

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

Esercizio 1 [16 punti]

A: notazione asintotica. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$\frac{\log n + n^{5/2}}{\sqrt{n+1}} = \Theta(n^2); \quad \log n = \Theta(\sqrt{\log n}); \quad n^2 = o(n \log n); \quad 3^n = \omega(2^n);$$

B: equazioni di ricorrenza. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 2T(n/2) + n; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: algoritmi e complessità. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- ordinare n numeri interi compresi fra 1 e n^2 elementi:
- Fare il *merge* di due heap binomiali:
- Dato un grafo diretto con pesi positivi sugli archi e un nodo t , calcolare la somma delle distanze di tutti i nodi verso t :
- Dato un grafo diretto G , dire se esistono due nodi s e t tale che non esiste nessun cammino da s a t :

Esercizio 2 [8 punti]

Sia T un albero binario radicato di n nodi in cui ogni nodo v può essere *bianco* (B) o *nero* (N). Progettare un algoritmo di complessità $O(n)$ che, dato un intero non negativo h , restituisce il numero di foglie nere di T che hanno una profondità di almeno h .¹ Si assuma che T è mantenuto con una struttura dati collegata, fatta di record e puntatori, e che il record di un nodo v contenga i seguenti campi: il puntatore al figlio sinistro $sin(v)$, quello al figlio destro $des(v)$, e un campo $col(v) \in \{B, N\}$. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato dell'algoritmo.

Esercizio 3 [8 punti] (*Serpentone: annerire il minimo numero di caselle*)

Serpentone è un puzzle costituito da una griglia (matrice) $n \times m$ di celle. Due celle adiacenti verticalmente o orizzontalmente si dicono vicine. Ogni cella può essere bianca o nera. Due celle a e b si dicono *connesse* se è possibile da a arrivare a b attraverso una sequenza di spostamenti fra celle vicine tutte di colore nero (questo percorso è chiamato nel gioco *serpentone*). Il gioco, date due celle a e b , chiede di annerire (colorare di nero) il minimo numero di caselle in modo da rendere a e b connesse. Progettare un algoritmo efficiente che risolve una generica istanza di *Serpentone*.

¹Si ricorda che la profondità di un nodo v è uguale al numero di archi del cammino da v alla radice dell'albero.