Aqui um breve ressumo sobre cálculo de limites. Estas notas não substituim as aulas. Notará algumas coisas faltando aqui, isso porque algumas definições foram apresentadas em sala de aula e não serão repetidas aquí. Os exemplos também estão sem resolver e serão, seguramente, resolvidos em sala.

Sumário

1 limites de funções elementares

Em esta primeira seção vemos como calcular limites das *funções elementares*. Seria bom que, além de estudar o que aqui se descreve, você represente os gráficos de cada uma destas funções em geogebra (ou wolfram). Se assume um certo dominio das funções elementares e seus gráficos. Se você não lembrar, dedique um tempinho a relembrar estas questões.

1.1 Funções Polinómicas

Se f e uma função polinómica e $a \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ainda mais, se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ então

- Se f tem grau par então $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = sinal(a_n) \cdot \infty$.
- Se f tem grau impar então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = sinal(a_n) \cdot (+\infty)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = sinal(a_n) \cdot (-\infty)$.

  Lembre as propriedades das potências:

- $x^0 = 1$,
- $x^1 = x$,
- $x^n x^m = x^{n+m}$,
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$,
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$,
- $x^n y^n = (xy)^n$,
- $\frac{x^n}{y^n} = (\frac{x}{y})^n$.

onde n e m podem ser números racionais (e não apenas inteiros) lembrando que $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{p}$.

1.2 Raizes

Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Se a está no dominio de f então $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. Aquí é preciso ter cuidado pois as raízes pares têm domínio $[0, +\infty[$ e as impares $\mathbb{R}$. Para os limites no infinito tem-se:

- Se n é par: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- Se n é impar $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

1.3 Funções exponenciais

Seja $b > 0$. Consideramos a função exponencial com base b, isto é, $f(x) = b^x$.[1] Lembre que o dominio desta função é $\mathbb{R}$. Se $a \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x\to a} b^x = b^a$. Para os limites em $\pm\infty$ precisamos distinguir dois casos:

- Se $b > 1$ (exponencial crescente) então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Se $0 < b < 1$ (exponencial decrescente) então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Lembramos as propriedades das exponencias:

- $b^0 = 1,\ b^1 = b$,
- $b^x b^y = b^{x+y}$,
- $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$,
- $b^x c^x = (bc)^x$,
- $\frac{b^x}{c^x} = (\frac{b}{c})^x$.
- $b^{log_b(x)} = x$,
- $b^x = e^{c\ln(x)}$ (esta proprieade vai ser útil para lidar com algumas indeterminações que encolvem exponentes).

1.4 Funções logaritmicas

Seja $b > 0$. Consideramos a função exponencial com base b, isto é, $f(x) = \log_b(x)$. Lembre que o domínio desta função é $\mathbb{R}^+$. Também sería bom, se não você não lembrar, que procure as propriedades dos logaritmos. Em primeiro lugar, se $a \in \mathbb{R}^+$ (isto é, se a está no domínio) então $\lim_{x\to a} \log_b(x) = \log_b(a)$. Para os limites em 0^{+}[2] e $+\infty$ distinguimos dois casos:

- Se $b > 1$ (logaritmo crescente) então $\lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

[1] Estou usando a letra b para a base para que não haja confusão com o ponto onde se calcula o limite, para o qual estamos usando desde o inicio do curso a letra a.

[2] è claro que aquí o limite em $a = 0$ pela esquerda não pode ser estudado, né?

- Se $0 < b < 1$ (exponencial decrescente) então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Lembramos as propriedades dos logaritmos:

- $\log_b(1) = 0,\ \log_b(b) = 1$,
- $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$,
- $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$,
- $\log_b(x^y) = y\log_b(y)$,
- $log_b(b^x) = x$.

Lembre também que ln é o logaritmo em base e.

1.5 Funções trigonométricas

O dominio da função $f(x) = sen(x)$ é $\mathbb{R}$. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que $\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a)$. A função seno **não tem** limite em $-\infty$ e também não em $+\infty$.

O dominio da função $f(x) = cos(x)$ é $\mathbb{R}$. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que $\lim_{x\to a} cos(x) = cos(a)$. A função cosseno **não tem** limite em $-\infty$ e também não em $+\infty$.

O domínio da função tangente é um pouco mais complicado. Ele é a união de todos os intervalos da forma $]k\frac{\pi}{2}, (k+2)\frac{\pi}{2}[$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e impar. Isto porque esta função tem "problemas"nos números da forma $k\frac{\pi}{2}$ com k inteiro e impar[3] (por exemplo, $-5\frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, , \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$, etc). Isto pode se ver mais claramente no gráfico da função[4]. Nos pontos problemáticos a função tem assintotas verticais. Assim, por exemplo em $a = \frac{\pi}{2}$ tem-se

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tan(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tan(x) = +\infty,$$

e análogamente com os outros pontos "problemáticos"(lembre que esta função é periódica com periodo π).

Por outro lado e a está no dominio de $tan(x)$ então $\lim_{x\to a} tan(x) = tan(a)$.

[3] esses são os pontos onde o cosseno vale 0

[4] Veja com geogerba ou wolfram alpha

1.6 Funções trigonométricas inversas

Vamos aqui descrever apenas a função *arcotangente*. Você deverá porucurar informações sobre outras funções trigonométricas inversas (arcoseno e arcocosseno). A função $f(x) = arctan(x)$ tem dominio $\mathbb{R}$. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2} \text{ e } \lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Observe que, para as funções elementares, o que esta seção mostra é que para calcular $\lim_{x\to a} f(x)$, isto se faz simplesmente por substitução, isto é, que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

1.7 Restrições de funções elementares

Nem sempre vamos ter nossas funções definidas no maior dominio possivel. Mas o dominio de nossa função, claro, deve ser sempre um subconjunto do "maior dominio possivel desta". Ter uma função definida em um conjunto menor é o que chamamos de **restringir**. Por exemplo a função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$ é a restrição de ln para o conjunto $[1, 2]$.

Isto não é muito grave, se a é um ponto do novo domínio então calculamos o limite da função também como sendo $f(a)$.

Propriedade 1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função elementar e $a \in I$. Então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Esta propriedade não diz como calcular o limite em pontos de acumulação de I que não pertencem a I. Assim, por exemplo para $f : [1, 2[, f(x) = sen(x)$, esta propriedade diz como podemos calcular o limite da função se a for um ponto qualquer do intervalo $[1, 2[$ mas não diz como calcula-lo em $a = 2$. Depois veremos como lidar com isso.

Claro que se não especificamos o dominio da função, podemos supor que este é o maior possivel.

2 Álgebra de limites

A partir das funções elementares podemos criar outras funções mais gerais mediante as operações algébricas (ou também mediante composição). Vamos ver como o limite (**quando existir**) é bem comportado em relação às operações algébricas (também em relação à composição). Muito **cuidado** aquí, estas propriedades são validas quandos os limites existem (e, inclusive, alguma delas têm outras restrições adicionais).

Propriedade 2 *Sejam f e g duas funções tais que existem* ***ambos*** $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$. *Então:*

1. *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,
3. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x\to a} f(x)) \cdot (\lim_{x\to a} g(x))$,
4. Se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ *então* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.[5]

Observação 3 *As propriedades acima são também validas para limites à esquerda, ou para limites à direita (e só trocar $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$ lá acima).*

Exemplo 4

- $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} + \frac{x}{1+x}$,
- $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x + 1 + arctan(x)$,
- $\lim_{x\to \pi} sen(x)e^x + sen(\frac{\pi}{2}x)$
- $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}+x^2}{(x-2)^2+1}$.

Exercicio 1 *Da lista 2.3 do Stewart: 1,2,3,4,5 e 7.*

2.1 Composição com funções elementares

Vamos ainda ampliar um pouco a lista de funções com as quais podemos calcular limites fácilmente (mediante "substituição").

Propriedade 5 *Seja f uma função tal que existe* $\lim_{x\to a} f(x)$, *então:*

1. $\lim_{x\to a} f(x)^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$,
2. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, *(se n é par então o limite tem que ser ≥ 0. por qué?)*
3. $\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)}$,
4. $\lim_{x\to a} \log_b(f(x)) = \log_b(\lim_{x\to a} f(x))$ *(é preciso que* $\lim_{x\to a} f(x)$ *seja positivo)*
5. $\lim_{x\to a} sen(f(x)) = sen(\lim_{x\to a} f(x))$,

[5] A restrição é porque não podemos dividir entre zero

6. $\lim_{x\to a} cos(f(x)) = cos(\lim_{x\to a} f(x))$,

Observação 6 *As propriedades acima são também validas para limites à esquerda, ou para limites à direita (e só trocar $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$ lá acima).*

Exercicio 2 *Escreva a propriedade acima para as funções trigonométricas e trigonométricas inversas que faltam (em alguns casos serão necessarias restrições sobre o valor do limite).*

Esta propriedades são consequência de uma propriede mais geral sobre a relação entre o limite e a composição com uma função "continua"que veremos depois.

Exercicio 3 *Calcule os limites seguintes:*

1. $\lim_{x\to a} \ln(x^2-1)$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x^2+2x-5}}{4x-cos(\pi x)}$
3. $\lim_{t\to 0} e^{t^2} + 5sen(3t)$
4. $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{(x+3)^4 - 6x + 5}$
5. $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3-4x+\ln(2x^2-1)}{x^3-sen(\pi x)}$.
6. $\lim_{x\to 0} e^{sen(x+2\pi)}$.

2.2 Uma pequena melhora da propriedade de substitução

Considere a função $f : [0,1[, f(x) = x^2$. Se queremos calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ isto não pode, em principio, se fazer por substituição pois "$f(1)$"nem faz sentido. Agora conseideramos a função $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. De novo, o limite em $a = 1$ não pode ser obtido mediante substitução pois estariamos dividindo entre zero.

Pois bem, ambas funções poderão ter seu limite calculado por "substitução"só que para que esta substitução possa acontecer o que fazemos é trocar a função por outra que não apresenta os problemas que a função original tinha (na primeira o problema é o dominio, na segunda a regra de formação).

Definição 7 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções. Diremos que f é a restrição de g para o conjunto I se $I \subset J$ e $f(x) = g(x)$ para todo ponto x em I. Denotamos isto mediante $g_{|I} = f$.*

Ou seja, f é a restrição de g se o dominio de g é maior que o dominio de f e f e g são iguas nos ponto do dominio de f. Também dizemos em este caso que g extende a f.

Propriedade 8 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções tais g é extende a f. Suponha que a é um ponto de acumulação do dominio de f e que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Vamos ver como esta propriedade pode ser aplicada ás funções com as quais temos começado a seção. Seja $f : [0, 1[, f(x) = x^2$. Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$. Então $g(x) = f(x)$ nos pontos do dominio de f. Agora, dado que g é uma função elementar (um polinomio) e $a = 1$ está no dominio de g então $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$. Agora, pela propriedade 8 temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 1$.

O que aconteceu aquí foi a seguinte: não podíamos calcular o limite mediante substitução mas era apenas porque o intervalo de definição da função era aberto em 1. Porém, a regra de formação que define nossa função (x^2) não tem problema para se definir em todo o $\mathbb{R}$.

Quando algo assim aconteça, calculamos o limite simplesmente substituindo o ponto a na formula que define a função (mas não escrevemos "f(a)"!).

Os passos a serem seguidos para fazer isso certinho são:

- Verficiar que a é um ponto de acumulação do dominio de f,
- Verificar que a, apesar de não estar no dominio de f, está no dominio "natural"da função cuja regra de formação é a mesma que a de f. Chamamos esta função de g.
- Calculamos o limite para g. Esse será também o limite de f.

Nem cada vez você calcule um limite como esse você precisa fazer todos os passos descritos acima. Mas deveria faze-lo passo a passo até ficar claro para você como é que funciona o negocio. Uma hora ficará tão simples como a taboa do zero.

Exemplo 9 *Calcule o limite da função no ponto indicado (se possivel) usando a propriedade 8:*

1. $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}, f(x) = sen(x)$ *em* $a = -1, a = 0, a = 1$.
2. $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}, f(x) = sen(x)$ *em* $a = 2$.

3. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ *em* $a = 0$.

4. $f :]2, 3[\to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4 + e^{x^2-9}, a = 3$.

Para a segunda função procedemos de forma diferente. Em este caso mudamos a regra de formação. Observe que $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{1}{x+1}$ para $x \neq 1$. Definimos a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x+1}$. Obviamente $lim_{x\to 1} h(x) = \frac{1}{2}$. Mas é claro também que $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ exceto apenas em $x = 1$. Então $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = \frac{1}{2}$.

Em este caso temos "arrumado"a regra de formação para que não tenha "problemas"em $x = 1$, de forma que a nova função está definida em este ponto. O tipo de problema que encontramos em este limite é chamado de indeterminação. Veremos mais sobre como resolver este tipo de situações mais em adiante.

Exercicio 4 *Exercicios 11 ao 16 da lista 2.3 do Stewart.*

A seguinte propriedade diz que para calcular o limite de uma função em um ponto a, o valor da função em esse ponto não é importante, o realmente relevante é o valor da função nas imediações do ponto.

Propriedade 10 *Sejam f e g duas funções que são iguais em qualquer ponto exceto em a (onde pode acontecer que $f(a) \neq g(a)$ ou também que alguma das duas nem esteja definida em a). Suponha que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Por exemplo, as funções $f(x) = \begin{cases} e^x & x \neq 0 \\ 50 & x = 0 \end{cases}$ e $g(x) = e^x$ coincidem em todo ponto exceto em $x = 0$, porém a propriedade acima garante que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$.

Esta propriedade pode ser também usada no exemplo anterior ao exercicio 4.

2.3 Limite e ordem

As seguintes propridades nos dizem como o limite é bem comportado em relação à ordem, pois ele mantem desigualdades entre funções. Dado um ponto a em $\mathbb{R}$, chamamos de vizinhaça de a a todo intervalo que contem o ponto a. Por exemplo, $]-1, 1[$ é uma vizinhança de 0 mas $]1, 2[$ não é.

Propriedade 11 *Sejam f e g duas funções tais que $f(x) \leq g(x)$ em alguma vizinhança de a (mas talvez não em a). Se existem ambos* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$ *então*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemplo 12

- $f(x) = sen(x)$,
- $f(x) = x^2 sen(x)$

Propriedade 13 (Teorema do confronto) *Sejam f, g, h e suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (em uma vizinhança de a) e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. *Então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é limitada se existem $m, M > 0$ tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in I$. Uma importante consequência do Teorema do Confronto é a seguinte: Se f é limitada *em uma vizinhança de a* e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} g(x)f(x) = 0$.

A graça é que o limite de f em a nem precisa existir, se ela for limitada e multiplicamos por uma função que tende a zero em a, então o resultado será uma função que tende a zero em a. Exemplo: $f(x) = xsen(\frac{1}{x}a = 0$.

Exercicio 5 *36 ao 40 da lista 2.3 do Stewart.*

2.4 Limites de funções definidas por partes

Seja $f(x) = \begin{cases} g(x) & x < b \\ h(x) & x \geq b \end{cases}$ onde supomos que g e h são duas funções cujos limites laterais sabemos calcular.

Este é um exemplo típico de função definida por partes. O mais habitual, à hora de calcular limites para uma função deste tipo é o seguinte:

Queremos estudar a exsitência de limite de f em um ponto a então:

- Se $a < b$ então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$,
- Se $a > b$ então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$,
- Se $a = b$ então $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Exercicio 6 *41 ao 50 da lista 2.3 do Stewart*

O estudo de funções definidas por partes que tenham mais de dois partes é totalmente análogo.

Exemplo 14 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x+2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+2 & x > 1 \end{cases}$

Observação 15 *Sempre que uma função venha definido mediante o módulo de outra função, teremos uma fução definida por partes* escondida. *Isto porque, de fato, $|x|$ é uma função definida por partes. Lembre que*

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, tem-se

$$|g(x)| = \begin{cases} -g(x) & g(x) < 0 \\ g(x) & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Por exemplo,

$$|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & x-2 < 0 \\ x-2 & x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+2 & x < 2 \\ x-2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 16 *Estude os limites laterais em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, h(x) = x + \frac{|x|}{x}$.*

3 Contínuidade

No melhor dos casos, o limite de uma função se pode obter simplesmente se calculando o valor da função no ponto. Quando isto acontece, se diz que a função é contínua em esse ponto. Outras vezes calcular $f(a)$ nem faz sentido, pois o ponto pode não estar no domínio da função, mas em alguns casos dá para salvar a situação para continuar calculando o limite "substituindo"em algum sentido (extendendo), como já temos visto. Começamos definindo um pouco mais formalmente o qué é uma função contínua.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I$ (**atençao**, aqui o ponto tem que estar no dominio da função!). Diremos que f é contínua em a se valem as seguintes afirmaçoes:

- Existe $\lim_{x\to a} f(x)$,
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Segue das propriedades do limite que somas, produtos e quocientes de funções continuas em a são também funções continuas em a.

Propriedade 17 *Sejam f e g são continuas em a então:*

1. *λf é continua em a ($\lambda \in \mathbb{R}$),*
2. *$f + g$ é continua em a,*
3. *$f \cdot g$ é continua em a,*
4. *Se $g(a) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é continua em a.*

Observe que ao dizermos que as funções são continuas em a já está implicito que o ponto a está no dominio de ambas funções, se não nem faría sentido falar de continuidade em esse ponto.

Exercicio 7 *12,13 e 14 da Lista 2.5 do Stewart*

Se J é um subconjunto do dominio de f, diremos que f é contìnua no conjunto J, se ela é contínua em todo ponto do conjunto.

Pelo que temos já temos visto até agora temos:

- As funções elementares são continuas em todo ponto do seu dominio (cada uma no dominio dela, claro).
- A soma de funções continuas é uma função continua. Em particular, a soma de duas (ou mais) funções elementares é continua.
- O produto de duas (ou mais) funções continuas é uma função continua.
- A divisão de duas funções continuas é continua.

As afrimações acima estão escritas de forma que possam ser lembradas facilmente, mas há um detalhe importante a ser tido em conta. Quando dizemos continuas...continuas onde? A resposta é: continuas no seu dominio. Lembre que se f está definida em I e g está definida em J, então $f + g$ e $f \cdot g$ estão definidas em $I \cap J$. Assim, se f é continua em I e g é continua em J, então $f + g$ e $f \cdot g$ são continuas sim, mas em todo ponto onde elas estejam definidas, claro, portanto em $I \cap J$.

Já o caso de $\frac{f}{g}$ é um pouco mais delicado, pois ela é continua no conjunto $\{x \in I \cap J : g(x) \neq 0\}$ (pois sempre temos que evitar os zeros no denominador).

Exemplo 18 $f(x) = \frac{x^3-1}{3x^2+2x}$.

Exercicio 8 *1. A função $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ é continua em todo ponto de $[0, +\infty[$ por qué?*

2. A função $f(x) = \ln(x) + \sqrt{x}$ é contínua em $]0, +\infty[$, por qué?

3. A função $f(x) = x^2 + e^x$ é continua em $\mathbb{R}$ por qué?

4. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é continua em ...?

5. Exercicios 15 ao 16 e 25 ao 32 da Lista 2.5 do Stewart

A seguinte propriedade diz sobre o limite e a composição de funções conitnuas.

Propriedade 19 *Se f é continua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$ então*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b).$$

A propriedade acima não é mais que uma versão mais geral de uma propiedade similar que já foi enunciada, mas daquela vez só envolvendo funções elementares.

Exemplo 20 *Calcule os limites:*

1. $sen(x^2 - 1)$ *em* $a = 1$,
2. $\ln(e^x + 1)$ *em* $a = 0$,
3. $\sqrt{sen(x)}$ *em* $a = \frac{\pi}{4}$,
4. e^{x^2+2x+1} *em* $a = 0$.

A composição de funções continuas também é bem comportada em relaçao à continuidade.

Propriedade 21 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(I) \subseteq J$ e $a \in I$. Se f é continua em a e g é continua em $f(a)$ então $f \circ g$ é continua em a.*

Em particular, se f for uma função elementar temos o seguinte:

1. Se g é continua então $g(x)^n$ é continua,
2. Se g é continua então $\sqrt[n]{g(x)}$ é continua (se n é par, então a imagem de g deverá ser um sunconjunto de $[0, +\infty[$).

3. Se g é continua então $b^{g(x)}$ é continua,
4. Se g é continua e tem imagem contida em $\mathbb{R}^+$ então $\log_b(g(x))$ é continua,
5. Se g é continua então $sen(f(x))$ é continua,
6. Se g é continua então $cos(f(x))$ é continua.

Exercicio 9 *Escreva a propriedade acima para as funções trigonométricas e trigonométricas inversas que faltam.*

Exercicio 10 *Diga onde são continuas as funções:*

1. $\sqrt{9-x}$,
2. $\sqrt{9-x^2}$,
3. $\ln(1-x)$,
4. $sen(9-x)$,
5. $e^{\sqrt{x}}$,
6. $\sqrt[3]{sen(x)}$,
7. $\ln(x^2+2x+1)$,
8. $arctan(\frac{1}{x})$,
9. $\sqrt{e^x+1}$.

Propriedade 22 *Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (onde L pode ser um número ou $\pm\infty$) então*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Propriedade 23 *Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ (onde L pode ser um número ou $\pm\infty$) então*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

De fato, as propriedades acima são validas também para limites laterais e até para limites no infinito (isto é, trocando a por $+\infty$ ou por $-\infty$).

Exemplo 24 *1.* $\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)$,

2. $\lim_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)$,

3. $\lim_{x\to 1^+} arctan(\frac{1}{x-1})$,

4. $\lim_{x\to+\infty} arctan(\ln(x^2+1))$.

5. $\lim_{x\to 0^+} arctan(\ln(x))$,

3.1 O gráfico de uma função contínua

Como saber se uma função é continua só pelo gráfico? O habitual é dizer que uma função é contínua se pode se desenhar o gráfico dela sem levantar a caneta do papel.

A função $f:]0,1[\cup]2,3[, f(x)=x^2$ é contínua mas o gráfico dela não pode se desenhar sem levantar a caneta do papel. Claro que o problema aquí é que o dominio dela não é um intervalo.

Para evitar o tipo de problema acima, podemos então dizer que *se o dominio da função é um intervalo* então ela será continua se o gráfico dela pode se desenhar sem levantar a caneta do papel.

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xsen(\frac{1}{x})$ é continua em todo $\mathbb{R}$. Desenhe o gráfico desta função em geogebra e faça zoom na origem de coordenadas. Você acha que conseguiría desenhar esse gráfico com sua caneta?

O que sempre me contaram estava errado? Bom, é verdade exceto em casos como a função anterior, a qual é continua em $a=a$ mas oscila muito nas imediações desse ponto. Então podemos dizer o seguinte:

Se o dominio da função é um intervalo e não há um ponto onde a função oscile muito, entõ a função será continua se dá para desenhar o gráfico dela sem levantar a caneta do papel.

Assim, se (via o gráfico) queremos encontrar pontos onde a função não seja continua, deveremos procurar saltos ou buracos no gráfico. Por certo, um ponto onde a função não seja continua é o que chamamos de *descontinuidade*.

3.1.1 Descontinuidades

Seja $f: I\to\mathbb{R}$ e $a\in I$. Se f noã é continua em a então diremos que f é discontinua em a. Também diremos que a é uma descontinuidade da função f. As descontinuidades podemos ser classificados nos seguintes tipos:

- **Evitável.** Se $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$ mas $f(a)\neq\lim_{x\to a^-} f(x)$ (isto equivale, claro, a que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ seja diferente de $f(a)$).

- **Não evitável de primeira especie**. Existem ambos os límites laterais mas são diferentes.
- **Não evitável de segunda especie**. Se algum dos limites laterais não existir. Isto pode ser devido a que algum dos limites laterais seja infinito ou a oscilações (como em $sen(\frac{1}{x})$.)

Exercicio 11 *Exercicios 3 ao 8 e 41 ao 43 da lista 2.5 do Stewart.*

4 Propriedades das funções continuas

Em esta seção vamos ver duas propriedades muito importantes das funções continuas: O Teorema do valor intermediario e o Teorema dos zeros de Bolzano. O primeiro é muito util para calcular imagens de funções, já o segundo tem como principal aplicação encontrar raizes de uma função.

Teorema 25 *Seja f uma função continua no intervalo $[a, b]$. Então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Exemplo 26 $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1.$

Corollary 27 *Seja f uma função continua no intervalo $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm diferente sinal, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 28

$f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x - 5$ *em* $[0, 1]$,

$f(x) = x - cos^2(x)$ *em* $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$.

Exercicio 12 *Exercicios 51 ao 54 da lista 2.5 do Stewart.*

5 Limites indeterminados

Realmente, o mais complicado do cálculo de limites é aprender a lidar com indeterminações. Antes de ver os principais métodos de resolução de indeterminações será bom deixar claro as situações que envolvem operações com funções que tendem a infinito ou zero, mas que de fato não são indeterminações.

Na Tabela 1 abaixo, vale a regra dos sinais para determinar em cada caso se o resultado é $+\infty$ ou $-\infty$.

$\infty \pm c = \infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$+\infty - (+\infty) =$ Indet
$c \cdot \infty = \infty \ (c \neq 0)$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$0 \cdot \infty =$ Indet
$\frac{0}{c} = 0 \ (c \neq 0)$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} =$ Indet
$\frac{c}{0} = \infty \ (c \neq 0)$	$\frac{k}{\infty} = 0$	
$\frac{\infty}{c} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty} =$ Indet
$0^c = \begin{cases} 0 & c > 0 \\ \infty & c < 0 \end{cases}$	$0^{+\infty} = 0$	$0^0 =$ Indet
$c^0 = 1$	$c^{+\infty} = \begin{cases} \infty & c > 1 \\ 0 & 0 < c < 1 \end{cases}$	$1^\infty =$ Indet
$\infty^{-\infty} = 0$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	$\infty^0 =$ Indet

Tabela 1: Operações com infinitos e divisões por sequências que tendem a zero. Na tabela c é uma constante.

As propriedades listadas na Tabela 1 não devem levar a engano, não estamos dividindo entre zero nem dizendo que ∞ seja um número. Aqui ∞ é uma forma abreviada de dizer "temos uma função que tende a ∞"ou onde aparece 0 o que queremos dizer é que "temos uma função que tende a 0".

Você já deve ter perecebido que para calcular um limite em um ponto a ou em $\pm\infty$ você sempre vai tentar subsituir, e se der certo, você terá seu limite calculado (claro que quando a subsitução envolve ∞ ou divisões entre zero, não é substituir mesmo, senão usar as regras da Tabela 1). Quando após de substituir apareçam limites indeterminados, então isto quer dizer que teremos que usar alguma das têcnicas que mostraremos mais em adiante para saber qual é o valor do limite mesmo.

Os seguintes limites podem ser calculados usando a tabela acima.

Exercicio 13 1) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 50$,

2) $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 50$,

3) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) + 3$,

4) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan(x) - x$,

5) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln(x)$,

6) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} + e^x + x^3$,

7) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - \frac{1}{x}$,

8) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$,

9) $\lim_{x\to+\infty} -2e^x$,

10) $\lim_{x\to+\infty} 50\ln(x)$,

11) $\lim_{x\to 0^+} -50\ln(x)$,

12) $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^x$,

13) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$,

14) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{4}{x-\frac{\pi}{2}} tan(x)$,

15) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + \frac{1}{x})(\ln(x))^2$,

16) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{2}$,

17) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{30}$,

18) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{2}$,

19) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1}$,

20) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$,

21) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{tan(x)}$,

22) $\lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{\ln(x)}$,

23) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln(\frac{1}{x})}$,

24) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x+2}$,

25) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x+2}$,

26) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{\ln(x)}$,

27) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{\ln(x)}$,

28) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x)}$,

29) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{\ln(x)}$,

30) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(4-x)}{e^{\frac{1}{x}}}$,

31) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(4-x)}{\frac{1}{x}}$,

32) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(4-x)}{\frac{1}{x}}$,

33) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{e^x}$,

34) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$,

35) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{sen(x)}$,

36) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x)}{sen(x)}$,

37) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$,

38) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x}$,

39) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{x})^2$,

40) $\lim_{x\to +\infty} (sen(\frac{1}{x}))^x$,

41) $\lim_{x\to 1^+} \ln(x)^{\frac{1}{x-1}}$,

42) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{x})^{x^2}$,

43) $\lim_{x\to 0^+} (e^x-1)^{\frac{1}{x}}$,

44) $\lim_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x}}$,

45) $\lim_{x\to 0^+} e^{e^x-1}$,

46) $\lim_{x\to +\infty} 2^{\ln(x)}$,

47) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{2})^{\ln(x)}$,

48) $\lim_{x\to +\infty} 3^{x^2+3x}$,

49) $\lim_{x\to +\infty} 0.333^{x^2+3x}$,

50) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)^{\ln(x)}$,

51) $\lim_{x\to -\infty} (x^2)^{x^3-3x}$,

52) $\lim_{x\to +\infty} (x^2)^{x^3+3x}$,

53) $\lim_{x\to +\infty} \ln(x)^{\ln(x)}$,

54) $\lim_{x\to +\infty} x^x$.

5.1 Escala de infinitos

Antes de estudar as indeterminações vamor ver aqui uma ierarquia de infinitos (ou escala de infinitos) que será de grão utilidade durante a unidade toda.

Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$. Diremos que f *tende para infinito mais rapidamente do que* f se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

Isto será denotado mediante $f(x) >> g(x)$ para x grande.[6]

Obviamente isto é equivalente a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Uma propriedade muito importante desta realação é que ela é *transitiva,* isto é, tem a seguinte propriedade:

$$\text{Se } f(x) >> g(x) \text{ e } g(x) >> h(x) \text{ então } f(x) >> h(x).$$

Propriedade 29 (Escala de infinitos) *Sejam $p > 0$ e $r > 1$ então os limites (em $+\infty$) das funções seguintes são $+\infty$:*

$$\frac{x^x}{r^x}, \ \frac{r^x}{x^p}, \ \frac{x^p}{\ln(x)}.$$

Claro que se as frações acima são invertidas então os limites serão nulos, isto é, o limites das funções seguintes (em $+\infty$))

$$\frac{r^x}{x^x} \ \frac{x^p}{r^x}, \ \frac{\ln(x)}{x^p}$$

são zero.

Ou seja, o que estamos dizendo é o seguinte:

$$x^x >> r^x >> x^p >> \ln(x)$$

para x grande.

A escala de infinitos contém mais informação do que parece, isto devido a que a relação $>>$ é transitiva. Por exemplo, o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{x^p}$ não aparece explícito na escala de infinitos mas dado que $x^x >> e^x$ e $e^x >> x^p$ então $x^x >> x^p$, isto é, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^x}{x^p} = +\infty$ (ou equivalentemente $\lim_{n\to\infty} \frac{x^p}{x^x} = 0$).

[6]Na verdade, poderiamos definir coisas parecidas como 'tende a infinito mais rapidamente em a' ou 'tende para infinito mais rapidamente em $-\infty$, a ideia sería a mesma e a utilidade também

Observação 30 *É importante na escala de infinitos que p seja positivo e r seja maior que 1. Também, onde aparece x^p você pode botar qualquer polinomio ou qualquer raiz e a escala seguirá funcionando. Isto é,*

$$x^x >> r^x >> \text{ polinomio ou raiz } >> \ln(x).$$

Observação 31 *Se temos duas potencias (isto inlcui as raizes, se consideramos um raiz como uma potencia fraccionaria), sempre tende a infinito mais rapidamente aquela de maior grau. Isto é, se $p > q$ então $x^p >> x^q$. por qué?*

5.1.1 Escala de infinitos para limites em $-\infty$

Sempre é possivel transformar um limite com $x \to -\infty$ em outro em $+\infty$. Em efeito, tem-se o seguinte:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x).$$

Se queremos usar a escala de infinitos sem trocar o limite como acima, podemos usar a seguinte escala de infinitos valida para limites com $x \to -\infty$:

$$polinomios >> raizes >> ln(\text{ polinomio ou raiz }).$$

Quando $x \to -\infty$ também vale a regra: $x^n >> x^m$ sempre que n seja maior que m (aqui n e m podem ser frações, de forma que esta regra continua sendo valida para raizes).

5.2 Indeterminações tipo $+\infty - \infty$

Uma primeira tecnica para resolver este tipo de indeterminações é a seguinte: coloque em evidência a função que tende para infinito *mais rapidamente* de acordo com a escala de infinitos.

Exemplo 32 *Calcule os limites com $x \to +\infty$.*

1. $x^3 - x^2 + 1$,
2. $\ln(x + 1) - x^2 + x$,
3. $x^{40} + e^x + \ln(x)$,
4. $x^x + e^x + 3$.

Exemplo 33 *Calcule os limites com $x \to -\infty$.*

1. $x^3 - x^2 + 1$,

2. $\ln(x^2+1) - x^2 + x$,

3. $x^{40} + e^x + \ln(-x)$,

4. $x^3 + e^x + 3 + \sqrt[3]{x}$.

Se o limite envolve uma diferencia de duas funções, sendo uma delas (ou ambas) uma raiz quadrada, pode funcionar *multiplicar e dividir pelo conjugado* e simplificar. Isto é, faça o seguinte

$$\sqrt{a} - b = \frac{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)}{\sqrt{a}+b} = \frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}[7].$$

Com um pouco de sorte, após simplificar, a indeterminação terá sido removida.

Exemplo 34 *Calcule os limites com* $x \to +\infty$.

1. $\sqrt{x^2-1} - x$.

2. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

Se o limite envolve uma diferencia de logaritmos pode funcionar aplicar as propriedades do logaritmo para deixar tudo dentro de um unico logaritmo

Exemplo 35 *Calcule o limite com* $x \to +\infty$ *de* $\ln(x^2+1) - \ln(x+3)$.

Se o limite envolve uma soma ou diferencia de duas frações, pode funcionar reduzir a comum denominador.

Exemplo 36 *Calcule o limite com* $x \to +\infty$ *de* $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}$.

5.3 Indeterminações tipo $\frac{0}{0}$

Se estamos calculando um limite em a, sendo a função um quociente de duas funções polinomicas, então a indeterminação $\frac{0}{0}$ está dizendo que a é uma raiz de ambos polinomios. Em este caso o que devemos fazer é fatorar os polinomios e cortar os fatores $x - a$ que apereçam.

Exercicio 14

[7] Os sinais podem estar trocados, você deveria poder adaptar esta nova situação

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$,

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$,

3) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$,

4) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Se a indetermiaçao envolve (no numerador o no denominador) uma soma diferencia de funções sendo pelo menos uma delas uma raiz quadrada, então multiplicamos e dividimos pelo conjugado.

Exercicio 15 *Exercicios 25, 27, 22 e 30 da lista 2.3 do Stewart.*

Em geral, a ferramento mais util que temos para lidar com este tipo de indeterminações é a Regra de L'Hôpital. Infelizmente, isso tem que esperar. Segue o resultado para ser usado no futuro:

Propriedade 37 (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g duas funções deriváveis e suponha que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Agora suponha que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

5.4 Indeterminações tipo $\frac{\infty}{\infty}$

De novo podemos começar tentando usar a escala de infinitos da forma seguinte: Seleccionamos a função que tende para infinito mais rapidamente no numerador e colocamos esta em evidencia. A continuação seleccionamos a função que tende para infinito mais rapidamente no denominador e colocamos esta em evidencia. Com sorte isto resolverá a indeterminação.

Exemplo 38 *Calcule os limites em $+\infty$ e $-\infty$ (quando seja possivel):*

1. $\frac{4x^4+2x^2-2x+3}{x^3+x-2}$,
2. $\frac{x^2+\ln(x)+3}{2x^3-x-1}$,
3. $\frac{3e^x+x^2}{\sqrt{x}-e^{2x}}$,
4. $\frac{x+2}{x\sqrt{x}}$,

5. $\frac{x+4^x}{x+6^x}$,

6. $\frac{9^x}{3+10^x}$,

7. $\frac{9^x}{3+x^x}$,

8. $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3+x^2}$,

9. $\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt[3]{x+1}+3x}$.

Observação 39 *É muito importante você lembrar as propriedades das potências e das exponencias.*

A regra L'Hôpital é também válida para indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Propriedade 40 (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g duas funções deriváveis e suponha que $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Agora suponha que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

As vezes são necessarias varias aplicações da regra de L'Hôpital para acabar com uma indeterminação.

5.5 Indeterminações tipo $0 \cdot \infty$

Sempre é possivel converter uma indeterminação tipo $0 \cdot \infty$ em uma tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou em uma tipo $\frac{0}{0}$. A ideia é muito simples. Suponha que f e g tendem a 0 (pode ser em um ponto ou em $\pm\infty$) então fazendo

$$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

temos uma indeterminação tipo $\frac{0}{0}$ e fazendo

$$fg = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

temos uma tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 41

$\lim_{x\to+\infty} xsen(\frac{1}{x})$.

5.6 Indeterminações tipo ∞^0

Para indeterminações que envolvem exponentes uma ideia que funciona bem bastantes vezes e fazer o seguinte:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}.$$

Agora a indeterminação fica no exponente da segunda função e, com sorte, talvez agora sabremos como calcular o limite que aparece no exponente.

Exemplo 42 *1.* $x^{\frac{1}{x}}$,

2. $(x^2+1)^{\frac{1}{x}}$,

3. $\ln(2x^2+3x+1)^{\frac{1}{x}}$,

5.7 Indeterminações tipo 1^∞

Aqui podemos tentar usar a mesma ideia que no caso anterior. Se não dá certo, então usaremos o seguinte resultado:

Propriedade 43 *Sejam f e g duas funções tais que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. *Tem-se*

$$\textit{Se } \lim_{x\to+\infty} g(x)(f(x)-1) = L \textit{ então } \lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Exemplo 44 *1.* $(1+\frac{1}{x})^x$,

2. $(1+\frac{2}{x})^x$,

3. $(1-\frac{2}{x})^x$,

4. $(1+\frac{\ln(x)}{x})^{\ln(x)}$,

5. $(1+\frac{1}{x^2+1})^{x^2+6x+2}$,

6. $(\frac{x^2+1}{2x^2+1})^x$.

Para dúvidas, erros, correções, sugestões, etc: jorge.garces@ufsc.br