em uma matriz A, também de ordem n, a mesma operação elementar que transformou I_n em E, obteremos a matriz EA.

Demonstração

Faremos a demonstração apenas para a operação elementar (III) ficando os dois casos restantes como exercício.

Suponhamos que a linha j-ésima de E seja a soma da linha j-ésima de I_n com a linha i-ésima de I_n multiplicada por α, enquanto que as demais linhas de E e de I_n coincidem, ou seja

$$E^{(j)} = I_n^{(j)} + \alpha I_n^{(i)}$$

e

$$E^{(k)} = I_n^{(k)}, \ k \neq j.$$

Como $(EA)^{(r)} = E^{(r)}A$, para todo r entre 1 e n, então $(EA)^{(j)} = E^{(j)} \cdot A =$ $= (I_n^{(j)} + \alpha I_n^{(i)})A = I_n^{(j)} \cdot A + \alpha(I_n^{(i)} \cdot A) = (I_nA)^{(j)} + \alpha(I_nA)^{(i)} = A^{(j)} + \alpha A^{(i)}$, o que vem provar que a linha j-ésima de EA é igual à linha j-ésima de A mais a linha i-ésima de A multiplicada por α. Por um raciocínio análogo se prova que as demais linhas de EA coincidem com as respectivas de A.

Logo, as mesmas operações que transformaram I_n em E irão transformar A em EA. ■

Proposição 5 — Toda matriz elementar E é inversível.

Demonstração

Por hipótese obtém-se E de I_n por meio de uma certa operação elementar. Consideremos a operação elementar inversa que transforma E em I_n. Se aplicarmos esta última em I_n obteremos uma matriz elementar E_1. Devido à proposição anterior teremos $E_1 \cdot E = I_n$, o que é suficiente para concluir que E é inversível e E_1 é a sua inversa (por quê?). ∎

Exemplo — Consideremos a matriz elementar:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A operação elementar que transformou I_3 em E consiste em somar à segunda linha de I_3 o triplo da primeira linha. Então E será transformada em I_3 somando à sua segunda linha a primeira multiplicada por (-3). Logo a matriz inversa de E, obtida efetuando em I_3 esta última operação elementar, é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema — Uma matriz A de ordem n é inversível se, e somente se, $I_n \sim A$. Neste caso, a mesma sucessão de operações que transformam A em I_n, transforma I_n em A^{-1}.

Demonstração

($\Longleftarrow$) Como cada operação elementar com A é o mesmo que multiplicar A (à esquerda) por uma matriz elementar, então existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_t$ de maneira que:

$$E_t \cdot E_{t-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I_n.$$

Logo

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_t^{-1} \cdot I_n.$$

Como cada matriz do segundo membro é inversível, então A é inversível (um produto de matrizes inversíveis é inversível, conforme já vimos). Além disso, observando que:

$$(E_i^{-1})^{-1} = E_i \ (i = 1, \ldots, t) \text{ e } I_n^{-1} = I_n$$

segue que

$$A^{-1} = E_t \cdot E_{t-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot I_n$$

o que prova a última afirmação do teorema.

($\Longrightarrow$) Observemos primeiro que se $B \sim A$, então A é inversível se, e somente se, B é inversível. Isto por que se $B \sim A$, então $B = PA$, onde P é uma matriz inversível (P é um produto de matrizes elementares). Nossa observação decorre então dessa igualdade.

Façamos o escalonamento da matriz A por meio de operações elementares, isto é, façamos com que cada uma das suas linhas (a partir da segunda) tenha mais zeros iniciais do que a precedente. Como a última linha de A não é nula (pois A é inversível) obteremos:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

onde cada $a_{ii} \neq 0$. Mas esta última matriz é equivalente à matriz I_n. Logo $I_n \sim A$. ∎

Nota final: Toda a teoria desenvolvida neste capítulo sobre sistemas lineares e matrizes seria feita da mesma maneira se substituíssemos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pelo conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

CAPÍTULO 2
Espaços Vetoriais

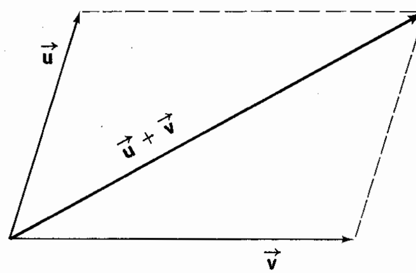
1. INTRODUÇÃO

Examinemos certos aspectos relacionados com dois conjuntos certamente já conhecidos do leitor.

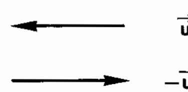
O primeiro é o conjunto V dos vetores da geometria, definidos através de segmentos orientados, e o outro é o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais m por n, onde m e n são números naturais dados (ambos maiores que zero).

À primeira vista pode parecer que tais conjuntos nada têm em comum. Mas não é bem assim conforme mostraremos a seguir.

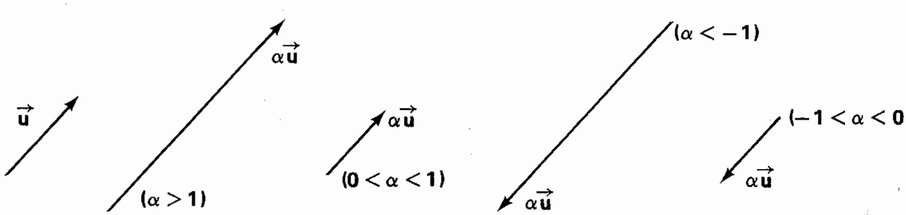
No conjunto V está definida uma adição (adição de vetores), conforme figura ao lado, adição essa dotada das propriedades comutativa, associativa, além da existência de elemento neutro (vetor nulo) e do oposto para cada vetor de V.



O vetor nulo pode ser representado por qualquer ponto do espaço e o oposto de $\vec{u}$ se determina conforme a figura ao lado.



Além disso podemos multiplicar um vetor $\vec{u}$ por um número real α e isso se faz conforme esquema abaixo:



Se $\alpha = 1$, $\alpha\vec{u} = \vec{u}$ e se $\alpha = 0$, então $\alpha\vec{u} = 0$. Em geral $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$. Essa multiplicação tem as seguintes propriedades já certamente vistas pelo leitor no seu curso de Cálculo Vetorial:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\vec{u} &= \alpha(\beta\vec{u})\\ (\alpha+\beta)\vec{u} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}\\ \alpha(\vec{u}+\vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}\\ 1\vec{u} &= \vec{u}\end{aligned}$$

para todos os números reais α e β e vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

No conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ também está definida uma adição, a adição de matrizes estudada no capítulo 1. Conforme vimos nesse capítulo, essa adição é associativa, comutativa, admite elemento neutro, que é a matriz nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e toda matriz A de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem uma oposta.

Como vemos o comportamento de V e o de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ quanto à adição é o mesmo. Mas não ficam aí as coincidências.

Pode-se também multiplicar uma matriz por um número real obtendo-se uma matriz da seguinte forma:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Essa multiplicação apresenta as mesmas propriedades que as destacadas para V, linhas acima. Ou seja, valem sempre as igualdades:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A)\\ (\alpha+\beta)A &= \alpha A + \beta A\\ \alpha(A+B) &= \alpha A + \alpha B\\ 1A &= A\end{aligned}$$

Logo os conjuntos V e $M_{m \times n}$ (IR) apresentam uma coincidência estrutural no que se refere a um par importante de operações definidas sobre eles. Nada então mais lógico do que estudar simultaneamente V, $M_{m \times n}$ (IR) e todos os conjuntos que apresentem essa mesma "estrutura" anteriormente apontada. É isso o que começaremos a fazer no parágrafo seguinte.

2. ESPAÇOS VETORIAIS

Vamos introduzir agora o conceito de *espaço vetorial.* Os espaços vetoriais constituem os objetos de estudo da Álgebra Linear.

Definição 1 – Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$ é um *espaço vetorial sobre IR* quando, e somente quando:

I – Existe uma adição $(u, v) \longmapsto u + v$ em V, com as seguintes propriedades:

a) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$ (*comutativa*);

b) $u + (v + w) = (u + v) + w, \ \forall u, v, w \in V$ (*associativa*);

c) Existe em V um *elemento neutro* para essa adição o qual será simbolizado genericamente por o. Ou seja:

$$\exists\, o \in V \mid u + o = u, \ \forall u \in V;^{(*)}$$

d) Para todo elemento u de V existe o *oposto*; indicaremos por $(-u)$ esse oposto. Assim:

$$\forall u \in V, \ \exists\, (-u) \in V \mid u + (-u) = o.^{(**)}$$

II – Está definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times V$ em V, o que significa que a cada par (α, u) de $\mathbb{R} \times V$ está associado um único elemento de V que se indica por αu, e para essa multiplicação tem-se o seguinte:

a) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

b) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

c) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

d) $1u = u$

(*) Prova-se que é único esse elemento neutro (ver exercício resolvido nº 1 do § 3).

(**) Prova-se que é único o oposto de um elemento (ver exercício resolvido nº 2 do § 3).

para quaisquer u, v de V e α, β de $\mathbb{R}$.

Nota: De maneira análoga se define espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos. Deste capítulo até o capítulo V, inclusive, toda a teoria dos espaços vetoriais a ser aqui desenvolvida é a mesma quer sobre $\mathbb{R}$ quer sobre $\mathbb{C}$. Por isso, embora venhamos a usar sempre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, deixamos registrado que seria tudo igual para espaços sobre $\mathbb{C}$. Quanto ao assunto do capítulo VI há diferenças lá apontadas. Porém iremos concentrar nossa atenção no caso real tendo em conta o caráter introdutório deste livro. Nos demais capítulos, salvo exceções que serão mencionadas, trabalharemos com espaços reais.

Exemplos

1) O espaço vetorial $\mathbb{R}$

Não é novidade para o leitor que a adição de números reais verifica as propriedades I-a, I-b, I-c e I-d da definição de espaço vetorial. Tão pouco que o produto de um número real por um outro é também um número real e que essa multiplicação obedece aos itens II-a, II-b, II-c e II-d da definição mencionada. Logo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2) O espaço vetorial $\mathbb{C}$

Com a mesma argumentação acima verifica-se que $\mathbb{C}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Mas $\mathbb{C}$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Quanto à adição não há novidades: tudo como no caso anterior. Agora, o produto de um número complexo por um número real é um número complexo e para essa multiplicação valem II-a, II-b, II-c e II-d como situações particulares das propriedades da multiplicação em $\mathbb{C}$.

3) O conjunto dos vetores da geometria definidos por meio de segmentos orientados é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ver parágrafo 1).

4) O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ver parágrafo 1).

5) O espaço $\mathbb{R}^n$

Já vimos anteriormente que uma n-upla de números é uma seqüência finita de n números reais que se indica por $(a_1, \ldots, a_n)$. O conjunto de todas as n-uplas de números reais é denotado por $\mathbb{R}^n$. O $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ desde que se definam adição e multiplicação da seguinte maneira:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

Ora, tal afirmação pressupõe que se tenham verificado as oito propriedades que constam da definição, o que não faremos aqui. Sugerimos tais verificações como exercício.

Apenas ressaltaremos que $o = (0, 0, \ldots, 0)$, se $u = (a_1, \ldots, a_n)$, então $-u = (-a_1, \ldots, -a_n)$ e, a título de exemplo, que a prova da propriedade II-a se faz do seguinte modo:

Seja $u = (a_1, \ldots, a_n)$ um elemento de $\mathbb{R}^n$. Dados então α e β em $\mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)a_1, \ldots, (\alpha + \beta)a_n) = (\alpha a_1 + \beta a_1, \ldots, \alpha a_n + \beta a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \ldots, \beta a_n) = \alpha u + \beta u$.

Recomendamos ao leitor que procure justificar cuidadosamente cada passagem desta última dedução.

Os matemáticos estão de acordo com a seguinte frase: o $\mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial mais importante.

6) O espaço $\mathbb{C}^n$

O conjunto $\mathbb{C}^n$ das n-uplas de números complexos é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$: basta definir adição e multiplicação por um número complexo como no exemplo anterior.

7) O espaço $P_n(\mathbb{R})$

Seja $n \geqslant 0$ um número natural. Indicaremos por $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios reais de grau $\leqslant n$, mais o polinômio nulo.

O leitor, que já estudou os polinômios sobre $\mathbb{R}$, não terá dificuldades em perceber que

(a) $f(t), g(t) \in P_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow f(t) + g(t) \in P_n(\mathbb{R})$

(b) $\alpha \in \mathbb{R}, f(t) \in P_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.

Daí, lembrando as propriedades das operações com polinômios, concluirá que $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

8) O espaço $P_n(\mathbb{C})$

Por $P_n(\mathbb{C})$ indicaremos o conjunto dos polinômios complexos de grau $\leqslant n$ além do polinômio nulo. Como no exemplo anterior, com as mudanças devidas, é possível provar que $P_n(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

9) Exemplo "Patológico"

Até aqui os exemplos dados, além de importantes, correspondem a situações por assim dizer usuais. Vejamos um caso que de uma certa forma escapa dessa situação.

Seja $V = \{u \in \mathbb{R} \mid u > 0\}$. Suponhamos que consideremos a "adição" em V como sendo a multiplicação de números reais positivos, isto é,

$$u \oplus v = uv, \ \forall u, v \in V^{(*)}$$

(*) O símbolo $\oplus$ serve, neste exemplo, para distinguir a "adição" aqui definida da usual.

e que a multiplicação de um elemento de V por um número real seja dada por:

$$\alpha u = u^{\alpha}, \forall u \in V \quad \text{e} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Com isso o conjunto V se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Observemos apenas que o elemento neutro da "adição" é o número 1 e que a verificação de II-c se faz assim:

$$\alpha(u \oplus v) = \alpha(uv) = (uv)^{\alpha} = u^{\alpha}v^{\alpha} = (\alpha u)(\alpha v) = \alpha u \oplus \alpha v.$$

Nota: Na teoria dos espaços vetoriais é comum aproveitar-se a terminologia do exemplo 3 acima. Assim é que os elementos de um espaço vetorial qualquer são chamados de *vetores*, o elemento neutro da adição de *vetor nulo* desse espaço e os elementos de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de *escalares*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Como já vimos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. O $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ desde que se definam adição e multiplicação por um número real assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ e}$$
$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Faremos aqui a verificação dos axiomas relativos à multiplicação.

II-a: $(ab)(x, y) = ((ab)x, (ab)y) = (a(bx), a(by)) = a(bx, by) = a(b(x, y))$.

II-b: $(a + b)(x, y) = ((a + b)x, (a + b)y) = (ax + bx, ay + by) = (ax, ay) + (bx, by) = a(x, y) + b(x, y)$.

II-c: $a((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = a(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (a(x_1 + x_2), a(y_1 + y_2)) = (ax_1 + ax_2, ay_1 + ay_2) = (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)$.

II-d: $1(x, y) = (1x, 1y) = (x, y)$.

2. O $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todas as ternas ordenadas de números reais. Ou seja: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. A adição e a multiplicação por escalares são definidas no $\mathbb{R}^3$ por:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \text{ e}$$
$$a(x, y, z) = (ax, ay, az).$$

Faremos neste caso apenas a verificação dos axiomas relativos à adição.

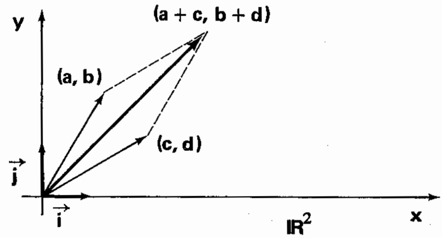
I-a: $((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) + (x_3, y_3, z_3) =$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3) =$
$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3) =$
$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3)) =$
$= (x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) =$
$= (x_1, y_1, z_1) + ((x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3))$.

I-b: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1).$

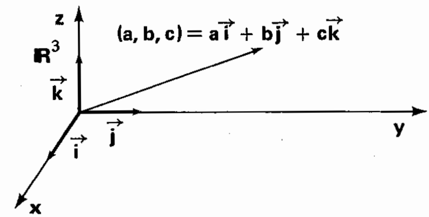
I-c: O vetor nulo é $(0, 0, 0)$.

I-d: Para cada $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $-u = (-x, -y, -z)$ o que é evidente.

Nota: Podemos associar a cada vetor (x, y) do $\mathbb{R}^2$ o vetor $x\vec{i} + y\vec{j}$ do cálculo vetorial, já do conhecimento do leitor. O vetor nulo é o par $(0, 0)$. As definições dadas de adição e multiplicação por escalares concordam com as regras usuais para a adição de vetores planos e multiplicação de um vetor plano por um número.



Fato análogo acontece com o $\mathbb{R}^3$: podemos associar a cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o vetor $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ do cálculo vetorial. As definições dadas de adição e multiplicação por escalares estão de acordo com as regras para a adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um número real no espaço geométrico estudado no Cálculo Vetorial.



Por último observemos que os elementos do $\mathbb{R}^2$ e os do $\mathbb{R}^3$ são de natureza distinta e assim sendo não deve o leitor cometer o engano de dizer que o $\mathbb{R}^2$ é subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Mais adiante será explicado que o $\mathbb{R}^2$ pode, de uma certa maneira, ser considerado idêntico ao subconjunto $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ do $\mathbb{R}^3$. (Veja Capítulo 4, § 5, exercício resolvido nº 11).

3. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e indiquemos por $C(I)$ o conjunto das funções contínuas definidas no intervalo I e tomando valores reais. Dados $f, g \in C(I)$ e $a \in \mathbb{R}$, definem-se $f + g$ e af do seguinte modo:

$$f + g^{*}: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e } (f + g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in I$$
$$af: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e } (af)(t) = af(t), \forall t \in I.$$

O Cálculo nos ensina que $f + g$ e af são funções contínuas, isto é, $f + g, af \in C(I)$. Temos então sobre $C(I)$ uma adição e uma multiplicação por escalares. E pode-se verificar que $C(I)$ é um espaço vetorial com relação a esse par de operações. Verifiquemos alguns dos axiomas.

I-a: $((f + g) + h)(t) = (f + g)(t) + h(t) = (f(t) + g(t)) + h(t) = f(t) + (g(t) + h(t)) =$
$= f(t) + (g + h)(t) = (f + (g + h))(t), \forall f, g, h \in C(I)$ e $\forall t \in I$.

I-c: A função e dada por $e(t) = 0, \forall t \in I$, é contínua, e, além disso, $(e + f)(t) =$
$= e(t) + f(t) = 0 + f(t) = f(t), \forall t \in I$.

(*) Função de I em $\mathbb{R}$.

II-a: $((ab)f)(t) = (ab)f(t) = a(bf(t)) = a((bf)(t)) = (a(bf))(t), \forall t \in I.$

II-c: $(a(f + g))(t) = a(f + g)(t) = a(f(t) + g(t)) = af(t) + ag(t) = (af)(t) +$
$+ (ag)(t) = (af + ag)(t), \forall t \in I.$

4. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Mostrar que $U \times V = \{(u, v) \mid u \in U$ e $v \in V\}$ é um espaço vetorial em relação ao seguinte par de operações:

(I) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$

(II) $a(u, v) = (au, av)$.

Provemos algumas das condições.

I-b: $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) = (u_2 + u_1, v_2 + v_1) = (u_2, v_2) +$
$+ (u_1, v_1)$.

I-c: O vetor nulo neste caso é (o, o), onde o primeiro o é o vetor nulo de U e o segundo é o vetor nulo de V.

II-d: $1(u, v) = (1u, 1v) = (u, v)$.

O espaço vetorial $U \times V$ acima definido chama-se espaço vetorial *produto* de U e V.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Completar as verificações nos exercícios 1, 2, 3 e 4 anteriores.

2. No conjunto $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definamos "adição" assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$$

e multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Nessas condições V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

3. No conjunto V do exercício anterior definamos a "adição" como o fazemos habitualmente no $\mathbb{R}^2$ e a multiplicação por escalares assim:

$$a(x, y) = (ax, 0).$$

É então V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

4. Seja V o conjunto dos pares ordenados de números reais. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre V:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $a(x, y) = (x, ay)$, e

b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ e $a(x, y) = (ax, ay)$.

Diga em cada caso quais dos 8 axiomas não se verificam.

5. Seja V como no exercício anterior. Definamos:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1),$$
$$a(x, y) = (3ay, -ax),$$

Com essas operações definidas sobre V, perguntamos se este conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

6. Seja $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$. Mostrar que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a adição e a multiplicação por escalares definidas assim:

(I) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\forall (x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2) \in V$ e

(II) $a(x, y) = (ax, ay)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall (x, y) \in V$.

7. Seja $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Considerando sobre $\mathbb{R}^\infty$ as operações dadas por $(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ e $a(x_1, x_2, \ldots) = (ax_1, ax_2, \ldots)$, mostrar que $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Mostrar que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. PRIMEIRAS PROPRIEDADES DE UM ESPAÇO VETORIAL

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Provaremos a seguir algumas propriedades que são conseqüências praticamente imediatas da definição de espaço vetorial.

P_1. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha o = o$.

Prova — Devido aos axiomas II-c e I-c da definição de espaço vetorial têm-se: $\alpha o = \alpha(o + o) = \alpha o + \alpha o$; somando a ambos os membros o vetor $-(\alpha o)$ temos $o = -(\alpha o) + \alpha o = -\alpha o + \alpha o + \alpha o = \alpha o$. ■

P_2. Para todo $u \in V$, $0u = o$.

Prova — Do mesmo tipo da anterior. Fica como exercício. ■

P_3. Uma igualdade $\alpha u = o$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, só é possível se $\alpha = 0$ ou $u = o$.

Prova — Suponhamos $\alpha \neq 0$. Daí existe o número real α^{-1}. Multiplicando então $\alpha u = o$ por α^{-1} teremos:

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1} o$$

Levando em conta o axioma II-a e a propriedade P_1:

$$(\alpha^{-1}\alpha)u = o$$

Como $\alpha\alpha^{-1} = 1$, então podemos concluir (usando o axioma II-d) que

$$u = o. \blacksquare$$

P_4. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo u de V, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.

Prova — Notemos que

$$\alpha u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0u = o$$

usando o axioma II-b e P_2. Por outro lado,

$$\alpha u + (-\alpha u) = o.$$

Então:

$$\alpha u + (-\alpha)u = \alpha u + (-\alpha u).$$

Somando $-\alpha u$ a ambos os membros desta última igualdade acharemos:

$$(-\alpha)u = -\alpha u.$$

Um raciocínio análogo nos mostrará que $\alpha(-u) = -(\alpha u)$. $\blacksquare$

Nota: Define-se diferença entre dois vetores u e v do espaço V assim:

$$u - v = u + (-v).$$

P_5. Quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u em V, $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$.

Prova

$(\alpha - \beta)u = (\alpha + (-\beta))u = \alpha u + (-\beta)u = \alpha u + (-(\beta u)) = \alpha u - \beta u$. $\blacksquare$

P_6. Quaisquer que sejam α em $\mathbb{R}$, u e v em V, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Prova — Análoga à anterior. Fica como exercício. $\blacksquare$

P_7. Dados $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n$ em V, então:

$$\beta\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_j)u_j.$$

Prova — Faz-se por indução a partir dos axiomas II-a e II-c da definição de espaço vetorial. $\blacksquare$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Além das propriedades de P_1 a P_7, enunciadas e demonstradas acima, podemos ainda citar:

1. O vetor nulo de um espaço vetorial V é unico.

   Prova

   Há um único vetor o que satisfaz I-c, pois se o_1 goza da mesma propriedade, então $o = o + o_1 = o_1 + o = o_1$.

2. Para cada vetor u de um espaço vetorial V existe um único vetor $(-u)$, *oposto* de u.

   Prova

   Seja u_1 tal que $u + u_1 = o$. Daí então,

   $$-u = -u + o = -u + (u + u_1) = (-u + u) + u_1 = o + u_1 = u_1.$$

3. Para cada $u \in V$, tem-se $-(-u) = u$.

   Prova

   O axioma I-a diz que $(-u) + u = u + (-u) = o$. Logo u é o oposto de $-u$.

4. Se u, v e $w \in V$ e $u + v = u + w$, então $v = w$ (lei do cancelamento da adição).

   Prova

   Somemos $-u$ à igualdade que consta da hipótese:

   $$\begin{aligned} (-u) + (u + v) &= (-u) + (u + w) && \text{(I-a)} \\ ((-u) + u) + v &= ((-u) + u) + w && \text{(I-d)} \\ o + v &= o + w && \text{(I-c)} \\ v &= w \end{aligned}$$

5. Se u, $w \in V$, então existe um único vetor v tal que $u + v = w$.

   Prova

   Inicialmente verifica-se que $w + (-u)$ satisfaz a equação dada. De fato: $u + (w + (-u)) = u + ((-u) + w) = (u + (-u)) + w = o + w = w$. Por outro lado, somando $(-u)$ ambos os membros da equação, vem: $(-u) + (u + v) = (-u) + w$. Daí $((-u) + u) + v = w + (-u)$. Logo $v = w + (-u)$.

6. Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ os vetores $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -2)$ e $w = (4, 1, 0)$.

   a) Calcular $2u + v - 3w$;

   b) Resolver a equação $3u + 2x = v + w$;

   c) Resolver o sistema de equações

   $$\begin{aligned} u + y &= v + z \\ v + 2z &= y \end{aligned}$$

   nas incógnitas $y, z \in \mathbb{R}^3$.

Solução

a) $2u + v - 3w = (2,4,2) + (3,1,-2) - (12,3,0) = (-7,2,0)$.

b) Aplicando-se as propriedades já conhecidas vem $x = \frac{1}{2}(v + w - 3u)$. Fazendo os cálculos obtemos $x = (2, -2, -\frac{5}{2})$;

c) Do sistema dado obtém-se:

$$\begin{cases} y - z = v - u \\ -y + 2z = -v. \end{cases}$$

Adicionando membro a membro estas últimas equações obtemos $z = -u = (-1, -2, -1)$ e, então, $y = z + v - u = (1, -3, -4)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. No espaço vetorial $M_{3\times2}(\mathbb{R})$, consideremos os vetores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $2A + B - 3C$;

b) Calcular $X \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ tal que $\frac{A + X}{2} - \frac{X - B}{3} = C$;

c) Existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que $A = t_1B + t_2C$?

2. Seja $u = (1 + i, i)$, $v = (1 - i, 2i)$ e $w = (2, 3 + i)$ vetores no espaço vetorial $\mathbb{C}^2$.

a) Calcular $(3 + i)u - iv - (2 - i)w$;

b) Existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $v = zu$?

3. No espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ sejam dados os vetores $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t^2 + t - 1$ e $h(t) = t + 2$.

a) Calcular $2f(t) + 3g(t) - 4h(t)$;

b) Existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $f(t) + kg(t) = h(t)$?

c) Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = k_1g(t) + k_2h(t)$?

4. No $\mathbb{R}^2$ consideremos os vetores $u = (1, 1)$, $v = (3, -2)$ e $w = (3, -2)$.

a) Resolver a equação:

$$\frac{x + u}{2} + \frac{v + x}{3} = w,$$

na incógnita $x \in \mathbb{R}^2$;

b) Resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = u \\ 2x - y + z = v \\ x + y - 2z = w \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, $z \in \mathbb{R}^2$.

4. SUB-ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 2 – Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *sub-espaço vetorial* de V é um subconjunto $W \subset V$, tal que:

(a) $o \in W$;

(b) $\forall u, v \in W, u + v \in W$; e

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W, \alpha u \in W$.

Notemos que (b) significa que a adição de V, restrita a W, é uma adição em W. O significado de (c) é que está definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times W$ em W. Mas será W, nessas condições, um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

Proposição 1 – Se W é um sub-espaço vetorial de V, então W também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Demonstração – A rigor temos oito itens a provar (ver definição de espaço vetorial). Contudo mostraremos apenas que:

$$u \in W \Longrightarrow -u \in W$$

uma vez que os demais itens decorrem sem artifícios das hipóteses.

Mas isso é fácil: é só fazer em (c) $\alpha = -1$. ∎

Exemplos

1) Para todo espaço vetorial V é imediato que $\{o\}$ e V são sub-espaços de V. São os chamados sub-espaços impróprios ou triviais.

2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ é sub-espaço de $\mathbb{R}^3$.

(a) $o = (0, 0, 0) \in W$ (por quê?);

(b) se $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ estão em W, então $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = 0$. Como $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$, então $u + v \in W$.

(c) Exercício.

3) A intersecção de dois sub-espaços vetoriais do mesmo espaço V é também um sub-espaço vetorial de V.

Sejam W e U esses sub-espaços.

(a) $o \in U$ e $o \in W$. Logo $o \in U \cap W$.

(b) Exercício.

(c) Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in U \cap W$. Como $u \in U$ e $u \in W$ (que são sub-espaços), então $\alpha u \in U$ e $\alpha u \in W$. Logo $\alpha u \in U \cap W$.

4) Consideremos um sistema linear homogêneo sobre $\mathbb{R}$ de tipo $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Já vimos, o que é óbvio, que $(0, 0, \ldots, 0)$ é solução desse sistema. Por outro lado é fácil verificar que a soma de duas soluções de S é solução de S e que o produto de uma solução de S por um número real também é solução desse sistema. Verifiquemos a última afirmação. Se $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ é solução, é verdadeira a frase $a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \ldots + a_{jn}\beta_n = 0, \forall j, 1 \leqslant j \leqslant m$. Logo, para todo $k \in \mathbb{R}$, também é verdadeira a frase

$$k(a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \ldots + a_{jn}\beta_n) = 0$$

que é equivalente a

$$a_{j1}(k\beta_1) + a_{j2}(k\beta_2) + \ldots + a_{jn}(k\beta_n) = 0$$

Esta última nos mostra que $(k\beta_1, k\beta_2, \ldots, k\beta_n)$ também é solução do sistema considerado.

O conjunto solução de um sistema homogêneo é chamado *espaço solução* desse sistema. Trata-se de um sub-espaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

5) $P_s(\mathbb{R})$ é sub-espaço de $P_n(\mathbb{R})$ desde que $0 \leqslant s \leqslant n$ (exercício);

6) O conjunto das matrizes simétricas é um sub-espaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

7) Se V é um espaço vetorial e $v \in V$, o conjunto dos vetores da forma λv, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é um sub-espaço de V.

5. SOMAS DE SUB-ESPAÇOS

Sejam U e V sub-espaços vetoriais de um espaço vetorial W.

Definição 3 – Indicaremos por U + V e chamaremos de soma de U com V o seguinte subconjunto de W:

$$U + V = \{u + v \mid u \in U \text{ e } v \in V\}.$$

Nota: É claro que $U + V = V + U$ e que $U + \{o\} = U$, para todos os sub-espaços U e V de W. Também é verdade que

$$U \subset U + V \quad \text{e} \quad V \subset U + V.$$

Proposição 2 – Se U e V são sub-espaços vetoriais de W, então U + V também é um sub-espaço vetorial de W.

Demonstração

(a) Como $o = o + o$, $o \in U$ e $o \in V$, então $o \in U + V$.

(b) Sejam $w_1 = u_1 + v_1$ e $w_2 = u_2 + v_2$ elementos de U + V, onde estamos supondo $u_1, u_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in V$. Então:

$$w_1 + w_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2).$$

Como $u_1 + u_2$ e $v_1 + v_2$ pertencem a U e V, respectivamente, então $w_1 + w_2 \in$ $\in U + V$.

(c) Exercício. ■

Definição 4 – Sejam U e V sub-espaços vetoriais de W tais que $U \cap V =$ $= \{o\}$. Neste caso diz-se que U + V é *soma direta* dos sub-espaços U e V. Notação: $U \oplus V$.

Se U e V são sub-espaços de W tais que $U \oplus V = W$ dizemos que U e V são *suplementares* ou que U é *suplementar* de V (ou V é *suplementar* de U).

Proposição 3 – Sejam U e V sub-espaços vetoriais de um espaço vetorial W. Então $W = U \oplus V$ se, e somente se, cada vetor $w \in W$ admite uma única decomposição $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$.

Demonstração

($\Longrightarrow$) Por hipótese a decomposição existe. Suponhamos $w = u + v =$ $= u_1 + v_1$ ($u, u_1 \in U$ e $v, v_1 \in V$). Daí $u - u_1 = v_1 - v$. Como $v_1 - v \in V$ (pois ambos os termos estão em V), então $u - u_1 \in U \cap V = \{o\}$. Logo $u - u_1 = o$ e então $u = u_1$. Levando em conta isto conclui-se que $v_1 - v = o$ e portanto que $v_1 = v$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $w \in U \cap V$. Tomando então $u \in U$ e $v \in V$, teremos:

$$u + v = (u + w) + (v - w).$$

Devido à unicidade que a hipótese menciona podemos afirmar que:

$$u = u + w \quad e \quad v = v - w.$$

Logo $w = o$. Provamos pois que $U \cap V = \{o\}$. ■

Exemplo — O espaço $\mathbb{R}^3$ é soma direta dos sub-espaços:

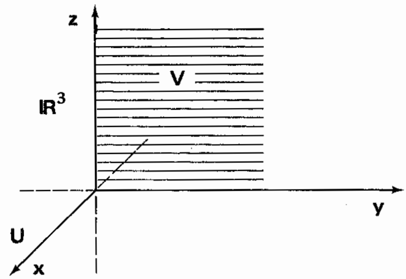
$U = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e

$V = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

É imediato que:

$U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$;

por outro lado, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, z) \in U + V$.



6. COMBINAÇÕES LINEARES

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Tomemos um subconjunto $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$. Indiquemos por $[S]$ o seguinte subconjunto de V construído a partir de S:

$$[S] = \{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

É fácil ver que $[S]$ é um sub-espaço vetorial de V. De fato:

(a) Como $o = 0u_1 + \ldots + 0u_n$, então $o \in S$.

(b) Se $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ e $w = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$ pertencem a S, então

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)u_n$$

também é um elemento de S.

(c) Exercício.

Definição 5 — O sub-espaço $[S]$ que acabamos de construir recebe o nome de *sub-espaço gerado por S*. Cada elemento de $[S]$ é uma *combinação linear de S* ou *combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$*. Ao invés de $[S]$ também costuma-se escrever:

$$[u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

Diz-se também que $u_1, \ldots, u_n$ *geram* $[S]$, ou então que são um sistema de geradores de $[S]$.

Notas:

1) Estenderemos a definição acima para o caso $S = \emptyset$ mediante a seguinte convenção: $[\emptyset] = \{0\}$.

2) No caso de $S \subset V$ ser um conjunto infinito, definimos $[S]$ através da seguinte frase:

$$u \in [S] \Longleftrightarrow \exists v_1, \ldots, v_t \in S \text{ e}$$
$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R} \mid u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_t v_t.$$

Da definição 5 e de suas ampliações, dadas acima, decorrem as seguintes propriedades que deixamos ao leitor como exercícios:

a) $S \subset [S]$

b) $S_1 \subset S_2 \subset V \Longrightarrow [S_1] \subset [S_2]$

c) $[S] = [[S]]$

d) Se S_1 e S_2 são subconjuntos de V, então:

$$[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2].$$

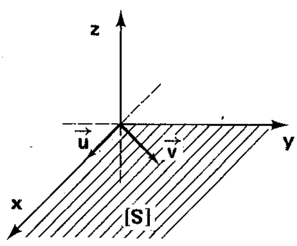
Exemplo – Se $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 0)$ o que é $[u, v]$?

$$[u, v] = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + \beta, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ uma vez que o sistema}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \qquad \beta = y \end{cases}$$

é compatível determinado, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Graficamente:



7. ESPAÇOS VETORIAIS FINITAMENTE GERADOS

Observemos no $\mathbb{R}^3$ o conjunto

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Como, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vale a igualdade:

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

podemos dizer que os vetores de S geram o $\mathbb{R}^3$. Muitos outros subconjuntos finitos do $\mathbb{R}^3$ têm essa mesma propriedade, o que não é difícil de notar.

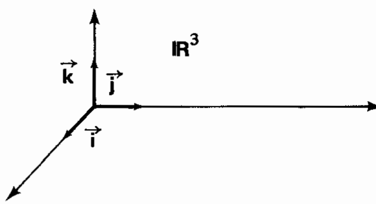
Definição 6 – Dizemos que um espaço vetorial V é *finitamente gerado* se existe $S \subset V$, S finito, de maneira que $V = [S]$.

Neste texto praticamente só focalizaremos espaços vetoriais que, como o $\mathbb{R}^3$, possam ser gerados por um número finito dos seus vetores.

Salvo menção contrária somente consideraremos este tipo de espaço vetorial.

Exemplos

1) O espaço V dos vetores da geometria definidos por segmentos orientados é finitamente gerado pois considerando a terna fundamental $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ para todo $\vec{u} \in V$, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, de maneira que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.



Ressalte-se que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ desde que se tenham identificado V e $\mathbb{R}^3$.

2) Se o indica o vetor nulo de um espaço vetorial qualquer, então $V = \{o\}$ é finitamente gerado pois, fazendo $S = \{o\}$, vale $V = [S]$.

3) $M_2(\mathbb{R})$ é finitamente gerado. O conjunto

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

gera $M_2(\mathbb{R})$ já que, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $\mathbb{R}^n$ é finitamente gerado. Com efeito, generalizando o raciocínio feito ao início do parágrafo verifica-se que o conjunto

$$S = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$$

verifica a igualdade $\mathbb{R}^n = [S]$, ou seja, que S gera o $\mathbb{R}^n$. Convém notar que o conjunto S é formado de n elementos.

5) $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado. Verifique que as $m \cdot n$ matrizes do conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

geram o $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, generalizando a decomposição feita no exemplo 3 acima.

6) $P_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado. Os polinômios $f_0, f_1, \ldots, f_n$ dados por $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t, \ldots, f_n(t) = t^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, são geradores de $P_n(\mathbb{R})$ uma vez que se $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ é um elemento de $P_n(\mathbb{R})$, então

$$f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n.$$

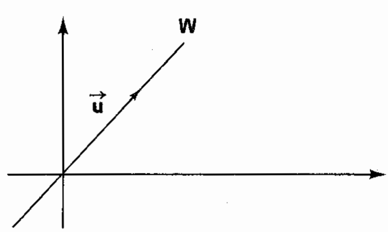
Observe que $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ possui $n + 1$ polinômios.

Nota: No apêndice II, logo a seguir, daremos um exemplo de espaço vetorial que não é finitamente gerado.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja V o conjunto dos vetores geométricos do espaço. Sendo $\vec{u}$ um vetor fixo desse espaço, mostrar que $W = \{\alpha\vec{u} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um sub-espaço vetorial de V.

Solução



(a) $\vec{0} \in W$: basta considerar $\alpha = 0$.

(b) Sendo $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ e $\vec{w} = \beta\vec{u}$ em W, então $\vec{v} + \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = (\alpha + \beta)\vec{u}$, logo $\vec{v} + \vec{w} \in W$.

(c) Sejam $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; então $\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{u}) = (\lambda\alpha)\vec{u}$, logo $\vec{v} \in W$.

2. Mostrar que o conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ é um sub-espaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

(a) $(0, 0) \in W$.

(b) Sejam $u = (x_1, 0)$ e $v = (x_2, 0)$ em W; daí $u + v = (x_1 + x_2, 0)$, donde $u + v \in W$.

(c) Sejam $u = (x, 0)$ em W e α em $\mathbb{R}$; então $\alpha u = (\alpha x, 0)$, donde $\alpha u \in W$.

Outra maneira de resolver: observar que W é gerado por $(1, 0)$.

3. Mostrar que é sub-espaço de $M_2(\mathbb{R})$ o seguinte sub-conjunto:

$$W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid y = -x\right\}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$;

(b) Sejam $u = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}$ elementos de W. Então:

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{pmatrix}$$

Como $y_1 + y_2 = (-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2)$, então $u + v \in W$.

(c) Sejam:

$$u = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ em } W \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Daí } \alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha t \end{pmatrix}$$

Como $\alpha y = \alpha(-x) = -(\alpha x)$, então $\alpha u \in W$.

4. Seja I um intervalo real e consideremos o espaço vetorial C(I) das funções reais contínuas definidas em I. Mostrar que o subconjunto W de C(I) constituído das funções que são deriváveis em todos os pontos de I é um sub-espaço vetorial de C(I).

Solução

O cálculo nos ensina que a função nula é derivável, que a soma de duas funções deriváveis é derivável e que o produto de uma função derivável por um número é uma função derivável.

5. Mostrar que são sub-espaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$ os seguintes subconjuntos:

a) $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$

b) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AT = TA\}$ onde T é uma matriz dada de $M_n(\mathbb{R})$.

Solução

a) (a) A transposta da matriz nula é a própria matriz nula.

(b) Sejam A, B $\in$ U. Como $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$, então $A + B \in U$.

(c) Sejam $A \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Do fato de $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$ segue que $\alpha A \in U$.

b) (a) A matriz nula comuta com todas as matrizes.

(b) Sejam A, B $\in$ V. Então AT = TA e BT = TB. Daí $(AB)T = A(BT) = A(TB) = (AT)B = (TA)B = T(AB)$.

(c) Sejam $A \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $(\alpha A)T = \alpha(AT) = \alpha(TA) = T(\alpha A)$.

6. Provar que se S e T são sub-espaços vetoriais de um espaço V, então $S + T = [S \cup T]$.

Solução

Como $S + T \supset S$ e $S + T \supset T$, então $S + T \supset S \cup T$. Daí $S + T \supset [S \cup T]$. Por outro lado, se $u \in S + T$, então $u = s + t$ (com $s \in S$ e $t \in T$). Como, então, s e t pertencem a $S \cup T$, podemos afirmar que $u = s + t \in [S \cup T]$. Logo $S + T \subset [S \cup T]$.

7. Achar um conjunto de geradores (sistema de geradores) dos seguintes sub-espaços de $\mathbb{R}^4$:

a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$;

b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z + t = 0\}$.

Solução

a) $(x, y, z, t) \in U$ se, e somente se, $x - y - z + t = 0$, isto é, se, e somente se, $x = y + z - t$. Logo $(x, y, z, t) \in U$ equivale a $(x, y, z, t) = (y + z - t, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$. Assim:

$$\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$$

é um conjunto de geradores de U.

b) De maneira análoga chega-se a que $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$ é um sistema de geradores de V.

8. Consideremos no $\mathbb{R}^3$ os seguintes sub-espaços vetoriais:

$$U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad V = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Determinar um sistema de geradores de $U \cap V$.

Solução

$w \in U \cap V \iff w \in U, w \in V \iff \exists\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 1) = \gamma(0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$$

ou ainda que:

$$\alpha + \beta = 0,\ \beta - \gamma = 0,\ \beta - \delta = 0. \text{ Daí } \alpha = -\beta,\ \gamma = \beta \text{ e } \delta = \beta.$$

Donde $w = -\beta(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 1) = \beta(0, 1, 1)$. Então $U \cap V = [(0, 1, 1)]$.

9. Dados os sub-espaços $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$, determinar o sub-espaço $U \cap V$.

Solução

$u = (x, y, z) \in U \cap V \iff u \in U$ e $u \in V \iff x + y = 0$ e $x = 0 \iff x = y = 0$. Logo $U \cap V = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, que é gerado pelo vetor $(0, 0, 1)$.

10. São sub-espaços vetoriais de $C(I)$ os seguintes subconjuntos:

$$U = \{f \in C(I) \mid f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$

$$V = \{f \in C(I) \mid f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Mostrar que $C(I) = U \oplus V$.

Solução

(a) Toda função real f definida em I pode ser assim decomposta: $f(t) = g(t) + h(t)$, $\forall t \in I$, onde

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{e} \quad h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

Como

$$g(-t) = \frac{f(-t) + f(t)}{2} = g(t) \quad \text{e} \quad h(-t) = \frac{f(-t) - f(t)}{2} = -h(t),$$

então $g \in U$ e $h \in V$. Portanto $C(I) = U + V$.

(b) Se $f \in U \cap V$, então $f(t) = f(-t)$ e $f(t) = -f(-t)$, $\forall t \in I$. Logo $2f(t) = 0$, $\forall t \in I$. Donde f é a função nula. Assim então $U \cap V$ só contém a função nula $f(t) = 0$, $\forall t \in I$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são sub-espaços do $\mathbb{R}^3$?

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in Z\}$

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \text{ é irracional}\}$

(d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3z = 0\}$

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

2. Quais dos conjuntos abaixo são sub-espaços do espaço $P(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais? (Leia o apêndice II).

(a) $W = \{f(t) \in P(R) \mid f(t) \text{ tem grau maior que } 2\}$

(b) $W = \{f(t) \mid f(0) = 2f(1)\}$

(c) $W = \{f(t) \mid f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $W = \{f(t) \mid f(t) + f'(t) = 0\}$

*3. Verificar que não são sub-espaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z = 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leqslant y \leqslant z\}$

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \in Q\}$

Em cada caso quais axiomas não se verificam? (Q é o conjunto dos números racionais.)

*4. Seja $I = [0, 1]$. Verificar se são sub-espaços vetoriais de $C(I)$ (veja exercício resolvido nº 4):

(a) $\{f \in C(I) \mid f(0) = 0\}$

(b) $\{f \in C(I) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$

(c) $\{f \in C(I) \mid f(0) = f(1)\}$

(d) $\{f \in C(I) \mid f(t) = 0$ em todos os pontos de I menos um número finito deles$\}$.

*5. Seja V um espaço vetorial. Se $(U_j)_{j \in J}$ é uma família de sub-espaços vetoriais de V, mostrar que $\bigcap_{j \in J} U_j$ também é um sub-espaço vetorial de V.

*6. Seja V um espaço vetorial. Dado um subconjunto $S \neq \emptyset$ de V, provar que a intersecção de todos os sub-espaços vetoriais de V que contêm S também é um sub-espaço vetorial de V, sendo o menor sub-espaço de V que contém S.

7. Sejam U, V e W os seguintes sub-espaços do $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \mid x = z\},$$
$$V = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\} \text{ e}$$
$$W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?

8. Mostrar que os polinômios $1 - t$, $(1 - t)^2$, $(1 - t)^3$ e 1 geram $P_3(\mathbb{R})$.

9. Dar um sistema de geradores para cada um dos seguintes sub-espaços do $\mathbb{R}^3$:

a) $U = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$

b) $V = \{(x, y, z) \mid x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$

c) $W = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\}$

d) $U \cap V$

e) $V + W$.

10. Sejam U e V sub-espaços vetoriais do espaço W. Provar que:

a) $U \subset V \Longrightarrow U + V = V$;

b) $U \subset V \Longrightarrow U \cap V = U$;

c) $U + V = U \Longrightarrow U \supset V$;

d) $U \cap V = U \Longrightarrow U \subset V$.

*11. Sejam u e v dois vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Se não existe nenhum $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, mostrar que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos sub-espaços [u] e [v].

12. Verificar se as seguintes matrizes geram o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*13. Se U, V e W são sub-espaços vetoriais do mesmo espaço, mostrar que $(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$. Descubra um exemplo para o qual o primeiro membro dessa relação é diferente do segundo e um exemplo onde ocorre igualdade.

14. Mostrar que os números complexos $2 + 3i$ e $1 - 2i$ geram o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

15. Mostrar que é sub-espaço de $M_n(\mathbb{R})$ o subconjunto formado pelas matrizes anti-simétricas. Mostrar também que $M_n(\mathbb{R})$ é soma direta dos sub-espaços das matrizes simétricas e das anti-simétricas.

16. Mostrar que os dois conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo sub-espaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

*17. Mostrar com um exemplo que se U, V e W são sub-espaços vetoriais do mesmo espaço, e se valem as relações $U \cap V = U \cap W$ e $U + V = U + W$, não se tem necessariamente $V = W$.

18. Mostrar com um exemplo que a união de dois sub-espaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser um sub-espaço vetorial desse espaço.

19. Mostrar que a união de sub-espaços vetoriais do mesmo espaço é também um sub-espaço se, e somente se, um dos sub-espaços dados está contido no outro.

*20. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $(-1, 0, 1)$ e $(3, 4, -2)$. Determinar um sistema de equações homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o sub-espaço gerado por esses vetores.

*21. Repita o exercício 20 com os vetores $(1, 0, 1, 2)$, $(0, 0, 1, 0)$ do $\mathbb{R}^4$.

22. (a) Determinar um suplementar do seguinte sub-espaço do $\mathbb{R}^3$: $\{(x, y, z) \mid x - y = 0\}$

(b) Mesmo exercício com o sub-espaço:

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0\} \text{ do } \mathbb{R}^4.$$

23. Mostrar que os dois conjuntos abaixo formados de funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}$ geram o mesmo sub-espaço vetorial de $C(\mathbb{R})$:

$$\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cdot \cos t\} \quad \text{e} \quad \{1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\}$$

*24. Sejam U, V e W sub-espaços vetoriais do mesmo espaço para os quais valem o seguinte: $U \cap (V + W) = V \cap W = \{o\}$. Provar que se $u + v + w = o$ (vetor nulo), com $u \in U$, $v \in V$ e $w \in W$, então $u = v = w = o$.

*25. Mostrar que o espaço vetorial $\mathbb{R}^{\infty}$ (exercício proposto 7 – § 2) não é finitamente gerado.

Sugestão: raciocinar como será feito no apêndice II.

APÊNDICE II

Exemplo de Espaço que não é Finitamente Gerado

Indiquemos por $P(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios reais. O leitor, lembrando a operação adição de polinômios e a operação multiplicação de um polinômio por um número, concluirá que $P(\mathbb{R})$, com esse par de operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Mas $P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Com efeito, dado $S = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset P(\mathbb{R})$, supondo que cada f_i seja não nulo e que f_n seja o polinômio de maior grau de S, então o grau de qualquer combinação linear

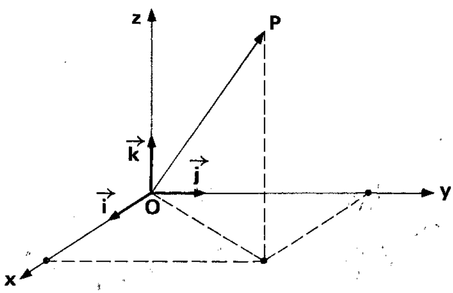
$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$$

não ultrapassa o grau de f_n. Assim $[S]$ só contém polinômios de grau menor que ou igual ao de f_n. Como porém $P(\mathbb{R})$ compreende todos os polinômios reais, existem neste espaço polinômios de grau maior que o de f_n. Logo $[S] \neq P(\mathbb{R})$, para todo conjunto finito $S \subset P(\mathbb{R})$.

CAPÍTULO 3

Base e Dimensão

Lembremos o seguinte fato relacionado com o espaço dos vetores da geometria, definidos por meio de segmentos orientados: se considerarmos um sistema de coordenadas ortogonais, de origem O, e se chamarmos de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ os três vetores unitários com os sentidos dos eixos x, y e z, respectivamente, então cada vetor $\overrightarrow{OP}$ admite uma única representação $\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, onde a, b e c são as coordenadas de P, em relação ao sistema considerado.



Nosso objetivo principal, neste capítulo, é mostrar que em todo espaço vetorial finitamente gerado V existe um subconjunto finito B tal que todo elemento de V é combinação linear, de uma única maneira, desse subconjunto. E que todos os outros subconjuntos de V que têm também essa propriedade (sempre os há) possuem o mesmo número de elementos que B.

Daí sairá então o conceito de "dimensão".

1. DEPENDÊNCIA LINEAR

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1 — Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ é *linearmente independente* (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = o$$

com os α_i em $\mathbb{R}$, só for possível para $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Definição 2 – Dizemos que $L = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é *linearmente dependente* (L.D.) se, e somente se, L não é L.I., ou seja, é possível uma igualdade do tipo

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = o$$

sem que os escalares α_i sejam todos iguais ao número zero.

Exemplos

1) O conjunto $L = \{(1, 1, 0, 0); (0, 2, 1, 0); (0, 0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I. pois:

$$x(1, 1, 0, 0) + y(0, 2, 1, 0) + z(0, 0, 0, 3) = (0, 0, 0, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = z = 0$$

2) O conjunto $L = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.D. pois:

$$x(1, 1, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + z(2, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Sendo indeterminado o sistema obtido, então há outras soluções, além da trivial, para a igualdade condicional de que partimos.

Nota: Convencionaremos que o conjunto vazio ($\emptyset \subset V$) é L.I. Como para um subconjunto $L \subset V$ deve valer uma, e uma só, das duas definições anteriores e a segunda destas pressupõe elementos em L, fica justificada esta convenção.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, são linearmente independentes.

   a) $\{(1, 1, 0), (1, 4, 5), (3, 6, 5)\}$

   b) $\{(1, 2, 3), (1, 4, 9), (1, 8, 27)\}$

   c) $\{(1, 2, 1), (2, 4, 2), (5, 10, 5)\}$

   Solução

   a) Façamos: $x(1, 1, 0) + y(1, 4, 5) + z(3, 6, 5) = (0, 0, 0)$.

Portanto:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite outras soluções além da trivial; daí o conjunto é linearmente dependente. Como $x = -2$, $y = -1$ e $z = 1$ é uma solução não trivial temos $-2(1, 1, 0) - (1, 4, 5) + (3, 6, 5) = (0, 0, 0)$. Esta é uma relação de dependência entre os 3 vetores dados.

b) $x(1, 2, 3) + y(1, 4, 9) + z(1, 8, 27) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 8z = 0 \\ 3x + 9y + 27z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \\ 6y + 24z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Daí, a única solução é a trivial, e o conjunto é linearmente independente.

c) $x(1, 2, 1) + y(2, 4, 2) + z(5, 10, 5) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + 10z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem: $x + 2y + 5z = 0$ e o sistema é indeterminado, isto é, além da solução trivial admite outras soluções; portanto o conjunto é linearmente dependente. Achar uma relação de dependência entre os 3 vetores.

2. Se u, v e w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostrar que $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Solução

Os vetores u e v são da forma $u = \lambda w$ e $v = \alpha w$, com $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$. O caso $\alpha = \lambda = 0$ é trivial pois então $u = v = o$ e basta ver que $1u + 1v = o$. Supondo por exemplo $\lambda \neq 0$, então $\lambda v - \alpha u = \lambda(\alpha w) - \alpha(\lambda w) = (\lambda\alpha - \alpha\lambda)w = 0w = o$; logo $\{u, v\}$ é L.D.

3. Consideremos, no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores: $u = (1 - \alpha, 1 + \alpha)$ e $v = (1 + \alpha, 1 - \alpha)$ onde $\alpha \neq 0$. Mostrar que $\{u, v\}$ é L.I.

Solução

Seja $x(1 - \alpha, 1 + \alpha) + y(1 + \alpha, 1 - \alpha) = (0, 0)$

ou, o que é equivalente,

$$\begin{cases} (1 - \alpha)x + (1 + \alpha)y = 0 \\ (1 + \alpha)x + (1 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

Esse sistema linear e homogêneo não deve ter soluções diferentes da trivial, para o que é necessário e suficiente que a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & 1 + \alpha \\ 1 + \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

seja inversível, isto é, que o sistema seja de Cramer. Como α foi tomado não nulo esta matriz é inversível e daí $\{u, v\}$ é L.I.

4. Mostrar que o conjunto de vetores $\{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\}$ de $P_3(\mathbb{R})$ é L.D. e que qualquer subconjunto de três elementos dele é L.I.

Solução

Se fizermos $\alpha 1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta(2 + x + 2x^2) = 0$ (1)

(o zero do segundo membro de (1) é o polinômio identicamente nulo), virá:

$$\alpha + 2\delta + (\beta + \delta)x + (\gamma + 2\delta)x^2 = 0.$$

Pelo princípio de identidade de polinômios, teremos:

$$\begin{cases} \alpha + 2\delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \gamma + 2\delta = 0 \end{cases}$$

O sistema admite outras soluções, além da trivial, o que nos leva a concluir que o conjunto é L.D.

Um subconjunto qualquer do conjunto dado, por exemplo $\{1, x, x^2\}$ é L.I.; de fato, $\alpha 1 + \beta x + \gamma x^2 = 0$, implica $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pelo princípio de identidade de polinômios. Nos 3 demais casos procede-se do mesmo modo.

5. Mostrar que o conjunto $\{(1, 0, \alpha), (1, 1, \alpha), (1, 1, \alpha^2)\}$ de vetores do $\mathbb{R}^3$ é L.I., desde que $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

Solução

Para que o conjunto seja L.I. é necessário e suficiente que:

$$x(1, 0, \alpha) + y(1, 1, \alpha) + z(1, 1, \alpha^2) = (0, 0, 0) \qquad (1)$$

só se verifique para $x = y = z = 0$. Ora de (1), vem:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ \alpha x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \end{cases} \quad \text{e daí}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha)z = 0 \end{cases}$$

Como $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ então $\alpha^2 - \alpha \neq 0$, o que acarreta $z = 0$ e daí vem $y = 0$ e $x = 0$.

6. Mostrar que se o conjunto $\{u, v, w\}$ de vetores de um espaço vetorial V for L.I., o mesmo acontecerá com o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$

Solução

Com efeito, façamos:

$$x(u + v) + y(u + w) + z(v + w) = o$$

Daí, segue:

$$(x + y)u + (x + z)v + (y + z)w = o$$

Mas o conjunto $\{u, v, w\}$ é L.I. Então:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

e o sistema só admite a solução trivial $x = y = z = 0$.

Logo, o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ é L.I.

7. Mostrar que o conjunto de vetores $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ é L.D. sobre $\mathbb{C}$ mas L.I. sobre $\mathbb{R}$.

Solução

No primeiro caso, devemos mostrar que existem $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tais que

$$z_1(1 - i, i) + z_2(2, -1 + i) = (0, 0), \text{ com } z_1 \neq 0 \text{ ou } z_2 \neq 0. \qquad (1)$$

É fácil verificar que $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1$ satisfazem (1), o que mostra que o conjunto é L.D. sobre $\mathbb{C}$. No segundo caso, sendo $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(1 - i, i) + y(2, -1 + i) = (0, 0),$$

vem:

$$\begin{cases} (1 - i)x + 2y = 0 \\ ix + (i - 1)y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + (i + 1)y = 0 \\ ix + (i - 1)y = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem: $x + (i + 1)y = 0$ e daí $x = y = 0$. Logo o conjunto é L.I. sobre $\mathbb{R}$.

8. Mostrar que o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x\}$ de vetores de $C([-\pi, \pi])$ é L.I.

Solução

Suponhamos:

$$\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos 2x = 0, \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Então:

$$\begin{aligned} x = -\pi &\Longrightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ x = 0 &\Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} &\Longrightarrow \alpha - \gamma = 0 \end{aligned}$$

Escalonando, vem:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Daí $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e o conjunto é L.I.

9. Mostrar que o conjunto $\{1, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$ de vetores de $C([-\pi, \pi])$ é L.D.

Solução

Basta lembrar que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

   a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 5)\}$

   b) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}$

   c) $\{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (4, 1, -2)\}$

   d) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, -1)\}$

2. Quais dos subconjuntos abaixo de $P_4(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:

   a) $\{(1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$

   b) $\{2x, x^2 + 1, x + 1, x^2 - 1\}$

   c) $\{x(x - 1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$

   d) $\{x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$

3. Demonstrar que o conjunto $\{1, e^x, e^{2x}\}$ de vetores de $C([0, 1])$ é L.I.

4. Mostrar que o conjunto $\{1, e^x, xe^x\}$ de vetores de $C([0, 1])$ é L.I.

*5. Demonstrar que é L.I. o conjunto

$$\{1, (x - a), (x - a)^2, \ldots, (x - a)^{n-1}\}$$

de vetores de $P_{n-1}(\mathbb{R})$, onde a é um número arbitrário.

*6. Mostrar que o subconjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é L.D. se, e somente se, existe um inteiro k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tal que x_k é combinação linear dos demais vetores do conjunto.

7. Determinar m e n para que os conjuntos de vetores do $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam L.I.

   a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$

   b) $\{(1, 3, 5), (2, m + 1, 10)\}$

   c) $\{(6, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$

8. Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto L.I. de vetores de um espaço vetorial V. Provar que o conjunto $\{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w\}$ é L.D.

9. Quais dos seguintes subconjuntos do $\mathbb{C}^3$ são L.I. sobre $\mathbb{C}$?

   (a) $\{(i, 1, 0), (1 + i, 2, 0), (3, 1, 0)\}$

   (b) $\{(i, 1, 0), (0, 1, i), (0, i, i)\}$

   (c) $\{(i, 1, 0), (2 + i, 3i, 5 - i), (2, 4 + 4i, 4 - 6i)\}$

10. Suponha que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um subconjunto L.I. de um espaço vetorial. Mostrar que $\{a_1v_1, \ldots, a_nv_n\}$ também é L.I., desde que os escalares a_i sejam todos não nulos.

*11. Suponha que $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ é um subconjunto L.I. de um espaço V. Mostrar que

$$[u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s] = \{o\}$$

*12. Se $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n\}$ é L.I., mostrar que

$$\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_n\}$$

também é L.I., para todo escalar α.

*13. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais distintos 2 a 2. Provar que o conjunto de funções $\{e^{\alpha_1 t}, \ldots, e^{\alpha_n t}\}$ é L.I.

*14. Provar que o conjunto de funções $\{e^{at} \cos bt, e^{at} \operatorname{sen} bt\}$, onde a e b são números reais e $b \neq 0$, é L.I.

2. PROPRIEDADES DA DEPENDÊNCIA LINEAR

Consideremos um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$.

P_1. Se um conjunto finito $L \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L.D.

Prova – Seja $S = \{o, u_2, \ldots, u_n\}$. Então, evidentemente

$$\alpha o + 0u_2 + \ldots + 0u_n = o$$

para todo $\alpha \neq 0$. Isso é suficiente para concluir que S é L.D. ∎

P_2. Se $S = \{u\} \subset V$ e $u \neq o$, então S é L.I.

Prova – Suponhamos $\alpha u = o$. Como $u \neq o$, então $\alpha = 0$ conforme já vimos nas propriedades dos espaços vetoriais. ∎

P_3. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é L.D., então um dos seus vetores é combinação linear dos outros. (Veja exercício proposto nº 6, § 1.)

Prova – Por hipótese existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, nem todos iguais a zero, de modo que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = o.$$

Suponhamos $\alpha_1 \neq 0$. Então existe o inverso de α_1 e multiplicando a igualdade acima por este inverso teremos:

$$u_1 + (\alpha_1^{-1}\alpha_2)u_2 + \ldots + (\alpha_1^{-1}\alpha_n)u_n = o.$$

Daí

$$u_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)u_2 + \ldots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_n)u_n$$

o que mostra que u_1 é combinação linear de $u_2, \ldots, u_n$. Analogamente se procede quando $\alpha_j \neq 0$. ■

P_4. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D., então S_2 também é L.D.

Prova – Suponhamos $S_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$ e $S_2 = \{u_1, \ldots, u_r, \ldots, u_t\}$. Por hipótese existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, não todos nulos, de maneira que

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r = o.$$

Daí aproveitando os escalares e completando com zeros teremos

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + 0u_{r+1} + \ldots + 0u_t = o.$$

Como nem todos os escalares que figuram nesta última igualdade são nulos, então pode-se dizer que S_2 é um conjunto L.D. ■

P_5. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, com $S_1 \subset S_2$ e S_2 L.I., então S_1 também é L.I.

Prova – Se S_1 fosse L.D., então o mesmo aconteceria com S_2, devido à propriedade anterior. ■

P_6. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é L.I., e para um certo $u \in V$ tivermos $S \cup \{u\} = \{u_1, \ldots, u_n, u\}$ L.D., então o vetor u é combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$, isto é, $u \in [S]$.

Prova – Por hipótese tem-se uma igualdade

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha u = o \tag{1}$$

onde nem todos os escalares que nela figuram são nulos. Afirmamos que um dos escalares não nulos é o α. De fato, se $\alpha = 0$, então

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = o.$$

Como porém o conjunto S é L.I., esta última igualdade só é possível com $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Daí, se $\alpha = 0$, então $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, o que é impossível.

Sendo $\alpha \neq 0$ podemos multiplicar a igualdade (1) por α^{-1} e teremos:

$$(\alpha^{-1}\alpha_1)u_1 + \ldots + (\alpha^{-1}\alpha_n)u_n + u = o$$

ou ainda

$$u = (-\alpha^{-1}\alpha_1)u_1 + \ldots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)u_n$$

igualdade que nos mostra que $u \in [S]$. ■

P$_7$. Se $S = \{u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n\}$ e $u_j \in [S - \{u_j\}]$ (isto é, u_j é combinação linear dos demais vetores de S), então

$$[S] = [S - \{u_j\}].$$

Prova — Faremos a prova supondo $j = 1$ o que nada tira em generalidade.

É óbvio que $[S - \{u_1\}] \subset [S]$, pois $S - \{u_1\} \subset S$.

Por outro lado, dado um vetor $u \in [S]$, então:

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Como porém o vetor u_1 está em $[S - \{u_1\}]$, por hipótese, então:

$$u_1 = \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) iremos obter

$$u = \alpha_1(\beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n) + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Daí

$$u = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2)u_2 + \ldots + (\alpha_1\beta_n + \alpha_n)u_n$$

o que prova que $u \in [S - \{u_1\}]$ e conseqüentemente que $[S] \subset [S - \{u_1\}]$. ■

Exemplo — Observe no $\mathbb{R}^4$ o seguinte sub-espaço

$$S = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 4)].$$

É fácil perceber a seguinte relação

$$2(0, 1, 0, 2) - (0, 0, 1, 0) = (0, 2, -1, 4).$$

A propriedade acima nos garante, então, que

$$S = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)].$$

3. BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL FINITAMENTE GERADO

Definição 3 — Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é um subconjunto finito $B \subset V$ para o qual as seguintes condições se verificam:

(a) $[B] = V$.

(b) B é linearmente independente.

Exemplos

1) $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$

2) $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$.

3) $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{C}^n$, considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

4) O conjunto das $m \cdot n$ matrizes reais

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma base do espaço $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

5) Os $n + 1$ polinômios $1, t, \ldots, t^n$ formam uma base de $P_n(\mathbb{R})$ pois

(a) Dado $f \in P_n(\mathbb{R})$, existem (e são únicos) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

o que é conseqüência da própria definição de polinômio.

(b) Se $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, então $a_0 = \ldots = a_n = 0$, devido ao princípio dos polinômios identicamente nulos.

6) Se indicamos por o o vetor nulo de um espaço vetorial qualquer, então uma base do espaço $\{o\}$ é, conforme nossas convenções a respeito, o conjunto $\emptyset$.

Nota: As bases exibidas nos exemplos 1, 2, 3, 4 e 5 são chamadas *bases canônicas* dos espaços $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $P_n(\mathbb{R})$, respectivamente, devido a sua naturalidade. Obviamente, esses espaços têm outras bases, conforme veremos a seguir. Deixamos como exercício a verificação nos exemplos de 1 e 4.

Proposição 1 — Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.

Demonstração — Indiquemos por V o espaço. Se $V = \{o\}$, então $\emptyset$ é uma base de V devido às convenções a respeito para este caso.

Caso contrário existe um subconjunto finito e não vazio $S \subset V$, de maneira que $V = [S]$. Como $S \neq \{o\}$, então existem subconjuntos não vazios de S que são L.I. Tomemos um deles com o maior número possível de elementos. Indicando por B esse subconjunto, afirmamos que B é uma base de V.

Devido à maneira como tomamos B, para todo $u \in S - B$ teremos que $B \cup \{u\}$ é L.D. Logo u é combinação linear de B (ver P_6 no parágrafo anterior). Usando agora a propriedade P_7, conclui-se que: $[B] = [S] = V$.

Como, por outro lado, B é L.I., pela própria maneira como foi construído, então B é uma base de V. ■

4. DIMENSÃO

Iremos enunciar logo a seguir um resultado bastante importante que diz respeito ao número de vetores das bases de um espaço vetorial finitamente gerado. Sua demonstração, contudo, somente será feita no apêndice, ao fim deste capítulo, pelo fato de ser um tanto quanto trabalhosa. Esse apêndice é especialmente recomendado aos alunos dos Cursos de Matemática.

Teorema da invariância – Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de vetores.

Apoiados no teorema da invariância, damos a seguinte definição.

Definição 4 – Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se *dimensão de V* (notação: dim V) o número de vetores de uma qualquer de suas bases. Diz-se também, neste caso, que V é um *espaço de dimensão finita.*

Decorre da definição dada e de considerações já feitas nos exemplos após a definição 3 que:

1) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; 3) $\dim \mathbb{C}^n = n$; 5) $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$;

2) $\dim \mathbb{R}^n = n$; 4) $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$; 6) $\dim \{o\} = 0$.

Deixamos ao leitor a tarefa de concluir que a dimensão do espaço solução de um sistema homogêneo escalonado

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \qquad\qquad + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad a_{2r_2}x_2 + \dots \qquad + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{pr_p}x_{r_p} + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

onde $a_{11} \neq 0, a_{2r_2} \neq 0, \ldots, a_{pr_p} \neq 0$ é $n - p$. Para isso, ler novamente o Capítulo 1.

Proposição 2 (Teorema do Completamento) – Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \leqslant 1$. Se $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset V$ é um subconjunto L.I. com r vetores e $r < n$, então existem $n - r$ vetores $u_{r+1}, \ldots, u_n \in V$, de maneira que $B = \{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ é uma base de V.

Demonstração – Tomemos uma base $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e formemos a união:

$$S = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_n\}.$$

Dentre os subconjuntos de S que são L.I. e que contém $u_1, \ldots, u_r$ tomemos um com o maior número possível de elementos. Seja

$$B = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$$

esse conjunto. (Obviamente particularizamos em B a seqüência dos índices dos elementos v_i, o que não traz nenhum prejuízo à demonstração.) Mostremos que B é uma base de V. Decorre da própria escolha desse conjunto que ele é L.I.

Por outro lado $v_1, \ldots, v_s$ são obviamente combinações lineares de B. O mesmo se pode dizer de $v_{s+1}, \ldots, v_n$ devido à propriedade P_6 vista neste capítulo. Sendo todos os vetores de C combinações lineares de B, conclui-se, pelo fato de C ser uma base de V, que todos os vetores de V também são combinações lineares de B. Portanto B é uma base de V. ∎

Proposição 3 – Todo sub-espaço vetorial de um espaço vetorial finitamente gerado é também finitamente gerado.

Demonstração – Seja V finitamente gerado e W um sub-espaço vetorial de V. Se $W = \{0\}$, nada há a provar. Senão, tomemos $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$. Se $W = \{\lambda_1 w_1 : \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$, está provado. Senão, existe $w_2 \in W$, que não é da forma $\lambda_1 w_1$, isto é, $\{w_1, w_2\}$ é L.I. Se W é gerado por $\{w_1, w_2\}$, está terminado. Senão, existe w_3 em W, que não é combinação linear de $\{w_1, w_2\}$. E assim por diante. Este processo deve parar senão haveria em V um conjunto L.I. e infinito. ∎

Proposição 4 – Seja W um sub-espaço vetorial de V. Se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.

Demonstração – Pela proposição 3, W é finitamente gerado. Logo W tem uma base. Toda base de W também é base de V devido à hipótese de que dim W = dim V. Logo todo vetor de V pertence a W. Assim $V \subset W$ e, como W está contido em V, segue que V = W. ■

5. PROCESSO PRÁTICO PARA DETERMINAR UMA BASE DE UM SUB-ESPAÇO DE $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$)

Um sub-espaço de $\mathbb{R}^n$, em geral, ou é dado pelos seus geradores ou é possível achar esses geradores. Daremos a seguir um dispositivo prático para achar uma base desse sub-espaço a partir dos seus geradores. Esse processo se baseia em três observações apenas.

Seja $V = [u_1, \ldots, u_r]$ um sub-espaço do $\mathbb{R}^n$.

(I) Se no segundo membro da igualdade acima permutarmos dois dos vetores que lá figuram evidentemente não alteramos o sub-espaço gerado, isto é,

$$V = [u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_r] = [u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_r].$$

(II) Para todo número real α tem-se a seguinte igualdade:

$$V = [u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_r].$$

De fato, seja $u = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_i u_i + \ldots + \beta_j u_j + \ldots + \beta_r u_r$ um elemento de V. Esse elemento também pode ser escrito da seguinte maneira:

$$u = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_i u_i - \beta_j \alpha u_i + \ldots + \beta_j u_j + \beta_j \alpha u_i + \ldots + \beta_r u_r =$$
$$= \beta_1 u_1 + \ldots + (\beta_i - \beta_j \alpha) u_i + \ldots + \beta_j (u_j + \alpha u_i) + \ldots + \beta_r u_r.$$

Logo $u \in [u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_r]$.

Fica como exercício provar que o sub-espaço V contém o sub-espaço gerado por $u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_r$. (Veja o exercício proposto nº 12, § 1.)

(III) Se $u_1, u_2, \ldots, u_r$, se apresentam na *forma escalonada*, ou seja, se o número de zeros iniciais de u_2 é maior que o de u_1 e assim sucessivamente, então os vetores $u_1, \ldots, u_r$ formam um conjunto L.I. e, portanto dim V = r.

Isso não é difícil de ver. Se os geradores de V não formassem um conjunto L.I., então teríamos algo como:

$$u_1 = \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r.$$

Mas isso não é possível pois o número de zeros iniciais de u_1 é certamente diferente do número de zeros iniciais de $\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r$, devido à nossa hipótese a respeito desses vetores.

Exemplo – Seja $V = [(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 4)] \subset \mathbb{R}^4$. Na prática formamos com esses vetores as linhas de uma matriz simbólica da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

A seguir aplicamos convenientemente as "operações" (I) e (II) acima até obtermos a situação da hipótese de (III). Vejamos como.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No que fizemos acima a seta indica apenas a passagem de uma etapa para outra do processo. Na primeira passagem permutamos a primeira e a segunda linhas. Na segunda passagem multiplicamos por -2 a primeira linha e o resultado somamos com a segunda linha. Na última passagem somamos a segunda linha com a terceira linha. Levando em conta (I) e (II) temos que

$$V = [(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4), (0, 0, 0, 0)].$$

Como o vetor nulo pode ser retirado do segundo membro desta última igualdade, então

$$V = [(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)].$$

Levando em conta (III) concluímos que:

$$\{(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)\}$$

é uma base de V e que $\dim V = 2$.

6. DIMENSÃO DA SOMA DE DOIS SUB-ESPAÇOS

Seja W um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Já vimos que se U e V são sub-espaços de W, então $U \cap V$ e $U + V$ também são sub-espaços de W. No caso em que a dimensão de W é finita as dimensões de $U \cap V$ e de $U + V$ estão relacionadas conforme proposição e demonstração abaixo.

Proposição 5 – Seja W um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Se U e V são sub-espaços de W, então:

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V.$$

Demonstração – Seja $B_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$ uma base de $U \cap V$. Como B_1 é L.I. em U e em V, o teorema do completamento nos garante a existência de $v_1, \ldots, v_s \in U$ e $w_1, \ldots, w_t \in V$ de tal modo que $B_2 = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ é base de U e que $B_3 = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_t\}$ é base de V. Mostremos que

$$B = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$$

é uma base de U + V.

(a) Seja $w \in U + V$. Então $w = u + v$ ($u \in U$, $v \in V$). Sendo B_2 e B_3 bases de U e V, respectivamente, podemos representar

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s$$

e

$$v = \alpha_1' u_1 + \ldots + \alpha_r' u_r + \beta_1' w_1 + \ldots + \beta_t' w_t$$

onde as letras gregas indicam, obviamente, números reais.

Daí

$$w = u + v = (\alpha_1 + \alpha_1')u_1 + \ldots + (\alpha_r + \alpha_r')u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s + \\ + \beta_1' w_1 + \ldots + \beta_t' w_t.$$

Logo $[B] = V$.

(b) Suponhamos

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_t w_t = o \qquad (1)$$

Então:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s = -\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_t w_t.$$

Como o primeiro membro desta última igualdade está em U e o segundo membro está em V e se trata do mesmo vetor, então:

$$-\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_t w_t \in U \cap V.$$

Logo existem $\delta_1, \ldots, \delta_r \in \mathbb{R}$ tais que:

$$-\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_t w_t = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_r u_r.$$

Daqui tiramos que

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_r u_r + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_t w_t = o.$$

Do fato de B_3 ser L.I., conclui-se então que

$$\delta_1 = \ldots = \delta_r = \gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0.$$

Se $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0$ a igualdade (1) fica:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s = o.$$

Lembrando que o conjunto B_2 também é L.I. tiramos daí que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0.$$

Com isso provamos que B de fato é um conjunto L.I.

Finalmente observando que $\dim(U \cap V) = r$, $\dim U = r + s$, $\dim V = r + t$ e $\dim(U + V) = r + s + t$, chegamos à fórmula

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V. \blacksquare$$

Exemplo – Consideremos os seguintes sub-espaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)] \text{ e } V = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0\}.$$

Determinemos $\dim(U \cap V)$ e $\dim(U + V)$.

É fácil notar que $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ é uma base de U. Logo $\dim U = 2$.

Quanto a V temos:

$$u \in V \Longleftrightarrow u = (x, -x, z, t), \text{ onde } x, z, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow u = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$

Logo $\quad V = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$.

Pela forma escalonada como se apresentam os geradores de V que aí figuram podemos dizer que:

$$C = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

é uma base de V e que $\dim V = 3$.

Por outro lado, decorre da própria definição de soma de sub-espaços que $U + V = [B \cup C]$. A partir disto podemos achar uma base de $U + V$ do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $\dim(U + V) = 4$ e conseqüentemente $U + V = \mathbb{R}^4$. Disto segue que $\dim(U \cap V) = 1$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostrar que o subconjunto $\{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Solução

Os vetores 1 e i constituem um sistema de geradores de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ pois todo elemento de $\mathbb{C}$ é da forma $a1 + bi$, com a e b em $\mathbb{R}$. Além disso, se $x1 + yi = 0 = 0 + 0i$ (com $x, y \in \mathbb{R}$), então $x = y = 0$.

2. Mostrar que o subconjunto de vetores:

$$\{(0, 2, 2), (0, 4, 1)\}$$

é uma base do seguinte sub-espaço vetorial do $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}.$$

Solução

Como $(x, y, z) \in U$ se, e somente se, $x = 0$ e $(0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, então $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de U. Logo $\dim U = 2$. Por outro lado $(0, 2, 2)$ e $(0, 4, 1)$ são independentes pois (ver processo prático – § 5):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Logo os vetores dados formam uma base de U, pois pertencem a U.

3. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes sub-espaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \text{ e}$$

$$V = [(1, 2, 0), (3, 1, 2)].$$

Determinar uma base e a dimensão dos sub-espaços U, V, U + V e $U \cap V$.

Solução

De acordo com o exercício anterior $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de U. Por outro lado $(1, 2, 0)$ e $(3, 1, 2)$ formam uma base de V pois:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\{(1, 2, 0), (0, -5, 2)\}$ é L.I.

Determinemos uma base e a dimensão de U + V:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $U + V = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ e $U + V = \mathbb{R}^3$. Conseqüentemente $\dim (U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim (U + V) = 1$. Como o vetor $(0, -5, 2)$ está em U e está em V, então $\{(0, -5, 2)\}$ é uma base de $U \cap V$.

4. Determinar uma base do $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores (1, 1, 1, 1), (0, 1, −1, 0) e (0, 2, 0, 2).

Solução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se tomarmos o vetor (0, 0, 0, 1), então o conjunto $B = \{(1,1,1,1),(0,1,-1,0),(0,0,2,2),(0,0,0,1)\}$ é L.I. Logo B é uma base do $\mathbb{R}^4$. Obviamente, substituindo (0, 0, 0, 1) nessa base por qualquer (0, 0, 0, a)(a $\neq$ 0) obtém-se outra base do $\mathbb{R}^4$.

5. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes sub-espaços vetoriais: $S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)]$, $T = [(0, 1, -1), (1, 2, 1)]$, $U = \{(x, y, z) \mid x + y = 4x - z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \mid 3x - y - z = 0\}$. Determinar as dimensões de: S, T, U, V, S + T, S $\cap$ T, T + U e T $\cap$ U.

Solução

a) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Logo dim S = 2.

b) É imediato que dim T = 2 pois seus geradores já se apresentam na forma escalonada.

c) Os vetores de U são da seguinte forma: $(x, -x, 4x) = x(1, -1, 4)$. Logo $\{(1, -1, 4)\}$ é uma base de U e dim U = 1.

d) Os vetores de V se apresentam assim: $(x, y, 3x - y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -1)$. Logo $V = [(1, 0, 3), (0, 1, -1)]$. Como os geradores de V que aí aparecem já estão na forma escalonada, então dim V = 2.

e) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo dim (S + T) = 3 e daí $S + T = \mathbb{R}^3$.

f) A partir das dimensões de S, T e S + T, acha-se que dim (S $\cap$ T) = 1.

g) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo dim (T + U) = 2.

h) A proposição 5 deste capítulo nos conduzirá a dim (T $\cap$ U) = 1.

6. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução do seguinte sistema:

$$S: \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y \qquad + t = 0 \\ \qquad\qquad z - t = 0 \end{cases}$$

Solução

Inicialmente escalonemos S:

$$S \sim \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ \quad 3y + 2z + 3t = 0 \\ \qquad\quad z - t = 0 \end{cases}$$

Daí tiramos: $z = t$, $y = -\frac{5}{3}t$ e $x = \frac{1}{3}t$.

Logo o conjunto solução de S é

$$V = \left\{\left(\frac{1}{3}t, \frac{-5}{3}t, t, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 1\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

Isto mostra que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 1\right)\right\}$$

é uma base do espaço solução de S e que, portanto, a dimensão desse espaço é 1. Uma outra base de V é $\{(1, -5, 3, 3)\}$.

7. Seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de um espaço vetorial V de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. Mostrar que $\{u_1, \ldots, u_n, iu_1, \ldots, iu_n\}$ é uma base de V considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. (Veja Ex. proposto nº 8, pág. 52.)

Solução

a) Dado $u \in V$, existem $a_1 + b_1 i, \ldots, a_n + b_n i \in \mathbb{C}$ de maneira que $u = (a_1 + b_1 i)u_1 + \ldots + (a_n + b_n i)u_n$, pois os vetores $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base sobre $\mathbb{C}$.

Logo

$$u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + b_1(iu_1) + \ldots + b_n(iu_n),$$

o que mostra $\{u_1, \ldots, u_n, iu_1, \ldots, iu_n\}$ gera V sobre $\mathbb{R}$.

b) Por outro lado, se

$$a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + b_1(iu_1) + \ldots + b_n(iu_n) = 0,$$

então

$$(a_1 + b_1 i)u_1 + \ldots + (a_n + b_n i)u_n = 0.$$

Logo $a_1 + b_1 i = \ldots = a_n + b_n i = 0$.

Donde $a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_n = 0$.

Nota: O exercício nos ensina que se a dimensão de V sobre $\mathbb{C}$ é n, sobre $\mathbb{R}$ será 2n.

8. Consideremos o sub-espaço vetorial de $M_3(\mathbb{R})$ constituído das matrizes simétricas. Determinar uma base desse sub-espaço.

Solução

Podemos decompor uma matriz simétrica X de $M_3(\mathbb{R})$ da seguinte maneira:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

É fácil verificar que as seis matrizes em que X se decompôs formam um conjunto L.I. em $M_3(\mathbb{R})$. Logo essas seis matrizes formam uma base do sub-espaço das matrizes simétricas de $M_3(\mathbb{R})$ cuja dimensão é, portanto, igual a 6. Lembre-se que $M_3(\mathbb{R})$ tem dimensão 9.

Nota: Generalizando o raciocínio que acabamos de fazer pode-se concluir que o sub-espaço das matrizes simétricas de $M_n(\mathbb{R})$ tem dimensão $\frac{n^2 + n}{2}$ enquanto que $M_n(\mathbb{R})$ tem dimensão n^2. É o que pedimos no exercício 16 a seguir.

9. (Exercício patológico) Mostrar que o conjunto $\{2\}$ é uma base do espaço $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ cuja adição é dada por $u \oplus v = uv$ e a multiplicação por escalares por $\alpha \cdot u = u^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Solução

Lembremos que o vetor nulo desse espaço é o número 1.

(a) A teoria dos números reais nos ensina que dado um número real $u > 0$, existe um único número real α tal que $u = 2^\alpha : \alpha = \log_2 u$. Logo $u = 2^\alpha = \alpha \cdot 2$.

(b) Se $\alpha \cdot 2 = 1$ (vetor nulo), então $2^\alpha = 1$, donde $\alpha = 0$.

Nota: É claro que todo número real maior que zero e diferente de 1 constitui uma base de V sobre $\mathbb{R}$.

10. Sejam U e V sub-espaços vetoriais de um espaço de dimensão n. Supondo que $\dim U > \frac{n}{2}$ e que $\dim V > \frac{n}{2}$, prove que: $U \cap V \neq \{o\}$.

Solução

Consideremos a fórmula $\dim U + \dim V = \dim (U + V) + \dim (U \cap V)$. Se $U \cap V = \{o\}$, teríamos $\dim (U \cap V) = 0$. Daí $\dim (U + V) = \dim U + \dim V > n$. Absurdo pois $U + V$ é sub-espaço de um espaço de dimensão n.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dar uma base e a dimensão do sub-espaço W de $\mathbb{R}^4$ onde $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y \text{ e } x - 3y + t = 0\}$.

2. Sendo W e U sub-espaços do $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3, que dimensões pode ter W + U se (1, 2, 1, 0), (−1, 1, 0, 1), (1, 5, 2, 1) é um sistema de geradores de $W \cap U$?

3. Sendo W o sub-espaço do exercício 1 e U o sub-espaço do $\mathbb{R}^4$ gerado por (1, 2, 1, 3) e (3, 1, −1, 4), determinar uma base e a dimensão de U + W e de $U \cap W$.

4. Achar uma base e a dimensão do seguinte sub-espaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x, y, z, t) \mid x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\}$.

5. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes sub-espaços:

   $U = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \mid y - 2z = 0\}$ e

   $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]$.

   Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes sub-espaços: U, V, W, $U \cap V$, V + W e U + V + W.

6. Determinar uma base e a dimensão do sub-espaço de $M_3(\mathbb{R})$ constituído das matrizes anti-simétricas.

7. Mostrar que os polinômios $1, 1 + t, 1 - t^2$ e $1 - t - t^2 - t^3$ formam uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

8. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$

9. Mostrar que as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

10. Determinar uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os seguintes vetores (1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1).

11. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o seguinte conjunto é uma base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}.$$

12. Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores de um espaço vetorial V. Provar que se cada vetor u de $S = [u_1, \ldots, u_n]$ admite uma única representação como combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$, então os vetores $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de S.

13. Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de um espaço vetorial. Mostrar que $\{u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \ldots + u_n\}$ também é uma base desse espaço.

14. Considere o seguinte sub-espaço vetorial de $\mathbb{C}^3$:

$$W = [(1, 0, i), (1, 1 + i, 1 - i), (1, -1 - i, -1 + 3i)]$$

Determinar uma base desse sub-espaço.

15. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões m e n, respectivamente. Considere o espaço vetorial $U \times V$ cuja adição é dada por

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

e a multiplicação por escalares por $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$.

Admitindo que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ são bases de U e de V, respectivamente, prove que:

$$\{(u_1, o), \ldots, (u_m, o), (o, v_1), \ldots, (o, v_n)\}$$

é uma base de $U \times V$.

16. Determinar a dimensão dos seguintes sub-espaços de $M_n(\mathbb{R})$:

a) Sub-espaço das matrizes simétricas;

b) Sub-espaço das matrizes anti-simétricas;

c) Sub-espaço das matrizes A tais que $A = 2A^t$.

d) Sub-espaço das matrizes $A = (a_{ij})$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$.

7. COORDENADAS

Vamos trabalhar agora com *bases ordenadas* de um espaço vetorial V. Uma base ordenada é uma base na qual fixamos quem é o primeiro vetor, quem é o segundo vetor, etc.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dada uma base ordenada

$$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

de V, então todo vetor v desse espaço é combinação linear de B. Ou seja, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

É fácil provar que os escalares que figuram nessa igualdade estão univocamente determinados. De fato, suponhamos

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n.$$

Então: $\quad (\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = o.$

Como o conjunto B é L.I., então $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$ e daí

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

Definição 5 — Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ que figuram na igualdade $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, conforme as considerações acima, são chamados *coordenadas* do vetor v em relação à base ordenada B.

É conveniente, por outro lado, associar uma matriz às coordenadas do vetor u. Assim, se $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, em relação à base ordenada $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, considera-se a matriz $n \times 1$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

apenas se não houver possibilidades de confusão, como a *matriz das coordenadas* de u em relação à base ordenada B.

Nota: É evidente a necessidade de trabalhar com bases ordenadas de V (não apenas bases de V) para podermos considerar a matriz de coordenadas como foi definida acima. Sem ordenar a base, não saberíamos qual seria o α_1, o α_2, etc.

Exemplo — É fácil verificar que $B = \{1, 1 + t, 1 + t^2\}$ é uma base ordenada de $P_2(\mathbb{R})$. Achemos as coordenadas de $f(t) = 2 + 4t + t^2$ em relação a essa base ordenada:

$$2 + 4t + t^2 = x1 + y(1 + t) + z(1 + t^2) \Longrightarrow$$

$$2 + 4t + t^2 = (x + y + z) + yt + zt^2 \Longrightarrow$$

$$z = 1, y = 4, x + y + z = 2 \Longrightarrow x = -3, y = 4 \text{ e } z = 1.$$

Portanto a matriz das coordenadas de f(t) é $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, em relação à base ordenada B.

8. MUDANÇA DE BASE

A partir de agora, diremos apenas *base* em vez de *base ordenada,* para facilitar o texto.

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e consideremos duas bases de V: $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Então existe uma única família de escalares α_{ij} de maneira que

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11}u_1 + \ldots + \alpha_{n1}u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \alpha_{1n}u_1 + \ldots + \alpha_{nn}u_n \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}u_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Definição 6 – A matriz quadrada de ordem n

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

chama-se matriz de mudança da base B para a base C.

Exemplos

1) Qual a matriz de mudança da base $B = \{1, 1 + t\}$ para a base $\{1, t\}$ no espaço $P_1(\mathbb{R})$?

$$\begin{cases} 1 = x_1 1 + y_1(1 + t) \\ t = x_2 1 + y_2(1 + t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 1 \\ \qquad y_1 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 + y_2 = 0 \\ \qquad y_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ x_2 = -1$ e $y_2 = 1$. Logo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz pedida.

2) Se $B = C$, obviamente a matriz de mudança de C para B ou vice-versa é a matriz idêntica.

Três problemas importantes se apresentam no que se refere a mudanças de base.

Problema 1 – Se a matriz de mudança da base B para a base C é $P = (\alpha_{ij})$ e a matriz de mudança da base C para uma outra base D (do mesmo espaço) é $Q = (\beta_{ij})$, qual a matriz de mudança de B para D?

Suponhamos $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $D = \{w_1, \ldots, w_n\}$. A definição de matriz de mudança nos garante então que:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \quad (j = 1, \ldots, n) \quad \text{e}$$

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} v_j \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Daí

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) u_i \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Então o termo geral da matriz de mudança da base B para a base D é dado por $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk}$ que é o termo geral de P.Q. Logo a matriz de mudança de B para D é a matriz PQ.

Nota: Uma conseqüência do que acabamos de ver é que uma matriz de mudança de bases é sempre inversível. Senão vejamos.

Sejam P a matriz de mudança de B para C e Q a matriz de mudança de C para B.

Dos diagramas ao lado decorre que $PQ = QP = I_n$. Logo P é inversível e P^{-1} é simplesmente a matriz de mudança de C para B.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "P"] \arrow[rr, bend left, "I_n"] & C \arrow[r, "Q"] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "Q"] \arrow[rr, bend right, "I_n"'] & B \arrow[r, "P"] & C \end{tikzcd}$$

Problema 2– Se a matriz das coordenadas de $u \in V$ em relação à base B é:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

e a matriz de mudança de base de B para C é $P = (\alpha_{ij})$, qual a matriz das coordenadas de u em relação à base C?

Seja

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

essa matriz.

Temos então $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$

Como cada $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$, então

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \right) u_i.$$

Devido à unicidade das coordenadas segue que:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots + \alpha_{1n} y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ldots + \alpha_{nn} y_n.$$

Usando a notação matricial obtemos a relação desejada

$$X = PY$$

que equivale ainda a $Y = P^{-1} X$.

Problema 3 – Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V e $P = (\alpha_{ij})$ é uma matriz inversível, então os n vetores $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i$ $(j = 1, \ldots, n)$ também formam uma base de V?

Suponhamos $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0$. Então

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) u_i = 0.$$

Daí $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Como este sistema é homogêneo e a matriz dos seus coeficientes é P (inversível), então $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Logo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I. e portanto também é base de V.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determinar as coordenadas do vetor $u = (2, 1, 4)$ do $\mathbb{R}^3$ em relação às bases:
   a) Canônica.
   b) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

Solução

a) Quanto à base canônica as coordenadas são as próprias componentes do vetor, ou seja, 2, 1 e 4.

b) $u = x(1, 1, 1) + y(1, 0, 1) + z(1, 0, -1) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x = 1 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtido, encontramos $x = 1$, $y = 2$ e $z = -1$. Logo as coordenadas de u neste caso são 1, 2 e -1. A matriz das coordenadas de u é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Determinar as coordenadas da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ em relação à base:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Solução

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 2z + t = 2 \\ x + 2t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \frac{5}{4} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo as coordenadas pedidas são $1, -1, \frac{5}{4}$ e $-\frac{1}{2}$.

3. Determinar as coordenadas do polinômio $1 + 2t - t^3 \in P_3(\mathbb{R})$ em relação

a) à base canônica desse espaço;

b) à base $\{1, 1 - t, 1 - t^2, 1 - t^3\}$.

Solução

a) As coordenadas neste caso são obviamente 1, 2, 0 e -1.

b) $1 + 2t - t^3 = a1 + b(1 - t) + c(1 - t^2) + d(1 - t^3) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ -b = 2 \\ -c = 0 \\ -d = -1 \end{cases}$$

Logo as coordenadas são: 2, -2, 0 e 1.

4. Achar a matriz de mudança da base

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)\}$$

para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Solução

$$(1, 0, 0) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 3)$$
$$(0, 1, 0) = d(1, 1, 0) + e(0, 1, 0) + f(0, 0, 3) \Longrightarrow$$
$$(0, 0, 1) = g(1, 1, 0) + h(0, 1, 0) + i(0, 0, 3)$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ 3c = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} d = 0 \\ d + e = 1 \\ 3f = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} g = 0 \\ g + h = 0 \\ 3i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} d = 0 \\ e = 1 \\ f = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ i = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Logo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é a matriz pedida.

5. No espaço $\mathbb{R}^3$ consideremos as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ relacionadas da seguinte maneira:

$$g_1 = e_1 + e_3$$
$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$
$$g_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$$

Determinar a matriz de mudança de B para C e de C para B.

Solução

Por definição:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz de mudança de B para C. Para achar a matriz de mudança de C para B é só determinar a inversa dessa matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Portanto a matriz de mudança de C para B é:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Considerando os dados do exercício anterior, se as coordenadas de um vetor u em relação à base B são 1, 1 e 2, quais as coordenadas desse vetor em relação à base C?

Solução

Sejam a, b e c essas coordenadas. Então:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar as coordenadas do vetor $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$, em relação às seguintes bases:
   a) canônica;
   b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;
   c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

2. Determinar as coordenadas de $1 - 2i \in \mathbb{C}$ em relação à seguinte base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$: $\{1 - i, 1 + i\}$.

3. Determinar as coordenadas do vetor $(1, 1, i) \in \mathbb{C}^3$, em relação à base $(1, 0, 0)$, $(0, i, 0)$, $(1, i, 1 + i)$.

4. Determinar as coordenadas do polinômio t^3 em relação à seguinte base de $P_3(\mathbb{R})$: $\{1, 2 - t, t^2 + 1, 1 + t + t^3\}$.

5. A matriz de mudança de uma base B do $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1, 1), (0, 2)\}$ desse mesmo espaço é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar a base B.

6. A matriz de mudança da base $\{1 + t, 1 - t^2\}$ para uma base C ambas do mesmo sub-espaço de $P_2(\mathbb{R})$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar a base C.

7. Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 &= 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 &= 3e_1 + e_3 \end{aligned}$$

   a) Determinar as matrizes de mudança de B para C e de C para B.
   b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas 1, 2 e 3, em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C?

8. Considere o seguinte sub-espaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x - y - z = 0 \right\}$$

a) Mostrar que os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ são bases de U:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Achar a matriz de mudança de B para C e a de C para B.

c) Achar uma base D de U, de tal maneira que a matriz de mudança de D para B seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*9. Seja $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base do espaço vetorial V e seja $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ onde $v_i = u_{n-i+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Provar que C é uma base de V e calcular a matriz de mudança de B para C.

*10. Seja $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base do espaço vetorial V e seja $C = \{u_1, u_1 - u_2, \ldots, u_1 - u_n\}$. Mostrar que C é também uma base de V. Achar as matrizes de mudança de base de B para C e de C para B.

APÊNDICE III

Teorema da Invariância

Lembremos que o Teorema da Invariância, já enunciado na pág. 80, afirma que todas as bases de um espaço vetorial dado têm o mesmo número de vetores.

Precisaremos de três lemas para poder provar o Teorema da Invariância.

Lema 1 – Seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Se $u \in V$ e ainda se

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_i u_i + \ldots + \alpha_n u_n \qquad (1)$$

com $\alpha_i \neq 0$, então o conjunto $C = \{u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ também é uma base de V.

Demonstração – Faremos a demonstração supondo $i = 1$ para facilitar o trabalho com os índices.

(a) Como $\alpha_1 \neq 0$, da igualdade (1) da hipótese segue que

$$u_1 = \beta u + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n \tag{2}$$

onde $\beta = \alpha_1^{-1}$, $\beta_2 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2, \ldots, \beta_n = -\alpha_1^{-1}\alpha_n$.

Seja $v \in V$. Então existem $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ de forma que

$$v = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_n u_n \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3) teremos:

$$v = (\gamma_1\beta)u + (\gamma_1\beta_2 + \gamma_2)u_2 + \ldots + (\gamma_1\beta_n + \gamma_n)u_n.$$

Ficou provado assim que o espaço V é gerado por

$$\{u, u_2, \ldots, u_n\}.$$

(b) Suponhamos

$$xu + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = o \tag{4}$$

com $x, x_2, \ldots, x_n$ em $\mathbb{R}$. Substituindo (1) em (4) teremos:

$$(x\alpha_1)u_1 + (x\alpha_2 + x_2)u_2 + \ldots + (x\alpha_n + x_n)u_n = o.$$

Como B é L.I. desta última igualdade decorre que:

$$x\alpha_1 = 0, x\alpha_2 + x_2 = 0, \ldots, x\alpha_n + x_n = 0.$$

Mas $\alpha_1 \neq 0$. Logo $x = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. ■

Lema 2 – Suponhamos que exista uma base de V com n vetores. Então se $B = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é L.I. e possui n vetores, B é também uma base de V.

Demonstração – Seja $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Então:

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}).$$

Não podemos ter todos os escalares nessa igualdade nulos, pois isto implicaria que $u_1 = o$ o que é impossível já que o conjunto B é L.I. Lôgo um dos α_i é não nulo. Suponhamos $\alpha_1 \neq 0$. O lema anterior nos assegura então que:

$$\{u_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é uma base de V. Portanto u_2 é combinação linear deste conjunto, ou seja, existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ em $\mathbb{R}$ de maneira que

$$u_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

Também não podemos ter $\beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$, senão $\{u_1, u_2\}$ seria L.D. e, portanto, o mesmo aconteceria com o conjunto B. Admitindo que $\beta_2 \neq 0$ teremos, em virtude do lema anterior, que

$$\{u_1, u_2, v_3, \ldots, v_n\}$$

é também uma base de V.

A repetição desse raciocínio nos levará à conclusão de que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V. ■

Lema 3 – Suponhamos V como no lema anterior. Então todo subconjunto de V que seja L.I. tem no máximo n vetores.

Demonstração – Suponhamos que exista $S = \{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_t\} \subset V$ que tenha $t > n$ vetores e que seja L.I. Então $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ tem n vetores e é um subconjunto L.I. Logo B é base de V devido ao lema anterior. Daí

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \mid u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Então $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + (-1)u_{n+1} = o$ o que vem mostrar que o conjunto S é L.D. Absurdo. ■

Teorema da invariância – Duas bases quaisquer do mesmo espaço vetorial finitamente gerado têm o mesmo número de vetores.

Demonstração – Sejam $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ duas bases quaisquer de V. Como B é base de V e C é L.I., então $m \leqslant n$. Analogamente, como C é base de V e B é L.I., então $n \leqslant m$. Logo $m = n$. ■

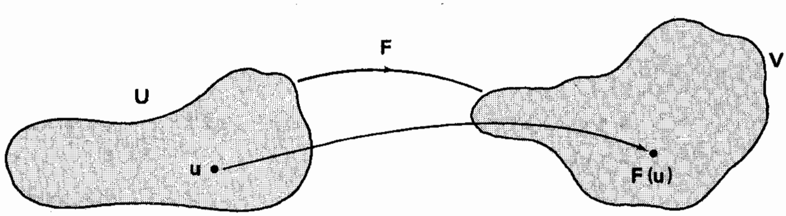
CAPÍTULO 4

Transformações Lineares

1. NOÇÕES SOBRE APLICAÇÕES

Nos capítulos precedentes nos detivemos estudando alguns aspectos intrínsecos dos espaços vetoriais finitamente gerados: base e dimensão, principalmente. Neste capítulo nosso enfoque será outro: trataremos de examinar correspondências entre espaços vetoriais. As transformações lineares que definiremos no parágrafo dois constituem o ponto mais importante desse estudo. Mas antes façamos algumas considerações preliminares.

Definição 1 — Dados dois conjuntos U e V, ambos não vazios, uma *aplicação* de U em V é uma "lei" pela qual a cada elemento de U está associado um único elemento de V. Se F indica essa lei e u indica um elemento genérico de U, então o elemento associado a u é representado por F (u) (lê-se "F de u") e se denomina *imagem* de u por F.



O conjunto U é o *domínio* e o conjunto V é o *contra-domínio* da aplicação F. Para indicar que F é uma aplicação de U em V costuma-se escrever

$$F: U \to V$$

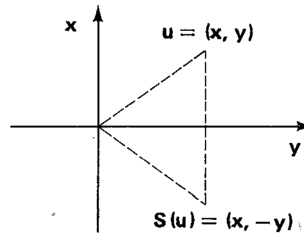
ou ainda, indicando por u um elemento genérico de U

$$u \mapsto F(u).$$

Duas aplicações $F: U \to V$ e $G: U \to V$ são iguais se, e somente se, $F(u) = G(u)$, $\forall u \in U$.

Dado $W \subset U$ denomina-se *imagem* de W por F o seguinte subconjunto de V: $F(W) = \{F(u) \mid u \in W\}$. Se $W = U$, então $F(U)$ recebe o nome de imagem de F e a notação será $Im(F)$.

Portanto $Im(F) = \{F(u) \mid u \in U\}$.



Exemplo – Seja $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por $S(x, y) \overset{*}{=} (x, -y)$, $\forall (x, y)$ no $\mathbb{R}^2$. S pode ser visualizada na figura ao lado e leva cada ponto do $\mathbb{R}^2$ no seu simétrico em relação ao eixo x. Em particular a imagem da reta $y = x$ é a reta $x + y = 0$ (e vice-versa), a imagem do eixo x é o próprio eixo x e a imagem do eixo y é o próprio eixo y.

Definição 2 – Uma aplicação $F: U \to V$ se diz *injetora* se, e somente se,

$$\forall u_1, u_2 \in U, F(u_1) = F(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

Ou, em outra formulação, se, e somente se,

$$\forall u_1, u_2 \in U, u_1 \neq u_2 \Longrightarrow F(u_1) \neq F(u_2).$$

Exemplos

1) A aplicação $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x, y) = (x, -y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é injetora pois se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ então:

$$F(u_1) = F(u_2) \Longrightarrow (x_1, -y_1) = (x_2, -y_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ e }$$
$$y_1 = y_2 \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

2) A aplicação $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é injetora pois temos, por exemplo,

$$(1, 1) \neq (2, 0) \text{ e } F(1, 1) = F(2, 0) = (0, 2, 0).$$

Definição 3 – Uma aplicação $F: U \to V$ se diz *sobrejetora* se, e somente se, $Im(F) = V$, ou seja, para todo $v \in V$, existe $u \in U$ tal que $F(u) = v$.

Exemplos

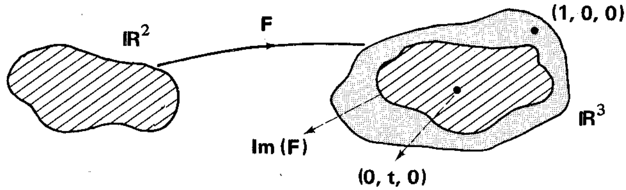
1) $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S(x, y) = (x, -y)$ é sobrejetora. De fato, dado $v = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, basta tomar $u = (c, -d)$ para termos $F(u) = v$.

2) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é sobrejetora. Isto

---

(*) Resumidamente escreveremos sempre $S(x, y)$ para indicar a imagem de (x, y) por S.

porque, por exemplo, $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ e não é imagem por F de nenhum elemento $u \in \mathbb{R}^2$ (o primeiro termo de cada imagem é zero).

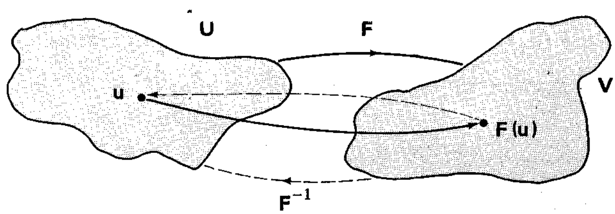


Definição 4 – Uma aplicação $F: U \to V$ se diz *bijetora* se, e somente se, F é injetora e é sobrejetora.

Exemplo – A aplicação $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x, y) = (x, -y)$ é injetora e é sobrejetora conforme já vimos. Logo S é bijetora.

Nota: Se $F: U \to V$ é bijetora, então cada elemento de V é do tipo $F(u)$, com $u \in U$ bem definido e se fizermos a associação $F(u) \mapsto u$ teremos uma aplicação de V em U pois não podemos ter $F(u_1) = F(u_2)$ e $u_1 \neq u_2$ já que F é injetora. Essa nova aplicação assim definida (no caso de F ser bijetora) é chamada *aplicação inversa de F* e é indicada por F^{-1}. Tem-se então:

$$F^{-1}(F(u)) = u \text{ e } F(F^{-1}(v)) = v$$
$$\forall u \in U \quad \text{e} \quad \forall v \in V.$$



2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição 5 – Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $F: U \to V$ é chamada *transformação linear de* U *em* V se, e somente se,

(a) $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in U$, e

(b) $F(\alpha u) = \alpha F(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in U$.

No caso em que $U = V$, uma transformação linear $F: U \to U$ é chamada também de *operador linear.*

Exemplos

1) Seja O: U $\to$ V a aplicação assim definida: $O(u) = o$ (vetor nulo de V), $\forall u \in U$. Verifiquemos que O é linear.

(a) $O(u_1 + u_2) = o = o + o = O(u_1) + O(u_2)$

(b) $O(\alpha u) = o = \alpha o = \alpha O(u)$

O se denomina transformação linear nula de U em V.

2) Seja I: U $\to$ U definida assim: $I(u) = u$, $\forall u \in U$. É mais um exemplo de transformação linear pois:

(a) $I(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = I(u_1) + I(u_2)$ e

(b) $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u)$.

I é o operador idêntico de U.

3) F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x, 2x - z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, também é linear.

Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) $F(u_1 + u_2) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2)) = (x_1, 2x_1 - z_1) + (x_2, 2x_2 - z_2) = F(u_1) + F(u_2)$.

(b) Exercício.

4) F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$$

é uma transformação linear para toda família (a_{ij}) de números reais dados. Verifica-se essa afirmação generalizando o que se fez no exemplo 3. Fica como exercício.

5) Seja D: $P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definida por $D(f(t)) = f'(t)$ para todo polinômio $f(t)$ de $P_n(\mathbb{R})$. ($f'(t)$ indica a derivada de $f(t)$).

Como a derivada da soma de dois polinômios é igual à soma das derivadas e a derivada do produto de um polinômio por um número é igual a esse número multiplicado pela derivada do polinômio, então D é mais um exemplo de operador linear.

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e consideremos uma transformação linear F: U $\to$ V. Valem as seguintes propriedades para F:

P_1. $F(o) = o$ (F transforma o vetor nulo de U no vetor nulo de V.)

Prova – Como o é o elemento neutro da adição em V:

$$F(o) + o = F(o).$$

O fato de F ser linear e o fato de o ser o vetor nulo de U dão:

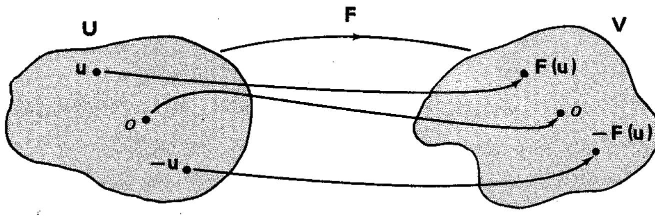
$$F(o) = F(o + o) = F(o) + F(o).$$

Comparando os resultados obtidos tiramos:

$$F(o) + o = F(o) + F(o).$$

Somando $-F(o)$ a ambos os membros desta última igualdade chegaremos a que

$$o = F(o). \blacksquare$$



P$_2$. $F(-u) = -F(u),\ \forall u \in U.$

Prova – $F(u) + (-F(u)) = o = F(o) = F(u + (-u)) = F(u) + F(-u).$

Logo $F(u) + F(-u) = F(u) + (-F(u))$. Somando $-F(u)$ a ambos os membros desta última igualdade obteremos

$$F(-u) = -F(u). \blacksquare$$

Nota: Recomendamos ao leitor que procure justificar cada passagem desenvolvida na primeira linha da demonstração de P_2.

P$_3$. $F(u_1 - u_2) = F(u_1) - F(u_2),\ \forall u_1, u_2 \in U.$

Prova (exercício). $\blacksquare$

P$_4$. Se W é um sub-espaço de U, então a imagem de W por F é um sub-espaço de V.

Prova – Lembremos que $F(W) = \{F(w) \mid w \in W\}$ é a imagem (direta) de W por F.

(a) Como $F(o) = o$, então $o \in F(W)$.

(b) Exercício.

(c) Sejam $v \in F(W)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $v = F(u)$, com $u \in W$.

Logo

$$\alpha v = \alpha F(u) = F(\alpha u).$$

Como $\alpha u \in W$, pois W é sub-espaço vetorial de U, então:

$$\alpha v \in F(W). \blacksquare$$

Nota: A propriedade P_4 acima significa que uma transformação linear transforma sub-espaço vetorial em sub-espaço vetorial. Em outras palavras, uma transformação linear "respeita" a estrutura de espaço vetorial.

P_5. Sendo $F: U \to V$ linear então

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(u_i).$$

Prova: Faz-se por indução sobre n. ■

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar se a aplicação $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x, y, z) = (z, x + y) \text{ é linear.}$$

Solução

(a) Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos genéricos de $\mathbb{R}^3$. Então:

$$\begin{aligned} F(u + v) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\ &= (z_1 + z_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) = \\ &= (z_1, x_1 + y_1) + (z_2, x_2 + y_2) = \\ &= F(u) + F(v); \end{aligned}$$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

$$F(\alpha u) = F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha z, \alpha x + \alpha y) = \alpha(z, x + y) = \alpha F(u).$$

2. Verificar se $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, onde $F(x) = (x, 2)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Solução

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos $F(x + y) = (x + y, 2) \neq (x, 2) + (y, 2) = (x + y, 4)$.

Logo F não é uma transformação linear.

Nota: Como uma transformação linear leva o vetor nulo do domínio no vetor nulo do contra-domínio e $F(0) = (0, 2) \neq (0, 0)$ poderíamos, por este caminho, ter concluído que a aplicação F do exercício 2 não é linear. Contudo o fato de uma aplicação $F: U \to V$ transformar o vetor nulo de U no vetor nulo de V não implica que ela seja linear. Procure um exemplo.

3. Verificar se a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x^2 + y^2, x)$ é uma transformação linear.

Solução

Se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, então $F(u + v) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

$$= ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2, x_1 + x_2) =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2, x_1) + (x_2^2 + y_2^2, x_2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2, 0)$$

e portanto F não é linear. Notar que, apesar disso, $F(0, 0) = (0, 0)$.

4. Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ e B uma matriz fixa desse espaço vetorial. O operador $F : V \to V$ dado por $F(X) = BX, \forall X \in V$ é linear? E quanto ao operador $G : V \to V$ dado por $G(X) = XB$? É verdade que $F = G$?

Solução

(a) $\forall X, Y \in V, F(X + Y) = B(X + Y) = BX + BY = F(X) + F(Y);$

(b) $\forall X \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}, F(\alpha X) = B(\alpha X) = \alpha(BX) = \alpha F(X).$

Logo, F é um operador linear de $M_n(\mathbb{R})$. A verificação de que G também é linear é análoga. Mas, em geral, $F \neq G$ pois $BX \neq XB$.

5. Sabendo que $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear e que

$$F(1, 2) = (3, -1) \quad \text{e} \quad F(0, 1) = (1, 2),$$

achar $F(x, y)$, onde (x, y) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^2$.

Solução

Observemos de início que $\{(1, 2), (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Determinemos as coordenadas de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação a essa base: $(x, y) = a(1, 2) + b(0, 1) \Longrightarrow a = x$ e $2a + b = y \Longrightarrow a = x$ e $b = y - 2x$.

Logo $(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$.

Portanto

$$F(x, y) = xF(1, 2) + (y - 2x)F(0, 1) = x(3, -1) + (y - 2x)(1, 2) =$$
$$= (x + y, -5x + 2y).$$

6. Verificar se é linear a transformação $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $F(x, y, z) = -2x + 3y + 7z$.

Solução

(a) $\forall u = (x_1, y_1, z_1)$ e $\forall v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $F(u + v) =$

$$= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = -2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + 7(z_1 + z_2) =$$
$$= -2x_1 + 3y_1 + 7z_1 - 2x_2 + 3y_2 + 7z_2 = F(u) + F(v).$$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $F(\alpha u) = F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) =$

$$= -2(\alpha x) + 3(\alpha y) + 7(\alpha z) = \alpha(-2x + 3y + 7z) = \alpha F(u).$$

7. Seja P uma matriz inversível de $M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que $F: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = P^{-1}XP$ é um operador linear desse espaço.

Solução

(a) $F(X + Y) = P^{-1}(X + Y)P = P^{-1}XP + P^{-1}YP = F(X) + F(Y)$;

(b) $F(\alpha X) = P^{-1}(\alpha X)P = \alpha(P^{-1}XP) = \alpha F(X)$.

8. Mostrar que é uma transformação linear a aplicação

$$F: \mathbb{R}^2 \to C([0, 1])$$

(espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em [0, 1]) dada por:

$$F(x, y) = xe^t + ye^{2t}, \ \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solução

(a) $\forall u = (x_1, y_1)$ e $\forall v = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$:

$F(u + v) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)e^t + (y_1 + y_2)e^{2t} =$

$= x_1e^t + y_1e^{2t} + x_2e^t + y_2e^{2t} = F(u) + F(v)$;

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(\alpha(x, y)) = F(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)e^t + (\alpha y)e^{2t} =$

$= \alpha(xe^t + ye^{2t}) = \alpha F(x, y)$.

9. Mostrar que é um operador linear de $V = C([0, 1])$ a aplicação $F: V \to V$ dada por $F(f(t)) = f(t)\varphi(t) \ \forall f(t) \in V$, onde $\varphi(t)$ é um elemento fixo de V.

Solução

(a) $F(f(t) + g(t)) = (f(t) + g(t))\varphi(t) = f(t)\varphi(t) + g(t)\varphi(t) = F(f(t)) + F(g(t))$;

(b) $F(\alpha f(t)) = (\alpha f(t))\varphi(t) = \alpha(f(t))\varphi(t) = \alpha F(f(t))$.

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ chama-se homotetia determinada pelo escalar α a aplicação $H_\alpha: V \to V$ tal que $H_\alpha(u) = \alpha u$, $\forall u \in V$. Mostrar que H_α é um operador linear de V.

Solução

(a) $H_\alpha(u_1 + u_2) = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2 = H_\alpha(u_1) + H_\alpha(u_2)$;

(b) $H_\alpha(tu) = \alpha(tu) = t(\alpha u) = tH_\alpha(u)$.

11. Num espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dado $w \in V$, chama-se translação definida por w a aplicação $T_w: V \to V$ tal que $T_w(u) = u + w$, $\forall u \in V$. Mostrar que se $w \neq 0$, então T não é linear.

Solução

$\forall u_1, u_2 \in V$, $T_w(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 + w$ e $T_w(u_1) + T_w(u_2) = u_1 + w + u_2 + w$.

Logo, se $w \neq 0$, T_w não é linear. Por outro lado, se $w = 0$, então T_w coincide com o operador idêntico que é linear.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?

   a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$;

   b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$;

   c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$;

   d) $F_4(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$.

2. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear assim definido na base canônica: $F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7)$. Determinar $F(x, y, z)$, onde (x, y, z) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que F é um operador linear.

3. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ seria F ainda um operador linear?

4. Verifique se são operadores lineares no espaço $P_n(\mathbb{R})$:

   (a) $F: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf'(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$;

   (b) $F: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f'(t) + t^2f''(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.

5. Existe um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $F(1, 2, 3) = (1, 4, 9)$ e $F(2, 3, 4) = (1, 8, 27)$? Justifique sua resposta.

6. Seja $u = (x, y, z, t)$ um vetor genérico do $\mathbb{R}^4$. Quais das aplicações definidas abaixo são operadores lineares do $\mathbb{R}^4$?

   a) $F(u) = u + (1, 0, 1, 0)$;

   b) $F(u) = (1, 0, 1, 1)$;

   c) $F(u) = (x, y - z, y + z, x + t)$;

   d) $F(u) = (\cos x, y, z, t)$.

7. Sejam U e V sub-espaços de um espaço W tais que $W = U \oplus V$. Sejam P_1 e P_2 as aplicações de W em W tais que para todo $w = u + v$ de W (com $u \in U$ e $v \in V$) associam, respectivamente, u e v, ou seja $P_1(w) = u$ e $P_2(w) = v$. Mostrar que P_1 e P_2 são lineares.

8. Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1, 0) = (2, 1)$ e $F(0, 1) = (1, 4)$.

   a) Determinar $F(2, 4)$;

   b) Determinar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (2, 3)$;

   c) Provar que F é sobrejetor e injetor (bijetor).

9. Seja A uma matriz fixa de $M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por: $F(X) = XA - AX$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$, é linear.

   Se $A = \lambda I_n$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, o que é F?

10. Seja $F : U \to V$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1), \ldots, F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora.

3. NÚCLEO E IMAGEM

Definição 6 – Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F: U \to V$ uma transformação linear. Indica-se por Ker(F) e denomina-se *núcleo* de F o seguinte subconjunto de U:

$$\mathrm{Ker}(F) = \{u \in U \mid F(u) = o\}$$

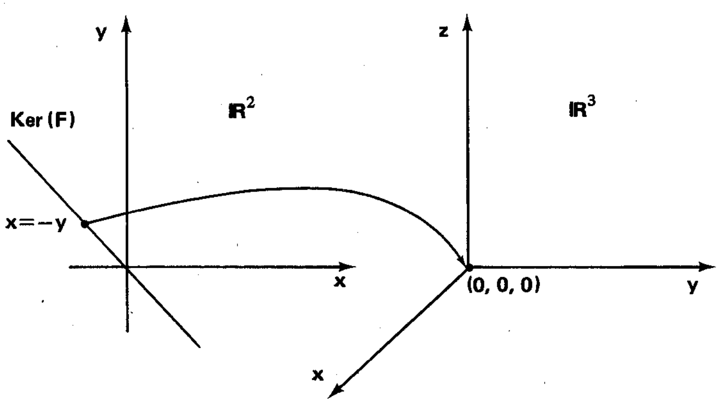
Exemplo – Seja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$F(x, y) = (0, x + y, 0).$$

Achemos o núcleo de F. Temos:

$(x, y) \in \mathrm{Ker}(F) \Longleftrightarrow (0, x + y, 0) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow x = -y$

Logo $\mathrm{Ker}(F) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.



Proposição 1 – Seja $F : U \to V$ uma transformação linear. Então:

a) Ker(F) é um sub-espaço vetorial de U;

b) A transformação linear F é injetora se, e somente se, $\mathrm{Ker}(F) = \{o\}$.

Demonstração

a) (1) Como $F(o) = o$, então $o \in \text{Ker}(F)$.

(2) Sejam $u_1, u_2 \in \text{Ker}(F)$. Então $F(u_1) = F(u_2) = o$.

Daí $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = o + o = o$.

Portanto $u_1 + u_2 \in \text{Ker}(F)$.

(3) Exercício: Prove que se $u \in \text{Ker}(F)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha u \in \text{Ker}(F)$.

b) Suponhamos F injetora. Seja $u \in \text{Ker}(F)$. Então $F(u) = o$. Mas $F(o) = o$, conforme P_1. Logo $F(u) = F(o)$. Usando a hipótese nesta última relação tiramos: $u = o$. Então, se F é injetora, o núcleo de F se resume ao vetor nulo de U.

Reciprocamente suponhamos $\text{Ker}(F) = \{o\}$. Dados $u_1, u_2 \in U$, então

$$F(u_1) = F(u_2) \Longrightarrow F(u_1) - F(u_2) = o \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F(u_1 - u_2) = o \Longrightarrow u_1 - u_2 \in \text{Ker}(F) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u_1 - u_2 = o \Longrightarrow u_1 = u_2$$

o que mostra que F é injetora. ■

Exemplo — O operador linear $D: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ dado por $D(f(t)) = f'(t)$ é uma transformação linear injetora (operador injetor)?

Se $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$, então $D(f(t)) = a_1 + 2a_2t + \ldots + na_nt^{n-1}$. Logo $f'(t) = 0$ tem como conseqüência que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Portanto $f(t) = a_0$ e daí $\text{Ker}(D) = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, ou seja, Ker(D) é o conjunto dos polinômios reais constantes. Logo D não é um operador injetor.

A imagem de uma transformação linear $F: U \to V$ foi definida anteriormente: $\text{Im}(F) = \{F(u) \mid u \in U\}$. Já vimos que é um sub-espaço vetorial de V.

O teorema a seguir, que relaciona as dimensões de Ker(F) e Im(F) nos casos em que dim U é finita, é bastante importante.

Teorema do Núcleo e da Imagem — Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dada uma transformação linear $F: U \to V$, então

$$\dim U = \dim \text{Ker}(F) + \dim \text{Im}(F).$$

Demonstração — Seja $B_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$ uma base de Ker(F). Essa base pode ser estendida a uma base $B_2 = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ de U conforme o teorema do completamento. Mostremos que $B = \{F(v_1), \ldots, F(v_s)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(F)$.

(a) Dado $v \in \mathrm{Im}(F)$, existe $u \in U$ tal que $F(u) = v$. Mas u é combinação linear de B_2: $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s$, com os α_i e os β_j em $\mathbb{R}$, já que B_2 é base de U. Logo:

$$\begin{aligned} v &= F(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s) = \\ &= \alpha_1 F(u_1) + \ldots + \alpha_r F(u_r) + \beta_1 F(v_1) + \ldots + \beta_s F(v_s) = \\ &= \beta_1 F(v_1) + \ldots + \beta_s F(v_s) \end{aligned}$$

pois como $u_1, \ldots, u_r \in \mathrm{Ker}(F)$, então suas imagens, por F, são nulas. Então $[B] = \mathrm{Im}(F)$.

(b) Suponhamos $\beta_1 F(v_1) + \ldots + \beta_s F(v_s) = o$ com $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R}$. Então $F(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s) = o$, do que resulta que $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s$ pertence a $\mathrm{Ker}(F)$. Logo existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ de maneira que:

$$\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_s v_s = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r$$

Daí

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + (-\beta_1) v_1 + \ldots + (-\beta_s) v_s = o$$

Como o conjunto B_2 é L.I., podemos concluir que todos os escalares da última igualdade são nulos. Em particular $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_s = 0$.

Ficou provado então que B é L.I.

Para terminar a demonstração, basta observar que, como $\dim \mathrm{Ker}(F) = r$, $\dim U = r + s$ e $\dim \mathrm{Im}(F) = s$, então $\dim U = \dim \mathrm{Ker}(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$. ■

Corolário — Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com a mesma dimensão finita n e suponhamos $F: U \to V$ uma transformação linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(I) F é sobrejetora.

(II) F é bijetora.

(III) F é injetora.

(IV) F transforma uma base de U em uma base de V (isto é, se B é uma base de U, então F(B) é base de V).

Demonstração

(I) $\Longrightarrow$ (II)

Por hipótese $\mathrm{Im}(F) = V$. Levando em conta que $\dim U = \dim V$, a fórmula $\dim U = \dim \mathrm{Ker}(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$ equivale então a $\dim \mathrm{Ker}(F) = 0$. Logo $\mathrm{Ker}(F) = \{o\}$ e F é injetora. Então F é bijetora.

(II) $\Longrightarrow$ (III) Imediato.

(III) $\Longrightarrow$ (IV).

Sendo $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U mostremos que $F(B) = \{F(u_1), \ldots, F(u_n)\}$ é uma base de V. Observemos de início que F(B) tem tantos vetores como B pelo fato de F ser injetora. Então basta mostrar que F(B) é L.I. Suponhamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 F(u_1) + \ldots + \alpha_n F(u_n) = o$. Disto resulta, pela linearidade de F que

$$F(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = o.$$

Sendo F injetora segue que

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = o.$$

Como B é L.I. conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

(IV) $\Longrightarrow$ (I)

Seja $v \in V$. Tomando uma base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U, então nossa hipótese garante que $F(B) = \{F(u_1), \ldots, F(u_n)\}$ é uma base de V. Logo v é combinação linear de F(B):

$$v = \alpha_1 F(u_1) + \ldots + \alpha_n F(u_n), \text{ com } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Como F é linear podemos afirmar que

$$v = F(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n).$$

Estando em U a combinação linear $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ ficou provado que todo elemento de V é imagem (por F) de um elemento de U. Ou seja, F é sobrejetora. ■

4. ISOMORFISMOS E AUTOMORFISMOS

Definição 7 – Entende-se por *isomorfismo* do espaço vetorial U no espaço vetorial V uma transformação linear $F: U \to V$ que seja bijetora. Um isomorfismo $F: U \to U$ é um automorfismo de U.

Exemplos

1) O operador idêntico $I: U \to U$ dada por $I(u) = u$ para todo vetor u do espaço é trivialmente um automorfismo de U.

2) $F: \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ definida por $F(x, y) = x + (x + y)t$ é também um isomorfismo. De fato.

(I) $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) \Longrightarrow x_1 + (x_1 + y_1)t =$

$= x_2 + (x_2 + y_2)t \Longrightarrow x_1 = x_2$ e $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Logo F é injetora.

(II) Dado $f(t) = a + bt \in P_1(\mathbb{R})$ basta tomar $u = (a, b - a)$ para que se tenha $F(u) = f(t)$. Então F é sobrejetora.

(III) $F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 +$
$+ (x_1 + x_2 + y_1 + y_2)t = x_1 + (x_1 + y_1)t + x_2 + (x_2 + y_2)t =$
$= F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)$.

(IV) A condição $F(\alpha u) = \alpha F(u)$ é deixada como exercício.

Proposição 2 — Se F é um isomorfismo de U em V, então $F^{-1} : V \to U$ também é um isomorfismo (de V em U).

Demonstração

(I) Suponhamos $v_1, v_2 \in V$ e $F^{-1}(v_1) = F^{-1}(v_2) = u$. Então $F(u) = v_1$ e $F(u) = v_2$. Daí $v_1 = v_2$. Logo F^{-1} é injetora.

(II) Para verificar que F^{-1} é sobrejetora basta observar que dado $u \in U$, tomando $v = F(u)$ teremos:

$$F^{-1}(v) = F^{-1}(F(u)) = u.$$

(III) Sejam $v_1, v_2 \in V$ e façamos $F^{-1}(v_1 + v_2) = u$. Como F é sobrejetora, então existem $u_1, u_2 \in U$ de maneira que $F(u_1) = v_1$ ($\Longleftrightarrow F^{-1}(v_1) = u_1$) e $F(u_2) = v_2$ ($\Longleftrightarrow F^{-1}(v_2) = u_2$). Substituindo estes resultados na igualdade inicial:

$$u = F^{-1}(F(u_1) + F(u_2)) = F^{-1}(F(u_1 + u_2)) =$$
$$= u_1 + u_2 = F^{-1}(v_1) + F^{-1}(v_2).$$

Voltando à igualdade inicial:

$$F^{-1}(v_1 + v_2) = F^{-1}(v_1) + F^{-1}(v_2).$$

(IV) Fica como exercício a demonstração de que:

$$F^{-1}(\alpha v) = \alpha F^{-1}(v), \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in V. \ \blacksquare$$

Nota: A proposição acima nos diz que sempre que existe um isomorfismo $F: U \to V$ também existe um isomorfismo $F^{-1}: V \to U$ (*isomorfismo inverso de F*) e devido a isso dizemos, nesse caso, que U e V são *espaços vetoriais isomorfos*. Dois espaços vetoriais isomorfos U e V muitas vezes são considerados indistintos. Para tanto, se F é o isomorfismo considerado de U em V, identifica-se cada elemento $u \in U$ com sua imagem $F(u) \in V$.

É possível estabelecer uma caracterização para os isomorfismos entre espaços vetoriais de dimensão finita, em termos de dimensão. O lema a seguir nos levará a isso.

Lema – Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $\dim U = n$ e $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então, para toda seqüência $v_1, \ldots, v_n$ de vetores de V, a aplicação $F : U \to V$, definida por

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

é linear e $F(u_i) = v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ademais, se $G : U \to V$ é linear e $G(u_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, então $G = F$.

Demonstração

I) Sejam $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ e $w_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ vetores de U. Então

$$F(w_1 + w_2) = F\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = F(w_1) + F(w_2)$$

II) Fica como exercício a demonstração de que $F(\alpha w) = \alpha F(w)$, para todo $\alpha \in R$ e todo $w \in U$.

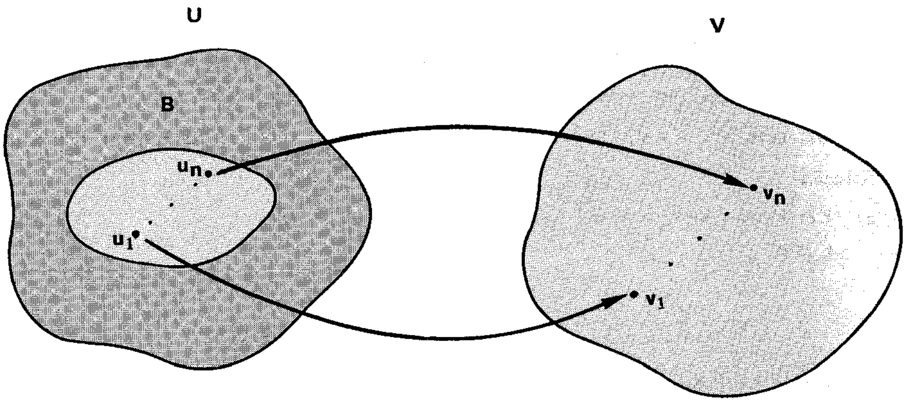
III) $F(u_1) = F(1u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n) = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n = v_1$. Obviamente: $F(u_2) = v_2, \ldots, F(u_n) = v_n$.

IV) Seja $w \in U$. Então w se escreve, de maneira única, como:

$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Daí, levando em conta que G é linear

$G(w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(u_i) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = F(w)$ e, como w é arbitrário, $G = F$. ∎

Nota: Os vetores $v_1, \ldots, v_n$ no lema anterior não são necessariamente distintos entre si. Podem, inclusive, ser todos iguais. Mas os u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ são distintos entre si pois B é uma base de U.



Teorema 2 – Dois espaços U e V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, dim U = dim V.

Demonstração

($\Longrightarrow$) Seja $F : U \to V$ um isomorfismo. Então $\text{Ker}(F) = \{0\}$ e $\text{Im}(F) = V$. Mas, devido ao teorema do núcleo e da imagem, $\dim U = \dim \text{Ker}(F) + \dim \text{Im}(F)$. Donde $\dim U = \dim V$.

($\Longleftarrow$) Sejam $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente, e consideremos $F : U \to V$ dada por $F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, conforme o lema anterior. Assim, F é linear. Supondo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, como C é L.I., então $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ e portanto $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$. Donde F é injetora. O corolário do teorema do núcleo e da imagem nos garante então que F é sobrejetora e portanto F é isomorfismo.

1. Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.
   a) Dar uma base e a dimensão de Ker(F);
   b) Dar uma base e a dimensão de Im(F).

Solução

a) $\text{Ker}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y, 2x - y + z) = (0, 0)\}$.
Como

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é $(-y, y, 3y)$, $y \in \mathbb{R}$, então $\text{Ker}(F) = \{(-y, y, 3y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 3) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Logo $\text{Ker}(F) = [(-1, 1, 3)]$ e $\{(-1, 1, 3)\}$ é uma base de Ker(F).

b) Achemos um conjunto de geradores de Im(F) : $(x + y, 2x - y + z) = x(1, 2) + y(1, -1) + z(0, 1)$ do que segue que $\text{Im}(F) = [(1, 2), (1, -1), (0, 1)]$. Para determinar uma base de Im(F) usamos o processo prático já estudado (Cap. 3, § 5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, uma base de Im(F) é $\{(1, 2), (0, 1)\}$e $\dim \text{Im}(F) = 2$. Segue que $\text{Im}(F) = \mathbb{R}^2$ e F é sobrejetora. Para concluir que $\{(1, 2), (0, 1)\}$é base de Im(F), ver Cap. 3, § 5.

2. Determinar uma aplicação linear $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\text{Im}(F) = [(1, 1, 2, 1), (2, 1, 0, 1)].$$

Solução

Como $\dim \text{Im}(F) = 2$, então $\dim \text{Ker}(F) = 1$. Podemos tomar $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $F(1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $F(0, 1, 0) = (1, 1, 2, 1)$ e $F(0, 0, 1) = (2, 1, 0, 1)$. A imagem será o conjunto dado. Temos

$$F(x, y, z) = xF(1, 0, 0) + yF(0, 1, 0) + zF(0, 0, 1) =$$
$$= y(1, 1, 2, 1) + z(2, 1, 0, 1) = (y + 2z, y + z, 2y, y + z).$$

É claro que o exercício em questão admite muitas soluções.

3. Seja F o operador linear de $M_2(\mathbb{R})$ definido por $F(X) = BX, \forall X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $B \in M_2(\mathbb{R})$.

No caso de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ determine Ker(F) e uma base da imagem de F.

Solução

$$\operatorname{Ker}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \right.$$

$$\left. = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x - z & 2y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Como o sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$$

só admite a solução trivial F é injetora. Por outro lado, levando em conta o teorema do núcleo e da imagem, tiramos que $\dim \mathrm{I_m}(F) = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker}(F) = 4 - 0 = 4$. Logo $\operatorname{Im}(F) = M_2(\mathbb{R})$ e qualquer base deste espaço é base de Im(F). Observe que F é um automorfismo de $M_2(\mathbb{R})$. Os mesmos resultados seriam obtidos para qualquer matriz B inversível.

4. Mostrar que o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$ é um automorfismo. Determinar F^{-1}.

Solução

Para achar o núcleo de F devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \\ \quad\; y = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é (0, 0, 0). Logo $\operatorname{Ker}(F) = \{(0, 0, 0)\}$ e F é injetora. Devido ao corolário do teorema do núcleo e da imagem podemos afirmar que F é um automorfismo. Supondo $F^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$, então $(x, y, z) = F(a, b, c) = (a + c, a - c, b)$. Logo

$$\begin{cases} a \quad\quad + c = x \\ a \quad\quad - c = y \\ \quad\; b \quad\quad = z \end{cases}$$

do que resulta que $a = \dfrac{x + y}{2}$, $b = z$ e $c = \dfrac{x - y}{2}$. Logo:

$$F^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + y}{2}, z, \frac{x - y}{2} \right) = \frac{1}{2}(x + y, 2z, x - y).$$

5. A aplicação linear $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $F(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ e $F(0, 0, 1) = (1, -1, 6)$, é um automorfismo?

Solução

$F(x, y, z) = xF(1, 0, 0) + yF(0, 1, 0) + zF(0, 0, 1) = x(1, 1, 0) + y(0, 0, 1) +$ $+ z(1, -1, 6) = (x + z, x - z, y + 6z)$. Como a única solução do sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$$

é a trivial, então $\text{Ker}(F) = \{(0, 0, 0)\}$ e F é um automorfismo do $\mathbb{R}^3$. Outra maneira de resolver: Mostrar que F leva uma base de $\mathbb{R}^3$ em uma base de $\mathbb{R}^3$.

6. Mostrar que $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x, x - y, y - z, z)$ é injetora mas não é isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$.

Solução

É claro que F é linear. Por outro lado o sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

só admite a solução trivial. Logo $\text{Ker}(F) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e F é injetora. Mas não é sobrejetora pois $\dim \text{Im}(F) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(F) = 3$ do que segue que $\text{Im}(F) \neq \mathbb{R}^4$.

Se usamos o teorema 2, o exercício é imediato.

7. Determinar o núcleo e a imagem, bem como as dimensões respectivas, de $F: P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = f(t) + t^2 f'(t)$.

Solução

Seja $a + bt + ct^2 \in \text{Ker}(F)$. Isso equivale a $a + bt + ct^2 + t^2(b + 2ct) = 0$ (polinômio nulo), ou seja, $a + bt + (b + c)t^2 + 2ct^3 = 0$ que por sua vez se verifica se, e somente se, $a = b = c = 0$. Logo $\text{Ker}(F) = \{0\}$. Assim $\dim \text{Ker}(F) = 0$. Por outro lado, seja $f(t)$ um polinômio genérico da Im (F). Então $f(t) = a + bt + (b + c)t^2 + 2ct^3 = a + b(t + t^2) +$ $+ c(t^2 + 2t^3)$. Isto mostra que $\text{Im}(F) = [1, t + t^2, t^2 + 2t^3]$. Como esses três vetores que geram Im (F) formam um conjunto L.I. (verifique) então $\{1, t + t^2, t^2 + 2t^3\}$ é uma base de Im (F).

8. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Provar que, se $B \subset U$ é tal que $[B] = U$, então $[F(B)] = \mathrm{Im}(F)$.

Solução

Seja $B = \{u_1, \ldots, u_r\}$. Todo elemento $v \in \mathrm{Im}(F)$ pode ser representado por $v = F(u)$, com $u \in U = [B]$. Logo existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ de modo que $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r$. Assim $v = F(u) = F(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r) = \alpha_1 F(u_1) + \ldots + \alpha_r F(u_r)$ o que vem mostrar que $v \in [F(B)]$. Ficou provado pois que $\mathrm{Im}(F) \subset [F(B)]$. Por outro lado um elemento, $v \in [F(B)]$ é dado por $v = \alpha_1 F(u_1) + \ldots + \alpha_r F(u_r) = F(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r)$. Logo $v \in \mathrm{Im}(F)$. Temos então que $[F(B)] \subset \mathrm{Im}(F)$.

9. Achar uma transformação linear do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado por $(1, 1, 0)$.

Solução

A idéia a ser usada na resolução está contida na demonstração do teorema do núcleo e da imagem. O conjunto $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ que completa a base $\{(1, 1, 0)\}$ do núcleo da transformação que pretendemos achar. Se tomarmos $T(0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1)$ linearmente independentes teremos uma base da $\mathrm{Im}(T)$, onde T é a transformação procurada. Façamos então: $T(0, 1, 0) = (1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1)$. Como $(x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) + (y - x)(0, 1, 0)$, então $T(x, y, z) = xT(1, 1, 0) + (y - x)T(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) = x(0, 0) + (y - x)(1, 0) + z(0, 1) = (y - x, z)$.

Notemos que o problema admite infinitas soluções.

10. Provar que o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$.

Solução

A função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x, y, 0)$ é linear injetora e sua imagem é o subespaço U. Logo $\mathbb{R}^2$ e U são isomorfos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

(a) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x + y - z$.

(b) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$.

(c) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$.

(d) $F: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$.

(e) $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX + X$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $F(X) = MX - XM$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*2. Determinar um operador linear $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, 2)$.

3. Determinar um operador linear do $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado por $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

4. Determinar um operador linear do $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

5. Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$ e $F(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ e $F(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes sub-espaços vetoriais: $Ker(F)$, $Im(F)$, $Ker(F) \cap Im(F)$ e $Ker(F) + Im(F)$.

6. Mostrar que cada um dos operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ a seguir é inversível e determinar o isomorfismo inverso em cada caso:

(a) $F(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$;

(b) $F(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z)$.

7. Considere o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$; $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ e $F(0, 1, 2) = (0, 0, 4)$. F é inversível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

8. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ vetores tais que $\{u, v\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. Sendo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, mostrar que uma das seguintes alternativas se verifica:

a) $\{F(u), F(v)\}$ é L.I.; b) $\dim Im(F) = 1$; c) $Im(F) = \{o\}$.

9. Sejam U e V sub-espaços do espaço W tais que $W = U \oplus V$. Consideremos o espaço vetorial $U \times V$ cuja adição é $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ e cuja multiplicação por escalares é dada por $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$. Mostrar que é um isomorfismo de $U \times V$ em W a aplicação assim definida: $F(u, v) = u + v$.

*10. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Seja $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear dado por $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = e_3, \ldots, F(e_n) = e_1$. Determinar $F(x_1, \ldots, x_n)$ e verificar se F é um automorfismo. Se for, ache o automorfismo inverso.

*11. Considere uma transformação linear $T: U \to V$. Provar que, se o conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_r)\}$ é L.I. em V, então $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é L.I. em U. Provar que, se T é injetora e $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é L.I. em U, então $\{T(u_1), \ldots, T(u_r)\}$ é L.I. em V.

*12. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.

a) Mostrar que a transformação linear $T: \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por $T(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$ é injetora mas não é sobrejetora.

b) Mostrar que a transformação linear $F: \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definida por $F(a_1, a_2, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$ é sobrejetora mas não é injetora.

c) Encontrar uma aplicação linear injetora de $P(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^\infty$.

*13. Consideremos uma transformação linear $F: U \to V$. Se $\dim U > \dim V$, prove que existe um vetor não nulo $u_o \in U$ tal que $F(u_o) = o$ (vetor nulo de V). (Ou seja, F não é injetora.)

*14. Seja $W = U \oplus V$. Consideremos os operadores lineares de W (projeções sobre U e V, respectivamente) dados por $P_1(u + v) = u$ e $P_2(u + v) = v$, $\forall u + v \in W$, com $u \in U$ e $v \in V$. Definido $H: W \to W$ por $H(w) = P_1(w) - P_2(w)$, $\forall w \in W$, mostre que H é um isomorfismo do espaço vetorial W nele mesmo, isto é, H é um automorfismo de W.

Tome $W = \mathbb{R}^2$, $U = [(1, 1)]$, $V = [(1, -1)]$ e represente geometricamente U, V, W, P_1, P_2, H.

*15. Provar que o $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer sub-espaço de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$.

CAPÍTULO 5

Matriz de uma Transformação Linear

1. OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Indicaremos por $L(U, V)$, daqui para frente, o conjunto das transformações lineares de U em V. Se $U = V$, o conjunto dos operadores lineares de U será denotado por $L(U)$. Vamos a seguir introduzir a operação de adição em $L(U, V)$.

Definição 1 — Dados $F, G \in L(U, V)$, definimos a *soma* $F + G$ de F com G da seguinte maneira:

$$F + G: U \to V \quad \text{e} \quad (F + G)(u) = F(u) + G(u), \ \forall u \in U.$$

A aplicação assim definida também é uma transformação linear pois:

(a) $(F + G)(u_1 + u_2) = F(u_1 + u_2) + G(u_1 + u_2) =$
$= F(u_1) + F(u_2) + G(u_1) + G(u_2) =$
$= F(u_1) + G(u_1) + F(u_2) + G(u_2) =$
$= (F + G)(u_1) + (F + G)(u_2)$ e

(b) $(F + G)(\alpha u) = F(\alpha u) + G(\alpha u) = \alpha F(u) + \alpha G(u) =$
$= \alpha(F(u) + G(u)) = \alpha(F + G)(u).$

Temos assim uma adição $(F, G) \to F + G$ em $L(U, V)$. Para essa adição valem as seguintes propriedades:

(I) *Associativa:* $F + (G + H) = (F + G) + H, \ \forall F, G, H \in L(U, V)$;

(II) *Comutativa:* $F + G = G + F, \ \forall F, G \in L(U, V)$;

(III) Existe *elemento neutro*: a transformação linear nula $0: U \to V$ é tal que $F + 0 = F, \ \forall F \in L(U, V)$; e

(IV) Para toda transformação $F \in L(U, V)$ existe neste conjunto a transformação *oposta*: existe

$$(-F) \in L(U, V) \mid F + (-F) = 0.$$

A propriedade comutativa se verifica assim:

Se $F, G \in L(U, V)$ e $u \in U$, $(F+G)(u) = F(u) + G(u) =$

$= G(u) + F(u) = (G + F)(u)$, o que significa que $F+G = G+F$.

Do mesmo modo se prova a associativa. Que o elemento neutro é a transformação nula se prova do seguinte modo:

$$\forall u \in U, (F + 0)(u) = F(u) + 0(u) = F(u) + o = F(u).$$

Por último, $(-F)$ é aplicação dada por $(-F)(u) = -F(u)$, $\forall u \in U$. Deixamos como exercício a verificação de que $(-F) \in L(U, V)$. Por outro lado, $\forall u \in U$, $(F + (-F))(u) = F(u) + (-F)(u) = F(u) + (-F(u)) = o = 0(u)$, o que vem mostrar que de fato $F + (-F) = 0$.

A seguir, definiremos a multiplicação de uma transformação linear por um escalar.

Definição 2 — Dados $F \in L(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos o *produto* αF de F por α assim:

$$\alpha F : U \to V \text{ e } (\alpha F)(u) = \alpha F(u), \forall u \in U.$$

A aplicação αF assim definida também é uma transformação linear de U em V, ou seja, também pertence a $L(U, V)$. Deixamos a constatação desse fato ao leitor. Dessa forma ficou definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times L(U, V)$ em $L(U, V)$ multiplicação essa que tem as seguintes propriedades:

(I) $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$;

(II) $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$;

(III) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$;

(IV) $1F = F$;

quaisquer que sejam α e β em $\mathbb{R}$ e F e G em $L(U, V)$.

Façamos a verificação de (III). Para todo $u \in U$, $(\alpha(F + G))(u) =$

$= \alpha((F + G)(u)) = \alpha(F(u) + G(u)) = \alpha F(u) + \alpha G(u) =$

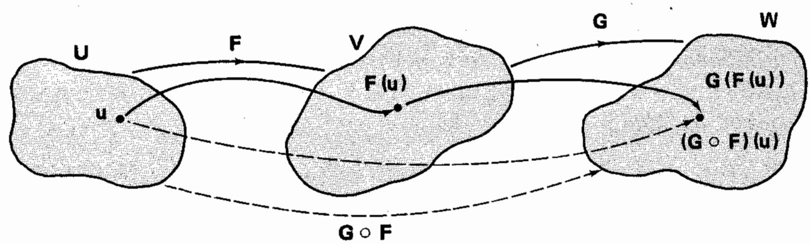
$= (\alpha F)(u) + (\alpha G)(u) = (\alpha F + \alpha G)(u)$. Logo $\alpha(F+G) = \alpha F + \alpha G$.

Do que vimos até aqui neste parágrafo podemos concluir que se U e V são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, então $L(U, V)$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ em relação ao par de operações consideradas acima.

No próximo passo, introduziremos a importante operação de composição de transformações lineares.

Definição 3 — Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $F: U \to V$ e $g: V \to W$ são transformações lineares, define-se a *aplicação composta* de F e G (notação: $G \circ F$) da seguinte maneira:

$$G \circ F: U \to W \quad e \quad (G \circ F)(u) = G(F(u)), \ \forall u \in U.$$



É fácil provar que $G \circ F \in L(U, W)$. De fato:

(a) $(G \circ F)(u_1 + u_2) = G(F(u_1 + u_2)) = G(F(u_1) + F(u_2)) =$

$= G(F(u_1)) + G(F(u_2)) = (G \circ F)(u_1) + (G \circ F)(u_2)$.

(b) Fica como exercício mostrar que

$$(G \circ F)(\alpha u) = \alpha (G \circ F)(u).$$

É importante considerar, quanto à composição, o caso $U = V = W$. Pois quando isto acontece $(G, F) \to G \circ F$ passa a ser uma operação em $L(U)$ que apresenta as seguintes propriedades:

(I) $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$, $\forall H, G, F \in L(U)$(associativa);

(II) $I \circ F = F \circ I = F$, $\forall F \in L(U)$ (o operador idêntico é o elemento neutro da composição);

(III) $H \circ (F + G) = H \circ F + H \circ G$ e $(F + G) \circ H = F \circ H + G \circ H$ $\forall F, G, H \in L(U)$ (a composição é distributiva em relação à adição).

A verificação de (I) e (II) fica como exercício. Quanto à (III) sua primeira parte se prova assim: para todo $u \in V$, $((H \circ (F + G))(u) = H((F + G)(u)) =$ $= H(F(u) + G(u)) = H(F(u)) + H(G(u)) = (H \circ F)(u) + (H \circ G)(u) = (H \circ F +$ $+ H \circ G)(u)$; logo $H \circ (F + G) = H \circ F + H \circ G$.

Notas:

1) A operação $(F, G) \to F \circ G$ não é comutativa em geral. Por exemplo, dados $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(x, y) = (x + y, 0)$ e $G(x, y) = (x, 2y)$, então

$$(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(x + y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{e}$$
$$(F \circ G)(x, y) = F(G(x, y)) = F(x, 2y) = (x + 2y, 0).$$
Logo $G \circ F \neq F \circ G$.

2) No conjunto L(U) define-se *potenciação* para expoentes naturais assim: $F^0 = I$ (operador idêntico); $F^1 = F$; $F^2 = F \circ F$; $F^3 = F \circ F \circ F$; ... Contudo é bom observar que para essa potenciação podemos ter resultados em princípio curiosos como $F^2 = I$, com $F \neq I$ e $F \neq -I$, $F^n = 0$ (operador nulo) com $F \neq 0$. Um operador $F \in L(U)$ tal que $F^2 = F$ chama-se *idempotente* (ou *projeção*); se $F^n = 0$, para um certo número natural n, então F se diz *nilpotente*.

Exemplos

1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $F(x, y) = (0, x)$ é nilpotente pois:
$$F^2(x, y) = F(F(x, y)) = F(0, x) = (0, 0) = 0(x, y)$$
o que nos garante que $F^2 = 0$.

2) O operador derivação $D: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ é nilpotente (por quê?).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sejam $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $F(x, y, z) = (x + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x, y - z)$. Determinar as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$:

   a) $F + G$ e

   b) $2F - 3G$.

   Solução

   a) $(F + G)(x, y, z) = F(x, y, z) + G(x, y, z) = (x + y, z) + (x, y - z) = (2x + y, y)$;

   b) $(2F - 3G)(x, y, z) = (2F)(x, y, z) - (3G)(x, y, z) = 2F(x, y, z) - 3G(x, y, z) = 2(x + y, z) - 3(x, y - z) = (-x + 2y, -3y + 5z)$.

2. Sejam $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as transformações lineares definidas por $F(x, y) = x + 2y$ e $G(x) = 2x$. Determinar a transformação $G \circ F$.

   Solução

   $(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(x + 2y) = 2(x + 2y) = 2x + 4y$.

   Observemos que a composta $F \circ G$ não está definida.

3. Consideremos $F, G \in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x - y, x)$ e $G(x, y) = (x, 0)$. Determinar:

a) $2F + 3G$;

b) $F \circ G$;

c) $G \circ F$;

d) F^2;

e) G^2.

Solução

Todas as transformações a serem determinadas pertencem a $L(\mathbb{R}^2)$.

a) $(2F + 3G)(x, y) = 2F(x, y) + 3G(x, y) = 2(x - y, x) + 3(x, 0) = (5x - 2y, 2x)$;

b) $(F \circ G)(x, y) = F(G(x, y)) = F(x, 0) = (x, x)$;

c) $(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(x - y, x) = (x - y, 0)$;

d) $F^2(x, y) = F(F(x, y)) = F(x - y, x) = (-y, x - y)$;

e) $G^2(x, y) = G(G(x, y)) = G(x, 0) = (x, 0)$.

Como $G^2 = G$, então G é um operador idempotente.

4. Sejam $F, G \in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por:

$$F(x, y) = (0, x) \quad \text{e} \quad G(x, y) = (x, 0).$$

Determinar:

a) $G \circ F$;

b) $F \circ G$;

c) $(G \circ F)^2$.

d) $(F \circ G)^2$;

Solução

a) $(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(0, x) = (0, 0)$.

Notemos que $G \circ F$ é o operador nulo, embora nem G e nem F o sejam.

b) $(F \circ G)(x, y) = F(G(x, y)) = F(x, 0) = (0, x)$.

Notemos que $F \circ G = F$, embora G não seja o operador idêntico do $\mathbb{R}^2$.

c) $(G \circ F)^2(x, y) = (G \circ F)((G \circ F)(x, y)) = (G \circ F)(0, 0) = (0, 0)$;

d) $(F \circ G)^2(x, y) = (F \circ G)((F \circ G)(x, y)) = (F \circ G)(0, x) = F(G(0, x)) =$
$= F(0, 0) = (0, 0)$.

Notemos então que $G \circ F = 0$ e que $F \circ G$ é um operador nilpotente pois $(F \circ G)^2 = 0$.

5. Sejam $F, G \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definidas por $F(x, y, z) = (0, 2x)$ e $G(x, y, z) = (x - y, x)$ e $H \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $H(x, y) = (x + y, x - y)$. Determinar:

a) $H \circ (F + G)$ e

b) $(H + I) \circ F$,

onde I indica o operador idêntico de $\mathbb{R}^2$.

Solução

a) $(H \circ (F + G))(x, y, z) = (H \circ F + H \circ G)(x, y, z) = H(F(x, y, z)) + H(G(x,y,z)) =$
$= H(0, 2x) + H(x - y, x) = (2x, -2x) + (2x - y, -y) = (4x - y, -2x - y)$;

b) $((H + I) \circ F)(x, y, z) = (H \circ F + F)(x, y, z) = (2x, -2x) + (0, 2x) = (2x, 0)$.

6. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = e_3$ e $F(e_3) = e_1$,

a) determinar $F(x, y, z)$;

b) mostrar que $F^3 = I$ e que, portanto, $F^2 = F^{-1}$.

Solução

a) $F(x, y, z) = F(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xF(e_1) + yF(e_2) + zF(e_3) = (z, x, y)$;

b) $F^2(x, y, z) = F(z, x, y) = (y, z, x)$ e $F^3(x, y, z) = F(y, z, x) = (x, y, z) = I(x, y, z)$.

Logo $F^3 = I$. Como $F^2 \circ F = F \circ F^2 = F^3$, então $F^2 = F^{-1}$.

7. Sejam $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $G \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dadas respectivamente por $F(x, y, z) = (x - y, y - z)$ e $G(x, y) = (x - y, y - x, x + y)$. Sendo I o operador idêntico do $\mathbb{R}^3$ verifique se $G \circ F + I$ é um automorfismo do $\mathbb{R}^3$. Se for, determine o automorfismo inverso.

Solução

$(G \circ F + I)(x, y, z) = (G \circ F)(x, y, z) + (x, y, z) = G(x - y, y - z) + (x, y, z) =$
$= (x - 2y + z, -x + 2y - z, x - z) + (x, y, z) = (2x - 2y + z, -x + 3y - z, x)$.

Determinemos Ker $(G \circ F + I)$ pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Não oferece dificuldade verificar que a única solução desse sistema é a trivial e que portanto $\text{Ker}(G \circ F + I) = \{(0, 0, 0)\}$. Assim $G \circ F + I$ é um automorfismo do $\mathbb{R}^3$. Determinemos o isomorfismo inverso. Façamos $G \circ F + I = H$. Suponhamos $H^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$. Então $(x, y, z) = H(a, b, c) = (2a - 2b + c, -a + 3b - c, a)$. Daí

$$\begin{cases} 2a - 2b + c = x \\ -a + 3b - c = y \\ a = z \end{cases}$$

cuja solução é $(z, x + y - z, 3x + 2y - 4z)$. Logo

$$H^{-1}(x, y, z) = (z, x + y - z, 3x + 2y - 4z).$$

8. Consideremos as seguintes transformações lineares do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$: $F(x, y, z) = (y, x + z)$ e $G(x, y, z) = (2z, x - y)$. Mostrar que $\{F, G\}$ é linearmente independente no espaço $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Solução

Suponhamos $\alpha F + \beta G = 0$ (transformação nula). Temos então $(\alpha F + \beta G)(x, y, z) = (0, 0)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Em particular tiramos o seguinte:

$(\alpha F + \beta G)(1, 0, 0) = \alpha F(1, 0, 0) + \beta G(1, 0, 0) = \alpha(0, 1) + \beta(0, 1) = (0, \alpha + \beta) = (0, 0)$. Daí $\alpha + \beta = 0$.

Analogamente $(\alpha F + \beta G)(0, 0, 1) = (2\beta, \alpha) = (0, 0)$ do que segue $\alpha = 2\beta = 0$. Logo $\alpha = \beta = 0$.

Notemos que bastaria ter aplicado $\alpha F + \beta G$ em $(0, 0, 1)$ para concluir o exercício. Normalmente seriam necessárias as duas relações obtidas mais a relação resultante de aplicar $\alpha F + \beta G$ ao vetor $(0, 1, 0)$.

9. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3)$ definida por $F(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Mostrar que $(F^2 - I) \circ (F - 3I) = 0$ (operador nulo).

Solução

$(F^2 - I)(x, y, z) = (8x, 2x, 9x)$. Por outro lado $(F - 3I)(x, y, z) = (0, x - 4y, 2x + y - 2z)$.

Portanto $((F^2 - I) \circ (F - 3I))(x, y, z) = (F^2 - I)(0, x - 4y, 2x + y - 2z) = (0, 0, 0)$. Poderíamos também ter observado que $(F^2 - I) \circ (F - 3I) = F^3 - 3F^2 - F + 3I$.

10. Seja F um operador idempotente (isto é, $F^2 = F$) de um espaço vetorial V. Mostrar que $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

Solução

Todo vetor $v \in V$ pode ser assim escrito: $v = (v - F(v)) + F(v)$. A segunda parcela obviamente está no sub-espaço $\mathrm{Im}(F)$. A primeira está no núcleo pois $F(v - F(v)) = F(v) - F^2(v) = F(v) - F(v) = o$. Por outro lado suponhamos que $v \in \mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Im}(F)$. Então $v = F(u)$, com $u \in V$, e $F(v) = F^2(u) = F(u) = o$. Logo $v = o$.

11. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $F \in L(U, V)$. Define-se *posto de F* (notação $\rho(F)$) do seguinte modo: $\rho(F) = \dim \mathrm{Im}(F)$. Mostrar que:

a) $\rho(F + G) \leqslant \rho(F) + \rho(G)$, $\forall F, G \in L(U, V)$;

b) $\rho(F \circ G) \leqslant \min\{\rho(F), \rho(G)\}$, $\forall F, G \in L(U)$.

Solução

a) Observemos primeiro que $\mathrm{Im}(F + G) \subset \mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G)$. De fato, dado $v = (F + G)(u) \in \mathrm{Im}(F + G)$, então $v = F(u) + G(u)$ o que mostra que v é um elemento de $\mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G)$. Então $\dim \mathrm{Im}(F + G) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G)) = \dim \mathrm{Im}(F) + \dim \mathrm{Im}(G) - \dim(\mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Im}(G)) \leqslant \dim \mathrm{Im}(F) + \dim \mathrm{Im}(G)$, ou seja, $\rho(F + G) \leqslant \rho(F) + \rho(G)$.

b) Notemos de início que $\mathrm{Im}(F \circ G) \subset \mathrm{Im}(F)$, pois dado $v = (F \circ G)(u) \in \mathrm{Im}(F \circ G)$, então $v = F(G(u))$ e como $G(u)$ está em U, então $v \in \mathrm{Im}(F)$. Logo $\rho(F \circ G) \leqslant \rho(F)$. Por outro lado se considerarmos F como transformação linear de $\mathrm{Im}(G)$ em U, o teorema do núcleo e da imagem nos garante que dim Im (G) $\geqslant$ dim Im (F $\circ$ G), isto é,

$$\rho(F \circ G) \leqslant \rho(G).$$

Portanto $\rho(F \circ G) \leqslant \min\{\rho(F), \rho(G)\}$.

12. Sejam $F \in L(V)$ e $u_0 \in V$ tais que $F^n = 0$ (operador nulo) e $F^{n-1}(u_0) \neq o$. Mostrar que

$$\{u_0, F(u_0), F^2(u_0), \ldots, F^{n-1}(u_0)\}$$

é um conjunto L.I. em V.

Solução

Suponhamos que $\alpha_0 u_0 + \alpha_1 F(u_0) + \ldots + \alpha_{n-1} F^{n-1}(u_0) = o$ com

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

É óbvio que se $F^n = 0$, então $F^{n+1} = F^{n+2} = \ldots = 0$. Apliquemos F^{n-1} em (1). Teremos $\alpha_0 F^{n-1}(u_0) + \alpha_1 F^n(u_0) + \alpha_2 F^{n+1}(u_0) + \ldots + \alpha_{n-1} F^{2n-2} = \alpha_0 F^{n-1}(u_0) = o$. Como $F^{n-1}(u_0) \neq o$, então $\alpha_0 = 0$. Eliminando $\alpha_0 u_0$ de (1) e aplicando F^{n-2} às parcelas restantes chegaremos a $\alpha_1 = 0$. Repetindo o raciocínio mais $n - 2$ vezes iremos concluir que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sendo F, G e H $\in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$, determinar $F + H$, $F \circ G$, $G \circ (H + F)$, $G \circ F$, $H \circ F$, $H \circ F \circ G$ e $G \circ F \circ H$.

2. Sejam F, G $\in L(\mathbb{R}^3)$ assim definidos:

   $F(x, y, z) = (x + y, z + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$

   Determinar:

   a) $F \circ G$;

   b) Ker $(F \circ G)$ e Im $(G \circ F)$.

   c) uma base e a dimensão de Ker $(F^2 \circ G)$.

3. Sejam $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $G \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ assim definidas:

   $F(x, y) = (0, x, x - y)$ e $G(x, y, z) = (x - y, x + 2y + 3z)$.

   Determinar $F \circ G \circ F$.

4. Seja $F \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $F(x, y) = (y, x)$. Determine $F^n(x, y)$, sendo $n \geqslant 1$ um número inteiro. Mesmo exercício com $G \in L(\mathbb{R}^2)$ dada por $G(x, y) = (x, 0)$.

5. Seja $F \in L(\mathbb{R}^2)$ o operador dado por $F(1, 0) = (2, 5)$ e $F(0, 1) = (3, 4)$. Verificar se são automorfismos do $\mathbb{R}^2$: $G = I + F$ e $H = I + F + F^2$.

6. Mostre que os operadores F, G, $H \in L(\mathbb{R}^2)$ dados por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$ formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.

7. Sejam F e G dois operadores lineares de um espaço vetorial V. Mostre que $\text{Ker}(G) \subset \text{Ker}(F \circ G)$. Dê um exemplo onde vale a igualdade.

8. Sejam $F \in L(U, V)$ e $G \in L(V, W)$ tais que $\text{Ker}(F) = \{o\}$ e $\text{Ker}(G) = \{o\}$. Provar que $\text{Ker}(G \circ F) = \{o\}$.

*9. Sejam U e V sub-espaços do espaço W tais que $W = U \oplus V$. Todo vetor $w \in W$ se escreve, de maneira única, da seguinte forma: $w = u + v (u \in U$ e $v \in V)$. Sendo P_1 e P_2 as projeções dadas por $P_1(w) = u$ e $P_2(w) = v$, mostrar que:

(a) $P_1^2 = P_1$ e $P_2^2 = P_2$;

(b) $P_1 + P_2 = I$;

(c) $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$ (operador nulo de W).

10. Mostrar que um operador $F \in L(V)$ é idempotente se, e somente se, $I - F$ é idempotente.

11. Seja $F \in L(\mathbb{R}^4)$ dado por

$F(x, y, z, t) = (0, x, y + 2x, z + 2y + 3x)$.

Mostrar que:

a) $F^4 = 0$;

b) $I - F$ é um automorfismo do $\mathbb{R}^4$ e $I + F + F^2 + F^3 = (I - F)^{-1}$.

12. Seja $\mathbb{C}$ o espaço vetorial dos números complexos sobre $\mathbb{R}$. Consideremos $F, G \in L(\mathbb{C})$ assim definidas:

$$F(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z \quad \text{e} \quad G(z) = iz, \ z \in \mathbb{C}. \ \text{Calcular:}$$

a) F^2;

b) F^4;

c) G^2;

d) $F \circ G$;

e) $(F \circ G) \circ (F \circ G)$.

13. Determinar se os seguintes operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ são idempotentes ou nilpotentes ou nenhuma das duas coisas:

a) $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$; $F^2 = F(-x,-y,-z) = (x,y,z)$

b) $F(x, y, z) = (z, x, y)$; $F^2 = F(z,x,y) = (y,z,x)$

c) $F(x, y, z) = (x, 0, z)$; $F^2 = F(x,0,z) = (x,0,z)$ idempotente

d) $F(x, y, z) = (0, 0, x)$. $F^2 = F(0,0,x) = (0,0,0)$ nilpotente

14. Seja $F \in L(\mathbb{R}^2)$ definido por $F(x, y) = (x, x + y)$.

a) Determinar F^2;

b) Mostrar que $F^2 - 2F + I = (F - I)^2 = 0$ mas que $F - I \neq 0$.

15. Sejam F e G operadores lineares de um espaço V tais que $F \circ G = G \circ F$. Mostrar que $\operatorname{Ker}(F) + \operatorname{Ker}(G) \subset \operatorname{Ker}(F \circ G)$.

16. Seja $F \in L(V)$ um operador tal que $F^2 - F + I = 0$. Mostrar que F é inversível e que $F^{-1} = I - F$.

17. Sejam $F, G \in L(V)$ tais que $F \circ G = G \circ F$. Mostrar que:

a) $(F + G)^2 = F^2 + 2(F \circ G) + G^2$;

b) $(F + G) \circ (F - G) = F^2 - G^2$.

*18. Seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de um espaço vetorial V de dimensão n. Considerando o operador linear $T \in L(V)$ tal que $T(u_1) = u_2$, $T(u_2) = u_3$, ..., $T(u_n) = u_1$, mostre que $T^n = I$ mas que $T^{n-1} \neq I$.

19. Mostrar que o operador derivação em $P_n(\mathbb{R})$ é nilpotente.

*20. Sejam $F, G \in L(V)$. Se F é um automorfismo e α é um escalar $\neq 0$, mostrar que:

$$\rho(\alpha G) = \rho(G) \text{ e } \rho(F \circ G) = \rho(G \circ F) = \rho(G).$$

(Veja exercício resolvido nº 11).

2. MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, sobre $\mathbb{R}$. Consideremos uma transformação linear $F: U \to V$. Dadas as bases $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de V, então cada um dos vetores $F(u_1), \ldots, F(u_n)$ está em V e conseqüentemente é combinação linear da base C:

$$\begin{aligned} F(u_1) &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \ldots + \alpha_{m1} v_m \\ F(u_2) &= \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \ldots + \alpha_{m2} v_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(u_n) &= \alpha_{1n} v_1 + \alpha_{2n} v_2 + \ldots + \alpha_{mn} v_m \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

onde os α_{ij} estão univocamente determinados.

Definição 4 – A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$$

que se obtém das considerações anteriores é chamada *matriz de* F *em relação* às bases B e C. Usaremos para indicar essa matriz a notação

$$(F)_{B,C}$$

Notas:

1) Se F é um operador linear e considerarmos B = C, então diremos apenas matriz de F em relação à base B para indicar a matriz acima definida e usaremos a notação $(F)_B$ para representá-la.

2) Sempre que não haja dúvidas quanto ao par de bases que estamos considerando escreveremos apenas (F) para indicar a matriz de F em relação a esse par de bases.

Exemplos

1) Qual a matriz de $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = (x + y, y + z)$, em relação às bases

$B = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (0, 1, 0); u_3 = (0, 0, 1)\}$ e

$C = \{v_1 = (1, 0); v_2 = (1, 1)\}$?

$$F(u_1) = (1, 0) = 1v_1 + 0v_2$$
$$F(u_2) = (1, 1) = 0v_1 + 1v_2$$
$$F(u_3) = (0, 1) = -v_1 + v_2 \quad \text{(verifique)}$$

Logo

$$(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja I o operador idêntico de U. Dadas as bases B e C de U, o que é $(I)_{B,C}$?

Suponhamos $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_n\}$. Então, se $(I)_{B,C} = (\alpha_{ij})$,

$$I(u_1) = u_1 = \alpha_{11}v_1 + \ldots + \alpha_{n1}v_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I(u_n) = u_n = \alpha_{1n}v_1 + \ldots + \alpha_{nn}v_n$$

o que mostra que $(I)_{B,C}$ é a *matriz de mudança da base* C *para a base* B.

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões n e m respectivamente. Conforme vimos, uma vez fixadas uma base de U e uma base de V, a cada transformação linear $F \in L(U, V)$ está associada uma única matriz (F) real m × n. Ou seja, ficou definida uma aplicação

$$F \to (F)$$

de L(U, V) em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Proposição 1 — Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões n e m respectivamente. Então, fixadas as bases $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de U e V, respectivamente, a aplicação $F \to (F)$ que a cada $F \in L(U, V)$ associa a matriz de F em relação às bases B e C é bijetora.

Demonstração — Suponhamos $F, G \in L(U, V)$. Se tivermos $(F) = (G)$ então as respectivas colunas de (F) e (G) são iguais e daí $F(u_j) = G(u_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Dado $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in U$, $F(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(u_i) = G(u)$, ou seja $F = G$.

Que $F \to (F)$ é sobrejetora é conseqüência direta da definição de matriz de uma transformação linear e do lema que precede o teorema 2 (pág. 118).

Exemplo — Dada a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ache $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ de maneira que, sendo

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2)\} \quad e \quad C = \{(1, 0), (1, 1)\},$$

se tenha $M = (F)_{B,C}$.

Da definição de matriz de F decorre que devemos ter:

$$F(1, 0, 0) = 1(1, 0) + 0(1, 1) = (1, 0)$$

$$F(0, 1, 0) = 2(1, 0) + 1(1, 1) = (3, 1)$$

$$F(0, 1, 2) = 3(1, 0) + 0(1, 1) = (3, 0).$$

Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supondo

$$(a, b, c) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 1, 2)$$

obtemos: $x = a$, $y = b - \frac{c}{2}$ e $z = \frac{c}{2}$. Logo

$$F(a, b, c) = F\left(a(1, 0, 0) + \left(b - \frac{c}{2}\right)(0, 1, 0) + \frac{c}{2}(0, 1, 2)\right) =$$

$$= a(1, 0) + \left(b - \frac{c}{2}\right)(3, 1) + \frac{c}{2}(3, 0) =$$

$$= \left(a + 3b, b - \frac{c}{2}\right).$$

Vejamos agora como se comporta a correspondência $F \rightarrow (F)$ entre os espaços vetoriais $L(U, V)$ e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Dados $F, G \in L(U, V)$, se $(F) = (\alpha_{ij})$ e $(G) = (\beta_{ij})$, em relação ao mesmo par de bases B e C, determinemos a matriz de $F + G$ em relação a esse par de bases.

Supondo $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$, então

$$(F + G)(u_j) = F(u_j) + G(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij})v_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Logo $(F + G) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (F) + (G)$.

Em resumo: a matriz da soma de duas transformações lineares é a soma das matrizes de cada uma, em relação ao mesmo par de bases. Isto significa que a correspondência $F \rightarrow (F)$ comporta-se bem em relação à adição.

Sejam U e V como acima e tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$. Supondo $(F) = (\alpha_{ij})$ o que é (λF), em relação ao mesmo par de bases?

Um raciocínio análogo ao da parte anterior (fica como exercício) leva ao seguinte resultado:

$$(\lambda F) = (\lambda\alpha_{ij}) = \lambda(\alpha_{ij}) = \lambda(F)$$

isto é, a matriz do produto de uma transformação linear por um número é igual a esse número multiplicado pela matriz da transformação linear dada.

Conclusão: Reunindo os resultados obtidos até aqui neste parágrafo, tira-se a conclusão que, dados os espaços vetoriais U e V sobre $\mathbb{R}$, ambos de dimensão finita, e fixando uma base de U e uma base de V, a aplicação:

$$F \to (F)$$

é um isomorfismo do espaço vetorial L(U, V) no espaço vetorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, desde que dim U = n e dim V = m. Em particular conclui-se que dim L(U, V) = m · n pois esta é a dimensão de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, conforme já vimos.

3. MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO COMPOSTA

Seja U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões m, n e p, que admitem bases $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $D = \{w_1, \ldots, w_p\}$, respectivamente. Supondo $F \in L(U, V)$, $G \in L(V, W)$ e que $(F)_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $(G)_{C,D} = (\beta_{ki})$, pretendemos determinar $(G \circ F)_{B,D}$.

Seguindo a definição de matriz de uma transformação linear:

$$(G \circ F)(u_j) = G(F(u_j)) = G\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} G(v_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} w_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) w_k.$$

Logo o termo geral de $(G \circ F)_{B,D}$ é $\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}$ que é o termo geral de $(G)_{C,D} \cdot (F)_{B,C}$. Logo temos a igualdade

$$(G \circ F)_{B,D} = (G)_{C,D} \cdot (F)_{B,C}.$$

Costuma-se dizer (imprecisamente) que a matriz de $G \circ F$ é igual ao produto da matriz de G pela matriz de F.

É de se esperar que isomorfismos e matrizes inversíveis estejam relacionados. É o que veremos a seguir.

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensão m. Se B e C são bases de U e V, respectivamente, e $F: U \to V$ é um isomorfismo, mostremos que $(F)_{B,C}$ é inversível e que a sua inversa é dada por $(F^{-1})_{C,B}$. Isto é conseqüência direta da fórmula da matriz da composta, obtida logo acima:

$$(F)_{B,C} \cdot (F^{-1})_{C,B} = (F \circ F^{-1})_C = I_n \quad e$$

$$(F^{-1})_{C,B} \cdot (F)_{B,C} = (F^{-1} \circ F)_B = I_n$$

pois a matriz do operador idêntico, tanto de U como de V, é I_n. As igualdades obtidas provam nossas afirmações.

Exemplo – Consideremos o isomorfismo F: $\mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dado por:

$$F(x, y) = x + (x + y)t.$$

Considerando as bases canônicas B = {(1, 0), (0, 1)} e C = {1, t} desses espaços, determinemos $(F)_{B,C}$. Como

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= 1 + 1t \\ F(0, 1) &= \quad\;\; 1t \end{aligned}$$

então:

$$(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos a inversa dessa matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ e portanto } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

é a inversa da matriz de F, ou seja, é a matriz de F^{-1} em relação a C e B. Daí:

$$\begin{aligned} F^{-1}(1) &= (1, -1) \text{ e} \\ F^{-1}(t) &= (0, \;\;\; 1) \end{aligned}$$

do que se conclui que $F^{-1}(a + bt) = a(1, -1) + b(0, 1) = (a, -a + b)$. Esta é a lei que define F^{-1}.

Como um resultado importante das fórmulas acima, vejamos como se resolve o seguinte problema:

Seja U um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Dadas as bases B = $= \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de U e dado $T \in L(U)$, pretendemos estabelecer uma fórmula que relacione $(T)_B$ com $(T)_C$. Isto com a seguinte finalidade: quando se muda da base B para a base C, o que acontece com a matriz de $T \in L(U)$?

Proposição 2 – Nas condições acima, se M é a matriz de mudança da base B para a base C, então $(T)_C = M^{-1} \cdot (T)_B \cdot M$.

Demonstração – Já vimos (exemplo 2, parágrafo 2 deste capítulo) que a matriz de mudança de B para C é $(I)_{C,B}$, isto é,

$$M = (I)_{C,B}.$$

Daí então:

$$M^{-1} = (I^{-1})_{B,C} = (I)_{B,C}.$$

Portanto

$$M^{-1}(T)_B M = (I)_{B,C}(T)_B(I)_{C,B} = (I)_{B,C}(T)_{C,B} = (T)_C$$

conforme havíamos afirmado. ■

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x, y, z) = (z, x + y)$. Determinar a matriz de F em relação às bases $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e C = base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Solução

$$F(1, 1, 1) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$
$$F(1, 1, 0) = (0, 2) = 0(1, 0) + 2(0, 1)$$
$$F(1, 0, 0) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$$

e daí $$(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x, y, z) = (z, x + y)$ (a mesma aplicação do exemplo 1). Determinar a matriz de F em relação às bases $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $C = \{(1, 3), (2, 5)\}$ do $\mathbb{R}^2$.

Solução

$$F(1, 1, 1) = (1, 2) = a_1(1, 3) + b_1(2, 5) \quad (1)$$
$$F(1, 1, 0) = (0, 2) = a_2(1, 3) + b_2(2, 5) \quad (2)$$
$$F(1, 0, 0) = (0, 1) = a_3(1, 3) + b_3(2, 5) \quad (3)$$

De (1) vem:

$$\begin{cases} a_1 + 2b_1 = 1 \\ 3a_1 + 5b_1 = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad a_1 = -1 \text{ e } b_1 = 1$$

De (2) vem

$$\begin{cases} a_2 + 2b_2 = 0 \\ 3a_2 + 5b_2 = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad a_2 = 4 \text{ e } b_2 = -2$$

De (3) vem

$$\begin{cases} a_3 + 2b_3 = 0 \\ 3a_3 + 5b_3 = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad a_3 = 2 \text{ e } b_3 = -1$$

Portanto

$$(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Determinar a representação matricial de cada um dos seguintes operadores do $\mathbb{R}^2$ em relação às bases indicadas:

a) $F(x, y) = (2x, 3y - x)$ e base canônica;

b) $F(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$ e base $B = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

Solução

a) $F(1, 0) = (2, -1) = 2(1, 0) - 1(0, 1)$

$F(0, 1) = (0, \ 3) = 0(1, 0) + 3(0, 1)$

$$(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $F(1, 2) = (-5, 11) = a_1(1, 2) + b_1(2, 3) \quad (1)$

$F(2, 3) = (-6, 17) = a_2(1, 2) + b_2(2, 3) \quad (2)$

De (1) vem

$$\begin{cases} a_1 + 2b_1 = -5 \\ 2a_1 + 3b_1 = 11 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = 37 \quad e \quad b_1 = -21.$$

De (2) vem

$$\begin{cases} a_2 + 2b_2 = -6 \\ 2a_2 + 3b_2 = 17 \end{cases} \Longrightarrow a_2 = 52 \quad e \quad b_2 = -29.$$

Portanto

$$(F)_B = \begin{pmatrix} 37 & 52 \\ -21 & -29 \end{pmatrix}$$

4. Determinar o operador F do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solução

Pela definição de matriz de uma transformação temos:

$$F(1, 1) = 1(1, 1) + 1(1, 2) = (2, 3)$$

$$F(1, 2) = 0(1, 1) + 2(1, 2) = (2, 4)$$

Escrevamos (x, y) como combinação linear da base $B: (x, y) = a(1, 1) + b(1, 2)$, logo $a + b = x$ e $a + 2b = y$ e daí $a = 2x - y$ e $b = y - x$. Portanto $F(x, y) = (2x - y)(2, 3) + (y - x)(2, 4) = (2x, 2x + y)$.

5. Seja $F \in L(P_2(\mathbb{R}))$ definido por $F(g(t)) = (1 - t)g'(t)$. Determinar a matriz de F em relação à base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.

Solução

A base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ é $B = \{1, t\}$. Usemos a definição de matriz de uma transformação linear:

$$\begin{aligned} F(1) &= (1 - t)0 = 0 \cdot 1 - 0t \\ F(t) &= (1 - t)1 = 1 \cdot 1 - 1t \end{aligned} \implies (F)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ é

$$(F)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinar a matriz de F em relação à base canônica, usando a fórmula de mudança de base para um operador linear.

Solução

Indicando por C a base canônica devemos aplicar a fórmula $(F)_C = M^{-1}(F)_B M$, onde M é a matriz de mudança de B para C. Calculemos M.

$$\begin{cases} (1, 0) = x(1, 1) + y(1, -1) \\ (0, 1) = z(1, 1) + t(1, -1) \end{cases} \implies x = \frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

e, ainda, $z = \frac{1}{2}$ e $t = -\frac{1}{2}$. Daí

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$(F)_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Considere $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Determine a matriz do operador $F \in L(\mathbb{C})$ dado por $F(z) = \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, em relação à base $\{1, i\}$ e em relação à base $\{1 + i, 1 + 2i\}$.

Solução

a) $$F(1) = \overline{1} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1$$
$$F(i) = \overline{i} = -i = 0 \cdot 1 + (-1)i$$
$$\Longrightarrow (F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$F(1 + i) = 1 - i = a_1(1 + i) + b_1(1 + 2i) = 3(1 + i) - 2(1 + 2i)$$
$$F(1 + 2i) = 1 - 2i = a_2(1 + i) + b_2(1 + 2i) = 4(1 + i) - 3(1 + 2i)$$
$$\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (F) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão 3. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Sendo F o operador linear de V tal que $F(e_1) = e_2$ e que deixa fixos todos os vetores de $W = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid x - y + z = 0\}$, determinar $(F)_B$.

Solução

Inicialmente achemos um sistema de geradores de W. Um vetor típico de W é da forma $w = xe_1 + (x + z)e_2 + ze_3 = x(e_1 + e_2) + z(e_2 + e_3)$. Logo $W = [e_1 + e_2, e_2 + e_3]$. Juntando o fato de F ser linear com o fato de F deixar fixos os elementos de W tiramos:

$$F(e_1 + e_2) = F(e_1) + F(e_2) = e_2 + F(e_2) = e_1 + e_2,$$

do que segue $F(e_2) = e_1$ e ainda,

$$F(e_2 + e_3) = F(e_2) + F(e_3) = e_1 + F(e_3) = e_2 + e_3$$

que acarreta $F(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3$. Em resumo temos:

$$F(e_1) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$$
$$F(e_2) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$
$$F(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3$$

e, portanto,

$$(F)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Determinar a matriz do operador derivação em $P_n(\mathbb{R})$ em relação à base canônica desse espaço.

Solução

A base canônica de $P_n(\mathbb{R})$ é $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Então

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2 + \ldots + 0t^n$$
$$D(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0t + 0t^2 + \ldots + 0t^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D(t^n) = nt^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2 + \ldots + nt^{n-1} + 0t^n$$

$$(D)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

10. Seja $F \in L(P_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ a transformação linear assim definida:

$$F(g(t)) = \int_0^1 g(t)dt.$$

Determinar a matriz de F em relação às bases $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $C = \{1\}$, de $P_3(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

Solução

$F(1) = \int_0^1 dt = t\Big|_1^0 = 1$; $F(t) = \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^0 = \frac{1}{2}$. Analogamente

$F(t^2) = \frac{1}{3}$ e $F(t^3) = \frac{1}{4}$. Logo $(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

11. Verificar matricialmente se o operador linear $F \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $F(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$ é inversível. Se for, ache F^{-1} também por meio de matrizes.

Solução

A matriz de F em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Achemos agora G(x, y). Como

$$G(1, 0) = 1(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (1, -1, 3)$$

$$G(0, 1) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (1, 2, 1),$$

então

$$G(x, y) = x(1, -1, 3) + y(1, 2, 1) = (x + y, -x + 2y, 3x + y).$$

15. Seja $W = U \oplus V$ e suponhamos U e V invariantes pelo operador linear $F \in L(W)$, isto é, $F(U) \subset U$ e $F(V) \subset V$. Supondo $\dim U = m$ e $\dim V = n$ mostre que existe uma base de W em relação à qual a matriz de F é da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{m,n} \\ \hline 0_{n,m} & B \end{array}\right)$$

onde A e B são matrizes de ordem m e n, respectivamente, $0_{m,\,n}$ é a matriz nula de ordem $m \times n$ e $0_{n,\,m}$ a matriz nula de ordem $n \times m$.

Solução

Se $\{u_1, \ldots, u_m\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ são bases de U e V respectivamente, então $B =$ $= \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de W. Calculemos a matriz de F em relação a essa base. Como $F(u_i) \in U (i = 1, \ldots, m)$ e $F(v_j) \in V$ $(j = 1, \ldots, n)$, então

$$\begin{array}{ll} F(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \ldots + \alpha_{m1}u_m & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F(u_m) = \alpha_{1m}u_1 + \ldots + \alpha_{mm}u_m & \\ F(v_1) = & \beta_{11}v_1 + \ldots + \beta_{n1}v_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(v_n) = & \beta_{1n}v_1 + \ldots + \beta_{nn}v_n \end{array}$$

Fazendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

teremos

$$(F)_B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{m,n} \\ \hline 0_{n,m} & B \end{array}\right)$$

16. Determinar todos os operadores lineares S do $\mathbb{R}^2$ tais que $S(x, y) = (ax + by, cx)$ e $S^2 = I$ (operador idêntico).

Solução

$$S^2(x, y) = S(ax + by, cx) = (a(ax + by) + bcx, c(ax + by)) =$$

$$((a^2 + bc)x + aby, acx + bcy) = (x, y) \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab \quad\quad = 0 \\ ac \quad\quad = 0 \\ bc \quad\quad = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtido encontramos $a = 0$ e $bc = 1$, ou seja, $c = b^{-1}$. Então satisfazem as condições do problema todos os operadores do $\mathbb{R}^2$ dados por $S(x, y) = (by, b^{-1}x)$, $b \neq 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$. Determinar $(F)_{B,C}$ sendo $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ e $C = \{(1, 5), (2, -1)\}$.

2. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

   (I) $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x, y, z) = (x + y, z)$;

   (II) $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x, y) = (x + y, x, x - y)$;

   (III) $F \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $F(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$;

   (IV) $F \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x) = (x, 2x, 3x)$.

3. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ seja

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Determinar a matriz do operador linear $F \in L(M_2(\mathbb{R}))$ dado por $F(X) = MX - XM$, em relação à base canônica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Seja F o operador linear de $M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

   $\forall X$ em $M_2(\mathbb{R})$. Sendo B a base canônica do espaço $M_2(\mathbb{R})$ determine o traço da matriz $(F)_B$. (Nota: *traço* = soma dos termos da diagonal principal.)

5. Calcular o traço da matriz do operador linear $F \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $F(x, y, z) = (x, x - y, x + z)$. Generalizar para $F(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz)$.

6. Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é

$$(F)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar a matriz de F em relação à base canônica, usando a fórmula de mudança de base para um operador.

7. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Sendo $F, G \in L(V)$ dados por $F(e_1) = e_1 - e_2$, $F(e_2) = e_1 + e_3$, $F(e_3) = e_2$, $G(e_1) = 2e_1 + e_3$, $G(e_2) = e_1$ e $G(e_3) = e_2 - 3e_1$, determinar em relação à base B as matrizes dos seguintes operadores lineares:

$F, G, F + G, 2F - G, F \circ G, G \circ F, F^2 + G^2, F^{-1}$ (caso exista) e $(F \circ G)^{-1}$ (caso exista).

8. Determinar o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 2), (0, 5)\}$ é

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Sejam $F, G \in L(P_2(\mathbb{R}), P_3(\mathbb{R}))$ assim definidos: $F(p(t)) = tp(t) - p(1)$ e $G(p(t)) = (t - 1)p(t)$, $\forall p(t) \in P_2(\mathbb{R})$. Determinar as matrizes de F e de G em relação ao seguinte par de bases: $B = \{1, t - 1, (t - 1)^2\}$ e $C = \{1, t - 1, (t - 1)^2, (t - 1)^3\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $P_3(\mathbb{R})$ respectivamente.

10. Seja $F \in L(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ definida por $F(p(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)dt$. Determinar a matriz de F em relação às bases:

a) $B = \{1, t, t^2\}$ e $C = \{1\}$;

b) $B = \{1, 1 + t, -1 + t^2\}$ e $C = \{-2\}$.

11. Se a matriz de um operador linear F do $\mathbb{R}^3$ em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e se $H = I + F + 2F^2$, determine a matriz de H em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$. Ache também $H(x, y, z)$.

12. Determinar todos os operadores lineares F do $\mathbb{R}^2$ tais que $F^2 = F$ e $F(x, y) = (ax, bx + cy)$.

13. Determinar todos os operadores lineares F do $\mathbb{R}^2$ tais que $F^2 = 0$ (operador nulo) e que $F(x, y) = (ax + by, cy)$.

14. Sejam F e G operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ tais que: $F(x, y, z) = (x, 2y, y - z)$ e que a matriz de $2F - G$ em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar a matriz de G em relação à base canônica. Determinar também $G(x, y, z)$.

15. Seja T um operador linear de um espaço vetorial V de dimensão 2. Se a matriz de T em relação a uma certa base B de V é

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mostrar que $T^2 - (a + d)T + (ad - bc)I = 0$ (operador nulo).

16. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e $F \in L(V)$. Se U é um sub-espaço de V de dimensão m e se U é invariante pelo operador F, mostrar que existe uma base de V em relação à qual a matriz de F é da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

onde A é uma matriz $m \times m$, B é do tipo $m \times (n - m)$, O é a matriz nula $(n - m) \times m$ e C é quadrada de ordem $n - m$.

4. ESPAÇO DUAL

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Conforme já vimos o próprio $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Logo tem sentido falar em $L(U, \mathbb{R})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Este espaço vetorial é chamado *espaço vetorial dual de* U e costuma ser denotado por U^*. Assim, $L(U, \mathbb{R}) = U^*$. Cada elemento de U^* recebe o nome de *forma linear* ou *funcional linear* sobre V.

Exemplos

1) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 2y$ é um elemento do espaço $(\mathbb{R}^3)^*$ pois se trata de uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$. É portanto uma forma linear sobre $\mathbb{R}^3$.

2) Em geral como se apresenta um elemento F do espaço dual de $\mathbb{R}^n$? Seja F uma forma linear sobre o $\mathbb{R}^n$. Indiquemos por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica

de $\mathbb{R}^n$, isto é, $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)$. Dado então $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, u é combinação linear dessa base da seguinte maneira: $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Logo $F(u) = x_1F(e_1) + \ldots + x_nF(e_n)$. Se indicarmos por $k_1, \ldots, k_n$ os escalares $F(e_1), \ldots, F(e_n)$, respectivamente, teremos:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n.$$

Por outro lado, dada uma n-upla qualquer $(k_1, \ldots, k_n)$ de números reais é fácil verificar que a aplicação $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por: $F(x_1, \ldots, x_n) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$ é uma forma linear sobre o $\mathbb{R}^n$. Então podemos afirmar que $F \in (\mathbb{R}^n)^*$ se, e somente se, existem números reais $k_1, \ldots, k_n$ de forma que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n. Se $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então todo vetor desse espaço se apresenta como $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$, com os x_i em $\mathbb{R}$, e é fácil verificar que pertencem ao dual de U as aplicações $F_1, \ldots, F_n$ assim definidas:

$$F_i: U \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad F_i(u) = x_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Dado $F \in U^*$ suponhamos que $F(u_1) = k_1, \ldots, F(u_n) = k_n$.

Então $F(u) = x_1F(u_1) + \ldots + x_nF(u_n) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n = k_1F_1(u) + \ldots + k_nF_n(u) = (k_1F_1 + \ldots + k_nF_n)(u)$. Como u é genérico conclui-se que $F = k_1F_1 + \ldots + k_nF_n$. Com isso provamos que $[F_1, \ldots, F_n] = U^*$.

Por outro lado, se admitirmos que $\alpha_1F_1 + \ldots + \alpha_nF_n = 0$ (transformação nula), teremos:

$$\alpha_1F_1(u_1) + \ldots + \alpha_nF_n(u_1) = \alpha_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1F_1(u_n) + \ldots + \alpha_nF_n(u_n) = \alpha_n = 0$$

o que vem garantir que $\{F_1, \ldots, F_n\}$ é um conjunto L.I. em U^*.

Assim provamos o seguinte teorema:

Teorema 1 – Se $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base do espaço vetorial U, então as aplicações $F_1, \ldots, F_n$ que associam a cada $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n \in U$ os elementos $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente, pertencem a U^* e constituem uma base deste espaço. Logo, se $\dim U = n$, então $\dim U^* = n$.

Nota: A base $\{F_1, \ldots, F_n\}$ construída no teorema acima leva o nome de base dual da base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Exemplo – Determinar a base dual da base $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Sejam $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (1, 1)$. Conforme o exemplo 2 dado neste parágrafo:

$$F_1(x, y) = ax + by \text{ e}$$
$$F_2(x, y) = cx + dy$$

faltando-nos determinar a, b, c e d. Mas isto é questão apenas de fazer algumas substituições convenientes:

$$F_1(u_1) = a1 + b0 = 1$$
$$F_1(u_2) = a1 + b1 = 0$$
$$F_2(u_1) = c1 + d0 = 0$$
$$F_2(u_2) = c1 + d1 = 1$$

Logo $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ e $d = 1$. Assim a base dual de B é $\{F_1, F_2\}$, onde:

$$F_1(x, y) = x - y \text{ e } F_2(x, y) = y, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5. MATRIZES SEMELHANTES

Dadas as matrizes P e Q, ambas quadradas e de ordem n, dizemos que P é *semelhante* a Q se, e somente se, existe uma matriz inversível M, também de ordem n, de modo tal que:

$$P = M^{-1}QM.$$

É fácil ver que a semelhança assim definida é uma relação de equivalência em $M_n(\mathbb{R})$.

A semelhança de matrizes está intimamente ligada à mudança de base e representação matricial de operadores lineares.

De acordo com a proposição 2 demonstrada neste capítulo duas matrizes do mesmo operador linear são semelhantes. Mas também vale a recíproca desse fato: se $P = M^{-1}QM$, então P e Q representam um mesmo operador linear. Provemos esta afirmação.

Tomemos uma base B de $\mathbb{R}^n$ (estamos supondo as matrizes reais e de ordem n) e seja $F \in L(\mathbb{R}^n)$ o operador tal que $(F)_B = Q$. Suponhamos $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $M = (\alpha_{ij})$. Consideremos então os vetores do $\mathbb{R}^n$:

$$v_1 = \alpha_{11}u_1 + \ldots + \alpha_{n1}u_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = \alpha_{1n}u_1 + \ldots + \alpha_{nn}u_n.$$

Como a matriz M é inversível pode-se concluir que o conjunto $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^n$. Como obviamente M é a matriz de mudança da base B para a base C, então $M = (I)_{C,B}$. Teremos então

$$P = M^{-1}QM = (I)_{B,C}(F)_B(I)_{C,B} = (F)_C.$$

Logo P é a matriz de F em relação à base C.

A semelhança de matrizes aparece também no problema de diagonalização de uma matriz.

Definição 5 — Uma matriz quadrada se diz diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

A questão de saber se uma matriz quadrada é ou não diagonalizável é bastante importante mas somente será tratada no capítulo 2 da parte 2. A seguir daremos apenas um exemplo.

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável pois se considerarmos a matriz inversível

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e calculando teremos:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{que é uma matriz diagonal.}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sejam F_1 e F_2 os funcionais lineares de $(\mathbb{R}^2)^*$ definidos por $F_1(x, y) = 2x + y$ e $F_2(x, y) = x - 3y$. Determinar:

   a) $F_1 + 5F_2$ e

   b) $-3F_1 + 2F_2$.

Solução

a) $(F_1 + 5F_2)(x, y) = F_1(x, y) + 5F_2(x, y) = 2x + y + 5(x - 3y) = 7x - 14y.$

b) $(-3F_1 + 2F_2)(x, y) = -3F_1(x, y) + 2F_2(x, y) = -3(2x + y) + 2(x - 3y) =$
$= -4x - 9y.$

2. Determinar a base dual da seguinte base do $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$$

Solução

Seja $\{F_1, F_2, F_3\}$ a base dual procurada. Essas transformações são dadas por

$$F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$$
$$F_2(x, y, z) = b_1x + b_2y + b_3z$$
$$F_3(x, y, z) = c_1x + c_2y + c_3z$$

Fazendo $(1, 1, 0) = e_1, (0, 1, 0) = e_2$ e $(0, 0, 2) = e_3$ os coeficientes a_i, b_i e c_i $(i = 1, 2, 3)$ nas igualdades acima se determinam levando em conta que $F_j(e_i) = 1$ se $j = i$ e $F_j(e_i) = 0$ se $j \neq i$ $(j = 1, 2, 3)$. Assim:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(e_1) = a_1 + a_2 = 1 \\ F_1(e_2) = a_2 = 0 \\ F_1(e_3) = 2a_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow F_1(x, y, z) = x.$$

Analogamente

$$\left.\begin{array}{l} F_2(e_1) = b_1 + b_2 = 0 \\ F_2(e_2) = b_2 = 1 \\ F_2(e_3) = 2b_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 = -1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow F_2(x, y, z) = -x + y$$

Por último

$$\left.\begin{array}{l} F_3(e_1) = c_1 + c_2 = 0 \\ F_3(e_2) = c_2 = 0 \\ F_3(e_3) = 2c_3 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow F_3(x, y, z) = \frac{1}{2}z.$$

3. Verificar se os funcionais lineares F_1, F_2, F_3 do $(\mathbb{R}^3)^*$, abaixo definidos, formam uma base deste espaço:

$$F_1(x, y, z) = 3x - y, \ F_2(x, y, z) = x + 2y + z \text{ e } F_3(x, y, z) = 5y - 3z.$$

Solução

Basta verificar se eles formam um conjunto L.I. pois $\dim (\mathbb{R}^3)^* = 3$. Suponhamos que $\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \alpha_3F_3 = 0$ (funcional linear nulo). Então $(\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \alpha_3F_3)(x, y, z) = 0$ (número zero), $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Daí:

$$\alpha_1(3x - y) + \alpha_2(x + 2y + z) + \alpha_3(5y - 5z) =$$
$$= (3\alpha_1 + \alpha_2)x + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3)y + (\alpha_2 - 5\alpha_3)z = 0, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \text{que é equivalente a} \quad \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ que vem garantir que $\{F_1, F_2, F_3\}$ é L.I. e portanto é uma base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Consideremos o sub-espaço W^* de V^* gerado pelos funcionais F_1, F_2 e F_3 dados por $F_1(x, y, z, t) = 3x - t$, $F_2(x, y, z, t) = 5z - t$ e $F_3(x, y, z, t) = x + z$. Determinar o seguinte sub-espaço de V:

$$W = \{u \in V \mid F(u) = 0, \forall F \in W^*\}$$

(Mostre antes que, de fato, W é um sub-espaço de V).

Solução

Mostremos que W é sub-espaço de V. Como $F(o) = 0$, $\forall F \in W^*$, então $o \in W$; se u_1 e $u_2 \in W$, então $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = 0 + 0 = 0$, $\forall F \in W^*$, o que mostra que $u_1 + u_2 \in W$; se $u \in W$ e α é um escalar, então $F(\alpha u) = \alpha F(u) = \alpha \cdot 0 = 0$, para todo $F \in W^*$, o que significa que $\alpha u \in W$. Por outro lado, como

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 = 0 \iff$$

$$\iff \alpha_1(3x - t) + \alpha_2(5z - t) + \alpha_3(x + z) = 0, \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff (3\alpha_1 + \alpha_3)x + (5\alpha_2 + \alpha_3)z + (-\alpha_1 - \alpha_2)t = 0, \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, segue que: $\{F_1, F_2, F_3\}$ é L.I. e $\dim W^* = 3$.

É fácil notar que dado $u \in \mathbb{R}^4$

$$u \in W \iff F_1(u) = F_2(u) = F_3(u) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x - t = 0 \\ 5z - t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Como a única solução deste sistema é a trivial $x = z = t = 0$, então:

$$W = \{(0, y, 0, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Uma base de W é $\{(0, 1, 0, 0)\}$.

5. Sejam F e G dois funcionais lineares não nulos sobre um espaço vetorial V de dimensão n. Supondo $\mathrm{Ker}(F) \neq \mathrm{Ker}(G)$, determinar as dimensões dos seguintes sub-espaços de V: $\mathrm{Ker}(F)$, $\mathrm{Ker}(G)$, $\mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G)$ e $\mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Ker}(G)$.

Solução

O teorema do núcleo e da imagem nos diz que $\dim V = n = \dim \mathrm{Ker}(F) + \dim \mathrm{Im}(F) = \dim \mathrm{Ker}(G) + \dim \mathrm{Im}(G)$. Como $\mathrm{Im}(F) \subset \mathbb{R}$, $\dim \mathbb{R} = 1$ e $F \neq 0$, então $\dim \mathrm{Im}(F) = 1$. Analogamente $\dim \mathrm{Im}(G) = 1$. Logo $\dim \mathrm{Ker}(F) = \dim \mathrm{Ker}(G) = n - 1$. Por outro lado, o teorema da dimensão da soma nos garante que:

$$\dim(\mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G)) + \dim(\mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Ker}(G)) = \dim \mathrm{Ker}(F) + \dim \mathrm{Ker}(G) = 2n - 2.$$

Em geral, $\mathrm{Ker}(F) \subset \mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G)$ e devido à hipótese $\mathrm{Ker}(F) \neq \mathrm{Ker}(G)$, teremos $\mathrm{Ker}(F) \subsetneq \mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G)$; então necessariamente $\mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G) = V$. Logo $\dim(\mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Ker}(G)) = n$ e daí vem

$$\dim(\mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Ker}(G)) = (2n - 2) - n = n - 2.$$

6. Mostrar que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não são semelhantes.

Solução

Devemos mostrar que não existe uma matriz inversível

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou, o que é equivalente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = a \\ d = a \\ 0 = c \\ 0 = c \end{cases}$$

teremos necessariamente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que não é inversível para nenhum valor de b pois tem uma linha nula.

7. Seja F um operador linear de um espaço vetorial V de dimensão n. Se $F^{n-1} = 0$ (operador nulo) e $F^{n-2} \neq 0$, mostre que existe uma base B de V em relação à qual a matriz de F é da forma seguinte, com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solução

Como $F^{n-2} \neq 0$, então existe $u_0 \in V$ de maneira que $F^{n-2}(u_0) \neq o$. Então o exercício resolvido 12 (§ 1 – deste capítulo) nos garante que é L.I. o conjunto

$$\{u_0, F(u_0), F^2(u_0), \ldots, F^{n-2}(u_0)\}.$$

Logo este conjunto pode ser completado com um vetor v de modo a formar uma base

$$B = \{v, F^{n-2}(u_0), F^{n-3}(u_0), \ldots, F(u_0), u_0\}$$

do espaço V. Achemos a matriz de F em relação a esta base.

$$F(v) = a_1 v + a_2 F^{n-2}(u_0) + \ldots + a_{n-1} F(u_0) + a_n u_0$$
$$F(F^{n-2}(u_0)) = F^{n-1}(u_0) = 0v + 0F^{n-2}(u_0) + \ldots + 0F(u_0) + 0u_0$$
$$F(F^{n-3}(u_0)) = 0v + 1F^{n-2}(u_0) + \ldots + 0F(u_0) + 0u_0 \qquad \Longrightarrow$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(u_0) = 0v + 0F^{n-2}(u_0) + \ldots + 1F(u_0) + 0u_0$$

$$\Longrightarrow \quad (F)_B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam F_1 e $F_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ definidas por $F_1(x, y, z) = x - 3y + 2z$ e $F_2(x, y, z) = 2x - y + z$. Determinar $F_1 + F_2$, $2F_1 + 3F_2$ e os respectivos núcleos.

2. Seja $F \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $F(1, -1, 3) = 0$, $F(0, 1, -1) = 0$ e $F(0, 3, -2) = 1$. Determinar $F(2, -1, -3)$.

3. Determinar as bases duais de cada uma das seguintes bases:

a) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 0), (3, 4, 0)\}$ do $\mathbb{R}^3$;

b) $\{(1, 2), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$;

c) $\{(0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 3)\}$ do $\mathbb{R}^4$;

d) $\{1, t, 1 - t^2\}$ do espaço $P_2(\mathbb{R})$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Considere o sub-espaço W^* de V^* gerado pelos funcionais F e G dados por $F(x, y, z) = x - y$ e $G(x, y, z) = y - 2z$. Determinar uma base do seguinte sub-espaço de $V: W = \{u \in V \mid F(u) = 0, \forall F \in W^*\}$.

*5. Provar que todo sub-espaço vetorial W de V, com $\dim W = \dim V - 1$, é o núcleo de uma forma linear não nula.

*6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Sejam u e v dois vetores desse espaço com a seguinte propriedade: $(\forall F \in V^*)(F(u) = o \Longrightarrow F(v) = o)$. Mostrar que $\{u, v\}$ é L.D.

Sugestão: Se fossem L.I. existiria uma base B de V contendo u e v. Considerar a base dual.

7. Verificar se são bases de $(\mathbb{R}^3)^*$ os seguintes conjuntos:

a) $\{F, G, H\}$, onde $F(x, y, z) = 2x$, $G(x, y, z) = y + z$ e $H(x, y, z) = x - 2z$;

b) $\{F, G, H\}$, onde $F(x, y, z) = 2x + y - z$, $G(x, y, z) = x$ e $H(x, y, z) = x - y + 4z$.

*8. Sejam F e G formas lineares não nulas no espaço vetorial V, linearmente dependentes. Prove que $\operatorname{Ker}(F) = \operatorname{Ker}(G)$ e sua dimensão é $n - 1$ se $\dim V = n$.

9. Mostrar que a semelhança de matrizes é uma relação de equivalência no conjunto $M_n(\mathbb{R})$.

10. Verifique se são semelhantes as matrizes:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*11. Provar que se A e B são semelhantes então A^n e B^n são semelhantes, para todo $n \geqslant 1$. Sendo $p(t)$ um polinômio, $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, indicamos por $p(A)$ a matriz $p(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n$. Provar que se A e B são semelhantes, então $p(A)$ e $p(B)$ são semelhantes.

12. Para que valores de a, b e c (reais) as seguintes matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ são semelhantes?

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

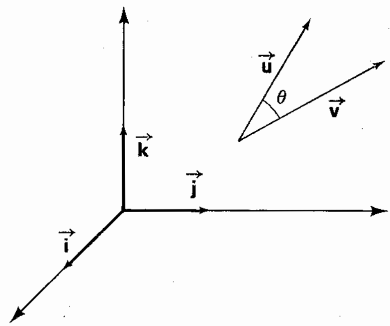
*13. Sejam A, B, C, D matrizes de ordem n, sendo A e B semelhantes, C e D semelhantes. É verdade que $A + C$ e $B + D$ são semelhantes?

E quanto a AC e BD?

CAPÍTULO 6

Espaços com Produto Interno

1. PRODUTOS INTERNOS



Lembremos, de início, que um dos conceitos fundamentais quando se estudam os vetores da geometria é o de "produto escalar", que nada mais é do que uma aplicação que a cada par de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ associa um número real dado por $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\theta$ onde θ é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se em relação à base fundamental $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ temos $\vec{u} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ e $\vec{v} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

O que faremos neste capítulo é generalizar a definição de "produto escalar" visando a introduzir, entre outras coisas, o conceito de "distância" em situações bem gerais.

Definição 1 – Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$.(*) Entende-se por *produto interno* sobre V uma aplicação que transforma cada par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em um número real (que indicaremos por $\langle u, v\rangle$) obedecendo às seguintes condições:

(a) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, $\forall u, v, w \in V$;

(b) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$;

(*) A definição a ser dada aqui seria um pouco diferente no caso de espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. No apêndice, ao fim do capítulo, daremos uma idéia de como seria esta questão no caso de o corpo de escalares ser o dos complexos.

(c) $<u, v> = <v, u>, \forall u, v \in V$; e

(d) $<u, u>$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq o$.

Definição 2 – Um espaço vetorial real com produto interno ou espaço euclidiano é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno.

Nota: Em geral existem muitos produtos internos diferentes sobre o mesmo espaço vetorial. Veja exercícios resolvidos n.º 5 e n.º 6.

Exemplos

1) Produto interno usual do $\mathbb{R}^n$

Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores genéricos do $\mathbb{R}^n$, então:

$$(u, v) \mapsto x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

é um produto interno no $\mathbb{R}^n$. Das quatro condições a serem verificadas mostremos apenas como se procede em (b) e (d).

(b) $<\alpha u, v> = (\alpha x_1)y_1 + \ldots + (\alpha x_n)y_n = \alpha(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) =$
$= \alpha<u, v>$.

(d) Se $u \neq (0, 0, \ldots, 0)$, então um dos x_i, ao menos, é não nulo. Logo

$$<u, u> = x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0.$$

2) É um produto interno sobre o espaço $P_n(\mathbb{R})$ a aplicação dada por:

$$(f(t), g(t)) \mapsto <f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são polinômios quaisquer de $P_n(\mathbb{R})$.

Façamos a verificação da condição (a). Dados $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ em $P_n(\mathbb{R})$:

$$<f(t) + g(t), h(t)> = \int_0^1 (f(t) + g(t))h(t)dt =$$

$$= \int_0^1 (f(t)h(t) + g(t)h(t))dt = \int_0^1 f(t)h(t)dt + \int_0^1 g(t)h(t)dt =$$

$$= <f(t), h(t)> + <g(t), h(t)>$$

As propriedades $P_1, \ldots, P_6$ que seguem são válidas em qualquer espaço vetorial euclidiano. Note que em sua demonstração não foi usada a propriedade (d) da definição 1.

P_1. $<o, u> = <u, o> = 0, \ \forall u \in V.$

Prova:

Já sabemos que $0u = o$, para todo $u \in V$. Logo:

$$<o, u> = <0u, u> \stackrel{(b)}{=} 0 <u, u> = 0.$$

Como $<u, o> = <o, u>$, então $<u, o> = 0$. ■

P_2. $<u, \alpha v> = \alpha <u, v>, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}.$

Prova:

$$<u, \alpha v> \stackrel{(c)}{=} <\alpha v, u> \stackrel{(b)}{=} \alpha <v, u> \stackrel{(c)}{=} \alpha <u, v> \ ■$$

P_3. $<u, v + w> = <u, v> + <u, w>, \ \forall u, v, w \in V$

Prova:

$<u, v + w> \stackrel{(c)}{=} <v + w, u> \stackrel{(a)}{=} <v, u> + <w, u> \stackrel{(c)}{=} <u, v> +$
$+ <u, w>$. ■

P_4. Dado um número inteiro $m \geqslant 1$,

$$< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, v> = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i <u_i, v>$$

É só raciocinar por indução com base nos axiomas (a) e (b) da definição de produto interno. ■

P_5. $<u, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j> = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j <u, v_j> \ (n \geqslant 1).$

Prova:

Basta usar as propriedades P_2 e P_3 acima e raciocinar por indução. ■

P_6. $< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j> = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j <u_i, v_j>.$

Observação importante: Quando nos referimos ao $\mathbb{R}^n$ como espaço euclidiano, fica subentendido que o produto interno é aquele do exemplo 1 acima.

2. NORMA E DISTÂNCIA

Definição 3 — Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \to \langle u, v\rangle$. Dado um vetor $u \in V$ indica-se por $\| u \|$ e chama-se *norma de u* o número real positivo dado por

$$\|u\| = \sqrt{<u, u>}.$$

(Aqui já usamos a condição (d) da definição 1).

Exemplo — Se no $\mathbb{R}^n$ consideramos o produto interno usual, dado $u = (x_1, \ldots, x_n)$ nesse espaço, temos:

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Proposição 1 — Em todo espaço euclidiano V, temos:

a) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall u \in V$ e

b) $\|u\| \geqslant 0, \ \forall u \in V \ \text{ e } \ \|u\| = 0 \iff u = o.$

Demonstração

a) $\|\alpha u\| = \sqrt{<\alpha u, \alpha u>} = \sqrt{\alpha^2 <u, u>} = \sqrt{\alpha^2 \|u\|^2} = |\alpha| \, \|u\|.$

b) Pela própria definição temos $\|u\| \geqslant 0$. Por outro lado

$\|u\| = 0 \iff <u, u>^{1/2} = 0 \iff <u, u> = 0 \iff$

$\iff u = o.$

(Notar que nesta última equivalência usamos o axioma (d) da definição de produto interno e a propriedade P_1.) ■

Proposição 2 — **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** — Se V é um espaço vetorial euclidiano, então:

$$|<u, v>| \leqslant \|u\| \, \|v\|, \ \forall u, v \in V.$$

Demonstração

Se $v = o$, então $<u, v> = 0$ e $\|u\| \, \|v\| = 0$. Logo tem-se uma igualdade neste caso. Suponhamos $v \neq o$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade $\|u + \alpha v\|^2 \geqslant 0$. Daí,

$$0 \leqslant \|u + \alpha v\|^2 = <u + \alpha v, u + \alpha v> = <u, u> + <u, \alpha v> + <\alpha v, u> +$$
$$+ <\alpha v, \alpha v> = \|u\|^2 + \alpha <u, v> + \alpha <v, u> +$$
$$+ \alpha^2 \|v\|^2 = \|v\|^2 \alpha^2 + 2<u, v>\alpha + \|u\|^2.$$

Obtivemos assim um trinômio do segundo grau em α (pois $\|v\|^2 \neq 0$) o qual é sempre positivo. Logo seu discriminante deve ser negativo ou nulo:

$$4 <u, v>^2 - 4 \|v\|^2 \|u\|^2 \leqslant 0$$

Portanto:

$$<u, v>^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Finalmente, considerando a raiz quadrada positiva de cada um dos membros desta última igualdade:

$$|<u, v>| \leqslant \|u\| \|v\|. \blacksquare$$

Corolário (Desigualdade triangular): Num espaço euclidiano vale a seguinte desigualdade:

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= <u + v, u + v> = <u, u> + <u, v> + <v, u> + <v, v> = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2<u, v> \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \|u\| \|v\| = \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Então $\|u + v\|^2 \leqslant (\|u\| + \|v\|)^2$, para todo par de vetores u e v. Desta desigualdade decorre que $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$. ■

Exemplo – Se considerarmos no $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual e se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$, então:

$$|<u, v>| \leqslant \|u\| \|v\| \Longleftrightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

Esta última desigualdade também é conhecida como desigualdade de Lagrange.

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Consideremos a aplicação $d: V \times V \to \mathbb{R}$, assim definida:

$$d(u, v) = \|u - v\|, \forall u, v \in V.$$

Notemos que valem as seguintes propriedades:

(I) $d(u, v) \geqslant 0, \forall u, v \in V$ e $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$, em virtude da proposição 1 acima.

(II) $d(u, v) = d(v, u)$, $\forall u, v \in V$, porque:

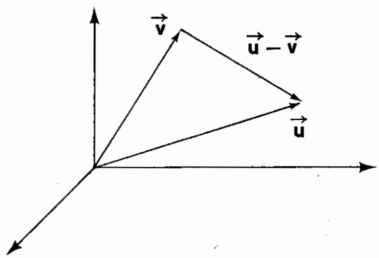
$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |-1|\,\|v - u\| = d(v, u).$$

(III) $d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v)$ $\forall u, v, w \in V$, pois

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leqslant \|u - w\| + \|w - v\|$$

Pelo fato de valerem as três propriedades acima, damos à aplicação $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ o nome de *métrica* sobre V, induzida pela norma. O número $d(u, v)$ é chamado distância de u a v.

Nota: Convém lembrar que em geometria, dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então $|\vec{u} - \vec{v}|$ mede a distância entre as extremidades de u e v, desde que esses vetores tenham suas origens representadas na origem dos eixos. Este fato obviamente sugeriu a definição de métrica num espaço euclidiano.



Como aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz vejamos como o conceito de ângulo entre vetores é definido em um espaço euclidiano.

Sejam u e v vetores não nulos de um espaço euclidiano V. Da desigualdade $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$ segue que:

$$-\|u\|\,\|v\| \leqslant \langle u, v\rangle \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

e disto conclui-se que:

$$-1 \leqslant \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1.$$

Logo existe um único $\theta \in \mathbb{R}$, tal que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ e

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

É comum dar a designação de ***ângulo entre u e v*** a esse número θ. E, de fato, nos casos em que $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$ e o produto interno é o usual, tal número corresponde à medida do ângulo entre os segmentos orientados que representam os vetores, no sentido geométrico elementar.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, calcular $<u, v>$ nos seguintes casos:

   a) $u = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e $v = (4, 1, -3)$;

   b) $u = (2, 1, 0)$ e $v = (4, 0, 2)$;

   c) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, -1, 5)$.

   Solução

   a) $<u, v> = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 2 + 2 - 3 = 1.$

   b) $<u, v> = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 8.$

   c) $<u, v> = 6.$

2. Usando o produto interno $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ em $P_2(\mathbb{R})$, determinar o produto escalar de:

   a) $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t^2$;

   b) $f(t) = t - \frac{1}{2}$ e $g(t) = \frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)$.

   Solução

   a) $<f(t), g(t)> = \int_0^1 t(1 - t^2)dt = \int_0^1 (t - t^3)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$

   $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

   b) $<f(t), g(t)> = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)\right] dt = \int_0^1 \left(-t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right)dt =$

   $= -\frac{1}{12}.$

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Ponhamos por definição $<u, v> = 0$, $\forall u, v \in V$. Verificar se $(u, v) \mapsto <u, v> = 0$ é um produto interno sobre V.

   Solução

   Temos de verificar as quatro propriedades da definição de produto interno.

   (a) $<u + v, w> = 0 = 0 + 0 = <u, w> + <v, w>$;

   (b) e (c): exercício.

   (d) Se $V = \{o\}$, então obviamente vale esta condição; se existe $u \neq o$ em V, então temos $<u, u> = 0$ com $u \neq o$, o que mostra que $<u, v> = 0$, $\forall u, v \in V$, não define um produto interno sobre V.

4. Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sendo $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$, determine um vetor w deste espaço tal que $<u, w> = -1$ e $<v, w> = 3$.

Solução

Supondo $w = (x, y)$ temos $<u, w> = x + 2y = -1$ e $<v, w> = -x + y = 3$. Daí $x = -\frac{7}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$ e então $w = \left(\frac{-7}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Provar que a aplicação

$$(u, v) \to u * v = 2 <u, v>$$

também é um produto interno sobre V. Generalize.

Solução

(a) $(u + v) * w = 2 <u + v, w> = 2(<u, v> + <v, w>) = 2<u, w> + 2<v, w> =$
$= u * w + v * w;$

(b) exercício;

(c) $u * v = 2<u, v> = 2<v, u> = v * u;$

(d) $u * u = 2 <u, u> \geqslant 0$, $\forall u \in V$ e se $u \neq o$, então $u * u > o$.

Generalização: podemos substituir o "2" por qualquer $a > o$.

6. Sendo $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$, definamos $<u, v> = = \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos e não nulos. Provar que $<u, v>$ define um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$.

Solução

(a) $<u + v, w> = \frac{(x_1 + y_1)z_1}{a^2} + \frac{(x_2 + y_2)z_2}{b^2} = \frac{x_1 z_1}{a^2} + \frac{x_2 z_2}{b^2} + \frac{y_1 z_1}{a^2} + \frac{y_2 z_2}{b^2} =$
$= <u, w> + <v, w>$ onde, é claro, $w = (z_1, z_2)$.

(b) $<\alpha u, v> = \frac{(\alpha x_1) y_1}{a^2} + \frac{(\alpha x_2) y_2}{b^2} = \alpha\left(\frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}\right) = \alpha <u, v>;$

(c) Imediato;

(d) $<u, u> = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \geqslant o$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$; $<u, u> = 0 \iff \frac{x_1}{a} =$

$$= \frac{x_2}{b} = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff u = (0, 0).$$

7. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\| v \| = 1$, $\| u \| = 1$ e $\| u - v \| = 2$. Determinar $<u, v>$.

Solução

$$4 = \|u - v\|^2 = <u - v, u - v> = \|u\|^2 - 2 <u, v> + \|v\|^2.$$

Logo $2 <u, v> = -4 + 1 + 1 = -2$. Então $<u, v> = -1$.

8. Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ calcular a norma de f(t) nos seguintes casos:

a) $f(t) = t$;

b) $f(t) = -t^2 + 1$.

Solução

a) $\|f(t)\| = <f(t), f(t)>^{1/2} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

b) $\|f(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (1 - t^2)^2 dt} = \sqrt{\frac{8}{15}}$.

9. Denomina-se *versor* todo vetor de norma igual a 1. Se $u \neq o$, então $\frac{u}{\|u\|}$ é um versor chamado de versor de u. Determinar o versor de $u = (2, 2, 1)$ considerando no $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual.

Solução

$\|u\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Logo $\frac{u}{\|u\|} = \frac{(2, 2, 1)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

10. Num espaço vetorial euclidiano provar que:

a) $\|u\| = \|v\| \iff <u + v, u - v> = 0$;

b) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff <u, v> = 0$.

Solução

a) $\|u\| = \|v\| \iff \|u\|^2 = \|v\|^2 \iff \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \iff$
$\|u\|^2 - \|v\|^2 + <u, v> - <u, v> = 0 \iff <u, u> - <u, v> + <v, u> -$
$- <v, v> = <u + v, u - v> = 0$.

b) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff <u + v, u + v> = <u, u> + <v, v> \iff$
$\iff <u, u> + <u, v> + <v, u> + <v, v> = <u, u> + <v, v> \iff$
$\iff 2 <u, v> = 0 \iff <u, v> = 0$.

11. Mostrar que num espaço euclidiano vale a identidade: $\frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2 = <u, v>$.

Solução

$\frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2 = \frac{1}{4}<u + v, u + v> - \frac{1}{4}<u - v, u - v> =$

$= \frac{1}{4}(<u, u> + <u, v> + <v, u> + <v, v>) - \frac{1}{4}(<u, u> - <u, v> - <v, u> +$

$+ <v, v>) = <u, v>$.

12. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$.

a) Mostrar que $<u, v> = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ define um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$;

b) Determinar a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto definido em a).

Solução

a) (1) $<u + v, w> = (x_1 + y_1)z_1 - 2(x_1 + y_1)z_2 - 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2 =$
$= x_1z_1 + y_1z_1 - 2x_1z_2 - 2y_1z_2 - 2x_2z_1 - 2y_2z_1 + 5x_2z_2 + 5y_2z_2 =$
$= (x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 5x_2z_2) + (y_1z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 5y_2z_2) =$
$= <u, w> + <v, w>$;

(2) $<\alpha u, v> = \alpha x_1y_1 - 2\alpha x_1y_2 - 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2 = \alpha(x_1y_1 - 2x_1y_2 -$
$- 2x_2y_1 + 5x_2y_2) = \alpha <u, v>$;

(3) Imediato;

(4) $<u, u> = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 =$
$= (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geqslant 0, \forall u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; além disso $<u, u> =$
$= 0 \Longleftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0$ e $x_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow u = (0, 0)$.

b) No produto usual:

$\|u\| = \sqrt{<u, u>} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$;

No produto definido em a):

$\|u\| = \sqrt{<u, u>} = \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2} = \sqrt{13}$.

13. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Determinar $a \in \mathbb{R}^3$ de maneira que $\|u\| = \sqrt{41}$, onde $u = (6, a, -1)$.

Solução

$<u, u> = 36 + a^2 + 1 = a^2 + 37 = 41$. Logo $a^2 = 4$. Daí $a = \pm 2$.

14. Achar o ângulo entre os seguintes pares de vetores do $\mathbb{R}^3$:

a) $u = (1, 1, 1)$ e $v = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$;

b) $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$.

Solução

a) $\|u\| = \sqrt{3}$, $\|v\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $<u, v> = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$. Daí

$$\cos\theta = \frac{<u, v>}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{0}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad e \quad \theta = \frac{\pi}{2};$$

b) $\|u\| = \sqrt{2}$, $\|v\| = 3$ e $<u, v> = 2 + 1 + 0 = 3$. Logo

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

15. Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano. Mostrar que $\{u, v\}$ é L.D. se, e somente se,

$$|<u, v>| = \|u\| \, \|v\|.$$

Solução

Se $\{u, v\}$ é L.D., então um dos seus vetores é combinação linear do outro. Seja $u = \alpha v$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$|<u, v>| = |<\alpha v, v>| = |\alpha| \, |<v, v>| = |\alpha| \, \|v\|^2 \text{ e } \|u\| \, \|v\| = \|\alpha v\| \, \|v\| =$$
$$= |\alpha| \, \|v\| \, \|v\| = |\alpha| \, \|v\|^2.$$

Logo $|<u, v>| = \|u\| \, \|v\|$. Por outro lado, suponhamos $|<u, v>| = \|u\| \, \|v\|$.

Se $v = o$, então $\{u, v\}$ é L.D. obviamente. Suponhamos $v \neq o$. Então

$$|<u, v>| = \|u\| \, \|v\| \Longrightarrow <u, v>^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \text{ logo } 4 <u, v>^2 - 4|u|^2 |v|^2 = 0.$$

Mas $4 <u, v>^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2$ é o discriminante do trinômio do segundo grau (em x)

$$\|v\|^2 x^2 - 2 <u, v> x + \|u\|^2 = <u - xv, u - xv>.$$

Considerando a raiz $\alpha = \dfrac{<u, v>}{\|v\|^2}$ (dupla) do trinômio temos $<u - \alpha v, u - \alpha v> = 0$ o que equivale a $u = \alpha v$. Portanto $u - \alpha v = o$ e $\{u, v\}$ é L.D.

16. Sejam u e v vetores fixos de um espaço vetorial euclidiano. Achar o vetor de menor norma do conjunto $\{u + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, supondo $v \neq o$.

Solução

Seja $w = u + tv$. Então

$$\|w\| = \sqrt{<u + tv, u + tv>} = \sqrt{\|u\|^2 + 2<u, v>t + \|v\|^2 t^2}$$

Daí

$$\frac{d\,\|w\|}{dt} = \frac{2 <u, v> + 2\,\|v\|^2 t}{2\sqrt{\|u\|^2 + 2 <u, v> t + \|v\|^2 t^2}}$$

O vetor de menor norma no conjunto dado é aquele cujo coeficiente t anula a derivada acima. Então:

$$t = -\frac{<u, v>}{\|v\|^2}$$

e a resposta do problema é $w_0 = u - \frac{<u, v>}{\|v\|^2} v$.

17. Sejam u= (1, 1, 0) e v = (0, 1, 2) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Determinar os vetores $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|w\| = 1$ e $<u, w> = <v, w> = 0$.

Solução

Seja w = (x, y, z). Então:

$\|w\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $<u, w> = x + y = 0$ e $<v, w> = y + 2z = 0$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

chegaremos a $z = \pm\frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{2}{3}$ e $y = \mp\frac{2}{3}$.

Logo $w = \left(\pm\frac{2}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}\right) = \pm\frac{1}{3}(2, -2, 1)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função $<u, v> = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$?

2. Mostrar que se $<u, v> = 0$, para todo vetor v, então $u = o$.

3. No espaço $V = P_3(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

   Calcular $<f(t), g(t)>$, $\|f(t)\|$, $\|g(t)\|$ e $\|f(t) + g(t)\|$ quando $f(t) = t^3 - t - 1$, e $g(t) = t^2 + 1$. Repita o exercício com $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$.

4. Sejam $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ e $g(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$ polinômios quaisquer de $P_n(\mathbb{R})$. A função

   $(f(t), g(t)) \mapsto a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}$

   é um produto interno no espaço $P_n(\mathbb{R})$?

5. Seja T um isomorfismo de um espaço vetorial V. Provar que se $<u, v>$ é um produto interno sobre V, então o mesmo acontece com a função $P_T: V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $P_T(u, v) = <T(u), T(v)>$.

6. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dada uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V definamos $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ por $a_{ij} = <e_i, e_j>$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

   a) Provar que A é uma matriz simétrica.

   b) Mostrar que se $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, então o produto escalar em V pode ser expresso na forma matricial seguinte: $<u, v> = (x_1 x_2 \ldots x_n) A (y_1 y_2 \ldots y_n)^t$.

7. Seja V um espaço euclidiano com produto interno $<u, v>$. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a aplicação:

$$(u, v) \to \alpha <u, v>$$

também é um produto interno sobre V? (Veja exercício resolvido nº 5.)

8. Chama-se traço de uma matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n, a soma dos termos da sua diagonal principal.

   Notação: tr(A). Assim, $tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$. Sendo $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, mostre que $<A, B> = tr(B^t A)$ define um produto interno sobre V.

9. No espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno definido no exercício 8. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule $<A, B>$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$.

10. No espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^4$ sejam $u = (1, 2, 0, 1)$ e $v = (3, 1, 4, 2)$. Determinar $<u, v>$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, $\dfrac{u + v}{\|u + v\|}$ e o co-seno do ângulo de u e v.

11. Sejam u e v dois vetores não nulos de um espaço vetorial euclidiano. Sendo θ o ângulo de u e v, mostrar que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \cos \theta$. (Esta igualdade é conhecida como lei dos co-senos na geometria elementar.)

12. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Determinar o co-seno do ângulo entre u e v, dado $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e $\|u + v\| = \sqrt{129}$.

13. Verifique a lei do paralelogramo num espaço euclidiano V: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, $\forall u, v \in V$.

*14. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$ e

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Definamos $<u, v> = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$.

a) Mostrar que o produto assim definido satisfaz as duas primeiras condições da definição de produto interno.

b) Mostrar que a condição (c) da definição de produto interno é válida se, e somente se, M é simétrica.

c) Qual a matriz M que leva ao produto interno usual do $\mathbb{R}^2$?

d) Quais das seguintes matrizes definem produtos internos sobre o $\mathbb{R}^2$ segundo a definição de $<u, v>$ que foi dada acima:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Sabendo que $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, com u e v elementos de um espaço euclidiano, determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de maneira que $<u + \alpha v, u - \alpha v> = 0$.

*16. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (produto interno usual) para mostrar que, dados os números reais estritamente positivos a_1, a_2, a_3, vale a desigualdade:

$$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 9.$$

*17. Sendo a, b e c números reais estritamente positivos tais que $a + b + c = 1$, utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^3$ para provar que

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geqslant 8.$$

18. Determinar a norma de cada um dos seguintes vetores:

a) $u = (3, 1, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$;

b) $f(t) = t^2 + t - 1$, em relação ao produto interno $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ em relação ao produto do exercício proposto nº 8 desta série.

19. Mostrar que a soma de dois produtos internos sobre um espaço V também é um produto interno sobre V (antes, pense bem no significado da palavra "soma").

20. Encontrar a distância de u a v e o co-seno do ângulo entre u e v nos seguintes casos:

a) $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (0, 0, 1, 1)$ com o produto interno usual do $\mathbb{R}^4$;

b) $u = 1 + t - t^2$ e $v = 3t^2$ com o produto considerado no exercício 18 b) acima;

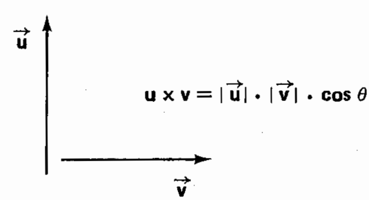
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com o produto interno do exercício proposto n.º 8.

*21. Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano. Prove que $\langle u, v\rangle = 0$, se, e somente se, $\|u + \alpha v\| \geqslant \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

*22. Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_r$ vetores unitários (norma igual a 1) de um espaço euclidiano tais que $\|e_i - e_j\| = 1$ (sempre que $i \neq j$). Calcule o co-seno do ângulo entre dois vetores e_i e e_j.

3. ORTOGONALIDADE

Lembremos primeiro que dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definidos por meio de segmentos orientados são ortogonais se, e somente se, seu produto escalar é zero.



Esse fato motiva a seguinte definição:

Definição 4 — Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que dois vetores $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$. Um conjunto $S = \{u_1, \ldots, u_r\} \subset V$ se diz *ortonormal* se, e somente se, (I) $\|u_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ e (II) dois vetores quaisquer de S, distintos entre si, são *ortogonais*.

Nota: As condições (I) e (II) da definição acima podem ser substituídas pela seguinte: $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ (símbolo de Kronecker), $i, j = 1, \ldots, n$, cujo significado é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo – No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é ortonormal. Por exemplo, a norma de $g_1 = (1, 0, 0)$ é $\|g_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ e o produto interno de g_1 por g_2 é $<g_1, g_2> = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$.

Em geral, para todo $n \geqslant 2$, o conjunto:

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

é ortonormal no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3 – Todo conjunto ortonormal $S = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ contido num espaço vetorial euclidiano é necessariamente L.I.

Demonstração

Suponhamos $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r = o$. Então:

$$0 = <o, g_1> = <\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r, g_1> =$$
$$= \alpha_1 <g_1, g_1> + \alpha_2 <g_2, g_1> + \dots + \alpha_r <g_r, g_1> = \alpha_1.$$

De maneira análoga se prova que $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0$. ■

Outra demonstração: Sendo $o = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r$ então $0 = \|\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r\|^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2$ é daí $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. ■

Proposição 4 – Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\}$ um subconjunto ortonormal do espaço euclidiano V. Então, $\forall u \in V$, o vetor $v = u - <u, g_1> g_1 - \dots - <u, g_r> g_r$ é ortogonal a todo vetor do sub-espaço gerado pelos vetores de S.

Demonstração

Observemos de início que se v for ortogonal aos vetores de S, então será ortogonal a toda combinação linear de S. De fato, seja $w = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r$ uma dessas combinações lineares. Então:

$$<v, w> = <v, \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r> = \alpha_1 <v, g_1> + \dots + \alpha_r <v, g_r> = 0.$$

Provemos pois que v é ortogonal a cada g_i o que é uma questão apenas de cálculos. Vejamos:

$$<v, g_1> = <u - <u, g_1> g_1 - \dots - <u, g_r> g_r, g_1> =$$
$$= <u, g_1> - <u, g_1><g_1, g_1> - \dots - <u, g_r><g_r, g_1> =$$
$$= <u, g_1> - <u, g_1> = 0$$

pois $<g_1, g_1> = 1$ e $<g_i, g_1> = 0$ para $i \neq 1$. De maneira análoga se prova que $<v, g_2> = \ldots = <v, g_r> = 0$. ∎

Definição 5 – Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se um conjunto $B = \{g_1, \ldots, g_n\}$ for uma base de V e simultaneamente for um conjunto ortonormal, então diremos que B é uma *base ortonormal* de V.

Exemplo – $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Generalize para o $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1 – **(Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt)** – Todo espaço vetorial euclidiano de dimensão finita ($\neq 0$) admite uma base ortonormal.

Demonstração

Se $\dim V = 1$ e se $\{u\}$ é uma base de V, então o vetor $g_1 = \dfrac{1}{\|u\|} u = \dfrac{u}{\|u\|}$ é L.I. e tem norma igual a 1. Logo $\{g_1\}$ é uma base ortonormal de V.

Se $\dim V = 2$, seja $\{u_1, u_2\}$ uma base de V. Façamos $g_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Então o vetor $v_2 = u_2 - <u_2, g_1> g_1$ é ortogonal a g_1 devido à proposição 4. Logo o vetor $g_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$ também é ortogonal a g_1 além de ser unitário. Daí podermos afirmar que $\{g_1, g_2\}$ é um subconjunto ortonormal de V com dois vetores. É pois uma base ortonormal de V.

O mesmo raciocínio nos permitirá construir uma base ortonormal em qualquer caso de dimensão finita n, utilizando-se o mesmo método usado na proposição 4. ∎

Exemplo – Aplicar o processo de Gram-Schmidt do teorema 1 acima à base $B = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 1, 2)\}$ do $\mathbb{R}^3$, considerando o produto interno usual nesse espaço.

É claro que $g_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = u_1 = (1, 0, 0)$. Por outro lado, $v_2 = u_2 - <u_2, g_1> g_1 = (0, 1, 1) - 0(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$. Logo

$$g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Finalmente,

$$v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1\rangle g_1 - \langle u_3, g_2\rangle g_2 = (0, 1, 2) - 0g_1 -$$
$$- \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Daí:

$$g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Logo:

$$\left\{(1, 0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, construída a partir da base B, seguindo-se a demonstração do teorema 1.

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dado um sub-espaço vetorial U de V, indiquemos por $U^\perp$ o seguinte subconjunto de V:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in U\}.$$

Notemos que $U^\perp$ é um sub-espaço vetorial de V, uma vez que:

(a) $\langle o, u\rangle = 0, \ \forall u \in U \Longrightarrow o \in U^\perp$;

(b) $\langle v_1, u\rangle = \langle v_2, u\rangle = 0, \ \forall u \in U \Longrightarrow \langle v_1 + v_2, u\rangle =$ $= \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = 0 + 0 = 0, \ \forall u \in U$; e

(c) $\langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in U \Longrightarrow \langle \alpha v, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle = \alpha 0 = 0,$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in U$.

Definição 6 – O sub-espaço $U^\perp$ acima definido recebe o nome de *complemento ortogonal* de U.

Exemplo – Seja $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Então $U^\perp = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Verifique.

Proposição 5 – Seja U um sub-espaço vetorial de um espaço euclidiano de dimensão finita V. Então $V = U \oplus U^\perp$, ou seja, $V = U + U^\perp$ e $U \cap U^\perp = \{o\}$.

Demonstração

(a) Seja $B = \{g_1, \ldots, g_r\}$ uma base ortonormal de U. Devido à proposição 4 deste capítulo, dado $u \in V$, o vetor $v = u - \langle u, g_1\rangle g_1 - \ldots - \langle u, g_r\rangle g_r$ é ortogonal a todo elemento de U, ou seja, $v \in U^\perp$. Logo:

$$u = \langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r + v$$

pertence a $U + U^\perp$ já que a soma das r primeiras parcelas do segundo membro está em U. Isso prova $V \subset U + U^\perp$. Logo $V = U + U^\perp$.

(b) Seja $w \in U \cap U^\perp$. Como $w \in U^\perp$, então w é ortogonal a todo vetor de U. Em particular $\langle w, w\rangle = 0$. Logo $w = o$ e então: $U \cap U^\perp = \{o\}$. ∎

Conforme acabamos de ver, se $B = \{g_1, \ldots, g_r\}$ é uma base ortonormal de um sub-espaço U de um espaço euclidiano V de dimensão finita, então todo vetor $u \in V$ se decompõe, de maneira única, em duas parcelas, uma de U e uma de $U^\perp$, ortogonais entre si:

$$u = (\langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r) + v.$$

A parcela $\langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r$ é chamada *projeção ortogonal* de u sobre o sub-espaço U.

Por outro lado a aplicação E de V em V dada por

$$E(u) = \langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r$$

recebe o nome de *projeção ortogonal* de V sobre U. Pode-se mostrar que E é um operador linear de V, o que propomos como exercício. Para este operador tem-se o seguinte:

$$E^2(u) = E(\langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r) =$$
$$= \langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r,$$

pois esta última soma pertence a U. Logo $E^2(u) = E(u)$, $\forall u \in V$, o que significa que $E^2 = E$.

Notemos também que $\operatorname{Ker}(E) = \{u \in V \mid \langle u, g_1\rangle g_1 + \ldots + \langle u, g_r\rangle g_r = o\} = U^\perp$. Também se pode provar que $\operatorname{Im}(E) = U$. Assim temos a seguinte decomposição de V: $V = \operatorname{Im}(E) \oplus \operatorname{Ker}(E)$.

4. ISOMETRIAS

Introduziremos neste parágrafo um certo tipo de operador linear cuja definição está ligada ao conceito de distância. Trata-se dos operadores lineares compatíveis com o produto interno.

Definição 7 – Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Um operador linear $T: V \to V$ com a propriedade de que:

$$\|T(u)\| = \|u\|, \ \forall u \in V,$$

se denomina *isometria* sobre V ou *operador ortogonal* sobre V.

Exemplo – Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. A rotação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta),$$

onde θ é um número real e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ é uma isometria pois além de ser uma transformação linear (exemplo 4, parágrafo 2, cap. IV) satisfaz a seguinte igualdade:

$$\|T(x,y)\|^2 = x^2\cos^2\theta + y^2\operatorname{sen}^2\theta - 2xy \operatorname{sen}\theta \cos\theta + x^2\operatorname{sen}^2\theta + y^2\cos^2\theta + \\ + 2xy \operatorname{sen}\theta\cos\theta = x^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + y^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = x^2 + y^2 = \\ = \|(x,y)\|^2.$$

Deixamos como exercício a verificação de que o operador T do $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta, z)$ é uma isometria.

Nota: Uma isometria é um operador linear de um espaço euclidiano que conserva as normas dos vetores. Como nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, quando o produto interno considerado é o usual, a norma de um vetor nada mais é do que o comprimento desse vetor (ou módulo), no sentido geométrico intuitivo, podemos dizer que nesses casos uma isometria é um operador linear que conserva os comprimentos dos vetores do espaço.

Proposição 6 – Toda isometria $T: V \to V$ é um isomorfismo.

Demonstração

Basta provar que T é injetora. Mas dado $u \in V$,

$$T(u) = o \Longrightarrow \|T(u)\| = 0 \Longrightarrow \|u\| = 0 \Longrightarrow u = o.$$

Logo $\operatorname{Ker}(T) = \{o\}$. ■

Proposição 7 – Seja T um operador linear sobre um espaço euclidiano V. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(I) T é isometria.

(II) T transforma as bases ortonormais de V em bases ortonormais de V.

(III) $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \ \forall u, v \in V$.

Demonstração

(I) $\Longrightarrow$ (II)

Seja $B = \{g_1, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V; provemos que $T(B)$ também é uma base ortonormal de V. Como T é injetora, $T(B)$ e B têm o mesmo número de vetores. Então é suficiente mostrar que $T(B)$ é um conjunto ortonormal. Consideremos as identidades:

$$\|g_i + g_j\|^2 = \|g_i\|^2 + \|g_j\|^2 + 2 \langle g_i, g_j \rangle \quad \text{e}$$

$$\|T(g_i) + T(g_j)\|^2 = \|T(g_i)\|^2 + \|T(g_j)\|^2 + 2 \langle T(g_i), T(g_j) \rangle.$$

Devido às hipóteses, os primeiros membros dessas igualdades são iguais entre si. Ainda por hipótese:

$$\|T(g_k)\| = \|g_k\| \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Logo

$$\langle T(g_i), T(g_j) \rangle = \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$$

o que assegura ser $T(B)$ um conjunto ortonormal.

(II) $\Longrightarrow$ (III)

Seja $B = \{g_1, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V. Então dados $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i$ em V, tem-se:

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(g_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j T(g_j) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle T(g_i), T(g_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Por outro lado, um raciocínio análogo ao feito acima nos levará a:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Logo $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \ \forall u, v \in V$.

(III) $\Longrightarrow$ (I)

Imediato: basta tomar $u = v$. ∎

O nome "operador ortogonal" dado como sinônimo de isometria decorre da proposição seguinte.

Proposição 8 – Seja T um operador linear de um espaço euclidiano de dimensão finita. Então T é uma isometria se, e somente se, a matriz de T em relação a uma base ortonormal é uma matriz ortogonal (sua inversa é igual à sua transposta).

Demonstração

($\Longrightarrow$) Seja $B = \{g_1, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V e indiquemos por M a matriz de T em relação a essa base:

$$M = (T)_B = (\alpha_{ij}).$$

Então:

$$T(g_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} g_i \quad \text{e} \quad T(g_k) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rk} g_r, \text{ com } j, k = 1, \ldots, n.$$

Daí

$$\langle T(g_j), T(g_k)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} g_i, \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rk} g_r \right\rangle = \sum_{i,r=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{rk} \langle g_i, g_r\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ik}$$

isto levando em conta que $\langle g_i, g_r\rangle = \delta_{ir}$. Mas T(B) também é uma base ortonormal o que acarreta $\langle T(g_j), T(g_k)\rangle = \delta_{jk}$. Então $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$.

o que é suficiente para concluirmos que $M^t \cdot M = I_n$.

($\Longleftarrow$) Fica como exercício. É praticamente o caminho inverso da demonstração da primeira parte. ■

Exemplo – Dizer que uma matriz real de ordem n é ortogonal significa que suas linhas formam uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$. Vice-versa, os vetores de uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$, em relação ao produto interno usual, constituem as linhas de uma matriz ortogonal de $M_n(\mathbb{R})$.

Assim, dada a base ortonormal:

$$B = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

do $\mathbb{R}^3$ (ver parágrafo 3) a matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

é ortogonal e o operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$T(0, 0, 1) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

é uma isometria do $\mathbb{R}^3$. Este operador é uma rotação de $-45°$ em torno do eixo x.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dados $u, v \in V$ ($v \neq o$) e $k = \frac{<u, v>}{\|v\|^2}$, mostrar que $u - kv$ é ortogonal a v.

Solução

$$<u - kv, v> = <u, v> + <-kv, v> = <u, v> - k<v, v> = <u, v> - \frac{<u, v>}{\|v\|^2}\|v\|^2 = 0.$$

2. Determinar $m \in \mathbb{R}$ a fim de que sejam ortogonais os vetores $u = (1, m + 1, m)$ e $v = (m - 1, m, m + 1)$ do $\mathbb{R}^3$.

Solução

$<u, v> = m - 1 + (m + 1)m + m(m + 1) = 2m^2 + 3m - 1$. Logo u e v são ortogonais se, e somente se, $2m^2 + 3m - 1 = 0$. Portanto u e v são ortogonais para $m = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

3. Mostrar que se u e v são vetores de um espaço euclidiano tais que $\|u + v\| = \|u - v\|$, então u e v são ortogonais.

Solução

$\|u + v\| = \|u - v\| \Longrightarrow \langle u + v, u + v\rangle = \langle u - v, u - v\rangle \Longrightarrow \|u\|^2 +$
$+ 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \Longrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$

4. Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ o produto interno (*não* habitual) dado por $\langle u, v\rangle =$ $= x_1y_1 + 2x_2y_2$, para todo par de vetores $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. Verificar se u e v são ortogonais, em relação a esse produto, nos seguintes casos:

a) $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$;

b) $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 1)$;

c) $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$.

Solução

a) $\langle u, v\rangle = 2 + 2(-1) = 0$. Logo u e v são ortogonais;

b) $\langle u, v\rangle = -2 + 2 = 0$. Portanto são vetores ortogonais;

c) $\langle u, v\rangle = 6 + 2(-2) = 2$. Neste caso u e v não são ortogonais.

5. Determinar m a fim de que sejam ortogonais os vetores $u = (m + 1, 2)$ e $v = (-1, 4)$ do $\mathbb{R}^2$.

Solução

$\langle u, v\rangle = (m + 1)(-1) + 2 \cdot 4 = -m + 7 = 0 \Longrightarrow m = 7.$

6. Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Nessas condições, para que valor de m, $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

Solução

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 (mt^2 - 1)t\,dt = \int_0^1 (mt^3 - t)\,dt = \frac{m}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow m = 2.$$

7. Mesmo enunciado do exercício anterior mudando o produto interno para o seguinte: $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$.

Solução

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^1 (mt^3 - t)\,dt = 0$$

Logo f(t) e g(t) são ortogonais para todo valor de m.

8. Determinar $f(t) \in P_2(\mathbb{R})$ que seja ortogonal a $g(t) = 1$ e $h(t) = t$, em relação ao produto interno dado por:

$$<f(t), g(t)> = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Solução

Suponhamos $f(t) = a + bt + ct^2$. Então:

$$<f(t), g(t)> = \int_{-1}^{1} (a + bt + ct^2)dt = \left(at + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2a + \frac{2c}{3} = 0 \quad (1)$$

$$<f(t), h(t)> = \int_{-1}^{1} (a + bt + ct^2)tdt = \left(a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{3} + c\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2b}{3} = 0 \quad (2)$$

De (1) e (2) tiramos que $c = -3a$ e $b = 0$. Logo $f(t) = a - 3at^2$ satisfaz o problema para todo valor de $a \in \mathbb{R}$.

9. Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido do seguinte modo:

$$\left\langle \sum_{i=0}^{2} a_i t^i, \sum_{i=0}^{2} b_i t^i \right\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i,$$

para todo par de polinômios

$$f(t) = \sum_{i=0}^{2} a_i t^i \quad e \quad g(t) = \sum_{i=0}^{2} b_i t^i$$

desse espaço. A base canônica $\{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é ortonormal em relação a esse produto?

Solução

Verifiquemos primeiro se os vetores dessa base têm norma igual a 1.

$$\|1\|^2 = <1, 1> = 1 \Longrightarrow \|1\| = 1$$

$$\|t\|^2 = <t, t> = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \Longrightarrow \|t\| = 1$$

$$\|t^2\|^2 = <t^2, t^2> = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \Longrightarrow \|t^2\| = 1.$$

Verifiquemos agora se os vetores da base dada são ortogonais dois a dois.

$<1, t> = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ (Logo 1 e t são ortogonais).

$<1, t^2> = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ (Portanto 1 e t^2 são ortogonais).

$<t, t^2> = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ (Então também estes dois vetores são ortogonais).

10. Mostrar que a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ não é ortonormal em relação ao produto interno dado por:

$$<f(t), g(t)> = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Solução

$\|t\|^2 = \langle t, t\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$. Como $\|t\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, então a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ não é ortonormal em relação ao produto considerado.

11. Seja $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de um espaço euclidiano. Dados $u = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} b_i g_i$ calcular $\langle u, v\rangle$.

Solução

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i g_i, \sum_{j=1}^{n} b_j g_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \langle g_i, g_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Isto significa que em todo espaço euclidiano pode-se encontrar uma base em relação à qual o produto interno fica "na forma habitual".

12. Ortonormalizar a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

Solução

(a) $g_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

(b) $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1\rangle g_1 = (1, -1, 1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

$= \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Daí

$$g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}{2\,\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

(c) $v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1\rangle g_1 - \langle u_3, g_2\rangle g_2 = (-1, 0, 1) - 0g_1 - 0g_2 = (-1, 0, 1)$.

Logo $g_3 = \dfrac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Portanto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é a base ortonormal procurada.

13. Achar uma base do sub-espaço $V^{\perp}$, onde V é o sub-espaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por (1, 0, 1, 1) e (1, 1, 2, 0). Ortonormalize esta base.

Solução

Um vetor $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ pertence a $V^{\perp}$ se e somente se

$$<v, (1, 0, 1, 1)> = x + z + t = 0 \text{ e}$$
$$<v, (1, 1, 2, 0)> = x + y + 2z = 0$$

O sistema obtido é equivalente a

$$\begin{cases} x \qquad + z + t = 0 \\ \qquad y + z - t = 0 \end{cases}$$

cujo conjunto solução é $\{(-z - t, -z + t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$. Mas

$$(-z - t, -z + t, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(-1, 1, 0, 1).$$

Como $B = \{(-1, -1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$ é L.I., então B é base de $V^{\perp}$. Vamos ortonormalizá-la.

Façamos $u_1 = (-1, -1, 1, 0)$ e $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$

(a) $g_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{(-1, -1, 1, 0)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$

(b) $v_2 = u_2 - <u_2, g_1>g_1 = (-1, 1, 0, 1) - 0g_1 = (-1, 1, 0, 1)$.

Logo

$$g_2 = \frac{(-1, 1, 0, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Portanto $\left\{\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) ; \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

é uma base ortonormal de $V^{\perp}$.

14. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W.

Solução

Como um vetor típico de W é da forma (2y, y, z) e (2y, y, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1), então W = [(2, 1, 0), (0, 0, 1)]. Mas esses geradores são linearmente independentes. Logo

$\{(0, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ é uma base de W. Apliquemos o processo de Gram-Schmidt a essa base.

Façamos $u_1 = (0, 0, 1)$ e $u_2 = (2, 1, 0)$ e seja $\{g_1, g_2\}$ a base procurada.

(a) $g_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{(0, 0, 1)}{1} = (0, 0, 1)$

(b) $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1\rangle g_1 = (2, 1, 0) - 0g_1 = (2, 1, 0)$.

Logo

$$g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(2, 1, 0)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

Assim, $\left\{(0, 0, 1), \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\}$ é uma base ortonormal de W.

15. Determinar a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ sobre o sub-espaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

Solução

A base ortonormal de V é formada por $g = \dfrac{(1, 3)}{\sqrt{10}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Logo a projeção é o vetor:

$$p = \langle u, g\rangle g = \frac{4}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

16. Seja $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno $\langle p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Ortonormalizar utilizando o processo de Gram-Schmidt a base canônica $\{1, x, x^2\}$.

Solução

Fazendo $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$ e $\{g_1, g_2, g_3\}$ a base ortonormal procurada, temos:

(a) $g_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{1} = 1$ (pois $\|1\|^2 = \int_0^1 dt = 1$

(b) $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1\rangle g_1 = x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x - 1}{2}$

$$\|v_2\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12} \Longrightarrow \|v_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{3}(2x - 1).$$

(c) $v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1\rangle g_1 - \langle u_3, g_2\rangle g_2 =$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2x - 1) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

$$\|v_3\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180} \Longrightarrow \|v_3\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

Portanto, $\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$ é a base ortonormal procurada.

17. Seja $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ um conjunto ortonormal de vetores de um espaço euclidiano V.

Mostrar que $\|u^2\| \geqslant \sum_{i=1}^{r} <u, g_i>^2, \forall u \in V$ (desigualdade de Bessel).

Mostrar também que se o conjunto dado é uma base ortonormal de V, então $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{r} <u, g_i>^2, \forall u \in V$ (igualdade de Parseval).

Solução

Seja $W = [g_1, \ldots, g_r]$. Se p indica a projeção ortogonal de u sobre W, então $u = p + h$, onde $h \in W^\perp$. Daí $\|u\|^2 = <p + h, p + h> = \|p\|^2 + 2<p, h> + \|h\|^2 = \|p\|^2 + \|h\|^2$.

Logo $\|u\|^2 \geqslant \|p\|^2$. Mas $p = \sum_{i=1}^{r} <u, g_i> g_i$. Então:

$$\|p\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{r} <u, g_i> g_i, \sum_{j=1}^{r} <u, g_j> g_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} <u, g_i> <u, g_j> \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} <u, g_i>^2.$$

Portanto $\|u\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{r} <u, g_i>^2.$

Por outro lado, se $\{g_1, \ldots, g_r\}$ é base de V, então:

$$u = p = \sum_{i=1}^{r} <u, g_i> g_i. \text{ Daí } \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{r} <u, g_i>^2.$$

18. Achar a projeção ortogonal de $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o sub-espaço $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$.

Solução

Notemos que os geradores de W são vetores linearmente independentes e são ortogonais entre si. Então para determinar uma base ortonormal de W basta dividir cada um dos seus vetores pela sua norma. Assim $\left\{g_1 = \frac{(1,1,0,0)}{\sqrt{2}},\ g_2 = \frac{(0,0,1,1)}{\sqrt{2}}\right\}$ é uma base ortonormal de W. Então a projeção p de u = (1, 1, 1, 1) sobre W é:

$$p = \langle u, g_1\rangle g_1 + \langle u, g_2\rangle g_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$= (1, 1, 1, 1)$. Assim $p = u$, isto é, $u \in W$. De fato $u = (1, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 1)$.

19. Determinar a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$ sobre o sub-espaço $U = [t]$, em relação ao produto interno dado por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

Solução

$\|t\| = \sqrt{\int_0^1 t^2\,dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Logo $\{\sqrt{3}t\}$ é uma base ortonormal de U. Portanto a projeção procurada é:

$$p = \langle 2t - 1, \sqrt{3}t\rangle \sqrt{3}t = \left(\int_0^1 \sqrt{3}t(2t-1)\,dt\right)\sqrt{3}t = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}t = \frac{1}{2}t.$$

20. Seja V um espaço vetorial euclidiano de dimensão finita. Se W é um sub-espaço vetorial de V, mostrar que $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

Solução

Mostremos primeiro que $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Se $u \in W$, então: $\langle u, v\rangle = 0, \quad v \in W^{\perp}$. Portanto $u \in (W^{\perp})^{\perp}$. Por outro lado lembrando que V é a soma direta de cada um dos seus sub-espaços com o respectivo complemento ortogonal (proposição 5) temos:

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V \text{ e}$$
$$\dim W^{\perp} + \dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V.$$

Então $\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp}$. Juntando as duas conclusões obtidas temos $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

21. Sejam U e V sub-espaços de um espaço euclidiano W de dimensão finita. Provar que $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

Solução

(a) Seja $w \in (U + V)^{\perp}$, então w é ortogonal a todo vetor $u + v \in U + V$. Como $U \subset U + V$ e $V \subset U + V$, então w é ortogonal a todo vetor $u \in U$ e a todo vetor $v \in V$, ou seja, $w \in U^{\perp}$ e $w \in V^{\perp}$. Logo $w \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

(b) Seja $w \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$. Então w é ortogonal a todo vetor de U e de V. Dado então $u + v \in U + V$, temos:

$$\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Portanto $w \in (U + V)^{\perp}$.

22. Provar que $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ é uma isometria.

Solução

Basta mostrar que T conserva as normas:

$$\|T(x, y)\|^2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy =$$

$$= x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

23. Mostrar que o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z, \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)$$

é uma isometria nesse espaço euclidiano

Solução

$$\|T(x, y, z)\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}}xy - \frac{2}{\sqrt{6}}xz - \frac{1}{\sqrt{3}}yz +$$

$$+ \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{6}y^2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}xy + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}}xy + \frac{2}{\sqrt{6}}xz + \frac{1}{\sqrt{3}}yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 = \|(x, y, z)\|^2.$$

24. Seja T uma isometria de um espaço euclidiano V. Mostrar que T conserva o cosseno do ângulo entre dois vetores não nulos de V.

Solução

Sejam u e v os vetores. Como T conserva as normas e conserva o produto interno, então:

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\| \, \|T(v)\|}$$

O primeiro membro é o cosseno do ângulo entre u e v, ao passo que o segundo membro é o cosseno do ângulo entre T(u) e T(v).

25. Para que valores de n, $m \in \mathbb{R}$ o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) =$

$$= \left(x, my + \frac{\sqrt{2}}{2}z, ny + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \text{ é uma isometria?}$$

Solução

$$\|T(x, y, z)\|^2 = x^2 + \left(my + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 + \left(ny + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 = x^2 + m^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 +$$

$$+ \sqrt{2}\,myz + n^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}\,nyz = x^2 + (m^2 + n^2)y^2 + z^2 + (\sqrt{2}\,m + \sqrt{2}\,n)yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m^2 + n^2 = 1 \\ m + n = 0 \end{cases} \Longrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } n = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo $T(x, y, z) = \left(x, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$.

26. Se T_1 e T_2 são isometrias num espaço euclidiano V, mostrar que $T_1 \circ T_2$ também o é. Se T é uma isometria em V, provar que T^{-1} também é uma isometria em V.

Solução

(I) Já sabemos que se T_1 e $T_2 \in L(V)$, então $T_1 \circ T_2$ também pertence. Por outro lado
$\|T_1 \circ T_2(u)\| = \|T_1(T_2(u))\| = \|T_2(u)\| = \|u\|, \forall u \in V,$
pois tanto T_1 como T_2 conservam as normas. Logo $T_1 \circ T_2$ é isometria.

(II) Já vimos que uma isometria é um isomorfismo. Logo existe T^{-1}. Além disso:
$\|T^{-1}(u)\|^2 = \langle T^{-1}(u), T^{-1}(u)\rangle = \langle T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(u))\rangle = \langle I(u), I(u)\rangle =$
$= \|u\|^2.$

Logo $\|T^{-1}(u)\| = \|u\|, \forall u \in V$. Portanto T^{-1} é também uma isometria em V.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere no $\mathbb{R}^2$ o produto interno dado por $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ para todo par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
   a) Determinar m a fim de que os vetores $(1 + m, 2)$ e $(3, m - 1)$ sejam ortogonais.
   b) Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ ortogonais a $(2, 1)$.
   c) Determinar todos os vetores $(m, m - 1)$ de norma igual a 1.

2. Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ de norma igual a 2 que sejam ortogonais simultaneamente a $(2, 1, 2)$ e $(-1, 3, 4)$.

3. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes sub-espaços do $\mathbb{R}^4$ utilizando o processo de Gram-Schmidt:

   a) $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$.
   b) $W = [(2, 0, 0, 0), (1, 3, 3, 0), (3, -3, -3, 0)]$.

4. Determinar uma base ortonormal do sub-espaço W de $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

5. Considere a seguinte transformação linear do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$: $F(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$. Determine uma base ortonormal de Ker(F).

6. Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um subconjunto de um espaço euclidiano V cujos vetores são ortogonais dois a dois. Prove que $\left\| \sum_{i=1}^{n} g_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|^2$ (teorema de Pitágoras generalizado).

7. Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno definido por: $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$

   a) Ortonormalizar a base $\{1, 1 + t, 2t^2\}$;

   b) Achar o complemento ortogonal do sub-espaço $W = [5, 1 + t]$.

8. Determinar uma base ortonormal de W e uma base ortonormal de $W^\perp$, onde W é o sub-espaço de $\mathbb{R}^4$ dado por $W = \{(x, y, z, t) : x + y = 0 \text{ e } 2x + z = y\}$.

9. Determinar um vetor unitário do $\mathbb{R}^3$ que seja ortogonal a todos os vetores do sub-espaço
$$W = [(1, 2, -1), (-1, 0, 2)]$$

10. Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o sub-espaço
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0 \text{ e } z - 2t = 0\}$$

11. Provar que os vetores 1, t e $t^2 - \frac{1}{3}$ de $P_2(\mathbb{R})$ são dois a dois ortogonais em relação ao produto interno dado por:
$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

12. Determinar uma base ortonormal do sub-espaço $W = [(1, 1, 1), (1, -2, 3)]$ do $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno dado por:
$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$
para todo par de vetores $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ do $\mathbb{R}^3$.

13. Determinar um polinômio de grau 3 em $P_3(\mathbb{R})$ que seja ortogonal a 1, t e t^2 com relação ao produto interno definido no início deste capítulo como exemplo 2.

14. Sejam u e v dois vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que existem dois, e apenas dois, vetores de norma igual a 1 que são ortogonais simultaneamente a u e v.

15. Sejam U e V sub-espaços vetoriais de um espaço euclidiano de dimensão finita. Provar que $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

16. Seja W um sub-espaço de um espaço euclidiano de dimensão finita V. Para todo $v \in V$, seja $v = w + w'$ com $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Mostrar que a aplicação $T: V \to V$ dada por: $T(v) = w - w'$ é linear e tem a seguinte propriedade $\langle u, T(v)\rangle = \langle T(v), u\rangle$, $\forall u, v \in V$.

17. Seja $\{g_1, g_2, g_3\}$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Para todo $u \in \mathbb{R}^3$ definem-se os co-senos diretores de u em relação à base dada por $\cos\alpha = \dfrac{\langle u, g_1\rangle}{\|u\|}$, $\cos\beta = \dfrac{\langle u, g_2\rangle}{\|u\|}$ e $\cos\gamma = \dfrac{\langle u, g_3\rangle}{\|u\|}$. Provar que:

a) $u = \|u\|((\cos\alpha)g_1 + (\cos\beta)g_2 + (\cos\gamma)g_3)$;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

18. Seja V um espaço euclidiano. Se $T: V \to V$ é uma transformação linear que conserva o produto interno, prove que T é uma isometria. (Veja a proposição 7.)

19. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $u = (2, 2, 2)$ e $v = (3, 3, 1)$.

a) Determinar dois vetores v_1 e v_2 tais que $v = v_1 + v_2$; v_1 é ortogonal a u e $v_2 = \lambda u$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

b) Se $w = (-5, 1, -1)$ decompor v em uma parcela de $W = [u, w]$ e uma parcela de $W^\perp$;

c) Determinar uma base ortonormal de W.

*20. Seja V um espaço euclidiano. Se $u \in V$, $W = [u]$ e E é a transformação linear que associa a cada vetor de V sua projeção ortogonal sobre W, mostre que:

$$\|v - E(v)\| \leq \|v - w\|, \ \forall v \in V \text{ e } \forall w \in W.$$

Interpretar geometricamente esse resultado.

21. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e seja E a projeção ortogonal de V sobre o sub-espaço W de V. Mostrar que o operador linear E tem a seguinte propriedade: $\langle E(u), v\rangle = \langle u, E(v)\rangle$, $\forall u, v \in V$.

22. Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que o seguinte operador linear do $\mathbb{R}^3$ seja uma isometria:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + mz, \frac{-1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right).$$

23. Determinar uma matriz ortogonal $(A^t = A^{-1})$ cuja primeira linha seja $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

*24. Mostrar que a matriz de mudança de base entre duas bases ortonormais de um espaço euclidiano de dimensão finita é uma matriz ortogonal.

25. Mostre que $(I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}$ é uma matriz ortogonal, onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

*26. No espaço vetorial $V = M_n(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno definido por $< A, B > = \text{tr}(AB^t)$. Dada uma matriz $M \in V$, seja $T_M: V \to V$ o operador linear definido por $T_M(X) = MX$, $\forall X \in V$. Mostre que T_M é uma isometria se, e somente se, M é uma matriz ortogonal.

27. Determine a isometria do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Obs.: x, y e z devem ser determinados numericamente.

*28. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Sendo U um subespaço vetorial de V, indiquemos por $E : V \to U$ a projeção ortogonal de V sobre U. Provar que E é sobrejetora, isto é, $\text{Im}(E) = U$.

5. OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

Definição 8 — Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um operador $A \in L(V)$ se diz *auto-adjunto* se

$$<A(u), v> = <u, A(v)>$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Se a dimensão de V é finita os operadores auto-adjuntos admitem uma caracterização matricial bastante simples, como veremos a seguir.

Proposição 9 — Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Então, um operador $A \in L(V)$ é auto-adjunto se, e somente se, a matriz de A em relação a uma base ortonormal de V é simétrica.

Demonstração

($\Longrightarrow$) Seja $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V. Por hipótese

$$<A(g_i), g_j> = <g_i, A(g_j)>$$

para quaisquer i, j ($1 \leqslant i, j \leqslant n$). Mas se a matriz de A em relação a B é $(A)_B = (a_{ij})$, então

$$A(g_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_k \text{ e } A(g_j) = \sum_{t=1}^{n} a_{tj} g_t$$

($i, j = 1, 2, \ldots, n$), e daí

$$< \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_k, g_j> = <g_i, \sum_{t=1}^{n} a_{tj} g_t>.$$

Donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_{kj} = \sum_{t=1}^{n} a_{tj} \delta_{it}$$

e portanto $a_{ji} = a_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) e $(A)_B$ é simétrica.

($\Longleftarrow$) Seja $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V e admitamos que $(A)_B = (a_{ij})$ é simétrica. Então, como

$$<A(g_i), g_j> = < \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_k, g_j> = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji} \text{ e, analogamente,}$$

$<g_i, A(g_j)> = a_{ij}$,

obtemos que

$$<A(g_i), g_j> = <g_i, A(g_j)>$$

para quaisquer $g_i, g_j \in B$. Considerando então vetores genéricos $u, v \in V$, $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ e $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j$, teremos

$$<A(u), v> = < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(g_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j> = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j <A(g_i), g_j> =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j <g_i, A(g_j)> = <u, A(v)>.$$

Nota: Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se A_1 e A_2 são operadores auto-adjuntos de V, então $A_1 + A_2$ também é auto-adjunto pois

$$<(A_1 + A_2)(u), v> = <A_1(u) + A_2(u), v> = <A_1(u), v> + <A_2(u), v> =$$

$$= <u, A_1(v)> + <u, A_2(v)> = <u, A_1(v) + A_2(v)> = <u, (A_1 + A_2)(v)>$$

É fácil ainda mostrar que se A é auto-adjunto e $\alpha \in \mathbb{R}$, αA é também auto-adjunto. Logo o conjunto dos operadores auto-adjuntos de V é um sub-espaço vetorial de L(V).

Fixemos então uma base ortonormal B do espaço V e consideremos a aplicação

$$A \to (A)_B$$

que a cada operador auto-adjunto $A \in L(V)$ associa sua matriz relativamente à base B. É claro que se trata de uma transformação linear e injetora. Levando em conta a proposição 9 podemos afirmar mais: é um isomorfismo do espaço dos operadores auto-adjuntos no espaço das matrizes simétricas de ordem n(n = dim V) sobre $\mathbb{R}$.

Logo os operadores auto-adjuntos sobre espaços euclidianos podem sempre ser identificados com matrizes simétricas reais.

Exemplo – O exemplo que apresentaremos mostra que a hipótese de que a base B na proposição 9 seja ortonormal é imprescindível. No espaço $\mathbb{R}^3$ consideremos o produto interno usual e seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$T(x, y, z) = (2x + 2z, x + z, x + z).$$

A matriz de T em relação à base $B = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 0, 1\}$ (não ortonormal) é

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

simétrica. Mas T não é auto-adjunto pois $<T(1, 0, 0); (0, 1, 0)> = <(2, 1, 1); (0, 1, 0)> = 1$ ao passo que

$$<(1, 0, 0); T(0, 1, 0)> = <(1, 0, 0); (0, 0, 0)> = 0.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja H um sub-espaço vetorial do espaço euclidiano V. Então cada $v \in V$ se expressa, de uma única maneira, como

$$v = h + t$$

onde $h \in H$ e $t \in H^{\perp}$. Considere a aplicação $A: V \to V$ definida por

$$A(v) = h - t, \text{ qualquer } v \in V.$$

a) Mostrar que A é linear e é auto-adjunto.

b) Se $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, e $H = [(1, 1, 0)]$, achar a matriz de A relativa à base usual do R^3.

2. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Mostrar que duas quaisquer das propriedades a seguir de um operador $A \in L(V)$ implicam a restante:

a) A é auto-adjunto

b) A é uma isometria

c) $A^2 = I$

3. Seja $T \in L(V)$ um automorfismo. Se T é auto-adjunto, mostrar que T^{-1} também o é.

4. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V. Se H é um sub-espaço vetorial de V com a propriedade

$$u \in H \to A(u) \in H$$

mostrar que $H^{\perp}$ tem também essa propriedade.

5. Seja T um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V. Se $\langle T(u), u \rangle = 0$, para todo $u \in V$, mostrar que $T = 0$.

6. Sejam $T, S \in L(V)$ operadores auto-adjuntos. Mostrar que: $T \circ S$ é auto-adjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.

6. ESPAÇOS HERMITIANOS

Indicaremos brevemente como os conceitos apresentados nos §§ 1 – 5 se apresentam em um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre V é uma aplicação

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

de $V \times V$ em $\mathbb{C}$, para a qual se verificam as seguintes condições:

(a) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, $\forall u_1, u_2, v \in V$;

(b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall u, v \in V$;

(c) $<u, v> = \overline{<v, u>}, \forall u, v \in V$;

(d) Para todo $u \in V$, $u \neq o$, $<u, u>$ é um número real maior que zero.

Exemplo – Seja $V = \mathbb{C}^n$. Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ indicam vetores quaisquer de $\mathbb{C}^n$, então a aplicação dada por:

$$(u, v) \mapsto <u, v> = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n$$

define o chamado produto interno usual de $\mathbb{C}^n$. Verifiquemos as condições (c) e (d) da definição

(c) $$\overline{<v, u>} = \overline{y_1\overline{x}_1 + \ldots + y_n\overline{x}_n} = \overline{y_1\overline{x}_1} + \ldots + \overline{y_n\overline{x}_n} =$$

$$= \overline{y}_1\overline{\overline{x}}_1 + \ldots + \overline{\overline{x}}_n\overline{y}_n = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n = <u, v>.$$

(d) Se $u \neq o$, então um dos x_i pelo menos não é igual a zero. Logo:

$$<u, u> = x_1\overline{x}_1 + \ldots + x_n\overline{x}_n = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 > 0.$$

Queremos registrar que os conceitos fundamentais introduzidos nos espaços euclidianos (norma, distância, ortogonalidade, base ortonormal, complemento ortogonal e isometria) são definidos do mesmo modo num espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno. E resultados importantes obtidos, como a desigualdade de Cauchy-Schwarz, as propriedades da métrica induzida pela norma, o teorema de Gram-Schmidt e a proposição 7, também são válidos neste caso. Apenas as demonstrações teriam que ser ligeiramente mudadas.

Um espaço vetorial complexo com produto interno é também chamado de *Espaço Hermitiano.*

CAPÍTULO 7

Determinantes

1. PERMUTAÇÕES

Seja $n \geqslant 1$ um número natural. Consideremos o conjunto $N_n = \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1 — Toda aplicação bijetora σ: $N_n \to N_n$ chama-se *permutação* do conjunto N_n.

Se σ e φ são permutações de N_n, então $\sigma \circ \varphi$: $N_n \to N_n$ também é uma permutação. A aplicação idêntica de N_n (indicaremos por id) é obviamente uma permutação. Além disso, a inversa σ^{-1} de uma permutação σ de N_n também é uma permutação de N_n.

Notação: indicaremos abreviadamente uma permutação σ de N_n por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemplos

1) Se $n = 2$, existem duas $(= 2!)$ permutações do conjunto $N_2 = \{1, 2\}$ que são

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Existem $6(= 3!)$ permutações de $N_3 = \{1, 2, 3\}$. São elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Existem $24(= 4!)$ permutações de N_4. Escreva-as como exercício.

Definição 2 – Consideremos uma permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

de N_n. Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se *sinal da permutação* σ o número inteiro representado por $\operatorname{sgn}(\sigma)$, que é

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = 1, \text{ se r é par}$$
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -1, \text{ se r é ímpar.}$$

Exemplos

1) Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Os pares (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ são (1, 2) e (1, 3); logo $r = 2$ e $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.

2) Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

O único par (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ é (2, 3). Então $r = 1$ e $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

3) Tomemos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Neste caso os pares (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant 5$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ são (1, 2), (1, 3) e (4, 5); logo $r = 3$ e $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Definição 3 – Uma permutação σ é *par* (respectivamente, *ímpar*) se $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (respectivamente, $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$).

Definição 4 – Chama-se *transposição* uma permutação τ em que existe apenas um par (i, j) de maneira que $i < j$ e $\tau(i) > \tau(j)$ e que deixa os demais elementos fixos, isto é, $\tau(k) = k$, $k \neq i, j$. Esta transposição é indicada por (i j).

Exemplos

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (aqui $i = 1$ e $j = 2$);

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \text{(aqui } i = 2 \text{ e } j = 3);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(neste exemplo } i = 3 \text{ e } j = 6).$$

Nota: As transposições são permutações ímpares muito simples pois $n - 2$ elementos de $N_n = \{1, \ldots, n\}$ são inalterados por elas e, logicamente, os outros dois são invertidos ou transpostos.

As transposições são importantes devido ao seguinte teorema, cuja demonstração omitiremos.

Teorema 1 – Toda permutação σ do conjunto N_n pode fatorar-se na forma $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_s$ onde τ_i são transposições. Se $\sigma = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \ldots \circ \tau_t'$ é outra decomposição de σ em transposições, então s e t são ambos pares ou ambos ímpares. Além disso, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^s$.

Decorre desse teorema que $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \varphi) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\varphi)$, onde σ e φ são permutações quaisquer do conjunto N_n. Em particular para toda transposição τ, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$. A verificação destas fórmulas é uma tarefa para o leitor.

2. DETERMINANTES

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real de ordem n. Consideremos um produto da forma

$$a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

onde σ é uma permutação do conjunto N_n. Nesse produto aparece apenas um elemento de cada linha de A (pois os primeiros índices não se repetem) e apenas um elemento de cada coluna de A (pois os segundos índices também não se repetem, já que σ é bijetora). Vamos multiplicar esse produto pelo sinal de σ que é 1 ou -1:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Finalmente somemos todos os números assim obtidos, de maneira que σ percorra o conjunto de todas as permutações de N_n. Teremos portanto n! parcelas na somatória

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Definição 5 – Chama-se *determinante da matriz A* de ordem n o número real

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Exemplos

1) Se $A = (a_{11})$, então $\det(A) = a_{11}$.

2) Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

As permutações do conjunto $\{1, 2\}$ e seus sinais são

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (sinal 1) e } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (sinal } -1)$$

Logo $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3) Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

As permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$ e respectivos sinais são

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; (+1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \; (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; (+1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; (+1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; (-1)$$

Logo

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Notemos que como o número de parcelas de $\det(A)$ é $n!$, então o cálculo de determinantes através da definição se torna trabalhoso em demasia para $n \geqslant 3$. Mas em certos casos, como no exemplo seguinte, o problema é relativamente simples.

4) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n em que $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$. Mostremos que neste caso $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. De fato, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Examinemos cada parcela que figura na expressão de $\det(A)$. Para $\sigma = id$, temos $\mathrm{sgn}(id) = 1$ e portanto aparece a parcela $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. Se $\sigma \neq id$, existe $i \in N_n$ tal que $\sigma(i) \neq i$; logo na parcela definida por σ aparece o elemento $a_{i\sigma(i)}$ que não pertence à diagonal principal de A, o que significa que $a_{i\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$. Assim, as parcelas correspondentes aos $\sigma \neq id$ são nulas e o determinante se reduz a

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcular $\mathrm{sgn}(\sigma)$ nos seguintes casos:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Calcular det(A) nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calcular det(A) ($\lambda \in \mathbb{R}$):

(a) $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

4. Determinar os valores reais ou complexos de λ de modo que $\det(A) = 0$ no exercício 3.

5. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcular $\det(A - \lambda I_3)$ e, a seguir, no polinômio $p(\lambda)$ obtido, substitua λ por A, obtendo assim a matriz p(A).

6. Amplie as idéias usadas no exemplo 4 deste parágrafo para provar o seguinte: se $A = (a_{ij})$ é uma matriz em que $a_{ij} = 0$, todas as vezes que $i < j$, então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

7. Escrever todos os produtos $\sigma \circ \varphi$ onde σ e φ são permutações de

a) N_2 b) N_3

3. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. A linha j-ésima da matriz A é $A^{(j)} = (a_{j1}\ a_{j2}\ \ldots\ a_{jn})$ que indicaremos apenas por A^j, para facilitar a notação. Então a matriz A pode ser representada pela seqüência de vetores-linha

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}.$$

Isso nos permite pensar no determinante como uma função de n variáveis A^1, $A^2, \ldots, A^n$ que são vetores do $\mathbb{R}^n$:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}.$$

Nota: Podemos também pensar no determinante como uma função das n colunas $A_1, \ldots, A_n$ de A. Conforme veremos na proposição P_5, tanto faz pensar em termos de linhas como de colunas. Em razão da definição que demos de determinante, vamos trabalhar sempre com as linhas, até que se estabeleça a propriedade P_5. Daí para a frente, cada propriedade enunciada em termos de linhas tem uma correspondente para colunas e vice-versa.

P_1. A função determinante é linear em cada uma das variáveis $A^1, A^2, \ldots, A^n$, isto é:

(a) $\det(A^1, A^2, \ldots, A^i + A'^i, \ldots, A^n) =$
$= \det(A^1, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^n) + \det(A^1, A^2, \ldots, A'^i, \ldots, A^n)$;

(b) $\det(A^1, A^2, \ldots, \lambda A^i, \ldots, A^n) = \lambda \det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^n)$

para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova – Esta propriedade decorre de que em cada uma das parcelas de $\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ aparece um e apenas um elemento de cada linha. ■

Exemplos

1) $$\det\begin{pmatrix} x+1 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

devido ao fato de que determinante é uma função linear na primeira variável A^1, que neste caso é $A^1 = (x + 1, y - 1, z - 3) = (x, y, z) + (1, -1, -3)$.

2) $$\det\begin{pmatrix} 3\lambda & 2\lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$, devido

ao fato de determinante ser linear na primeira linha que é $A^1 = (3\lambda, 2\lambda, \lambda) = \lambda(3, 2, 1)$.

3) $$\det\begin{pmatrix} x+2y & 1+t \\ x+3y & 2-t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x & 1 \\ 3y & -t \end{pmatrix} +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} 2y & t \\ x & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2y & t \\ 3y & -t \end{pmatrix} = x - 2tx + y - 5yt.$$

Explique como chegamos a este resultado.

P_2. Se $A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ é uma matriz de ordem n e se $A^j = A^k$, com $j < k$ então $\det(A) = 0$.

Prova – Será feita no apêndice ao fim deste capítulo. ■

P_3. Dada uma matriz A de ordem n suponhamos que B é a matriz obtida da seguinte maneira:

$$B = (A^1, \dots, A^j, \dots, A^i, \dots, A^n), \text{ sendo que}$$
$$A = (A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n).$$

Então $\det(B) = -\det(A)$.

Prova – De fato, $\det(A^1, \ldots, A^i + A^j, \ldots, A^i + A^j, \ldots, A^n) = 0$, pois, há duas linhas iguais (i e j). Então, pela linearidade em cada variável,

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A^1, \ldots, A^i + A^j, \ldots, A^i + A^j, \ldots, A^n) = \\
&= \det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^i, \ldots, A^n) + \\
&\quad + \det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n) + \\
&\quad + \det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n) + \\
&\quad + \det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^j, \ldots, A^n).
\end{aligned}$$

Pela propriedade (P_2),

$$\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^i, \ldots, A^n) = \det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^j, \ldots, A^n) = 0.$$

Logo

$$\det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n) = -\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n). \blacksquare$$

Nota: A propriedade P_3 costuma ser assim enunciada: se trocamos entre si duas linhas de uma matriz A, o determinante muda de sinal. Decorre daí (não faremos a demonstração) que se σ é uma permutação das linhas de $A = (A^1, \ldots, A^n)$, então

$$\det(A^{\sigma(1)}, \ldots, A^{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A^1, \ldots, A^n).$$

Sugestão para o leitor fazer a demonstração: usar o teorema 1.

P_4. Seja $A = (A^1, \ldots, A^n)$. Então vale sempre a igualdade:

$$\det(A) = \det(A^1, \ldots, A^n) = \det(A^1, \ldots, A^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k A^k, \ldots, A^n), \ \forall\, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

A prova decorre de P_1 e P_2; fica como exercício.

P_5. $\operatorname{Det}(A) = \det(A^t)$, para toda matriz A de ordem n.

Prova – Fica como exercício.

Nota: A propriedade P_5 permite estender as propriedades das linhas de A às colunas de A. Por exemplo, se duas colunas de A são iguais então $\det A = 0$. Escreva as propriedades P_1, P_2, P_3 e P_4 em termos de colunas, como exercício.

Exemplo

O exemplo a seguir mostra como a propriedade P_4 para colunas pode ajudar no cálculo de um determinante. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Somando à segunda a primeira coluna, multiplicada por -5, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -11 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

que tem o mesmo determinante que A (mas não é A). Em seguida substituímos a terceira coluna pela diferença entre a terceira e o dobro da primeira coluna desta última matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -11 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Substituindo nesta última matriz sua quarta coluna pela diferença entre ela própria e a primeira coluna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Em seguida multiplicamos a segunda coluna por $\frac{-4}{11}$ e somamos com a terceira coluna e depois multiplicamos a segunda coluna por $\frac{-3}{11}$ e somamos à quarta coluna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \dfrac{1}{11} & \dfrac{20}{11} \\ 0 & 3 & -\dfrac{1}{11} & \dfrac{24}{11} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos a terceira coluna por -20 e somamos com a quarta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \dfrac{1}{11} & 0 \\ 0 & 3 & \dfrac{-1}{11} & 4 \end{pmatrix}$$

e pelo exercício 6 acima $\det A = -4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Provar que se $A = (A_1, \ldots, A_n)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, então $\det(\lambda_1 A_1, \ldots, \lambda_n A_n) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \det(A)$.

2. Sem cálculo, provar que a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -4 & z \end{pmatrix}$$

tem determinante igual a zero quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3. Seja A uma matriz de ordem 3. Provar diretamente que $\det(A) = \det(A^t)$.

4. Compare $\det(A_1, \ldots, A_n)$ e $\det(A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_3, \ldots, A_1 + A_n)$.

5. Seja A uma matriz de ordem n tal que $A + A^t = 0$. Provar que $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. Que acontece se n é ímpar?

6. Seja $A = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (b \; b \; \ldots \; b)$. Quanto é $\det(A)$?

7. Provar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{pmatrix}$$

usando as propriedades P_1 e P_5.

8. Seja $A = (A_1, A_2, A_3)$ uma matriz de ordem 3. Seja $B = (A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_1 - A_3, A_3 - A_1 - A_2)$. Provar que $\det(B) = -4 \det A$.

9. Provar que $\det(A) = 0$ sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{pmatrix}$$

4. COFATORES

Tomemos a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Seu determinante é dado pela soma das seis parcelas $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$. Existem duas permutações que levam 1 em 2: (à direita, está o seu sinal)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; (-1) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; (+1).$$

Na expressão do determinante de A agrupemos os termos que contêm a_{12}: $-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$. Analogamente existem duas permutações que levam 2 em 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ (+1) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ (-1)$$

a primeira par e a segunda ímpar. Agrupemos os termos correspondentes: $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$. Existem finalmente duas permutações que levam 3 em 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ (-1) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ (+1)$$

a primeira ímpar e a segunda par, cujos termos correspondentes são: $-a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}$.

Assim

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) + \\ &\quad + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}) = a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &\quad + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) = \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \end{aligned}$$

com a definição evidente de A_{12}, A_{22} e A_{32}.

Observemos que

$$A_{12} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \quad A_{32} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

A expressão $\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2}$ é o desenvolvimento de $\det(A)$ pela segunda coluna. O que foi feito com respeito à segunda coluna também vale para as duas outras, ou seja,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Nota: Tudo o que foi feito para as matrizes de ordem 3 vale para as matrizes de ordem n. Para verificar tal afirmação seja A uma matriz de ordem n e fixemos um índice j, $1 \leqslant j \leqslant n$. As $n!$ permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ estão repartidas em n classes disjuntas $S_1, \ldots, S_n$, onde S_i consiste das permutações σ tais que $\sigma(i) = j$. Além disso cada classe S_i consiste do mesmo número de permutações que é $(n-1)!$. Decorre daí que:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1j} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2j} a_{3\sigma(3)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \ldots + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1, \sigma(n-1)} a_{nj} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

onde

$$A_{ij} = \sum_{\sigma \in S_i} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i-1,\sigma(i-1)} a_{i+1,\sigma(i+1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Portanto

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}^{(*)} \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Definição 6 — O número real A_{ij} obtido segundo as considerações acima chama-se *cofator* do elemento a_{ij} da matriz A. Devemos notar que A_{ij} é o determinante da matriz de ordem $n - 1$ obtida de A pela supressão da linha i-ésima e da coluna j-ésima, multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

(*) Este é o desenvolvimento de det (A) pela coluna i-ésima. É possível provar que $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}A_{ri}$, para todo r tal que $1 \leqslant r \leqslant n$. É o desenvolvimento de det (A) pela r-ésima linha. Para isto basta lembrar que $\det(A) = \det(A^t)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcular os cofatores de cada um dos termos da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular o cofator do elemento x da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Desenvolva pela primeira coluna ($\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1}$) e depois calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Repetir o exercício 3 com a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Sejam A, B e C matrizes de ordem 2 e seja

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

de ordem 4. Provar que $\det(X) = \det(A)\det(B)$. Este resultado vale para $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

5. ADJUNTA CLÁSSICA E INVERSA

Definição 7 – Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n e seja A_{ij} o cofator de a_{ij}. Chama-se *adjunta clássica* (ou simplesmente *adjunta*) de A a matriz

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculemos o produto $(\text{Adj}\, A)A$. O elemento de posição (i, j) nesse produto é $\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}$ e este número é igual a $\delta_{ij}\det(A)$. De fato, para $i = j$ essa soma vale $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$ que é o desenvolvimento de $\det(A)$ pela coluna i-ésima. Para $i \neq j$ é o desenvolvimento pela coluna i-ésima do determinante da matriz $A' = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n)$, com as colunas i e j iguais, e portanto vale zero. Então $(\text{Adj}\, A)A = (\det(A))I_n$. Se considerarmos o desenvolvimento de $\det(A)$ por meio de uma de suas linhas chegaremos a que $A(\text{Adj}\, A) = (\det(A))I_n$.

Portanto vale sempre a igualdade:

$$A(\text{Adj}\, A) = (\text{Adj}\, A)A = \begin{pmatrix} \det(A) & & \\ & \det(A) & \\ & & \ddots \\ & & & \det(A) \end{pmatrix} =$$

$$= \det(A) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \det(A)I_n.$$

Relembremos: uma matriz A de ordem n é inversível se, e somente se, existe uma matriz B, também de ordem n, de maneira que $AB = BA = I_n$. Então das considerações que acabamos de fazer resulta a seguinte proposição:

Proposição 1 – Uma matriz quadrada A tal que $\det(A) \neq 0$ é inversível e sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A.$$

Exemplo – Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é $1 \times 7 - 1 \times 2 = 5$. Neste caso a adjunta de A é a matriz:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

O teorema a seguir será demonstrado em apêndice; sugerimos ao leitor que faça sua demonstração quando A e B têm ordem 2.

Teorema 2 – Sejam A e B matrizes de ordem n. Então $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Corolário – Seja A uma matriz de ordem n, inversível. Então:

$$\det(A) \neq 0 \quad \text{e} \quad \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Demonstração – Por hipótese existe uma matriz B de ordem n tal que $AB = BA = I_n$. Logo $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I_n) = 1$. Daí $\det(B) \neq 0$ e $\det(B) = \dfrac{1}{\det(A)}$. ■

6. REGRA DE CRAMER

Consideremos um sistema de Cramer sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$AX = B$$

onde $A = (a_{ij})$ é inversível, $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^t$ e $B = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_n)^t$. Já vimos no capítulo 1 que tais sistemas são compatíveis determinados com solução dada por $X = A^{-1}B$. Levando em conta a proposição 1 do parágrafo precedente, temos:

$$X = \frac{1}{\det(A)}\,(\text{adj } A)B.$$

Este último resultado nos permite calcular explicitamente $x_1, \ldots, x_n$. Vejamos como.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{j1}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{jn}b_j \end{pmatrix}$$

O termo $\sum_{j=1}^{n} A_{j1}b_j$ é o determinante da matriz

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

desenvolvido pela sua primeira coluna. De um modo geral o termo $\sum_{j=1}^{n} A_{jk} b_j$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ é o desenvolvimento, pela coluna k-ésima, do determinante da matriz

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

obtida de A pela substituição de sua k-ésima coluna por B. Temos então finalmente

$$x_k = \frac{\det(\Delta_k)}{\det(A)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Esta fórmula dá a solução de $AX = B$ quando A é inversível e é conhecida como *regra de Cramer.*

Exemplo – Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 5 \\ 4x + y + 2z = 1 \\ 8x - y + \ z = 5 \end{cases}$$

Neste caso

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } \det(A) = 18.$$

Além disso

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

com $\det(\Delta_1) = 18$, $\det(\Delta_2) = 18$ e $\det(\Delta_3) = -36$.

Logo

$$x = \frac{18}{18} = 1, \quad y = \frac{18}{18} = 1 \quad \text{e} \quad z = -\frac{36}{18} = -2.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcular, se existir, a matriz inversa de A (usando sua adjunta) e use essa inversa para resolver AX = B nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**2. Seja a matriz de ordem n + 1 (Vandermonde)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{pmatrix}$$

a) Provar que $\det A = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$, onde o símbolo $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n}$ significa que devemos multiplicar todos os números $a_j - a_i$ com os índices i e j satisfazendo a condição $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Por exemplo, o determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \text{ vale } (a_2 - a_1)(a_2 - a_0)(a_1 - a_0).$$

b) Provar que se $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ então A é inversível.

*3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$$

uma matriz de ordem 4, com x, y, z, t $\in \mathbb{R}$. Calcular det A e provar que A é inversível, se ao menos um dos 4 números x, y, z e t não for nulo.

7. DETERMINANTE DE UM OPERADOR LINEAR

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se $F: V \to V$ é um operador linear e B e C são bases de V, sabemos que existe uma matriz inversível M tal que $(F)_C = M^{-1}(F)_B M$. Logo

$$\det((F)_C) = \det(M^{-1}(F)_B M) = \det(M^{-1})\det((F)_B)\det(M) =$$
$$= (\det(M))^{-1}\det(M)\det((F)_B) = \det((F)_B).$$

Assim, embora a matriz de F dependa da base escolhida em V, todas as matrizes que representam o mesmo operador F têm o mesmo determinante.

Definição 8 — Chama-se *determinante de um operador linear* $F: V \to V$ o determinante da matriz de F em relação a uma base qualquer de V. Usaremos a notação $\det(F)$ para indicá-lo.

As seguintes propriedades são imediatas:

(I) Se F e G são operadores lineares de V, então

$$\det(F \circ G) = \det(F)\det(G).$$

(II) $\det(I) = 1$, se I indica a identidade de V.

(III) $F: V \to V$ é um isomorfismo se, e somente se $\det(F) \neq 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $F(1, 0) = (2, 1)$ e $F(0, 1) = (3, 3)$. Calcular $\det(F)$.

2. Seja $H: V \to V$ a homotetia $H_\lambda(v) = \lambda v, \forall v \in V$. Calcular $\det(H)$.

3. Seja $F: V \to V$ um operador linear tal que $F^2 = F$. Quanto vale $\det(F)$?

4. Seja $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z, x + y + z)$. Calcular $\det(F)$ e $\det(F^2)$.

APÊNDICE IV

Determinante de um Produto de Matrizes

Neste apêndice provaremos os resultados sobre determinantes não demonstrados no texto.

(P_2) Seja $A = (A^1, \ldots, A^n)$ uma matriz de ordem n. Se existem i, j, com $1 \leqslant i < j \leqslant n$ e $A^i = A^j$, então $\det(A) = 0$.

Demonstração – Seja $\tau = (i\,j)$ a transposição determinada por i e j; isto é, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$, se $k \neq i$ e $k \neq j$. Dada uma permutação qualquer σ do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ a permutação $\sigma \circ \tau$ é tal que $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$. Vamos repartir o conjunto de todas as permutações de N_n da seguinte maneira:

$$\{\sigma_1, \sigma_1 \circ \tau\} \cup \{\sigma_2, \sigma_2 \circ \tau\} \cup \ldots \cup \{\sigma_p, \sigma_p \circ \tau\}$$

onde os conjuntos binários são dois a dois disjuntos e $p = \dfrac{n!}{2}$. Daí:

$$\begin{aligned}\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} &= \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_1(n)} + \\ &+ \operatorname{sgn}(\sigma_1 \tau) a_{1(\sigma_1 \tau)(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n(\sigma_1 \tau)(n)} + \cdot \ldots + \\ &+ \operatorname{sgn}(\sigma_p) a_{1\sigma_p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_p(n)} + \operatorname{sgn}(\sigma_p \tau) a_{1(\sigma_p \tau)(1)} \cdot \\ &\cdot \ldots \cdot a_{n(\sigma_p \tau)(n)} = \\ &= \sum_{r=1}^{p} \operatorname{sgn}(\sigma_r) \left[a_{1\sigma_r(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_r(n)} - a_{1(\sigma_r \tau)(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n(\sigma_r \tau)(n)}\right]\end{aligned}$$

Para cada $r = 1, 2, \ldots, p$, vale a igualdade

$$a_{1\sigma_r(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_r(n)} = a_{1(\sigma_r \tau)(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n(\sigma_r \tau)(n)}.$$

De fato, fazendo $\sigma_r = \sigma$ para simplificar a notação, temos:

$$a_{i\sigma(i)} = a_{i(\sigma \tau)(j)} = a_{j(\sigma \tau)(j)},$$

pois $A^i = A^j$, e $a_{j\sigma(j)} = a_{i(\sigma \tau)(i)}$, pelo mesmo motivo.

Além disso, temos também, $\forall k \neq i, j$, $a_{k\sigma(k)} = a_{k(\sigma \tau)(k)}$.

Logo, os fatores são os mesmos nos dois produtos cuja igualdade afirmamos valer. Segue daí que $\det(A) = 0$. ■

Teorema 2 – Sejam A e B matrizes de ordem n. Então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstração – Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = AB = (c_{ij})$. Logo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Então $\det(C) =$

$$= \det \begin{pmatrix} \sum a_{1k_1} b_{k_1 1} & \sum a_{1k_2} b_{k_2 2} & \dots & \sum a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{nk_1} b_{k_1 1} & \sum a_{nk_2} b_{k_2 2} & \dots & \sum a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} \det \begin{pmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_2} b_{k_2 2} & \dots & a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} b_{k_1 1} & a_{nk_2} b_{k_2 n} & \dots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{(k_1, \dots, k_n)} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} \det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \dots & a_{nk_n} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_n) \\ k_i \neq k_j}} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} \det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \dots & a_{1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} & \dots & a_{nk_n} \end{pmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$= \sum_{\sigma} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} \operatorname{sgn}(\sigma) \det(A) \overset{(5)}{=}$$

$$= \det(A) \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} \overset{(6)}{=}$$

$$= \det(A) \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1k_1} \cdot \ldots \cdot b_{nk_n} \overset{(7)}{=} \det(A) \cdot \det(B). \ \blacksquare$$

Explicações

1) Usamos o fato de que o determinante é uma função linear em cada coluna. Esse fato foi usado para todas as colunas.

2) Mais uma vez a linearidade, usada nas n colunas.

3) Eliminamos as parcelas em que $k_i = k_j$ com $i \neq j$ pois neste caso

$$\det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \dots & a_{1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} & \dots & a_{nk_n} \end{pmatrix} = 0$$

(duas colunas iguais).

4) Com a hipótese $k_i \neq k_j$ para $i \neq j$, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1k_1} & \dots & a_{1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} & \dots & a_{nk_n} \end{pmatrix}$$

tem as mesmas colunas que a matriz A, porém permutadas. Se

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

então a matriz acima tem determinante igual ao de A multiplicado por $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

5) Óbvio.

6) Uma permutação e sua inversa tem mesmo sinal.

Definição de determinante.

Nota final: Toda a teoria sobre determinantes de matrizes reais aqui construída poderia ser feita para as matrizes complexas de maneira inteiramente análoga.

CAPÍTULO 8

Formas Bilineares e Quadráticas Reais

Em algumas passagens deste capítulo o leitor encontrará uma certa semelhança entre o que se expõe aqui e o que foi exposto nos capítulos 6 (Espaços com Produtos Internos) e 7 (Determinantes). Mais precisamente, o estudo das formas bilineares simétricas é uma generalização do que se fez no capítulo 6 e o estudo das formas bilineares anti-simétricas está, de uma certa forma, ligado ao estudo dos determinantes. Em realidade o determinante pode ser visto como uma forma (multilinear) anti-simétrica.

1. FORMAS BILINEARES

Definição 1 — Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f: U \times V \to \mathbb{R}$ é uma *forma bilinear* se, e somente se,

a) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$;

b) $f(au, v) = af(u, v)$;

c) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ e

d) $f(u, av) = af(u, v)$,

para todos os vetores u, u_1 e u_2 de U, v, v_1 e v_2 de V e para todos os escalares $a \in \mathbb{R}$.

O conjunto de todas as formas bilineares de $U \times V$ em $\mathbb{R}$ será denotado por $B(U; V)$ e, quando $U = V$, apenas por $B(U)$.

O conjunto $B(U; V)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De fato, sendo f e g formas bilineares desse conjunto, define-se $f + g$ por $(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v)$ e $\lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$ por $(\lambda f)(u, v) = \lambda f(u, v)$, para todo $(u, v) \in U \times V$. É um trabalho rotineiro provar que $f + g$ e λf pertencem a $B(U; V)$.

Exemplos

1) Sejam $U = V = \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Trata-se do produto interno habitual no $\mathbb{R}^n$ para o qual já vimos que valem as propriedades exigidas na definição acima.

2) Seja A uma matriz real $m \times n$ fixada. A aplicação $f_A: M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \times \times M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_A(X, Y) = X^tAY$$

é bilinear devido à propriedade associativa da multiplicação de matrizes, devido à propriedade distributiva desta em relação à adição e ainda porque $(aP)Q = P(aQ) = a(PQ)$ e $(P + Q)^t = P^t + Q^t$ ($a \in \mathbb{R}$; P e Q matrizes).

3) Sejam $\varphi: U \to \mathbb{R}$ e $\sigma: V \to \mathbb{R}$ duas formas lineares (veja capítulo 5, § 4). A função $f: U \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(u, v) = \varphi(u)\sigma(v)$$

é bilinear. Verifiquemos o item (c) da definição dada:

$$f(u, v_1 + v_2) = \varphi(u)\sigma(v_1 + v_2) = \varphi(u)(\sigma(v_1) + \sigma(v_2)) =$$
$$= \varphi(u)\sigma(v_1) + \varphi(u)\sigma(v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2).$$

Esta forma bilinear é denotada por $\varphi \otimes \sigma$ e recebe o nome de *produto tensorial* das formas lineares φ e σ.

4) Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ vetores genéricos de $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$ respectivamente. A função $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(u, v) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_2y_3$$

é uma forma bilinear conforme se verifica facilmente.

5) Todo produto interno em um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é uma forma bilinear, o que decorre da própria definição de produto interno.

2. MATRIZ DE UMA FORMA BILINEAR

Suponhamos que U e V sejam espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões m e n respectivamente. Tomemos uma base $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de U e uma base $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Então, se $u = \sum_{i=1}^{m} a_iu_i \in U$ e $v = \sum_{j=1}^{n} b_jv_j \in V$, $f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{m} a_iu_i, \sum_{j=1}^{n} b_jv_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_jf(u_i, v_j)$. (Veja exercício 4 a seguir). A matriz $m \times n$

$$(f(u_i, v_j)) = \begin{pmatrix} f(u_1, v_1) & f(u_1, v_2) & \ldots & f(u_1, v_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(u_m, v_1) & f(u_m, v_2) & \ldots & f(u_m, v_n) \end{pmatrix}$$

é chamada *matriz da forma bilinear f em relação às bases* B *e* C.

Exemplo — Achemos a matriz da forma bilinear $f(u, v) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_2y_3$ (exemplo 4 do item anterior) em relação às bases canônicas. Como

$$f((1, 0), (1, 0, 0)) = 1, f((1, 0), (0, 1, 0)) = 3, f((1, 0), (0, 0, 1)) = -1,$$
$$f((0, 1), (1, 0, 0)) = 1, f((0, 1), (0, 1, 0)) = 0 \text{ e } f((0, 1), (0, 0, 1)) = -3,$$

a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Proposição 1 — Fixadas as bases B do espaço vetorial U e C do espaço vetorial V, a correspondência que associa a cada forma bilinear $f \in B(U; V)$ sua matriz em relação a essas bases, é um isomorfismo do espaço vetorial $B(U; V)$ no espaço vetorial $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Demonstração — É rotineira. Faça-a como exercício. Para inspirar-se, se for o caso, veja a proposição 1 do capítulo 5 e páginas seguintes. ■

Da proposição anterior decorre que se $\dim U = m$ e $\dim V = n$, então $\dim B(U; V) = \dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$. A mesma proposição nos ajudará a construir uma base de $B(U; V)$.

Se $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ são bases de U e V, respectivamente, lembremos que as funções $F_i: U \to \mathbb{R}$ dadas por $F_i(x_1u_1 + \ldots + x_mu_m) = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ constituem uma base do espaço dual de U (base dual de B), da mesma maneira que as funções $G_j: V \to \mathbb{R}$, definidas por $G_j(y_1v_1 + \ldots + y_nv_n) = y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ formam uma base do espaço dual de V.

Observando que

$$(F_i \otimes G_j)(u_i, v_j) = F_i(u_i)G_j(v_j) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{e que}$$
$$(F_i \otimes G_j)(u_r, v_s) = F_i(u_r)G_j(v_s) = 0,$$

sempre que $i \neq r$ ou $j \neq s$, concluímos que a matriz associada a $F_i \otimes G_j$, no isomorfismo considerado na proposição 1, é a matriz cujo termo de índices i e j é igual a 1 e cujos demais termos são nulos.

Logo as formas $F_i \otimes G_j$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ estão em correspondência, no isomorfismo considerado, com as matrizes da base canônica de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Portanto formam uma base de $B(U; V)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostrar que $f: U \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear se, e somente se,

   a) $f(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1f(u_1, v) + a_2f(u_2, v)$ e

   b) $f(u, a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(u, v_1) + a_2f(u, v_2)$

   para todos os vetores u, u_1, u_2 de U, todos os vetores v, v_1, v_2 de V e quaisquer escalares a_1 e a_2 em $\mathbb{R}$.

2. Provar que se $f: U \times V \to \mathbb{R}$ e $g: U \times V \to \mathbb{R}$ são bilineares, então $f + g$ e λf são bilineares ($\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Provar que $B(U; V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4. Seja $f: U \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Provar que

   a) $f(o, v) = f(u, o) = 0$;

   b) $f(-u, v) = f(u, -v) = -f(u, v)$;

   c) $f\left(\sum_{i=1}^{r} a_iu_i, v\right) = \sum_{i=1}^{r} a_if(u_i, v)$;

   d) $f\left(u, \sum_{j=1}^{n} b_jv_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j f(u, v_j)$;

   e) $f\left(\sum_i a_iu_i, \sum_i b_jv_j\right) = \sum_{i,j} a_ib_j f(u_i, v_j)$.

5. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$. Quais das seguintes funções são formas bilineares:

   a) $f(u, v) = x_1y_1$;

   b) $f(u, v) = x_1y_2$;

   c) $f(u, v) = x_1(y_1 + y_2)$;

   d) $f(u, v) = 0$;

   e) $f(u, v) = 1$;

   f) $f(u, v) = x_1^2 + x_2y_1$;

   g) $f(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 1$;

   h) $f(u, v) = x_1y_2 - x_2y_1$.

6. Calcular a matriz das formas bilineares que aparecem no exercício anterior em relação à base canônica.

7. Seja a forma bilinear do $\mathbb{R}^2$, $f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$. Calcular sua matriz em relação às seguintes bases do $\mathbb{R}^2$:

   a) $\{(1, 1), (1, -1)\}$;

   b) $\{(2, 1), (1, 2)\}$;

   c) $\{(2, 3), (4, 1)\}$.

8. Seja a forma bilinear $f(u, v) = ax_1y_1 + bx_2y_1 + cx_1y_2 + dx_2y_2$. Que condições devem satisfazer *a, b, c* e *d* para que:

a) $f(u, v) = f(v, u)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$;

b) $f(u, v) = -f(v, u)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$;

*c) Exista $u \neq 0$ tal que $f(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

*d) $f(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ acarrete $u = 0$.

9. Sejam $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as formas lineares dadas por $\varphi(x, y) = 2x + y$ e $\psi(x, y) = x - y$. Calcular as formas bilineares:

a) $\varphi \otimes \psi$;

b) $\psi \otimes \varphi$;

c) $\varphi \otimes \varphi$;

d) $\psi \otimes \psi$;

e) $\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$;

f) $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$.

10. Sejam $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi(x, y) = 2x + 3y$ e $\psi(x, y, z) = x + y - z$. Calcular as formas bilineares $\varphi \otimes \psi$ e $\psi \otimes \varphi$. Existe $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$?

11. Seja $f: U \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Seja u_0 um vetor fixo de U. Se $W = \{v \in V \mid f(u_0, v) = 0\}$, prove que W é sub-espaço vetorial de V.

*12. Sejam V um espaço, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\varphi: V \to \mathbb{R}$ uma forma linear. A matriz de φ é, por definição, a matriz $1 \times n$

$$(\varphi)_{\{v_i\}} = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)).$$

Como se obtém a matriz de $\varphi \otimes \sigma$ a partir das matrizes de φ e de σ?

Sugestão: voltar ao exercício 9.

3. MATRIZES CONGRUENTES — MUDANÇA DE BASE PARA UMA FORMA BILINEAR

A partir de agora estudaremos formas bilineares definidas em $V \times V$ com valores em $\mathbb{R}$. Neste caso consideraremos sempre a mesma base para definir a matriz de uma forma bilinear.

Definição 2 — Dizemos que duas matrizes A e B de ordem n são *congruentes* se existe uma matriz inversível P, do mesmo tipo, de maneira que $B = P^tAP$.

Usaremos a notação $A \approx B$ para indicar que A e B são congruentes. Essa relação binária em $M_n(\mathbb{R})$ tem as seguintes propriedades:

(I) $A \approx A$;

(II) $A \approx B \Longrightarrow B \approx A$;

(III) $A \approx B$ e $B \approx C \Longrightarrow A \approx C$.

A demonstração da primeira é trivial: tomar $P = I_n$. Quanto à segunda, se $B = P^t A P$, então $A = (P^t)^{-1} B P^{-1}$. Como porém vale a igualdade $(P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$, obtemos $A = (P^{-1})^t B (P^{-1})$. Deixamos como exercício a verificação de (III). Portanto a relação "congruência de matrizes" é uma relação de equivalência.

Exemplo – As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

são congruentes pois tomando a matriz inversível $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ teremos

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = B.$$

Uma vez introduzido o conceito de congruência de matrizes, podemos pensar em representar uma forma bilinear em relação a duas bases e comparar as matrizes.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V, $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Sua matriz em relação a essa base é a matriz $A = (a_{ij})$ definida por $f(u_i, u_j) = a_{ij}$. Consideremos agora uma outra base $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de V e suponhamos que $f(v_i, v_j) = b_{ij}$. Veremos a seguir que é possível estabelecer uma relação entre as matrizes A e B envolvendo a matriz de mudança P da primeira dessas bases para a segunda.

Consideremos os vetores u e v do espaço V referidos às duas bases consideradas:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i' u_i = \sum_{i=1}^{n} y_i' v_i.$$

No § 8 do capítulo 4 vimos que valem então as seguintes relações:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

ou apenas $X = PY$ e $X' = PY'$ com os significados óbvios de X, X', Y e Y'.

Portanto

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j' u_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i f(u_i, u_j) x_j' \quad \text{e}$$

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j' v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i f(v_i, v_j) y_j'.$$

As igualdades acima podem ser colocadas na forma matricial do seguinte modo:

$$f(u, v) = X^t A X' \quad \text{e} \quad f(u, v) = Y^t B Y'^{(*)}$$

o que decorre diretamente do conceito de produto de matrizes. Daí, levando em conta as igualdades $X = PY$ e $X' = PY'$,

$$Y^t B Y' = f(u, v) = X^t A X' = (PY)^t A (PY') = Y^t (P^t A P) Y'$$

isto quaisquer que sejam os vetores u e v tomados. Logo $B = P^t AP$.

Conclusão: quando se muda a base de V a matriz de f muda para uma outra que lhe é congruente. Por outro lado pode-se provar facilmente que toda matriz congruente à matriz A representa a forma bilinear f em relação a alguma base de V. De fato, se $B = P^t AP$, com P inversível, e se X e X′ são as matrizes das coordenadas de u e v, em relação a uma certa base, então $Y = P^{-1}X$ e $Y' = P^{-1}X'$ serão as matrizes das coordenadas de u e v, respectivamente, com respeito a uma outra base do espaço (ver capítulo 3 – § 8 – PROBLEMA 3). Daí

$$Y^t B Y' = Y^t (P^t A P) Y' = (PY)^t A (PY') = X^t A X' = f(u, v).$$

Segue disso que a matriz de f em relação a uma certa base será inversível se, e somente se, todas as possíveis representações matriciais de f forem inversíveis.

Definição 3 – Uma forma bilinear $f: V \times V \to \mathbb{R}$ se diz *não degenerada* quando admite uma representação matricial inversível. Caso contrário a forma se diz *degenerada*.

Exemplo – O produto interno no $\mathbb{R}^n$ cuja matriz em relação à base canônica é evidentemente I_n é um exemplo importante de forma bilinear não degenerada.

Observação: Nos parágrafos seguintes resolveremos problemas do seguinte tipo: dada uma forma bilinear procura-se uma base em relação à qual a matriz dessa forma seja "bem simples".

(*) Isto mostra que o exemplo 2 do primeiro parágrafo deste capítulo é bastante geral.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular P^tAP e comparar com B. Conclusão?

2. Seja a forma bilinear do $\mathbb{R}^2$ dada por $f(u, v) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 - x_2y_1$ para todo $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Calcular a matriz de f em relação às bases:
   a) $\{(0, 1), (1, 0)\}$; b) $\{(1, 0), (0, 1)\}$; c) $\{(1, 1), (1, -1)\}$.
   Verifique que elas são congruentes duas a duas.

3. Seja a forma bilinear do $\mathbb{R}^3$ dada por
$$f(u, v) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 8x_3y_3 + x_1y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - 2x_2y_3.$$
   Calcular sua matriz em relação às bases $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e provar diretamente que as matrizes são congruentes.

4. Sejam as formas lineares do $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ e $\psi(x, y, z) = 2x - y$. Calcular a matriz de $\varphi \otimes \psi$ em relação às bases do exercício 3.

*5. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz inversível P tal que P^tAP seja uma matriz diagonal.

6. Provar que se P^tAP é uma matriz simétrica então A é simétrica e reciprocamente. Que se pode dizer se A é anti-simétrica? Foi usado o fato de P ser inversível?

4. FORMAS BILINEARES SIMÉTRICAS E ANTI-SIMÉTRICAS

Definição 4 – Uma forma bilinear $f: V \times V \to \mathbb{R}$ é chamada *simétrica* se $f(u, v) = f(v, u)$, para todo $(u, v) \in V \times V$.

É claro que se f e g são simétricas então f + g também é pois
$$(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v) = f(v, u) + g(v, u) = (f + g)(v, u).$$
O mesmo acontece, é evidente, com λf ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$). Portanto o conjunto das formas bilineares simétricas de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ é um sub-espaço de $B(V)$ que se denota por $B_s(V)$.

Nota: É evidente que a matriz de uma forma bilinear simétrica é uma matriz simétrica. Seja, por outro lado, A uma matriz simétrica e seja f a forma representada por A, com relação a uma certa base. Assim:

$$f(u, v) = X^t A X'$$

mantendo as notações anteriormente usadas neste capítulo. Daí

$$f(v, u) = (X')^t AX = (X')^t A^t (X^t)^t = (X^t AX')^t = (f(u, v))^t = f(u, v)$$

pois f(u, v) é uma matriz 1 X 1 que, portanto, coincide com sua transposta.

Logo o espaço das formas bilineares simétricas é isomorfo ao espaço das matrizes reais simétricas cuja dimensão é $n(n + 1)/2$ (exercício resolvido 8 – § 6 – capítulo 3).

Desse isomorfismo segue, inclusive, que a dimensão de $B_s(V)$ é também $n(n + 1)/2$ desde que a dimensão de V seja n.

Por último, da relação $B = P^t AP$ segue que B é simétrica se, e somente se, A é simétrica. Logo se f é uma forma bilinear simétrica sua representação matricial será simétrica qualquer que seja a base considerada.

Teorema 1 – Seja $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.

Demonstração (por indução sobre a dimensão de V): São triviais os casos em que $f = 0$ e aquele em que $\dim V = 1$. Suponhamos pois $f \neq 0$ e $\dim V > 1$. Certamente existe um vetor v_1 tal que $f(v_1, v_1) \neq 0$. De fato, se $f(v, v) = 0$, $\forall v \in V$, então $f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v) = 2f(u, v) = 0$, $\forall u, v \in V$. Daí $f = 0$ o que é absurdo. Considerando o vetor v_1 tal que $f(v_1, v_1) \neq 0$, todo vetor $v \in V$ admite a seguinte decomposição

$$v = \left(v - \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1\right) + \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1 = x_1 + x_2$$

Observemos que x_2 é múltiplo de v_1 e que

$$f(x_1, v_1) = f\left(v - \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1, v_1\right) = f(v, v_1) - \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) = 0$$

(dizemos que x_1 é ortogonal a v_1 relativamente a f). Como um múltiplo não nulo de v_1 não pode ser ortogonal a v_1 (relativamente a f), a decomposição acima é única no seguinte sentido: todo vetor $v \in V$ se decompõe, de maneira única, como a soma de um múltiplo de v_1 e um vetor ortogonal a v_1 relativamente a f.

O sub-espaço gerado por v_1 é de dimensão 1; logo os vetores ortogonais a v_1 (relativamente a f) formam um sub-espaço de dimensão $n - 1$. A restrição $\overline{f}$ de f a este sub-espaço é simétrica; pela hipótese de indução existe uma base

$\{v_2, \ldots, v_n\}$ deste sub-espaço de maneira que $f(v_i, v_j) = 0$ se $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Considerando a base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V (porque é base?) temos $f(v_i, v_j) = 0$, sempre que $i \neq j$, e portanto a base procurada. ■

Corolário — Para toda matriz simétrica A existe uma matriz inversível P de modo que P^tAP é uma matriz diagonal.

Definição 5 — Uma forma bilinear $f: V \times V \to \mathbb{R}$ se diz *anti-simétrica* se $f(u, v) = -f(v, u), \forall u, v \in V$.

Decorre da definição que $f(u, u) = 0, \forall u \in V$. É fácil provar que se f e g são anti-simétricas então $f + g$ também é anti-simétrica, o mesmo acontecendo com λf, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nota: Do que ficou dito acima segue que as formas bilineares anti-simétricas formam um sub-espaço de $B(V)$ o qual será indicado por $B_a(V)$. É claro também que a matriz de uma forma bilinear anti-simétrica é uma matriz anti-simétrica. Vice-versa, dada uma matriz anti-simétrica, pode-se mostrar que a forma bilinear de que ela provem, escolhida uma certa base de V, é anti-simétrica. Logo há um isomorfismo entre os sub-espaços das matrizes anti-simétricas sobre $\mathbb{R}$ de ordem n e o das formas bilineares anti-simétricas de $V \times V$ em $\mathbb{R}$, desde que $\dim V = n$. Em particular a dimensão de $B_a(V)$ é

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

isto porque $M_n(\mathbb{R})$ é soma direta do sub-espaço das matrizes simétricas com o das matrizes anti-simétricas, sendo portanto a dimensão deste último a diferença entre as dimensões dos dois primeiros.

Teorema 2 — Seja $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear anti-simétrica. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é

$$\begin{pmatrix} A & & & & & \\ & A & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Demonstração (por indução sobre dim V): Se f é nula nada há a provar. O caso $\dim V = 1$ também é trivial. Suponhamos f não nula e a dimensão de V maior que 1. Existe então $(u, v) \in V \times V$ de modo que $f(u, v) \neq 0$. Esses vetores u e v são necessariamente L.I. pois, caso contrário, teríamos por exemplo $u = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) e daí

$$f(u, v) = f(\lambda v, v) = \lambda f(v, v) = 0.$$

Seja W o sub-espaço gerado por u e v. A restrição de f a W é uma forma bilinear anti-simétrica e sua matriz em relação à base $B = \left\{ \dfrac{u}{f(u, v)}, v \right\}$ é precisamente A (verifique). Seja $U = \{u \in V \mid f(u, w) = 0, \forall w \in W\}$. Pode-se provar então que $U \oplus W = V$ e daí decorre que $\dim U = n - 2$. A restrição $\bar{f}$ de f a U é anti-simétrica e, por hipótese de indução existe uma base de U tal que a matriz de $\bar{f}$ em relação a ela é do tipo desejado, porém de ordem $n - 2$. Juntando à base B a base de U nessas condições obtemos a base que se pretente. ■

Corolário 1 – Se $f: V \times V \to \mathbb{R}$ é anti-simétrica não degenerada então a dimensão de V é par.

Prova – Para que f seja não degenerada sua matriz deve ser inversível, o que significa que os zeros da diagonal não aparecem. ■

Corolário 2 – Se $\dim V = 2k = n$, então existe uma base de V em relação à qual a matriz de uma forma bilinear anti-simétrica não degenerada é do seguinte tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -B & 0 \end{array}\right)$$

onde $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é de ordem k.

Prova – Seja $\{v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k\}$ a base de V em relação à qual a matriz de f é

$$\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & \ddots \\ & & & A \end{pmatrix}$$

Considerando a nova base $\{v_1, \dots, v_k, w_k, \dots, w_1\}$ obteremos a representação matricial desejada. ■

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escrever a expressão geral de uma forma bilinear simétrica no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.

2. Escrever a expressão geral de uma forma bilinear anti-simétrica no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Encontrou algo de familiar?

3. Sejam φ e ψ formas lineares sobre V. Provar que a forma bilinear $\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$ é anti-simétrica e $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$ é simétrica.

4. Provar que $\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi = 0$ se, e somente se, φ e ψ são linearmente dependentes.

5. Dada $f \in B(V)$ provar que as formas bilineares g e h definidas por $g(u, v) = f(u, v) + f(v, u)$ e $h(u, v) = f(u, v) - f(v, u)$ satisfazem as condições:

   a) $g \in B_s(V)$; b) $h \in B_a(V)$; c) $2f = g + h$.

5. FORMAS QUADRÁTICAS

O estudo das formas bilineares está intimamente ligado ao das formas quadráticas. Estas aparecem em numerosos problemas dentro e fora da Matemática o que torna o seu estudo bastante atraente.

Definição 6 — Seja $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a função $q_f: V \to \mathbb{R}$ definida por $q_f(v) = f(v, v)$, para todo $v \in V$. Esta função de uma variável, que indicaremos apenas por q, quando não houver possibilidade de confusão, chama-se *forma quadrática* sobre V associada à forma bilinear f.

Exemplos

1) A forma quadrática associada ao produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ é

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

2) É uma forma bilinear simétrica do $\mathbb{R}^3$ a função f dada por

$$f(u, v) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

onde $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$. Observe por exemplo que a matriz de f em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

que é simétrica. A forma quadrática associada a f é a função

$$q(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

Nota: Dada uma forma bilinear simétrica, se q é a forma quadrática associada a f um cálculo fácil (faça-o) mostrará que

$$f(u, v) = \frac{1}{2}[q(u + v) - q(u) - q(v)] = \frac{1}{4}[q(u + v) - q(u - v)]$$

para todo $(u, v) \in V \times V$. Estas fórmulas são conhecidas como *identidades de polarização* e mostram que não somente q está univocamente determinada por f como também vale a recíproca: q determina f univocamente.

Como uma conseqüência do teorema 1, veremos a seguir que toda forma quadrática admite uma "forma canônica".

Seja agora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base do espaço V; suponhamos $q: V \to \mathbb{R}$ a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica f. Então, para todo vetor

$u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$ temos

$$q(u) = f(u, u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f(v_i, v_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(v_i, v_i) x_i^2 + 2 \sum_{i<j} f(v_i, v_j) x_i x_j.$$

Sendo $A = (f(v_i, v_j))$ a matriz de f em relação à base considerada e sendo X a matriz das coordenadas de u, em relação à mesma, a igualdade obtida pode ser expressa, como já vimos, assim:

$$q(u) = X^t \cdot A \cdot X$$

O teorema 1 nos assegura que existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal. Supondo Y a matriz das coordenadas de u nessa base e

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \bigcirc \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & d_n \end{pmatrix}$$

essa representação diagonal de f, teremos

$$q(u) = Y^tDY = (y_1, \ldots, y_n) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = d_1 y_1^2 + \ldots + d_n y_n^2 \quad (1)$$

Dizemos que a base com a qual conseguimos esta última igualdade *diagonalizou* a forma quadrática q. A igualdade (1) é uma *expressão diagonal* de q.

Esta última expressão de $q(u)$ pode ainda ser melhorada da seguinte maneira. Ordenemos, se necessário, a base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ que diagonalizou $q(u)$, de maneira que $d_1, \ldots, d_s$ sejam positivos, $d_{s+1}, \ldots, d_t$ sejam negativos e $d_{t+1}, \ldots, d_n$ sejam nulos. É claro que isso sempre é possível e que $0 \leqslant s, t \leqslant n$. Consideremos então uma nova base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ assim construída

$$w_1 = \frac{u_1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, w_s = \frac{u_s}{\sqrt{d_s}}, w_{s+1} = \frac{u_{s+1}}{\sqrt{-d_{s+1}}}, \ldots, w_t = \frac{u_t}{\sqrt{-d_t}},$$

$$w_{t+1} = u_{t+1}, \ldots, w_n = u_n.$$

Se as coordenadas de u em relação a esta última base são dadas pela matriz Z e e se $Z^t = (z_1, \ldots, z_n)$, então

$$q(u) = Z^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \bigcirc & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & \bigcirc & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot Z =$$

$$= z_1^2 + \ldots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2$$

Com isso dizemos que *q foi reduzida a uma soma de quadrados.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Qual a forma bilinear simétrica que dá origem à forma quadrática do $\mathbb{R}^3$:

   a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$;

   b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$;

   c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

2. Escrever a matriz das formas bilineares que aparecem no exercício 1, em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

3. Seguindo o processo dado acima, reduzir a uma soma de quadrados as seguintes formas quadráticas no $\mathbb{R}^2$:

a) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$;

b) $q(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^2$;

c) $q(x_1, x_2) = x_1x_2$.

6. REDUÇÃO DE FORMAS QUADRÁTICAS: ALGORITMOS

Vamos dar a seguir dois processos práticos para reduzir uma forma quadrática a uma expressão diagonal.

6.1. PROCESSO DE GAUSS

Seja a forma quadrática no $\mathbb{R}^n$, $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ com $a_{ij} = a_{ji}$. Suponhamos $a_{11} \neq 0$. Façamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) \\ x_2 = y_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Então, levando para a expressão de $q(x_1, \dots, x_n)$ estas substituições obteremos

$$q(y_1, \dots, y_n) = a_{11}y_1^2 + q_1(y_2, \dots, y_n)$$

onde $q_1(y_2, \dots, y_n)$ é uma forma quadrática em $n - 1$ variáveis $y_2, \dots, y_n$.

Se por acaso $a_{11} = 0$ mas $a_{12} \neq 0$ fazemos a substituição de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

e recaímos numa forma quadrática nas variáveis $y_1, \dots, y_n$ em que o coeficiente de y_1^2 é não nulo. A esta aplicamos então a mudança de coordenadas explicada de início.

Repete-se o procedimento com a forma quadrática q_1.

A repetição desse raciocínio um número finito de vezes nos levará à redução desejada.

Exemplo 1 – Seja

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1$$

Sendo $a_{11} \neq 0$ fazemos a substituição

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - (-3y_2) \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

obtendo

$$\begin{aligned} q(y_1, y_2) &= (y_1 + 3y_2)^2 + 2y_2^2 - 6(y_1 + 3y_2)y_2 = \\ &= y_1^2 + 9y_2^2 + 6y_1y_2 + 2y_2^2 - 6y_1y_2 - 18y_2^2 \\ &= y_1^2 - 7y_2^2 \end{aligned}$$

que é uma forma diagonal.

Vejamos como o mesmo processo pode ser visto sob o ângulo das matrizes.

A matriz de uma forma quadrática é a matriz da forma bilinear de que ela provém. Logo a matriz de q no exemplo é

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz de mudança de base **P** é tirada da substituição de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

sendo portanto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí

$$P^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Logo $q(y_1, y_2) = y_1^2 - 7y_2^2$.

Exemplo 2 – Seja

$$q(x_1, x_2) = 2x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_2.$$

Sendo $a_{11} = 0$ devemos fazer a substituição

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

obtendo

$$q(y_1, y_2) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2$$

O mesmo cálculo feito matricialmente apresenta-se assim.

A matriz de q é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e a matriz de mudança de base é $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Daí:

$$P^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P = P^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= P^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donde $q(y_1, y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2$.

Exemplo 3 – Seja

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_1 + x_2^2 - 3x_2x_3 - 2x_3x_1 - 3x_3x_2 + x_3^2,$$

forma quadrática no $\mathbb{R}^3$.

Efetuamos as substituições

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - (y_2 - 2y_3) \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

obtendo

$$q(y_1, y_2, y_3) = (y_1 - y_2 + 2y_3)^2 + 2(y_1 - y_2 + 2y_3)y_2 + y_2^2 -$$
$$- 4(y_1 - y_2 + 2y_3)y_3 - 6y_2y_3 + y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 - 2y_1y_2 +$$
$$+ 4y_1y_3 - 4y_2y_3 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 + y_2^2 - 4y_1y_3 + 4y_2y_3 -$$
$$- 8y_3^2 - 6y_2y_3 + y_3^2 = y_1^2 - 3y_3^2 - 2y_2y_3.$$

Efetuemos agora a redução de $q_1(y_2, y_3) = -3y_3^2 - 2y_2y_3$. Façamos, conforme a teoria, as substituições

$$\begin{cases} y_3 = z_3 - \dfrac{1}{-3}(-z_2) \\ y_2 = z_2 \\ y_1 = z_1 \end{cases}$$

obtendo

$$q_1(z_2, z_3) = -3\left(z_3 - \frac{1}{3}z_2\right)^2 - 2z_2\left(z_3 - \frac{1}{3}z_2\right) =$$
$$= -3z_3^2 - \frac{1}{3}z_2^2 + 2z_2z_3 - 2z_2z_3 + \frac{2}{3}z_2^2 = \frac{1}{3}z_2^2 - 3z_3^2.$$

Portanto

$$q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 - 3z_3^2.$$

É claro que a mesma redução poderia ser feita por matrizes. Vejamos como.

A matriz de q inicialmente é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ Efetuamos duas mudanças sucessivas de bases dadas respectivamente por

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$P_1^t \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = B \quad e$$

$$P_2^t \cdot B \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

do que resulta

$$q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + \frac{1}{3} \cdot z_2^2 - 3z_3^2$$

As multiplicações de matrizes, deixamos a cargo do leitor.

Observe o leitor que este processo é trabalhoso, sendo impraticável quando o número de variáveis for grande. Tudo o que explicamos acima pode ser "mecanizado" da maneira explicada a seguir.

6.2. PROCESSO DAS MATRIZES ELEMENTARES

No apêndice I, capítulo 1, vimos o que são matrizes elementares. Foi provado nesse apêndice que se E é uma matriz elementar de ordem n e se A é uma matriz qualquer n x n a matriz EA é a matriz que se obtém de A efetuando na matriz A a mesma operação elementar que transformou I_n em E. Assim como definimos naquela altura operações elementares com as linhas de uma matriz poderíamos definir *operações elementares com as colunas* dessa matriz. E teríamos as *matrizes elementares por colunas*, definidas de maneira óbvia, em contraposição àquelas já conhecidas. Também poderíamos provar, de modo análogo, que se F é elementar (por colunas) AF é a matriz que se obtém de A efetuando sobre suas colunas a mesma operação elementar (com colunas) que transformou I_n em F.

Também é claro que o conjunto das matrizes elementares por colunas é o mesmo conjunto das matrizes elementares (por linhas). Por exemplo a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tanto se obtém de I_3 somando à terceira linha desta sua primeira linha multiplicada por 3, como se obtém de I_3 somando à primeira coluna desta sua terceira coluna multiplicada por 3. Observemos que a transposta de uma matriz elementar é ainda elementar. A transposta da matriz E acima é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que se obtém de I_3 somando à primeira linha de I_3 o triplo de sua terceira linha. Ou somando à terceira coluna de I_3 o triplo de sua primeira coluna.

Em resumo, se para efetuar uma certa operação elementar com as linhas de uma matriz A precisamos multiplicar A por uma matriz elementar E, obtendo EA, a mesma operação seria efetuado com as colunas de A calculando o produto AE^t.

Consideremos agora uma forma quadrática $q(u) = X^tAX$ sobre um espaço vetorial V. Já sabemos que existe uma matriz inversível P de modo que $P^tAP = D$ é diagonal e que D é uma outra representação matricial de q. Mas P, por ser inversível, é um produto de matrizes elementares $E_1, \ldots, E_r$ (apêndice I, capítulo 1): $P = E_r \ldots E_2E_1$. Logo

$$\begin{aligned} D &= (E_r \ldots E_2E_1)^tA(E_r \ldots E_2E_1) = (E_1^tE_2^t \ldots E_r^t)A(E_r \ldots E_2E_1) = \\ &= (E_1^t \ldots E_{r-1}^t)(E_r^tAE_r)(E_{r-1} \ldots E_1). \end{aligned}$$

Esta igualdade nos diz que existe uma seqüência finita de operações elementares que aplicadas alternadamente sobre as linhas e sobre as colunas irá transformar A na matriz D.

Como $P^t = E_1^t \ldots E_r^t = (E_1^t \ldots E_r^t)I_n$, a mesma seqüência de operações, aplicadas sobre as linhas, transformará a matriz I_n na transposta da matriz P de mudança de base.

Exemplo – Diagonalizar a forma quadrática $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$.

A matriz de q é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Somando à segunda linha a primeira multiplicada por (-1) e à segunda coluna da matriz obtida sua primeira coluna multiplicada por (-1) obtemos sucessivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Somando à terceira linha desta última matriz o dobro de sua primeira linha e à terceira linha da matriz assim conseguida o dobro de sua primeira coluna achamos, respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(Convém, nesta altura, parar um instante e comparar o resultado obtido com o processo de Gauss.)

c) Permutemos a segunda e a terceira linhas da última matriz e façamos a mesma operação com as colunas do resultado obtido. Teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Finalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Na primeira destas passagens substituímos a terceira linha pela soma dela com a segunda multiplicada por $-\frac{1}{3}$. Na segunda fizemos o mesmo com relação à segunda e à terceira colunas.

Na prática podemos (com base na associatividade da multiplicação de matrizes) efetuar primeiro as operações com linhas que forem possíveis, depois todas as operações com colunas correspondentes, e assim por diante. Vejamos como fazer isso de uma maneira que nos leve também à obtenção de P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

onde $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = P^t$. Logo $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

O leitor deve notar que não efetuamos nenhuma operação elementar com colunas para obter P^t. O por que disto está no último parágrafo da explicação deste método.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Reduzir à forma diagonal pelo processo de Gauss as seguintes formas quadráticas no $\mathbb{R}^2$:

   a) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$;

   b) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$;

   c) $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2$;

   d) $4x_1x_2 + x_2^2$;

   e) $4x_1x_2$.

2. Reduzir pelo processo de Gauss à forma diagonal as formas quadráticas seguintes no $\mathbb{R}^3$:

a) $x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$;

b) $3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 5x_2x_3$;

c) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 6x_1x_2$.

Dar, em cada caso, a substituição linear que diagonaliza a forma quadrática.

3. Reduzir por operações elementares à forma diagonal as formas quadráticas do exercício 2. Comparar os resultados.

4. Seja a forma quadrática $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$, $a \neq 0$. Reduza-a à forma diagonal, dando a substituição linear correspondente à redução.

7. LEI DE INÉRCIA

Conforme vimos nos parágrafos 4 e 5 é sempre possível fazer uma mudança de variável da forma $X = PY$ de modo a diagonalizar uma forma quadrática $q(x_1, \ldots, x_n)$. No entanto existem muitas mudanças da forma $X = PY$ que nos conduzem a uma forma diagonal. Contudo, existe um invariante neste processo. É o que afirma o teorema seguinte.

Teorema 6 (Lei de Inércia): Seja q uma forma quadrática em um espaço vetorial V. Suponhamos que numa representação diagonal de q o número de coeficientes positivos seja *r* e o número de coeficientes negativos seja *s*. Então em qualquer outra representação diagonal de q haverá *r* termos positivos e *s* termos negativos.

Demonstração: Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V que diagonaliza q. Assim se $u = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i \in V$, então $q(x) = d_1x_1^2 + \ldots + d_nx_n^2$ e podemos supor $d_1 > 0$, $\ldots, d_r > 0$, $d_{r+1} < 0, \ldots, d_{r+s} < 0$ e $d_{r+s+1} = \ldots = d_n = 0$.

Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma outra base que diagonaliza q. Sendo $u = \sum_{i=1}^{n} y_iu_i$, então $q(u) = d_1'y_1^2 + \ldots + d_n'y_n^2$ e podemos supor que $d_1' > 0, \ldots, d_p' > 0$, $d_{p+1}' < 0, \ldots, d_{p+q}' < 0$ e $d_{p+q+1}' = 0, \ldots, d_n' = 0$. Devemos provar que $p = r$ e $q = s$.

Sejam $U = [v_1, \ldots, v_r]$ e $W = [u_{p+1}, \ldots, u_n]$. Mostremos que $U \cap W = \{o\}$. De fato, seja $w \in U \cap W$. Então

$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = b_{p+1} u_{p+1} + \ldots + b_n u_n,$$

com os a_i e os b_j em $\mathbb{R}$.

Portanto

$$q(w) = d_1 a_1^2 + \ldots + d_r a_r^2 \geqslant 0 \quad \text{e} \quad q(w) = d'_{p+1} b_{p+1}^2 + \ldots + d'_n b_n^2 \leqslant 0$$

do que decorre que $q(w) = 0$. Como porém $d_1, \ldots, d_r > 0$ a igualdade $q(w) = = d_1 a_1^2 + \ldots + d_r a_r^2 = 0$ é possível se, e somente se, $a_1 = \ldots = a_r = 0$, ou seja, se e somente se $w = o$.

Como $\dim U = r$ e $\dim W = n - p$, temos

$$r + (n - p) = \dim U + \dim W = \dim (U \cap W) + \dim (U + W) =$$
$$= \dim (U + W) \leqslant n$$

donde $r + (n - p) \leqslant n$ e portanto $r \leqslant p$.

De maneira análoga provamos que $p \geqslant r$. Então $p = r$. Daí vem que $s = q$. ∎

Definição 7 — O par (r, s) das considerações acima chama-se *assinatura* da forma quadrática q.

Exemplos

1) A forma quadrática $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$ tem assinatura $(1, 1)$.

2) A forma quadrática $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ tem assinatura $(1, 1)$.

3) A assinatura da forma quadrática $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$ é $(2, 1)$.

4) A forma quadrática associada ao produto interno usual no $\mathbb{R}^n$ tem assinatura $(n, 0)$.

Deixamos como exercício o cálculo da assinatura das formas quadráticas dos exercícios do parágrafo 6.

2ª PARTE:
APLICAÇÕES

CAPÍTULO 1

Diagonalização de Operadores Lineares e Forma de Jordan

1. VALORES E VETORES PRÓPRIOS

Seja V o espaço vetorial constituído dos vetores definidos por meio de segmentos orientados. Consideremos um operador linear T: V → V. Tomando-se "ao acaso" um vetor $\vec{u} \in V$, em geral $\vec{u}$ e $T(\vec{u})$ não têm a mesma direção. Mas existem, às vezes, certos vetores privilegiados para os quais $T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$; isto é, T $(\vec{u})$ e $\vec{u}$ têm a mesma direção. Neste caso o efeito de T sobre $\vec{u}$ é apenas uma mudança de módulo ou uma mudança de sentido. Os vetores assim privilegados são importantes, conforme veremos a seguir. Às vezes é possível formar uma base com eles e esta será uma base privilegiada.

Definição 1 — Seja V um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$) e seja T: V → V um operador linear. Um vetor u ∈ V, u ≠ *o*, é um *vetor próprio* de T se existe um escalar λ (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, respectivamente) tal que T(u) = λu. Neste caso λ é um *valor próprio* de T associado a u.

Notas:

1) As expressões "vetor próprio", "auto-vetor" e "vetor característico" são sinônimas bem como "valor próprio", "auto-valor" e "valor característico".

2) O escalar λ é univocamente determinado por T e u pois

$$T(u) = \lambda u = \lambda' u \Longrightarrow (\lambda - \lambda')u = o \Longrightarrow \lambda = \lambda'$$

Fixado λ, o cojunto $\{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}$ é um sub-espaço vetorial de V pois

$$T(u) = \lambda u \Longleftrightarrow (T - \lambda I)(u) = o \Longleftrightarrow u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^{(*)}$$

o que significa que o subconjunto que acabamos de definir coincide com Ker(T − λI) que sabemos ser um sub-espaço vetorial de V.

(*) I indica o operador idêntico de V.

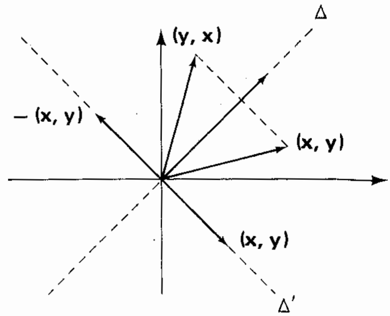
Definição 2 — O sub-espaço introduzido nas considerações acima chama-se *sub-espaço próprio* de λ e será indicado por $V(\lambda)$.

Assim:

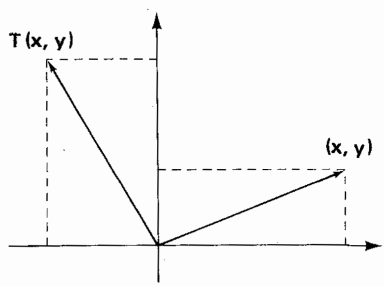
$$V(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$$

Exemplos

1) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$. A aplicação T é a reflexão dos vetores em torno à diagonal Δ. Assim, se o vetor está no eixo-x, sua imagem está no eixo-y. Não há portanto vetores próprios no eixo-x. No entanto se (x, y) está na diagonal Δ, teremos $T(x, y) = (x, y)$ e assim todo vetor de Δ é um vetor próprio de valor próprio igual a 1. Analogamente se um vetor está na diagonal Δ', sua imagem está em Δ' e é exatamente seu oposto. Logo os vetores de Δ' são vetores próprios com valor próprio -1. Então $V(1) = \Delta$ e $V(-1) = \Delta'$.



2) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 1) = (-1, 0)$, então $T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(0, 1) + y(-1, 0) = (-y, x)$. T é então uma rotação de 90°. Neste caso é impossível que $T(x, y) = \lambda(x, y)$ com $(x, y) \neq (0, 0)$ pois o ângulo entre (x, y) e $T(x, y)$ é de 90°. Logo T não admite vetores próprios, $V(\lambda) = \{o\}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.



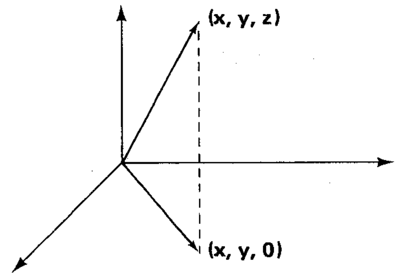
3) Seja V um espaço vetorial e $T = H_\lambda$ = homotetia de razão λ. Assim, $T(u) = H_\lambda(u) = \lambda u$, $\forall u \in V$, e todo vetor é vetor próprio com valor próprio λ. Neste caso $V(\lambda) = V$.

4) Seja T a rotação de ângulo θ no $\mathbb{R}^3$, tendo como eixo fixo o eixo-z. Ou seja, T é o operador cuja matriz na base canônica é:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O vetor $(0, 0, 1)$ é vetor próprio com valor próprio 1 pois $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Não há outros vetores próprios quando $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Logo $V(1) =$ eixo-z.

5) Seja $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ que é a projeção sobre o plano xy. Neste caso $(0, 0, 1)$ é vetor próprio com valor próprio 0 pois $P(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Todo vetor do plano xy é vetor próprio com valor próprio 1 pois $P(x, y, 0) = (x, y, 0)$. Temos então: $V(1) =$ plano xy e $V(0) =$ eixo-z.



Definição 3 — Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n (real ou complexa), chama-se *polinômio característico* de A o seguinte polinômio de grau n:

$$P_t(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} - t & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} = \det(A - tI_n).$$

Proposição 1 — Matrizes semelhantes têm mesmo polinômio característico.

Demonstração — Se B e A são semelhantes, existe uma matriz inversível M tal que $B = M^{-1}AM$. Daí:

$$\begin{aligned} p_B(t) &= \det(B - tI_n) = \det(M^{-1}AM - tI_n) = \\ &= \det(M^{-1}AM - tM^{-1}I_nM) = \det(M^{-1}(A - tI_n)M) = \\ &= \det(M^{-1})\det(A - tI_n)\det M = \det(A - tI_n) = p_A(t). \ \blacksquare \end{aligned}$$

A proposição que acabamos de provar torna válida a seguinte definição:

Definição 4 — Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T: V \to V$ um operador linear. Chama-se *polinômio característico de T* o polinômio característico da matriz de T em relação a qualquer base de V. Notação: $p_T(t)$.

Tal definição é válida porque matrizes do mesmo operador são necessariamente matrizes semelhantes.

Proposição 2 — Seja T um operador linear de um espaço vetorial sobre K(K= $\mathbb{R}$ ou K = $\mathbb{C}$) de dimensão n. Então os valores próprios de T são as raízes de $p_T(t)$ em K.

Demonstração — Da definição 1 segue que λ é valor próprio de T se, e somente se, $\text{Ker}(T - \lambda I_n) \neq \{o\}$. Mas isto equivale a que $T - \lambda I_n$ não é inversível e, ainda, a que $\det(T - \lambda I_n) = 0$ (ver capítulo 7 — § 7). Como por definição, $\det(T - tI_n) = \det((T) - tI_n) = p_T(t)$, então a proposição está provada. ■

Nota: Se V é um espaço sobre $\mathbb{C}$, então $p_T(t)$ é um polinômio complexo que, devido ao teorema fundamental da álgebra, tem n raízes (n = dim V) em $\mathbb{C}$, já levando em conta a multiplicidade algébrica das raízes. Neste caso, então, um operador linear T tem n valores próprios. Mas se V é um espaço sobre $\mathbb{R}$ o número de valores próprios de um operador $T \in L(V)$ é menor que ou igual à dimensão de V, pois algumas das raízes de $p_T(t)$ podem não ser reais.

Exemplos

Retomemos os cinco exemplos dados neste parágrafo e calculemos $p_T(x)$ (mudamos a variável t da definição por x).

1) A matriz de T na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 1$$

cujas raízes em $\mathbb{R}$ são 1 e -1.

2) A matriz de T é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

que não tem raízes em $\mathbb{R}$.

3) Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V; a matriz de $H_\lambda = T$ em relação a essa base é

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

e portanto

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda - x \end{pmatrix} = (\lambda - x)^n$$

e λ é o único valor próprio de T; neste caso λ é uma raiz múltipla de $p_T(x)$ com multiplicidade n.

4) Neste caso

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - x & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta - x & 0 \\ 0 & 0 & 1 - x \end{pmatrix} =$$

$= (1 - x)(x^2 - 2\cos\theta\, x + 1)$ cujas raízes são:

$$1, \quad \frac{2\cos\theta + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{2\cos\theta - \sqrt{\Delta}}{2}$$

onde $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1)$. Se $|\cos\theta| < 1$ as duas raízes são complexas e se $\cos\theta = \pm 1$, as três raízes são reais.

5) A matriz de P em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$p_P(x) = \det \begin{pmatrix} 1 - x & 0 & 0 \\ 0 & 1 - x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = (1 - x)^2 x$$

cujas raízes são 0 e 1, esta com multiplicidade 2.

Notas:

1) Uma vez conhecidos os valores próprios de um operador T, podemos achar os vetores próprios associados a cada vetor próprio. Se λ é um valor próprio (raiz do polinômio $p_T(x)$) os vetores próprios associados a λ são os vetores não nulos do núcleo de $(T - \lambda I)$. Vejamos alguns exemplos.

(I) O operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$ tem como valores próprios 1 e -1. Os vetores associados ao valor próprio 1 são aqueles que satisfazem $(x, y) \neq (0, 0)$ e $(T - \lambda I)(x, y) = (0, 0)$ com $\lambda = 1$ ou seja $(T - I)(x, y) = (0, 0)$ ou ainda $T(x, y) = (x, y)$ ou $(y, x) = (x, y)$ donde vem $x = y$. Logo os vetores próprios associados a 1 são os vetores da forma $(x, x) = x(1, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Analogamente os vetores próprios associados a -1 são os múltiplos de $(1, -1)$, dado por $x(1, -1)$, $\forall x \neq 0$.

(II) O operador $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ tem valores próprios 0 e 1.

Vetores próprios associados a 0:

$P(x, y, z) = 0(x, y, z) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow (x, y, 0) =$

$= (0, 0, 0) \Longleftrightarrow x = y = 0.$

Então os vetores próprios associados ao zero são os vetores $x \cdot (0, 0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Vetores próprios associados ao 1:

$P(x, y, z) = 1(x, y, z) \Longleftrightarrow (x, y, 0) = (x, y, z) \Longleftrightarrow z = 0.$

Os vetores próprios neste caso são os vetores $(x, y, 0)$, onde $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Podemos achar dois vetores próprios que são linearmente independentes, a saber, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

2) Assim como definimos valores e vetores próprios de um operador, podemos definir valores e vetores próprios de uma matriz. Se A é uma matriz, de ordem n, real ou complexa, chama-se *valor próprio* de A toda matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$, onde λ é um escalar chamado *valor próprio* de A. Para que λ seja um valor próprio de A é necessário e suficiente, então, que exista uma matriz $X \neq 0$, do tipo $n \times 1$, tal que $(A - \lambda I_n)X = 0$. Ora, isto ocorre se, e somente se, $A - \lambda I_n$ não é inversível e portanto se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$. Levando em conta a definição 3 deste item podemos concluir que λ é valor próprio de A quando, e somente quando, λ é raiz do polinômio característico de A.

3) Se λ é valor próprio de T, o número $s = \dim(V(\lambda))$ chama-se multiplicidade geométrica de λ. Reveja nos exemplos acima a multiplicidade geométrica dos valores próprios.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Achar os valores e os vetores próprios do operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por:

   a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$;

   b) $T(x, y) = (-x, -y)$;

   c) $T(1, 0) = (0, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

2. Achar os valores e os vetores próprios do operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por

   a) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;

   b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

3. Determinar valores e vetores próprios do operador T do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica é:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Determinar o polinômio característico e os valores próprios do operador linear $T: V \to V$ que é definido em uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ por $T(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$.

5. Calcular o polinômio característico e os valores próprios das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calcular o polinômio característico e os valores próprios da matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador do $\mathbb{R}^2$. Ache os valores próprios de T. Existem, neste caso, dois vetores próprios linearmente independentes?

8. Seja A uma matriz triangular, ou seja, uma matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$ (ou, ao contrário, $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$). Qual o polinômio característico de A?

9. Sejam A e B matrizes triangulares com a mesma diagonal principal ($a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$). Prove que: $p_A(t) = p_B(t)$.

*10. Provar que se λ é valor próprio de T, então λ^n é valor próprio de T^n. Generalizando, se $p(t)$ é um polinômio então $p(\lambda)$ é valor próprio de $p(T)$, onde $p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n$ se $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

2. DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Vamos examinar dois operadores do $\mathbb{R}^2$ que se comportam de maneira diferente quanto aos vetores próprios. São eles $T(x, y) = (y, x)$ e $S(x, y) = (x + y, y)$ cujas matrizes em relação à base canônica são

$$(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Os polinômios característicos respectivos são $p_T(x) = x^2 - 1$ e $p_S(x) = (1 - x)^2$, cujas raízes são: $p_T(x)$: $1, -1$ e $p_S(x)$: 1 (dupla). São vetores próprios de T linearmente independentes: $f_1 = (1, 1)$, associado a 1, e $f_2 = (1, -1)$, associado a -1.

Logo $\{f_1, f_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Os vetores próprios de S devem satisfazer a condição $S(x, y) = (x, y)$, ou seja, $(x + y, y) = (x, y)$ que equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x + y = x \\ \quad\;\; y = y \end{cases}$$

cuja solução geral é $y = 0$. O sub-espaço próprio de S é formado então pelos múltiplos do vetor $(1, 0)$ e portanto sua dimensão é 1. Então *é impossível formar uma base de* $\mathbb{R}^2$ *com vetores próprios de S*, contrariamente ao que se verificou com o operador T.

No caso do operador T, se $B = \{f_1, f_2\}$, então

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mais ainda, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz de mudança da base canônica para a base B, temos $(T)_B = M^{-1}(T)M$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em resumo: existe uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz de T é diagonal. Tal fato não ocorre com a matriz do operador S. Em outras palavras, a matriz de T é semelhante a uma matriz diagonal, o que não acontece com a matriz de S. Faremos a seguir um estudo breve dos operadores que podem ser diagonalizados conforme o operador T acima.

Definição 5 — Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador $T: V \to V$ se diz *diagonalizável* se existe uma base de V formada por vetores próprios de T.

Se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ for uma base formada de vetores próprios de T então

$$(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios de T. Segue daí que

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \bigcirc \\ & \lambda_2 - x & \\ \bigcirc & & \lambda_n - x \end{pmatrix} = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \ldots (\lambda_n - x)$$

e assim $p_T(x)$ se decompõe em fatores lineares.

Nota: Os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ não são necessariamente distintos dois a dois. Pode acontecer de o polinômio característico $p_T(x)$ de um operador linear T se decompor em fatores lineares da forma $x - \lambda$, sem que T seja diagonalizável. É o que acontece, por exemplo, com o operador linear $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $S(x, y) = (x + y, y)$ cujo polinômio característico é $(x - 1)(x - 1)$ que já vimos tratar-se de operador não diagonalizável.

Nosso objetivo agora é dar um critério para que um operador linear T de um espaço de dimensão finita (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) seja diagonalizável. Para tanto precisaremos de alguns pré-requisitos ainda não constantes do texto.

Lembremos que a soma de dois sub-espaços H_1 e H_2 de um espaço vetorial V é o sub-espaço

$$H_1 + H_2 = \{u + v \mid u \in H_1; v \in H_2\}$$

e que essa soma se diz direta se $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Estas noções podem ser generalizadas de maneira óbvia. Se $H_1, \ldots, H_r (r \geqslant 1)$ são sub-espaços vetoriais de V, a soma desses sub-espaços é o conjunto

$$H_1 + \ldots + H_r = \{u_1 + \ldots + u_r \mid u_i \in H_i\}.$$

É claro que $H_1 + \ldots + H_r$ também é um sub-espaço de V. Se ocorrerem ainda as igualdades

$$H_2 \cap H_1 = \{o\}$$

$$H_3 \cap (H_1 + H_2) = \{o\}$$

$$\vdots$$

$$H_r \cap (H_1 + \ldots + H_{r-1}) = \{o\}$$

a soma em questão é chamada direta e se indica por $H_1 \oplus \ldots \oplus H_r$.

Para uma soma direta $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_r$ de sub-espaços de um espaço V vale o seguinte fato: se $B_1, \ldots, B_r$ são bases de $H_1, \ldots, H_r$, respectivamente, então $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ é uma base de H.

Como cada H_i é gerado por B_i e todo $u \in H$ é uma soma $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$, onde cada $u_i \in H_i$, então B gera o sub-espaço H. Para mostrar que B é linearmente independente suponhamos $B_1 = \{u_{11}, \ldots, u_{1n_1}\}, \ldots, B_r = \{u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}\}$. Então, se $\alpha_{11}u_1 + \ldots + \alpha_{1n_1}u_{1n_1} + \ldots + \alpha_{r1}u_{r1} + \ldots + \alpha_{rn_r}u_{rn_r} = o$ deixando no primeiro membro apenas as n_r últimas parcelas teremos

$$\alpha_{r1}u_{r1} + \ldots + \alpha_{rn_r}u_{rn_r} = v$$

onde $v \in H_1 + \ldots + H_{r-1}$. Como $H_r \cap (H_1 + \ldots + H_{r-1}) = \{o\}$, então

$$v = \alpha_{r1}u_{r1} + \ldots + \alpha_{rn_r}u_{rn_r} = o$$

e, levando em conta que B_r é L.I., concluímos que $\alpha_{r1} = \ldots = \alpha_{rn_r} = 0$. A repetição desse raciocínio nos levará à conclusão que todos os escalares α são nulos e, conseqüentemente, que B é linearmente independente.

Uma conseqüência do que acabamos de mostrar é que

$$\dim(H_1 \oplus \ldots \oplus H_r) = \dim H_1 \oplus \ldots \oplus \dim H_r.$$

Teorema 1 – Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K(K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C})$. Um operador linear $T \in L(V)$ é diagonalizável se, e somente se,

1) o polinômio característico de T tem todas as suas raízes em K (sempre acontece no caso $K = \mathbb{C}$);

2) a multiplicidade algébrica de cada valor próprio λ_i de T é igual à dimensão de $V(\lambda_i)$.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Seja $B = \{u_{11}, \ldots, u_{1r_1}, \ldots, u_{k1}, \ldots, u_{kr_k}\}$ uma base de V formada de vetores próprios de T de maneira que em cada $B_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{ir_i}\}$ estão todos os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_i \in K(i = 1, 2, \ldots, k)$. A matriz de T em relação a essa base é

$$(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

é portanto, já que $p_T(t)$ independe de representação matricial de T,

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \ldots (\lambda_k - t)^{r_k}$$

cujas raízes estão todas em K.

Para cada índice i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ seja H_i o sub-espaço gerado por B_i e mostremos que $H_i = V(\lambda_i)$. A inclusão $H_i \subset V(\lambda_i)$ é fácil de verificar pois um elemento $u \in H_i$ é uma combinação linear de B_i e é, portanto, um vetor próprio cujo valor próprio associado é λ_i.

Para provar que $V(\lambda_1) \subset H_1$ tomemos $u \in V(\lambda_1)$ em relação à base B:

$$u = \alpha_{11}u_{11} + \ldots + \alpha_{kr_k}u_{kr_k}.$$

Então

$\lambda_1\alpha_{11}u_{11} + \ldots + \lambda_1\alpha_{1r_1}u_{1r_1} \ldots + \lambda_1\alpha_{k1}u_{k1} + \ldots + \lambda_1\alpha_{kr_k}u_{kr_k} =$

$= \lambda_1 u = T(u) = \alpha_{11}T(u_{11}) + \ldots + \alpha_{kr_k}T(u_{kr_k}) =$

$= \lambda_1\alpha_{11}u_{11} + \ldots + \lambda_1\alpha_{1r_1}u_{1r_1} + \ldots + \lambda_k\alpha_{k1}u_{k1} + \ldots + \lambda_k\alpha_{kr_k}u_{kr_k}.$

Comparando a primeira e a última combinações lineares acima obtemos

$$\lambda_1\alpha_{21} = \lambda_2\alpha_{21}, \ldots, \lambda_1\alpha_{2r_2} = \lambda_2\alpha_{2r_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1\alpha_{k1} = \lambda_k\alpha_{k1}, \ldots, \lambda_1\alpha_{kr_k} = \lambda_k\alpha_{kr_k}$$

e assim $\quad \alpha_{21} = \ldots = \alpha_{2r_2} = \ldots = \alpha_{k1} = \ldots = \alpha_{kr_k} = 0$

Donde $u = \alpha_{11}u_{11} + \ldots + \alpha_{1r_1}u_{1r_1}$ e portanto $u \in H_1$. Analogamente se chega à conclusão que $V(\lambda_i) \subset H_i$ para todo i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Das igualdades $V(\lambda_i) = H_i$ resulta que $\dim V(\lambda_i) = \dim H_i = r_i$ que é a multiplicidade algébrica de λ_i.

$(\Longleftarrow)$ Por hipótese o polinômio característico de T pode ser fatorado sobre K do seguinte modo:

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \ldots (\lambda_k - t)^{r_k}$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ e $r_1 + \ldots + r_k =$ grau de $p_T(t) = \dim V$. A multiplicidade algébrica de cada um dos valores próprios λ_i é, pois, r_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Por hipótese ainda, $\dim V(\lambda_i) = r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Seja $H = V(\lambda_1) + \ldots + V(\lambda_k)$ e mostremos que $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$, sempre que $i \neq j$. De fato, se $u \in V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j)$, então $T(u) = \lambda_i u = \lambda_j u$ e daí $(\lambda_i - \lambda_j)u = o$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, então $u = o$. Conseqüentemente $V(\lambda_r) \cap (V(\lambda_1) + \ldots + V(\lambda_{r-1})) = \{o\}$ $(2 \leqslant r \leqslant k)$ e então

$$H = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k).$$

Daí $\dim H = \dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_k) = r_1 + \ldots + r_k = n$ e, sendo H um sub-espaço vetorial de V cuja dimensão é n, então $H = V$. Tomando uma base B_i de $V(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, então $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ é uma base de V, constituída só de vetores próprios de T. Donde T é diagonalizável.

Nota (Importante): Seja A uma matriz real $n \times n$. Se B indica a base canônica do $\mathbb{R}^n$, existe então um operador linear $T \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $(T)_B = A$. A matriz A se diz diagonalizável se, e somente se, T é diagonalizável; isto é, quando existe uma base B_1 de $\mathbb{R}^n$ tal que $(T)_{B_1} = D$ é diagonal. Essa base B_1, como vimos, é formada por vetores próprios de T.

Mas sendo A e D matrizes de um mesmo operador linear, se indicarmos por M a matriz de mudança de base de B para B_1, então (ver Cap. 5, § 5).

$$D = M^{-1} AM.$$

Ora, sendo $B = \{(1, 0, \ldots, 0); \ldots; (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$, se

$B_1 = \{(x_{11}, \ldots, x_{1n}); \ldots; (x_{n1}, \ldots, x_{nn})\}$, então

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Quer dizer, as componentes do i-ésimo vetor próprio de B_1 formam a i-ésima coluna de $M(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Para as matrizes complexas $n \times n$ vale o mesmo observado acima.

Exemplos

1) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador dado por $T(x, y) = (4x + 4y, x + 4y)$. Sua matriz em relação à base canônica é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Então:

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} 4 - x & 4 \\ 1 & 4 - x \end{pmatrix} = x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$$

o que mostra que A é diagonalizável. Para $\lambda = 2$ temos

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde vem que

$$\begin{cases} 4x + 4y = 2x \\ x + 4y = 2y. \end{cases}$$

A resolução desse sistema nos leva a que:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

é um vetor próprio de T.

Um cálculo análogo nos dará $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como outro vetor próprio de T, associado ao vetor próprio 6. A matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é tal que $M^{-1}AM =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Pedimos ao leitor que faça estes cálculos.

2) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 7 & -6 \\ -1 & 4-x & 0 \\ 0 & 2 & -2-x \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Para $\lambda = 1$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde vem o vetor próprio

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

donde vem o vetor próprio

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$ teremos o vetor próprio

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então, formando a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ teremos } M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ o operador linear cuja matriz, em relação à base canônica de $\mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{C}$, é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Então

$$p_T(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)^2 \cdot [(1-t)(-2-t) - 4] = (2-t)^2(t^2+t-6) = (2-t)^3(-3-t)$$

Logo, os valores próprios de $p_T(t)$ são 2 (com multiplicidade algébrica 3) e -3 (com multiplicidade algébrica 1).

Calculemos as dimensões de $V(2)$ e $V(-3)$, onde $V = \mathbb{C}^4$. A equação matricial $A\,(x\ y\ z\ t)^t = 2\,(x\ y\ z\ t)^t$ equivale ao sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2x \\ 2y = 2y \\ z + t = 2z \\ 4z - 2t = 2t \end{cases}$$

que equivale, por sua vez, a

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Donde $V(2) = \{(x, o, z, z) \mid x, z \in \mathbb{C}\} = [(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 1)]$, cuja dimensão é 2. Como a multiplicidade algébrica de 2 é 3, então T não é diagonalizável.

Cálculos análogos levam à conclusão que $V(-3) = \{(0, 0, z, -4z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ e portanto $\dim V(-3) = 1$, o que mostra que $V(2) + V(-3) \neq \mathbb{C}^4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar, se possível, uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal, nos seguintes casos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Determinar uma matriz $M \in M_4(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Determinar $M \in M_3(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Achar uma matriz diagonal semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Estudar quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES AUTO-ADJUNTOS (OU DE MATRIZES SIMÉTRICAS REAIS)

Lembremos que um operador auto-adjunto é um operador linear A de um espaço vetorial euclidiano V tal que

$$\langle A(u), v\rangle = \langle u, A(v)\rangle$$

para quaisquer $u, v \in V$. Lembremos ainda que a matriz de A, em relação a qualquer base ortonormal, é simétrica, e que, reciprocamente, toda matriz simétrica representa um certo operador auto-adjunto, com referência a uma base ortonormal. Assim, o problema de diagonalização de uma matriz simétrica equivale ao da diagonalização de um operador auto-adjunto.

O polinômio característico de um operador linear sobre um espaço euclidiano é um polinômio real cujas raízes pertencem ao corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Mostremos que no caso de um operador auto-adjunto todas essas raízes são necessariamente números reais.

De fato, seja $S = (s_{ij})$ uma matriz simétrica real e seja λ um valor próprio de S. Então $\det(S - \lambda Im) = 0$, o que equivale a dizer que o sistema linear homogêneo

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admite uma solução não trivial $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ e portanto são válidas as igualdades

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\beta_j = \lambda\beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Multipliquemos ambos os membros de cada i-ésima dessas igualdades por $\overline{\beta_i}$ e a seguir somemos membro a membro as igualdades obtidas:

$$\sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\beta_j\overline{\beta_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{\beta_i}.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{\beta_i} \in \mathbb{R}$, se provarmos que o primeiro membro da última igualdade pertence também a $\mathbb{R}$, então teremos a conclusão desejada, isto é, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas isto equivale a mostrar que esse primeiro membro é igual ao seu conjugado, o que é fácil:

$$\sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\beta_j\bar{\beta}_i = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\bar{\beta}_j\bar{\bar{\beta}}_i = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\bar{\beta}_j\beta_i =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} s_{ji}\bar{\beta}_j\beta_i = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\bar{\beta}_i\beta_j = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\beta_j\bar{\beta}_i.$$

Observe-se que a penúltima igualdade na seqüência anterior de igualdades se obteve simplesmente permutando-se os índices i e j na dupla somatória.

Portanto, já levando em conta a multiplicidade algébrica, uma matriz simétrica real de ordem n (ou um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão n) tem n valores próprios.

Teorema 2 — Um operador linear A de um espaço euclidiano V, de dimensão finita $n \geqslant 1$, é auto-adjunto se, e somente se, existe uma base ortonormal de V formada de vetores próprios de A.

Demonstração

($\Longleftarrow$) Se $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ é uma base de V formado de vetores próprios de A, então $(A)_B$ é uma matriz diagonal e portanto simétrica. Logo A é auto-adjunto (devido à proposição 8 — capítulo 6).

($\Longrightarrow$) Faremos a demonstração por indução sobre dim V. Se dim V = 1, qualquer que seja $v \in V$, $v \neq 0$, fazendo $\frac{v}{\|v\|} = g$, então $\{g\}$ é uma base ortonormal de V e, obviamente, como $V = [g]$ e $A(g) \in V$, então $A(g) = \lambda g$, para um certo $\lambda \in R$. Então g é um valor próprio de A e esta condição fica provada para n = 1.

Seja V um espaço euclidiano de dimensão $n > 1$ e suponhamos o teorema válido para os espaços euclidianos de dimensão $n - 1$. Sejam $A \in L(V)$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ um valor próprio de A. Se $u \neq o$ é um vetor próprio de A associado a λ_1, então $g_1 = \frac{u}{\|u\|}$ também o é pois $A(g_1) = A\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|}A(u) = \frac{1}{\|u\|}\lambda_1 u = \lambda_1 \frac{u}{\|u\|} =$
$= \lambda_1 g_1$.

Se $H = [g_1]$, então $V = H \oplus H^\perp$, onde $H^\perp$ também é euclidiano (relativamente ao produto interno de V, restrito a este sub-espaço) e $\dim H^\perp = n - 1$. Observemos ainda que $H^\perp$ é *A-invariante,* isto é, vale a implicação: $v \in H^\perp \to A(v) \in H^\perp$. De fato, se $v \in H^\perp$ $< g_1, A(v) > = <A(g_1), v> = <\lambda_1 g_1, v> = \lambda_1 <g_1, v> = \lambda_1 \cdot$
$\cdot\, 0 = 0$. Isto nos permite considerar A, enquanto atua somente sobre os elementos de $H^\perp$, como um operador linear deste sub-espaço. E como $<A(u), v> =$
$= <u, A(v)>$ vale para quaisquer $u, v \in V$, também vale para quaisquer $u, v \in H^\perp$, então A, como operador linear de $H^\perp$, é também auto-adjunto.

Pela hipótese de indução existe uma base ortonormal $\{g_2, \ldots, g_n\}$ de $H^{\perp}$ formada de vetores próprios de A (restrito a $H^{\perp}$). Então $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ é uma base ortonormal pois cada vetor de $H^{\perp}$ é ortogonal a g_1. Como cada elemento de B é um vetor próprio de A, a demonstração fica concluída.

Exemplo

Consideremos a matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

seu polinômio característico é

$$\det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 & 0 \\ -2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = -(1-t)^2(1+t) +$$

$+ 4(1+t) = (t-3) \cdot (t+1)^2$. Achemos os vetores próprios correspondentes aos valores próprios 3 e -1 encontrados.

De

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vem que

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \quad z = 0 \end{cases}$$

Logo $V(3) = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto dos vetores próprios associados ao valor 3. Analogamente se obtém que $V(-1) = \{(x, x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto dos vetores próprios associados a -1. Uma base de $\mathbb{R}^3$ formada de vetores próprios de A é

$$B = \{(1, -1, 0); \ (0, 0, 1); \ (1, 1, 0)\}.$$

Note-se que o primeiro desses vetores foi conseguido fazendo $x = 1$ em V(3) e os dos outros foram obtidos para $x = 0$ e $z = 1$ e $x = 1$ e $z = 0$ em $V(-1)$. Essa base é ortogonal mas não ortonormal. Assim, se multiplicarmos cada um dos seus vetores pelo inverso de sua norma acharemos uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ constituída de vetores próprios de A:

$$B_0 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0 \right); (0, 0, 1); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}$$

Portanto

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de mudança da base canônica do $\mathbb{R}^3$ para B_0, ambas ortonormais, do que decorre que $M^{-1} = M^t$ (ver exercício proposto 24 – item 4 – cap. 6). Donde

$$M^t \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Achar os valores próprios de A.

   b) Achar uma matriz ortonormal do $\mathbb{R}^3$ em relação à qual a matriz de A é diagonal.

   c) Achar uma matriz M ortogonal ($M^{-1} = M^t$) tal que $M^t(a_{ij})M$ é a matriz diagonal obtida em b).

2. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$A(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$$

   a) Achar os valores próprios de A.

   b) Achar em base ortonormal B do $\mathbb{R}^3$ tal que $(A)_B$ é diagonal.

   c) Qual a matriz de mudança da base canônica do $\mathbb{R}^3$ para B?

3. Seja (s_{ij}) uma matriz real simétrica cujo valor próprio de menor módulo é λ. Mostrar q (s_{ij}) é inversível se, e somente se, $\lambda \neq 0$.

4. Fazer para a matriz real simétrica

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o mesmo que se pediu no exercício 1 acima.

5. Um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V se diz *positivo definido* se, e só se, todos os seus valores próprios são maiores que zero. Supondo a dimensão de V finita, mostrar que:

   a) A é positivo definido se, e somente se, $\langle A(u), u \rangle > 0$ para todo vetor não nulo $u \in V$.

   b) Se A é positivo definido, então seu inverso (caso exista) também o é.

6. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Prove que existe uma matriz real ortogonal P, $n \times n$, tal que $P^t \cdot A \cdot P = D$, onde D é diagonal, formada pelos valores próprios de A.

4. APLICAÇÃO DA DIAGONALIZAÇÃO: POTÊNCIAS DE UMA MATRIZ

Seja A uma matriz de ordem n. As potências de A são definidas por $A^2 = AA, \ldots, A^p = A^{p-1}A$. Em geral é penoso o cálculo de A^p, sobretudo se p é grande. No entanto se A é diagonalizável, o cálculo de A^p é mais fácil. Pois se A é diagonalizável, existe uma matriz inversível M tal que: $M^{-1}AM = D$, sendo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a matriz diagonal dos valores próprios de A. É claro então que

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}, \; D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^3 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Mas $M^{-1}AM = D$ acarreta $A = MDM^{-1}$ e daí, conforme já vimos no apêndice V, $A^p = MD^pM^{-1}$.

Exemplos

1) Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e calculemos A^p. Conforme já vimos a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza A, isto é, $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, ou seja, $A = M \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} M^{-1}$ de onde se tira que

$$A^p = M \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 6^p \end{pmatrix} M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 6^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2^{p+1} & 2 \cdot 6^p \\ -2^p & 6^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2^{p+1} + 2 \cdot 6^p & -2^{p+2} + 2^2 \cdot 6^p \\ -2^p + 6^p & 2^{p+1} + 2 \cdot 6^p \end{pmatrix}$$

2) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é $p_A(x) = (x + 1)^2 (x - 2)$ (verifique). Ela é diagonalizável pois tomando $\lambda = -1$ (raiz dupla) obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e tomando $\lambda = 2$ obtemos o vetor próprio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ é tal que } M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

Segue daí que

$$A^p = M \begin{pmatrix} (-1)^p & & \\ & (-1)^p & \\ & & 2^p \end{pmatrix} M^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^p + 2(-1)^p & 2^p - (-1)^p & 2^p - (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & 2^p + 2(-1)^p & 2^p - (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & 2^p - (-1)^p & 2^p + 2(-1)^p \end{pmatrix}$$

5. APLICAÇÃO DA DIAGONALIZAÇÃO: SÉRIES DE MATRIZES (NOÇÕES)

Consideremos uma seqüência $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ de matrizes reais de tipo $m \times n$. Suponhamos $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$. Dizemos que a seqüência dada *converge* para a matriz $B = (b_{ij})$, do mesmo tipo que as A_k, se as seqüências de números reais

$$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \ldots, a_{ij}^{(k)}, \ldots$$

convergem para b_{ij} para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$.

Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

converge para a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pois $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ converge para 0, o mesmo acontecendo com a seqüência $0, 0, 0, \ldots$

Se a seqüência $A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, \ldots$ convergir, para a matriz B, então diremos que a *série infinita* $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots$ é *convergente* para B. A matriz B chama-se *soma* da série dada.

Pode-se provar (não o faremos aqui) que, sendo A de ordem n, a *série exponencial*

$$I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^p}{p!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

é convergente. A soma dessa série é denotada por e^A. É fácil perceber que o cálculo de e^A é em geral difícil. Mas se A for uma matriz quadrada diagonalizável então esse cálculo torna-se bem simples pois, sendo $A^p = MD^pM^{-1}$ com

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_2 \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

então

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M \cdot D^k \cdot M^{-1}}{k!} = M \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) M^{-1} =$$

$$= M\, e^D M^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

conforme já vimos anteriormente. Daí

$$e^A = M \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^6 \end{pmatrix} M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^6 \\ -e^2 & e^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(e^2 + e^6) & 4(e^6 - e^2) \\ -e^2 + e^6 & 2(e^2 + e^6) \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

*1. Calcular A^p nos seguintes casos

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

*2. Calcular e^A, utilizando as matrizes do exercício 1.

6. Lema de Gergoshin

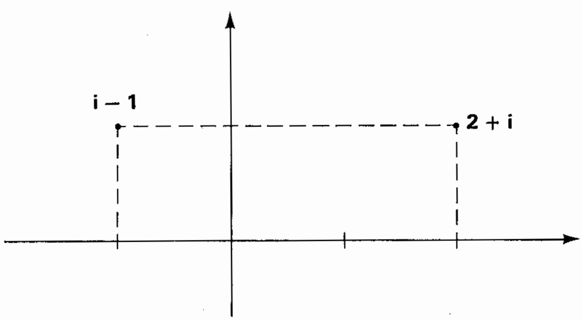
Seja A uma matriz complexa n x n. Chama-se vetor próprio de A toda matriz complexa X de tipo n x 1 tal que $AX = \lambda X$ para algum $\lambda \in C$. Neste caso λ é valor próprio de A associado ao vetor próprio X. Como no caso real prova-se que λ é valor próprio de A se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$ e portanto os valores próprios de A são as raízes do polinômio $p_A(t) = \det(A - tI_n)$. O conjunto dos valores próprios de A é o seu espectro.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -i & i \end{pmatrix} \in M_2(C)$. Então

$$p_A(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{pmatrix} 1+i-t & 2i \\ -i & i-t \end{pmatrix} =$$

$$= t^2 - (1 + 2i)t + (i - 3)$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 2 + i$ e $\lambda_2 = i - 1$. O espectro de A é representado pelos pontos seguintes



Um problema apresenta-se agora: pode-se prever onde se localiza no plano complexo o espectro de uma matriz, sem calcular explicitamente seus valores próprios?

Definição 6 – Seja z_0 um número complexo e $r > 0$. Chama-se disco de centro z_0 e raio r o subconjunto $D(z_0; r)$ do plano complexo definido por

$$D(z_0; r) = \{z \in C : |z - z_0| \leqslant r\}$$

Teorema – Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa de ordem n. Consideremos os n discos $D(a_{ii}, r_i)$ onde

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Então o espectro de A está contido na reunião destes n discos.

Prova – Tomemos um valor próprio λ e seja $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ um vetor próprio de λ. A igualdade $AX = \lambda X$ significa que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ou seja

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i - a_{ii} x_i = (\lambda - a_{ii}) x_i$$

Tomemos o índice i_0 tal que $|x_{i_0}| = \sup \{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$.

Então

$$|(\lambda - a_{i_0 i_0}) x_{i_0}| = |\lambda - a_{i_0 i_0}|\, |x_{i_0}| =$$

$$= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|\, |x_j| \leqslant \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \right] \sup |x_j| =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|\, |x_{i_0}| \text{ e daí } \quad |\lambda - a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$$

isto é $\lambda \in D(a_{i_0 i_0}; r_{i_0})$. ■

7. FORMA DE JORDAN

O teorema 1 deste capítulo fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador linear de um espaço vetorial de dimensão finita seja diagonalizável. O exemplo 3, item 2, é de um operador linear do $\mathbb{R}^4$ não-diagonalizável.

Neste item trataremos de uma forma de matriz bastante simples, embora nem tanto como as matrizes diagonais, porém com uma vantagem: toda matriz complexa é semelhante a uma delas. Trata-se da *forma canônica de Jordan.* Como resultado fundamental veremos (o que já foi dito em outras palavras) que todo operador linear de $\mathbb{C}^n$ pode ser representado, numa base conveniente, por uma forma de Jordan.

São chamadas matrizes de Jordan sobre o corpo $\mathbb{C}$, de ordem respectivamente 1, 2 e 3, as matrizes

$$(\lambda), \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$. A definição geral de matriz de Jordan é óbvia a partir desses casos. Reduzir uma matriz $n \times n$ à forma canônica de Jordan significa encontrar uma matriz

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}$$

onde os J_i são matrizes de Jordan, semelhante à matriz dada. Como já observamos, isso sempre é possível no caso das matrizes complexas. A demonstração desse fato, contudo, é bastante longa e árdua, razão pela qual não será vista *in totum* neste texto.

Mas, na parte de que trataremos, aparecerão com freqüência matrizes particionadas em blocos. Por exemplo, isso acontece na forma canônica de Jordan, onde os $J_1, J_2, \dots, J_n$ são blocos, o mesmo acontecendo com as matrizes nulas que nela figuram, indicadas simplesmente por 0. Se considerarmos, digamos, a matriz 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e fizermos

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = B, \quad (2 \quad 1) = C \quad \text{e} \quad (4) = D$$

então pode-se escrever

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Diz-se então que M foi particionada nos blocos A, B, C e D. Até aí trata-se simplesmente de notação. Mas se considerarmos duas matrizes P e Q, particionadas em blocos

$$P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nr} \end{pmatrix}$$

e se o número de colunas de cada A_{ij} for igual ao número de linhas de cada B_{jk}, então

$$PQ = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mr} \end{pmatrix}$$

onde $C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}$. O leitor, certamente já bastante familiarizado com produtos de matrizes, não terá dificuldades em perceber a validade desse resultado. Daí não nos alongarmos mais sobre o assunto.

Uma etapa de nosso trabalho no sentido da forma de Jordan passa pelas *matrizes triangulares superiores:* são as matrizes (α_{ij}) tais que $\alpha_{ij} = 0$ sempre que $i < j$. Por exemplo, as matrizes de Jordan. A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

porém, é triangular superior mas não é matriz de Jordan.

Lema 1 — Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear. Existe então uma matriz triangular cujos termos da diagonal principal são os valores próprios de T e que é a matriz de T em relação a uma conveniente base de $\mathbb{C}^n$.

Demonstração — (por indução sobre n)

Como toda matriz 1×1 é triangular, o teorema é obviamente verdadeiro para $n = 1$.

Seja $n > 1$ e consideremos o teorema verdadeiro para $n - 1$. Consideremos $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ conforme o enunciado e seja B a base canônica de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$. Como $p_T(t)$ é um polinômio complexo, T admite um valor próprio $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Se u_1 é um vetor próprio ao qual λ_1 está associado, seja $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de $\mathbb{C}^n$ obtida a partir de u_1. Então

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \lambda_1 u_1 \\ T(u_2) &= \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \ldots + \alpha_{n2}u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T(u_n) &= \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \ldots + \alpha_{nn}u_n \end{aligned}$$

e

$$(T)_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & U \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

onde U é $1 \times (n - 1)$, 0 é $(n - 1) \times 1$ e

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

é $(n - 1) \times (n - 1)$. Supondo $A = (T)_B$, então (prop. 2, cap. 5):

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & U \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

onde M é a matriz de mudança de base, de B para C.

Ora, como K é $(n - 1) \times (n - 1)$, K é matriz de um operador linear $S : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^{n-1}$ em relação, digamos, à base canônica de $\mathbb{C}^{n-1}$. Pela hipótese de indução existe uma base de $\mathbb{C}^{n-1}$ relativamente à qual a matriz de S é

$$(S) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \beta_{23} & \ldots & \beta_{2n} \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & \beta_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Se P indica a matriz de mudança da base canônica de $\mathbb{C}^{n-1}$ para esta última base, então

$$P^{-1} \cdot K \cdot P = (S)$$

Sejam agora

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

e $R = M \cdot Q$. Observando que Q é inversível (pois P o é) e

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

então

$$R^{-1} \cdot A \cdot R = Q^{-1} \cdot M^{-1} \cdot A \cdot M \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & U \\ 0 & K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & U \\ 0 & P^{-1} \cdot K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & U \cdot P \\ 0 & P^{-1} \cdot K \cdot P \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \beta_{23} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Devido ao item 5 do capítulo 5, esta matriz efetivamente é uma representação de T. Os valores próprios dessa matriz são, é claro, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Como A é semelhante a essa matriz e $A = (T)_B$, então $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios de T.

Nota — A representação matricial obtida para T no lema 1 pode ainda ser melhorada. Vejamos como, reproduzindo passo a passo a demonstração feita (ao invés de usar o recurso da indução), mas com alguns cuidados suplementares.

Conforme a demonstração, existe uma base C de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$(T)_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & U \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

Os valores próprios da matriz K são os restantes valores próprios de T, posto que K é semelhante a uma matriz triangular superior cujos termos da diagonal principal são exatamente esses valores. Repetindo para $S : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^{n-1}$ o raciocínio feito com T, porém com o cuidado de partir ainda de λ_1, caso este número seja também valor próprio de S, concluiremos analogamente que existe uma matriz inversível M_1, de ordem $n - 1$, tal que

$$M_1^{-1} \cdot K \cdot M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & U_1 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix}$$

Com a suposição de que λ_1 não é raiz simples de $p_T(t)$, chegamos então à existência de uma base de $\mathbb{C}^n$ em relação à qual

$$(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & U' & U'' \\ 0 & \lambda_1 & U_1 \\ 0 & 0 & K_1 \end{pmatrix}$$

Se levarmos esse raciocínio até esgotá-lo, o resultado será uma representação triangular superior de T mas de tal sorte que a diagonal principal obtida é formada pelos valores próprios na seguinte seqüência: $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_p$, onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

Um exemplo poderia ser o seguinte

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Observemos que, neste caso, L admite a seguinte partição em blocos:

$$L = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

onde T_{11} e T_{22} são triangulares superiores, a primeira com todos os elementos da diagonal principal iguais a λ_1 e a segunda com todos iguais a λ_2.

É claro que isso é geral e podemos afirmar que todo operador linear $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ admite uma representação matricial por blocos

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

onde cada A_{ii} é triangular superior, todos os elementos da diagonal principal de A_{ii} são iguais a λ_i (valor próprio de T), a multiplicidade algébrica de λ_i é igual à ordem de A_{ii} e $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$.

Lema 2 — Se $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador linear, então T admite uma representação matricial

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

onde cada A_i é triangular superior cujos termos da diagonal principal são iguais a λ_i (valor próprio de T), a ordem de A_i é a multiplicidade algébrica de λ_i e r é o número de valores próprios distintos entre si.

Demonstração

Observemos primeiro um exemplo. Digamos, o de um operador linear de $\mathbb{C}^4$ que admite, de acordo com a nota anterior, a seguinte representação matricial:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Nosso objetivo é ir efetuando mudanças de base que anulem os termos do bloco

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vejamos como anular o primeiro desses termos. Consideremos a matriz elementar

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde c (a determinar) ocupa a posição (1, 3), exatamente a do termo que se quer anular em A. A inversa de E é

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$E \cdot A \cdot E^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & c+2 & c+3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Assim, se escolhermos $c = -2$, conseguiremos o anulamento pretendido.

De um modo geral, se $A = (\alpha_{ij})$ já está na forma dada pela nota anterior, pode-se transformar em nulo qualquer bloco acima dos blocos diagonais, seguindo a idéia do exemplo dado. De fato, seja α_{rs} um elemento de um dos blocos a serem anulados (logo $r < s$). Seja E a matriz elementar que tem na posição (r, s) um elemento c (a ser determinado) e que nas demais coincide com a matriz idêntica. A inversa de E coincide com E salvo na posição (r, s) onde seu valor é $-c$. Se $E \cdot A \cdot E^{-1} = (\beta_{ij})$, então

$$\beta_{rs} = c\alpha_{ss} + \alpha_{rs} - c\alpha_{rr} = \alpha_{rs} + c(\alpha_{ss} - \alpha_{rr})$$

Isto porque o efeito de EA é somar à linha r-ésima de A sua linha s-ésima multiplicada por c, ao passo que $(EA)E^{-1}$ soma à coluna s-ésima de EA sua coluna r-ésima multiplicada por $-c$. Observemos, também, que a transformação $E \cdot A \cdot E^{-1}$ afeta apenas os termos α_{ij}, tais que $i > r$ e $j > s$.

É claro, então, que através de uma sucessão finita dessas transformações de semelhança se chega ao resultado pretendido, visto que em cada etapa onde $\alpha_{ss} \neq \alpha_{rr}$ pode-se anular β_{rs} fazendo $c = (-\alpha_{rs})(\alpha_{ss} - \alpha_{rr})^{-1}$.

O último resultado obtido já se aproxima razoavelmente da forma canônica de Jordan. Mas ainda faltam etapas difíceis, como o lema a seguir, cuja demonstração omitiremos. O leitor poderá encontrá-la na bibliografia em [13].

Lema 3 — Todo operador linear de $\mathbb{C}^n$ que admite uma representação matricial triangular superior, cujos termos da diagonal são iguais a $\lambda \in \mathbb{C}$, admite também uma forma canônica de Jordan

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}$$

onde na diagonal das matrizes de Jordan J_i figura sempre o elemento λ e r é a dimensão do subespaço próprio de λ.

Teorema 3 — Seja T um operador linear de $\mathbb{C}^n$. Então T admite uma forma canônica de Jordan

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{pmatrix}$$

onde: (i) cada J_i é uma matriz de Jordan com elementos da diagonal principal todos iguais a um certo valor próprio λ_i de T; (ii) um mesmo valor próprio λ_i de T pode figurar em mais de um bloco, porém o número de blocos com o mesmo λ_i é igual à dimensão do subespaço próprio de λ_i.

Demonstração

Pelo lema 2 existe uma base de $\mathbb{C}^n$ em relação à qual a matriz de T é

$$(T) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

onde os termos diagonais de $A_1, \dots, A_r$ são, respectivamente, os valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de T, a ordem de cada A_i é a multiplicidade algébrica de λ_i e r é o número de valores próprios, distintos entre si, de T. (Cada A_i é triangular.)

O lema 3, por sua vez, garante que, para cada A_i, existe uma matriz inversível P_i tal que

$$P_i \cdot A_i \cdot P_i^{-1} = \begin{pmatrix} J_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{is_i} \end{pmatrix}$$

onde $J_{i1}, \dots, J_{is_i}$ são matrizes de Jordan em cujas diagonais figuram apenas o valor próprio λ_i e s_i é a dimensão do subespaço próprio de λ_i.

Observamos que, se

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_r \end{pmatrix}$$

então P é inversível e

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_r^{-1} \end{pmatrix}$$

Portanto

$$P \cdot (T) \cdot P^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} P_1 \cdot A_1 \cdot P_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 \cdot A_2 \cdot P_2^{-1} & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & P_r \cdot A_r \cdot P_r^{-1} \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ 0 & J_{12} & \dots & 0 & & & \bigcirc & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & J_{1s_1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{r1} & 0 & \dots & 0 \\ & & \bigcirc & & & 0 & J_{r2} & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & \dots & J_{rs_r} \end{pmatrix}$$

Notemos que, para cada i, $1 \leqslant i \leqslant r$, na diagonal de cada um dos blocos J_{is_i} figura sempre o valor próprio λ_i. Logo pode haver blocos diferentes com o mesmo valor próprio na diagonal. Observemos ainda que, pelo lema 3, para cada i ($1 \leqslant i \leqslant r$), s_i é a dimensão do subespaço próprio de λ_i. Mas s_i é exatamente o número de blocos de Jordan onde aparece λ_i na diagonal, o que conclui a demonstração.

Exemplo

Consideremos o operador do exemplo 3, item 2, que já vimos não ser diagonalizável. Seus valores próprios são 2 e -3, dim $V(2) = 2$ e dim $V(-3) = 1$. Então há dois blocos de Jordan com termo diagonal 2 e um único com termo diagonal -3, na forma canônica de Jordan de T. Assim as possibilidades são, para essa forma:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

Procuremos a matriz P inversível, 4×4, tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$, onde J é uma das matrizes anteriores. Se chamarmos de P_1, P_2, P_3, P_4 as colunas de P, a igualdade $AP = PJ$ equivale, no primeiro caso, ao sistema:

$$\begin{cases} AP_1 = P\,(2, 0, 0, 0)^t = 2\,P_1 \\ AP_2 = P\,(0, 2, 0, 0)^t = 2\,P_2 \\ AP_3 = P\,(0, 0, -3, 0)^t = (-3)\,P_3 \\ AP_4 = P\,(0, 0, 1, -3)^t = P_3 - 3P_4 \end{cases}$$

Para as três primeiras equações desse sistema, o exercício 3 citado fornece uma solução linearmente independente: $P_1 = (1, 0, 0, 0)^t$, $P_2 = (0, 0, 1, 1)^t$ e $P_3 = (0, 0, 1, -4)^t$. A última equação equivale a $(A + 3I_4)P_4 = P_3$, onde I_4 é a matriz idêntica de ordem 4 e P_4 é a coluna incógnita. Temos de resolver, portanto, o sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 5y = 0 \\ 4z + t = 1 \\ 4z + t = -4 \end{cases}$$

que é incompatível. Logo devemos descartar a primeira das formas de Jordan exibidas.

Testemos agora a segunda forma de Jordan. Procedendo analogamente, obteremos o sistema

$$\begin{cases} Ap_1 = 2P_1 \\ AP_2 = P_1 + 2P_2 \\ AP_3 = 2P_3 \\ AP_4 = -3P_4 \end{cases}$$

Basta resolver $AP_2 = P_1 + 2\,P_2$ ou $(A - 2\,I_4)\,P_2 = P_1$. Ou seja:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} y = 1 \\ -z + t = 0 \\ 4z - 4t = 0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $(x, 1, z, z)$. Uma solução particular simples deste último sistema é $(0, 1, 0, 0)$. Assim a matriz

$$P = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

é tal que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(Deixamos os cálculos a cargo do leitor.) Dessa forma ficou eliminada a ambigüidade inicial e esta última matriz é a forma canônica de Jordan do operador dado.

Nota — Toda matriz real $n \times n$ é matriz de um operador linear $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, onde $\mathbb{C}^n$ é considerado espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Assim, se uma matriz real $n \times n$ tem todos os seus valores próprios em $\mathbb{R}$, então ela admite uma forma de Jordan que é a forma de Jordan do operador linear de $\mathbb{C}^n$ representado por essa matriz, por exemplo em relação à base canônica.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache todas as possíveis formas canônicas de Jordan de um operador linear T cujo polinômio característico é $P_T(t) = (t + 1)^2 \cdot (t - 2)^3$.

2. Ache a forma canônica de Jordan das seguintes matrizes

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. Seja J uma matriz de Jordan cujos termos da diagonal são iguais a λ.
a) Ache $p_J(t)$.
b) Ache a dimensão de $V(\lambda)$.

4. Prove que uma matriz complexa A é nilpotente ($A^n = 0$, para algum $n \geqslant 1$) se, e somente se, a forma canônica de Jordan dessa matriz também é nilpotente.

5. Seja A uma forma canônica de Jordan com r blocos de Jordan. Mostre que A admite exatamente r vetores próprios linearmente independentes.

6. A inversa de uma matriz de Jordan, caso exista, também é matriz de Jordan? Justifique.

7. Mostre que a inversa de uma matriz de Jordan inversível é triangular superior.

8. Seja A uma matriz complexa cujos autovalores são números reais. Mostre que A é semelhante a uma matriz real.

9. Ache a forma canônica de Jordan do operador diferencial (derivada) $D : P_3(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$.

10. Use a forma canônica de Jordan para provar que o determinante de T é o produto, levando em conta as multiplicidades, dos valores próprios de T.

CAPÍTULO 2

Curvas e Superfícies de Segundo Grau

1. AS CURVAS DE SEGUNDO GRAU

• Lembremos as seguintes equações da Geometria Analítica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \ y^2 = 2px.$$

É sabido que, para valores convenientes dos parâmetros a, b e p, elas representam respectivamente as seguintes secções cônicas: elipse (ou circunferência, se $a = b$), hipérbole e parábola. No aspecto algébrico todas têm em comum o fato de que os primeiros membros são formas quadráticas no $\mathbb{R}^2$. Mas é bom lembrar, ainda, que para chegar a essas equações, na forma em que as exibimos (canônica), sem dúvida bastante simples, é preciso trabalhar com sistemas de eixos ortogonais numa posição bastante favorável em relação às curvas.

Levando em conta tudo isso, é bastante razoável investigar a equação geral do segundo grau em duas variáveis

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (1)$$

e procurar saber se todas representam secções cônicas ou não. A resposta, salvo os casos degenerados (conjunto vazio, um ponto ou um par de retas), é afirmativa, como veremos. E uma classificação se faz possível a partir dos coeficientes da equação.

• Notemos primeiro que, considerando as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$f(x, y) = 0$ pode ser escrita

$$f(x, y) = X^t \cdot A \cdot X + 2(a_1 \ a_2) X + a = 0 \quad (2)$$

Mas, sendo A simétrica, existe uma matriz ortogonal P tal que

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são os valores próprios de A. Assim, considerando a mudança de base determinada por P, cuja equação é $X = P \cdot Y$, onde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

é a matriz das coordenadas de um vetor genérico do $\mathbb{R}^2$ em relação à nova base, a equação (2) fica:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= Y^t \cdot (P^t \cdot A \cdot P) \cdot Y + 2(a_1\ a_2) \cdot P \cdot Y + a = \\ &= (x_1\ y_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 2(a_1\ a_2) \cdot P \cdot Y + a = \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_1 + a = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

onde os novos coeficientes b_1 e b_2 são expressões em função de a_1, a_2 e dos termos de P.

Pode-se provar que a mudança da base determinada por P corresponde geometricamente a uma rotação — o que não será feito aqui por uma questão de brevidade.

Estudaremos a equação (3) considerando três casos: $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Nos dois primeiros essa equação pode ser colocada, por completamento de quadrados, do seguinte modo:

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + b = 0$$

onde

$$b = a - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$$

Assim, a translação no $\mathbb{R}^2$ definida por

$$x_2 = x_2 + \frac{b_1}{\lambda_1};\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

a transforma em

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + b = 0 \qquad (4)$$

que, formalmente, já é bem parecida com as formas canônicas de nossos dois exemplos iniciais.

Em suma, por meio de uma rotação seguida de uma translação, a equação (1) se transforma em (4), que lhe é equivalente.

(i) $\lambda_1\lambda_2 > 0$

Se $b = 0$, é evidente que só o ponto $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ satisfaz (4).

Se $b \neq 0$ e b e λ_1 têm mesmo sinal, digamos $\lambda_1, \lambda_2, b > 0$, considerando que

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = -b$$

onde o primeiro membro é $\geqslant 0$ e o segundo < 0, é claro que (4) representa o vazio neste caso.

Se $b \neq 0$ e os sinais de b e λ_1 são contrários, colocando (4) na forma

$$\frac{x_2^2}{\left(-\dfrac{b}{\lambda_1}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(-\dfrac{b}{\lambda_2}\right)} = 1$$

vemos que se trata de uma elipse

(ii) $\lambda_1\lambda_2 < 0$

Se $b = 0$, supondo por exemplo $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, o primeiro membro de (4) pode ser se fatorado como diferença de dois quadrados, assim:

$$(\sqrt{\lambda_1}x_2 + \sqrt{-\lambda_2}y_2) \cdot (\sqrt{\lambda_1}x_2 - \sqrt{-\lambda_2}y_2) = 0$$

que é a equação de um par de retas.

Se $b \neq 0$, então (4) representa uma hipérbole. De fato, supondo por exemplo $b < 0$, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, essa equação pode ser escrita do seguinte modo

$$\frac{x_2^2}{\left(-\dfrac{b}{\lambda_1}\right)} - \frac{y_2^2}{\left(\dfrac{b}{\lambda_2}\right)} = 1$$

(iii) $\lambda_1\lambda_2 = 0$

Suponhamos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (mostre que não se pode ter $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). A equação (3) fica então

$$\lambda_2 y_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_2 + a = 0$$

Se $b_1 \neq 0$, por completamento de quadrados obtemos

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1\left(x_1 + \frac{a}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}\right) = 0$$

Considerando a translação definida por

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}; \qquad y_2 = y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

chegamos a

$$\lambda_2 y_2^2 + 2b_1 x_2 = 0 \quad (5)$$

que, por serem λ_2 e b_1 não nulos, obviamente representa uma parábola.

No caso $b_1 = 0$ a equação (3) se reduz a

$$\lambda_2 y_1^2 + 2b_2 y_2 + a = 0$$

que, por completamento de quadrados, pode ser expressa por

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + a - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

A translação dada por

$$x_2 = x_1; \qquad y_2 = y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

a reduz finalmente a

$$\lambda_2 y_2^2 + b = 0 \qquad (6)$$

onde

$$b = a - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$$

É claro que $\lambda_2 y_2^2 + b = 0$ é o vazio se $\lambda_2 b > 0$. Se $\lambda_2 b < 0$, como

$$y_2^2 + \frac{b}{\lambda_2} = \left(y_2 + \sqrt{-\frac{b}{\lambda_2}}\right) \cdot \left(y_2 - \sqrt{-\frac{b}{\lambda_2}}\right)$$

então (6) representa duas retas paralelas. E se $b = 0$, (6) se reduz a $y_2^2 = 0$, que é a equação de um par de retas coincidentes.

• Não há dúvida de que o procedimento anterior não é muito prático. Veremos agora uma maneira mais simples de encaminhar a resolução do problema.

Voltando à equação (1) e à matriz A, observemos que seu polinômio característico é

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - t \end{vmatrix} = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

Se fizermos $a_{11} + a_{22} = s$ e $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta$, então $P_A(t) = t^2 - st + \delta$. Ora, como matrizes semelhantes têm mesmo polinômio característico, então a rotação que transforma (1) em (3) não altera s e δ. Mais precisamente: $s = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\delta = \lambda_1\lambda_2$. Além disso, se numa equação qualquer do segundo grau em duas variáveis x e y fizermos uma translação $x_1 = x + k$ e $y_1 = y + k$ e calcularmos, na nova equação em x_1 e y_1, os valores correspondentes de s e δ, obteremos os mesmos resultados que na primeira. A verificação desse fato não oferece nenhum embaraço. É por isso que se diz que s e δ são *invariantes* de uma equação do segundo grau em x e y.

Mas há um outro invariante associado a essa equação e que interessa ao nosso estudo. É o determinante de terceira ordem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

Para não alongar muito o assunto com cálculos, deixamos de verificar esse fato.

Voltando à classificação, lembremos que nos casos (i) e (ii) estudados, a equação (1) se transforma, mediante uma rotação, seguida de uma translação, em $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y^2 + b = 0$. Considerando a invariância de s e δ, podemos garantir que $\delta = \lambda_1\lambda_2$ e

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b\lambda_1\lambda_2 = b\delta$$

Logo, a equação (4), referente a estes casos, fica:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \qquad (7)$$

Com esses novos dados, os casos estudados passam a ser:

(i) $\delta > 0$

Se $\Delta = 0$, (7) traduz apenas um ponto.

Como $b = \frac{\Delta}{\delta}$ e $\delta > 0$, então b e Δ têm o mesmo sinal. Além disso, sendo $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$, os sinais de λ_1 e λ_2 são iguais, do que resulta que $s = \lambda_1 + \lambda_2$ tem mesmo sinal que λ_1. Logo, dizer que b e λ_1 têm mesmo sinal equivale a dizer que Δ e s têm mesmo sinal. Conseqüentemente, b e λ_1 têm sinais contrários se, e somente se, Δ e s têm sinais contrários. Logo:

$s\Delta > 0$ implica que $f(x, y) = 0$ representa o vazio;

$s\Delta < 0$ implica que (1) é a equação de uma elipse (ou circunferência).

(ii) $\delta < 0$

De $\frac{\Delta}{\delta} = b$ segue que $\Delta = 0$ se, e somente se, $b = 0$.

Logo, se $b = 0$, isto é, se $\Delta = 0$, $f(x, y) = 0$ representa um par de retas concorrentes.

Se $b \neq 0$, isto é, se $\Delta \neq 0$, a curva é uma hipérbole.

(iii) $\delta = 0$

O caso de uma parábola ($\lambda_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$) é dado por $\lambda_2 y_2^2 + 2b_1 x_2 = 0$. Logo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\, b_1^2\lambda_2$$

Como então: $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_2, b_1 \neq 0$, podemos concluir que quando

$$\delta = 0 \text{ e } \Delta \neq 0$$

a equação (1) representa uma parábola.

É fácil concluir que o caso restante (duas retas paralelas ou duas retas coincidentes) corresponde a $\delta = \Delta = 0$.

O quadro abaixo resume o estudo feito.

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$s\,\Delta < 0$: elipse
		$s\,\Delta > 0$: vazio
	$\Delta = 0$	Um ponto
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hipérbole
	$\Delta = 0$	Duas retas concorrentes
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	Parábola
	$\Delta = 0$	Duas retas paralelas ou Duas retas coincidentes

Exemplo 1

Classificar a curva dada por

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

e dar sua equação canônica.

Como

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

trata-se de uma parábola.

A equação característica da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t(t-2)$$

e portanto $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Os vetores próprios linearmente independentes associados a λ_1 e λ_2 se obtêm resolvendo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Por exemplo os vetores $(1, -1)$ e $(1, 1)$. Ortonormalizando esses vetores obtém-se a matriz ortogonal P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Assim os coeficientes b_1 e b_2 da equação (3) se obtêm calculando

$$2(-1 \ \ 2) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = (-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Logo, $b_1 = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$ e a equação canônica da parábola é (conforme (5)):

$$2y_2^2 - 3\sqrt{2}\, x_2 = 0$$

ou

$$y_2^2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, x_2.$$

Exemplo 2

Mesmo exercício, relativamente à curva

$$3x^2 + 4xy - 4x - 6y + 2 = 0$$

Neste caso

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{e} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

e portanto a curva é uma hipérbole. Os valores próprios de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. A matriz P de rotação neste caso é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

Neste caso $b_1 = -7\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $b_2 = 4\frac{\sqrt{5}}{5}$. Daí $b = \frac{11}{4}$ e a equação canônica da hipérbole é

$$\frac{y_2^2}{\frac{11}{4}} - \frac{x_2^2}{\frac{11}{16}} = 1$$

2. AS SUPERFÍCIES DE SEGUNDO GRAU

Consideremos agora a equação geral do segundo grau nas variáveis x, y e z:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \qquad (1') \end{aligned}$$

Semelhantemente ao que foi feito no item anterior, se considerarmos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

podemos escrever

$$f(x, y, z) = X^t \cdot A \cdot X + 2(a_1\ a_2\ a_3)\, X + a = 0$$

Sendo A simétrica, pode-se determinar uma matriz ortogonal P tal que $P^t \cdot A \cdot P = D$, onde D é a matriz diagonal dos valores próprios λ_1, λ_2, λ_3 de A. Considerando a mudança de base que se traduz, em termos de coordenadas, por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$f(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_1 + 2b_3 z_1 + a = 0 \qquad (2')$$

Consideremos os seguintes casos quanto à existência de valores próprios nulos:

(i) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$

Esta hipótese permite considerar a translação definida por

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{\lambda_1},\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{\lambda_2},\ z_2 = z_1 + \frac{b_3}{\lambda_3}$$

que transforma (2') em

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = -b \qquad (3')$$

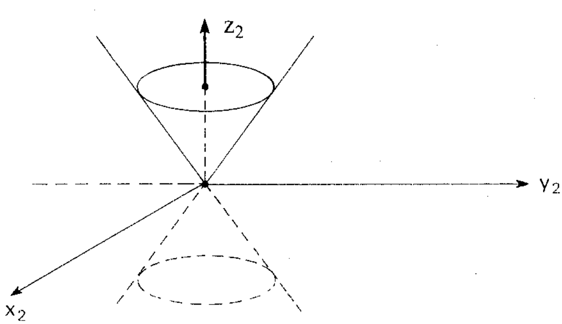
onde o segundo membro pode sempre ser considerado maior que ou igual a zero.

(a) $b = 0$ e todos os λ_i têm mesmo sinal: um ponto

(b) $b = 0$ e, por exemplo, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. A equação (3') pode ser reduzida a

$$\frac{x_2^2}{r^2} + \frac{y_2^2}{s^2} - \frac{z_2^2}{t^2} = 0$$

Como para cada secção paralela ao plano x_2y_2 (fazendo z_2 constante) o resultado é um ponto ou uma circunferência (quando $z_2 \neq 0$)* e, para cada secção paralela ao plano x_2z_2 ou y_2z_2, o resultado é um par de retas ($y_2 = 0$ ou $x_2 = 0$) ou uma hipérbole, então trata-se de um cone

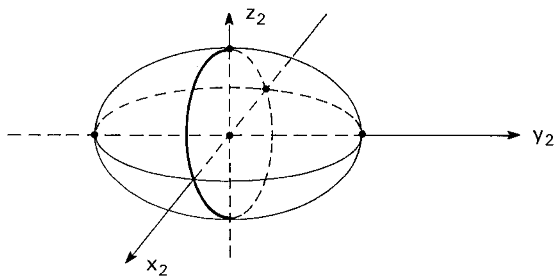


* Ou elipse.

(c) $b < 0$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. A equação (3') pode ser reescrita

$$\frac{x_2^2}{r^2} + \frac{y_2^2}{s^2} + \frac{z_2^2}{t^2} = 1$$

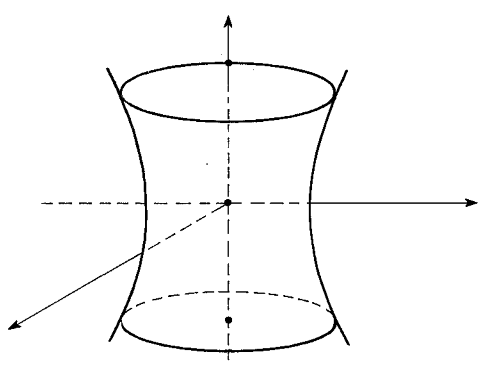
e portanto representa um elipsóide (uma superfície esférica se $r = s = t$).



(d) $b < 0$; $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. A equação (3') pode ser transformada, então, em

$$\frac{x_2^2}{r^2} + \frac{y_2^2}{s^2} - \frac{z_2^2}{t^2} = 1$$

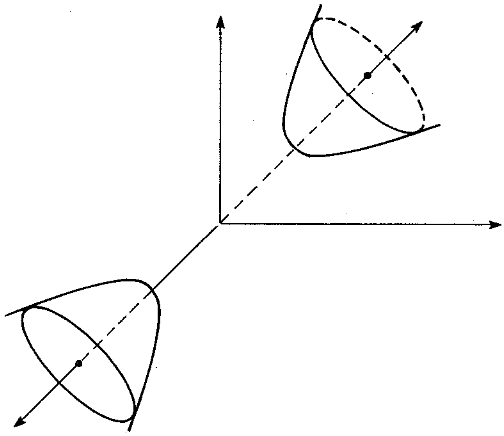
e portanto representa um hiperbolóide de uma folha



(e) $b < 0$; $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2, \lambda_3 < 0$. Então (3') pode ser expressa assim

$$\frac{x_2^2}{r^2} - \frac{y_2^2}{s^2} - \frac{z_2^2}{t^2} = 1$$

que é a equação de um hiperbolóide de duas folhas.



(f) $b < 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$: conjunto vazio.

(ii) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$

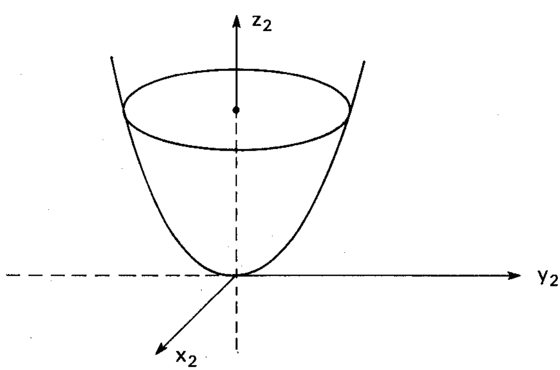
Exemplo — $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4z + 3 = 0$
Completando quadrados em x e em y obtemos

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4z + 1 = 0$$

Fazendo a translação: $x - 1 = x_1$; $y - 1 = y_1$; $z - \dfrac{1}{4} = z_1$ chegamos a

$$f(x_1, y_1, z_1) = x_1^2 + y_1^2 - 4z_1 = 0$$

que é a equação de um parabolóide elíptico (circular)



(iii) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Exemplo — $f(x, y, z) = 2x^2 - 8x - 4y - 2z + 2 = 0$
Completando quadrados em x chegamos a

$$f(x, y, z) = 2(x - 2)^2 - 4y - 2z - 6 = 0$$

Por meio da translação: $x_1 = x - 2,\ y_1 = y,\ z_1 = z$

obtemos finalmente

$$f(x_1, y_1, z_1) = 2x_1^2 - 4y_1 - 2z_1 - 6 = 0$$

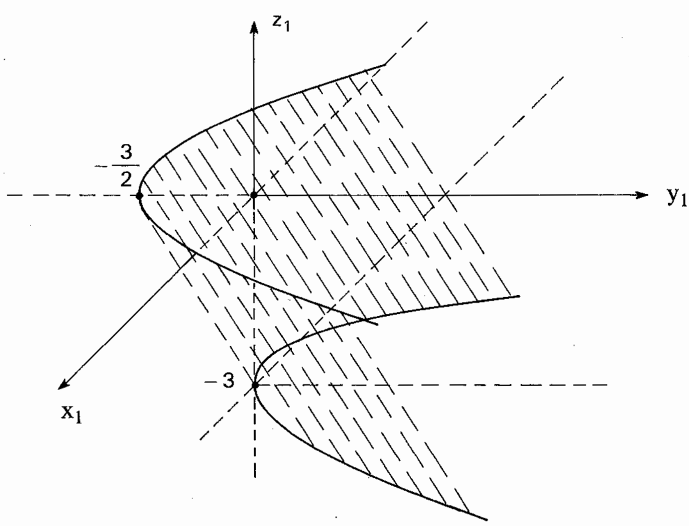
Observemos o seguinte: para cada valor de z_1 fixado a equação é a de uma parábola num plano paralelo a x_1y_1; como

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2} - \frac{z_1}{2} - \frac{3}{2}$$

os vértices dessas parábolas são os pontos

$$\left(0,\ -\frac{z_1}{2} - \frac{3}{2},\ z\right) = z\left(0,\ -\frac{1}{2},\ 1\right) + \left(0,\ -\frac{3}{2},\ 0\right)$$

que, portanto, estão alinhados. Então, a figura correspondente à equação dada é um cilindro parabólico cujo esboço da figura está a seguir.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Identifique as seguintes curvas de segundo grau:

   a) $2xy + 3x - y + 1 = 0$

   b) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

   c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$

   d) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 19x - 17y + 11 = 0$

   e) $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$

   f) $x^2 + y^2 + xy - x + 1 = 0$

2. Ache as equações canônicas de:

   a) $x^2 + 4xy - 2y^2 = 6$

   b) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$

   c) $x^2 + y^2 - 2xy + x = 1$

3. Identifique as seguintes superfícies de segundo grau:

   a) $11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4xz - 12 = 0$

   b) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz + 1 = 0$

   c) $9x^2 + 12y^2 + 9z^2 - 6xy - 6yz = 1$

   d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$

   e) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xz + x = 0$

4. Discutir, em termos dos valores de λ, as cônicas de equação:

   a) $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

   b) $x^2 - 2xy + \lambda y^2 + 2x = 4$

5. Discutir, em termos dos possíveis valores de λ, as superfícies de segundo grau:

   a) $x^2 + \lambda y^2 + z^2 - 2xy = 2$

   b) $x^2 - \lambda y^2 - 2\lambda z^2 - 2y = 0$

CAPÍTULO 3

Polinômios de Lagrange

1. VALORES NUMÉRICOS

Conforme vimos no Capítulo 2, o conjunto P(IR) dos polinômios reais:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \; (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \geqslant 0)$$

constitui um espaço vetorial sobre IR que não é finitamente gerado. Nesse espaço vetorial, o conjunto de polinômios $\{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$ é infinito e *linearmente independente* no seguinte sentido: todo subconjunto finito dele é L.I. (definição 1 do capítulo III). No entanto, conforme também já vimos, o conjunto $P_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a n, mais o polinômio nulo (n sendo um número natural fixado), é um espaço vetorial sobre IR de dimensão $n + 1$.

Definição 1 – Seja t_0 um número real fixado e $f(t)$ um polinômio. Se substituirmos a variável t pelo número t_0, obtemos $f(t_0)$, um número real, que se chama *valor numérico* do polinômio $f(t)$ no ponto t_0. A aplicação que associa ao polinômio $f(t)$ o número $f(t_0)$ é uma transformação linear de P(IR) em IR, ou seja, uma forma linear em P(IR) pois

$$(f + g)(t_0) = f(t_0) + g(t_0) \quad \text{e} \quad (\lambda f)(t_0) = \lambda f(t_0)$$

para quaisquer polinômio $f(t)$ e $g(t)$ e qualquer número real λ. Essa transformação linear tem como núcleo o conjunto dos polinômios $f(t)$ tais que $f(t_0) = 0$, ou seja, os polinômios divisíveis por $t - t_0$.

A importância dessa aplicação linear resulta do teorema a seguir.

Teorema 1 – Seja $f(t)$ um polinômio de grau $\leqslant r$ e suponhamos conhecidos $r + 1$ valores numéricos $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_r)$ sendo $t_i \neq t_j$ se $i \neq j$. Então $f(t)$ está perfeitamente determinado (isto é, seus coeficientes estão determinados).

Demonstração – Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_r t^r$ onde os coeficientes devem ser determinados. Então, por hipótese

$$
\begin{gathered}
f(t_0) = a_0 + a_1 t_0 + \ldots + a_r t_0^r \\
f(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + \ldots + a_r t_1^r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(t_r) = a_0 + a_1 t_r + \ldots + a_r t_r^r
\end{gathered}
$$

Obtivemos assim um sistema linear nas incógnitas:

$$a_0, a_1, \ldots, a_r$$

que é compatível determinado pois a matriz dos coeficientes é:

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^r \\
1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^r \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & t_r & t_r^2 & \ldots & t_r^r
\end{pmatrix}
$$

e seu determinante é diferente de zero, valendo:

$$\det(A) = \prod_{i<j} (t_i - t_j). \blacksquare$$

Exemplo — Determine o polinômio de grau $\leqslant 2$ cujos valores numéricos conhecidos são $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$.

Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$; logo

$$
\begin{aligned}
1 &= f(0) = a_0 \\
2 &= f(1) = a_0 + a_1 + a_2 \\
3 &= f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2
\end{aligned}
$$

e daí $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $f(t) = 1 + t$.

2. POLINÔMIOS DE LAGRANGE

Conforme já vimos na primeira parte do livro a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ é $\{1, t, t^2\}$. Por outro lado acabamos de mostrar que se os valores $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ de um polinômio $f(t)$ de $P_2(\mathbb{R})$ forem conhecidos, poderemos achar esse polinômio, através do sistema linear:

$$
\begin{cases}
f(0) = a_0 \\
f(1) = a_0 + a_1 + a_2 \\
f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2
\end{cases}
$$

Mas, nas vezes em que houver necessidade de repetir seguidamente o cálculo de coeficientes, o procedimento acima se torna muito demorado. Vamos, a seguir, construir uma nova base de $P_2(\mathbb{R})$ que facilita muito esses cálculos.

Consideremos três polinômios $L_1(t)$, $L_2(t)$ e $L_3(t)$ que tenham os seguintes valores numéricos:

$$\begin{array}{lll} L_1(0) = 1 & L_1(1) = 0 & L_1(2) = 0 \\ L_2(0) = 0 & L_2(1) = 1 & L_2(2) = 0 \\ L_3(0) = 0 & L_3(1) = 0 & L_3(2) = 1 \end{array}$$

O método explicado no parágrafo 1 nos levará ao seguinte resultado (omitiremos os cálculos):

$$L_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1$$

$$L_2(t) = -t(t-2) = -t^2 + 2t$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2}t(t-1) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

O conjunto $\{L_1(t), L_2(t), L_3(t)\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$ o que é fácil verificar e deixamos como exercício. Se $f(t)$ é um polinômio de grau $\leqslant 2$, então $f(t)$ é combinação linear de $L_1(t)$, $L_2(t)$ e $L_3(t)$:

$$f(t) = aL_1(t) + bL_2(t) + cL_3(t).$$

Agora, quanto valem os coeficientes a, b e c? Fazendo sucessivamente $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$ obtemos:

$$f(0) = aL_1(0) + bL_2(0) + cL_3(0) = a$$

$$f(1) = aL_1(1) + bL_2(1) + cL_3(1) = b$$

$$f(2) = aL_1(2) + bL_2(2) + cL_3(2) = c$$

e portanto $f(t) = f(0)L_1(t) + f(1)L_2(t) + f(2)L_3(t)$, isto é, $f(t)$ é combinação linear de $L_1(t)$, $L_2(t)$ e $L_3(t)$ com coeficientes iguais aos valores numéricos $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

Exemplo — Determinar $f(t)$ sabendo que $f(0) = 2$, $f(1) = 4$ e $f(2) = -6$.

Solução

$$f(t) = 2\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1\right) + 4(-t^2 + 2t) - 6\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\right) =$$

$$= -6t^2 + 8t + 2.$$

É óbvio então que a base $\{L_1(t), L_2(t), L_3(t)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é muito mais interessante do que a base canônica quando queremos determinar um polinômio a partir dos seus valores numéricos.

Os polinômios $L_1(t)$, $L_2(t)$ e $L_3(t)$ das considerações acima são chamados *polinômios de interpolação de Lagrange* determinados por 0, 1 e 2.

Nota: Se tomarmos outros três pontos, em vez de 0, 1 e 2, obteremos outros polinômios de Lagrange. Por exemplo, para os pontos $-1, 0$ e 1 os polinômios de Lagrange são:

$$L_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t, \; L_2(t) = -t^2 + 1 \quad \text{e} \quad L_3(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

Aplicação

Uma aplicação interessante das fórmulas desenvolvidas aqui é a seguinte. Suponhamos dado um polinômio $f(t)$ de grau $\leqslant 2$ e que desejamos calcular a área compreendida entre o gráfico desse polinômio e o eixo x, entre os pontos 0 e 2.

Como sabemos essa área é dada por: $A = \int_0^2 f(t)dt$. Mas

$f(t) = f(0)L_1(t) + f(1)L_2(t) + f(2)L_3(t)$. Logo:

$$A = \int_0^2 f(t)dt = f(0)\int_0^2 L_1(t)dt + f(1)\int_0^2 L_2(t)dt + f(2)\int_0^2 L_3(t)dt =$$

$$= f(0)\left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + t\right]_0^2 + f(1)\left[-\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^2 + f(2)\left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right]_0^2 =$$

$$= f(0)\left[\frac{8}{6} - 3 + 2\right] + f(1)\left[-\frac{8}{3} + 4\right] + f(2)\left[\frac{8}{6} - 1\right] =$$

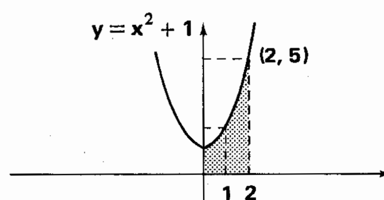
$$= \frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2) = \frac{1}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2)).$$

A área pode então ser obtida diretamente através dos valores numéricos de $f(t)$ para $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$. Por exemplo, se $f(t) = t^2 + 1$, teremos:

$$A = \frac{1}{3}(1 + 8 + 5) = \frac{14}{3}.$$

Observação

A fórmula anterior é a base para o método de Simpson do Cálculo Numérico.



Depois de termos introduzidos os três polinômios de Lagrange correspondentes a três valores da variável t, vamos generalizar os resultados obtidos para o caso de n polinômios e n valores.

Sejam $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $n + 1$ números reais, dois a dois distintos. Conforme o teorema 1 existem polinômios $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_n(T)$ de grau $\leqslant n$ e tais que:

$$\begin{array}{llll} L_0(t_0) = 1 & L_0(t_1) = 0 & \ldots & L_0(t_n) = 0 \\ L_1(t_0) = 0 & L_1(t_1) = 1 & \ldots & L_1(t_n) = 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ L_n(t_0) = 0 & L_n(t_1) = 0 & \ldots & L_n(t_n) = 1 \end{array}$$

ou, resumidamente, $L_i(t_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Teorema 2 – Os polinômios $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_n(t)$ formam uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

Demonstração – Como são $n + 1$ polinômios e $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$, basta provar que eles formam um conjunto L.I. De fato, supondo

$$a_0 L_0(t) + a_1 L_1(t) + \ldots + a_n L_n(t) = 0$$

teremos em t_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$:

$$a_0 L_0(t_j) + a_1 L_1(tj) + \ldots + a_n L_n(t_j) = 0$$

ou seja:

$$a_0 \delta_{0j} + a_1 \delta_{1j} + \ldots + a_n \delta_{nj} = 0$$

e daí resta $a_j = 0$ pois $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. ■

Definição 2 – Os polinômios $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_n(t)$ das considerações acima (que formam uma base de $P_n(\mathbb{R})$) são chamados polinômios de Lagrange correspondente à seqüência de pontos:

$$(t_0, t_1, \ldots, t_n).$$

Vejamos como são esses polinômios. Por exemplo $L_0(t)$ deve ser da forma:

$$L_0(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n)b$$

onde b é determinado pela condição $L_0(t_0) = 1$. O resultado obtido será:

$$L_0(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) \ldots (t_0 - t_n)}$$

Analogamente teremos:

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(Verifique que $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.)

Agora a seguinte questão: como exprimir um polinômio como combinação linear dos polinômios de Lagrange? Seja $f(t) = a_0L_0(t) + a_1L_1(t) + \ldots + a_nL_n(t)$ onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais a serem determinados. Mas, fazendo $t = t_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$,

$$f(t_j) = a_0L_0(t_j) + a_1L_1(t_j) + \ldots + a_nL_n(t_j)$$

ou seja, $f(t_j) = a_j$. Assim chegamos à fórmula:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k)L_k(t).$$

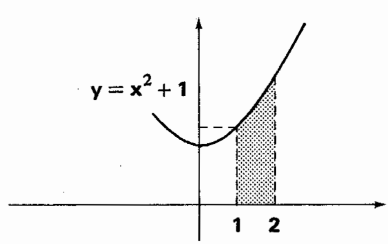
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar os polinômios de Lagrange correspondentes aos valores seguintes:
   a) $(t_0, t_1, t_2) = (0, 1, 2)$;
   b) $(t_0, t_1, t_2) = (1, 2, 3)$;
   c) $(t_0, t_1, t_2) = (4, 5, 6)$.

2. Exprimir o polinômio $f(t)$ como combinação linear dos polinômios de Lagrange do exercício 1 nos seguintes casos:
   a) $f(t) = t^2$;
   b) $f(t) = t^2 + t + 1$;
   c) $f(t) = 1$.

3. Determinar os polinômios de Lagrange correspondentes aos valores $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) = (0, 1, 2, 3, 4)$ e exprimir o polinômio $f(t) = t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ como combinação linear deles. Repetir o exercício com $f(t) = 3t^4 - 2t^3 + t^2 - t + 5$.

4. Calcular a área indicada no desenho utilizando os polinômios de Lagrange (veja o exercício 1 – b). Repetir o exercício, tomando o polinômio $f(t) = 3t^2 + t + 1$.



*5. Sejam $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_n(t)$ os polinômios de Lagrange correspondentes a $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Provar que $L_0(t) + L_1(t) + \ldots + L_n(t) = 1$ e que $t = t_0L_0(t) + t_1L_1(t) + \ldots + t_nL_n(t)$.

6. Sejam a, b, c, d números reais distintos dois a dois. Provar que existe um polinômio de grau $\leqslant 2$ tal que:

$$f(-1) = a,\ f(1) = b,\ f(3) = c \text{ e } f(0) = d$$

se, e somente se, $3a + 6b - c - 8d = 0$.

7. Dado um polinômio $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_mt^m$ e uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, indica-se por $f(A)$ a matriz $a_0I_n + a_1A + \ldots + a_mA^m \in M_n(\mathbb{R})$. Calcular $f(A)$ nos seguintes casos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f(t) = t + 1$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f(t) = t^2 + t + 2$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f(t) = 3t^2 + t - 1$.

8. Sejam $f(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Provar que $f(A) = o$;

b) Sejam $L_1(t)$, $L_2(t)$ e $L_3(t)$ os polinômios de Lagrange correspondentes a (1, 2, 3) (ver exercício 1) e sejam as matrizes $E_i = L_i(A)$ $(i = 1, 2, 3)$. Calcular E_1, E_2 e E_3;

c) Provar que $E_1 + E_2 + E_3 = I_4$, $E_i^2 = E_i$ $(i = 1, 2, 3)$ e $E_iE_j = o$ se $i \neq j$;

d) Mostrar que $A = E_1 + 2E_2 + 3E_3$.

9. Seja $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ uma seqüência de números reais dois a dois distintos e $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ uma seqüência qualquer de números reais. Provar que existe um, e apenas um, polinômio $f(t)$, de grau $\leqslant n$, tal que $f(t_i) = s_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Sugestão: use os polinômios de Lagrange.

10. Achar o polinômio de grau $\leqslant 3$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 5$ e $f(2) = 6$, utilizando o exercício anterior.

CAPÍTULO 4

Seqüências Recorrentes Lineares

1. SEQÜÊNCIAS RECORRENTES

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. Uma função $\varphi: N \to \mathbb{R}$ chama-se *seqüência* (de números reais) e em geral indicaremos, uma seqüência por seus valores

$$\varphi = (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots)$$

Dadas duas seqüências $\varphi: N \to \mathbb{R}$ e $\sigma: N \to \mathbb{R}$, chama-se *soma* de φ e σ a seqüência $\varphi + \sigma: N \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(\varphi + \sigma)(n) = \varphi(n) + \sigma(n), \ \forall n \in N.$$

Sendo φ uma seqüência e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\varphi$ é a seqüência dada por $(\lambda\varphi)(n) = \lambda\varphi(n)$. Assim o conjunto $\mathbb{R}^\infty$ de todas as seqüências de números reais está munido de uma adição e uma multiplicação por escalares e o leitor poderá verificar sem dificuldades que ele é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. No entanto $\mathbb{R}^\infty$ não é um espaço de dimensão finita, de modo que a ele não se aplicam os resultados obtidos nos capítulos II e III da primeira parte do livro. Mas já exploramos profundamente os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, cuja dimensão é n, e vale notar que $\mathbb{R}^n$ é isomorfo ao sub-espaço de $\mathbb{R}^\infty$ formado pelas seqüências da forma:

$$\varphi = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots),$$

isto é, aquelas cujos termos são nulos a partir do índice n (inclusive). O isomorfismo é a transformação dada por:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \longmapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$$

Portanto o $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ desde que se identifique cada $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ com $(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$. Neste capítulo vamos estudar outros sub-espaços de $\mathbb{R}^\infty$, também de dimensão finita, e importantes do ponto de vista das aplicações.

Definição 1 — Uma seqüência $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ chama-se *seqüência recorrente linear* de ordem 2 se existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ tais que $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ para todo $n \geqslant 1$. Mais geralmente, se $x_n = a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_{n-p}x_{n-p}$ verifica-se para todo $n \geqslant p$ e $a_{n-p} \neq 0$, a seqüência $(x_0, \ldots, x_n, \ldots)$

é recorrente linear de ordem p. Os números $a_{n-1}, \ldots, a_{n-p}$ são os coeficientes da relação de recorrência.

Exemplos

1) As progressões aritméticas são seqüências recorrentes lineares de ordem 2, pois $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$ para todo $n \geqslant 1$. Os coeficientes são $a = 2$ e $b = -1$.

2) As progressões geométricas são recorrentes lineares de ordem 1, pois $x_{n+1} = qx_n$.

3) As seqüências de Fibonacci (dadas por $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \forall n \geqslant 1$) são recorrentes lineares de ordem 2 com coeficientes $a = 1$ e $b = 1$.

Teorema 1 – Fixando $a, b \in \mathbb{R}$, o conjunto de todas as seqüências recorrentes lineares de ordem 2 com coeficientes a e b é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$.

Demonstração – Seja S o conjunto das seqüências recorrentes lineares de ordem 2 com coeficientes a e b e consideremos $(x_0, x_1, \ldots)$ e $(y_0, y_1, \ldots)$ em S e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned} & x_{n+1} + y_{n+1} = (ax_n + bx_{n-1}) + (ay_n + by_{n-1}) = \\ & = a(x_n + y_n) + b(x_{n-1} + y_{n-1}) \text{ e} \\ & \alpha x_{n+1} = \alpha(ax_n + bx_{n-1}) = a(\alpha x_n) + b(\alpha x_{n-1}) \end{aligned}$$

$\forall n \geqslant 1$, o que vem provar que S é sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$.

Deixamos ao leitor a tarefa de enunciar e provar o teorema 1 para seqüências de ordem p. ■

Um problema que se apresenta agora é o de calcular uma base de S. Antes de resolver o caso geral, vejamos dois exemplos, um com ordem 2 e outro com ordem 1.

Exemplo 1 – Tomemos o sub-espaço das progressões aritméticas definidas por $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$. Vamos calcular os termos $x_2, x_3, \ldots$ em função de x_0 e x_1. Temos

$$x_2 = 2x_1 - x_0,\ x_3 = 2x_2 - x_1 = 2(2x_1 - x_0) - x_1 = 3x_1 - 2x_0,$$
$$x_4 = 2x_3 - x_2 = 2(3x_1 - 2x_0) - (2x_1 - x_0) = 4x_1 - 3x_0.$$

Por indução teremos a fórmula

$$x_n = nx_1 - (n-1)x_0.$$

A seqüência é, então:

$$= (x_0, x_1, 2x_1 - x_0, 3x_1 - 2x_0, 4x_1 - 3x_0, \ldots, nx_1 - (n-1)x_0, \ldots) =$$
$$= (x_0, 0, -x_0, -2x_0, -3x_0, \ldots, -(n-1)x_0, \ldots) + (0, x_1, 2x_1, 3x_1, \ldots$$
$$nx_1, \ldots) = x_0(1, 0, -1, -2, -3, \ldots, -(n-1), \ldots) + x_1(0, 1, 2, 3,$$
$$\ldots, n, \ldots).$$

Observemos atentamente os cálculos acima. Em primeiro lugar, x_0 e x_1 determinam univocamente o termo x_n por meio de:

$$x_n = nx_1 - (n-1)x_0.$$

Bastam portanto os dois primeiros termos para determinar toda a seqüência. Em seguida, usando a igualdade acima foi possível decompor uma seqüência $(x_0, x_1, \ldots)$ como combinação linear, com coeficientes x_0 e x_1, das seqüências:

$$\sigma_1 = (1, 0, -1, -2, -3, \ldots, -(n-1), \ldots) \text{ e}$$
$$\sigma_2 = (0, 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Estas duas seqüências são progressões aritméticas (de razão -1 e 1, respectivamente) e são vetores (= seqüências) linearmente independentes pois nenhuma delas é igual à outra multiplicada por um número real.

Conclusão: S tem dimensão 2 e $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é uma base de S.

Exemplo 2 – Consideremos o conjunto S das seqüências:

$$\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

em que $x_{n+1} = qx_n$ ($q \in \mathbb{R}$, fixo).

Vamos calcular x_n em função de x_0. Temos:

$$x_1 = qx_0,\ x_2 = qx_1 = q(qx_0) = q^2x_0,\ x_3 = qx_2 = q(q^2x_0) =$$
$$= q^3x_0, \ldots, x_n = q^nx_0.$$

Se $q = 0$ a seqüência é $\sigma = (x_0, 0, 0, \ldots)$ e neste caso o conjunto S das seqüências consideradas identifica-se com $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Seja então $q \neq 0$. Então:

$$\sigma = (x_0, qx_0, q^2x_0, \ldots, q^nx_0, \ldots) = x_0(1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots).$$

Conclusão: S tem dimensão 1 e $\{\sigma_1\} = \{(1, q, q^2, \ldots)\}$ é uma base de S.

Voltemos agora ao caso geral onde S é o conjunto das seqüências $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ em que $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, isto é, seqüências recorrentes lineares de ordem 2. Vamos procurar uma base de S formada de seqüências da forma $\sigma(n) = q^n$, com $q \neq 0$. Sendo q^n uma solução, devemos ter $q^{n+1} =$

$= aq^n + bq^{n-1}$, $\forall n \geqslant 1$. Logo, dividindo por q^{n-1}, vem:

$$q^2 = aq + b$$

ou, o que é equivalente,

$$q^2 - aq - b = 0.$$

Caso 1: $a^2 + 4b > 0$.

Neste caso existem números reais distintos entre si q_1 e q_2 que verificam a igualdade $q^2 - aq - b = 0$. Consideremos as seqüências $\sigma_1(n) = q_1^n$ e $\sigma_2(n) = q_2^n$. Sendo $b \neq 0$, então $q_1 \neq 0$ e $q_2 \neq 0$ e como q_1 e q_2 são distintos entre si as seqüências σ_1 e σ_2 são linearmente independentes. Se mostrarmos que toda seqüência de S é combinação linear de σ_1 e σ_2, ficará provado que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é base de S e portanto $\dim S = 2$.

Seja $\sigma = (x_0, x_1, \ldots) \in S$; procuremos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que $\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2$. Ora, isto equivale a:

$$\begin{cases} \sigma(0) = c_1\sigma_1(0) + c_2\sigma_2(0) \\ \sigma(1) = c_1\sigma_1(1) + c_2\sigma_2(1) \end{cases}$$

ou seja, a

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 \\ x_1 = c_1 q_1 + c_2 q_2. \end{cases}$$

Daí vem que:

$$c_1 = \frac{x_1 - x_0 q_2}{q_1 - q_2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{x_0 q_1 - x_1}{q_1 - q_2}$$

e portanto

$$\sigma = \frac{x_1 - x_0 q_2}{q_1 - q_2}\,\sigma_1 + \frac{x_0 q_1 - x_1}{q_1 - q_2}\,\sigma_2$$

Exemplo — As seqüências de Fibonacci são aquelas que satisfazem $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ isto é, aquelas em que $a = b = 1$. Neste caso:

$$a^2 + 4b = 5, \quad q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_1 - q_2 = \sqrt{5}.$$

Então:

$$x_n = \frac{x_1 - x_0\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x_0 - x_1}{5}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

é o n-ésimo termo de uma seqüência de Fibonacci. Se tomarmos, por exemplo, $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ teremos:

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n).$$

Observe que, embora não pareça, x_n é inteiro, pois:

$$\sigma = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots).$$

Caso 2: $a^2 + 4b = 0$

Neste caso a equação $q^2 - aq - b = 0$ admite a raiz real dupla $q = \frac{a}{2}$. Consideremos as seqüências:

$$\sigma_1(n) = q^n = \frac{a^n}{2^n} \quad \text{e} \quad \sigma_2(n) = nq^n = \frac{na^n}{2^n}$$

É fácil verificar que σ_1 e σ_2 são vetores (= seqüências) linearmente independentes. Mostraremos que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é uma base de S. Seja $\sigma \in S$; procuremos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2.$$

Então para $n = 0$ e $n = 1$ devemos ter:

$$\sigma(0) = c_1\sigma_1(0) + c_2\sigma_2(0)$$
$$\sigma(1) = c_1\sigma_1(1) + c_2\sigma_2(1)$$

ou seja:

$$x_0 = c_1 \quad \text{e} \quad x_1 = c_1q + c_2q$$

ou, ainda:

$$c_1 = x_0 \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{x_1 - x_0q}{q}$$

Portanto: $\sigma = x_0\sigma_1 + \dfrac{x_1 - x_0q}{q}\sigma_2$.

O exemplo mais importante é o das progressões aritméticas definidas por $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$. Neste caso:

$$a^2 + 4b = 4 - 4 = 0, \quad q = \frac{a}{2} = 1 \quad \text{e}$$

$$\sigma_1 = (1, 1, 1, \ldots) \quad \text{e} \quad \sigma_2 = (0, 1, 2, \ldots)$$

Daí para toda progressão aritmética $\sigma = (x_0, x_1, \ldots)$ teremos:

$$\sigma = x_0(1, 1, \ldots, 1, \ldots) + (x_1 - x_0)(0, 1, 2, \ldots).$$

Caso 3: $a^2 + 4b < 0$.

Quando isto acontece, existem duas raízes complexas conjugadas da forma $\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ e $\rho(\cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi)$. As seqüências $\sigma_1(n) = \rho^n \cos(n\varphi)$ e $\sigma_2(n) = \rho^n \operatorname{sen}(n\varphi)$ pertencem ambas a S, são linearmente independentes e geram S. As duas primeiras afirmações ficam a cargo do leitor. Vejamos a terceira. Seja $\sigma \in S$ e façamos $\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2$. Então:

$$\sigma(n) = c_1\rho^n \cos(n\varphi) + c_2\rho^n \operatorname{sen}(n\varphi), \ \forall n \geqslant 0.$$

Tomando n = 0,1 temos:

$$\sigma(0) = c_1$$

$$\sigma(1) = c_1\rho\cos\varphi + c_2\rho\operatorname{sen}\varphi$$

e daí se tira que

$$\sigma(1) = \sigma(0)\rho\cos\varphi + c_2\rho\operatorname{sen}\varphi$$

Portanto:

$$c_2 = \frac{\sigma(1) - \sigma(0)\rho\cos\varphi}{\rho\operatorname{sen}\varphi}$$

Então

$$\sigma(n) = \sigma(0)\rho^n\cos(n\varphi) + \frac{\sigma(1) - \sigma(0)\rho\cos\varphi}{\rho\operatorname{sen}\varphi}\rho^n\operatorname{sen}(n\varphi).$$

Nota: Os mesmos métodos podem ser usados para estudar as seqüências recorrentes lineares de ordem $p \geqslant 3$. Se, por exemplo, tivermos $x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ podemos procurar soluções da forma $\sigma(n) = q^n$. Levando esta igualdade à relação que existe entre os termos da seqüência obteremos:

$$q^{n+1} = 2q^{n-1} + q^{n-2}$$

de onde se tira que:

$$q^3 = 2q + 1, \text{ ou seja, } (q + 1)(q^2 - q - 1) = 0.$$

As raízes dessa equação são -1, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ e $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ e as seqüências

$\sigma_1(n) = (-1)^n$, $\sigma_2(n) = \frac{1}{2^n}(1 + \sqrt{5})^n$ e $\sigma_3(n) = \frac{1}{2^n}(1 - \sqrt{5})^n$ formam uma base do espaço vetorial S. A solução geral é

$$\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 \quad \text{e}$$

$$\sigma(n) = c_1(-1)^n + c_2 \frac{1}{2^n}(1 + \sqrt{5})^n + c_3 \frac{1}{2^n}(1 - \sqrt{5})^n$$

é a expressão geral das seqüências sujeitas à condição $x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}$. Para determinar as constantes c_1, c_2 e c_3 que produzem uma determinada seqüência, basta lembrar que o sistema linear

$$\begin{aligned}
\sigma(0) &= c_1 + c_2 + c_3 \\
\sigma(1) &= -c_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} c_2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} c_3 \\
\sigma(2) &= c_1 + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} c_2 + \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{4} c_3
\end{aligned}$$

determina univocamente c_1, c_2 e c_3.

2. APLICAÇÃO

Um problema de Química cuja resposta está ligada às seqüências recorrentes lineares é o seguinte:

O hidrogênio (H) e o oxigênio (O) reagem segundo a lei:

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

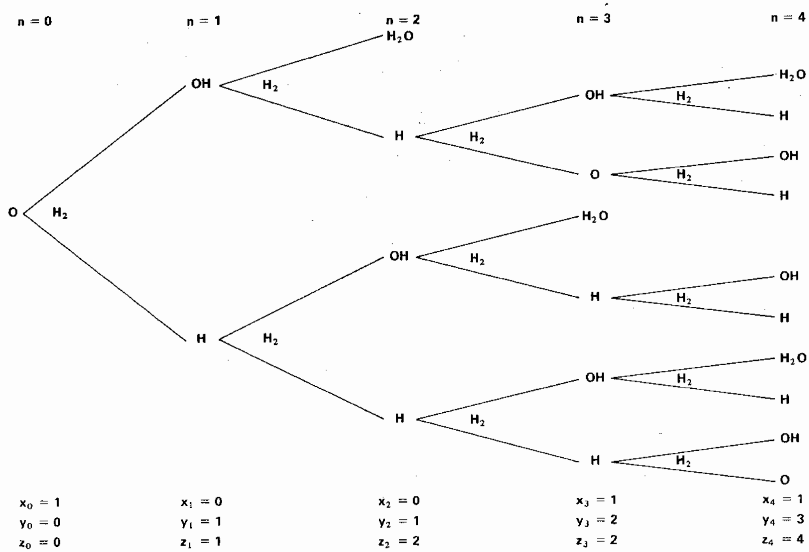
Segundo os químicos essa reação é, em verdade, mais complexa, pois a presença dos radicais OH, O e H produz três reações ao mesmo tempo:

(1) $O + H_2 \longrightarrow OH + H$

(2) $OH + H_2 \longrightarrow H_2O + H$

(3) $H + O_2 \longrightarrow OH + O$

Estas reações se processam segundo o seguinte esquema:



(Admite-se que as três reações têm a mesma velocidade, demorando uma unidade de tempo para completar-se, e que os reagentes existem sempre em quantidade suficiente). No instante $t = 0$, existe apenas o radical O. Calculamos a seguir quantos radicais O, H e OH existem nos estágios sucessivos correspondentes aos instantes $n = 0, 1, 2, \ldots$

Sejam

x_n = número de radicais O no instante n;

y_n = número de radicais OH no instante n;

z_n = número de radicais H no instante n.

Então a terceira reação $H + O_2 \longrightarrow OH + O$ diz que $x_{n+1} = z_n$, pois um radical O aparece no instante $n + 1$ quando existe um radical H no instante n. A primeira e a terceira reação dizem que $x_n + z_n = y_{n+1}$ e a primeira e segunda reação dizem que $z_{n+1} = x_n + y_n$.

Todo o processo é então descrito por:

$$x_{n+1} = z_n$$
$$x_n + z_n = y_{n+1}$$
$$z_{n+1} = x_n + y_n, \ \forall n \in N.$$

com a condição inicial $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$.

Esse sistema linear, onde as incógnitas são seqüências, é resolvido assim:

$$x_{n+1} = z_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-2} + z_{n-2} =$$
$$= x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Assim, a seqüência que dá o número de radicais O satisfaz a relação:

$$x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

que já estudamos. Conforme já vimos

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 \frac{1}{2^n} (1 + \sqrt{5})^n + c_3 \frac{1}{2^n} (1 - \sqrt{5})^n$$

e, pelas condições iniciais $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1$, teremos os valores de c_1, c_2, c_3 como solução do sistema

$$1 = c_1 + c_2 + c_3$$
$$0 = -c_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} c_2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} c_3$$
$$1 = c_1 + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} c_2 + \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{4} c_3$$

Deixamos ao leitor a tarefa de calcular os valores c_1, c_2 e c_3 para obter o termo geral da seqüência (x_n), que é o número de radicais O no instante n. Fica para o leitor demonstrar que também:

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} + y_{n-2} \quad \text{e} \quad z_{n+1} = 2z_{n-1} + z_{n-2}.$$

Assim as seqüências (x_n), (y_n) e (z_n) estão no mesmo espaço vetorial de seqüências recorrentes lineares.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja S o sub-espaço de $\mathbb{R}^\infty$ formado pelas seqüências $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tais que $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$. Achar uma base de S nos seguintes casos:

   a) $a = 1$ e $b = 2$;
   b) $a = -1$ e $b = 2$;
   c) $a = 2$ e $b = 1$;
   d) $a = 1$ e $b = -3$;
   e) $a = 2$ e $b = -5$;
   f) $a = 6$ e $b = -9$;
   g) $a = 0$ e $b = -1$;
   h) $a = 0$ e $b = 1$.

2. Seja S o subconjunto das seqüências $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ tais que $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 11x_{n+1} + 6x_n \; \forall n \in N$. Provar que S é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ e achar uma base desse sub-espaço.

3. Mesma questão, com relação a $x_{n+4} = 5x_{n+3} - 5x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$, $\forall n \in N$.

4. Observar que:

$$n = 3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1;$$

$$n = 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2.$$

O "3" pode ser obtido como soma de "1" e "2" de três maneiras distintas.

O "4" pode ser obtido como soma de "1" e "2" de cinco maneiras distintas.

Faça o mesmo com relação a 5, 6 e 7.

*5. Seja a_n o número de seqüências de "1" e "2" cuja soma dos termos é n. Provar que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Deduzir a expressão de a_n.

CAPÍTULO 5

Equações e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes

1. OPERADORES DIFERENCIAIS

Seja $\mathbb{R}$ a reta real e seja $C^{\infty}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais definidas em $\mathbb{R}$ e que admitem derivadas de todas as ordens. Esse conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ pois sendo f(t) e g(t) duas funções que pertencem a $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e sendo α um número real, então $f(t) + g(t)$ e $\alpha f(t)$ também pertence a $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e, além disso, os axiomas da definição de espaço vetorial podem ser verificados de maneira análoga ao que foi feito para o espaço das funções contínuas. No entanto $C^{\infty}(\mathbb{R})$ não é um espaço vetorial de dimensão finita.

Se $f(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ então para todo $n \geqslant 0$, $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ também pertencem a $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e portanto toda combinação linear $a_0f(t) + a_1f'(t) + \ldots a_nf^{(n)}(t)$ é um elemento de $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Definição 1 — A aplicação que associa a cada $f(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ a função

$$a_0f(t) + a_1f'(t) + \ldots + a_nf^{(n)}(t), \text{ com } a_n \neq 0,$$

chama-se *operador diferencial de grau n* com coeficientes constantes $a_0, \ldots, a_n$. Se representarmos por D o operador linear dado por $D(f(t)) = f'(t)$, então o operador diferencial definido acima é $a_0I + a_1D + a_2D^2 + \ldots + a_nD^n$ (I = operador idêntico) ou apenas $a_0 + a_1D + \ldots + a_nD^n$, como é costume representar. Notemos que um operador diferencial é necessariamente linear.

Exemplos

1) Consideremos o operador diferencial $2 - 3D$. Aplicando esse operador a uma função f(t) obtemos a função seguinte: $(2 - 3D)(f(t)) = 2f(t) - 3D(f(t)) = 2f(t) - 3f'(t)$. Se, por exemplo, $f(t) = 5e^{3t}$ então

$$(2 - 3D)(5e^{3t}) = 2(5e^{3t}) - 3(15e^{3t}) = -35e^{3t}.$$

Se $f(t) = t^3 - 1$, então

$$(2 - 3D)(t^3 - 1) = 2t^3 - 2 - 3(3t^2) = 2t^3 - 9t^2 - 2.$$

2) Consideremos o operador diferencial $D^2 + \omega^2$, onde $\omega \in \mathbb{R}$ e a função $f(t) = \text{sen}\,\omega t$. Então

$$(D^2 + \omega^2)(\text{sen}\,\omega t) = D^2(\text{sen}\,\omega t) + \omega^2(\text{sen}\,\omega t) = -\omega^2\,\text{sen}\,\omega t + \omega^2\,\text{sen}\,\omega t = 0.$$

Logo $\text{sen}\,\omega t$ pertence ao núcleo de $D^2 + \omega^2$.

3) A função $f(t) = e^{at}$, onde $a \in \mathbb{R}$, está no núcleo do operador D-a pois:

$$(D - a)(e^{at}) = D(e^{at}) - ae^{at} = ae^{at} - ae^{at} = 0.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Aplicar o operador diferencial $D^3 + D^2 + D - 1$ às seguintes funções:

a) $\text{sen}\,t$;
b) $\cos t$;
c) e^{2t};
d) $\text{sen}\,t + \cos t$;
e) $5 + e^{2t}$;
f) t;
g) e^{t^2};
h) $t^2 + t + 1$;
i) $t^3 + t^2 + t - 1$.

2. Aplicar os operadores lineares abaixo à função $\text{sen}\,\omega t$:

a) D;
b) D^2;
c) $D^2 + \omega$;
d) $D^2 + \omega^2$;
e) $D^2 + \omega^3$.

3. Aplicar à função $\cos\omega t$ os operadores:

a) D;
b) D^2;
c) $D^2 + \omega$;
d) $D^2 + \omega^2$;
e) $D^2 + \omega^3$.

4. Provar que toda combinação linear (com coeficientes em $\mathbb{R}$) das funções $\text{sen}\,\omega t$ e $\cos\omega t$ pertence ao núcleo de $D^2 + \omega^2$.

5. Provar que toda função da forma ke^{at}, onde $k \in \mathbb{R}$, está no núcleo do operador $D - a$.

6. Demonstrar que se uma função $f(t)$ está no núcleo de $D - a$, então $f(t)$ é dada por $f(t) = ke^{at}$, onde k é um número real.

Sugestão: Considere a função $f(t)e^{-at}$ e mostre que ela é constante.

2. ÁLGEBRA DOS OPERADORES

Sejam os operadores diferenciais $L_1 = a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n$ e $L_2 = b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m$, onde $n \leqslant m$. Conforme já vimos anteriormente o operador soma $L_1 + L_2$ é definido por $(L_1 + L_2)(f(t)) = L_1(f(t)) + L_2(f(t))$ e daí decorre que:

$$L_1 + L_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)D + \ldots + (a_n + b_n)D^n + b_{n+1}D^{n+1} + \ldots + b_m D^m.$$

Portanto a soma de dois operadores diferenciais é um operador diferencial e essa soma se calcula de maneira análoga à soma de polinômios. Por exemplo, se $L_1 = 5D^3 + 3D^2 - 4D + 1$ e $L_2 = D^4 - 3D^3 + D$, então

$$L_1 + L_2 = D^4 + 2D^3 + 3D^2 - 3D + 1.$$

De maneira análoga, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $L = a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n$, então o produto λL do operador L pelo número real λ é o operador $\lambda L = \lambda a_0 + \lambda a_1 D + \ldots + \lambda a_n D^n$. Por exemplo se $L = 5D^3 + 3D^2 - 4D + 1$, então $5L = 25D^3 + 15D^2 - 20D + 5$.

Se $L_1 = a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n$ e $L_2 = b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m$ vejamos como se obtém $L_1 \circ L_2$. Da definição de composta temos para toda função $f(t)$ de $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
(L_1 \circ L_2)(f(t)) &= L_1(L_2(f(t))) = L_1(b_0 f(t) + b_1 f'(t) + \ldots + b_m f^{(m)}(t)) = \\
&= L_1(b_0 f(t)) + L_1(b_1 f'(t)) + \ldots + L_1(b_m f^{(m)}(t)) = \\
&= b_0 L_1(f(t)) + b_1 L_1(f'(t)) + \ldots + b_m L_1(f^{(m)}(t)) = \\
&= b_0(a_0 f(t) + a_1 f'(t) + \ldots + a_n f^{(n)}(t)) + b_1(a_0 f'(t) + a_1 f''(t) + \\
&+ \ldots + a_n f^{(n+1)}(t)) + \ldots + b_m(a_0 f^{(m)}(t) + \ldots + a_n f^{(n+m)}(t)) = \\
&= b_0 a_0 f(t) + (b_0 a_1 + b_1 a_0) f'(t) + (b_0 a_2 + b_1 a_1 + b_2 a_0) f''(t) + \\
&+ \ldots + b_m a_n f^{(n+m)}(t)
\end{aligned}$$

e daí reconhecemos facilmente que $L_1 \circ L_2$ também é um operador diferencial que é definido por:

$$L_1 \circ L_2 = b_0 a_0 + (b_0 a_1 + b_1 a_0)D + (b_0 a_2 + b_1 a_1 + b_2 a_0)D^2 + \ldots + b_m a_m D^{m+n}$$

que corresponde ao produto:

$$(b_0 + b_1 D + \ldots + b_m D^m)(a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n)$$

efetuado como se os operadores diferenciais fossem polinômios ordinários. Por essa razão neste caso é comum indicar-se por L_1L_2 a composta e dar a ela o nome de produto dos operadores L_1 e L_2 (é o que faremos a seguir). Observemos que o grau de L_1L_2 é a soma dos graus de L_1 e L_2.

Exemplo – Sejam $L_1 = D^2 - 3D + 1$ e $L_2 = 3D^2 - 1$. Então:

$$L_1L_2 = (D^2 - 3D + 1)(3D^2 - 1) = 3D^4 - D^2 - 9D^3 + 3D + 3D^2 - 1 =$$
$$= 3D^4 - 9D^3 + 2D^2 + 3D - 1 \quad \text{e}$$
$$L_1L_1 = (D^2 - 3D + 1)(D^2 - 3D + 1) = D^4 - 6D^3 + 11D^2 - 6D + 1.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $L_1 = 5D^2 - 4D + 1$, $L_2 = D - 3$ e $L_3 = D^5 - D^3$. Calcular:
   a) $L_1 + L_2 + L_3$;
   b) $2L_1 - L_2 + L_3$;
   c) $L_1 - L_2 + L_3$;
   d) L_1L_2;
   e) L_1L_3;
   f) $L_1L_2L_3$;
   g) $L_1^2L_2$.

2. Sejam $L_1 = 3D^2 + 1$ e $L_2 = D$. Calcular:
   a) L_1^2;
   b) L_1^3;
   c) L_1^n;
   d) $(L_1 + L_2)^3$;
   e) $(L_1 + L_2)^n$.

3. Qual é o núcleo do operador D? E do operador D^n?

4. Sejam L_1 e L_2 dois operadores diferenciais com coeficientes constantes. É verdade que $L_1L_2 = L_2L_1$?

5. Achar uma função que esteja no núcleo do operador $D - 2$ e cujo valor para $t = 0$ seja 4. Fazer o gráfico dessa função.

6. Achar uma função que esteja no núcleo do operador D^2, cujo valor para $t = 0$ seja 3 e tal que o valor de sua derivada em $t = 0$ seja 1. Fazer o gráfico dessa função.

7. Achar todas as funções que estão no núcleo do operador D^2 e cujo valor para $t = 2$ seja 5. Desenhar em um mesmo gráfico algumas dessas funções.

3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

As equações diferenciais lineares com coeficientes constantes aparecem em numerosos problemas de outras ciências, o que as torna bastante importantes. Na Física, por exemplo, elas aparecem em Mecânica e Radioatividade. Em Biologia, no problema de crescimento de populações. O cálculo das soluções de tais equações é feito inteiramente dentro da Álgebra Linear. As equações diferenciais lineares fazem parte dos problemas que deram origem à Álgebra Linear.

Definição 2 – Uma equação do tipo

$$L(y) = h(t) \tag{1}$$

onde $L = a_0 + a_1D + \dots + a_nD^n$ é um operador diferencial de grau n com coeficientes constantes, $h(t)$ é uma função dada em $C^\infty(\mathbb{R})$ e y é a função incógnita (também em $C^\infty(\mathbb{R})$), chama-se *equação diferencial linear de grau n com coeficientes constantes*. Explicitamente a equação (1) se apresenta assim:

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + \dots + a_ny^{(n)} = h(t).$$

Toda função $f(t)$ tal que

$$L(f(t)) = h(t)$$

é verdadeira chama-se solução da equação diferencial. Se, a função $h(t)$ é identicamente nula, a equação (1) assume a forma mais simples

$$L(y) = 0.$$

Quando isso acontece as soluções da equação são as funções que estão no núcleo de L. *Por isso é importante saber calcular o núcleo de um operador.* Dada a equação diferencial $L(y) = h(t)$ a equação $L(y) = 0$ chama-se equação diferencial homogênea associada à equação dada.

Teorema 1 – Seja $L(y) = h(t)$ uma equação diferencial linear e $L(y) = 0$ a equação homogênea associada. Se $f(t)$ é uma solução de $L(y) = h(t)$ e se N é o núcleo de L, então:

$$f(t) + N = \{f(t) + g(t) \mid g(t) \in N\}$$

é o conjunto das soluções de $L(y) = h(t)$.

Demonstração – Em primeiro lugar, se $g(t) \in N$, então $f(t) + g(t)$ é uma solução de $L(y) = h(t)$ pois:

$$L(f(t) + g(t)) = L(f(t)) + L(g(t)) = h(t) + 0 = h(t).$$

Por outro lado, se $k(t)$ é uma solução qualquer de $L(y) = h(t)$, então

$$L(k(t) - f(t)) = L(k(t)) - L(f(t)) = h(t) - h(t) = 0$$

o que mostra que a função $g(t) = k(t) - f(t)$ está no núcleo N de L e daí

$$k(t) = f(t) + g(t) \in f(t) + N. \blacksquare$$

Explicação

O teorema que acabamos de provar nos ensina um fato muito importante. Se quisermos achar todas as soluções da equação (1), podemos proceder em três etapas:

1) Procuramos uma solução particular $f(t)$ de (1).

2) Determinamos o núcleo do operador diferencial L.

3) Somamos cada função do núcleo de L com a solução particular $f(t)$ que encontramos na primeira etapa.

Admitiremos sem demonstração o seguinte resultado:

"O núcleo de um operador diferencial $L = a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n$, com $a_n \neq 0$, é um sub-espaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão finita igual a n." A demonstração desse resultado está acima do nível deste livro. No próximo parágrafo daremos métodos para resolver equações homogêneas $L(y) = 0$. A resolução das equações não homogêneas exige resultados de análise um pouco mais elaborados, razão pela qual não será vista neste livro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escrever as equações diferenciais homogêneas determinadas pelos operadores seguintes:

a) D;

b) D^2;

c) D^n;

d) $D + 1$;

e) $D^2 - 3D + 1$;

f) $3D^2 - 2D$;

g) $D^2 + \omega^2$;

h) $D - a$;

i) $(D - 1)(D + 1)$.

2. Quais os operadores que definem as equações diferenciais seguintes?

a) $f'' = 0$;

b) $3f'' + 2f' + f = 0$;

c) $f^{(n)} + f^{(n-1)} + \ldots + f' + f = 0$;

d) $f'' = -f$;

e) $f'' + f = 0$.

3. Achar a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $f' = 0$;

b) $f^{(n)} = 0$;

c) $f' = f$;

d) $f' = af\,(a \in \mathbb{R})$.

4. Mostrar que $f(t) = t$ é uma solução de $y'' + y = f(t)$.

5. a) Provar que as funções sen t e cos t são ambas soluções de $y'' + y = 0$.

b) Provar também que sen t e cos t são linearmente independentes.

c) Achar a solução geral de $y'' + y = 0$.

d) Achar todas as soluções da equação $y'' + y = t$.

6. Seja $L = D^2 - 2D + 2$.

a) Provar que as funções $f_1(t) = e^t \cos t$ e $f_2(t) = e^t \operatorname{sen} t$ são soluções da equação diferencial $L(y) = 0$.

b) Provar que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são linearmente independentes.

c) Qual é a solução geral da equação $y'' - 2y' + 2y = 0$?

d) Dentre as soluções existe uma, e apenas uma que satisfaz as condições $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$. Ache-a.

4. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM

Neste parágrafo vamos calcular as soluções da equação diferencial homogênea $a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' = 0$, onde $a_2 \neq 0$. Comecemos com o seguinte teorema, válido para operadores lineares de qualquer grau.

Teorema 2 – Sejam L_1 e L_2 operadores diferenciais com coeficientes constantes. O núcleo de L_1 e o núcleo de L_2 estão contidos no núcleo de $L_1 L_2$.

Demonstração – Suponhamos que $f(t)$ está no núcleo de L_1, isto é $L_1(f(t)) = 0$. Então:

$$(L_1L_2)(f(t)) = (L_2L_1)(f(t)) = L_2(L_1(f(t))) = L_2(0) = 0.$$

De maneira análoga se completa a demonstração. ∎

Nota: O teorema 2 pode ser generalizado para um produto $L_1 L_2 \ldots L_n$ $(n \geqslant 2)$ de operadores. Deixamos ao leitor a tarefa de enunciá-lo.

Exemplo — Seja a equação diferencial linear e homogênea $y'' - 4y = 0$ ou, de maneira equivalente, $(D^2 - 4)(y) = 0$. Como $(D^2 - 4) = (D - 2)(D + 2)$, então o núcleo de $D - 2$ e o núcleo de $D + 2$ estão ambos contidos no núcleo N de $D^2 - 4$. Ora, o núcleo de $D - 2$ é constituído pelas funções $k_1 e^{2t}$ e o núcleo de $D + 2$ pelas funções $k_2 e^{-2t}$. Sendo N um sub-espaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R})$, então todas as funções $k_1 e^{2t} + k_2 e^{-2t}$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ pertencem a N. Como dim N = 2 e como e^{2t} e e^{-2t} são funções linearmente independentes, então essas funções formam uma base de N. Assim a solução geral de $(D^2 - 4)(y) = 0$ é

$$f(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-2t}.$$

Seja agora a equação diferencial de segundo grau: $a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' = 0$, ou seja $(a_0 + a_1 D + a_2 D^2)(y) = 0$. Podemos supor que $a_2 = 1$ pois $a_0 + a_1 D + a_2 D^2$ e $\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2} D + D^2$ têm exatamente o mesmo núcleo. Consideremos o polinômio do segundo grau $a_0 + a_1 x + x^2$ cujas raízes no campo complexo são α_1 e α_2. Conforme veremos as soluções da equação

$$(a_0 + a_1 D + D^2)(y) = 0$$

dependem da natureza bem como da multiplicidade das raízes do polinômio considerado acima. Três casos se apresentam:

Caso 1: α_1 e α_2 são números reais e $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Neste caso as funções $e^{\alpha_2 t}$ e $e^{\alpha_2 t}$ são linearmente independentes, $\{e^{\alpha_1 t}\}$ é base do núcleo de $D - \alpha_1$, $\{e^{\alpha_2 t}\}$ é base do núcleo de $D - \alpha_2$ e portanto formam juntas uma base do núcleo de

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2) = D^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 = D^2 + a_1 D + a_0.$$

Neste caso a solução geral de $a_0 y + a_1 y' + y'' = 0$ é

$$k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}$$

Caso 2: α_1 e α_2 são números reais iguais.

Seja α o valor comum, raiz dupla do polinômio $a_0 + a_1 x + x^2$. Neste caso $e^{\alpha t}$ é ainda uma solução. Uma segunda solução é a função $te^{\alpha t}$ pois:

$$a_0(te^{\alpha t}) + a_1(te^{\alpha t})' + (te^{\alpha t})'' = a_0 te^{\alpha t} + a_1(e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t}) +$$
$$+ (\alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 te^{\alpha t}) = (\alpha^2 + a_1\alpha + a_0)te^{\alpha t} + e^{\alpha t}(a_1 + 2\alpha) = 0.$$

Observemos que o zero obtido decorre de que $\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$, por ser α uma raiz do polinômio considerado de início, e $a_1 + 2\alpha = 0$, por ser α uma raiz dupla desse mesmo polinômio, devendo portanto anular sua derivada $a_1 + 2x$.

Sendo $e^{\alpha t}$ e $te^{\alpha t}$ soluções e sendo funções linearmente independentes, elas formam uma base do núcleo de $(a_0 + a_1 D + D^2)$ e portanto a solução geral da equação é:

$$k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t}, \text{ ou ainda, } (k_1 + k_2 t)e^{\alpha t}.$$

Caso 3: α_1 e α_2 são números complexos.

Segue daí que α_1 e α_2 são complexos conjugados e portanto se $\alpha_1 = a + bi$, então $\alpha_2 = a - bi$. Neste caso consideremos as funções $f_1(t) = e^{at} \cos bt$ e $f_2(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$. Afirmamos que se trata de soluções de $a_0 + a_1 y' + y'' = 0$. De fato, sendo $a + bi$ raiz da equação $a_0 + a_1 x + x^2 = 0$, temos: $0 = a_0 + a_1(a + bi) + (a + bi)^2 = (a_0 + a_1 a + (a^2 - b^2)) + (a_1 b + 2ab)i$.

Logo $a_0 + a_1 a + a^2 - b^2 = 0$ e $a_1 b + 2ab = 0$. Segue então daí que

$$\begin{aligned} & a_0(e^{at} \cos bt) + a_1(e^{at} \cos bt)' + (e^{at} \cos bt)'' = a_0 e^{at} \cos bt + \\ & + a_1(-be^{at} \operatorname{sen} bt + ae^{at} \cos bt) + (-abe^{at} \operatorname{sen} bt - b^2 e^{at} \cos bt + \\ & + a^2 e^{at} \cos bt - abe^{at} \operatorname{sen} bt) = (a_0 + a_1 a + a^2 - b^2)e^{at} \cos bt - \\ & - e^{at} \operatorname{sen} bt(ba_1 + 2ab) = 0\, e^{at} \cos bt - e^{at} \operatorname{sen} bt \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga prova-se que $e^{at} \operatorname{sen} bt$ é também uma solução neste caso. Deixamos como exercício a demonstração de que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são linearmente independentes. Portanto a solução geral no caso em que as raízes são complexas é

$$k_1 e^{at} \cos bt + k_2 e^{at} \operatorname{sen} bt \quad \text{ou ainda} \quad e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \operatorname{sen} bt).$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Encontrar a solução geral de cada uma das equações diferenciais:

a) $y'' + y' - 2y = 0$;
b) $8y'' + 14y' - 15y = 0$;
c) $y'' + 4y = 0$;
d) $2y'' - 5\sqrt{3}y' + 6y = 0$;
e) $3y'' - 5y' + 2y = 0$;
f) $y'' - 2y' = 0$;
g) $y'' - 2y' + y = 0$;
h) $9y'' - 12y' + 4y = 0$.

2. Determinar a solução da equação diferencial que satisfaz as condições indicadas:

a) $y'' + 2y = 0$ $\quad y(0) = 2$ $\quad y'(0) = 2\sqrt{2}$;
b) $4y'' - 12y' + 9y = 0$ $\quad y(0) = 1$ $\quad y'(0) = \frac{7}{2}$;
c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ $\quad y(0) = 3$ $\quad y'(0) = 2$.

3. Sejam m e n números reais distintos entre si. Provar que não existe nenhuma constante k tal que:

$$e^{mt} = ke^{nt}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Encontrar uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja:

a) $(k_1 + k_2 t)e^{-4t}$;

b) $k_1 e^{3t} + k_2 e^{-3t}$;

c) $k_1 e^{2t} \operatorname{sen} 4t + k_2 e^{2t} \cos 4t$.

5. Encontrar uma solução da equação $(D^2 - 2D + 26)(y) = 0$ cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 2)$ do plano e cuja tangente nesse ponto tenha inclinação igual a 3.

5. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS DE ORDEM QUALQUER

Neste parágrafo vamos generalizar os resultados que conseguimos obter no parágrafo 4.

Definição 3 — Dada uma equação diferencial homogênea de grau n

$$a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0$$

chama-se *equação característica* dessa equação diferencial a equação algébrica

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0.$$

Suas raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no campo complexo são chamadas *raízes características* da equação diferencial dada. Notemos que os números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não são necessariamente distintos dois a dois e que alguns deles (ou todos) podem ser reais.

Exemplos

1) Se a equação diferencial dada é $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$, então sua equação característica é $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ cujas raízes são 1, 2 e -2 e daí:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2).$$

2) Dada a equação $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$, sua equação característica é $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$ cujas raízes são 2, 2 e -2. Logo $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 =$ $= (x - 2)^2(x + 2)$.

3) No caso $y''' + 4y' = 0$ a equação característica é: $x^3 + 4x = 0$ da qual as raízes são 0, $2i$ e $-2i$. Logo:

$$x^3 + 4x = x(x - 2i)(x + 2i).$$

Dada uma equação diferencial $a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0$ cujas raízes características são $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ então as suas soluções podem ser obtidas da seguinte maneira (acompanhe o caso $n = 2$ que fizemos no parágrafo 4):

Caso 1: Todos os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são reais e distintos dois a dois.

Neste caso:

$$a_0 + a_1 D + \ldots + a_{n-1} D^{n-1} + D^n = (D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \ldots (D - \alpha_n)$$

e como o núcleo de $D - \alpha_i$ está contido no núcleo N de $a_0 + a_1 D + \ldots + D^n$, todas as funções $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \ldots, e^{\alpha_n t}$, estão em N. Como elas são L.I. e dim N = n, podemos afirmar que essas funções formam uma base de N. Assim a solução geral da equação neste caso é

$$k_1 e^{\alpha_1 t} + \ldots + k_n e^{\alpha_n t} \text{ onde } k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}.$$

Caso 2: Todos os números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são reais mas não são todos distintos dois a dois.

Neste caso, se por exemplo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade 3, as funções $e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$ e $t^2 e^{\alpha t}$ são soluções linearmente independentes.

Exemplos

1) Resolver $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Neste caso a equação característica é $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3 = 0$ cujas raízes são todas iguais a 1. A solução geral é $k_1 e^t + k_2 te^t + k_3 t^2 e^t$.

2) Resolver $y^{(4)} + 6y''' + 5y'' - 24y' - 36y = 0$.

A equação característica é

$$x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36 = (x - 2)(x + 2)(x + 3)^2.$$

As raízes características são 2, -2, (simples) e -3(dupla). A solução geral é:

$$k_1 e^{2t} + k_2 e^{-2t} + k_3 e^{-3t} + k_4 te^{-3t}.$$

Caso 3: Alguns (ou possivelmente todos) dos números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pertencem a $\mathbb{C} - \mathbb{R}$. Suponhamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}$ sejam esses números e que $\bar{\alpha}_1 = \alpha_2$, $\bar{\alpha}_3 = \alpha_4, \ldots, \bar{\alpha}_{2s-1} = \alpha_{2s}$. Logicamente as raízes aí não alinhadas pertencem a $\mathbb{R}$. A contribuição de cada raiz real para a solução é uma função exponencial; se for dupla contribui também com uma função do tipo $te^{\alpha t}$. Cada par de raízes complexas conjugada da forma $a \pm bi$ contribui com $e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \operatorname{sen} bt)$; se essas raízes conjugadas forem duplas aparecerá mais uma parcela da forma $te^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \operatorname{sen} bt)$. Para possíveis raízes de ordem maior (reais ou não) é só generalizar o que acabamos de fazer.

Exemplos

1) Resolver $y'' - 2y' + 10y = 0$.

A equação característica é $x^2 - 2x + 10 = 0$. Suas raízes são $1 + 3i$ e $1 - 3i$. A solução geral é então:

$$y = e^t (k_1 \cos 3t + k_2 \operatorname{sen} 3t).$$

2) Resolver $y''' + 4y' = 0$.

A equação característica é $x^3 + 4x = 0$, cujas raízes são 0, $2i$ e $-2i$ e portanto $y = k_1 e^{0t} + e^{0t}(k_2 \cos 2t + k_3 \operatorname{sen} 2t) = k_1 + k_2 \cos 2t + k_3 \operatorname{sen} 2t$.

3) Resolver $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$.

A equação característica é:

$$x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 - 4)(x^2 + 9) = 0$$

que tem duas raízes simples, 2 e -2, e duas raízes complexas $3i$ e $-3i$. A solução geral é:

$$y = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-2t} + k_3 \cos 3t + k_4 \operatorname{sen} 3t.$$

4) Resolver $(D^2 - 2D + 5)^2 (y) = 0$.

A equação característica é $(x^2 - 2x + 5)^2 = 0$ cujas raízes são $1 + 2i$ (dupla) e $1 - 2i$ (dupla). A solução geral é

$$y = e^t (k_1 \cos 2t + k_2 \operatorname{sen} 2t) + te^t (k_3 \cos 2t + k_4 \operatorname{sen} 2t).$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações:

a) $y'' + y' - 6y = 0$;

b) $(D^2 + 2D - 15)(y) = 0$;

c) $(D^3 + D^2 - 2D)(y) = 0$;

d) $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)(y) = 0$;

e) $(D^4 - 6D^3 + 12D^2 - 8D)(y) = 0$;

f) $(D^2 + 6D + 9)(y) = 0$;

g) $(D^2 - 10D + 25)(y) = 0$;

h) $(D^2 - 4D + 13)(y) = 0$;

i) $(D^2 + \omega^2)(y) = 0 \ (\omega \in \mathbb{R})$;

j) $(D^3 - D^2 + 9D - 9)(y) = 0$;

2. Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ e f uma função. Provar que:

$$(D - a)(D - b)(D - c)(f) = (D - b)(D - a)(D - c)(f).$$

3. Provar que a função $k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} + k_3 e^{ct}$ é uma solução da equação

$$(D - a)(D - b)(D - c)(y) = 0,$$

substituindo diretamente e efetuando os cálculos.

6. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos um sistema de n equações lineares em n incógnitas

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_n(t) = x_1'(t) \\ \alpha_{21}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_n(t) = x_2'(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}x_1(t) + \alpha_{n2}x_2(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_n(t) = x_n'(t) \end{cases}$$

onde $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ são funções reais (incógnitas) definidas num intervalo I no qual são diferenciáveis e os α_{ij} são números reais dados. Essa é a *forma normal* dos chamados sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, $n \times n$.

Se $A = (\alpha_{ij})$ e $X(t)$ é a matriz coluna

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

definindo

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

podemos representar o sistema por

$$X'(t) = A \cdot X(t)$$

Estamos interessados em encontrar soluções do sistema que satisfaçam a uma dada condição inicial. Ou seja, encontrar uma matriz

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

onde $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ são funções diferenciáveis em I, de maneira que se verifique $F'(t) = A \cdot F(t)$ e, para um certo ponto $a \in I$, $F(a)$ seja uma dada matriz coluna.

Consideraremos dois casos:

(a) A matriz A é diagonalizável.

Quando isto ocorre, é possível encontrar uma matriz inversível P, $n \times n$, tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ é diagonal, com termos da diagonal iguais aos valores próprios de A.

Seja $Q = P^{-1}$ e consideremos a matriz coluna $Y(t) = Q \cdot X(t)$. É claro então que $Y'(t) = Q \cdot X'(t)$ (verifique). Daí $Y'(t) = Q \cdot A \cdot X(t)$. Como porém $X(t) = Q^{-1} \cdot Y(t)$, então $Y'(t) = (Q \cdot A \cdot Q^{-1}) \cdot Y(t)$ ou $Y'(t) = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Y(t) = D \cdot Y(t)$. Chamando de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A, a equação matricial anterior equivale ao sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_1'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \quad\vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

cujas soluções são dadas por $(c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t})$, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Logo

$$X(t) = P \cdot Y(t) = P \cdot \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} P_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} P_n$$

onde $P_1, \ldots, P_n$ são as colunas de P e portanto vetores próprios, linearmente independentes, da matriz A. Fazendo t = a e impondo que

$$c_1 e^{a\lambda_1} P_1 + \ldots + c_n e^{a\lambda_n} P_n$$

seja a matriz coluna dada, obteremos $c_1, \ldots, c_n$ univocamente.

Exemplo

Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x_1(t) + x_3(t) = x_1'(t) \\ 2x_2(t) = x_2'(t) \\ x_1(t) + 3x_3(t) = x_3'(t) \end{cases}$$

satisfazendo a condição inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ e $x_3(0) = 1$.

O polinômio característico da matriz A dos coeficientes do sistema é

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)^2(2-t) - (2-t) =$$

$$= (2-t)((3-t)^2 - 1) = (2-t)(t-2)(t-4) = (t-2)^2(4-t)$$

Os valores próprios são, pois, $\lambda_1 = 2$ (multiplicidade 2) e $\lambda_2 = 4$ (simples). Os subespaços próprios são $V(2) = \{(x, y, -x) | x, z \in \mathbb{R}\}$ de dimensão 2, do qual $\{(1, 0, -1); (0, 1, 0)\}$ é base e $V(4) = \{(x, 0, x) | x \in \mathbb{R}\}$, de dimensão 1, cuja base mais natural é (1, 0, 1). Assim, a matriz A é diagonalizável e, se

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora, de $X(t) = c_1e^{2t}P_1 + c_2e^{2t}P_2 + c_3e^{4t}P_3$ segue que

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^{2t} + c_3e^{4t} \\ x_2(t) = c_2e^{2t} \\ x_3(t) = -c_1e^{2t} + c_3e^{4t} \end{cases}$$

A fim de que $X(0) = (1, 0, 1)^t$, deveremos ter

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

cuja solução é $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Logo, a solução que satisfaz a condição inicial dada é

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{4t} \\ x_2(t) &= 0 \\ x_3(t) &= e^{4t} \end{aligned}$$

(b) A matriz A não é diagonalizável mas tem todos os seus valores próprios em $\mathbb{R}$, caso em que admite uma forma canônica de Jordan sobre $\mathbb{R}$.

O procedimento inicial é o mesmo do caso (a) e leva ao sistema $Y'(t) = J \cdot Y(t)$, onde $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ é uma matriz de Jordan semelhante a A. Daí

$$y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) + \delta_i y_{i+1}(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

onde os λ_i são os valores próprios de A e δ_i é zero ou um. A última equação é sempre $y_n'(t) = \lambda_n y_n$, cuja solução é $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$, onde c_n é uma constante. A penúltima equação é $y_{n-1}'(t) = \lambda_{n-1} y_{n-1}(t) + \delta_{n-1} y_n(t)$. Se $\delta_{n-1} = 1$, substitui-se $y_n(t)$ por $c_n e^{\lambda_n t}$ e resolve-se a equação resultante, conforme procedimento do exemplo seguinte. Dessa forma, prosseguindo no raciocínio anterior, obteremos $Y(t)$. Depois, a partir de $X(t) = P \cdot Y(t)$, impondo a condição inicial, chegaremos aos valores das constantes de integração $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Exemplo

Resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) + x_4(t) \\ x_4'(t) = 4x_3(t) - 2x_4(t) \end{cases}$$

Já vimos (exemplo 3, item 2, cap. 1 da segunda parte) que a matriz A dos coeficientes do sistema não é diagonalizável. E a forma canônica de Jordan dessa matriz de autovalores 2 e -3 é

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

A matriz P que transforma A em J é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(ver exemplo, cap. 1, item 7). Pela transformação $Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$, obtemos $Y'(t) = J \cdot Y(t)$, que no caso fornece: $y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t)$; $y_2'(t) = 2y_2(t)$; $y_3'(t) = 2y_3(t)$; $y_4'(t) = -3y_4(t)$. Daí obtemos:

$$y_4(t) = c_4e^{-3t},\ y_3(t) = c_3e^{2t},\ y_2(t) = c_2e^{2t}$$

Assim a primeira equação fica: $y_1'(t) = 2y_1(t) + c_2e^{2t}$.
Observemos que

$$\frac{d}{dt}(y_1(t)e^{-2t}) = (2y_1(t) + c_2e^{2t})e^{-2t} + (-2)y_1(t)e^{-2t} = c_2. \text{ Daí}$$

$$y_1(t)e^{-2t} = c_2t + c_1$$

e portanto $y_1(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. Daí

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{2t} \\ c_4e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{2t} + c_4e^{-3t} \\ c_3e^{2t} - 4c_4e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Suponhamos que a condição inicial seja dada por

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$\begin{cases} c_1 & = 1 \\ c_2 & = 1 \\ c_3 + c_4 & = 1 \\ c_3 - 4c_4 & = 1 \end{cases}$$

cuja solução é (1, 1, 1, 0). Neste caso a solução do sistema é

$$X(t) = (e^{2t} + te^{2t}, e^{2t}, e^{2t}, e^{2t}).$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva o sistema $X'(t) = A \cdot X(t)$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e $X(0) = (0, 1)$.

2. Resolva os sistemas $X'(t) = A \cdot X(t)$, nos casos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

com a condição inicial $X(0) = (0, 1, -1)$.

3. a) Mostre que a equação da segunda ordem $y'' + ay' + b = 0$ pode ser convertida no sistema

$$\begin{cases} y'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = (-b)y_1(t) + (-a)y_2(t) \end{cases}$$

através das substituições $y(t) = y_1(t)$ e $y'(t) = y_2(t)$.
b) Aplique a parte anterior para resolver as seguintes equações: (i) $y'' + 2y' - 3 = 0$; (ii) $y'' - 4y' + 2 = 0$; (iii) $y'' - 5y' + 6 = 0$

4. Resolva os sistemas dados matricialmente por $X'(t) = A \cdot X(t)$ nos seguintes casos:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $X(0) = (1, 1, -1)$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $X(0) = (1, 0, 0, 0)$

5. a) Considere os sistemas $X'(t) = J \cdot X(t)$, onde J é uma matriz de Jordan 3×3, com λ na diagonal. Mostre que

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

é solução do sistema considerado.
b) Generalize esse resultado para uma matriz de Jordan qualquer $n \times n$.

CAPÍTULO 6

Método dos Mínimos Quadrados

1. O ESPAÇO EUCLIDIANO $\mathbb{R}^n$: REVISÃO

Neste capítulo daremos uma aplicação importante do conceito de produto interno. Para isso lembramos que no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual é a aplicação que a cada par de vetores $(u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n))$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associa o número real $<u, v> = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Esse número real $<u, v>$ chama-se *produto escalar* dos vetores u e v. Conforme vimos anteriormente o número real positivo $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ (estritamente positivo se $u \neq (0, \ldots, 0)$) é a norma do vetor u. Lembremos ainda que se u é um vetor do $\mathbb{R}^n$ e se $\{g_1, \ldots, g_s\}$ é uma base ortonormal de um sub-espaço W de $\mathbb{R}^n$, então a projeção de u sobre W (indicaremos por $\text{proj}_W\, u$) é o vetor dado por:

$$\text{proj}_W\, u = <u, g_1>g_1 + \ldots + <u, g_s>g_s.$$

Essa projeção se caracteriza pelo fato de que $u - \text{proj}_W\, u$ é um vetor de $W^\perp$ e portanto é ortogonal simultaneamente a $g_1, \ldots, g_s$. No caso em que $W = [g]$, fala-se em *projeção de u sobre g* (em vez de projeção de u sobre W) e escreve-se $\text{proj}_g\, u$. Sendo $\left\{\frac{g}{\|g\|}\right\}$ uma base ortonormal de W temos:

$$\text{proj}_g\, u = <u, \frac{g}{\|g\|}> \frac{g}{\|g\|} = \left(\frac{1}{\|g\|^2} <u, g>\right) g = \frac{<u, g>}{<g, g>} g.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 2)$ em $\mathbb{R}^3$. Calcular:

a) $<u, u>$;
b) $<u, w>$;
c) $<u, v + w>$;
d) $<u, u>$;
e) $\|u + v\|^2$;
f) $\|u - v\|^2$.

2. Provar que $<u, \lambda v> = <\lambda u, v> = \lambda<u, v>$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

3. Provar que $<u, u> = 0$ se, e somente se, $u = (0, \ldots, 0)$.

4. Calcular $\text{proj}_g\, u$ nos seguintes casos:

a) $u = (1, 2, 1, 4)$ e $g = (4, 0, 0, 1)$;

b) $u = (1, 1, 1, 1)$ e $g = (2, 2, 2, 2)$;

c) $u = (4, 3, 5, 2, 5)$ e $g = (1, 1, 1, 1, 1)$.

5. Seja W o sub-espaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (2, -1, 0, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1, 0)$. Calcular a projeção do vetor u sobre W nos seguintes casos:

a) $u = (3, 1, 2, 2)$;

b) $u = (1, 2, 1, 1)$;

c) $u = (0, 0, 0, 1)$.

6. Calcular a projeção do vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o sub-espaço gerado por $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Fazer uma figura.

7. Provar que $\text{proj}_g(u_1 + u_2) = \text{proj}_g u_1 + \text{proj}_g u_2$. Fazer a figura.

8. Provar que $\text{proj}_g(\lambda u) = \lambda \text{proj}_g u$ e que $\text{proj}_{\lambda g} u = \text{proj}_g u$ $(\lambda \neq 0)$.

9. Pelos exercícios 7 e 8 a função $u \mapsto \text{proj}_g\, u$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Quais são seu núcleo o e sua imagem?

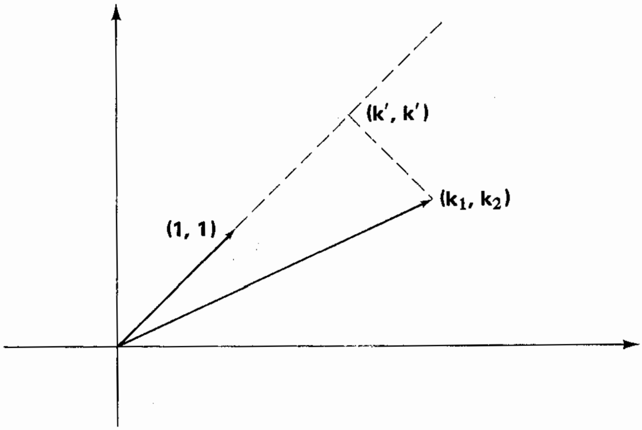
10. Provar que $\|\text{proj}_g u\| \leqslant \|u\|$, para todo vetor u. Quanto vale a igualdade?

2. APROXIMAÇÃO POR PROJEÇÕES

Suponhamos que um físico disponha de um aparelho para medir experimentalmente o valor de uma constante. Esta constante pode ser uma resistência elétrica, o peso específico de uma substância, a potência de um motor, etc. Ao efetuar a medida ele encontrará um valor próximo do valor real, pois toda experiência comporta uma imprecisão de medida. Feitas várias experiências, que dão em geral vários resultados distintos, é comum a prática de "tirar a média" e chamar o resultado assim obtido de valor da constante. Veremos a seguir como a noção de produto interno justifica este procedimento. Faremos depois outros métodos de aproximação, sempre baseados no produto interno do $\mathbb{R}^n$.

Suponhamos que se deseja determinar o valor de uma constante k, efetuando experiências. Comecemos com o caso em que são feitas apenas duas experiências que dão os valores k_1 e k_2. Se não houvesse imprecisão nas medidas deveríamos ter $k_1 = k_2 = k$, mas isto não ocorre. Qual seria então a melhor aproximação para k, obtida a partir de k_1 e k_2? Para isso tomemos o "vetor-experiência" $E = (k_1, k_2)$ e seja u = (1, 1). Então ku = (k, k). É razoável dizer que a melhor aproximação de k é o número real k' tal que $k'u$ seja a projeção do vetor-experiência sobre o vetor u; portanto:

$$k' = \frac{<(k_1, k_2), (1, 1)>}{\|(1, 1)\|^2} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$



Portanto a média aritmética dos valores k_1 e k_2 é a melhor aproximação de k. No caso de efetuarmos n experiências em vez de duas, teremos:

$$E = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = (1, 1, \ldots, 1) \text{ e}$$

$$k' = \frac{<(k_1, \ldots, k_n), (1, \ldots, 1)>}{\|(1, \ldots, 1)\|^2} = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}$$

Exemplos

1) Vetor-experiência E = (1, 2, 1, 2), $k' = \dfrac{1 + 2 + 1 + 2}{4} = \dfrac{3}{2}$

2) Vetor-experiência E = (5, 6, 5, 7, 6, 4),

$$k' = \frac{5 + 6 + 5 + 7 + 6 + 4}{6} = \frac{11}{2} = 5{,}5.$$

Imaginemos agora uma experiência mais complexa, em que serão medidas simultaneamente duas constantes k e ℓ. As medidas obtidas pela experiência são vetores do $\mathbb{R}^2$:

$$(k_1, \ell_1), (k_2, \ell_2), \ldots, (k_p, \ell_p),$$

resultantes de p medições. Queremos achar a partir destes valores a melhor aproximação para k e para ℓ. Para isso formamos o vetor-experiência:

$$E = (k_1, k_2, \ldots, k_p, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p) \in \mathbb{R}^{2p}.$$

Consideramos agora os vetores:

$$u_1 = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0) \text{ e}$$
$$u_2 = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$$

também pertencentes ao $\mathbb{R}^{2p}$. Observe que $<u_1, u_2> = 0$.

Inspirados no primeiro caso que estudamos, poderemos dizer que as melhores aproximações de k e ℓ são números k' e ℓ' obtidos da seguinte maneira: projetamos o vetor E sobre o sub-espaço gerado por u_1 e u_2 e tomamos as coordenadas da projeção em relação à base $\{u_1, u_2\}$. Conforme vimos no parágrafo 1, teremos:

$$k' = \frac{<E, u_1>}{<u_1, u_1>} \qquad \ell' = \frac{<E, u_2>}{<u_2, u_2>}$$

pois u_1 e u_2 são ortogonais entre si. Segue daí que:

$$k' = \frac{<(k_1, \ldots, k_p, \ell_1, \ldots, \ell_p), (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)>}{\|(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)\|^2} = \frac{k_1 + \ldots + k_p}{p}$$

e, analogamente, que:

$$\ell' = \frac{\ell_1 + \ldots + \ell_p}{p}$$

Novamente aparecem as médias aritméticas.

Exemplo – São feitas 5 medidas das constantes k e ℓ, com os seguintes resultados:

$$k: 7, 8, 6, 6, 8 \quad \text{e} \quad \ell: 11, 10, 12, 10, 10$$

Então $E = (7, 8, 6, 6, 8, 11, 10, 12, 10, 10)$ e as melhores aproximações são:

$$k' = \frac{<E, u_1>}{\|u_1\|^2} = \frac{7 + 8 + 6 + 6 + 8}{5} = 7$$

$$\ell' = \frac{<E, u_2>}{\|u_2\|^2} = \frac{11 + 10 + 12 + 10 + 10}{5} = 10{,}6$$

Observação: O vetor $(k', \ell') \in \mathbb{R}^2$ chama-se *centróide* dos vetores (k_1, ℓ_1), $\ldots$, (k_p, ℓ_p). A definição de centróide pode ser dada em geral: se $u_1, \ldots, u_p$ são p vetores de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, o centróide desses vetores é o vetor $\frac{1}{p}(u_1 + \ldots + u_p)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcular o centróide dos vetores e representar geometricamente:

   a) $u_1 = (1, 2)$ e $u_2 = (2, 1)$;

   b) $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 2)$, $u_3 = (4, -1)$ e $u_4 = (2, 2)$;

   c) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, -2, 0)$ e $u_3 = (0, 0, -1)$;

   d) $u_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e $u_2 = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

2. Seja u o centróide dos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_p$ do $\mathbb{R}^n$. Calcular nos exemplos do exercício 1, a soma $\|u - u_1\|^2 + \ldots + \|u - u_p\|^2$.

3. Enunciar rigorosamente e provar: um operador linear do $\mathbb{R}^n$ preserva os centróides.

4. Tomemos três vetores no $\mathbb{R}^2$, cujas extremidades formem um triângulo. Qual é o ponto do triângulo que coincide com a extremidade do centróide dos três vetores?

3. AJUSTE DE CURVAS

Um problema bastante freqüente nas ciências experimentais é o seguinte: sabe-se que um fenômeno é descrito por uma função linear $y = kx$, mas o valor de k é desconhecido. Para determinar k, atribuímos um valor x_1 à variável x obtendo experimentalmente um valor y_1 para y. Repete-se a experiência com valores $x_2, \ldots, x_p$ de x e valores $y_2, \ldots, y_p$ correspondentes de y. A partir destes dados como obter a melhor aproximação de k?

Para isso tomamos os vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ do $\mathbb{R}^n$. Se Y fosse proporcional a X, já teríamos o valor de k. Mas isso não ocorre devido à imprecisão experimental. Queremos achar k' tal que $k'X$ seja o *mais próximo possível* de Y. Para isso devemos exigir que o vetor $Y - k'X$ tenha *norma mínima,* o que ocorre quando $Y - k'X$ é ortogonal a X. Segue daí que a melhor aproximação de k' é aquela dada por

$$\langle k'X - Y, X\rangle = 0.$$

Dessa igualdade se conclui que $k'\langle X, X\rangle - \langle Y, X\rangle = 0$. Logo:

$$k' = \frac{\langle Y, X\rangle}{\langle X, X\rangle}$$

isto é,

$$k' = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (1).$$

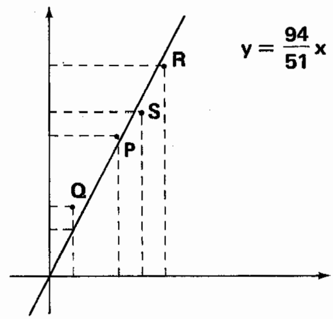
Como

$$\|k'X - Y\|^2 = \langle k'X - Y, k'X - Y\rangle = (k'x_1 - y_1)^2 + \ldots + (k'x_n - y_n)^2$$

e esta expressão é mínima quando k' é dado por (1) acima, o método de aproximação acima descrito chama-se *método dos mínimos quadrados.*

Exemplo – Uma experiência forneceu os seguintes valores:

$$(x_1, y_1) = (3, 6) = P$$
$$(x_2, y_2) = (1, 3) = Q$$
$$(x_3, y_3) = (5, 9) = R$$
$$(x_4, y_4) = (4, 7) = S$$



A reta que melhor se adapta a estes resultados no sentido dos mínimos quadrados é a reta $y = k'x$, onde

$$k' = \frac{\langle(3, 1, 5, 4), (6, 3, 9, 7)\rangle}{\|(3, 1, 5, 4)\|^2} = \frac{94}{51}$$

A reta $y = \dfrac{94}{51}x$ é aquela que "passa mais perto" dos pontos P, Q, R e S, no sentido de que a soma dos quadrados das distâncias medidas na vertical destes pontos a esta reta é o menor possível.

Suponhamos agora que z seja função linear de duas variáveis x e y com coeficientes desconhecidos ℓ e m, $z = \ell x + my$, e que foram feitas experiências (no mínimo duas) dando-se valores a x e a y e medindo o valor correspondente de z. Para fixar as idéias suponhamos feitas três medições dadas por:

$$z_1 = \ell x_1 + my_1, \quad z_2 = \ell x_2 + my_2 \quad \text{e} \quad z_3 = \ell x_3 + my_3.$$

Este sistema de equações lineares nas incógnitas ℓ e m é em geral incompatível. Devemos então encontrar valores aproximados ℓ' e m' que façam a expressão da direita aproximar-se o mais possível do valor observado para z. Para isso consideremos os vetores $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (z_1, z_2, z_3)$. Seja W o sub-espaço gerado por u e por v. Devemos escolher ℓ' e m' de modo que $\ell' u + m' v$ seja a projeção ortogonal de z sobre W. Para isso devemos impor que

$$\langle \ell' u + m'v - w, u\rangle = \langle \ell' u + m'v - w, v\rangle = 0$$

o que nos conduz ao sistema linear

$$<u, u>\ell' + <v, u>m' = <w, u>$$
$$<u, v>\ell' + <v, v>m' = <w, v>$$

Este sistema poderá ser resolvido univocamente se u e v forem linearmente independentes pois o seu determinamente vale

$$<u, u><v, v> - <u, v>^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - <u, v>^2$$

que é um número real estritamente positivo, devido à desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Exemplo – Seja a função $z = \ell x + my$ das variáveis x e y com coeficientes desconhecidos ℓ e m. Foram obtidos os seguintes resultados experimentais:

a) $x = 1 \quad y = 1 \quad z = 3;$

b) $x = 2 \quad y = -1 \quad z = 1;$

c) $x = 4 \quad y = 0 \quad z = -2.$

Neste caso $u = (1, 2, 4)$ e $v = (1, -1, 0)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$. Os valores aproximados ℓ' e m' são as soluções do sistema

$$2\ell \cdot \ell' - m' = -3$$
$$-\ell' + 2m' = 2$$

donde $\ell' = \frac{-4}{41}$ e $m' = \frac{39}{41}$. Portanto $z = -\frac{4}{41}x + \frac{39}{41}y$.

Um caso particular desse problema é o seguinte: encontrar a equação de uma parábola no plano xy, cujo eixo é paralelo ao eixo y e que melhor se ajuste aos pontos $P = (1, 2)$, $Q = (4, 1)$, $R = (-1, 0)$ e $S = (2, 3)$. Neste caso a equação da parábola deve ser da forma $y = \ell x + mx^2$. Como ela deve passar próxima dos pontos P, Q, R e S, ℓ e m devem ser aproximados por valores ℓ' e m' obtidos através do processo descrito acima. Teremos $u = (1, 4, -1, 2)$, $v = (1, 16, 1, 4)$ e $w = (2, 1, 0, 3)$. O sistema linear é:

$$22\ell' + 72m' = 12$$
$$72\ell' + 274m' = 30$$

donde:

$$\ell' = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 72 \\ 30 & 274 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 22 & 72 \\ 72 & 274 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad m' = \frac{\begin{vmatrix} 22 & 12 \\ 72 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 22 & 72 \\ 72 & 274 \end{vmatrix}}$$

Sugerimos ao leitor que represente em um sistema de coordenadas cartesianas os pontos P, Q, R e S e a parábola que foi calculada acima.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar a reta em $\mathbb{R}^2$ de equação $y = kx$ que melhor se adapte aos pontos P, Q, . . . nos seguintes casos:

   a) $P = (6, 9)$, $Q = (1, 2)$;

   b) $P = (6, 9)$, $Q = (1, 2)$ e $R = (5, 8)$;

   c) $P = (3, 0)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (1, 2)$.

   Representar as retas em um sistema de coordenadas cartesianas.

2. Suponhamos $z = \ell x + my$ e que foram obtidos experimentalmente os seguintes resultados:

   Se $x = 1$ e $y = 0$, então $z = 2$;

   Se $x = 0$ e $y = 1$, então $z = 3$;

   Se $x = 1$ e $y = 1$, então $z = 2$;

   Se $x = -1$ e $y = 1$, então $z = 0$.

   Encontrar a fórmula aproximada para z.

3. Supõe-se que $z = \ell x + my + nt$ é uma função linear de três variáveis x, y e t. Os seguintes resultados são obtidos experimentalmente:

   $x = 0, \quad y = 0, \quad t = 0 \rightarrow z = 1;$

   $x = 1, \quad y = 0, \quad t = 1 \rightarrow z = -1;$

   $x = 2, \quad y = 1, \quad t = 0 \rightarrow z = 3;$

   $x = 4, \quad y = 0, \quad t = -3 \rightarrow z = 4.$

   Encontrar a fórmula aproximada para z.

4. Encontrar um polinômio homogêneo do segundo grau cujo gráfico se ajuste bem aos pontos $P = (1, 2)$, $Q = (3, 1)$, $R = (4, 2)$ e $S = (2, 0)$.

5. Repetir o problema anterior com os pontos $P = (5, -1)$, $Q = (6, 2)$, $R = (4, 3)$ e $S = (2, -1)$.

6. Determinar um polinômio homogêneo de quarto grau cujo gráfico se ajuste aos pontos $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

RESPOSTAS DE ALGUNS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1ª PARTE

Obs.: Os números 1.1. 1. c) indicam capítulo 1, § 1, exercício nº 1, item c.

1.4. 1. b) $\left\{\left(-\frac{1}{2} - z, \frac{3}{2}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\right\}$.

3. Para $a = -2$ ou $a = 1$ incompatível; para $a \neq 1$ e $a \neq -2$, compatível determinado.

5. a) $\left\{\left(\frac{5}{3}t, -2t, -\frac{4}{3}t, t\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.

d) $\{(2z, 3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

1.6. 3. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ e

$Y = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = AB$

9. $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

12. Não. Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.8. 3. A é inversível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

B é inversível.

C é inversível e

$C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) $\{(2, -2)\}$;

c) $\left\{\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right\}$

5. $m \neq 2$.

9. $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Não.

2.2. 2. Não.

3. Não. Sugestão: Calcule $1 \cdot (x, y)$.

5. Não.

2.3. 1. 1) $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2) $X = -3A - 2B + 6C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$.

3) Não.

3. 1) $2t^3 + 3t^2 - t - 13$.

2) Não.

3) Não.

4. 2) $x = \left(\frac{16}{9}, -1\right)$; $y = \left(-\frac{1}{9}, 1\right)$ e $z = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

2.7. 1. a) Sim.

b) Não.

c) Não.

d) Sim.

e) Sim.

2. a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

3. a) *Não* pois não se verifica nenhum dos itens da definição; c) e d) *Não* pois não se verifica o último item da definição de sub-espaço para nenhum dos dois.

4. Todos são.

7. $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ e $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

9. 1) $\{(2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$.

2) $\{(2, 1, -2)\}$.

3) $\{(3, 0, 1); (-2, 1, 0)\}$.

4) $\{(2, 1, -2)\}$.

5) $\{(2, 1, -2); (3, 0, 1); (-2, 1, 0)\}$.

12. Sim.

13. No $\mathbb{R}^2$ considere $U = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

17. Considere os sub-espaços do exercício 14.

18. Tome no $\mathbb{R}^2$, $U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

21. $\begin{cases} 2x - t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

22. a) $[(0, 1, 0)]$.

b) $[(0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0)]$.

3.1. 1. 1) Não.

2) Sim.

3) Não.

4) Sim.

2. 1) Não.

2) Não.

3) Não.

4) Sim.

7. 1) $m \neq 0$;

2) $m \neq 5$;

3) $n \neq 0$ ou $m \neq 1$.

9. a) Não.

b) Sim.

c) Não.

3.6. 1. $\{(2, 1, 0, 1); (0, 0, 1, 0)\}$ e $\dim W = 2$.

2. 4.

3. $\dim (U + W) = 4$ (Logo $U + W = \mathbb{R}^4$).
$\dim (U \cap W) = 0$. Daí $U + W = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e $\emptyset$ é a base de $U \cap W$.

5.

	Base	Dimensão
U:	$\{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$	2
V:	$\{(1, 0, 0); (0, 2, 1)\}$	2
W:	$\{(1, 1, 0); (0, 0, 2)\}$	2
$U \cap V$:	$\{(0, 2, 1)\}$	1

$V + W = \mathbb{R}^3$

$U + V + W = \mathbb{R}^3$.

6. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

10. $\{(1, 1, 1, 0); (1, 1, 2, 1); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$.

11. $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq -1$.

14. $\{(1, 0, i); (1, 1 + i, 1 - i)\}$.

3.8. 1. 1) $4, -5$ e 3.

2) $3, -5$ e 2.

2. $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

4. $-3, 1, 0$ e 1.

5. $B = \left\{\left(1, \frac{-1}{3}\right); \left(0, \frac{2}{3}\right)\right\}$.

7. 1) De B para C é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

De C para B é $\begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2) $-2, 0$ e 1.

8. 2) De B para C é $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De C para B é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

4.2. 1. 1) Sim;

2) Sim;

3) Sim;

4) Não.

2. $F(x, y, z) = (2x + 5y - 2z, 3x + 2y, x + 7y + 7z)$.

3. Sobre C não é linear.

4. a) Sim;

b) Sim.

5. Não pois $f(2, 3, 4)$ deveria ser igual a $(2, 6, 12)$.

8. (I) $F(2, 4) = (8, 18)$;

(II) $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$.

4.5. 1. a) Base do Núcleo: $\{(1, 0, 1); (-1, 1, 0)\}$; dimensão do Núcleo: 2. Base da Imagem: $\{1\}$; dimensão da Imagem: 1.

c) Base do Núcleo: $\emptyset$; dimensão do Núcleo: 0. Base da Imagem: $\{(1, 1, 2, 0); (-1, 1, -1, -1); (-1, 1, 1, 0)\}$; dimensão da Imagem: 3.

d) Base do Núcleo: $\{1, t\}$; dimensão do Núcleo: 2. Base da Imagem: $\{t^2\}$; dimensão da Imagem: 1.

e) Base do Núcleo: $\emptyset$; dimensão do Núcleo: 0. $\mathrm{Im}(F) = M_2(\mathbb{R})$.

2. $F(x, y, z) = (2x + y, x - y, x + 2y)$.

3. $F(x, y, z, t) = (y - x, t, 0, 0)$.

4. $F(x, y, z) = (0, y, z)$.

6. a) $Ker(F) = \{(0, 0, 0)\}$. Logo F é bijetor (inversível). $F^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$.

7. $F(x, y, z) = \left(x + y - \frac{1}{2}z, x, x + y + \frac{3}{2}z\right)$ é inversível e $F^{-1}(x, y, z) = \left(y, \frac{1}{4}(3x - 4y + z), \frac{1}{2}(z - x)\right)$.

10. $F(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ é inversível e $F^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$.

5.1. 1. $(F + H)(x, y) = (x, x + 2y)$;
$(F \circ G)(x, y) = (y, 2x + 2y)$;
$(G \circ (F + H))(x, y) = (x + 2y, 2x + 2y)$.

2. $(F \circ G)(x, y, z) = (x + 3y - z, x + y + z, x \pm 2z)$;
$Ker(F \circ G) = \{y(-2, 1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$;
$Im(G \circ F) = \{x(1, 0, 1) + y(3, 1, 1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

4. Se n é ímpar, $F^n(x, y) = (y, x)$ e $F^n(x, y) = (x, y)$ se n é par.

5. $(I + F + F^2)(x, y) = (22x + 21y, 35x + 36y)$ não é isomorfismo pois $Ker(I + F + F^2) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

11. 2) $(I - F)(x, y, z, t) = (x, y - x, z - y - 2x, t - z - 2y - 3x)$ é isomorfismo pois $Ker(I - F) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

12. 1) $F^2(z) = i$;
3) $G^2(z) = -z$;

13. 1) e 2) Nenhuma das duas coisas;
3) Idempotente;
4) Nilpotente.

14. 1) $F^2(x, y) = (x, 2x + y)$;
2) $(F - I)(x, y) = (0, x)$.

19. Para todo $f(t) \in P_n(\mathbb{R})$, $D^{n+1}(f(t)) = 0$.

5.5. 1. $(F) = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} \\ \frac{10}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}$

2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $(2 \quad 1 \quad -1 \quad 3)$; 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. $(F)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Logo o traço de $(F)_B$ é 4.

6. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ +20 & -4 \end{pmatrix}$.

8. $F(x, y) = \frac{1}{5}(13x + y, 86x - 3y)$.

10. (I) $\left(2 \quad 0 \quad \frac{2}{3}\right)$;
(II) $\left(-1 \quad -1 \quad \frac{2}{3}\right)$.

12. $F(x, y) = (x, y)$, $F(x, y) = (x, bx)$,
$F(x, y) = (0, bx + y)$ e $F(x, y) = (0, 0)$.

14. $(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $G(x, y, z) = (x - y, 3y, -x - 3z)$.

5.Apend. 1. $(F_1 + F_2)(x, y, z) = 3x - 4y + 3z$;
$(2F_1 + 3F_2)(x, y, z) = 8x - 9y + 7z$.

3. (I) $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde $\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2}z$,
$\varphi_2(x, y, z) = -2x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}z$ e
$\varphi_3(x, y, z) = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z$;
(IV) $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde $\varphi_1(a + bt + ct^2) = a + c$, $\varphi_2(a + bt + ct^2) = b$ e
$\varphi_3(a + bt + ct^2) = -c$.

4. $\{(2, 2, 1)\}$.

7. (I) Sim; (II) Sim.

10. Sim.

12. $a = b = c = 0$.

6.3. 1. 1) $k > 9$.

3. $<f(t), g(t)> = -\frac{5}{3}$, $\|f(t)\| = \sqrt{\frac{331}{210}}$;
$\|g(t)\| = \sqrt{\frac{28}{15}}$ e $\|f(t) + g(t)\| = \sqrt{\frac{23}{210}}$.

4. Sim.

7. $\alpha > 0$.

9. $<A, B> = 1$, $\|A\| = \sqrt{3}$, $\|B\| = 1$ e $d(A, B) = \sqrt{2}$.

10. $\langle u, v\rangle = 7$, $\|u\| = \sqrt{6}$, $\|v\| = \sqrt{30}$, $d(u, v) = \sqrt{22}$, $\dfrac{u+v}{\|u+v\|} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(4, 3, 4, 3)$

$\cos(u, v) = \dfrac{7}{6\sqrt{5}}$.

12. $\dfrac{1}{2}$.

14. 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$.

18. (I) $\|u\| = \sqrt{15}$; (II) $\|f(t)\| = \sqrt{\dfrac{31}{30}}$;

(III) $\|A\| = \sqrt{10}$.

20. (I) $d(u, v) = \sqrt{2}$; $\cos(u, v) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(III) $d(A, B) = \sqrt{2}$ e $\cos(A, B) = \dfrac{1}{2}$.

22. Se $e_i \neq e_j$, $\cos(e_i, e_j) = \dfrac{1}{2}$ e $\cos(e_i, e_j) = 1$ se $e_i = e_j$.

6.6. 1. 1) $m = 1$ ou $m = 6$;

2) $(0, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

3) $(1, 0)$.

3. 1) $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); \left(-\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{4}{\sqrt{18}}, 0\right); \left(\dfrac{2}{\sqrt{153}}, \dfrac{-2}{\sqrt{153}}, \dfrac{1}{\sqrt{153}}, \dfrac{12}{\sqrt{153}}\right)\right\}$.

4. $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); (0, 0, 1)\right\}$.

5. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

7. 1) $\left\{1, 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}, \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\right.$.

2) $\left\{-\dfrac{b}{6}t^2 + bt - b \mid b \in \mathbb{R}\right\}$.

8. De W: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{11}}, \dfrac{-1}{\sqrt{11}}, \dfrac{-3}{\sqrt{11}}, 0\right)$; $(0, 0, 0, 1)$.

De $W^\perp$: $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); \left(\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \dfrac{-3}{\sqrt{22}}, \dfrac{2}{\sqrt{22}}, 0\right)\right\}$.

10. $\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{-2}{7}, \dfrac{-1}{7}\right)$.

12. $\left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{-2}{\sqrt{18}}, \dfrac{3}{\sqrt{18}}\right)\right\}$.

13. $g(t) = \dfrac{1}{20} - \dfrac{3}{5}t + \dfrac{3}{2}t^2 - t^3$.

19. 1) $v_1 = \dfrac{1}{3}(2, 2, -4)$ e $v_2 = \dfrac{1}{3}(7, 7, 7)$.

2) $v = \dfrac{1}{7}(18, 15, 16) + \dfrac{1}{7}(3, 6, -9)$.

22. $m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

23. $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

25. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} = B$

27. $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

7.2. 1. a) 1;

b) 1;

c) 1;

d) -1.

2. a) 1;

b) -2;

c) -3;

d) 2;

e) -8;

f) 24.

4. a) $-\lambda(\lambda + 2)$; b) $(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1)$.

5. a) $\lambda = 0$ ou $\lambda = -2$;

b) $\lambda = 2$ ou $\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

6. $p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1)$ e $p(A) = 0$.

7.3. 4. São iguais.

6. Zero.

7.4. 1. $A_{11} = -5$, $A_{12} = 4$, $A_{13} = -2$; $A_{21} = 1$ $A_{22} = -1$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = 3$, $A_{32} = -2$ e $A_{33} = 1$.

2. -3.

3. $3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$.

4. $2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} +$

$$+(-3)\det\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=35.$$

7.6. 1. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$ e $X=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

b) $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&-2&0\\1&3&-2\end{pmatrix}$ e $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}&\frac{11}{24}\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{8}\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ e

$$X=\begin{pmatrix}\frac{39}{24}\\\frac{11}{8}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

7.7. 1. 3.

2. Se $\dim V=n$, $\det H=\lambda^n$.

3. $\det F=0$ ou $\det F=1$.

4. $\det F=6$ e $\det F^2=36$.

8.3. 5. São formas bilineares: a), b), c), d) e h).

6. a) Matriz de $f(u,v)=x_1\cdot y_1$: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

b) Matriz de $f(u,v)=x_1\cdot y_2$: $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

c) Matriz de $f(u,v)=x_1\cdot(y_1+y_2)$: $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$.

d) Matriz de $f(u,v)=0$: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

h) Matriz de $f(u,v)=x_1y_2-x_2y_1$: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

7. a) $\begin{pmatrix}3&-3\\3&+1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}19&3\\33&21\end{pmatrix}$.

8. a) $b=c$;

b) $a=d=0$ e $b=-c$;

c) $ad=bc$.

9. a) $(\varphi\otimes\varphi)((x_1,x_2);(y_1,y_2))=$
$=2x_1y_1-2x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2$;

b) $(\psi\otimes\varphi)((x_1,x_2);(y_1,y_2))=$
$=2x_1y_1-2x_2y_1+x_1y_2-x_2y_2$;

c) $(\varphi\otimes\psi-\psi\otimes\varphi)((x_1,x_2);(y_1,y_2))=$
$=-3x_1y_2+3x_2y_1$.

10. $(\varphi\otimes\psi)((x_1,x_2);(y_1,y_2,y_3))=$
$=2x_1y_1+3x_2y_1+2x_1y_2+3x_2y_2-2x_1y_3-$
$-3x_2y_3$;
$(\psi\otimes\varphi)((x_1,x_2,x_3);(y_1,y_2))=$
$=2x_1y_1+2x_2y_1-2x_3y_1+3x_1y_2+3x_2y_2-$
$-3x_3y_2$;
Não existe $\varphi\otimes\psi+\psi\otimes\varphi$.

8.4. 1. $P^t\cdot A\cdot P=B$. Logo $A\approx B$.

2. a) $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Se $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $P^t\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot P=$
$=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

4. Em relação à base canônica $\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$.

5. $P^t=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$.

8.5. 1. No $\mathbb{R}^2$: $ax_1y_1+bx_2y_1+bx_1y_2+cx_2y_2$.
No $\mathbb{R}^3$: $ax_1y_1+bx_1y_2+cx_1y_3+bx_2y_1+$
$+dx_2y_2+ex_2y_3+cx_3y_1+ex_3y_2+fx_3y_3$.

2. $\mathbb{R}^2$: $ax_1y_2-ax_2y_1$.
$\mathbb{R}^3$: $ax_1y_2-ax_2y_1+bx_1y_3-bx_3y_1+$
$+cx_2y_3-cx_3y_2$.

8.6. 1. a) $f((x_1,x_2,x_3);(y_1,y_2,y_3))=\frac{1}{2}(2x_1y_1+$
$+2x_2y_2+2x_3y_3-2x_1y_2-2x_2y_1+4x_1y_3+$
$+4x_3y_1-x_2y_3-x_3y_2)$.

c) $f((x_1,x_2,x_3);(y_1,y_2,y_3))=x_1y_2+x_2y_1+$
$+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2$.

2. a) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-\frac{1}{2}\\2&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

8.7. 1. a) $q(y_1,y_2)=y_1^2$;

c) $q(y_1,y_2)=y_1^2-2y_2^2$;

e) $q(y_1,y_2)=4y_1^2-4y_2^2$.

3. a) $q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - \frac{5}{4}z_2^2 + \frac{9}{5}z_3^2$.

Substituição linear: $\begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{2}{5}z_3 \\ x_2 = z_2 + \frac{4}{5}z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

c) $q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - 10z_2^2 - \frac{19}{10}z_3^2$.

Substituição linear: $\begin{cases} x_1 = z_1 - 3z_2 - \frac{7}{10}z_3 \\ x_2 = z_2 - \frac{1}{10}z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

4. $q(z_1, z_2) = az_1^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a}\right)z_2^2$

Substituição linear: $\begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{b}{a}z_2 \\ x_2 = z_2 \end{cases}$

2ª PARTE

1.1. 1. a) $\sqrt{2}$ e $(1, \sqrt{2} - 1)$; $-\sqrt{2}$ e $(-1, \sqrt{2} + 1)$;

b) -1 e qualquer vetor não nulo;

c) Não há valores próprios reais.

2. a) 2 e (1, 0, 0); 3 e (5, 1, 1); -1 e (1, 3, -3);

b) 0 (duplo) e (1, 0, 0) e (0, 1, 0); 2 e (0, 0, 1);

3. 3 (triplo) e (1, 0, 0, 0) e (0, 0, 0, 1);
4 e (0, 0, 1, 0).

4. $p_T(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \ldots (\lambda_n - t)$.
Os valores próprios de T são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

5. a) $t^2 - 3t + 1$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$;

b) $t^2 - 4$; ± 2;

c) $t^2 - 3t + 2$; 1 e 2;

d) $t^2 - 4$; ± 2.

6. $p_A(t) = (t - 2)^3(t - 3)$; 2 (duplo) e 3.

7. 1 (duplo); não há.

8. $p_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \ldots (a_{nn} - t)$.

1.2. 1. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) Não existe.

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 & -7 \\ 2 & 1 & -37 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. a) É diagonalizável pois o valor próprio -1 (duplo) tem multiplicidade geométrica 2;

b) É diagonalizável para todos os valores de *m* e *n*;

c) É diagonalizável pois há 2 valores próprios (duplos) 3 e -3 com multiplicidade geométrica 2;

d) É diagonalizável pois o valor próprio 2 (triplo) tem multiplicidade geométrica 3.

1.3. 6. *Resolução*: A é a matriz de um operador auto-adjunto T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$. Pelo teor. 2 existe uma base ortonormal C do $\mathbb{R}^n$ formada de valores próprios de T. Se P é a matriz de mudança de B para C: $P^{-1} \cdot (T)_B \cdot P = (T)_C$. Como $P^{-1} = P^t$, pois as bases são ortonormais, a resolução está concluída.

1.5. 1. a) $A^p = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 + 14^p & 4 \cdot 14^p - 4 \\ 3 \cdot 14^p - 3 & 12 \cdot 14^p + 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $e^A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} e^{14} + 12e & 4e^{14} - 4e \\ 3e^{14} - 3e & 12e^{14} + e \end{pmatrix}$.

1.7. 1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) $p_J(t) = (\lambda - t)^n$
b) $\dim V(\lambda) = 1$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 1. a) Hipérbole
b) Hipérbole
c) Duas retas

2. a) $\frac{x_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{2} = 1$ (hipérbole)

3. a) Elipsóide
d) $x_1^2 + 2z_1^2 = 1$: superfície cilíndrica de diretriz elíptica

4. b) $\lambda = -1$: parábola
$\lambda < -1$: hipérbole

$$\lambda > -1 \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}\text{: um ponto} \\ \lambda > \frac{3}{2}\text{: vazio} \\ \lambda < \frac{3}{2}\text{: elipse} \end{cases}$$

3.2. 1. a) $L_0 = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)$, $L_1 = -t^2 + 2t$, $L_2 = \frac{1}{2}(t^2 - t)$.

2. a) $t^2 = L_1 + 4t^2$;
b) $t^2 + t + 1 = L_0 + 3L_1 + 7L_2$,
c) $1 = L_0 + L_1 + L_2$.

3. $L_0 = \frac{1}{24}(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$,

$L_1 = -\frac{1}{6}t(t-2)(t-3)(t-4)$,

$L_2 = \frac{1}{4}t(t-1)(t-3)(t-4)$,

$L_3 = -\frac{1}{24}t(t-1)(t-2)(t-4)$,

$L_4 = \frac{1}{24}t(t-1)(t-2)(t-3)$;

$t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 = L_0 + L_1 + 19L_2 + 97L_3 + 301L_4$

$3t^4 - 2t^3 + t^2 - t + 5 = 5L_0 + 6L_1 + 39L_2 + 200L_3 + 657L_4$.

4. $\frac{10}{3}$; $\frac{19}{2}$.

7. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.1. 1. a) $\{2^n, (-1)^n\}$;
b) $\{1, (-2)^n\}$;
c) $\{(1+\sqrt{3})^n, (1-\sqrt{3})^n\}$;
d) $\left\{\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^n \cos n\varphi, \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^n \operatorname{sen} n\varphi\right\}$ onde $\varphi = \arg\left(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11})\right)$;
e) $\{(\sqrt{5})^n \cos n\varphi, (\sqrt{5})^n \operatorname{sen} n\varphi\}$ onde $\varphi = \arg(1 + 2i)$;
f) $\{3^n, n3^n\}$;
g) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right\}$;
h) $\{1, (-1)^n\}$.

2. $\{1, 2^n, 3^n\}$.

3. $\{1, (-1)^n, 2^n, 3^n\}$.

4. $5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2$.

5. $a_n = \frac{c}{2^n}(1+\sqrt{5})^n + \frac{d}{2^n}(1-\sqrt{5})^n$ onde *c* e *d* são as soluções do sistema linear $(1+\sqrt{5})c + (1-\sqrt{5})d = 2$ e $(1+\sqrt{5})^2c + (1-\sqrt{5})^2d = 8$.

5.1. 1. a) $-2 \operatorname{sen} t$;
c) $13e^{2t}$;
e) $13e^{2t} - 5$;
g) $e^{t^2}(8t^3 + 4t^2 + 14t + 1)$;
i) $-t^3 + 2t^2 + 7t + 10$.

2. a) $\omega \cos \omega t$;
c) $(-\omega^2 + \omega) \operatorname{sen} \omega t$;
e) $(-\omega^2 + \omega^3) \operatorname{sen} \omega t$.

3. a) $-\omega \operatorname{sen} \omega t$;
d) 0.

5.2. 1. a) $D^5 - D^3 + 5D^2 - 3D - 2$;
d) $5D^3 - 19D^2 + 13D - 3$.

3. Funções constantes; polinômios de grau $n - 1$.

4. Sim.

5. $4e^{2t}$.

6. $t + 3$.

7. Polinômios da forma $at + (5 - 2a)$.

5.3. 1. a) $f' = 0$;
c) $f^{(n)} = 0$;
e) $f'' - 3f' + f = 0$;
g) $f'' + \omega^2 f = 0$;
i) $f'' = f$.

2. a) D^2;
c) $D^{(n)} + D^{(n-1)} + \ldots + D + 1$;
e) $D^2 + 1$.

3. a) f constante;
c) ke^t;
d) ke^{at}.

5. c) $\alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

d) $t + \alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t$.

6. c) $e^t(\alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

d) $e^t \cos t - 2 e^t \operatorname{sen} t$.

5.4. 1. a) $\alpha e^t + \beta e^{-2t}$;

c) $\alpha \cos 2t + \beta \operatorname{sen} 2t$;

e) $\alpha e^{2t} + \beta e^{4/3t}$;

g) $\alpha e^t + \beta t e^t$.

2. a) $2(\operatorname{sen} \sqrt{2}\, t + \cos \sqrt{2}\, t)$;

b) $e^{3/2t} + 2te^{3/2t}$;

c) $-e^{2t} + 4e^t$.

4. a) $f'' + 8f' + 16f = 0$;

b) $f'' - 9f = 0$;

c) $f'' - 4f' + 20f = 0$.

5. $e^t(2 \cos 5t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5t)$.

5.5. 1. a) $\alpha e^{2t} + \beta e^{-3t}$;

c) $\alpha + \beta e^{-2t} + \gamma e^t$;

e) $\alpha + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} + \delta t^2 e^{2t}$;

g) $\alpha e^{5t} + \beta t e^{5t}$;

i) $\alpha \operatorname{sen} \omega t + \beta \cos \omega t$.

5.6. 2. a)

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2t} \\ e^t \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2t} \end{pmatrix}$$

6. b)

$$X(t) = \begin{pmatrix} (1 + t^2)e^{2t} \\ 1 - e^{2t} + 3te^{2t} \\ t^2 e^{2t} \\ -1 + e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}$$

6.1. 1. a) 5;

c) 3;

e) 26.

4. a) $\frac{8}{17}(4, 0, 0, 1)$;

b) u;

c) $\frac{19}{5}(1, 1, 1, 1, 1)$.

5. a) $\frac{7}{6}u_1 + u_2 + 2u_3$.

6. (x, y, 0).

9. $[g]^\perp$ e $[g]$.

6.2. 1. a) $\frac{1}{2}(3, 3)$;

b) (2, 1);

c) (0, 0, 0);

d) $\frac{7}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

2. a) 1;

c) 12.

6.3. 1. a) $k = \frac{7}{5}$;

b) $k = \frac{53}{31}$;

c) $k = \frac{2}{7}$.

2. $l' = \frac{4}{3}$, $m' = \frac{5}{3}$.

3. $l' = \frac{37}{539}$, $m' = \frac{1.533}{539}$, $n' = \frac{-60}{49}$.

BIBLIOGRAFIA

01. AYRES JR., F.— *Equações Diferenciais*, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1959.
02. BIRKHOFF, G. *A Survey of Modern Algebra*, N.Y., Macmillan, 1965.
03. DETTMAN, J. W. — *Introduction to Linear Algebra and Differential Equations*, N.Y., McGraw-Hill, 1974.
04. FLETCHER, T. J. — *Linear Algebra throught its applications*, N.Y., Van Nostrand, 1972.
05. GOLOVINA, L. I. — *Algebra Linear y algunas de sus aplicaciones*, Editorial Mir, 1974.
06. GOODMAN, A. W. (et al) — *Finite Mathematics with applications*, N.Y., Macmillan, 1971.
07. GREUB, W. — *Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1975.
08. HOFFMAN, K. (et al) — *Linear Algebra*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1961.
09. KREIDER, D. L. (et al) — *Equações Diferenciais*, S.P., Edgard Blücher, 1972.
10. LANG, S. — *Linear Algebra*, Reading, Addison-Wesley, 1971.
11. LIPSCHUTZ, S. — *Linear Algebra*, Schaum's outline series, 1968.
12. MONTEIRO, L. H. J. — *Algebra Linear*, S.P., 1962.
13. NOBLE, B. — *Applied Linear Algebra*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969.
14. QUEYSANNE, M. — *Algèbre*, Paris, Armand Colin, 1964.

ÍNDICE REMISSIVO