

# **Ecuaciones Diferenciales con SageMath y Python: Aplicaciones Prácticas**

**Autor**

**Manuel Alejandro Vivas Riverol**

PRIMERA EDICIÓN

Este material se distribuye bajo la licencia  
**Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional**  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en>

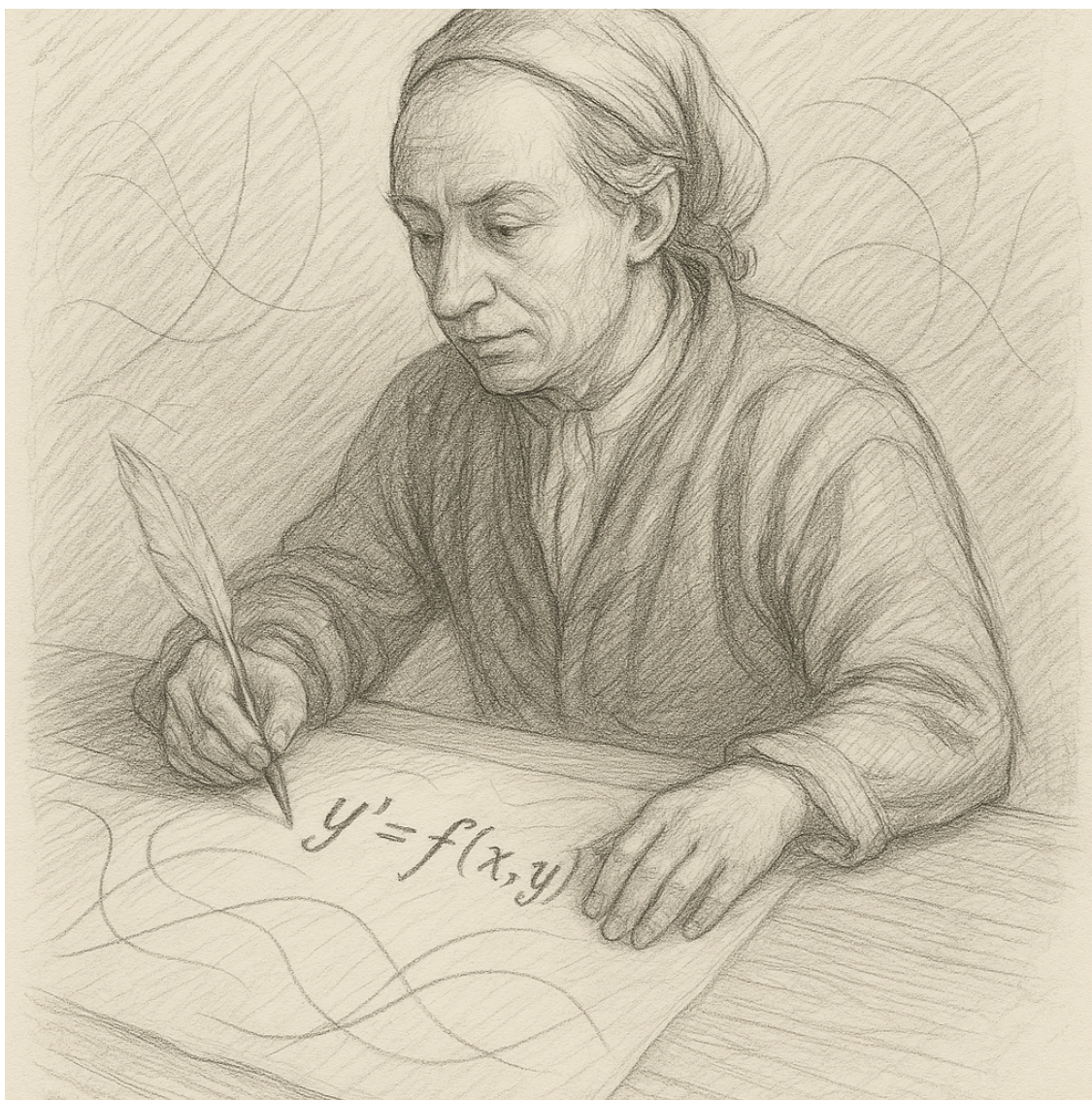
# Índice general

<b>1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>4</b>
1.0.1. Primer vistazo a las Ecuaciones Diferenciales . . . . .	4
1.0.2. Introducción . . . . .	5
1.0.2.1. Objetivo . . . . .	5
1.0.2.2. Cómo aprender todo de éste capítulo . . . . .	5
1.0.3. Concepto de ecuación diferencial . . . . .	5
1.0.3.1. Ejemplos introductorios de modelado (solo ideas; se desarro- llan más adelante): . . . . .	5
1.0.4. Crecimiento exponencial . . . . .	6
1.0.4.1. Ejemplo (Sagemath): Crecimiento poblacional . . . . .	6
1.0.4.2. Ejemplo (Sagemath): Crecimiento poblacional . . . . .	8
1.0.5. ¿Cómo utilizar sagemath? (Sage “Quick Start”) . . . . .	9
1.0.5.1. Análisis geométrico: campos de pendientes y líneas de fase .	10
1.0.5.2. Ejemplo (Sagemath): Campo de pendientes . . . . .	10
1.0.6. Ecuaciones de Orden superior. Primer vistazo . . . . .	11
1.0.6.1. Ejemplo (Sagemath): Ecuación de Van Der Pol . . . . .	12
1.0.7. Qué viene después . . . . .	12
1.0.8. Apéndice práctico (copiar/pegar rápido) . . . . .	13
1.0.8.1. Campo + trayectoria (plantilla Sage): . . . . .	13
1.0.9. Referencias . . . . .	13
<b>2. gracias</b>	<b>14</b>
2.1. ¡Gracias por llegar hasta aquí! . . . . .	14
2.1.0.1. Recuerda . . . . .	14

# Capítulo 1.

## Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

### 1.0.1. Primer vistazo a las Ecuaciones Diferenciales



“Nada puede ser más absolutamente cierto que nada puede ser absolutamente cierto.”

— Leonhard Euler

## 1.0.2. Introducción

Las **ecuaciones diferenciales** son una herramienta fundamental para modelar fenómenos en ciencias, ingeniería, economía y biología. Desde el ...

Por último, introduciremos una **ruta de solución sistemática con SageMath y Python**:

1. ... simbólicamente con **desolve**.
2. ... numéricos (Euler, Runge–Kutta).
3. Interpretar los resultados ....

De esta forma, sentamos las bases para el resto del libro, donde abordaremos modelos más complejos y técnicas de resolución avanzadas, manteniendo siempre un enfoque **aplicado, visual y consistente**.

### 1.0.2.1. Objetivo

...

### 1.0.2.2. Cómo aprender todo de éste capítulo

- 1) Lee el texto breve de cada sección.
- 2) Ejecuta las celdas de **Sage** (simbólico y RK4) y, cuando esté, la versión **Python** (odeint/visualización).
- 3) Aplica la **estrategia consistente**: simbólico  $\rightarrow$  numérico  $\rightarrow$  interpretación geométrica.

## 1.0.3. Concepto de ecuación diferencial

Una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** relaciona una función desconocida con sus derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

La solución es una función  $x(t)$  que satisface la ecuación y, cuando aplica, la condición inicial (PVI).

### 1.0.3.1. Ejemplos introductorios de modelado (solo ideas; se desarrollan más adelante):

- Caída libre (modelo simple):  $y''(t) = -g$ .
- Desintegración radiactiva:  $N'(t) = -\lambda N$ .
- Mezclas en tanques (entrada/salida).
- Crecimiento poblacional:  $P'(t) = kP$  (exponencial) o  $P'(t) = k(1 - \frac{P}{N})P$  (logística).

En este capítulo trabajaremos con **primer orden** y su interpretación geométrica.

### 1.0.4. Crecimiento exponencial

Si la tasa de cambio de una población es proporcional a su tamaño:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = P_0,$$

entonces

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

- $k > 0$ : crecimiento multiplicativo.
- $k < 0$ : decaimiento (ej. radiactivo con  $k = -\lambda$ ).

Usaremos este modelo como “hola mundo” de las EDOs: es lineal, separable y se resuelve exactamente.

#### 1.0.4.1. Ejemplo (Sagemath): Crecimiento poblacional

##### Ejemplo concreto, Computación simbólica

```
[1]: # (Python) Aproximación numérica y comparación con la solución exacta
# Nota: usa SciPy si está disponible; si no, se recurre a Euler como respaldo.
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Verificamos si está instalado scipy e importamos
try:
    from scipy.integrate import odeint
    use_scipy = True
except Exception:
    use_scipy = False

# Parámetros
P0 = 100.0
k = 0.2
t = np.linspace(0, 20, 200)

# Definimos el lado derecho de la ecuación diferencial
def f(P, tt):          # f = dP/dt
    return k*P

# En caso de usar scipy.integrate.odeint (from scipy.integrate import odeint):
if use_scipy:
    P_num = odeint(lambda P, tt: f(P, tt), P0, t).ravel()
else:
    # Integración de Euler (respaldo didáctico)
    h = t[1]-t[0]
```

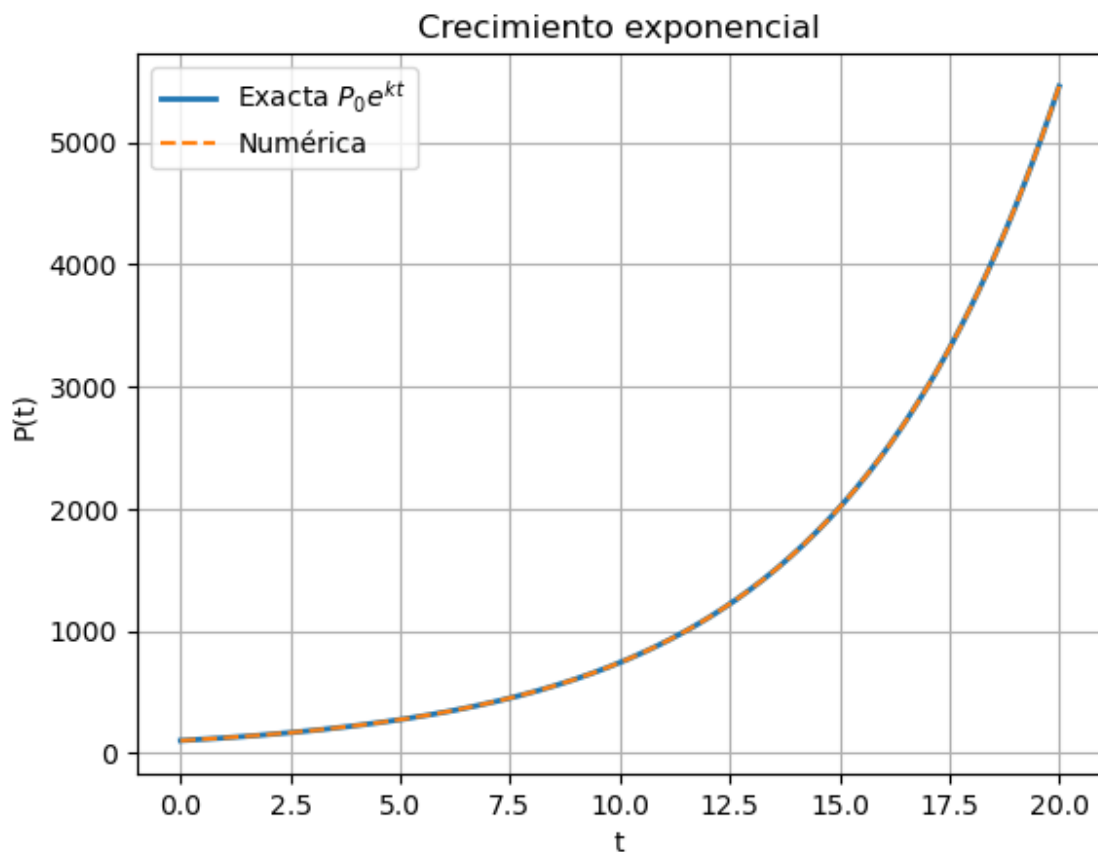
```

P_num = [P0]
for n in range(len(t)-1):
    P_num.append(P_num[-1] + h*f(P_num[-1], t[n]))
P_num = np.array(P_num)

# Solución exacta
P_exact = P0*np.exp(k*t)

# Graficamos las soluciones exacta y numérica
plt.plot(t, P_exact, lw=2, label="Exacta  $P_0 e^{kt}$ ")
plt.plot(t, P_num, '--', label="Numérica")
plt.xlabel("t"); plt.ylabel("P(t)")
plt.title("Crecimiento exponencial")
plt.grid(True); plt.legend(); plt.show()

```



En la práctica, no basta con obtener la **solución simbólica**: muchas veces necesitamos **simular** el modelo con valores concretos de los parámetros para interpretar el fenómeno.



En el caso de la ecuación logística, tras resolver simbólicamente con **desolve**, ahora asignamos valores numéricos a:

- $k$ : tasa de crecimiento.
- $N$ : capacidad de carga.
- $P_0$ : población inicial.
- $T$ : tiempo final de la simulación.

Con estos parámetros, definimos la función  $f(t, P)$  y usamos **desolve\_rk4** para integrar numéricamente la ecuación.

La gráfica resultante muestra cómo la población  $P(t)$  evoluciona con el tiempo y tiende asintóticamente a la capacidad de carga  $N$ .

#### 1.0.4.2. Ejemplo (Sagemath): Crecimiento poblacional

##### Ejemplo concreto, Computación simbólica y numérica

```
[2]: # %(SageMath) Logística: simbólica + RK4
# --- Definiciones Simbólicas ---
t, k, N = var('t, k, N')
P = function('P')(t)
DE = diff(P, t) == k*(1 - P/N)*P
# --- Parte Simbólica ---
# Intenta resolver simbólicamente.
# La solución logística es conocida, así que Sage la encuentra.
print("Solución simbólica:")
sol = desolve(DE, P, ivar=t, ics=[0, P0])
show(sol)
# --- Parte Numérica ---
# ¡Aquí está el cambio! Asignamos valores numéricos a los parámetros.
k_val = 0.8 # Tasa de crecimiento
N_val = 100 # Capacidad de carga
P0_val = 10 # Población inicial
T_val = 10 # Tiempo final de la simulación
# Definimos la función f(t, P) usando los valores numéricos
f(t, P) = k_val * (1 - P/N_val) * P
# Ahora desolve_rk4 tiene todos los números que necesita
print("\nGráfica de la solución numérica (RK4):")
numerical_solution = desolve_rk4(f, P, ics=[0, P0_val], ivar=t,
end_points=[0, T_val], step=0.01)
# Creamos y mostramos la gráfica
line(numerical_solution, thickness=2, legend_label="P(t) numérico").show(
title=f"Modelo Logístico (k={float(k_val)}, N={N_val}, P0={P0_val})",
axes_labels=['Tiempo (t)', 'Población (P)'])
```

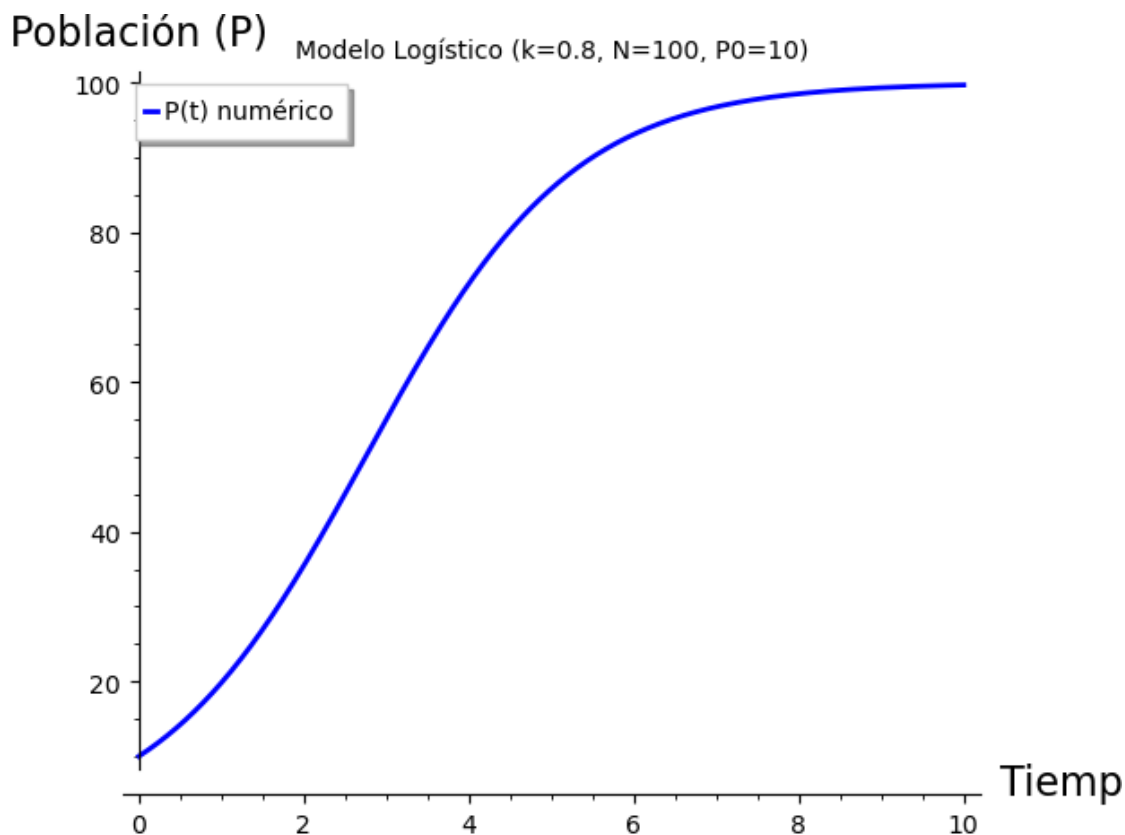


)

Solución simbólica:

$$-\frac{\log(-N + P(t)) - \log(P(t))}{k} = \frac{4885743 kt - 4885743 \log(-N + 100) + 22499678}{4885743 k}$$

Gráfica de la solución numérica (RK4):



### 1.0.5. ¿Cómo utilizar sagemath? (Sage “Quick Start”)

**Plantilla mínima en Sage:** 1) Definir variable independiente y función desconocida.  
2) Formular la ED (y, si aplica, una CI).  
3) Invocar `desolve` para solución simbólica.

Ejemplo lineal simple  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 1$ :

```
[3]: # %(SageMath) Quick Start: lineal simple
# Definimos la variables independiente
x = var('x')
# Definimos la función a integrar
```

```

y = function('y')(x)
# Definimos la ED
de = diff(y, x) == x + y

# Solución de la ecuación diferencial
sol = desolve(de, y, ics=[0, 1]) # intenta método exacto automáticamente
show(sol)

```

$$-x + 2e^x - 1$$

### 1.0.5.1. Análisis geométrico: campos de pendientes y líneas de fase

El **campo de pendientes** para  $y' = f(t, y)$  muestra, en cada punto  $(t, y)$ , un segmento con pendiente  $f(t, y)$ . - Las curvas solución son tangentes al campo: útil para **intuición cualitativa**. - En **autónomas**  $y' = f(y)$  podemos usar **líneas de fase** (sobre el eje  $y$ ) para estudiar equilibrios y estabilidad.

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden definida por la función:

$$f(t, y) = \frac{y^2}{2} - t$$

A partir de esta función construimos el **campo de direcciones** (o campo de pendientes), el cual nos permite **visualizar geoméricamente** el comportamiento de las soluciones de la EDO:

$$y' = f(t, y) = \frac{y^2}{2} - t$$

Posteriormente, podremos añadir una **trayectoria particular** a partir de una condición inicial para ilustrar cómo las curvas solución son tangentes al campo en cada punto.

### 1.0.5.2. Ejemplo (Sagemath): Campo de pendientes

#### Ejemplo concreto, Computación numérica

```

[4]: # %(SageMath) Campo de pendientes + solución particular con RK4
t, y = var('t, y')
f(t, y) = y^2/2 - t

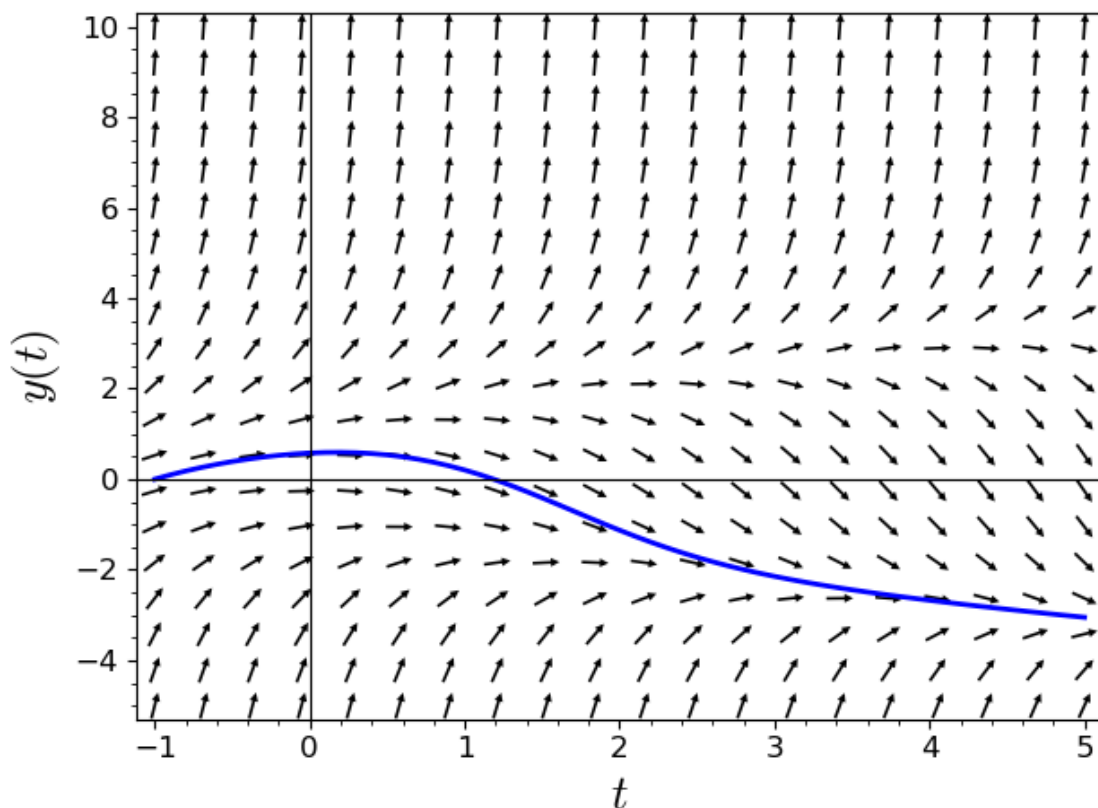
# Graficamos el campo de direcciones
p = plot_slope_field(f, (t, -1, 5), (y, -5, 10),
                    headaxislength=3, headlength=3,
                    axes_labels=['$t$', '$y(t)$'], fontsize=12)

# Resolvemos la ED, numéricamente
p += desolve_rk4(f, y, ics=[-1, 0], ivar=t,
                output='plot', end_points=[-1, 5], thickness=2)

```

```
# Graficando
```

```
p.show(xmin=-1, xmax=5, ymin=-5, ymax=10)
```



### 1.0.6. Ecuaciones de Orden superior. Primer vistazo

`ode_solver` (interfaz a GSL) ofrece varios algoritmos (rk8pd, rkf45, rk4, gear, etc.) y control fino: - Útil en problemas “duros/rígidos” o con requisitos de tolerancia estrictos. - Permite manejar **sistemas** y definir funciones con parámetros.

#### ED de 2o orden reducida a 1er orden. (Van der Pol):

La **ecuación de Van der Pol** es un ejemplo clásico de **ecuación diferencial no lineal de segundo orden**, propuesta originalmente para modelar osciladores eléctricos:

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \quad \mu > 0.$$

Para poder resolverla numéricamente en un computador, es habitual **convertirla en un sistema de primer orden**.

Definimos nuevas variables:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y'.$$

Entonces el sistema equivalente de primer orden es:

...

De esta forma, hemos transformado la ecuación original en un sistema de dos EDOs de primer orden, lo que facilita su análisis y su implementación en métodos numéricos como **Runge–Kutta**.

#### 1.0.6.1. Ejemplo (Sagemath): Ecuación de Van Der Pol

**Ejemplo concreto, Computación numérica.** El sistema de Van der Pol puede escribirse en forma **vectorial compacta** como:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$

donde  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  representa el estado del sistema en el plano de fases  $(y_1, y_2)$ .

Utilizamos un objeto “solver” provisionado por el comando `ode_solver`

**(Opcional) Equivalente MATLAB en la misma lógica** **Simbólico primero; numérico si hace falta.** (Úsalo para contraste si tus lectores usan MATLAB).

```
<--- %% (MATLAB) Plantilla simbólica y numérica rápidas --->
syms y(x)
ode = diff(y,x) == x + y;
cond = y(0) == 1;
sol = dsolve(ode, cond);    % Solución cerrada (si aplica)
disp(sol)

f = @(x,y) x + y;
[xv, yv] = ode45(f, [0 5], 1);    % Numérica
plot(xv, yv, 'LineWidth', 2); grid on
xlabel('x'); ylabel('y(x)')
title('Solución numérica (ode45)')
```

#### 1.0.7. Qué viene después

En el Capítulo 2 profundizaremos en **primer orden** (separables, lineales, exactas, factores integrantes), reforzando la **lectura geométrica** y los criterios de **existencia–unicidad** que justifican los diagramas y la estabilidad.

## 1.0.8. Apéndice práctico (copiar/pegar rápido)

### 1.0.8.1. Campo + trayectoria (plantilla Sage):

```
< --- %(SageMath) Campo + trayectoria --->
t, y = var('t, y')
f(t, y) = ...                                # define f(t, y)
p = plot_slope_field(f, (t, a, b), (y, c, d))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[t0, y0], ivar=t,
                output='plot', end_points=[a, b], thickness=2)
p.show(xmin=a, xmax=b, ymin=c, ymax=d)
```

## 1.0.9. Referencias

- *The Ordinary Differential Equations Project* (2024 Edition).  
Proyecto abierto para la enseñanza de EDOs, con ejemplos de modelado, análisis cualitativo y rutinas numéricas en SageMath.  
Disponible en: <https://odeproject.org>
- Joyner, D. (2021). *Computational Mathematics with SageMath*.  
Springer. Manual de referencia para el uso de `desolve`, `desolve_rk4`, `ode_solver` y rutinas simbólicas y numéricas en Sage.
- Johansson, R. (2018). *Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib*.  
Apress. Recurso para integrar métodos numéricos en Python (`odeint`, visualización, simulación).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (10th ed.). Wiley.  
Texto clásico que introduce modelos básicos como el crecimiento exponencial, logístico y ecuaciones de primer orden.
- Zill, D. G. (2018). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (10<sup>a</sup> ed.). Cengage Learning.  
Enfoque aplicado con numerosos ejemplos de modelado y resolución paso a paso.

## Capítulo 2.

### gracias

#### 2.1. ¡Gracias por llegar hasta aquí!

Querido lector,

Hoy cierras un capítulo importante: has demostrado disciplina, ambición y la valentía de adentrarte en un tema que transforma tu manera de ver la ciencia y la ingeniería.

Las **ecuaciones diferenciales y la programación** que exploraste no son solo teoría: son herramientas para abrir puertas, resolver problemas reales y avanzar en tu vida profesional.

Este es apenas el comienzo. Ahora tienes las bases para construir soluciones que marquen la diferencia.

---

##### 2.1.0.1. Recuerda

**El futuro pertenece a quienes se atreven a construirlo con conocimiento.**

---

Con gratitud y admiración

**Manuel Alejandro Vivas Riverol** Equipo: <http://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com>