

Diszkrét matematika 2

Összefoglaló

Vig Levente

2017

\mathbb{R}^n	1
<i>Skaláris szorzat -ben (belső szorzat)</i>	1
<i>Vektorok</i>	1
<i>Műveletek vektorokkal</i>	1
Összeadás	1
Skalárral való szorzás	2
<i>Norma</i>	2
Távolság -ben:	2
Szög	2
Merőleges vetület	2
<i>Pitagorasz-tétel</i>	3
<i>Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség</i>	3
<i>Minkowski egyenlőtlenség</i>	3
<i>Egyenes egyenlete</i>	4
<i>A sík normálvektoros egyenlete</i>	4
Mátrixok	5
<i>Műveletek mátrixokkal</i>	5
Mátrixok összeadása	5
Skalárral való szorzás	5
Mátrixok szorzása	5
<i>Mátrix transzponáltja</i>	5
<i>Mátrix inverze</i>	6
Inverz kiszámítása Gauss eliminációval:	6
<i>Mátrixok rangja</i>	6
Determinánsok	7
<i>2x2-es mátrixok determinánsa</i>	7
<i>3x3-as mátrixok determinánsa</i>	8
<i>Kifejtési tétel</i>	8

Lineáris egyenletrendszerek	8
<i>Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek</i>	8
<i>Elemi sorműveletek</i>	9
<i>A megoldáshalmaz jellemzése</i>	9
<i>Feltételek a megoldhatóságra</i>	9
<i>Sorekvivalens mátrixok</i>	10
<i>Trapéz alakú mátrixok</i>	10
<i>Gauss elimináció</i>	10
Inhomogén lineáris egyenletrendszer	10
Vektorterek	11
<i>Vektortér</i>	11
Példák vektorterekre	12
Altér	12
Példák alterekre	12
<i>Altérkritérium</i>	12
<i>Lineáris függőség, függetlenség</i>	12
Generátorrendszer	13
Bázis	13
Dimenzió	13
<i>Bázisra vonatkozó koordináták</i>	13
Báziscsere	13
Lineáris leképezések	13
<i>Lineáris leképezések</i>	13
Képtér és magtér	14
Példák	14
<i>Koordináta függvények</i>	14
<i>Lineáris leképezések vektorteret alkotnak</i>	14
<i>Képtér és magtér alteret alkot</i>	15
<i>Nullitás + Rang tétel</i>	15
<i>Lineáris leképezések mátrix reprezentációja</i>	16
Belsőszorzat-terek, ortogonalitás	16
<i>Belsőszorzat (skaláris szorzat)</i>	16
<i>Ortogonalitás</i>	16
Ortogonalis komplementer	16

<i>Pitagorasz tétel</i>	17
<i>Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség</i>	17
<i>Minkowski egyenlőtlenség</i>	17
<i>Legjobb approximáló elem</i>	18
Ortogonalis rendszer	18
Ortonormált rendszer	18
<i>Fourier együtthatók</i>	18
Fourier sor	18
<i>Bessel egyenlőtlenség</i>	18
<i>Gram-Schmidt ortogonalizáció</i>	18
Sajátérték, sajátvektor	19
<i>Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektora</i>	19
<i>Sajátvektorok alteret alkotnak</i>	20
<i>Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek</i>	20
<i>Karakterisztikus polinom</i>	20
<i>Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora</i>	20
<i>Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága</i>	21

\mathbb{R}^n

Skaláris szorzat \mathbb{R}^n -ben (belső szorzat)

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor az

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

számot x és y skaláris szorzatának nevezzük.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ (skaláris szorzat)}$$

Skaláris szorzat tulajdonságai:

- Mindkét változóban homogén, azaz $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ és $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- Szimmetrikus, azaz $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Mindkét változóban additív, azaz
 - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ és
 - $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- Biz(4)

Vektorok

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Műveletek vektorokkal

Művelet: olyan függvény mely nem vezet ki a halmazból.

Összeadás

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ ekkor}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Az összeg is $\in \mathbb{R}^n$, azaz nem vezet ki a halmazból.

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A vektorok összeadásának tulajdonságai:

- Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $x + y \in \mathbb{R}^n$
- Kétváltozós művelet \mathbb{R}^n -en
- **Asszociatív** (csoportosítható), azaz minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy
 - $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Létezik $0 \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x + 0 = 0 + x = x$
 - $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ **additív egységelem**
- Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ -hez létezik olyan $y \in \mathbb{R}^n$, hogy $x + y = y + x = 0$
 - Ekkor y -t $(-x)$ -el jelöljük és x **additív inverzének** nevezzük.

- Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén $x + y = y + x$, azaz a vektorok összeadása **kommutatív** (felcserélhető)

Skalárral való szorzás

Legyen $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \dots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

A skalárral való szorzás komponensenként történik.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- Ha $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

Norma

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, ekkor

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

A norma tulajdonságai:

- Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\| \geq 0$ és ha $\|x\| = 0$ akkor $x = 0$
 - A norma nemnegatív függvény, csak a nullvektor vehet fel nullát.
 - Biz (1)
- Ha $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
 - A norma pozitív homogén
 - Biz (2)
- Háromszög egyenlőtlenség
 - Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Távolság \mathbb{R}^n -ben:

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor x és y távolsága $\|x - y\| = d(x, y)$

A távolság tulajdonságai:

- $d(x, y) \geq 0$ valamint $d(x, y) = 0$ ha $x = y$
- Szimmetrikus, azaz $d(x, y) = d(y, x)$
- Háromszög egyenlőtlenség: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Szög

Vektorok szöge:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Merőleges vetület

Az x vektor merőleges vetülete y -ra:

$$y_x = \lambda \cdot y$$

$$\begin{aligned}
\langle x - y_x, y_x \rangle &= 0 \\
\langle x, y_x \rangle - \langle y_x, y_x \rangle &= 0 \\
\langle x, \lambda y \rangle &= \langle \lambda y, \lambda y \rangle \\
\lambda \langle x, y \rangle &= \lambda^2 \langle y, y \rangle = \lambda^2 \|y\|^2 \\
\lambda &= \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve ez első egyenletbe:

$$y_x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

Pitagorasz-tétel

Ha x és y merőlegesek egymásra ($\langle x, y \rangle = 0$), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = x^2 + 2 \langle x, y \rangle + y^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel $\langle x, y \rangle = 0$, és $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$, $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$ definíció szerint.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle^2 &\leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\
|\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\|
\end{aligned}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = \lambda y$

Bizonyítás:

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = \|y\|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy λ -ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$\begin{aligned}
4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|y\|^2 \|x\|^2 &\leq 0 \\
4 \langle x, y \rangle^2 &\leq 4 \|y\|^2 \|x\|^2 \\
\langle x, y \rangle^2 &\leq \|y\|^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

Minkowski egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ahol

$$2\langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

Egyenes egyenlete

A $P \in \mathbb{R}^3$ ponton átmenő \vec{v} irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$x = P + t\vec{v}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + tv_1 \\ P_2 + tv_2 \\ P_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

vagyis $x_1 = P_1 + tv_1$ és $x_2 = P_2 + tv_2$ és $x_3 = P_3 + tv_3$

Tegyük fel, hogy $v_1 \neq 0$ és $v_2 \neq 0$ és $v_3 \neq 0$, azaz \vec{v} egyik tengellyes sem párhuzamos. Ilyenkor

$$t = \frac{x_1 - P_1}{v_1}, t = \frac{x_2 - P_2}{v_2}, t = \frac{x_3 - P_3}{v_3}$$

azaz

$$\frac{x_1 - P_1}{v_1} = \frac{x_2 - P_2}{v_2} = \frac{x_3 - P_3}{v_3}.$$

A sík normálvektoros egyenlete

$$x - p \perp n$$

$$\langle x - p, n \rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$(x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_2 + (x_3 - p_3)n_3 = 0$$

$$x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3$$

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle$$

Mátrixok

Műveletek mátrixokkal

Mátrixok összeadása

Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ és $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$ és $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$, ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$$

Tulajdonságok:

- Művelet, azaz nem vezet ki a halmazból.
- Asszociatív, azaz $(A + B) + C = A + (B + C) \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times m}$.
- Létezik olyan $0 \in \mathcal{M}_{n \times m}$ mátrix, hogy $A + 0 = 0 + A$, minden $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ esetén.
- Minden $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ mátrixhoz létezik $-A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, hogy $A + (-A) = (-A) + A = 0$, ez az ún. **additív inverz**.
- Kommutatív, azaz $A + B = B + A, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}$

Skalárral való szorzás

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$$

Tulajdonságok:

- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
- $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Mátrixok szorzása

Ha $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, akkor A_i jelöli A i. sorát és A^j jelöli A j. oszlopát.

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ és $B \in \mathcal{M}_{m \times k}$, ekkor

$$A \cdot B = C \in \mathcal{M}_{n \times k}$$

és

$$C = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & \dots & A_1 B^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_n B^1 & \dots & A_n B^k \end{pmatrix}$$

Ha $C = (c_{st})_{s=1, t=1}^{n, k}$, akkor $c_{st} = \sum_{r=1}^m a_{sr} \cdot b_{rt}$

Tulajdonságok:

- Asszociatív, azaz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek.
- Az összeadásra nézve disztibutív, azaz $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek és B azonos típusú C-vel.
- $(AB)^T = B^T A^T$, amennyiben az AB szorzat létezik.
 - Biz (5)
- Nem kommutatív

Mátrix transzponáltja

Egy mátrix transzponálása sorainak és oszlopainak a felcserélését jelenti.

Ha $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, akkor az $A^T \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrixot A transzponáltjának nevezzük.

Továbbá ha $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$, akkor $A^T = (a_{ji})_{j=1,i=1}^{m,n}$ és $a_{ij} = a'_{ji}$.

Tulajdonságok:

- $(A^T)^T = A$

Egy mátrix szimmetrikus ha transzponáltja önmaga, azaz $A^T = A$

Mátrix inverze

Legyen $A \in M_{n \times n}$, ha létezik $B \in M_{n \times n}$ úgy, hogy $AB = BA = I$, akkor azt mondjuk, hogy A invertálható és B -t A^{-1} -el jelöljük és A inverzének nevezzük.

Legyen $I \in M_{n \times n}$, és $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixokat $n \times n$ -es egységmátrixnak nevezzük.

Állítás: Ha $A \in M_{n \times n}$, akkor $IA = AI = A$.

Állítás: Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A -nak B és B' is inverze, ekkor $B' = B'(AB) = (B'A)B = B$, de $AB = B'A = I$, azaz $B' = B$.

Inverz kiszámítása Gauss eliminációval:

Legyen A adott, keressük A^{-1} -et, melyet X -el fogunk jelölni.

Az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a keresett mátrixot.

$$AX = I$$

A Gauss elimináció:

$$(A | I) \sim \dots \sim (I | A^{-1})$$

Elemi sorműveletek:

- Sor szorzása nem 0 skalárral.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másikat.
- 2 sor felcserélése

Definíció: 2 azonos típusú mátrix **sorekvivalens**, ha egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Definíció: Egy mátrix **trapéz alakú**, ha minden csupa 0 sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymást követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal.

Tétel: Ha A és A' sorekvivalensek, akkor az $Ax = 0$ és az $A'x = 0$ egyenletrendszerek megoldáshalmaza megegyezik.

Mátrixok rangja

Egy $n \times m$ -es mátrix rangján a mátrix oszlopai által generált \mathbb{R}^n -beli altér dimenzióját értjük. A mátrix rangja tehát k , ha oszlopai közül kiválasztható k db lineárisan független, de $k + 1$ db már nem.

Legyen $A \in M_{n \times n}$, ekkor A sorekvivalens egy olyan $B \in M_{n \times n}$ mátrixszal, amely bal felső sarkában egy $r \times r$ -es egységmátrixot tartalmaz, a többi eleme pedig 0, ahol $r \leq \min\{n, m\}$. Ekkor r -et az A mátrix rangjának nevezzük.

Példák mátrixokra:

Markov mátrix

Determinánsok

2x2-es mátrixok determinánsa

Legyen $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, és $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ilyenkor

$$\det(A) = ad - bc$$

Tulajdonságok:

- Az oszlopainak és a sorainak is bilineáris függvénye, azaz
 - $\det \begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$ és
 - $\det \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- Az egységmátrix determinánsa 1, pl:
 - $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$
 - $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

Tétel: Ha $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor az csak a determináns függvény lehet.

További tulajdonságok:

- Egy mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának determinánsával.
- Biz:

$$\begin{aligned} \bullet \det(A) &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \\ \bullet \det(A^T) &= \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb \end{aligned}$$

- Ha két oszlopa vagy sora megegyezik akkor a determináns nulla.

• Biz:

$$\bullet \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$$

- Pontosan akkor invertálható egy mátrix, ha a determinánsa nem nulla, ekkor

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

• Biz:

$$\bullet \text{Legyen } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \text{Tegyük fel, hogy } \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\bullet A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\bullet AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -cb+ad \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Legyen $A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C, C', A^{i+1}, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$, ilyenkor

$$\bullet \det(A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C + C', A^{i+1}, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C, A^{i+1}, \dots, A^n) + \det(A^1, \dots, A^i, A^{i-1}, C', A^{i+1}, \dots, A^n)$$

• azaz a determináns a mátrix oszlopainak additív függvénye.

- Ha a mátrix két oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

• A determinánsok szorzástétele:

$$\bullet \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Ha egy mátrix oszlopának konstans szorosát hozzáadunk egy másik oszlophoz, akkor a determináns értéke nem változik. (azaz, a Gauss elimináció használható)
- Diagonális, illetve felső háromszög mátrix determinánsa egyenlő a főátlóbeli elemek szorzatával.

3x3-as mátrixok determinánsa

Sarrus-szabály: csak 2x2-es és 3x3-as mátrixra használható.

Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ilyenkor

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tulajdonságok:

- Lásd 2x2-es

Kifejtési tétel

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Ahol $\det A_{ij}$ az a_{ij} -hez tartozó aldetermináns.

Egy adott elemhez tartozó aldeterminánst úgy kaphatunk meg, hogy az eredeti mátrixból töröljük az elem sorát és oszlopát így az eredeti $n \times n$ -es mátrixból egy $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot kapunk. A kifejtési tétel segítségével $n \times n$ -es mátrixok determinánsának kiszámítását visszavezethetjük 2x2-es vagy 3x3-as mátrixok determinánsára amikre pedig már alkalmazható a Sarrus-szabály.

Lineáris egyenletrendszerek

Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^n$ adottak, $x \in \mathbb{R}^m$ ismeretlen ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

Ha $b \neq 0$ akkor **inhomogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Ha $b = 0$, akkor **homogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Példa:

$$2x + y = 2$$

$$4x - y = 3$$

akkor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A homogén rendszernek az $x = 0$ mindig megoldása, ezt **triviális megoldásnak** nevezzük.

Tétel: Ha $m < n$, akkor a homogén lineáris

Bizonyítás: Indukcióval,

Legyen $n > 1, m = 1$, ekkor az egyenletrendszer az alábbi alakú

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

Ha $a_1 = \dots = a_n = 0$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}^n$ megoldás lesz.

Ha legalább egy $a_i \neq 0$ akkor feltehető, hogy ez a_1 .

Ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_1}(a_2x_2 + \dots + a_nx_n)$$

Ha $m < n$, $m - 1$ -re feltesszük, hogy igaz, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

A feltételek miatt létezik $a_{1i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, feltehető, hogy ez a_{11} , ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)$$

és a

$$(A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}A_1) = 0$$

$$(A_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}A_1) = 0$$

rendszerben már egyel kevesebb ($m-1$) változó szerepel.

Elemi sorműveletek

1. A mátrix egy sorát meg lehet szorozni egy nem nulla számmal.
2. Két sort össze lehet adni.
3. Két sort fel lehet cserélni.

A megoldáshalmaz jellemzése

Tétel: A homogén egyenlet megoldása altere \mathbb{R}^n -nek. Jelölje ezt L_A

Tétel: Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza $x_p + L_A$ alakú (lineáris sokaság), ahol L_A az inhomogén egyenlet megoldásterét, x_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

$$A_1x = 1$$

$$\vdots$$

$$A_nx = 0$$

x pontosan akkor megoldás, ha $x \in \text{lin}[A_1, \dots, A_n]$.

Feltételek a megoldhatóságra

Homogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = 0,$$

ahol $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$, azaz

$$x_1 A^1 + \dots + x_m A^m = 0.$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függők.

Tétel:

1. Ha $m > n$, akkor van triviálistól különböző megoldás.
2. Ha $m = n$, akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha A^1, \dots, A^m lineárisan függetlenek.
3. Ha $m < n$, akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha A^1, \dots, A^m lineárisan függetlenek.

Inhomogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = b,$$

ahol $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$, azaz

$$x_1 A^1 + \dots + x_m A^m = b.$$

Tétel:

1. Ha $m > n$, tetszőleges b vektor esetén biztosan van megoldás, ha $\text{rang } A$ maximális, azaz $\text{rang } A = n$. Ekkor végtelen sok megoldás van.
2. Ha $m = n$, tetszőleges b vektor esetén biztosan van megoldás, ha A^1, \dots, A^m bázisa a térnek. Ekkor pontosan egy megoldás van.
3. Ha $m < n$, tetszőleges b vektor esetén nem feltétlenül lesz megoldás.
4. Tetszőleges m, n esetén pontosan akkor lesz megoldás, ha b benne fekszik az A oszlopai által generált altérben.

Sorekvivalens mátrixok

Két azonos típusú mátrix sorekvivalens, ha az egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal. Tétel: Ha A és A' sorekvivalensek, akkor az $Ax = 0$ illetve az $A'x = 0$ egyenletrendszerek megoldáshalmaza egyezik.

Trapéz alakú mátrixok

Egy mátrix trapéz alakú, ha minden csupa 0 sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymás követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

Gauss elimináció

Általánosan: $Ax = 0$ — Gauss elimináció — $A'x = 0$, ahol az A' mátrix trapéz alakú.

Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Legyen $m < n$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ adottak, ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ahol legalább egy $b_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Jelölje A^j az A mátrix j . oszlopát, ekkor

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$$

Definíció: Legyenek $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, ekkor az

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

kifejezést az a_1, \dots, a_n vektorok x_1, \dots, x_n skalárokkal vett **lineáris kombinációjának** nevezzük.

Definíció: Az $Ax = b$, $b \neq 0$ inhomogén egyenletrendszer $x_p \in \mathbb{R}^n$, $Ax_p = b$ megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.

Ha x olyan, hogy $Ax = 0$, akkor azt a homogén rész megoldásának nevezzük.

Tétel: Az $Ax = b$ inhomogén egyenletrendszer összes megoldása $x_p + x$ alakban áll elő, ahol x_p egy partikuláris megoldás, x pedig a homogén rész megoldása.

Az $Ax = b$ egyenletrendszer esetén az

$$[A, B] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

mátrixot a rendszer **kibővített mátrixának** nevezzük.

Vektorterek

Vektortér

Legyen $V \neq 0$ halmaz, és tegyük fel, hogy adott két leképezés

$$+ : V \times V \mapsto V,$$

illetve

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \mapsto V$$

a következő tulajdonságokkal:

- Tetszőleges $v, w, u \in V$ esetén $(v + w) + u = v + (w + u)$
- Létezik olyan 0 -val jelölt eleme V -nek, hogy $v + 0 = 0 + v = v$, minden $v \in V$ esetén.
- Minden $v \in V$ -hez létezik $(-v) \in V$, hogy $v + (-v) = (-v) + v = 0$
- Tetszőleges $v, w \in V$ esetén $v + w = w + v$.

valamint:

- Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
- Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v, w, u \in V$ esetén $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.
- Minden $v \in V$ esetén $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.
- Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén $(\lambda\mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda v)$.

Ekkor V -t vektortérnek nevezzük \mathbb{R} felett.

Megjegyzés: \mathbb{R} helyett tekinthetünk más számhalmazokat is amely rendelkezik \mathbb{R} -hez hasonló tulajdonságokkal, azaz algebrai értelemben testet alkot.

Ilyen például a racionális számok teste \mathbb{Q} , vagy a véges testek (pl.: mod 2 maradékosztályok).

Példák vektorterekre

- \mathbb{R}^n vektortér \mathbb{R} felett.
- \mathbb{C}^n vektortér \mathbb{C} illetve \mathbb{R} felett.
- $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ vektortér \mathbb{R} felett.
- $P = \{p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid p(x)\}$, P -t a valós polinomok halmazának nevezzük.
- $F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ függvény}\}$.

Altér

Legyen V egy vektortér, és legyen S egy részhalmaza V -nek.

Tegyük fel, hogy S eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Ha $v, w \in S$, akkor az összegük $v + w$ is eleme S -nek.
2. Ha $v \in S$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor cv is eleme S -nek.

Ekkor S maga is egy vektortér. Valóban, a fent említett tulajdonságok teljesülnek V minden elemére, valamit teljesülnek S elemeire is. Ilyenkor S -et V alterének nevezzük.

Példák alterekre

- V -n $\{0\}$ és V mindig alterek, ezeket triviális altereknek nevezzük.
- Az $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ -es mátrixok vektorterében a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.
- P -ben P_n , a legfeljebb n -edfokú polinomok halmaza alteret alkot.
- F -ben a folytonos, illetve a differenciálható függvények is alteret alkotnak.

Altérkritérium

$S \subset V$ pontosan akkor altér, ha minden $v, w \in S$ esetén

$$(1) \quad u - w \in S,$$

valamint

bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in S$ esetén

$$(2) \quad \lambda v \in S.$$

Bizonyítás:

Ha S altér, akkor nyilván zárt a műveletekre. Ha S zárt a műveletekre, akkor a vektorterekre vonatkozó tulajdonságok többsége automatikusan teljesülnek S -beli vektorokra, mivel azok speciális V -beli vektorok. Csak azt kell megvizsgálni, hogy a V -beli 0 beleesik-e S -be, illetve egy S -beli vektor V -beli ellentettje beleesik-e S -be:

Legyen $v \in S$ tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$0 = 0v \in S.$$

Legyen $v \in S$ tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$-v = (-1)v \in S.$$

+füzet (Abel-csoport axiómák)

oda-vissza

Lineáris függőség, függetlenség

Legyen $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorok és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalárok, ekkor a

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

kifejezést az a_1, \dots, a_n vektorok $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az a_1, \dots, a_n vektorok **lineárisan függők**, ha léteznek olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nem mind 0 skalárok, hogy

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

Megjegyzés: A 0 vektort tartalmazó rendszer mindig lineárisan függő.

Az a_1, \dots, a_n vektorok lineárisan függetlenek, ha nem függők. $\neg(\exists)_f$

Generátorrendszer

Az a_1, \dots, a_n vektorrendszer generátorrendszere V -nek, ha bármely $v \in V$ lineárisan kikombinálható a_1, \dots, a_n -ből.

Megjegyzés: Ekkor V -t végesen generálhatónak nevezzük.

Bázis

Ha V végesen generált és a_1, \dots, a_n lineárisan független generátorrendszere, akkor a_1, \dots, a_n -et bázisnak nevezzük.

Dimenzió

Tétel: Tetszőleges végesen generált vektortérben, ha adott két bázis a_1, \dots, a_n és v_1, \dots, v_m , akkor $n = m$, azaz bármely két bázis azonos számosságú.

Ezt a közös számosságot a vektortér dimenziójának nevezzük.

Példa: \mathbb{R}^2 két dimenziós.

Bázisra vonatkozó koordináták

Legyen V egy vektortér és b_1, \dots, b_m bázis V -ben. Ekkor tetszőleges $v \in V$ egyértelműen felírható

$$v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

alakban, ahol a $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ skálár n -est $v \{b_1, \dots, b_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Tehát tetszőleges $v \in V$ beazonosítható β -val, ha adott egy bázis.

$$v \in V \longleftrightarrow \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \beta \in \mathbb{R}$$

bijekció

Tétel: Tetszőleges n -dimenziós valós vektortér beazonosítható \mathbb{R}^n -el.

Báziscsere

??

Lineáris leképezések

Lineáris leképezések

Legyenek U, V vektorterek azonos test fölött, ekkor az

$$L : U \mapsto V$$

leképezés lineáris, ha

- additív, azaz $L(x + y) = Lx + Ly$, minden $x, y \in U$ esetén, valamint
- homogén $L(\lambda x) = \lambda Lx$, minden $x \in U$ és λ skalár esetén.

Példa:

- Ha U vektortér \mathbb{R} fölött és $L : U \mapsto \mathbb{R}$ lineáris, akkor L -et lineáris funkcionálnak nevezzük.
 - Pl: $U = \mathbb{R}$, akkor $Lx = cx$, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített.
- Ha $U = \mathbb{R}^n$ akkor $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, pontosan akkor lineáris, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $Lx = \langle c, x \rangle$
- $Lx = 0$, nulla lineáris leképezés
- Ha $U = V$, akkor az $L : U \mapsto U$, $Lx = x$ identikus leképezés
- $\frac{\sigma}{\sigma x} : P_n \mapsto P_{n-1}$, $(\frac{\sigma}{\sigma x})(x) = P'(x)$
- Első koordináta tengelyre való projekció: $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0)$
 - Speciális eset: $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- Az $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ leképezés **nem** lineáris.

Képtér és magtér

Legyen az $L : U \mapsto V$ leképezés lineáris, ekkor a $\text{range } L = \{v \in V \mid \exists u \in U, Lu = v\} \subset V$ halmazt L **képterének** nevezzük.

Legyen az $L : U \mapsto V$ leképezés lineáris, ekkor a $\text{null } L = \{u \in U \mid Lu = 0\} \subset U$ halmazt L **magtérének** nevezzük.

Tétel:

- $L0 = 0$
- Biz: $L0 = L(0 + 0) = L0 + L0 = 2L0 \Rightarrow 0 = L0$
- $L(-x) = -Lx$

Példák

Koordináta függvények

Ha $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lineáris, akkor $L = (l_1, \dots, l_m)$, ahol $l_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ **lineáris funkcionál** és $Lx = (l_1(x), \dots, l_m(x)) \forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén.

Az előbbi l_i , $i = 1, \dots, m$ lineáris funkcionálokat L **koordinátafüggvényeinek** nevezzük.

Példa: $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, ekkor

$$l_1(x_1, x_2) = x_1,$$

valamint

$$l_2(x_1, x_2) = -x_2$$

Lineáris leképezések vektorteret alkotnak

Jelölje $\mathcal{L}(U, V) = \{L : U \mapsto V \mid L \text{ lineáris}\}$.

Ha $L, T \in \mathcal{L}(U, V)$, akkor

$$L + Tx = Lx + Tx,$$

továbbá

tetszőleges λ skalár esetén

$$(\lambda L)x = \lambda Lx.$$

Az fenti műveletekkel $\mathcal{L}(U, V)$ vektortér.

Bizonyítás:

Képtér és magtér alteret alkot

Ha $L : U \mapsto V$ lineáris, akkor

$$(1) \quad \text{range} L \subset V,$$

illetve

$$(2) \quad \text{null} L \subset U$$

alterek.

Bizonyítás:

(1) Legyen $x, y \in \text{range} L$, ekkor létezik $u_x, u_y \in U$ úgy, hogy $Lu_x = x$ és $Lu_y = y$, ekkor

$$x - y = Lu_x - Lu_y = L(u_x - u_y) \Rightarrow x, y \in \text{range} L$$

és

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in \text{range} L$$

esetén

$$\lambda x = \lambda Lu_x = L(\lambda u_x) \Rightarrow \lambda x \in \text{range} L \Rightarrow \text{range} L \text{ altér.}$$

(2) Legyen $u, v \in \text{null} L$, ekkor

$$L(u - v) = Lu - Lv = 0 \Rightarrow u - v \in \text{null} L,$$

valamint

$$L\lambda u = \lambda Lu = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in \text{null} L \Rightarrow \text{null} L \text{ altér.}$$

Nullitás + Rang tétel

Legyen $L : V \mapsto W$, ekkor

$$\dim(\text{null} L) + \dim(\text{range} L) = \dim V$$

Lemma: Ha v_1, \dots, v_k lineárisan függetlenek V -ben, V n -dimenziós, $k < n$, akkor léteznek v_{k+1}, \dots, v_n vektorok úgy, hogy $\{v_1, \dots, v_n\}$ bázis V -ben.

Bizonyítás:

Legyen $\{v_1, \dots, v_k\}$ bázis $\text{null} L$ -ben.

A lemma miatt kiegészíthető V -beli bázissá $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Ekkor $Lv_i = w_i, i = 1, \dots, n$ és $Lv_i = 0, i = 1, \dots, k$.

Bebizonyítjuk, hogy w_{k+1}, \dots, w_n bázis $\text{range} L$ -ben.

Legyen $w \in \text{range} L$, ekkor létezik olyan $v \in V$, hogy $Lv = w$.

Másrészt $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, így

$$w = Lv = L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Lv_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i Lv_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i w_i \Rightarrow w_{k+1}, \dots, w_n \text{ generátorrendszere } \text{range} L \text{-nek.}$$

Indirekt: tegyük fel, hogy w_{k+1}, \dots, w_n lineárisan függő.

$$0 = \sum_{i=k+1}^n \beta_i w_i, \beta_i \text{ nem mind } 0.$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=k+1}^n \beta_i L v_i = L \left(\sum_{i=k+1}^n \beta_i v_i \right) \text{ ellentmondás} \Rightarrow \text{függetlenek.}$$

Képtér $n - k$ dimenziós, magtér k dimenziós, $(n - k) + k = n = \dim V$.

Lineáris leképezések mátrix reprezentációja

Legyen $L : U \mapsto V$ lineáris és $\{a_1, \dots, a_m\}$ bázis U -ban, $\{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V -ben.

Legyen $u \in U$ és $Lu = v$, ekkor

$$u = \sum_{i=1}^m u_i a_i,$$

és

$$v = \sum_{j=1}^n v_j b_j$$

$$A \in \mathcal{M}_{n \times m}, A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Adott bázisok esetén a fenti egyenletrendszernek pontosan egy megoldása létezik, ezt az L lineáris leképezés $\{a_1, \dots, a_m\}$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ bázispárra vonatkozó mátrixának nevezzük.

Belsőszorzat-terek, ortogonalitás

Belsőszorzat (skaláris szorzat)

Legyen V valós vektortér, a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

kétváltozós függvényt belső szorzatnak nevezzük, ha

- szimmetrikus, azaz $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \forall x, y \in V$
- Bilineáris, azaz mindkét változóban additív és homogén
 - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
 - $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- Pozitív definit, azaz
 - $\langle x, x \rangle \geq 0$, és
 - $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Példák

(1) \mathbb{R}^n szokásos belső szorzata, azaz $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

(2) Legyen $V = \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$, ekkor $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Ortogonalitás

Legyen V egy belső szorzat tér.

Azt mondjuk, hogy x merőleges y -ra, ha $\langle x, y \rangle = 0$

Ortogonalis komplementer

Ha $S \subset V$, akkor az $S^\perp = \{x \in V \mid x \perp s \quad \forall s \in S\}$ halmazt S ortogonalis komplementerének nevezzük.

Pitagorasz tétel

Ha x és y merőlegesek egymásra ($\langle x, y \rangle = 0$), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Bizonyítás:

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = x^2 + 2 \langle x, y \rangle + y^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel $\langle x, y \rangle = 0$, és $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$, $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$ definíció szerint.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = \lambda y$

Bizonyítás:

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = \|y\|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy λ -ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkrimánsa nem pozitív, azaz

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0$$

$$4 \langle x, y \rangle^2 \leq 4 \|y\|^2 \|x\|^2$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|y\|^2 \|x\|^2$$

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

Minkowski egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ahol

$$2 \langle x, y \rangle \leq 2 |\langle x, y \rangle| \leq 2 \|x\| \|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

Legjobban approximáló elem

Tétel: Legyen $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormált rendszer, ekkor

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^n a_i v_i\|,$$

minden $x \in V$ és $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén, ahol

$$\lambda_i = \langle x, v_i \rangle, i = 1, \dots, n.$$

Azaz $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ az x -et legjobban közelítő elem $\text{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ -ben.

Bizonyítás:

Nem kell, mert nem tudta egyből felírni. Szabad reklamálni!

Ortogonalis rendszer

Legyen $v_1, \dots, v_n \in V$.

Ha $v_1 \perp v_j, i \neq j$ esetén, akkor $\{v_1, \dots, v_n\}$ -t ortogonalis rendszernek nevezzük.

Ortonormált rendszer

Legyen $v_1, \dots, v_n \in V$.

Ha $v_1 \perp v_j, i \neq j$, valamint $\|v_i\| = 1, i = 1, \dots, n$, akkor $\{v_1, \dots, v_n\}$ -t ortonormált (ONR) rendszernek nevezzük.

Fourier együtthatók

Legyen $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormált rendszer, ekkor tetszőleges $x \in V$ esetén a $\lambda = \langle x, v_i \rangle$ számokat x $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ra vonatkozó Fourier együtthatóinak nevezzük.

Fourier sor

A $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ sort az x $\{v_1, \dots, v_n\}$ rendszerre vonatkozó Fourier-sorának nevezzük.

Bessel egyenlőtlenség

Legyen $v_1, \dots, v_n \in V$, valamint legyen $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormált rendszer, $x \in V$ tetszőleges, λ_i pedig az x -et legjobban approximáló elem, ekkor

$$\sum \lambda_i^2 \leq \|x\|^2$$

Bizonyítás:

$$0 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\|^2 = \langle x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \rangle = \|x\|^2 - 2(\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, x \rangle) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|v_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

mivel $\langle v_i, x \rangle = \lambda_i$ és $\|v_i\|^2 = 1$ (ortonormált miatt).

Gram-Schmidt ortogonalizáció

Legyen v_1, \dots, v_n bázis V -ben, ekkor

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

$$\tilde{w}_k = v_k - \langle v_k, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v_k, w_{k-1} \rangle w_{k-1}$$

$$w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

Tétel: A fenti eljárás által generált $\{w_1, \dots, w_k\}$ vektorrendszer ortonormált bázisa V -nek, valamint $\text{lin}\{v_i, \dots, v_k\} = \text{lin}\{w_i, \dots, w_k\}$, $k = 1, \dots, n$.

Bizonyítás:

Legyen $i \neq k$, ekkor feltehető, hogy $k > i$.

??

Sajátérték, sajátvektor

Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Legyen V egy vektortér, $L : V \mapsto V$ lineáris leképezés, ekkor a λ szám L **sajátértéke**, ha létezik olyan $v \in V \setminus \{0\}$, hogy

$$Lv = \lambda v.$$

Ekkor v -t λ -hoz tartozó **sajátvektornak** nevezzük.

Példa:

(1) Legyen $v = \mathbb{R}^2$, L az identikus leképezés, azaz

$$Lx = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Ekkor $\lambda = 1$ sajátérték és bármely $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ az 1-hez tartozó sajátvektor.

(2) Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $L_A x = Ax$.

Ekkor $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, n$, az a_i -hez tartozó sajátvektor, hiszen

$$L_A e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i e_i$$

(3) Legyen V a végtelen sokszor differenciálható valós függvények vektortere, L pedig jelölje a deriválást.

$$\frac{dt}{d} : e^\infty \mapsto e^\infty,$$

ekkor

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

tetszőleges λ esetén sajátvektor, amely λ -hoz tartozik, hiszen

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x(t)$$

Mátrixok esetén:

Ha $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, akkor $L_A x = Ax$ lineáris, tehát értelmezhetjük $n \times n$ -es mátrixok sajátértékét és sajátvektorát is.

Sajátvektorok alteret alkotnak

A $V_\lambda = \{v \in V \mid Lv = \lambda v\}$ halmaz altér V -ben, melyet a λ -hoz tartozó sajátaltérnek nevezünk.

Bizonyítás:

Az altérkritérium szerint.

Legyen $v \in V_\lambda$, c konstans, ekkor

$$L(cv) = cLv = c\lambda v = \lambda(cv) \Rightarrow cv \in V_\lambda$$

Legyen $v, w \in V_\lambda$, ekkor

$$L(v - w) = Lv - Lw = \lambda v - \lambda w = \lambda(v - w) \Rightarrow v - w \in V_\lambda$$

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek

Bizonyítás:

Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sajátértékek, v_1, \dots, v_m hozzájuk tartozó sajátvektorok.

$\lambda_i \neq \lambda_k$, $i \neq k$.

Karakterisztikus polinom

Ha $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, akkor a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomot A karakterisztikus polinomjának nevezzük.

Tétel:

Legyen $L : V \mapsto V$ lineáris, ekkor λ L sajátértéke akkor és csak akkor, ha az $(L - \lambda I)$ leképezés nem invertálható.

Mátrixokra:

Az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ -es mátrixnak λ pontosan akkor sajátértéke, ha $A - \lambda I$ nem invertálható.

Tétel:

Az A mátrixnak λ pontosan akkor sajátértéke, ha gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Tétel:

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik, azaz, ha $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ és B invertálható, akkor

$$P_A = P_{BAB^{-1}}$$

Bizonyítás:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B(A - \lambda I)B^{-1}) = \det(BAB^{-1} - \lambda I)$$

Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ úgy, hogy $A^T = A$ (szimmetrikus).

Az A -hoz tartozó kvadratikus forma $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Tétel: f maximuma az egységgömbhélyon A -nak sajátvektora és a hozzá tartozó sajátérték A -nak a legnagyobb sajátértéke ami, f -nek az ebben a pontban felvett értéke.

Bizonyítás:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

Mivel S korlátos és zárt, a Hein-Borel tétel szerint kompakt.

Weierstrass tétele szerint folytonos függvénynek kompakt halmazon van szélsőértéke.

Létezik $p \in S$ úgy, hogy $\max f = f(p)$

jelölje $W = (\text{lin}\{p\})^{\perp}$

Tetszőleges $w \in W$, $\|w\| = 1$ esetén

$$C_w(t) = (\cos(t))p + (\sin(t))w$$

$$g(t) = f(C_w(t)),$$

mivel

$$C_w(0) = p$$

$$0 = g'(0) = \langle 2Ap, C'_w(p) \rangle = 2 \langle Ap, w \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Ap, w \rangle = 0 \Rightarrow Ap \in \text{lin}\{p\}$$

Tehát $Ap = \lambda p$ valamely λ számra, azaz p sajátvektora A -nak.

Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága

Szimmetrikus mátrix esetén létezik a térnek sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa, ebben a mátrix

$$L_A e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonális alakba írható, ahol a főátlóban a sajátértékek találhatók.