Bài tập về nhà 1
Đáp án Phần Lý thuyết

Bài 1: Cho hàm số $A(m, n)$ (m, n là các số tự nhiên) được định nghĩa như sau:

$$A(0, n) = n + 1 \tag{1a}$$
$$A(m, 0) = A(m - 1, 1) \tag{1b}$$
$$A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1)) \tag{1c}$$

Tính $A(1, 2)$ và $A(2, 1)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
A(1,2) &= A(0, A(1,1)) && \text{do } (1c) \\
&= A(0, A(0, A(1,0))) && \text{do } (1c) \\
&= A(0, A(0, A(0,1))) && \text{do } (1b) \\
&= A(0, A(0,2)) && \text{do } (1a) \\
&= A(0,3) && \text{do } (1a) \\
&= 4 && \text{do } (1a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(2,1) &= A(1, A(1,1)) && \text{do } (1c) \\
&= A(1, A(0, A(1,0))) && \text{do } (1c) \\
&= A(1, A(0, A(0,1))) && \text{do } (1b) \\
&= A(1, A(0,2)) && \text{do } (1a) \\
&= A(1,3) && \text{do } (1a) \\
&= A(0, A(1,2)) && \text{do } (1c) \\
&= A(0,4) && (A(1,2) \text{ tính như trên}) \\
&= 5 && \text{do } (1a)
\end{aligned}$$

Bài 2: Ta định nghĩa một chuỗi nhị phân là một chuỗi chỉ bao gồm các ký tự '0' và '1'. Gọi S_n là số lượng chuỗi nhị phân có độ dài n mà không có 2 ký tự '1' đứng kế nhau. Chứng minh rằng:

$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n, \quad n \geq 1$$

Đáp án. Để thuận tiện, ta gọi chuỗi nhị phân không có hai ký tự '1' đứng liền nhau là *chuỗi hợp lệ*. Theo định nghĩa chuỗi nhị phân, thì một chuỗi nhị phân có độ dài $n+2$ chỉ có thể bắt đầu bằng '0' hoặc '1'.

Xét chuỗi hợp lệ độ dài $n+2$ và bắt đầu bằng '0'. Có thể thấy rằng, nếu bỏ ký tự '0' ở đầu này, ta được một chuỗi hợp lệ độ dài $n+1$.

Xét chuỗi hợp lệ độ dài $n+2$ và bắt đầu bằng '1'. Do tính chất của chuỗi hợp lệ, ký tự kế tiếp phải là '0'. Và nếu ta bỏ đi '10' ở đầu chuỗi, ta được một chuỗi hợp lệ độ dài n.

Vậy, ta có thể kết luận:

$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n, \quad n \geq 1$$