

1

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 & -8 \\ 2 & 5-3 & 8 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1$$

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 0 & -8 \\ 2 & 5-5 & 8 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{bmatrix} -8-\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (-8-\lambda)(-\lambda) - 9$$

$$= \lambda^2 + 8\lambda - 9 \rightarrow \lambda = -9, 1 \rightarrow D = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8+9 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8-1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 18 \\ 3 & 11 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{/3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 8 & | & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$