# Diszkrét matematika 2 összefoglaló

Vig Levente

2017

---

# $\mathbf{R^n}$

## Skaláris szorzat $R^n$-ben (belső szorzat)

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor az

$$< x, y > = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

számot x és y skaláris szorzatának nevezzük.

$$< , >: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ (skaláris szorzat)}$$

Skaláris szorzat tulajdonságai:

- Mindkét változóban homogén, azaz $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$ és $< x, \lambda y > = \lambda < x, y >$
- Szimmetrikus, azaz $< x, y > = < y, x >$
- Mindkét változóban additív, azaz
  - $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$ és
  - $< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$
  - Biz(4)

## Vektorok

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

## Műveletek vektorokkal

Művelet: olyan függvény mely nem vezet ki a halmazból.

Összeadás

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{, ekkor}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Az összeg is $\in \mathbb{R}^n$, azaz nem vezet ki a halmazból.

$$+ : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A vektorok összeadásának tulajdonságai:

- Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor $x + y \in \mathbb{R}^n$
- Kétváltozós művelet $\mathbb{R}^n$-en
- **Asszociatív** (csoportosítható), azaz minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy

    - $(x+y)+z = x+(y+z)$
- Létezik $0 \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x+0 = 0+x = x$
    - $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ **additív egységelem**
- Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$-hez létezik olyan $y \in \mathbb{R}^n$ ,hogy $x+y = y+x = 0$
    - Ekkor $y$-t $(-x)$-el jelöljük és $x$ **additív inverzének** nevezzük.
    - Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén $x+y = y+x$, azaz a vektorok összeadása **kommutatív** ( felcserélhető)

Skalárral való szorzás

Legyen $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

A skalárral való szorzás komponensenkét történik.

$$\cdot : \mathbb{R}x\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- Ha $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

## Norma

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, ekkor

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

A norma tulajdonságai:

- Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\| \geq 0$ és ha $\|x\| = 0$ akkor $x = 0$
    - A norma nemnegatív függvény, csak a nullvektor vehet fel nullát.
    - Biz (1)
- Ha $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\|\lambda x\| = |\ \lambda\ |\ \|x\|$
    - A norma pozitív homogén
    - Biz (2)
- Háromszög egyenlőtlenség
    - Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Távolság $R^n$-ben

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor x és y távolsága $d(x, y) = \|x-y\|$

A távolság tulajdonságai:

- $d(x, y) \geq 0$ valamint $d(x, y) = 0$ ha $x = y$
- Szimmetrikus, azaz $d(x, y) = d(y, x)$
- Háromszög egyenlőtlenség: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Szög

Vektorok szöge:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Merőleges vetület

Az x vektor merőleges vetülete y-ra:

$$y_x = \lambda \cdot y$$

$$< x - y_x, y_x > = 0$$

$$< x, y_x > - < y_x, y_x > = 0$$

$$< x, \lambda y > = < \lambda y, \lambda y >$$

$$\lambda < x, y > = \lambda^2 < y, y > = \lambda^2 \|y\|$$

$$\lambda = \frac{< x, y >}{\|y\|^2}$$

Ezt visszahelyettesítve ez első egyenletbe:

$$y_x = \frac{< x, y >}{\|y\|^2} y$$

## Pitagorasz-tétel

Ha $x$ és $y$ merőlegesek egymásra ( $< x, y > = 0$), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = < x, x > + 2 < x, y > + < y, y > = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel $< x, y > = 0$, és $< x, x > = \|x\|^2$, $< y, y > = \|y\|^2$ definíció szerint.

## Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$< x, y >^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = \lambda y$

Bizonyítás:

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = < x + \lambda y, x + \lambda y > = < x, x > + \lambda^2 < y, y > + 2\lambda < x, y > = \|y\|^2 \lambda^2 + 2 < x, y > \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy $\lambda$-ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkrimánsa nem pozitív , azaz

$$4 < x, y >^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0$$

$$4 < x, y >^2 \leq 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$< x, y >^2 \leq \|y\|^2\|x\|^2$$

QED[1]

## Minkowski egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

<u>Bizonyítás</u>:
Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$$

ahol

$$2 < x, y > \leq 2 | < x, y > | \leq 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.
QED[2]

## Egyenes egyenlete

A $P \in \mathbb{R}^3$ ponton átmenő $\vec{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$x = P + t\vec{v}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + t v_1 \\ P_2 + t v_2 \\ P_3 + t v_3 \end{pmatrix}$$

vagyis $x_1 = P_1 + t v_1$ és $x_2 = P_2 + t v_2$ és $x_3 = P_3 + t v_3$
Tegyük fel, hogy $v_1 \neq 0$ és $v_2 \neq 0$ és $v_3 \neq 0$, azaz $\vec{v}$ egyik tengellyes sem párhuzamos. Ilyenkor

$$t = \frac{x_1 - P_1}{v_1}, \; t = \frac{x_2 - P_2}{v_2}, \; t = \frac{x_3 - P_3}{v_3}$$

azaz

$$\frac{x_1 - P_1}{v_1} = \frac{x_2 - P_2}{v_2} = \frac{x_3 - P_3}{v_3}.$$

1 Latin, quod erat demonstrandum, meaning "what was to be demonstrated"

2 Latin, quod erat demonstrandum, meaning "what was to be demonstrated"

## A sík normálvektoros egyenlete

$$x - p \perp n$$

$$< x - p, n > = 0$$

$$< \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} > = 0$$

$$(x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_2 + (x_3 - p_3)n_3 = 0$$

$$x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3$$

$$< x, n > = < p, n >$$

# Mátrixok

## Műveletek mátrixokkal

### Mátrixok összeadása

Legyen $A, B \in \mathscr{M}_{nxm}$ és $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$ és $B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$, ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m} \in \mathscr{M}_{nxm}$$

Tulajdonságok:

- Művelet, azaz nem vezet ki a halmazból, azaz $A + B \in \mathscr{M}_{nxm}$.
- Asszociatív, azaz $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \forall A, B, C \in \mathscr{M}_{nxm}$.
- Létezik olyan $0 \in \mathscr{M}_{nxm}$ mátrix, hogy $A + 0 = 0 + A$, minden $A \in \mathscr{M}_{nxm}$ esetén.
- Minden $A \in \mathscr{M}_{nxm}$ mátrixhoz létezik $-A \in \mathscr{M}_{nxm}$, hogy $A + (-A) = (-A) + A = 0$, ez az ún. **additív inverz.**
- Kommutatív, azaz $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathscr{M}_{nxm}$.

### Skalárral való szorzás

Legyen $A \in \mathscr{M}_{nxm}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$$

Tulajdonságok:

- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

### Mátrixok szorzása

Ha $A \in \mathscr{M}_{nxm}$, akkor $A_i$ jelöli A i. sorát és $A^j$ jelöli A j. oszlopát.

Legyen $A \in \mathscr{M}_{nxm}$ és $B \in \mathscr{M}_{mxk}$, ekkor

$$A \cdot B = C \in \mathscr{M}_{nxk}$$

és

$$C = \begin{pmatrix} A_1B^1 & \dots & A_1B^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_nB^1 & \dots & A_nB^k \end{pmatrix}$$

Ha $C = (c_{st})_{s=1,t=1}^{n,k}$, akkor

$$c_{st} = \sum_{r=1}^{m} a_{sr} - b_{rt}$$

Tulajdonságok:
- Asszociatív, azaz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek.
- Az összeadásra nézve disztibutív, azaz $A \cdot (B + C) = AB + AC$, amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek és B azonos típusú C-vel.
- $(AB)^T = B^T A^T$, amennyiben az AB szorzat létezik.
  - Biz (5)
- **Nem kommutatív**

## Mátrix transzponáltja

Egy mátrix transzponálása sorainak és oszlopainak a felcserélését jelenti.
Ha $A \in \mathscr{M}_{nxm}$, akkor az $A^T \in \mathscr{M}_{mxn}$ mátrixot A transzponáltjának nevezzük.
Továbbá ha $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$, akkor $A^T = (a'_{ji})_{j=1,i=1}^{m,n}$ és $a_{ij} = a'_{ji}$.
Tulajdonságok:
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Egy mátrix szimmetrikus ha transzponáltja önmaga, azaz $A^T = A$.

## Mátrix inverze

Legyen $A \in M_{nxn}$, ha létezik $B \in M_{nxn}$ úgy, hogy $AB = BA = I$, akkor azt mondjuk, hogy $A$ invertálható és $B$-t $A^{-1}$-el jelöljük és A inverzének nevezzük.

Legyen $I \in M_{nxn}$, és $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixokat nxn-es egységmátrixnak nevezzük.
Állítás: Ha $A \in M_{nxn}$, akkor $IA = AI = A$.

Állítás: Ha $A$ invertálható, akkor az inverze egyértelmű.
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $A$-nak $B$ és $B'$ is inverze, ekkor $B' = B'(AB) = (B'A)B = B$, de $AB = B'A = I$, azaz $B' = B$.

### Inverz kiszámítása Gauss eliminációval

Legyen $A$ adott, keressük $A^{-1}$-et, melyet $X$-el fogunk jelölni.
Az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a keresett mátrixot.

$$AX = I$$

A Gauss elimináció:

$$(A \,|\, I) \sim \dots \sim (I \,|\, A^{-1})$$

Elemi sorműveletek:
- Sor szorzása nem 0 skalárral.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másikat.
- 2 sor felcsrélése

Definíció: 2 azonos típusú mátrix **sorekvivalens**, ha egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Definíció: Egy mátrix **trapéz alakú**, ha minden csupa $0$ sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymást követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal.

Tétel: Ha $A$ és $A'$ sorekvivalensek, akkor az $Ax = 0$ és az $A'x = 0$ egyenletrendszerek megoldáshalmaza megegyezik.

## Mátrixok rangja

Egy $nxm$-es mátrix rangján a mátrix oszlopai által generált $\mathbb{R}^n$-beli altér dimenzióját értjük. A mátrix rangja tehát $k$, ha oszlopai közül kiválasztható $k$ db lineárisan független, de $k+1$ db már nem.

Legyen $A \in M_{nxn}$, ekkor $A$ sorekvivalens egy olyan $B \in M_{nxn}$ mátrixszal, amely bal felső sarkában egy $rxr$-es egységmátrixot tartalmaz, a többi eleme pedig 0, ahol $r \leq min\{n, m\}$.
Ekkor r-et az $A$ mátrix rangjának nevezzük.

Példák mátrixokra:
Markov mártix

$$
\begin{array}{ll}
LA\frac{1}{4}\text{-a Bo-ba} & LA\frac{1}{7}\text{-a Ch-ba} \\
Ch\frac{1}{5}\text{-a LA-be} & Ch\frac{1}{3}\text{-a Bo-ba} \\
Bo\frac{1}{6}\text{-a LA-be} & Bo\frac{1}{8}\text{-a Ch-ba}
\end{array}
$$

$x_{n+1} = ?$
$y_{n+1} = ?$
$z_{n+1} = ?$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{17}{28}x_n + \frac{1}{5}y_n + \frac{1}{6}z_n \\
y_{n+1} &= \frac{1}{7}x_n + \frac{7}{15}y_n + \frac{1}{8}z_n \\
z_{n+1} &= \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{17}{24}z_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{28} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{7}{15} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{17}{24} \end{pmatrix}
$$

Forgatás mátrix

$$
R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}
$$

$$
R(\theta) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix}
$$

$\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

# Determinánsok

## 2x2-es mátrixok determinánsa

Legyen $A \in \mathscr{M}_{2x2}$, és $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ilyenkor

$$det(A) = ad - bc$$

Tulajdonságok:

- Az oszlopainak és a sorainak is bilineáris függvénye, azaz
  - $det\begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$ és
  - $det\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- Az egségmátrix determinánsa 1
  - $det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$
- $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

Tétel: Ha $\varphi : \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor az csak a determináns függvény lehet.

További tulajdonságok:

- Egy mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának determinánsával.
  - Biz:
    - $det(A) = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
    - $det(A^T) = det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb$
- Ha két oszlopa vagy sora megegyezik akkor a determináns nulla.
  - Biz:
    - $det(A) = det\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$
    - $det(B) = det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0$
- Pontosan akkor invertálható egy mátrix, ha a determinánsa nem nulla, ekkor $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$
  - Biz:
    - Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
    - Tegyük fel, hogy $det(A) = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$
    - $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
    - $AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\dfrac{1}{det(A)} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -cb+ad \end{pmatrix}\dfrac{1}{det(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Legyen $A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C, C', A^{i+1}, \ldots, A^n \in \mathbb{R}^n$, ilyenkor
    - $det(A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C + C', A^{i+1}, \ldots, A^n) = det(A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C, A^{i+1}, \ldots, A^n) + det(A^1, \ldots, A^i, A^{i-1}, C', A^{i+1}, \ldots, A^n)$
    - azaz a determináns a mátrix oszlopainak additív függvénye.
  - Ha a mátrix két oszlopát vagy sorát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
  - A determinánsok szorzástétele:
    - $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

- Ha egy mátrix oszlopának konstans szorosát hozzáadoom egy másik oszlophoz, akkor a determináns értéke nem változik.
- Diagonális, illetve felső háromszög mátrix determinánsa egyenlő a főátlóbeli elemek sorzatával.

## 3x3-as mátrixok determinánsa

Sarrus-szabály: csak $2x2$-es és $3x3$-as mátrixora használható.

Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ilyenkor

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tulajdonságok:

- Lásd 2x2-es

## Kifejtési tétel

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} detA_{ij}$$

Ahol $detA_{ij}$ az $a_{ij}$-hez tartozó aldetermináns.
Egy adott elemhez tartozó aldeterminánst úgy kaphatjuk meg, hogy az eredeti mátrixból töröljük az elem sorát és oszlopát így az eredeti $nxn$-es mátrixból egy $(n-1)x(n-1)$-es mátrixot kapunk.
A kifejtési tétel segítségével $nxn$-es mátrixok determinánsának kiszámítását visszavezethetjük $2x2$-es vagy $3x3$-as mátrixok determinánsára amikre pedig már alkalmazható a Sarrus-szabály.

# Lineáris egyenletrendszerek

## Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{M}_{nxm}$ és $b \in \mathbb{R}^n$ adottak, $x \in \mathbb{R}^m$ ismeretlen ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert lineáris egyenletrenszernek nevezzük.

Ha $b \neq 0$ akkor **inhomogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.
Ha $b = 0$, akkor **homogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Példa:

$$2x + y = 2$$

$$4x - y = 3$$

ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A homogén rendszernek az $x = 0$ mindig megoldása, ezt **triviális megoldás**nak nevezzük.
Tétel: Ha m < n, akkor a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.
Bizonyítás: Indukcióval
Legyen $n > 1, m = 1$, ekkor az egyenletrenszer az alábbi alakú

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

Ha $a_1 = \ldots = a_n = 0$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}^n$ megoldás lesz.
Ha legalább egy $a_i \neq 0$ akkor feltehető, hogy ez $a_1$.
Ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_1}(a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)$$

Ha $m < n$, $m - 1$-re feltesszük, hogy igaz, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & \ldots & + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$$

A feltételek miatt létezik $a_{1i} \neq 0$, $i = 1,..,n$, feltehető,hogy ez $a_{11}$, ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)$$

és a

$$(A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}A_1) = 0$$

$$(A_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}A_1) = 0$$

rendszerben már egyel kevesebb (m-1) változó szerepel.

## Elemi sorműveletek

1. A mátrix egy sorát meg lehet szorozni egy nem nulla számmal.
2. Két sort össze lehet adni.
3. Két sort fel lehet cserélni.

## A megoldáshalmaz jellemzése

Tétel: A homogén egyenlet megoldása altere $\mathbb{R}^n$-nek. Jelölje ezt $L_A$
Tétel: Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza $x_p + L_A$ alakú(lineáris sokaság), ahol $L_A$ az inhomogén egyenlet megoldásatere, $x_p$ pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

$$\begin{matrix} A_1 x = 1 \\ \vdots \\ A_n x = 0 \end{matrix}$$

$x$ pontosan akkor megoldás, ha $x \in lin[A_1, \ldots, A_n]$.

## Feltételek a megoldhatóságra

Homogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = 0,$$

ahol $A \in \mathscr{M}_{nxm}$, $x \in \mathbb{R}^m$, azaz

$$x_1A^1 + \ldots + x_mA^m = 0.$$

Egy homogén lineáris egyenletrenszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függők.

Tétel:

1. Ha $m > n$, akkor van triviálistól különböző megoldás.
2. Ha $m = n$, akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha $A^1, \ldots, A^m$ lineárisan függő.
3. Ha $m < n$, akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha $A^1, \ldots, A^m$ lineárisan függő.

Inhomogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = b,$$

ahol $A \in \mathscr{M}_{nxm}$, $x \in \mathbb{R}^m$, azaz

$$x_1A^1 + \ldots + x_mA^m = b.$$

Tétel:

1. Ha $m > n$, teteszőleges $b$ vektor esetén biztosan van megoldás, ha $rangA$ maximális, azaz $rangA = n$. Ekkor végtelen sok megoldás van.
2. Ha $m = n$, tetszőleges $b$ vektor esetén biztosan van megoldás, ha $A^1, \ldots, A^m$ bázisa a térnek. Ekkor pontosan egy megoldás van.
3. Ha $m < n$, tetszőleges $b$ vektor esetén nem feltétlenül lesz megoldás.
4. Tetszőleges $m, n$ esetén pontosan akkor lesz megoldás, ha $b$ benne fekszik az A oszlopai által generált altérben.

## Sorekvivalens mátrixok

Két azonos típusú mátrix sorekvivalens, ha az egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal.Tétel: Ha $A$ és $A'$ sorekvivalensek, akkor az $Ax = 0$ illetve az $A'x = 0$ egyenletrendszerek megoldáshalmaza egegyezik.

## Trapéz alakú mátrixok

Egy mátrix trapéz alakú, ha minden csupa $0$ sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymás követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

### Gauss elimináció

Általánosan: $Ax = 0$ —Gauss elimináció—>$A'x = 0$, ahol az $A'$ mátrix trapéz alakú.

### Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Legyen $m < n$, $A \in M_{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ adottak, ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

ahol legalább egy $b_i \neq 0$, $i = 1,..,m$.
Jelölje $A^j$ az $A$ mátrix j. oszlopát, ekkor

$$x_1A^1 + \ldots + x_nA^n = b$$

Definíció: Legyenek $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ekkor az

$$x_1a_1 + \ldots x_na_n$$

kifejezést az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok $x_1, \ldots, x_n$ skalárokkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Definíció: Az $Ax = b$, $b \neq 0$ inhomogén egyenletrendszer $x_p \in \mathbb{R}^n$, $Ax_p = b$ megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.
Ha $x$ olyan, hogy $Ax = 0$, akkor azt a homogén rész megoldásának nevezzük.

Tétel: Az $Ax = b$ inhomogén egyenletrenszer összes megoldása $x_p + x$ alakban áll elő, ahol $x_p$ egy partikuláris megoldás, $x$ pedig a homogén rész megoldása.

Az $Ax = b$ egyenletrendszer esetén az

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}| & b_1 \\ \vdots & & \vdots\ | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}| & b_m \end{pmatrix}$$

mátrixot a rendszer **kibővített mátrix**ának nevezzük.

# Vektorterek

### Vektortér

Legyen $V \neq 0$ halmaz, és tegyük fel, hogy adott két leképezés

$$+ : VxV \mapsto V,$$

illetve

$$\cdot : \mathbb{R}xV \mapsto V$$

a következő tulajdonságokkal:
- Tetszőleges $v, w, u \in V$ esetén $(v + w) + u = v + (w + u)$
- Létezik olyan $0$-val jelölt eleme $V$-nek, hogy $v + 0 = 0 + v = v$, minden $v \in V$ esetén.
- Minden $v \in V$-hez létezik $(-v) \in V$, hogy $v + (-v) = (-v) + v = 0$
- Tetszőleges $v, w \in V$ esetén $v + w = w + v$.

valamint:

- Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
- Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v, w, u \in V$ esetén $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.
- Minden $v \in V$ esetén $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.
- Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén $(\lambda\mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda v)$.

Ekkor $V$-t vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett.

Megjegyzés: $\mathbb{R}$ helyett tekinthetünk más számhalmazokat is amely rendelkezik $\mathbb{R}$-hez hasonló tulajdonságokkal, azaz algebrai értelemben testet alkot.
Ilyen például a racionális számok teste $\mathbb{Q}$, vagy a véges testek (pl.: mod 2 maradékosztályok).

### Példák vektorterekre

- $\mathbb{R}^n$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- $\mathbb{C}^n$ vektortér $\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett.
- $M_{nxm}(\mathbb{R})$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- $P = \{p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,|\, p(x)\}$, $P$-t a valós polinomok halmazának nevezzük.
- $F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,|\, f \text{ függvény}\}$.

### Altér

Legyen $V$ egy vektortér, és legyen $S$ egy részhalmaza $V$-nek.
Tegyük fel, hogy $S$ eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Ha $v, w \in S$, akkor az összegük $v + w$ is eleme $S$-nek.
2. Ha $v \in S$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $cv$ is eleme $S$-nek.

Ekkor $S$ maga is egy vektortér. Valóban, a fent említett tulajdonságok teljesülnek $V$ minden elemére, valamit teljesülnek $S$ elemeire is. Ilyenkor $S$-et $V$ alterének nevezzük.

### Példák alterekre

- $V$-n $\{0\}$ és $V$ mindig alterek, ezeket triviális altereknek nevezzük.
- Az $M_{nxm}(\mathbb{R})$-es mátrixok vektorterében a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.
- $P$-ben $P_n$, a legfeljebb $n$-edfokú polinomok halmaza alteret alkot.
- $F$-ben a folytonos, illetve a differenciálható függvények is alteret alkotnak.

## Altérkritérium

$S \subset V$ pontosan akkor altér, ha minden $v, w \in S$ esetén

$$(1) \quad u - w \in S,$$

valamint
bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in S$ esetén

$$(2) \quad \lambda v \in S.$$

Bizonyítás:
Ha $S$ altér, akkor nyilván zárt a műveletekre. Ha $S$ zárt a műveletekre, akkor a vektorterekre vonatkozó tulajdonságok többsége automatikusan teljesülnek $S$-beli vektorokra, mivel azok speciális $V$-beli vektorok. Csak azt kell megvizsgálni, hogy a $V$-beli $0$ beleesik-e $S$-be, illetve egy $S$-beli vektor $V$-beli ellentettje beleesik-e $S$-be:
Legyen $v \in S$ tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$0 = 0v \in S.$$

Legyen $v \in S$ tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$-v = (-1)v = \in S.$$

+füzet (Abel-csoport axiómák)
oda-vissza

## Lineáris függőség, függetlenség

Legyen $a_1, \ldots, a_n \in V$ vektorok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalárok, ekkor a

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$$

kifejezést az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok **lineárisan függők**, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nem mind 0 skalárok,hogy

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

Megjegyzés: A $0$ vektort tartalmazó rendszer mindig lineárisan függő.

Az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha nem függők. ¯_(ツ)_/¯

### Generátorrendszer

Az $a_1, \ldots, a_n$ vektorrendszer generátorrendszere $V$-nek, ha bármely $v \in V$ lineárisan kikombinálható $a_1, \ldots, a_n$-ből.

Megjegyzés: Ekkor $V$-t végesen generálhatónak nevezzük.

### Bázis

Ha $V$ végesen generált és $a_1, \ldots, a_n$ lineárisan független generátorrendszere, akkor $a_1, \ldots, a_n$-et bázisnak nevezzük.

### Dimenzió

Tétel: Tetszőleges végesen generált vektortérben, ha adott két bázis $a_1, \ldots, a_n$ és $v_1, \ldots, v_m$, akkor $n = m$, azaz bármely két bázis azonos számosságú.

Ezt a közös számosságot a vektortér dimenziójának nevezzük.

Példa: $\mathbb{R}^2$ két dimenziós.

## Bázisra vonatkozó koordináták

Legyen $V$ egy vektortér és $b_1, \ldots, b_m$ bázis $V$-ben. Ekkor tetszőleges $v \in V$ egyértelműen felírható

$$v = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n$$

alakban, ahol a $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ skalár $n$-est $v$ $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Tehát tetszőleges $v \in V$ beazonosítható $\beta$-val, ha adott egy bázis.

$$v \in V < -\{b_1, \ldots, b_n\} - > \beta \in \mathbb{R}$$

bijekció

Tétel: Tetszőleges $n$-dimenziós valós vektortér beazonosítható $\mathbb{R}^n$-el.

Báziscsere

??

# Lineáris leképezések

Legyenek $U, V$ vektorterek azonos test fölött, ekkor az

$$L : U \mapsto V$$

leképezés lineáris, ha

- additív, azaz $L(x+y) = Lx + Ly$, minden $x, y \in U$ esetén, valamint
- homogén $L(\lambda x) = \lambda Lx$, minden $x \in U$ és $\lambda$ skalár esetén.

Példa:

- Ha $U$ vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $L : U \mapsto \mathbb{R}$ lineáris, akkor $L$-et lineáris funkcionálnak nevezzük.
  - Pl: $U = \mathbb{R}$, akkor $Lx = cx$, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített.
- Ha $U = \mathbb{R}^n$m akkor $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, pontosan akkor lináris ,ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $Lx = < c, x >$
- $Lx = 0$, nulla lineáris leképezés
- Ha $U = V$, akkor az $L : U \mapsto U$, $Lx = x$ identukus leképezés
- $\frac{\sigma}{\sigma x} : P_n \mapsto P_{n-1}$, $(\frac{\sigma}{\sigma x})(x) = P'(x)$
- Első koordináta tengelyre való projekció: $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $L(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0)$
  - Speciális eset: $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- Az $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ leképezés **nem** lineáris.

Képtér és magtér

Legyen az $L : U \mapsto V$ leképezés lineáris, ekkor a $rangeL = \{v \in V \mid \exists u \in U, Lu = V\} \subset V$ halmazt L **képter**ének nevezzük.

Legyen az $L : U \mapsto V$ leképezés lineáris, ekkor a $nullL = \{u \in U \mid Lu = 0\} \subset U$ halmazt L **magter**ének nevezzük.

Tétel:

- $L0 = 0$
  - Biz: $L0 = L(0+0) = L0 + L0 = 2L0 \Rightarrow 0 = L0$
- $L(-x) = -Lx$

Példák

## Koordináta függvények

Ha $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ lineáris, akkor $L = (l_1, \ldots, l_m)$, ahol $l_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ **lineáris funkcionál** és $Lx = (l_1(x), \ldots, l_m(x)) \forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén.

Az előbbi $l_i, i = 1, \ldots, m$ lineáris funkcionálokat $L$ **koordinátafüggvényeinek** nevezzük.

Példa: $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, ekkor

$$l_1(x_1, x_2) = x_1,$$

valamint

$$l_2(x_1, x_2) = -x_2$$

## Lineáris leképezések vektorteret alkotnak

Jelölje $\mathscr{L}(U, V) = \{L : U \mapsto V \,|\, L \text{ lineáris}\}$.
Ha $L, T \in \mathscr{L}(U, V)$, akkor

$$L + Tx = Lx + Tx,$$

továbbá
tetszőleges $\lambda$ skalár esetén

$$(\lambda L)x = \lambda Lx.$$

Az fenti műveletekkel $\mathscr{L}(U, V)$ vektortér.

## Képtér és magtér alteret alkot

Ha $L : U \mapsto V$ lineáris, akkor

$$(1) \quad rangeL \subset V,$$

illetve

$$(2) \quad nullL \subset U$$

alterek.

<u>Bizonyítás:</u>
(1) Legyen $x, y \in rangeL$, ekkor létezik $u_x, u_y \in U$ úgy, hogy $Lu_x = x$ és $Lu_y = y$, ekkor

$$x - y = Lu_x - Lu_y = L(u_x - u_y) \Rightarrow x, y \in rangeL$$

és

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in rangeL$$

esetén

$$\lambda x = \lambda Lu_x = L(\lambda u_x) \Rightarrow \lambda x \in rangeL \Rightarrow rangeL \text{ altér.}$$

(2) Legyen $u, v \in nullL$, ekkor

$$L(u - v) = Lu - Lv = 0 \Rightarrow u - v \in nullL,$$

valamint

$$L\lambda u = \lambda Lu = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in nullL \Rightarrow nullL \text{ altér.}$$

## Nullitás + Rang tétel

Legyen $L : V \mapsto W$, ekkor

$$dim(nullL) + dim(rangeL) = dimV$$

Lemma: Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függetlenek $V$-ben, $V$ $n$-dimenziós, $k < n$, akkor léteznek $v_{k+1}, \ldots, v_n$ vektorok úgy, hogy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bázis $V$-ben.

<u>Bizonyítás:</u>
Legyen $\{v_1, \ldots, v_k\}$ bázis $nullL$-ben.
A lemma miatt kiegészíthető $V$-beli bázissá $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Ekkor $Lv_i = w_i, i = 1, \ldots, n$ és $Lv_i = 0, i = 1, \ldots, k$.
Bebizonyítjuk, hogy $w_{k+1}, \ldots, w_n$ bázis $rangeL$-ben.

Legyen $w \in rangeL$, ekkor létezik olyan $v \in V$, hogy $Lv = w$.
Másrészt $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, így
$w = Lv = L(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i L v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i w_i \Rightarrow w_{k+1}, \ldots, w_n$ generátorrendszere $rangeL$-nek.

Indirekt: tegyük fel, hogy $w_{k+1}, \ldots, w_n$ lineárisan függő.
$0 = \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i w_i$, $\beta_i$ nem mind 0.
$\Rightarrow 0 = \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i L v_i = L(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i v_i)$ ellentmondás $\Rightarrow$ függetlenek.

Képtér $n - k$ dimenziós, magtér $k$ dimenziós, $(n - k) + k = n = dimV$.

## Lineáris leképezések mátrix reprezentációja

Legyen $L : U \mapsto V$ lineáris és $\{a_1, \ldots, a_m\}$ bázis $U$-ban, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázis $V$-ben.
Legyen $u \in U$ és $Lu = v$, ekkor

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_1 a_1,$$

és

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j$$

$$A \in \mathscr{M}_{nxm}, A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Adott bázisok esetén a fenti egyenletrendszerseregnek pontosan egy megoldása létezik, ezt az $L$ lineáris leképezés $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bázispárra vonatkozó mátrixának nevezzük.

# Belsőszorzat-terek, ortogonalitás

## Belsőszorzat (skaláris szorzat)

Legyen $V$ valós vektortér, a
$< , >: VxV \mapsto \mathbb{R}$
kétváltozós függvényt belső szorzatnak nevezzük, ha
- szimmetrikus, azaz $< x, y > = < y, x > \forall x, y \in V$
- Bilineáris, azaz mindkét változóban additív és homogén
  - $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$
  - $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$
- Pozitív definit, azaz
  - $< x, x > \geq 0$, és
  - $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Példák

(1) $\mathbb{R}^n$ szokásos belső szorzata, azaz $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(2) Legyen $V = \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \,|\, f \quad \text{folytonos}\}$, ekkor $< f, g > = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

## Ortogonalitás

Legyen $V$ egy belső szorzat tér.
Azt mondjuk, hogy $x$ merőleges $y$-ra, ha $< x, y > = 0$

### Ortogonális komplementer

Ha $S \subset V$, akkor az $S^{\perp} = \{x \in V \,|\, x \perp s \quad \forall s \in S\}$ halmazt $S$ ortogonális komplementerének nevezzük.

## Pitagorasz tétel

Ha x és y merőlegesek egymásra ( $< x, y > = 0$), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Bizonyítás:

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = x^2 + 2 < x, y > + y^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel $< x, y > = 0$, és $< x, x > = \|x\|^2$, $< y, y > = \|y\|^2$ definíció szerint.

## Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$< x, y >^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = \lambda y$

Bizonyítás:

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = < x + \lambda y, x + \lambda y > = < x, x > + \lambda^2 < y, y > + 2\lambda < x, y > = \|y\|^2\lambda^2 + 2 < x, y > \lambda + \|x\|^2$

Az átalakításokat követően egy $\lambda$-ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkrimánsa nem pozitív , azaz

$$4 < x, y >^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0$$

$$4 < x, y >^2 \leq 4\|y\|^2\|x\|^2$$

$$< x, y >^2 \leq \|y\|^2\|x\|^2$$

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

## Minkowski egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$$

ahol

$$2 < x, y > \leq 2 | < x, y > | \leq 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.
Ezzel az állításunk bizonyítást nyert. (Q.E.D)

## Legjobban approximáló elem

Tétel: Legyen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormált rendszer, ekkor

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\|,$$

minden $x \in V$ és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén, ahol

$$\lambda_i = < x_i, v_i > \text{ , } i = 1, \ldots, n.$$

Azaz $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ az x-et legjobban közelítő elem $lin\{v_1, \ldots, v_n\}$-ben.
Bizonyítás:
Nem kell, mert nem tudta egyből felírni ⇒ Szabad reklamálni!

### Ortogonális rendszer

Legyen $v_1, \ldots, v_n \in V$.
Ha $v_1 \perp v_j$, $i \neq j$ esetén, akkor $\{v_1, \ldots, v_n\}$-t ortogonális rendszernek nevezzük.

### Ortonormált rendszer

Legyen $v_1, \ldots, v_n \in V$.
Ha $v_1 \perp v_j$, $i \neq j$, valamint $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, akkor $\{v_1, \ldots, v_n\}$-t ortonormált (ONR) rendszernek nevezzük.

## Fourier együtthatók

Legyen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormált rendszer, ekkor tetszőleges $x \in V$ esetén a $\lambda = < x, v_i >$ számokat $x$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$-ra vonatkozó Fourier együtthatóinak nevezzük.

### Fourier sor

A $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ sort az $x$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ rendszerre vontakozó Fourier-sorának nevezzük.

## Bessel egyenlőtlenség

Legyen $v_1, \ldots, v_n \in V$, valamint legyen$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormált rendszer, $x \in V$ tetszőleges, $\lambda_i$ pedig az x-et legjobban approximáló elem, ekkor

$$\sum \lambda_i \leq \|x\|^2$$

Bizonyítás:
$$0 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\|^2 = < x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i > = \|x\|^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < v_i, x_i > ) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|v_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$
mivel $< v_i, x_i > = \lambda_i$ és $\|v_i\|^2 = 1$ (ortonortmált miatt).

## Gram-Schmidt ortogonalizáció

Legyen $v_i, \ldots, v_n$ bázis $V$-ben, ekkor
$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
$\tilde{w_2} = v_2 - < v_2, w_1 > w_1$
$w_2 = \frac{\tilde{w_2}}{\|\tilde{w_2}\|}$

$\tilde{w_k} = v_k - < v_k, w_1 > w_1 - \ldots - < v_k, w_{k-1} > w_{k-1}$
$w_k = \frac{\tilde{w_k}}{\|\tilde{w_k}\|}$
Tétel: A fenti eljárás által generált $\{w_1, \ldots, w_k\}$ vektorrendszer ortonormált bázisa $V$-nek, valamint $lin\{v_i, \ldots, v_k\} = lin\{w_i, \ldots, w_k\}$, $k = 1, \ldots, n$.

Bizonyítás:
Legyen $i \neq k$, ekkor feltehető, hogy $k > i$.
??

# Sajátérték, sajátvektor

## Lineáris leképzések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Legyen $V$ egy vektortér, $L : V \mapsto V$ lineáris leképezés, ekkor a $\lambda$ szám $L$ **sajátérték**e, ha létezik olyan $v \in V \setminus \{0\}$, hogy

$$Lv = \lambda v.$$

Ekkor $v$-t $\lambda$-hoz tartozó **sajátvektor**nak nevezzük.

Példa:
(1) Legyen $v = \mathbb{R}^2$, $L$ az indentikus leképezés, azaz

$$Lx = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Ekkor $\lambda = 1$ sajátérték és bármely $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ az 1-hez tartozó sajátvektor.

(2) Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $L_A x = Ax$.

Ekkor $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$, $i = 1,\ldots,n$, az $a_i$-hez tartozó sajátvektor, hiszen

$$L_A e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i e_i$$

(3) Legyen $V$ a végtelen sokszor differenciálható valós függvények vektortere, $L$ pedig jelölje a deriválást.

$$\frac{dt}{d} : e^{\infty} \mapsto e^{\infty},$$

ekkor

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

tetszőleges $\lambda$ esetén sajátvektor, amely $\lambda$-hoz tartozik, hiszen

$$\frac{d}{dt} x(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x(t)$$

Mátrixok esetén:
Ha $A \in \mathscr{M}_{nxn}$, akkor $L_A x = Ax$ lineáris, tehát értelmezhetjük $nxn$-es mátrixok sajátértékét és sajátvektorát is.

## Sajátvektorok alteret alkotnak

A $V_\lambda = \{v \in V \mid Lv = \lambda v\}$ halmaz altér $V$-ben, melyet a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltérnek nevezünk.

Bizonyítás:
Az altérkritérium szerint.
Legyen $v \in V_\lambda$, $c$ konstans, ekkor

$$L(cv) = cLv = c\lambda v = \lambda(cv) \Rightarrow cv \in V_\lambda$$

Legyen $v, w \in V_\lambda$, ekkor

$$L(v - w) = Lv - Lw = \lambda v - \lambda w = \lambda(v - w) \Rightarrow v - w \in V_\lambda$$

## Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek

Bizonyítás:
Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sajátértékek, $v_1, \ldots, v_m$ hozzájuk tartozó sajátvektorok.
$\lambda_i \neq \lambda_k$, $i \neq k$.

## Karakterisztikus polinom

Ha $A \in \mathscr{M}_{nxn}$, akkor a $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ polinomot $A$ karakterisztikus polinomjának nevezzük.

Tétel:

Legyen $L : V \mapsto V$ lineáris, ekkor $\lambda$ $L$ sajátértéke akkor és csakakkor, ha az $(L - \lambda I)$ leképzeés nem invertálható.

Mátrixokra:
Az $A \in \mathscr{M}_{nxn}$-es mátrixnak $\lambda$ pontosan akkor sajátértéke, ha $A - \lambda I$ nem invertálható.

Tétel:
Az $A$ mátrixnak $\lambda$ pontosan akkor sajátértéke, ha gyöke $A$ karakterisztikus polinomjának.

Tétel:
Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik, azaz, ha $A, B \in \mathscr{M}_{nxn}$ és $B$ invertálható, akkor

$$P_A = P_{BAB^{-1}}$$

Bizonytás:
$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(B(A - \lambda I)B^{-1}) = det(BAB^{-1} - \lambda I)$

## Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora

Legyen $A \in \mathscr{M}_{nxn}$ úgy, hogy $A^T = A$ (szimmetrikus).
Az $A$-hoz tartozó kvadratikus forma $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Tétel: $f$ maximuma az egységgömbhélyon $A$-nak sajátvektora és a hozzá tartozó sajátérték $A$-nak a legnagyobb sajátértéke ami, $f$-nek az ebben a pontban felvett értéke.

Bizonyítás:
$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| = 1\}$
Mivel $s$ korlátos és zárt, a Hein-Borel tétel szerint kompakt.
Weierstrass tétele szerint folytonos függvénynek kompakt halmazon van szélsőértéke.

Létezik $p \in S$ úgy, hogy $max f = f(p)$
jelölje $W = (lin\{p\})^{\perp^S}$
Tetszőleges $w \in W$, $\|w\| = 1$ esetén

$$C_w(t) = (cos(t))p + (sin(t))w$$
$$g(t) = f(C_w(t))$$

mivel

$$C_w(0) = p$$
$$0 = g'(0) = < 2Ap, C_w'(p) > = 2 < Ap, w)$$
$$\Rightarrow < Ap, w > = 0 \Rightarrow Ap \in lin\{p\}$$

Tehát $Ap = \lambda p$ valamely $\lambda$ számra, azaz $p$ sajátvektora $A$-nak.

## Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága

Szimmetrikus mátrix esetén létezik a térnek sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa, ebben a mátrix

$$L_A e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonális alakba írható, ahol a főátlóban a sajátértékek találhatók.