Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3111 - Geometria Analítica

2ª lista de exercícios (versão principal) - Determinante, inversa e escalonamento

Semanas 2 e 3 (12/08/2019 a 23/08/2019)

1. Considere as matrizes

$$A = [\,3\,],\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sem usar escalonamento, calcule os determinantes abaixo.

(a) $\det(A)$. **(b)** $\det(B)$. **(c)** $\det(C)$. **(d)** $\det(D)$. **(e)** $\det(E)$.

2. Calcule o determinante das matrizes abaixo fazendo uso do exercício anterior e/ou das propriedades do determinante.

(a) $F = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) $G = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$.

(c) $H = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 2 \\ -4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $I = \begin{bmatrix} 10 & 9 & \sqrt{7} & 2 \\ 10 & 17 & 23 & 2 \\ 10 & -3 & 15 & 2 \\ 10 & 21 & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $J = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

(f) $K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -8 \\ -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a matriz A_1 que é obtida a partir de A substituindo-se a linha 2 pela soma da linha 2 com menos 3 vezes a linha 1.

(b) Determine a matriz A_2 que é obtida a partir de A_1 substituindo-se a linha 3 pela soma da linha 3 com menos 4 vezes a linha 1.

(c) Determine a matriz A_3 que é obtida a partir de A_2 substituindo-se a linha 4 pela linha 4 menos a linha 1.

(d) Determine a matriz A_4 que é obtida a partir de A_3 dividindo-se a linha 2 por -7.

(e) Determine a matriz A_5 que é obtida a partir de A_4 substituindo-se a linha 3 pela linha 3 mais 9 vezes a linha 2.

(f) Note que a matriz A_5 é triangular superior. Usando as propriedades de determinantes, calcule os determinantes das matrizes A, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5.

4. Encontre, se existir, a inversa das matrizes abaixo por dois métodos: pela definição e por matriz de cofatores.

(a) $A = [\ -5\ ]$.

(b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Considerando as matrizes do exercício anterior, calcule:

(a) AA^{-1}.

(b) BB^{-1}.

(c) $B^{-1}B$.

(d) DD^{-1}.

(e) $D^{-1}D$.

(f) $\det(B)$.

(g) $\det(B^{-1})$ (compare com o item (f)).

(h) $\det(C)$.

6. Para cada uma das matrizes abaixo, encontre uma forma escalonada, encontre os pivôs e determine o posto. Para as matrizes que forem quadradas, calcule o determinante.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $D = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) $E = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) $F = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

(f) $I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Utilize o método de Gauss-Jordan para encontrar, se existir, a inversa das matrizes abaixo.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

8. Determine o(s) valor(es) de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & k \end{bmatrix}$ não tenha inversa.

9. Determine o(s) valor(es) de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tenha inversa.

10. Suponha que A, B e C sejam matrizes quadradas inversíveis de mesma dimensão e conhecidas. Nos itens abaixo, determine (em função de A, B e C) a matriz X que satisfaz a igualdade.

(a) $2X + A = B$.

(b) $AX = B$.

(c) $XA = B$.

(d) $AXC = B$.

(e) $AX = AB$.

(f) $AX = BA$.

(g) $3AX^tC^t = B$.

(h) $AX - 3CX = B$ (aqui, suponha que a matriz $A - 3C$ seja inversível).