ТЕОРИЯ

1.Дать понятия:

Множество- *любая совокупность определенных и различимых между собой объектов, рассматриваемая как единое целое.*

Подмножество- множество ***A*** называется ***подмножеством*** множества ***B***, если любой элемент, принадлежащий ***A*,** также принадлежит ***B***.

Надмножество- множество ***B*,** в свою очередь, называется ***надмножеством*** множества ***A*.**

2. Способы описания множеств:

Множества могут быть заданы списком, порождающей процедурой, описанием свойств элементов или графическим представлением.

- Задание множеств ***списком*** предполагает перечисление элементов. Например, множество ***A*** состоит из букв ***a, b, c, d :*** ***A***={ ***a ,b, c, d***} или множество ***L*** включает цифры ***0, 2, 3, 4 : L***={ ***0, 2, 3, 4*** }.
- Задание множеств ***порождающей процедурой*** означает описание характеристических свойств элементов множества: ***X* = { *x* | *H (x)*** }, т. е. множество ***X*** содержит такие элементы ***x***, которые обладают свойством ***H (x)***. Например:

B* = { *b* | *b* = ⁄ *2 k , k N*}, *N - множество всех натуральных чисел

- Задание множества ***описанием свойств*** элементов. Например, ***M***- это множество чисел, являющихся степенями двойки.

3. Четные/нечетные множества:

Бесконечное множество называется ***счетным***, если его элементы можно пронумеровать, в противном случае, бесконечное множество называется ***несчетным***.

Счетное множество- натуральные числа.

Несчетные множества-действительные числа.

4. Мощность множества:

Мощность множества можно рассматривать как числовую характеристику (метрику) любого множества. ***Мощностью*** некоторого конечного множества ***A*** является число его элементов.

|A|=8 = A={a,b,c,d,e,f,g,h}

5. Абсолютное дополнение некоторого множества:

Определение 1.9. Абсолютным дополнением множества называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество U\A, где U – универсальное множество (рис. 1.6).

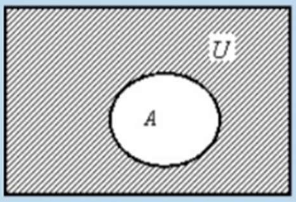


Рис. 1.6

6.Чему равна мощность булеана множества А, сост. из 6 элементов:

Мощность множества из 6 элементов равна 6.

7.Взаимное включение множеств:

Метод взаимного включения базируется на определении равенства двух множеств, между которыми существует отношение взаимного включения: $\boldsymbol{A=B \Leftrightarrow A \subseteq B}$ и $\boldsymbol{B \subseteq A}$.

8.В чем состоит отличие между строгим и нестрогим вкл. множеств:

Отличия и заключается в том, что отношение допускает и тождественность (A=B), т.е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя , в то время как символ строгого включения ставится тогда, когда мы хотим подчеркнуть, что , то есть во множестве B содержатся не только элементы множества A.

9. Собственное подмножество некоторого множества:

множество A является собственным подмножеством множества B, только если $A \subset B$ и $A \neq B$, $A \neq \varnothing$.

10. Свойство рефлексивности (симметричность, транзитность)+ примеры:

Свойство ***рефлексивности*** является ***унарным***, т.е. применительно к единственному объекту (в данном случае к множеству) и означает, что отношение применимо к «себе самому».

Простым примером рефлексивного отношения для чисел могут служить отношения «≥» или «≤», т.к.

Свойство симметричности является бинарным (двухместным), т.е. применимо к двум объектам. Отношение является симметричным, если оно выполняется в обе стороны по отношению к паре объектов (в данном случае множеств). Примерами свойства симметричности являются различные геометрические объекты, для которых понятие «симметрии» является наиболее наглядным. Например, отношение: «быть симметричными относительно оси x» в отношении точек плоскости является симметричным. Действительно, если первая точка симметрична второй, то вторая точка обязательно симметрична первой.

Свойство ***транзитивности*** является ***тернарным***, т.е. применяется к трем объектам. Отношение ***R*** между объектами ***a, b, c*** является ***транзитивным***, если из ***aRb*** и ***bRc*** следует ***aRc***, т.е. из выполнения отношения ***R*** между парами объектов (***a, b***) и (***b, c***) следует его выполнение и для пары (***a, c***).

Примерами транзитивного отношения для чисел являются отношения «>», «≥», «<», «≤». Отношение, не обладающее свойством транзитивности, называется ***нетранзитивным***.

Примером нетранзитивного отношения может служить отношение «пересекаться». Действительно для множеств: ***A={a, b}, B={b, c}, C={c, d} A*** пересекается с ***B***, ***B*** - с ***C***, но ***A*** не пересекается с ***C***.

29

Рефлексивные отношения:

- отношения эквивалентности:
  - отношение равенства ($=$);
  - отношение сравнимости по модулю;
  - отношение параллельности прямых и плоскостей;
  - отношение подобия геометрических фигур;
- отношения нестрогого порядка:
  - отношение нестрогого неравенства ($\leqslant$);
  - отношение нестрогого подмножества ($\subseteq$);
  - отношение делимости ($\vdots$).

11. Свойство антирефликсивности(антисимметричность, нетранзитность) +примеры:

В свою очередь, отношение между двумя объектами не обладает свойством симметричности, т.е. является ***антисимметричным***, если его выполнение в обе стороны имеет место только в случае равенства объектов.
Если записать бинарное отношение между объектами a и b в общем виде aRb, где R – символ отношения, то для симметричного отношения: $aRb \rightarrow bRa$ при любых a и b, а для антисимметричного $aRb \rightarrow bRa$, только, если $a = b$.

Примером антисимметричного отношения могут служить отношения «$\geq$» или «$\leq$» между числами. Действительно, $(a \leq b) \rightarrow (b \leq a)$, только, если $a = b$.

Отношение между двумя объектами является **антисимметричным,** если его выполнение в обе стороны имеет место только в случае равенства объектов.

Примером антисимметричного отношения могут служить отношения «≥» или «≤» между числами.

12. Является ли отношение параллельности двух прямых транзитивным? Утверждение обосновать.

Да.

Свойство транзитивности является тернарным, т.е. применяется к трем объектам. Отношение R между объектами a,b,c является транзитивными, если из aRb и bRc следует aRc.По определению 3 параллельных прямых: если a параллельно b и b параллельно c, то a параллельно c.

13. Определения операция объединения (пересечения, разности, симметрической разности, дополнения):

Объединением множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств ***A, B*** (рис. 4): $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечением множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству ***A***, так и множеству ***B*** (рис. 5):
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

39

Разностью множеств **A** и **B** называется множество всех тех и только тех элементов **A**, которые не содержатся в **B** (рис. 6): $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.
Разность множеств **A** и **B** иначе называется дополнением множества **A** до множества **B** (относительным дополнением).

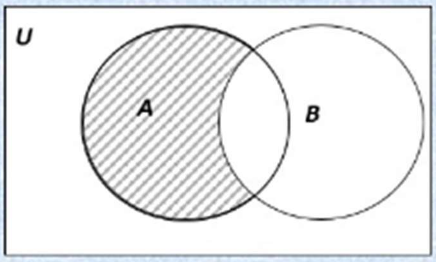


Рис. 6. Разность множеств

14. В каком случае объединение (пересечение, разность) двух множеств равно пустому (универсальному) множеству?

Объединение-когда все множества пустые
Пересечение-когда элементы множеств не совпадают
Разность-когда все элементы первого множества есть во втором множестве

Симметрической разностью множеств **A** и **B** называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат либо только множеству **A**, либо только множеству **B** (рис. 7). Симметрическую разность обозначают как $A \Delta B$, $A - B$ или $A \oplus B$:
$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}$.
Таким образом, симметрическая разность множеств **A** и **B** представляет собой объединение разностей (относительных дополнений) этих множеств: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

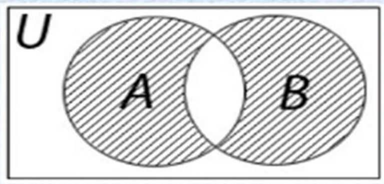
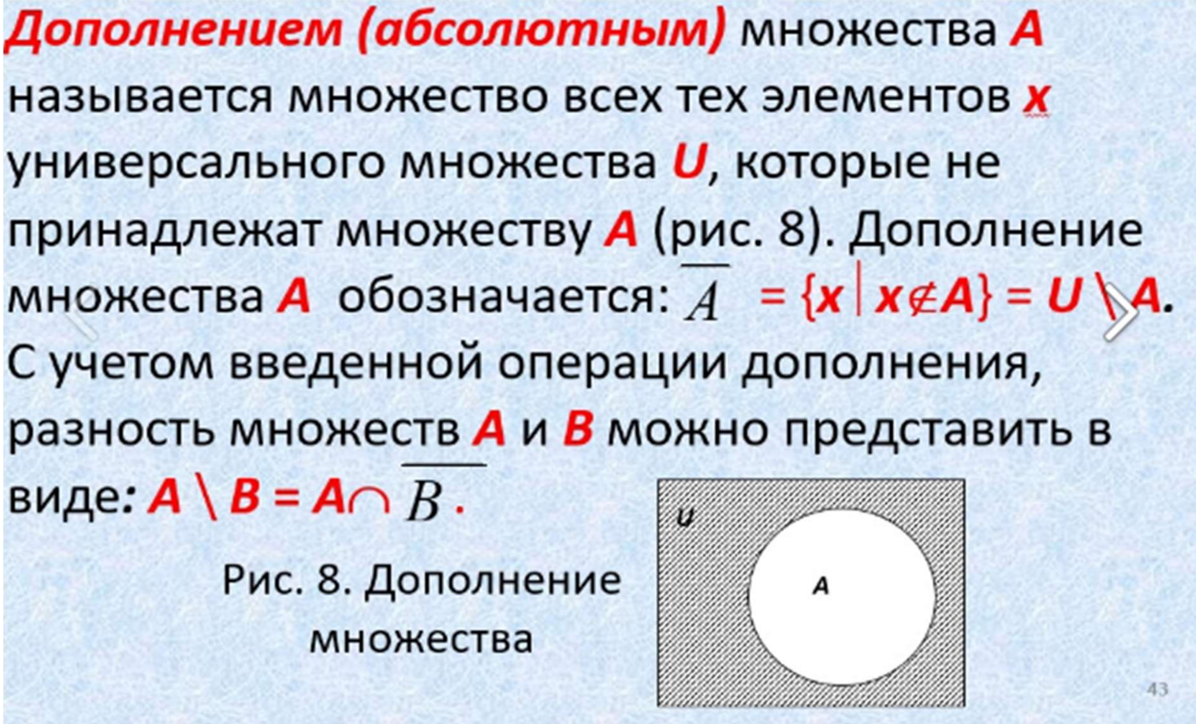


Рис. 7. Симметрическая разность множеств



15. **Привести пример множеств, для которых пересечение равно пустому множеству, а раз-ность не равна пустому множеству.**

(Мне смутил вопрос, потому что вроде это любое не пересекающиеся множество)

16. Записать законы де Моргана (поглощения, склеивания, сокращения):

Законы алгебры множеств

9. ***Закон элиминации (поглощения)***

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

10. ***Законы де Моргана***

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

4. Законы тавтологии (идемпотентности):

   $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

5. Законы двойственности (де Моргана):

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Следствия из законов двойственности:

   $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

6. Законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.
7. Закон инволютивности: $\overline{\overline{A}} = A$
8. Закон противоречия: $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
9. Закон «третьего не дано»: $A \cup \overline{A} = U$.
10. Свойства универсального множества:

    $A \cup U = U$; $A \cap U = A$.

11. Свойства пустого множества: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Дополнительные тождества для операций объединения, пересечения и дополнения:

12. Законы склеивания:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A, \quad (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A.$$

13. Законы сокращения (законы Порецкого):

$$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B, \quad A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B.$$

14. Дополнительные тождества для операции разности множеств:

$A \setminus (B \setminus C)=(A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $(A \setminus B) \setminus C=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
$A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B) \setminus C$; $A \setminus (B \cup C)=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

15. Дополнительные тождества для операции симметрической разности:

$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\ \Delta C$; $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\ \Delta(A\cap C)$.

46

17. Перечислите основные способы (методы) доказательства правомочно-сти тождеств. На чем основан тот или иной способ (метод) доказатель-ства?

Метод взаимного включения. Метод взаимного включения базируется на определении равенства двух множеств, между которыми существует отношение взаимного включения. (А и В равны, если А входит в В, а В входит в А).

Алгебраический метод. Тождества и свойства множеств, законы.

18. Что понимается под прямым (декартовым) произведением трех множеств? Чему равна мощность этого произведения?

Прямым(декартовым) произведением множеств A_1, A_2, ..., A_n называется совокупность всех упорядоченных n-ок (векторов длинной n), таких что a_i принадлежит A_i (i=1,2,...n). Мощность прямого произведения равна произведению мощностей множеств-сомножителей.

19.Для множества A={a,b} найти A^3-третью декартову степень:

$A^3 = \{(a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (a,b,b), (b,a,a), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b)\}$

20.Основные тождества для операции прямого произвед. множеств:

$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.