Diszkrét matematika 2 összefoglaló

Vig Levente

2017

R^n **1**

Skaláris szorzat -ben (belső szorzat) *1*

Vektorok *1*

Műveletek vektorokkal *1*

Összeadás 1

Skalárral való szorzás 2

Norma *2*

Távolság -ben: 2

Szög 2

Merőleges vetület 2

Pitagorasz-tétel *3*

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség *3*

Minkowski egyenlőtlenség *3*

Egyenes egyenlete *4*

A sík normálvektoros egyenlete *4*

Mátrixok **5**

Műveletek mátrixokkal *5*

Mátrixok összeadása 5

Skalárral való szorzás 5

Mátrixok szorzása 5

Mátrix transzponáltja *5*

Mátrix inverze *6*

Inverz kiszámítása Gauss eliminációval: 6

Mátrixok rangja *6*

Determinánsok **7**

2x2-es mátrixok determinánsa *7*

3x3-as mátrixok determinánsa *8*

Kifejtési tétel *8*
Lineáris egyenletrendszerek **8**
Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek *8*
Elemi sorműveletek *9*
Sorekvivalens mátrixok *9*
Trapéz alakú mátrixok *9*
Gauss elimináció *9*
Inhomogén lineáris egyenletrendszer 9
Vektorterek **10**
Vektortér *10*
Példák vektorterekre 11
Altér 11
Példák alterekre 11
Altérkritérium *11*
Lineáris függőség, függetlenség *11*
Generátorrendszer 12
Bázis 12
Dimenzió 12
Bázisra vonatkozó koordináták *12*
Báziscsere 12
Lineáris leképezések **12**
Lineáris leképezések *12*
Képtér 13
Magtér 13
Példák 13
Koordináta függvények *13*
Lineáris leképezések vektorteret alkotnak *13*
Képtér és magtér alteret alkot *13*
Nullitás + Rang tétel *13*
Lineáris leképezések mátrix reprezentációja *13*
Belsőszorzat-terek, ortogonalitás **13**
Belsőszorzat (skaláris szorzat) *13*
Ortogonalitás *13*
Ortogonális komplementer 13

Pitagorasz tétel 14
Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség 14
Minkowski egyenlőtlenség 14
Legjobban approximáló elem 14
Bessel egyenlőtlenség 14
Fourier együtthatók 14
Fourier sor 14
Ortonormált rendszer 14
Ortogonális rendszer 14
Gram-Schmidt ortogonalizáció 14
Sajátérték, sajátvektor 14
Lineáris leképzések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai 14
Sajátvektorok alteret alkotnak 15
Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek 15
Karakterisztikus polinom 15
Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora 15
Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága 15

R^n

Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben (belső szorzat)

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor az

$$< x, y > = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

számot x és y skaláris szorzatának nevezzük.

$$< , >: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n -> \mathbb{R} \text{ (skaláris szorzat)}$$

Skaláris szorzat tulajdonságai:
- Mindkét változóban homogén, azaz $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$ és $< x, \lambda y > = \lambda < x, y >$
- Szimmetrikus, azaz $< x, y > = < y, x >$
- Mindkét változóban addítv, azaz
  - $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$ és
  - $< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$
  - Biz(4)

Vektorok

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1,...,n\}$$

Műveletek vektorokkal

Művelet: olyan függvény mely nem vezet ki a halmazból.

Összeadás

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ ekkor}$$

$$x + y = x = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Az összeg is $\in \mathbb{R}^n$, azaz nem vezet ki a halmazból.

$$+ : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n -> \mathbb{R}^n$$

A vektorok összeadásának tulajdonságai:
- Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $x + y \in \mathbb{R}^n$
- Kétváltozós művelet $\mathbb{R}^n$-en
- **Asszociatív** (csoportosítható), azaz minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Létezik $0 \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x + 0 = 0 + y = x$
  - $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ **additív egységelem**
- Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$-hez létezik olyan $y \in \mathbb{R}^n$,hogy $x + y = y + x = 0$
  - Ekkor y-t $-x$-el jelöljük és x **additív inverzének** nevezzük.

- Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén $x + y = y + x$, azaz a vektorok összeadása **kommutatív** (felcserélhető)

Skalárral való szorzás

Legyen $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \cdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

A skalárral való szorzás komponensenkét történik.

$$\cdot : \mathbb{R} x \mathbb{R}^n - > \mathbb{R}^n$$

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- Ha $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

Norma

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, ekkor

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

A norma tulajdonságai:

- Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\| \geq 0$ és ha $\|x\| = 0$ akkor $x = 0$
  - A norma nemnegatív függvény, csak a nullvektor vehet fel nullát.
  - Biz (1)
- Ha $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\|\lambda x\| = |\ \lambda\ |\ \|x\|$
  - A norma pozitív homogén
  - Biz (2)
- Háromszög egyenlőtlenség
  - Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Távolság $\mathbb{R}^n$-ben:

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor x és y távolsága $\|x - y\| = d(x, y)$

A távolság tulajdonságai:

- $d(x, y) \geq 0$ valamint $d(x, y) = 0$ ha $x = y$
- Szimmetrikus, azaz $d(x, y) = d(y, x)$
- Háromszög egyenlőtlenség: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Szög

Vektorok szöge:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Merőleges vetület

Az x vektor merőleges vetülete y-ra:

$$y_x = \lambda \cdot y$$

$$< x - y_x, y_x > = 0$$
$$< x, y_x > - < y_x, y_x > = 0$$
$$< x, \lambda y > = < \lambda y, \lambda y >$$
$$\lambda < x, y > = \lambda^2 < y, y > = \lambda^2 \|y\|$$
$$\lambda = \frac{< x, y >}{\|y\|^2}$$

Ezt visszahelyettesítve ez első egyenletbe:

$$y_x = \frac{< x, y >}{\|y\|^2} y$$

Pitagorasz-tétel

Ha x és y merőlegesek egymásra ($< x, y > = 0$), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = x^2 + 2 < x, y > + y^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel $< x, y > = 0$, és $< x, x > = \|x\|^2$, $< y, y > = \|y\|^2$ definíció szerint.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$< x, y >^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$
$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = \lambda y$

<u>Bizonyítás:</u>
Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = < x + \lambda y, x + \lambda y > = < x, x > + \lambda^2 < y, y > + 2\lambda < x, y > = \|y\|^2 \lambda^2 + 2 < x, y > \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy λ-ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkrimánsa nem pozitív , azaz

$$4 < x, y >^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0$$
$$4 < x, y >^2 \leq 4\|y\|^2\|x\|^2$$
$$< x, y >^2 \leq \|y\|^2\|x\|^2$$

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

Minkowski egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

<u>Bizonyítás</u>:
Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 = < x+y, x+y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$$

ahol

$$2 < x, y > \le 2 | < x, y > | \le 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.
Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

Egyenes egyenlete

A $P \in \mathbb{R}^3$ ponton átmenő $\vec{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$x = P + t\vec{v}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + tv_1 \\ P_2 + tv_2 \\ P_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

vagyis $x_1 = P_1 + tv_1$ és $x_2 = P_2 + tv_2$ és $x_3 = P_3 + tv_3$
Tegyük fel, hogy $v_1 \neq 0$ és $v_2 \neq 0$ és $v_3 \neq 0$, azaz $\vec{v}$ egyik tengellyes sem párhuzamos. Ilyenkor

$$t = \frac{x_1 - P_1}{v_1},\ t = \frac{x_2 - P_2}{v_2},\ t = \frac{x_3 - P_3}{v_3}$$

azaz

$$\frac{x_1 - P_1}{v_1} = \frac{x_2 - P_2}{v_2} = \frac{x_3 - P_3}{v_3}.$$

A sík normálvektoros egyenlete

$$x - p \perp n$$

$$< x - p, n > = 0$$

$$< \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} > = 0$$

$$(x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_2 + (x_3 - p_3)n_3$$

$$x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3$$

Mátrixok

Műveletek mátrixokkal

Mátrixok összeadása

Legyen $A, B \in M_{nxm}$ és $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$ és $B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$, ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$$

Tulajdonságok:
- Művelet, azaz nem vezet ki a halmazból.
- Asszociatív, azaz $(A + B) + C = A + (B + C)\forall A, B, C\ in M_{nxm}$.
- Létezik olyan $0 \in M_{nxm}$ mátrix, hogy $A + 0 = 0 + A$, minden $A \in M_{nxm}$ esetén.
- Minden $A \in M_{nxm}$ mátrixhoz létezik $-A \in M_{nxm}$, hogy $A + (-A) = (-A) + A = 0$, ez az ún. **additív inverz.**
- Kommutatív, azaz$A + B = B + A, \forall A, B \in M_{nxm}$

Skalárral való szorzás

Legyen $A \in M_{nxm}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$$

Tulajdonságok:
- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Mátrixok szorzása

Ha $A \in M_{nxm}$, akkor A_i jelöli A i. sorát és A^j jelöli A j. oszlopát.

Legyen $A \in M_{nxm}$ és $B \in M_{mxk}$, ekkor

$$A \cdot B = C \in M_{nxk}$$

és

$$C = \begin{bmatrix} A_1B^1 & \dots & A_1B^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_nB^1 & \dots & A_nB^k \end{bmatrix}$$

Ha $C = (c_{st})_{s=1,t=1}^{n,k}$, akkor $c_{st} = \sum_{r=1}^{m} a_{sr} - b_{rt}$

Tulajdonságok:
- Asszociatív, azaz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek.
- Az összeadásra nézve disztibutív, azaz $A \cdot (B + C) = AB + AC$, amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek és B azonos típusú C-vel.
- $(AB)^T = B^T A^T$, amennyiben az AB szorzat létezik.
  - Biz (5)
- Nem kommutatív

Mátrix transzponáltja

Egy mátrix transzponálása sorainak és oszlopainak a felcserélését jelenti.
Ha $A \in M_{nxm}$, akkor az $A^T \in M_{mxn}$ mátrixot A transzponáltjának nevezzük.

Továbbá ha $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$, akkor $A^T = (a_{ji})_{j=1,i=1}^{m,n}$ és $a_{ij} = a'_{ji}$.
Tulajdonságok:
- $(A^T)^T = A$

Egy mátrix szimmetrikus ha transzponáltja önmaga, azaz $A^T = A$

Mátrix inverze

Legyen $A \in M_{nxn}$, ha létezik $B \in M_{nxn}$ úgy, hogy $AB = BA = I$, akkor azt mondjuk, hogy A invertálható és B-t A^{-1}-el jelöljük és A inverzének nevezzük.

Legyen $I \in M_{nxn}$, és $I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ alakú mátrixokat nxn-es egységmátrixnak nevezzük.
Állítás: Ha $A \in M_{nxn}$, akkor $IA = AI = A$.

Állítás: Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű.
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A-nak B és B' is inverze, ekkor $B' = B'(AB) = (B'A)B = B$, de $AB = B'A = I$, azaz $B' = B$.

Inverz kiszámítása Gauss eliminációval:

Legyen A adott, keressük A^{-1}-et, melyet X-el fogunk jelölni.
Az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a keresett mátrixot.

$$AX = I$$

A Gauss elimináció:

$$(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$$

Elemi sorműveletek:
- Sor szorzása nem 0 skalárral.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másikat.
- 2 sor felcsrélése

Definíció: 2 azonos típusú mátrix **sorekvivalens**, ha egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Definíció: Egy mátrix trapézalakú, ha

Mátrixok rangja

Egy nxm-es mátrix rangján a mátrix oszlopai által generált $\mathbb{R}^n$-beli altér dimenzióját értjük. A mátrix rangja tehát k, ha oszlopai közül kiválasztható k db lineárisan független, de $k+1$ db már nem.

Legyen $A \in M_{nxn}$, ekkor A sorekvivalens egy olyan $B \in M_{nxn}$ mátrixszal, amely bal felső sarkában egy rxr-es egységmátrixot tartalmaz, a többi eleme pedig 0, ahol $r \leq min\{n, m\}$.
Ekkor r-et az A mátrix rangjának nevezzük.

Determinánsok

2x2-es mátrixok determinánsa

Legyen $A \in M_{2x2}$, és $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ilyenkor

$$det(A) = ad - bc$$

Tulajdonságok:

- Az oszlopainak és a sorainak is bilineáris függvénye, azaz
  - $det \begin{bmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix}$ és
  - $det \begin{bmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{bmatrix} = \lambda det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Az egségmátrix determinánsa 1, pl:
  - $det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$
- $det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = - det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$

Tétel: Ha $\varphi : \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 -> \mathbb{R}$ olyan függvény ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor az csak a determináns függvény lehet.

További tulajdonságok:

- Egy mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának determinánsával.
  - Biz:
    - $det(A) = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$
    - $det(A^T) = det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - cb$
- Ha két oszlopa vagy sora megegyezik akkor a determináns nulla.
  - Biz:
    - $det(A) = det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ab = 0$
- Pontosan akkor invertálható egy mátrix, ha a determinánsa nem nulla, ekkor $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$
  - Biz:
    - Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
    - Tegyük fel, hogy $det(A) = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$
    - $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
    - $AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \dfrac{1}{det(A)} = \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -cb+ad \end{bmatrix} \dfrac{1}{det(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Legyen $A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C, C', A^{i+1}, \ldots, A^n \in \mathbb{R}^n$, ilyenkor
    - $det(A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C + C', A^{i+1}, \ldots, A^n) = det(A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C, A^{i+1}, \ldots, A^n) + det(A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C', A^{i+1}, \ldots, A^n)$
    - azaz a determináns a mátrix oszlopainak additív függvénye.
  - Ha a mátrix két oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
  - A determinánsok szorzástétele:
    - $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
  - Ha egy mátrix oszlopának konstans szorosát hozzáadoom egy másik oszlophoz, akkor a determináns értéke nem változik. (azaz, a Gauss elimináció használható)

- Diagonális, illetve felső háromszög mátrix determinánsa egyenlo a főátlóbeli elemek sorzatával.

3x3-as mátrixok determinánsa

Sarrus-szabály: csak $2x2$-es és $3x3$-as mátrixora használható.

Legyen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ilyenkor

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tulajdonságok:
- Lásd 2x2-es

Kifejtési tétel

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

Ahol $det A_{ij}$ az a_{ij}-hez tartozó aldetermináns.
Egy adott elemhez tartozó aldeterminánst úgy kaphatunk meg, hogy az eredeti mátrixból töröljük az elem sorát és oszlopát így az eredeti nxn-es mátrixból egy $(n-1)x(n-1)$-es mátrixot kapunk.
A kifejtési tétel segítségével nxn-es mátrixok determinánsának kiszámítását visszavezethetjük $2x2$-es vagy $3x3$-as mátrixok determinánsára amikre pedig már alkalmazható a Sarrus-szabály.

Lineáris egyenletrendszerek

Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$,$A \in M_{nxm}$ és $b \in \mathbb{R}^n$ adottak, $x \in \mathbb{R}^m$ ismeretlen ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert lineáris egyenletrenszernek nevezzük.

Ha $b \neq 0$ akkor **inhomogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.
Ha $b = 0$, akkor **homogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Példa:

$$2x + y = 2$$

$$4x - y = 3$$

ekkor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A homogén rendszernek az $x = 0$ mindig megoldása, ezt **triviális megoldás**nak nevezzük.

Tétel: Ha m < n, akkor a homogén lineáris
Bizonyítás: Indukcióval,
Legyen $n > 1$,$m = 1$, ekkor az egyenletrenszer az alábbi alakú

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

Ha $a_1 = \ldots = a_n = 0$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}^n$ megoldás lesz.
Ha legalább egy $a_i \neq 0$ akkor feltehető, hogy ez a_1.
Ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_1}(a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)$$

Ha $m < n$, $m - 1$-re feltesszük, hogy igaz, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$$

A feltételek miatt létezik $a_{1i} \neq 0$, $i = 1,..,n$, feltehető,hogy ez a_{11}, ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)$$

és a

$$(A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}A_1) = 0$$

$$(A_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}A_1) = 0$$

rendszerben már egyel kevesebb (m-1) változó szerepel.

Elemi sorműveletek

1. A mátrix egy sorát meg lehet szorozni egy nem nulla számmal.
2. Két sort össze lehet adni.
3. Két sort fel lehet cserélni.

Sorekvivalens mátrixok

Két azonos típusú mátrix sorekvivalens, ha az egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal.qTétel: Ha A és A' sorekvivalensek, akkor az $Ax = 0$ illetve az $A'x = 0$ egyenletrendszerek megoldáshalmaza egegyezik.

Trapéz alakú mátrixok

Egy mátrix trapéz alakú, ha minden csupa 0 sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymás követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

Gauss elimináció

Általánosan: $Ax = 0$ —Gauss elimináció—>$A'x = 0$, ahol az A' mátrix trapéz alakú.

Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Legyen $m < n$, $A \in M_{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ adottak, ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ahol legalább egy $b_i \neq 0$, $i = 1,..,m$.
Jelölje A^j az A mátrix j. oszlopát, ekkor

$$x_1A^1 + \ldots + x_nA^n = b$$

<u>Definíció</u>: Legyenek $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ekkor az

$$x_1a_1 + \ldots x_na_n$$

kifejezést az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok $x_1, \ldots, x_n$ skalárokkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

<u>Definíció</u>: Az $Ax = b$, $b \neq 0$ inhomogén egyenletrendszer $x_p \in \mathbb{R}^n$, $Ax_p = b$ megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.
Ha x olyan, hogy $Ax = 0$, akkor azt a homogén rész megoldásának nevezzük.

<u>Tétel</u>: Az $Ax = b$ inhomogén egyenletrenszer összes megoldása $x_p + x$ alakban áll elő, ahol x_p egy partikuláris megoldás, x pedig a homogén rész megoldása.

Az $Ax = b$ egyenletrendszer esetén az

$$[A, B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} | & b_1 \\ \vdots & & \vdots \, | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} | & b_m \end{bmatrix}$$

mátrixot a rendszer **kibővített mátrix**ának nevezzük.

Vektorterek

Vektortér

Legyen $V \neq 0$ halmaz, és tegyük fel, hogy adott két leképezés

$$+ : VxV -> V,$$

illetve

$$\cdot : \mathbb{R}xV -> V$$

a következő tulajdonságokkal:
- Tetszőleges $v, w, u \in V$ esetén $(v + w) + u = v + (w + u)$
- Létezik olyan 0-val jelölt eleme V-nek, hogy $v + 0 = 0 + v = v$, minden $v \in V$ esetén.
- Minden $v \in V$-hez létezik $(-v) \in V$, hogy $v + (-v) = (-v) + v = 0$
- Tetszőleges $v, w \in V$ esetén $v + w = w + v$.

valamint:
- Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
- Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v, w, u \in V$ esetén $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.
- Minden $v \in V$ esetén $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.
- Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén $(\lambda\mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda v)$.

Ekkor V-t vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett.

Megjegyzés: $\mathbb{R}$ helyett tekinthetünk más számhalmazokat is amely rendelkezik $\mathbb{R}$-hez hasonló tulajdonságokkal, azaz algebrai értelemben testet alkot.
Ilyen például a racionális számok teste $\mathbb{Q}$, vagy a véges testek (pl.: mod 2 maradékosztályok).

Példák vektorterekre

- $\mathbb{R}^n$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- $\mathbb{C}^n$ vektortér $\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett.
- $M_{nxm}(\mathbb{R})$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- $P = \{p : \mathbb{R} -> \mathbb{R} \,|\, p(x)\}$, P-t a valós polinomok halmazának nevezzükk.
- $F = \{f : \mathbb{R} -> \mathbb{R} \,|\, f \text{ függvény}\}$.

Altér

Legyen V egy vektortér, és legyen S egy részhalmaza V-nek.
Tegyük fel, hogy S eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Ha $v, w \in S$, akkor az összegük $v + w$ is eleme S-nek.
2. Ha $v \in S$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c\,v$ is eleme S-nek.

Ekkor S maga is egy vektortér. Valóban, a fent említett tulajdonságok teljesülnek V minden elemére, valamit teljesülnek S elemeire is. Ilyenkor S-et V alterének nevezzük.

Példák alterekre

- V-n $\{0\}$ és V mindig alterek, ezeket triviális altereknek nevezzük.
- Az $M_{nxm}(\mathbb{R})$-es mátrixok vektorterében a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.
- P-ben P_n, a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza alteret alkot.
- F-ben a folytonos, illetve a differenciálható függvények is alteret alkotnak.

Altérkritérium

$S \subset V$ pontosan akkor altér, ha minden $v, w \in S$ esetén

$$u - w \in S,$$

valamint
bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in S$ esetén

$$\lambda v \in S.$$

Bizonyítás:
Ha S altér, akkor nyilván zárt a műveletekre. Ha S zárt a műveletekre, akkor a vektorterekre vonatkozó tulajdonságok többsége automatikusan teljesülnek S-beli vektorokra, mivel azok speciális V-beli vektorok. Csak azt kell megvizsgálni, hogy a V-beli 0 beleesik-e S-be, illetve egy S-beli vektor V-beli ellentettje beleesik-e S-be:
Legyen $v \in S$ tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$0 = 0v \in S.$$

Legyen $v \in S$ tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$-v = (-1)v = \in S.$$

Lineáris függőség, függetlenség

Legyen $a_1, \ldots, a_n \in V$ vektorok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalárok, ekkor a

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$$

kifejezést az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok **lineárisan függők**, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nem mind 0 skalárok,hogy

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

Megjegyzés: A 0 vektort tartalmazó rendszer mindig lineárisan függő.

Az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha nem függők. ¯_(ツ)_/¯

Generátorrendszer

Az $a_1, \ldots, a_n$ vektorrendszer generátorrendszere V-nek, ha bármely $v \in V$ lineárisan kikombinálható $a_1, \ldots, a_n$-ről.

Megjegyzés: Ekkor V-t végesen generálhatónak nevezzük.

Bázis

Ha V végesen generált és $a_1, \ldots, a_n$ lineárisan független generátorrendszere, akkor $a_1, \ldots, a_n$-et bázisnak nevezzük.

Dimenzió

Tétel: Tetszőleges végesen generált vektortérben, ha adott két bázis $a_1, \ldots, a_n$ és $v_1, \ldots, v_m$, akkor $n = m$, azaz bármely két bázis azonos számosságú.

Ezt a közös számosságot a vektortér dimenziójának nevezzük.

Példa: $\mathbb{R}^2$ két dimenziós.

Bázisra vonatkozó koordináták

Legyen V egy vektortér és $b_1, \ldots, b_m$ bázis V-ben. Ekkor tetszőleges $v \in V$ egyértelműen felírható

$$v = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n$$

alakban, ahol a $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ skalár n-est v $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Tehát tetszőleges $v \in V$ beazonosítható β-val, ha adott egy bázis.

$$v \in V < - \{b_1, \ldots, b_n\} - > \beta \in \mathbb{R}$$

bijekció

Tétel: Tetszőleges n-dimenziós valós vektortér beazonosítható $\mathbb{R}^n$-el.

Báziscsere

Lineáris leképezések

Lineáris leképezések

Legyenek U, V vektorterek azonos test fölött, ekkor az
$L : U - > V$
leképezés lineáris, ha

- additív, azaz $L(x + y) = Lx + Ly$, minden $x, y \in U$ esetén, valamint
- homogén $L(\lambda x) = \lambda Lx$, minden $x \in U$ és λ skalár esetén.

Példa:

- Ha U vektortér $\mathbb{R}$ fölött és

Képtér

Magtér

Példák

Koordináta függvények

Lineáris leképezések vektorteret alkotnak

Bizonyítás:

Képtér és magtér alteret alkot

Bizonyítás:

Nullitás + Rang tétel

Bizonyítás:

Lineáris leképezések mátrix reprezentációja

Belsőszorzat-terek, ortogonalitás

Belsőszorzat (skaláris szorzat)

Példák

Ortogonalitás

Ortogonális komplementer

Pitagorasz tétel

Bizonyítás:

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Bizonyítás:

Minkowski egyenlőtlenség

Bizonyítás:

Legjobban approximáló elem

Tétel:

Bizonyítás:

Bessel egyenlőtlenség

Bizonyítás:

Fourier együtthatók

Fourier sor

Ortonormált rendszer

Ortogonális rendszer

Gram-Schmidt ortogonalizáció

Sajátérték, sajátvektor

Lineáris leképzések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Sajátvektorok alteret alkotnak

Bizonyítás:

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek

Bizonyítás:

Karakterisztikus polinom

Tétel:

Tétel:

Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora

Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága