Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

**MTM3111 - Geometria Analítica**

## 1ª lista de exercícios (versão principal) - Matrizes e operações elementares

**Semana 1 (05/08/2019 a 09/08/2019)**

**1.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Determine o que se pede.

**(a)** $a_{12}$. **(b)** $a_{31}$. **(c)** $a_{12} - 3a_{31} + 4a_{42}^2$.

**2.** Em cada um dos itens abaixo, construa a matriz $A_{m\times n}$ cujo elemento $a_{ij}$ é dado.

**(a)** $m = 3$, $n = 2$ e $a_{ij} = i + j$. **(b)** $m = 3$, $n = 3$ e $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

**(c)** $m = 3$, $n = 3$ e $a_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{se } i \neq j \\ i + j, & \text{se } i = j \end{cases}$.

**3.** Em cada um dos itens abaixo, determine o(s) valor(es) da(s) incógnita(s) que torna(m) a igualdade verdadeira.

**(a)** $\begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} y + x & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x - y & z^3 \end{bmatrix}$.

**(c)** $\begin{bmatrix} x^2 - 3x & 0 \\ x^2 - 6x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 6 & 0 \\ -x^2 - 4 & 1 \end{bmatrix}$.

**4.** Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x + 2y & z - 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3z + 6 & 3x - y & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, determine $x$, $y$ e $z$.

**5.** Calcule ou mostre o que se pede.

**(a)** Seja $A$ uma matriz simétrica. Calcule $A - A^t$.

**(b)** Seja $A$ uma matriz quadrada qualquer. Mostre que $B = \dfrac{A + A^t}{2}$ é uma matriz simétrica.

**6.** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule.

**(a)** $2A$. **(b)** $-3C$. **(c)** $A + B$.

**(d)** $4A - 3B + 5C$. **(e)** $(A - C)^t + B^t$.

**7.** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule.

**(a)** $AB$.

**(b)** $BA$.

**(c)** $B^tA^t$ (compare com o item (a)).

**(d)** $C^2$.

**(e)** $BAC - C^2 + 3(BA)^t$.

**8.** Sejam $A$ e $B$ matrizes quadradas de mesma ordem e $a$ e $b$ números reais. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

**(a)** $-A^t = (-A)^t$.

**(b)** $(A+B)^t = A^t + B^t$.

**(c)** Se $AB$ é a matriz nula, então $A$ ou $B$ são a matriz nula.

**(d)** $(aA)(bB) = (ab)AB$.

**(e)** $(AB)^t = A^tB^t$.

**(f)** $(-A)(-B) = -AB$.

**(g)** $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

**(h)** $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

**9.** Uma rede de comunicação possui cinco estações de transmissão. Na matriz $A$ abaixo, $a_{ij} = 1$ significa que a estação $i$ pode transmitir diretamente para a estação $j$ e, $a_{ij} = 0$ significa o contrário.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Algumas observações:

(i) Por exemplo, a estação 1 pode transmitir diretamente para a estação 3 (pois $a_{13} = 1$) e a estacão 3 não pode transmitir diretamente para a estação 1 (pois $a_{31} = 0$)

(ii) A diagonal principal de $A$ ser nula significa que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

(iii) Como $a_{25} =$, a estação 2 não pode transmitir diretamente para a estação 5. Porém, a estação 5 pode receber informação indiretamente a partir da estação 2 através da transmissão $2 \to 4 \to 5$. Neste caso, dizemos que a estação 2 transmite indiretamente para a estação 5 através de uma transmissão de segunda ordem (porque exigiu duas conexões diretas).

**(a)** Calcule $A^2$. No contexto do exercício, qual o significado dessa matriz?

**(b)** Denotando $A^2 = (c_{ij})$, qual o significado de $c_{13} = 2$

**(c)** No contexto do exercício, qual o significado da matriz $A + A^2$? E da matriz $A^3$?

**(d)** Se $A$ fosse simétrica, o que isso significaria no contexto do exercício?