

# Diszkrét matematika 2

## Összefoglaló

Vig Levente

2017

---

<b>Rn</b>	<b>1</b>
Skaláris szorzat $R_n$ -ben (belső szorzat)	1
Vektorok	1
Műveletek vektorokkal	1
Összeadás	1
Skalárral való szorzás	2
Norma	2
Távolság $R_n$ -ben	2
Szög	2
Merőleges vetület	3
Pitagorasz-tétel	3
Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség	3
Minkowski egyenlőtlenség	4
Egyenes egyenlete	4
A sík normálvektoros egyenlete	5
<b>Mátrixok</b>	<b>5</b>
Műveletek mátrixokkal	5
Mátrixok összeadása	5
Skalárral való szorzás	5
Mátrixok szorzása	5
Mátrix transzponáltja	6
Mátrix inverze	6
Inverz kiszámítása Gauss eliminációval	6
Mátrixok rangja	7
Nevezetes mátrixok	7
<b>Determinánsok</b>	<b>8</b>
2x2-es mátrixok determinánsa	8
3x3-as mátrixok determinánsa	9
Kifejtési tétel	9

<b>Lineáris egyenletrendszerek</b>	<b>9</b>
Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek	9
Elemi sorműveletek	10
A megoldáshalmaz jellemzése	10
Feltételek a megoldhatóságra	11
Sorekvivalens mátrixok	11
Trapéz alakú mátrixok	11
Gauss elimináció	12
Inhomogén lineáris egyenletrendszer	12
<b>Vektorterek</b>	<b>12</b>
Vektortér	12
Példák vektorterekre	13
Altér	13
Példák alterekre	13
Altérkritérium	13
Lineáris függőség, függetlenség	14
Generátorrendszer	14
Bázis	14
Dimenzió	14
Bázisra vonatkozó koordináták	14
Báziscsere	15
<b>Lineáris leképezések</b>	<b>15</b>
Képtér és magtér	15
Példák	15
Koordináta függvények	15
Lineáris leképezések vektorteret alkotnak	16
Képtér és magtér alteret alkot	16
Nullitás + Rang tétel	16
Lineáris leképezések mátrix reprezentációja	17
<b>Belsőszorzat-terek, ortogonalitás</b>	<b>17</b>
Belsőszorzat (skaláris szorzat)	17
Ortogonalitás	18
Ortogonalis komplementer	18
Pitagorasz tétel	18
Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség	18
Minkowski egyenlőtlenség	18

Legjobban approximáló elem	19
Ortogonalis rendszer	19
Ortonormált rendszer	19
Fourier együtthatók	19
Fourier sor	19
Bessel egyenlőtlenség	20
Gram-Schmidt ortogonalizáció	20
<b>Sajátérték, sajátvektor</b>	<b>20</b>
Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektora	20
Sajátvektorok alteret alkotnak	21
Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek	21
Karakterisztikus polinom	21
Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora	22
Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága	23

# $\mathbb{R}^n$

---

## Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$ -ben (belső szorzat)

---

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , ekkor az

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

számot  $x$  és  $y$  skaláris szorzatának nevezzük.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ (skaláris szorzat)}$$

Skaláris szorzat tulajdonságai:

- Mindkét változóban homogén, azaz  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  és  $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- Szimmetrikus, azaz  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Mindkét változóban additív, azaz
  - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  és
  - $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- Biz(4)

## Vektorok

---

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

## Műveletek vektorokkal

---

Művelet: olyan függvény mely nem vezet ki a halmazból.

### Összeadás

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ ekkor}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Az összeg is  $\in \mathbb{R}^n$ , azaz nem vezet ki a halmazból.

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A vektorok összeadásának tulajdonságai:

- Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $x + y \in \mathbb{R}^n$
- Kétváltozós művelet  $\mathbb{R}^n$ -en
- **Asszociatív** (csoportosítható), azaz minden  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  esetén teljesül, hogy

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Létezik  $0 \in \mathbb{R}^n$  úgy, hogy tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $x + 0 = 0 + x = x$
- $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  **additív nullelem**
- Tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^n$ -hez létezik olyan  $y \in \mathbb{R}^n$ , hogy  $x + y = y + x = 0$ 
  - Ekkor  $y$ -t  $(-x)$ -el jelöljük és  $x$  **additív inverzének** nevezzük.
- Tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}^n$  esetén  $x + y = y + x$ , azaz a vektorok összeadása **kommutatív**.

### Skalárral való szorzás

Legyen  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ , ekkor

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

A skalárral való szorzás komponensenként történik.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- Ha  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Ha  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- Ha  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
- Művelet, azaz nem vezet ki a halmazból.

### Norma

Legyen  $x \in \mathbb{R}^n$ , ekkor

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

A norma tulajdonságai:

- Minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\|x\| \geq 0$  és ha  $\|x\| = 0$  akkor  $x = 0$ 
  - A norma nemnegatív függvény, csak a nullvektor vehet fel nullát.
- Biz (1)
- Ha  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ 
  - A norma pozitív homogén
- Biz (2)
- Háromszög egyenlőtlenség
  - Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

### Távolság $\mathbb{R}^n$ -ben

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , ekkor  $x$  és  $y$  távolsága  $d(x, y) = \|x - y\|$

A távolság tulajdonságai:

- $d(x, y) \geq 0$  valamint  $d(x, y) = 0$  ha  $x = y$
- Szimmetrikus, azaz  $d(x, y) = d(y, x)$
- Háromszög egyenlőtlenség:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

### Szög

Vektorok szöge:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Merőleges vetület

Az  $x$  vektor merőleges vetülete  $y$ -ra:

$$y_x = \lambda \cdot y$$

$$\langle x - y_x, y_x \rangle = 0$$

$$\langle x, y_x \rangle - \langle y_x, y_x \rangle = 0$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \langle \lambda y, \lambda y \rangle$$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle = \lambda^2 \|y\|^2$$

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

Ezt visszahelyettesítve ez első egyenletbe:

$$y_x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

Pitagorasz-tétel

---

Ha  $x$  és  $y$  merőlegesek egymásra ( $\langle x, y \rangle = 0$ ), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel  $\langle x, y \rangle = 0$ , és  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ,  $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$  definíció szerint.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

---

Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $x$  és  $y$  lineárisan függők, azaz létezik  $\lambda \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $x = \lambda y$

Bizonyítás:

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Azonnal megállapíthatjuk, hogy ha  $x$  és  $y$  közül legalább az egyik nullvektor, akkor mindkét oldal nulla, szóval elég azzal az esettel foglalkozni amikor  $x$  és  $y$  egyike sem  $\vec{0}$ .

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = \|y\|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy  $\lambda$ -ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$4 < x, y >^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0$$

$$4 < x, y >^2 \leq 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$< x, y >^2 \leq \|y\|^2\|x\|^2$$

QED<sup>1</sup>

## Minkowski egyenlőtlenség

---

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ahol

$$2\langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.

QED<sup>2</sup>

## Egyenes egyenlete

---

A  $P \in \mathbb{R}^3$  ponton átmenő  $\vec{v}$  irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$x = P + t\vec{v}$$

ahol  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + tv_1 \\ P_2 + tv_2 \\ P_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

vagyis  $x_1 = P_1 + tv_1$  és  $x_2 = P_2 + tv_2$  és  $x_3 = P_3 + tv_3$

Tegyük fel, hogy  $v_1 \neq 0$  és  $v_2 \neq 0$  és  $v_3 \neq 0$ , azaz  $\vec{v}$  egyik tengellyes sem párhuzamos. Ilyenkor

$$t = \frac{x_1 - P_1}{v_1}, t = \frac{x_2 - P_2}{v_2}, t = \frac{x_3 - P_3}{v_3}$$

azaz

---

<sup>1</sup> Latin, quod erat demonstrandum, meaning "what was to be demonstrated"

<sup>2</sup> Latin, quod erat demonstrandum, meaning "what was to be demonstrated"

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}.$$

A sík normálvektoros egyenlete

---

$$\begin{aligned} x - p &\perp n \\ \langle x - p, n \rangle &= 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\ (x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_2 + (x_3 - p_3)n_3 &= 0 \\ x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 &= p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 \\ \langle x, n \rangle &= \langle p, n \rangle \end{aligned}$$

## Mátrixok

---

Műveletek mátrixokkal

---

Mátrixok összeadása

Legyen  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$  és  $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$ , ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m} \in \mathcal{M}_{n \times m}$$

Tulajdonságok:

- Művelet, azaz nem vezet ki a halmazból, azaz  $A + B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ .
- Asszociatív, azaz  $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times m}$ .
- Létezik olyan  $0 \in \mathcal{M}_{n \times m}$  mátrix, hogy  $A + 0 = 0 + A$ , minden  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  esetén.
- Minden  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  mátrixhoz létezik  $-A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , hogy  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ , ez az ún. **additív inverz**.
- Kommutatív, azaz  $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ .

Skalárral való szorzás

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$$

Tulajdonságok:

- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
- $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Mátrixok szorzása

Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , akkor  $A_i$  jelöli A i. sorát és  $A^j$  jelöli A j. oszlopát.

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $B \in \mathcal{M}_{m \times k}$ , ekkor

$$A \cdot B = C \in \mathcal{M}_{n \times k}$$

és



$$C = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & \dots & A_1 B^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_n B^1 & \dots & A_n B^k \end{pmatrix}$$

Ha  $C = (c_{st})_{s=1,t=1}^{n,k}$ , akkor

$$c_{st} = \sum_{r=1}^m a_{sr} b_{rt}$$

Tulajdonságok:

- Asszociatív, azaz  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ , amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek.
- Az összeadásra nézve disztributív, azaz  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ , amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek és B azonos típusú C-vel.
- $(AB)^T = B^T A^T$ , amennyiben az AB szorzat létezik.
  - Biz (5)
- **Nem kommutatív**

## Mátrix transzponáltja

Egy mátrix transzponálása sorainak és oszlopainak a felcserélését jelenti.

Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , akkor az  $A^T \in \mathcal{M}_{m \times n}$  mátrixot A transzponáltjának nevezzük.

Továbbá ha  $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$ , akkor  $A^T = (a'_{ji})_{j=1,i=1}^{m,n}$  és  $a_{ij} = a'_{ji}$ .

Tulajdonságok:

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Egy mátrix szimmetrikus ha transzponáltja önmaga, azaz  $A^T = A$ .

## Mátrix inverze

Legyen  $I \in M_{n \times n}$ , és  $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  alakú mátrixokat  $n \times n$ -es egységmátrixnak nevezzük.

Állítás: Ha  $A \in M_{n \times n}$ , akkor  $IA = AI = A$ .

Legyen  $A \in M_{n \times n}$ , ha létezik  $B \in M_{n \times n}$  úgy, hogy  $AB = BA = I$ , akkor azt mondjuk, hogy A invertálható és B-t  $A^{-1}$ -el jelöljük és A **inverzének** nevezzük.

Állítás: Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A-nak B és B' is inverze, ekkor  $B' = B'(AB) = (B'A)B = B$ , de  $AB = B'A = I$ , azaz  $B' = B$ .

### Inverz kiszámítása Gauss eliminációval

Legyen A adott, keressük  $A^{-1}$ -et, melyet X-el fogunk jelölni.

Az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a keresett mátrixot.

$$AX = I$$

A Gauss elimináció:

$$(A | I) \sim \dots \sim (I | A^{-1})$$

Elemi sorműveletek:

- Sor szorzása nem 0 skalárral.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másikat.
- 2 sor felcserélése

Definíció: 2 azonos típusú mátrix **sorekvivalens**, ha egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Definíció: Egy mátrix **trapéz alakú**, ha minden csupa 0 sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymást követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal.

Tétel: Ha  $A$  és  $A'$  sorekvivalensek, akkor az  $Ax = 0$  és az  $A'x = 0$  egyenletrendszerek megoldáshalmaza megegyezik.

## Mátrixok rangja

Egy  $n \times m$ -es mátrix rangján a mátrix oszlopai által generált  $\mathbb{R}^n$ -beli altér dimenzióját értjük. A mátrix rangja tehát  $k$ , ha oszlopai közül kiválasztható  $k$  db lineárisan független, de  $k + 1$  db már nem.

Legyen  $A \in M_{n \times n}$ , ekkor  $A$  sorekvivalens egy olyan  $B \in M_{n \times n}$  mátrixszal, amely bal felső sarkában egy  $r \times r$ -es egységmátrixot tartalmaz, a többi eleme pedig 0, ahol  $r \leq \min\{n, m\}$ . Ekkor  $r$ -et az  $A$  mátrix rangjának nevezzük.

## Nevezetes mátrixok

### Markov mártix

$$\begin{array}{ll} LA \frac{1}{4}\text{-a Bo-ba} & LA \frac{1}{7}\text{-a Ch-ba} \\ Ch \frac{1}{5}\text{-a LA-be} & Ch \frac{1}{3}\text{-a Bo-ba} \\ Bo \frac{1}{6}\text{-a LA-be} & Bo \frac{1}{8}\text{-a Ch-ba} \end{array}$$

$$x_{n+1} = ?$$

$$y_{n+1} = ?$$

$$z_{n+1} = ?$$

$$x_{n+1} = \frac{17}{28}x_n + \frac{1}{5}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{7}x_n + \frac{7}{15}y_n + \frac{1}{8}z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{17}{24}z_n$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{28} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{7}{15} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

**Forgatás mátrix**

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$$

**Determinánsok**

## 2x2-es mátrixok determinánsa

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ , és  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , ilyenkor

$$\det(A) = ad - bc$$

Tulajdonságok:

- Az oszlopainak és a sorainak is bilineáris függvénye, azaz
  - $\det \begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$  és
  - $\det \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- Az egység mátrix determinánsa 1
  - $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$
  - $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

Tétel: Ha  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  olyan függvény ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor az csak a determináns függvény lehet.

További tulajdonságok:

- Egy mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának determinánásával.
  - Biz:
    - $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
    - $\det(A^T) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb$
- Ha két oszlopa vagy sora megegyezik akkor a determináns nulla.
  - Biz:
    - $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$
    - $\det(B) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0$
- Pontos akkor invertálható egy mátrix, ha a determinánsa nem nulla, ekkor
 
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$
  - Biz:
    - Legyen  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .
    - Tegyük fel, hogy  $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$
    - $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- $AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -cb + ad \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Legyen  $A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C, C', A^{i+1}, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$ , ilyenkor
  - $\det(A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C + C', A^{i+1}, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C, A^{i+1}, \dots, A^n) + \det(A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C', A^{i+1}, \dots, A^n)$
  - azaz a determináns a mátrix oszlopainak additív függvénye.
  - Ha a mátrix két oszlopát vagy sorát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
  - A determinánsok szorzástétele:
    - $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
  - Ha egy mátrix oszlopának konstans szorosát hozzáadom egy másik oszlophoz, akkor a determináns értéke nem változik.
  - Diagonális, illetve felső háromszög mátrix determinánsa egyenlő a főátlóbeli elemek szorzatával.

### 3x3-as mátrixok determinánsa

Sarrus-szabály: csak 2x2-es és 3x3-as mátrixra használható.

Legyen  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , ilyenkor

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tulajdonságok:

- [Lásd 2x2-es](#)

### Kifejtési tétel

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Ahol  $\det A_{ij}$  az  $a_{ij}$ -hez tartozó aldetemináns.

Egy adott elemhez tartozó aldeteminánst úgy kaphatjuk meg, hogy az eredeti mátrixból töröljük az elem sorát és oszlopát így az eredeti  $n \times n$ -es mátrixból egy  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot kapunk. A kifejtési tétel segítségével  $n \times n$ -es mátrixok determinánsának kiszámítását visszavezethetjük 2x2-es vagy 3x3-as mátrixok determinánsára amikre pedig már alkalmazható a Sarrus-szabály.

## Lineáris egyenletrendszerek

### Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen  $m < n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  és  $b \in \mathbb{R}^m$  adottak,  $x \in \mathbb{R}^n$  ismeretlen ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

Ha  $b \neq 0$  akkor **inhomogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Ha  $b = 0$ , akkor **homogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Példa:

$$2x + y = 2$$

$$4x - y = 3$$

ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A homogén rendszernek az  $x = 0$  mindig megoldása, ezt **triviális megoldás**nak nevezzük.

Tétel: Ha  $m < n$ , akkor a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.

Bizonyítás: Indukcióval

Legyen  $n > 1, m = 1$ , ekkor az egyenletrendszer az alábbi alakú

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

Ha  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , akkor  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  megoldás lesz.

Ha legalább egy  $a_i \neq 0$  akkor feltehető, hogy ez  $a_1$ .

Ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_1}(a_2x_2 + \dots + a_nx_n)$$

Ha  $m < n$ ,  $m - 1$ -re feltesszük, hogy igaz, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

A feltételek miatt létezik  $a_{1i} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , feltehető, hogy ez  $a_{11}$ , ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)$$

és a

$$(A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}A_1) = 0$$

$$(A_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}A_1) = 0$$

rendszerben már egyel kevesebb ( $m-1$ ) változó szerepel.

## Elemi sorműveletek

1. A mátrix egy sorát meg lehet szorozni egy nem nulla számmal.
2. Két sort össze lehet adni.
3. Két sort fel lehet cserélni.

## A megoldáshalmaz jellemzése

Tétel: A homogén egyenlet megoldása altere  $\mathbb{R}^n$ -nek. Jelölje ezt  $L_A$

Tétel: Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza  $x_p + L_A$  alakú (lineáris sokaság), ahol  $L_A$  az inhomogén egyenlet megoldásterét,  $x_p$  pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

$$\begin{aligned} A_1 x &= 1 \\ &\vdots \\ A_n x &= 0 \end{aligned}$$

$x$  pontosan akkor megoldás, ha  $x \in \text{lin}[A_1, \dots, A_n]$ .

## Feltételek a megoldhatóságra

---

Homogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = 0,$$

ahol  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , azaz

$$x_1 A^1 + \dots + x_m A^m = 0.$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az  $A$  mátrix oszlopvektorai lineárisan függők.

Tétel:

1. Ha  $m > n$ , akkor van triviálistól különböző megoldás.
2. Ha  $m = n$ , akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha  $A^1, \dots, A^m$  lineárisan függők.
3. Ha  $m < n$ , akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha  $A^1, \dots, A^m$  lineárisan függők.

Inhomogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = b,$$

ahol  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , azaz

$$x_1 A^1 + \dots + x_m A^m = b.$$

Tétel:

1. Ha  $m > n$ , tetszőleges  $b$  vektor esetén biztosan van megoldás, ha  $\text{rang} A$  maximális, azaz  $\text{rang} A = n$ . Ekkor végtelen sok megoldás van.
2. Ha  $m = n$ , tetszőleges  $b$  vektor esetén biztosan van megoldás, ha  $A^1, \dots, A^m$  bázisa a térnek. Ekkor pontosan egy megoldás van.
3. Ha  $m < n$ , tetszőleges  $b$  vektor esetén nem feltétlenül lesz megoldás.
4. Tetszőleges  $m, n$  esetén pontosan akkor lesz megoldás, ha  $b$  benne fekszik az  $A$  oszlopai által generált altérben.

## Sorekvivalens mátrixok

---

Két azonos típusú mátrix sorekvivalens, ha az egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal. Tétel: Ha  $A$  és  $A'$  sorekvivalensek, akkor az  $Ax = 0$  illetve az  $A'x = 0$  egyenletrendszerek megoldáshalmaza egyezik.

## Trapéz alakú mátrixok

---

Egy mátrix trapéz alakú, ha minden csupa 0 sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymás követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

## Gauss elimináció

Általánosan:  $Ax = 0$  — Gauss elimináció —  $A'x = 0$ , ahol az  $A'$  mátrix trapéz alakú.

## Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Legyen  $m < n$ ,  $A \in M_{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  adottak, ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ahol legalább egy  $b_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Jelölje  $A^j$  az  $A$  mátrix  $j$ . oszlopát, ekkor

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$$

**Definíció:** Legyenek  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , ekkor az

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

kifejezést az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok  $x_1, \dots, x_n$  skalárokkal vett **lineáris kombinációjának** nevezzük.

**Definíció:** Az  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$  inhomogén egyenletrendszer  $x_p \in \mathbb{R}^n$ ,  $Ax_p = b$  megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.

Ha  $x$  olyan, hogy  $Ax = 0$ , akkor azt a homogén rész megoldásának nevezzük.

**Tétel:** Az  $Ax = b$  inhomogén egyenletrendszer összes megoldása  $x_p + x$  alakban áll elő, ahol  $x_p$  egy partikuláris megoldás,  $x$  pedig a homogén rész megoldása.

Az  $Ax = b$  egyenletrendszer esetén az

$$[A, B] = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

mátrixot a rendszer **kibővített mátrixának** nevezzük.

## Vektorterek

### Vektortér

Legyen  $V \neq 0$  halmaz, és tegyük fel, hogy adott két leképezés

$$+ : V \times V \mapsto V,$$

illetve

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \mapsto V$$

a következő tulajdonságokkal:

- Tetszőleges  $v, w, u \in V$  esetén  $(v + w) + u = v + (w + u)$
- Létezik olyan 0-val jelölt eleme  $V$ -nek, hogy  $v + 0 = 0 + v = v$ , minden  $v \in V$  esetén.
- Minden  $v \in V$ -hez létezik  $(-v) \in V$ , hogy  $v + (-v) = (-v) + v = 0$
- Tetszőleges  $v, w \in V$  esetén  $v + w = w + v$ .

valamint:

- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v, w, u \in V$  esetén  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda\mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda v)$ .

Ekkor  $V$ -t vektortérnek nevezzük  $\mathbb{R}$  felett.

Megjegyzés:  $\mathbb{R}$  helyett tekinthetünk más számhalmazokat is amely rendelkezik  $\mathbb{R}$ -hez hasonló tulajdonságokkal, azaz algebrai értelemben testet alkot.

Ilyen például a racionális számok teste  $\mathbb{Q}$ , vagy a véges testek (pl.: mod 2 maradékosztályok).

### Példák vektorterekre

- $\mathbb{R}^n$  vektortér  $\mathbb{R}$  felett.
- $\mathbb{C}^n$  vektortér  $\mathbb{C}$  illetve  $\mathbb{R}$  felett.
- $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  vektortér  $\mathbb{R}$  felett.
- $P = \{p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid p(x)\}$ ,  $P$ -t a valós polinomok halmazának nevezzük.
- $F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ függvény}\}$ .

### Altér

Legyen  $V$  egy vektortér, és legyen  $S$  egy részhalmaza  $V$ -nek.

Tegyük fel, hogy  $S$  eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Ha  $v, w \in S$ , akkor az összegük  $v + w$  is eleme  $S$ -nek.
2. Ha  $v \in S$  és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $cv$  is eleme  $S$ -nek.

Ekkor  $S$  maga is egy vektortér. Valóban, a fent említett tulajdonságok teljesülnek  $V$  minden elemére, valamint teljesülnek  $S$  elemeire is. Ilyenkor  $S$ -et  $V$  alterének nevezzük.

### Példák alterekre

- $V$ -n  $\{0\}$  és  $V$  mindig alterek, ezeket triviális altereknek nevezzük.
- Az  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ -es mátrixok vektorterében a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.
- $P$ -ben  $P_n$ , a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok halmaza alteret alkot.
- $F$ -ben a folytonos, illetve a differenciálható függvények is alteret alkotnak.

### Altérkritérium

$S \subset V$  pontosan akkor altér, ha minden  $v, w \in S$  esetén

$$(1) \quad v - w \in S,$$

valamint

bármely  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in S$  esetén

$$(2) \quad \lambda v \in S.$$

Bizonyítás:

Ha  $S$  altér, akkor nyilván zárt a műveletekre. Ha  $S$  zárt a műveletekre, akkor a vektorterekre vonatkozó tulajdonságok többsége automatikusan teljesülnek  $S$ -beli vektorokra, mivel azok speciális  $V$ -beli vektorok. Csak azt kell megvizsgálni, hogy a  $V$ -beli  $0$  beleesik-e  $S$ -be, illetve egy  $S$ -beli vektor  $V$ -beli ellentettje beleesik-e  $S$ -be:

Legyen  $v \in S$  tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$0 = 0v \in S.$$

Legyen  $v \in S$  tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint



$$-v = (-1)v = \in S.$$

+füzet (Abel-csoport axiómák)  
oda-vissza

## Lineáris függőség, függetlenség

---

Legyen  $a_1, \dots, a_n \in V$  vektorok és  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  skalárok, ekkor a

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

kifejezést az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok **lineárisan függők**, ha léteznek olyan  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  nem mind 0 skalárok, hogy

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

Megjegyzés: A 0 vektort tartalmazó rendszer mindig lineárisan függő.

Az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok lineárisan függetlenek, ha nem függők.  $\neg(\exists) \neg$

### Generátorrendszer

Az  $a_1, \dots, a_n$  vektorrendszer generátorrendszere  $V$ -nek, ha bármely  $v \in V$  lineárisan kikombinálható  $a_1, \dots, a_n$ -ből.

Megjegyzés: Ekkor  $V$ -t végesen generálhatónak nevezzük.

### Bázis

Ha  $V$  végesen generált és  $a_1, \dots, a_n$  lineárisan független generátorrendszere, akkor  $a_1, \dots, a_n$ -et bázisnak nevezzük.

### Dimenzió

Tétel: Tetszőleges végesen generált vektortérben, ha adott két bázis  $a_1, \dots, a_n$  és  $v_1, \dots, v_m$ , akkor  $n = m$ , azaz bármely két bázis azonos számosságú.

Ezt a közös számosságot a vektortér dimenziójának nevezzük.

Példa:  $\mathbb{R}^2$  két dimenziós.

## Bázisra vonatkozó koordináták

---

Legyen  $V$  egy vektortér és  $b_1, \dots, b_m$  bázis  $V$ -ben. Ekkor tetszőleges  $v \in V$  egyértelműen felírható

$$v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

alakban, ahol a  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$  skalár  $n$ -est  $v \in \{b_1, \dots, b_n\}$  bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Tehát tetszőleges  $v \in V$  beazonosítható  $\beta$ -val, ha adott egy bázis.

$$v \in V \longleftrightarrow \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \beta \in \mathbb{R}$$

bijekció

Tétel: Tetszőleges  $n$ -dimenziós valós vektortér beazonosítható  $\mathbb{R}^n$ -el.

Báziscsere

??

## Lineáris leképezések

Legyenek  $U, V$  vektorterek azonos test fölött, ekkor az

$$L : U \mapsto V$$

leképezés lineáris, ha

- additív, azaz  $L(x + y) = Lx + Ly$ , minden  $x, y \in U$  esetén, valamint
- homogén  $L(\lambda x) = \lambda Lx$ , minden  $x \in U$  és  $\lambda$  skalár esetén.

Példa:

- Ha  $U$  vektortér  $\mathbb{R}$  fölött és  $L : U \mapsto \mathbb{R}$  lineáris, akkor  $L$ -et lineáris funkcionálnak nevezzük.
  - Pl:  $U = \mathbb{R}$ , akkor  $Lx = cx$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$  rögzített.
- Ha  $U = \mathbb{R}^n$  akkor  $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , pontosan akkor lineáris, ha létezik olyan  $c \in \mathbb{R}^n$  vektor, hogy  $Lx = \langle c, x \rangle$
- $Lx = 0$ , nulla lineáris leképezés
- Ha  $U = V$ , akkor az  $L : U \mapsto U$ ,  $Lx = x$  identikus leképezés
- $\frac{\sigma}{\sigma x} : P_n \mapsto P_{n-1}$ ,  $(\frac{\sigma}{\sigma x})(x) = P'(x)$
- Első koordináta tengelyre való projekció:  $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0)$ 
  - Speciális eset:  $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- Az  $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  leképezés **nem** lineáris.

Képtér és magtér

Legyen az  $L : U \mapsto V$  leképezés lineáris, ekkor a  $\text{range } L = \{v \in V \mid \exists u \in U, Lu = v\} \subset V$  halmazt  $L$  **képterének** nevezzük.

Legyen az  $L : U \mapsto V$  leképezés lineáris, ekkor a  $\text{null } L = \{u \in U \mid Lu = 0\} \subset U$  halmazt  $L$  **magterének** nevezzük.

Tétel:

- $L0 = 0$ 
  - Biz:  $L0 = L(0 + 0) = L0 + L0 = 2L0 \Rightarrow 0 = L0$
- $L(-x) = -Lx$

Példák

## Koordináta függvények

Ha  $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  lineáris, akkor  $L = (l_1, \dots, l_m)$ , ahol  $l_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  **lineáris funkcionál** és  $Lx = (l_1(x), \dots, l_m(x)) \forall x \in \mathbb{R}^n$  esetén.

Az előbbi  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  lineáris funkcionálokat  $L$  **koordinátafüggvényeinek** nevezzük.

Példa:  $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ , ekkor

$$l_1(x_1, x_2) = x_1,$$

valamint

$$l_2(x_1, x_2) = -x_2$$

## Lineáris leképezések vektorteret alkotnak

---

Jelölje  $\mathcal{L}(U, V) = \{L : U \mapsto V \mid L \text{ lineáris}\}$ .

Ha  $L, T \in \mathcal{L}(U, V)$ , akkor

$$L + Tx = Lx + Tx,$$

továbbá

tetszőleges  $\lambda$  skalár esetén

$$(\lambda L)x = \lambda Lx.$$

Az fenti műveletekkel  $\mathcal{L}(U, V)$  vektortér.

## Képtér és magtér alteret alkot

---

Ha  $L : U \mapsto V$  lineáris, akkor

$$(1) \quad \text{range} L \subset V,$$

illetve

$$(2) \quad \text{null} L \subset U$$

alterek.

Bizonyítás:

(1) Legyen  $x, y \in \text{range} L$ , ekkor létezik  $u_x, u_y \in U$  úgy, hogy  $Lu_x = x$  és  $Lu_y = y$ , ekkor

$$x - y = Lu_x - Lu_y = L(u_x - u_y) \Rightarrow x, y \in \text{range} L$$

és

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in \text{range} L$$

esetén

$$\lambda x = \lambda Lu_x = L(\lambda u_x) \Rightarrow \lambda x \in \text{range} L \Rightarrow \text{range} L \text{ altér.}$$

(2) Legyen  $u, v \in \text{null} L$ , ekkor

$$L(u - v) = Lu - Lv = 0 \Rightarrow u - v \in \text{null} L,$$

valamint

$$L\lambda u = \lambda Lu = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in \text{null} L \Rightarrow \text{null} L \text{ altér.}$$

## Nullitás + Rang tétel

---

Legyen  $L : V \mapsto W$ , ekkor

$$\dim(\text{null} L) + \dim(\text{range} L) = \dim V$$

Lemma: Ha  $v_1, \dots, v_k$  lineárisan függetlenek  $V$ -ben,  $V$   $n$ -dimenziós,  $k < n$ , akkor léteznek  $v_{k+1}, \dots, v_n$  vektorok úgy, hogy  $\{v_1, \dots, v_n\}$  bázis  $V$ -ben.

Bizonyítás:

Legyen  $\{v_1, \dots, v_k\}$  bázis  $\text{null} L$ -ben.

A lemma miatt kiegészíthető  $V$ -beli bázissá  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Ekkor  $Lv_i = w_i, i = 1, \dots, n$  és  $Lv_i = 0, i = 1, \dots, k$ .

Bebizonyítjuk, hogy  $w_{k+1}, \dots, w_n$  bázis  $\text{range} L$ -ben.

Legyen  $w \in \text{range } L$ , ekkor létezik olyan  $v \in V$ , hogy  $Lv = w$ .

Másrészt  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , így

$$w = Lv = L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Lv_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i Lv_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i w_i \Rightarrow w_{k+1}, \dots, w_n \text{ generátorrendszere } \text{range } L\text{-nek.}$$

Indirekt: tegyük fel, hogy  $w_{k+1}, \dots, w_n$  lineárisan függő.

$$0 = \sum_{i=k+1}^n \beta_i w_i, \beta_i \text{ nem mind } 0.$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=k+1}^n \beta_i Lv_i = L\left(\sum_{i=k+1}^n \beta_i v_i\right) \text{ ellentmondás} \Rightarrow \text{függetlenek.}$$

Képtér  $n - k$  dimenziós, magtér  $k$  dimenziós,  $(n - k) + k = n = \dim V$ .

## Lineáris leképezések mátrix reprezentációja

Legyen  $L : U \rightarrow V$  lineáris és  $\{a_1, \dots, a_m\}$  bázis  $U$ -ban,  $\{b_1, \dots, b_n\}$  bázis  $V$ -ben.

Legyen  $u \in U$  és  $Lu = v$ , ekkor

$$u = \sum_{i=1}^m u_i a_i,$$

és

$$v = \sum_{j=1}^n v_j b_j$$

$$A \in \mathcal{M}_{n \times m}, A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Adott bázisok esetén a fenti egyenletrendszernek pontosan egy megoldása létezik, ezt az  $L$  lineáris leképezés  $\{a_1, \dots, a_m\}$ ,  $\{b_1, \dots, b_n\}$  bázispárra vonatkozó mátrixának nevezzük.

## Belsőszorzat-terek, ortogonalitás

### Belsőszorzat (skaláris szorzat)

Legyen  $V$  valós vektortér, a

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

kétváltozós függvényt belső szorzatnak nevezzük, ha

- szimmetrikus, azaz  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \forall x, y \in V$
- Bilineáris, azaz mindkét változóban additív és homogén
  - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
  - $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- Pozitív definit, azaz
  - $\langle x, x \rangle \geq 0$ , és
  - $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Példák

(1)  $\mathbb{R}^n$  szokásos belső szorzata, azaz  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

(2) Legyen  $V = \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$ , ekkor  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$

## Ortogonalitás

---

Legyen  $V$  egy belső szorzat tér.

Azt mondjuk, hogy  $x$  merőleges  $y$ -ra, ha  $\langle x, y \rangle = 0$

Ortogonalis komplementer

Ha  $S \subset V$ , akkor az  $S^\perp = \{x \in V \mid x \perp s \quad \forall s \in S\}$  halmazt  $S$  ortogonalis komplementerének nevezzük.

## Pitagorasz tétel

---

Ha  $x$  és  $y$  merőlegesek egymásra ( $\langle x, y \rangle = 0$ ), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Bizonyítás:

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel  $\langle x, y \rangle = 0$ , és  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ,  $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$  definíció szerint.

## Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

---

Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik  $\lambda \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $x = \lambda y$ .

Bizonyítás:

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy  $\lambda$ -ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0$$

$$4\langle x, y \rangle^2 \leq 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|y\|^2\|x\|^2$$

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

## Minkowski egyenlőtlenség

---

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

ahol

$$2\langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert. (Q.E.D)

Legjobban approximáló elem

---

Tétel: Legyen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ortonormált rendszer, ekkor

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\|,$$

minden  $x \in V$  és  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  esetén, ahol

$$\lambda_i = \langle x, v_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Azaz  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  az  $x$ -et legjobban közelítő elem  $\text{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ -ben.

Bizonyítás:

Nem kell, mert nem tudta egyből felírni  $\Rightarrow$  Szabad reklamálni!

Ortogonalis rendszer

Legyen  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

Ha  $v_i \perp v_j, i \neq j$  esetén, akkor  $\{v_1, \dots, v_n\}$ -t ortogonalis rendszernek nevezzük.

Ortonormált rendszer

Legyen  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

Ha  $v_i \perp v_j, i \neq j$ , valamint  $\|v_i\| = 1, i = 1, \dots, n$ , akkor  $\{v_1, \dots, v_n\}$ -t ortonormált (ONR) rendszernek nevezzük.

Fourier együtthatók

---

Legyen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ortonormált rendszer, ekkor tetszőleges  $x \in V$  esetén a  $\lambda = \langle x, v_i \rangle$  számokat  $x$   $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ra vonatkozó Fourier együtthatóinak nevezzük.

Fourier sor

A  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  sort az  $x$   $\{v_1, \dots, v_n\}$  rendszerre vonatkozó Fourier-sorának nevezzük.

## Bessel egyenlőtlenség

Legyen  $v_1, \dots, v_n \in V$ , valamint legyen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ortonormált rendszer,  $x \in V$  tetszőleges,  $\lambda_i$  pedig az  $x$ -et legjobban approximáló elem, ekkor

$$\sum \lambda_i \leq \|x\|^2$$

Bizonyítás:

$$0 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\|^2 = \langle x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \rangle = \|x\|^2 - 2(\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, x \rangle) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \|v_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

mivel  $\langle v_i, x \rangle = \lambda_i$  és  $\|v_i\|^2 = 1$  (ortonormált miatt).

## Gram-Schmidt ortogonalizáció

Legyen  $v_1, \dots, v_n$  bázis  $V$ -ben, ekkor

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

$$\tilde{w}_k = v_k - \langle v_k, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v_k, w_{k-1} \rangle w_{k-1}$$

$$w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

Tétel: A fenti eljárás által generált  $\{w_1, \dots, w_k\}$  vektorrendszer ortonormált bázisa  $V$ -nek, valamint  $\text{lin}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{lin}\{w_1, \dots, w_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Bizonyítás:

Legyen  $i \neq k$ , ekkor feltehető, hogy  $k > i$ .

??

## Sajátérték, sajátvektor

### Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Legyen  $V$  egy vektortér,  $L : V \mapsto V$  lineáris leképezés, ekkor a  $\lambda$  szám  $L$  **sajátértéke**, ha létezik olyan  $v \in V \setminus \{0\}$ , hogy

$$Lv = \lambda v.$$

Ekkor  $v$ -t  $\lambda$ -hoz tartozó **sajátvektornak** nevezzük.

Példa:

(1) Legyen  $v = \mathbb{R}^2$ ,  $L$  az identikus leképezés, azaz

$$Lx = x, \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Ekkor  $\lambda = 1$  sajátérték és bármely  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  az 1-hez tartozó sajátvektor.

(2) Legyen  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $L_A x = Ax$ .

Ekkor  $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$   $i, i = 1, \dots, n$ , az  $a_i$ -hez tartozó sajátvektor, hiszen

$$L_A e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i e_i$$

(3) Legyen  $V$  a végtelen sokszor differenciálható valós függvények vektortere,  $L$  pedig jelölje a deriválást.

$$\frac{dt}{d} : e^\infty \mapsto e^\infty,$$

ekkor

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

tetszőleges  $\lambda$  esetén sajátvektor, amely  $\lambda$ -hoz tartozik, hiszen

$$\frac{d}{dt} x(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x(t)$$

Mátrixok esetén:

Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , akkor  $L_A x = Ax$  lineáris, tehát értelmezhetjük  $n \times n$ -es mátrixok sajátértékét és sajátvektorát is.

## Sajátvektorok alteret alkotnak

A  $V_\lambda = \{v \in V \mid Lv = \lambda v\}$  halmaz altér  $V$ -ben, melyet a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátaltérnek nevezünk.

Bizonyítás:

Az altérkritérium szerint.

Legyen  $v \in V_\lambda$ ,  $c$  konstans, ekkor

$$L(cv) = cLv = c\lambda v = \lambda(cv) \Rightarrow cv \in V_\lambda$$

Legyen  $v, w \in V_\lambda$ , ekkor

$$L(v - w) = Lv - Lw = \lambda v - \lambda w = \lambda(v - w) \Rightarrow v - w \in V_\lambda$$

## Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek

Bizonyítás:

Legyenek  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sajátértékek,  $v_1, \dots, v_m$  hozzájuk tartozó sajátvektorok.

$\lambda_i \neq \lambda_k, i \neq k$ .

## Karakterisztikus polinom

Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , akkor a  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  polinomot  $A$  karakterisztikus polinomjának nevezzük.

Tétel:

Legyen  $L : V \mapsto V$  lineáris, ekkor  $\lambda$   $L$  sajátértéke akkor és csak akkor, ha az  $(L - \lambda I)$  leképezés nem invertálható.



Mátrixokra:

Az  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ -es mátrixnak  $\lambda$  pontosan akkor sajátértéke, ha  $A - \lambda I$  nem invertálható.

Tétel:

Az  $A$  mátrixnak  $\lambda$  pontosan akkor sajátértéke, ha gyöke  $A$  karakterisztikus polinomjának.

Tétel:

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik, azaz, ha  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$  és  $B$  invertálható, akkor

$$P_A = P_{BAB^{-1}}$$

Bizonyítás:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B(A - \lambda I)B^{-1}) = \det(BAB^{-1} - \lambda I)$$

## Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  úgy, hogy  $A^T = A$  (szimmetrikus).

Az  $A$ -hoz tartozó kvadratikus forma  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Tétel:  $f$  maximuma az egységömbhélyon  $A$ -nak sajátvektora és a hozzá tartozó sajátérték  $A$ -nak a legnagyobb sajátértéke ami,  $f$ -nek az ebben a pontban felvett értéke.

Bizonyítás:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

Mivel  $S$  korlátos és zárt, a Hein-Borel tétel szerint kompakt.

Weierstrass tétele szerint folytonos függvénynek kompakt halmazon van szélsőértéke.

Létezik  $p \in S$  úgy, hogy  $\max f = f(p)$

jelölje  $W = (\text{lin}\{p\})^\perp$

Tetszőleges  $w \in W$ ,  $\|w\| = 1$  esetén

$$C_w(t) = (\cos(t))p + (\sin(t))w$$

$$g(t) = f(C_w(t))$$

mivel

$$C_w(0) = p$$

$$0 = g'(0) = \langle 2Ap, C'_w(p) \rangle = 2 \langle Ap, w \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Ap, w \rangle = 0 \Rightarrow Ap \in \text{lin}\{p\}$$

Tehát  $Ap = \lambda p$  valamely  $\lambda$  számra, azaz  $p$  sajátvektora  $A$ -nak.

## Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága

---

Szimmetrikus mátrix esetén létezik a térnek sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa, ebben a mátrix

$$L_A e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonális alakba írható, ahol a főátlóban a sajátértékek találhatók.