进击的橡皮筋：旋转发射控制下的弹道特性

张乐维、xx、xxx、xxx

信息与控制工程学院 学号：04220964

摘要： 橡皮筋作为一种常见的弹性材料，应用广泛，本研究旨在探讨橡皮筋初始自旋对弹道的影响，通过理论构建数学模型分析其弹道特性，并使用COMSOL仿真模拟验证理论。研究结果对后续开展发射小攻角旋转稳定橡皮筋的控制方案设计有参考价值，存在巨大的商业价值潜力。

关键词：橡皮筋；旋转；弹道特性

Abstract Rubber bands, as a common elastic material, have widespread applications. This study aims to explore the influence of the initial spin of a rubber band on its trajectory. Through theoretical construction, we analyze its ballistic characteristics using a mathematical model and validate the theory with COMSOL simulation. The research findings provide valuable reference for subsequent design of control schemes for launching rubber bands with a small attack angle rotation, and hold significant commercial potential.

1 引言

橡皮筋作为一种常见的弹性材料，在众多应用中均有其出现，如办公、娱乐等。而其在被拉伸并释放时的动力学特性，长期以来都是物理学者和工程师所关注的。旋转的物体经常出现在自然中和人类的日常生活中，例如旋转的飞镖、球类和子弹等。旋转可以影响物体的稳定性，从而对其射程和准度产生影响，发掘高速旋转产生较强的陀螺效应有重大意义。对于小攻角旋转稳定橡皮筋的设计与研发，国外学者还没有成体系的研究，不论是执行机构的结构、控制系统的设计，还是控制作用下橡皮筋的运动特性和稳定性，都比较少。

本文不考虑具体的控制执行机构，以某型号为研究对象，旨在深入探讨旋转如何改变橡皮筋的飞行轨迹，并给出相关的理论和数学推导，建立数学模型，研究线性Magnus力与角运动间的关系，并讨论初始运动状态在无控干扰的基础上对其弹道特性的影响。研究结果为后续开展发射小攻角旋转稳定橡皮筋的控制方案设计提供一定的参考。

2 动力学模型构建

2.1 做出如下规定

1.橡皮筋发射后的主要形态为一个近似细长的梭形
2.橡皮筋在飞行过程中受到重力、空气阻力和由于其旋转而产生的Magnus效应的影响。
3.橡皮筋在飞行中沿其长轴旋转。

2.2 对相关物理量的规定

m：橡皮筋的质量
g：重力加速度
u_i：i时刻在u方向上的坐标
$F_{,u}$：表示沿u方向的分力
v_i：i时刻的速度
$v_{u(i)}$：i时刻速度的u方向分量
θ_i：i时刻速度与水平面的夹角
ω_i：i时刻橡皮筋的旋转速度

2.3 具体过程分析

2.3.1 发射状态分析

发射初始，橡皮筋被拉伸了长度ΔL，其势能U_0为

$$U_0 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 \tag{1}$$

其中k是橡皮筋的弹性常数。
势能U_0在发射时转化为动能E_{k0}和旋转能E_{rot0}:

$$U_0 = E_{k0} + E_{rot0} \tag{2}$$

而

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{4}$$

将(3)(4)代入(2)有

$$U = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \tag{5}$$

依物理事实，此时有

$$v_0^2 = v_{x(0)}^2 + v_{y(0)}^2 \tag{6}$$

而构成的速度三角形得到条件

$$\theta_0 = arctan(\frac{v_{y(0)}}{v_{x(0)}}) \tag{7}$$

橡皮筋的稳定性主要取决于其初始旋转速度。较高的旋转速度会增加稳定性,但可能增加阻力，为简化问题认为在小攻角α下有

$$\alpha = Ee^{-F\omega} + \alpha_0 \tag{8}$$

E、F为实验常数，α_0为微小量

由于摩擦会减慢旋转速度，因此可以使用指数衰减速率进行建模，如Smits和Smith所提出的[1]

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{cV}{d}t} \tag{9}$$

其中c为实验常数，V为相对流体空气的相对速度，可以认为相对速度等于橡皮筋的位移速度，即在任意时刻t都有

$$V = v \tag{10}$$

2.3.2 阻力分析

考虑常见的一次阻力模型:

$$F_{drag} = C_D(\alpha)\rho AV \tag{11}$$

其中ρ是空气密度，A是橡皮筋的旋转截面面积，记自旋的直径为d

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 \tag{12}$$

而$C_D(\alpha)$是阻力系数

$$C_D(\alpha) = C_{D_0} + Re\alpha^2 \tag{13}$$

Re为雷诺系数

$$Re = \frac{\rho dV}{\mu} \tag{14}$$

其中μ为动力粘性，d为自旋的直径

结合(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)，可以推出t时刻

$$F_{drag}(t) = (C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2v_t \tag{15}$$

2.3.3 升力分析

Magnus效应的升力 F_{magnus} 计算:

$$F_{magnus} = C_L(\alpha)\rho AV\omega \tag{16}$$

$C_L(\alpha)$ 是升力系数，借用Bearman 和 Harvey 在 1976 年对升力系数与高尔夫球旋转速率的相关性的研究[2]，有关系如下

$$C_L(\alpha) = 2\pi\alpha \tag{17}$$

结合(8)(9)(10)(12)(16)(17)，可以推出t时刻

$$F_{magnus} = 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho Av\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t} \tag{18}$$

2.3.4 t时刻分析

初始时刻有条件

$$t = t_0, x = x_0, y = y_0, \theta = \theta_0 \tag{19}$$

在t时刻

2.3.4.1 水平方向

$$\frac{dv_x}{dt} = -F_{drag,x} + F_{magnus,x} \tag{20}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_t \tag{21}$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -F_{drag,x} + F_{magnus,x} \tag{22}$$

由(15)(18)可以得到

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v_t cos(\theta_t) + 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t} sin(\theta_t) \tag{23}$$

2.3.4.2 垂直方向

最高点前

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - F_{drag,y} + F_{magnus,y} \tag{24}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \tag{25}$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - F_{drag,y} + F_{magnus,y} \tag{26}$$

由(15)(18)可以得到

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - (C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v_t sin(\theta_t) + 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t} cos(\theta_t) \tag{26}$$

而在最高点后

$$\frac{dv_y}{dt} = -g + F_{drag,y} + F_{magnus,y} \tag{27}$$

联立(24)得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + F_{drag,y} + F_{magnus,y} \tag{28}$$

由(15)(18)可以得到

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + (C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v_t sin(\theta_t) + 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t} cos(\theta_t) \tag{29}$$

获得数学模型

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -(C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v_t cos(\theta_t) + 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}sin(\theta_t) \\ \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = -g - (C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v_t sin(\theta_t) + 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}cos(\theta_t), v_y\text{向上} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g + (C_{D_0} + \frac{\rho dv}{\mu}(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)^2)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v_t sin(\theta_t) + 2\pi(Ee^{-F\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}} + \alpha_0)\rho\frac{\pi}{4}d^2 v\omega_0 e^{-\frac{cv}{d}t}cos(\theta_t), v_y\text{向下} \end{cases} \end{cases} \tag{30}$$

3 模拟

该方程组由一组常微分方程 (ODE) 组成，由于所有变量之间的依赖关系，它可能看起来很复杂。然而，使用 COMSOL Multiphysics 来实现和求解实际上很简单。

在COMSOL Multiphysics中建立模型

实现这个问题的最简单的方法是在一个 0 维组件中使用 *事件* 接口，它既可以使用*全局方程*节点求解，并在球落地时停止计算。

4 分析应用

5 结论

5.1 理解 呼应摘要

（1）

（2）

（3）

5.2 展望

最佳旋转方法

为了最大化射程和准度，橡皮筋应该沿其长轴旋转。这种旋转方式可以最大化陀螺效应，并减少不稳定性。在发射橡皮筋时，应该确保它被均匀地拉伸，并且在释放时沿其长轴快速旋转。

6 参考文献

[1]P. Bearman and J.K. Harvey, “Golf ball aerodynamics”, Aeronautical Quarterly, vol. 27, no., pp. 112–122, 1976.

[2]A.J. Smits and D.R. Smith, “A new aerodynamic model of a golf ball in flight”, Science and Golf II, Taylor & Francis, pp.433–44