

# Diszkrét matematika 2

## Összefoglaló

Vig Levente

2017

---

<b><math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
<i>Skaláris szorzat -ben (belső szorzat)</i>	1
<i>Vektorok</i>	1
<i>Műveletek vektorokkal</i>	1
Összeadás	1
Skalárral való szorzás	2
<i>Norma</i>	2
Távolság -ben:	2
Szög	2
Merőleges vetület	2
<i>Pitagorasz-tétel</i>	3
<i>Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség</i>	3
<i>Minkowski egyenlőtlenség</i>	3
<i>Egyenes egyenlete</i>	4
<i>A sík normálvektoros egyenlete</i>	4
<b>Mátrixok</b>	<b>5</b>
<i>Műveletek mátrixokkal</i>	5
Mátrixok összeadása	5
Skalárral való szorzás	5
Mátrixok szorzása	5
<i>Mátrix transzponáltja</i>	5
<i>Mátrix inverze</i>	6
Inverz kiszámítása Gauss eliminációval:	6
<i>Mátrixok rangja</i>	6
<b>Determinánsok</b>	<b>7</b>
<i>2x2-es mátrixok determinánsa</i>	7
<i>3x3-as mátrixok determinánsa</i>	8

<i>Kifejtési tétel</i>	8
<b>Lineáris egyenletrendszerek</b>	<b>8</b>
<i>Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek</i>	8
<i>Elemi sorműveletek</i>	9
<i>A megoldáshalmaz jellemzése</i>	9
<i>Feltételek a megoldhatóságra</i>	9
<i>Sorekvivalens mátrixok</i>	10
<i>Trapéz alakú mátrixok</i>	10
<i>Gauss elimináció</i>	10
Inhomogén lineáris egyenletrendszer	10
<b>Vektorterek</b>	<b>11</b>
<i>Vektortér</i>	11
Példák vektorterekre	11
Altér	12
Példák alterekre	12
<i>Altérkritérium</i>	12
<i>Lineáris függőség, függetlenség</i>	12
Generátorrendszer	13
Bázis	13
Dimenzió	13
<i>Bázisra vonatkozó koordináták</i>	13
Báziscsere	13
<b>Lineáris leképezések</b>	<b>13</b>
<i>Lineáris leképezések</i>	13
Képtér	14
Magtér	14
Példák	14
<i>Koordináta függvények</i>	14
<i>Lineáris leképezések vektorteret alkotnak</i>	14
<i>Képtér és magtér alteret alkot</i>	14
<i>Nullitás + Rang tétel</i>	14
<i>Lineáris leképezések mátrix reprezentációja</i>	15
<b>Belsőszorzat-terek, ortogonalitás</b>	<b>15</b>
<i>Belsőszorzat (skaláris szorzat)</i>	15

<i>Ortogonalitás</i>	15
Ortogonalis komplementer	15
<i>Pitagorasz tétel</i>	15
<i>Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség</i>	15
<i>Minkowski egyenlőtlenség</i>	15
<i>Legjobban approximáló elem</i>	15
<i>Bessel egyenlőtlenség</i>	15
<i>Fourier együtthatók</i>	16
Fourier sor	16
Ortonormált rendszer	16
Ortogonalis rendszer	16
<i>Gram-Schmidt ortogonalizáció</i>	16
<b>Sajátérték, sajátvektor</b>	<b>16</b>
<i>Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektora</i>	16
<i>Sajátvektorok alteret alkotnak</i>	16
<i>Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek</i>	16
<i>Karakterisztikus polinom</i>	16
<i>Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora</i>	16
<i>Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága</i>	16

## $\mathbb{R}^n$

---

Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben (belső szorzat)

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , ekkor az

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

számot  $x$  és  $y$  skaláris szorzatának nevezzük.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ (skaláris szorzat)}$$

Skaláris szorzat tulajdonságai:

- Mindkét változóban homogén, azaz  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  és  $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- Szimmetrikus, azaz  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Mindkét változóban additív, azaz
  - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  és
  - $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- Biz(4)

## Vektorok

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

## Műveletek vektorokkal

Művelet: olyan függvény mely nem vezet ki a halmazból.

### Összeadás

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ ekkor}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Az összeg is  $\in \mathbb{R}^n$ , azaz nem vezet ki a halmazból.

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A vektorok összeadásának tulajdonságai:

- Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $x + y \in \mathbb{R}^n$
- Kétváltozós művelet  $\mathbb{R}^n$ -en
- **Asszociatív** (csoportosítható), azaz minden  $x, y \in \mathbb{R}^n$  esetén teljesül, hogy
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Létezik  $0 \in \mathbb{R}^n$  úgy, hogy tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $x + 0 = 0 + x = x$ 
  - $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  **additív egységelem**
- Tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^n$ -hez létezik olyan  $y \in \mathbb{R}^n$ , hogy  $x + y = y + x = 0$ 
  - Ekkor  $y$ -t  $-x$ -el jelöljük és  $x$  **additív inverzének** nevezzük.

- Tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}^n$  esetén  $x + y = y + x$ , azaz a vektorok összeadása **kommutatív** (felcserélhető)

### Skalárral való szorzás

Legyen  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ , ekkor

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

A skalárral való szorzás komponensenként történik.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- Ha  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Ha  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- Ha  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

### Norma

Legyen  $x \in \mathbb{R}^n$ , ekkor

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

A norma tulajdonságai:

- Minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\|x\| \geq 0$  és ha  $\|x\| = 0$  akkor  $x = 0$ 
  - A norma nemnegatív függvény, csak a nullvektor vehet fel nullát.
  - Biz (1)
- Ha  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ 
  - A norma pozitív homogén
  - Biz (2)
- Háromszög egyenlőtlenség
  - Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

### Távolság $\mathbb{R}^n$ -ben:

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , ekkor  $x$  és  $y$  távolsága  $\|x - y\| = d(x, y)$

A távolság tulajdonságai:

- $d(x, y) \geq 0$  valamint  $d(x, y) = 0$  ha  $x = y$
- Szimmetrikus, azaz  $d(x, y) = d(y, x)$
- Háromszög egyenlőtlenség:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

### Szög

Vektorok szöge:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

### Merőleges vetület

Az  $x$  vektor merőleges vetülete  $y$ -ra:

$$y_x = \lambda \cdot y$$

$$\begin{aligned}
\langle x - y_x, y_x \rangle &= 0 \\
\langle x, y_x \rangle - \langle y_x, y_x \rangle &= 0 \\
\langle x, \lambda y \rangle &= \langle \lambda y, \lambda y \rangle \\
\lambda \langle x, y \rangle &= \lambda^2 \langle y, y \rangle = \lambda^2 \|y\|^2 \\
\lambda &= \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve ez első egyenletbe:

$$y_x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

### Pitagorasz-tétel

Ha  $x$  és  $y$  merőlegesek egymásra ( $\langle x, y \rangle = 0$ ), akkor

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Ennek bizonyításához a definíciókat használjuk fel, konkrétan

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = x^2 + 2 \langle x, y \rangle + y^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

mivel  $\langle x, y \rangle = 0$ , és  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ,  $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$  definíció szerint.

### Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Ha  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle^2 &\leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\
|\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\|
\end{aligned}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha létezik  $\lambda \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $x = \lambda y$

#### Bizonyítás:

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = \|y\|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$$

Az átalakításokat követően egy  $\lambda$ -ban másodfokú kifejezést kapunk, melynek diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$\begin{aligned}
4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|y\|^2 \|x\|^2 &\leq 0 \\
4 \langle x, y \rangle^2 &\leq 4 \|y\|^2 \|x\|^2 \\
\langle x, y \rangle^2 &\leq \|y\|^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

### Minkowski egyenlőtlenség

Legyen  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

#### Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért ekvivalens a következővel:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ahol

$$2\langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt ez

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ami pedig az eredeti állításunk jobb oldala.

Ezzel az állításunk bizonyítást nyert.

## Egyenes egyenlete

A  $P \in \mathbb{R}^3$  ponton átmenő  $\vec{v}$  irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$x = P + t\vec{v}$$

ahol  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + t v_1 \\ P_2 + t v_2 \\ P_3 + t v_3 \end{pmatrix}$$

vagyis  $x_1 = P_1 + t v_1$  és  $x_2 = P_2 + t v_2$  és  $x_3 = P_3 + t v_3$

Tegyük fel, hogy  $v_1 \neq 0$  és  $v_2 \neq 0$  és  $v_3 \neq 0$ , azaz  $\vec{v}$  egyik tengellyes sem párhuzamos. Ilyenkor

$$t = \frac{x_1 - P_1}{v_1}, t = \frac{x_2 - P_2}{v_2}, t = \frac{x_3 - P_3}{v_3}$$

azaz

$$\frac{x_1 - P_1}{v_1} = \frac{x_2 - P_2}{v_2} = \frac{x_3 - P_3}{v_3}.$$

## A sík normálvektoros egyenlete

$$x - p \perp n$$

$$\langle x - p, n \rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$(x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_2 + (x_3 - p_3)n_3$$

$$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$$

# Mátrixok

## Műveletek mátrixokkal

### Mátrixok összeadása

Legyen  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$  és  $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$ , ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$$

Tulajdonságok:

- Művelet, azaz nem vezet ki a halmazból.
- Asszociatív, azaz  $(A + B) + C = A + (B + C) \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times m}$ .
- Létezik olyan  $0 \in \mathcal{M}_{n \times m}$  mátrix, hogy  $A + 0 = 0 + A$ , minden  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  esetén.
- Minden  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  mátrixhoz létezik  $-A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , hogy  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ , ez az ún. **additív inverz**.
- Kommutatív, azaz  $A + B = B + A, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}$

### Skalárral való szorzás

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$$

Tulajdonságok:

- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
- $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

### Mátrixok szorzása

Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , akkor  $A_i$  jelöli A i. sorát és  $A^j$  jelöli A j. oszlopát.

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $B \in \mathcal{M}_{m \times k}$ , ekkor

$$A \cdot B = C \in \mathcal{M}_{n \times k}$$

és

$$C = \begin{bmatrix} A_1 B^1 & \dots & A_1 B^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_n B^1 & \dots & A_n B^k \end{bmatrix}$$

Ha  $C = (c_{st})_{s=1, t=1}^{n, k}$ , akkor  $c_{st} = \sum_{r=1}^m a_{sr} \cdot b_{rt}$

Tulajdonságok:

- Asszociatív, azaz  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ , amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek.
- Az összeadásra nézve disztibutív, azaz  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ , amennyiben a megfelelő szorzatok léteznek és B azonos típusú C-vel.
- $(AB)^T = B^T A^T$ , amennyiben az AB szorzat létezik.
  - Biz (5)
- Nem kommutatív

## Mátrix transzponáltja

Egy mátrix transzponálása sorainak és oszlopainak a felcserélését jelenti.

Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , akkor az  $A^T \in \mathcal{M}_{m \times n}$  mátrixot A transzponáltjának nevezzük.



Továbbá ha  $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m}$ , akkor  $A^T = (a_{ji})_{j=1,i=1}^{m,n}$  és  $a_{ij} = a'_{ji}$ .

Tulajdonságok:

- $(A^T)^T = A$

Egy mátrix szimmetrikus ha transzponáltja önmaga, azaz  $A^T = A$

## Mátrix inverze

Legyen  $A \in M_{n \times n}$ , ha létezik  $B \in M_{n \times n}$  úgy, hogy  $AB = BA = I$ , akkor azt mondjuk, hogy  $A$  invertálható és  $B$ -t  $A^{-1}$ -el jelöljük és  $A$  inverzének nevezzük.

Legyen  $I \in M_{n \times n}$ , és  $I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$  alakú mátrixokat  $n \times n$ -es egységmátrixnak nevezzük.

Állítás: Ha  $A \in M_{n \times n}$ , akkor  $IA = AI = A$ .

Állítás: Ha  $A$  invertálható, akkor az inverze egyértelmű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy  $A$ -nak  $B$  és  $B'$  is inverze, ekkor  $B' = B'(AB) = (B'A)B = B$ , de  $AB = B'A = I$ , azaz  $B' = B$ .

## Inverz kiszámítása Gauss eliminációval:

Legyen  $A$  adott, keressük  $A^{-1}$ -et, melyet  $X$ -el fogunk jelölni.

Az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a keresett mátrixot.

$$AX = I$$

A Gauss elimináció:

$$(A | I) \sim \dots \sim (I | A^{-1})$$

Elemi sorműveletek:

- Sor szorzása nem 0 skalárral.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másikat.
- 2 sor felcserélése

Definíció: 2 azonos típusú mátrix **sorekvivalens**, ha egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Definíció: Egy mátrix trapézalakú, ha

## Mátrixok rangja

Egy  $n \times m$ -es mátrix rangján a mátrix oszlopai által generált  $\mathbb{R}^n$ -beli altér dimenzióját értjük. A mátrix rangja tehát  $k$ , ha oszlopai közül kiválasztható  $k$  db lineárisan független, de  $k + 1$  db már nem.

Legyen  $A \in M_{n \times n}$ , ekkor  $A$  sorekvivalens egy olyan  $B \in M_{n \times n}$  mátrixszal, amely bal felső sarkában egy  $r \times r$ -es egységmátrixot tartalmaz, a többi eleme pedig 0, ahol  $r \leq \min\{n, m\}$ . Ekkor  $r$ -et az  $A$  mátrix rangjának nevezzük.

Markov mátrix

Forgatás mátrix

# Determinánsok

## 2x2-es mátrixok determinánsa

Legyen  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ , és  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , ilyenkor

$$\det(A) = ad - bc$$

Tulajdonságok:

- Az oszlopainak és a sorainak is bilineáris függvénye, azaz

$$\bullet \det \begin{bmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix} \text{ és}$$

$$\bullet \det \begin{bmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Az egységmátrix determinánsa 1, pl:

$$\bullet \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\bullet \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

Tétel: Ha  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  olyan függvény ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor az csak a determináns függvény lehet.

További tulajdonságok:

- Egy mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának determinánásával.

• Biz:

$$\bullet \det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\bullet \det(A^T) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - cb$$

- Ha két oszlopa vagy sora megegyezik akkor a determináns nulla.

• Biz:

$$\bullet \det(A) = \det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ab = 0$$

- Pontosan akkor invertálható egy mátrix, ha a determinánsa nem nulla, ekkor

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

• Biz:

$$\bullet \text{Legyen } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{Tegyük fel, hogy } \det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\bullet A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\bullet AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)} = \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -cb + ad \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Legyen  $A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, C, C', A^{i+1}, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$ , ilyenkor

$$\bullet \det(A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, C + C', A^{i+1}, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, C, A^{i+1}, \dots, A^n) + \det(A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, C', A^{i+1}, \dots, A^n)$$

- azaz a determináns a mátrix oszlopainak additív függvénye.

- Ha a mátrix két oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

- A determinánsok szorzástétele:

$$\bullet \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Ha egy mátrix oszlopának konstans szorosát hozzáadom egy másik oszlophoz, akkor a determináns értéke nem változik. (azaz, a Gauss elimináció használható)

- Diagonális, illetve felső háromszög mátrix determinánsa egyenlo a főátlóbeli elemek szorzatával.

### 3x3-as mátrixok determinánsa

Sarrus-szabály: csak  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as mátrixora használható.

Legyen  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , ilyenkor

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tulajdonságok:

- [Lásd 2x2-es](#)

### Kifejtési tétel

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Ahol  $\det A_{ij}$  az  $a_{ij}$ -hez tartozó aldetermináns.

Egy adott elemhez tartozó aldeterminánst úgy kaphatunk meg, hogy az eredeti mátrixból töröljük az elem sorát és oszlopát így az eredeti  $n \times n$ -es mátrixból egy  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot kapunk. A kifejtési tétel segítségével  $n \times n$ -es mátrixok determinánsának kiszámítását visszavezethetjük  $2 \times 2$ -es vagy  $3 \times 3$ -as mátrixok determinánsára amikre pedig már alkalmazható a Sarrus-szabály.

## Lineáris egyenletrendszerek

---

### Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen  $m < n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  és  $b \in \mathbb{R}^n$  adottak,  $x \in \mathbb{R}^m$  ismeretlen ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

Ha  $b \neq 0$  akkor **inhomogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Ha  $b = 0$ , akkor **homogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk.

Példa:

$$2x + y = 2$$

$$4x - y = 3$$

ekkor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A homogén rendszernek az  $x = 0$  mindig megoldása, ezt **triviális megoldásnak** nevezzük.

Tétel: Ha  $m < n$ , akkor a homogén lineáris

Bizonyítás: Indukcióval,

Legyen  $n > 1, m = 1$ , ekkor az egyenletrendszer az alábbi alakú

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

Ha  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , akkor  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  megoldás lesz.

Ha legalább egy  $a_i \neq 0$  akkor feltehető, hogy ez  $a_1$ .

Ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_1}(a_2x_2 + \dots + a_nx_n)$$

Ha  $m < n$ ,  $m - 1$ -re feltesszük, hogy igaz, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

A feltételek miatt létezik  $a_{1i} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , feltehető, hogy ez  $a_{11}$ , ekkor

$$x_1 = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)$$

és a

$$(A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}A_1) = 0$$

$$(A_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}A_1) = 0$$

rendszerben már egyel kevesebb ( $m-1$ ) változó szerepel.

## Elemi sorműveletek

1. A mátrix egy sorát meg lehet szorozni egy nem nulla számmal.
2. Két sort össze lehet adni.
3. Két sort fel lehet cserélni.

## A megoldáshalmaz jellemzése

Tétel: A homogén egyenlet megoldása altere  $\mathbb{R}^n$ -nek. Jelölje ezt  $L_A$

Tétel: Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza  $x_p + L_A$  alakú (lineáris sokaság), ahol  $L_A$  az inhomogén egyenlet megoldásterét,  $x_p$  pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

$$A_1x = 1$$

$$\vdots$$

$$A_nx = 0$$

$x$  pontosan akkor megoldás, ha  $x \in \text{lin}[A_1, \dots, A_n]$ .

## Feltételek a megoldhatóságra

Homogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = 0,$$

ahol  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , azaz

$$x_1A^1 + \dots + x_mA^m = 0.$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálisól különböző megoldása, ha az  $A$  mátrix oszlopvektorai lineárisan függők.

Tétel:

1. Ha  $m > n$ , akkor van triviálisól különböző megoldás.
2. Ha  $m = n$ , akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha  $A^1, \dots, A^m$  lineárisan függők.
3. Ha  $m < n$ , akkor pontosan akkor létezik nem triviális megoldás ha  $A^1, \dots, A^m$  lineárisan függők.

Inhomogén lineáris egyenletrendszerek esetén

$$Ax = b,$$

ahol  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , azaz

$$x_1 A^1 + \dots + x_m A^m = b.$$

Tétel:

1. Ha  $m > n$ , tetszőleges  $b$  vektor esetén biztosan van megoldás, ha  $\text{rang} A$  maximális, azaz  $\text{rang} A = n$ . Ekkor végtelen sok megoldás van.
2. Ha  $m = n$ , tetszőleges  $b$  vektor esetén biztosan van megoldás, ha  $A^1, \dots, A^m$  bázisa a térnek. Ekkor pontosan egy megoldás van.
3. Ha  $m < n$ , tetszőleges  $b$  vektor esetén nem feltétlenül lesz megoldás.
4. Tetszőleges  $m, n$  esetén pontosan akkor lesz megoldás, ha  $b$  benne fekszik az  $A$  oszlopai által generált altérben.

## Sorekvivalens mátrixok

Két azonos típusú mátrix sorekvivalens, ha az egyik a másikba elemi sorműveletekkel átvihető.

Állítás: Minden mátrix sorekvivalens egy trapéz alakú mátrixszal. Tétel: Ha  $A$  és  $A'$  sorekvivalensek, akkor az  $Ax = 0$  illetve az  $A'x = 0$  egyenletrendszerek megoldáshalmaza egyezik.

## Trapéz alakú mátrixok

Egy mátrix trapéz alakú, ha minden csupa 0 sor a mátrix alján szerepel, továbbá két egymás követő sorban az alul lévő első nem nulla eleme fölötti elemtől balra van nem nulla elem.

## Gauss elimináció

Általánosan:  $Ax = 0$  —Gauss elimináció—  $A'x = 0$ , ahol az  $A'$  mátrix trapéz alakú.

## Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Legyen  $m < n$ ,  $A \in M_{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  adottak, ekkor az

$$Ax = b$$

egyenletrendszert inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ahol legalább egy  $b_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Jelölje  $A^j$  az  $A$  mátrix  $j$ . oszlopát, ekkor

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$$

**Definíció:** Legyenek  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , ekkor az

$$x_1 a_1 + \dots x_n a_n$$

kifejezést az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok  $x_1, \dots, x_n$  skalárokkal vett **lineáris kombinációjának** nevezzük.

**Definíció:** Az  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$  inhomogén egyenletrendszer  $x_p \in \mathbb{R}^n$ ,  $Ax_p = b$  megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.

Ha  $x$  olyan, hogy  $Ax = 0$ , akkor azt a homogén rész megoldásának nevezzük.

**Tétel:** Az  $Ax = b$  inhomogén egyenletrendszer összes megoldása  $x_p + x$  alakban áll elő, ahol  $x_p$  egy partikuláris megoldás,  $x$  pedig a homogén rész megoldása.

Az  $Ax = b$  egyenletrendszer esetén az

$$[A, B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

mátrixot a rendszer **kibővített mátrixának** nevezzük.

## Vektorterek

---

### Vektortér

Legyen  $V \neq 0$  halmaz, és tegyük fel, hogy adott két leképezés

$$+ : V \times V \mapsto V,$$

illetve

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \mapsto V$$

a következő tulajdonságokkal:

- Tetszőleges  $v, w, u \in V$  esetén  $(v + w) + u = v + (w + u)$
- Létezik olyan 0-val jelölt eleme  $V$ -nek, hogy  $v + 0 = 0 + v = v$ , minden  $v \in V$  esetén.
- Minden  $v \in V$ -hez létezik  $(-v) \in V$ , hogy  $v + (-v) = (-v) + v = 0$
- Tetszőleges  $v, w \in V$  esetén  $v + w = w + v$ .

valamint:

- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v, w, u \in V$  esetén  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda \mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda v)$ .

Ekkor  $V$ -t vektortérnek nevezzük  $\mathbb{R}$  felett.

**Megjegyzés:**  $\mathbb{R}$  helyett tekinthetünk más számhalmazokat is amely rendelkezik  $\mathbb{R}$ -hez hasonló tulajdonságokkal, azaz algebrai értelemben testet alkot.

Ilyen például a racionális számok teste  $\mathbb{Q}$ , vagy a véges testek (pl.: mod 2 maradékosztályok).

### Példák vektorterekre

- $\mathbb{R}^n$  vektortér  $\mathbb{R}$  felett.
- $\mathbb{C}^n$  vektortér  $\mathbb{C}$  illetve  $\mathbb{R}$  felett.
- $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  vektortér  $\mathbb{R}$  felett.

- $P = \{p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid p(x)\}$ ,  $P$ -t a valós polinomok halmazának nevezzük.
- $F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ függvény}\}$ .

### Altér

Legyen  $V$  egy vektortér, és legyen  $S$  egy részhalmaza  $V$ -nek.

Tegyük fel, hogy  $S$  eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Ha  $v, w \in S$ , akkor az összegük  $v + w$  is eleme  $S$ -nek.
2. Ha  $v \in S$  és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $cv$  is eleme  $S$ -nek.

Ekkor  $S$  maga is egy vektortér. Valóban, a fent említett tulajdonságok teljesülnek  $V$  minden elemére, valamint teljesülnek  $S$  elemeire is. Ilyenkor  $S$ -et  $V$  alterének nevezzük.

### Példák alterekre

- $V$ -n  $\{0\}$  és  $V$  mindig alterek, ezeket triviális altereknek nevezzük.
- Az  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ -es mátrixok vektorterében a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.
- $P$ -ben  $P_n$ , a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok halmaza alteret alkot.
- $F$ -ben a folytonos, illetve a differenciálható függvények is alteret alkotnak.

### Altérkritérium

$S \subset V$  pontosan akkor altér, ha minden  $v, w \in S$  esetén

$$(1) \quad u - w \in S,$$

valamint

bármely  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in S$  esetén

$$(2) \quad \lambda v \in S.$$

Bizonyítás:

Ha  $S$  altér, akkor nyilván zárt a műveletekre. Ha  $S$  zárt a műveletekre, akkor a vektorterekre vonatkozó tulajdonságok többsége automatikusan teljesülnek  $S$ -beli vektorokra, mivel azok speciális  $V$ -beli vektorok. Csak azt kell megvizsgálni, hogy a  $V$ -beli  $0$  beleesik-e  $S$ -be, illetve egy  $S$ -beli vektor  $V$ -beli ellentettje beleesik-e  $S$ -be:

Legyen  $v \in S$  tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$0 = 0v \in S.$$

Legyen  $v \in S$  tetszőleges vektor. Ekkor (2) szerint

$$-v = (-1)v \in S.$$

+füzet (Abel-csoport axiómák)

oda-vissza

### Lineáris függőség, függetlenség

Legyen  $a_1, \dots, a_n \in V$  vektorok és  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  skalárok, ekkor a

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

kifejezést az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok **lineárisan függők**, ha léteznek olyan  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  nem mind  $0$  skalárok, hogy

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

Megjegyzés: A  $0$  vektort tartalmazó rendszer mindig lineárisan függő.

Az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok lineárisan függetlenek, ha nem függők.  $\neg(\exists) \neg$

### Generátorrendszer

Az  $a_1, \dots, a_n$  vektorrendszer generátorrendszere  $V$ -nek, ha bármely  $v \in V$  lineárisan kikombinálható  $a_1, \dots, a_n$ -ből.

Megjegyzés: Ekkor  $V$ -t végesen generálhatónak nevezzük.

### Bázis

Ha  $V$  végesen generált és  $a_1, \dots, a_n$  lineárisan független generátorrendszere, akkor  $a_1, \dots, a_n$ -et bázisnak nevezzük.

### Dimenzió

Tétel: Tetszőleges végesen generált vektortérben, ha adott két bázis  $a_1, \dots, a_n$  és  $v_1, \dots, v_m$ , akkor  $n = m$ , azaz bármely két bázis azonos számosságú.

Ezt a közös számosságot a vektortér dimenziójának nevezzük.

Példa:  $\mathbb{R}^2$  két dimenziós.

### Bázisra vonatkozó koordináták

Legyen  $V$  egy vektortér és  $b_1, \dots, b_m$  bázis  $V$ -ben. Ekkor tetszőleges  $v \in V$  egyértelműen felírható

$$v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

alakban, ahol a  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$  skalár  $n$ -est  $v$   $\{b_1, \dots, b_n\}$  bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Tehát tetszőleges  $v \in V$  beazonosítható  $\beta$ -val, ha adott egy bázis.

$$v \in V \leftrightarrow \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \beta \in \mathbb{R}$$

bijekció

Tétel: Tetszőleges  $n$ -dimenziós valós vektortér beazonosítható  $\mathbb{R}^n$ -el.

### Báziscsere

??

## Lineáris leképezések

---

### Lineáris leképezések

Legyenek  $U, V$  vektorterek azonos test fölött, ekkor az

$$L : U \mapsto V$$

leképezés lineáris, ha

- additív, azaz  $L(x + y) = Lx + Ly$ , minden  $x, y \in U$  esetén, valamint
- homogén  $L(\lambda x) = \lambda Lx$ , minden  $x \in U$  és  $\lambda$  skalár esetén.

Példa:

- Ha  $U$  vektortér  $\mathbb{R}$  fölött és  $L : U \mapsto \mathbb{R}$  lineáris, akkor  $L$ -et lineáris funkcionálnak nevezzük.
  - Pl:  $U = \mathbb{R}$ , akkor  $Lx = cx$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$  rögzített.
- Ha  $U = \mathbb{R}^m$  akkor  $L : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ , pontosan akkor lineáris, ha létezik olyan  $c \in \mathbb{R}^m$  vektor, hogy  $Lx = \langle c, x \rangle$



- $Lx = 0$ , nulla lineáris leképezés
- Ha  $U = V$ , akkor az  $L : U \mapsto U, Lx = x$  identikus leképezés
- $\frac{\sigma}{\sigma x} : P_n \mapsto P_{n-1}, (\frac{\sigma}{\sigma x})(x) = P'(x)$
- Első koordináta tengelyre való projekció:  $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0)$ 
  - Speciális eset:  $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- Az  $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  leképezés **nem** lineáris.

### Képtér

Legyen az  $L : U \mapsto V$  leképezés lineáris, ekkor a  $\text{range} L = \{v \in V \mid \exists u \in U, Lu = v\} \subset V$  halmazt **L képterének** nevezzük.

### Magtér

Legyen az  $L : U \mapsto V$  leképezés lineáris, ekkor a  $\text{null} L = \{u \in U \mid Lu = 0\} \subset U$  halmazt **L magtérének** nevezzük.

### Példák

## Koordináta függvények

## Lineáris leképezések vektorteret alkotnak

Jelölje  $\mathcal{L}(U, V) = \{L : U \mapsto V \mid L \text{ lineáris}\}$ .

Ha  $L, T \in \mathcal{L}(U, V)$ , akkor

$$L + Tx = Lx + Tx,$$

továbbá

tetszőleges  $\lambda$  skalár esetén

$$(\lambda L)x = \lambda Lx.$$

Az fenti műveletekkel  $\mathcal{L}(U, V)$  vektortér.

Bizonyítás:

## Képtér és magtér alteret alkot

Ha  $L : U \mapsto V$  lineáris, akkor

$$\text{range} L \subset V,$$

illetve

$$\text{null} L \subset U$$

alterek.

Bizonyítás:

## Nullitás + Rang tétel

Bizonyítás:

## Belsőszorzat-terek, ortogonalitás

---

Belsőszorzat (skaláris szorzat)

Példák

Ortogonalitás

Ortogonalis komplementer

Pitagorasz tétel

Bizonyítás:

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Bizonyítás:

Minkowski egyenlőtlenség

Bizonyítás:

Legjobban approximáló elem

Tétel:

Bizonyítás:

Bessel egyenlőtlenség

Bizonyítás:

Fourier együtthatók

Fourier sor

Ortonormált rendszer

Ortogonalis rendszer

Gram-Schmidt ortogonalizáció

## **Sajátérték, sajátvektor**

---

Lineáris leképezések és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Sajátvektorok alteret alkotnak

Bizonyítás:

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek

Bizonyítás:

Karakterisztikus polinom

Tétel:

Tétel:

Szimmetrikus mátrixok sajátértéke, sajátvektora

Szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatósága