Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(3,3)$ și M, mijlocul segmentului AB. Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.

5p **6.** Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a & 2-2a\\ 1-a & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 2=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m<n$, pentru care $m\circ n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\left|f(x)-f(y)\right|\leq 1$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.

1. $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) =$

$= 4 - \cancel{6\sqrt{3}} + \cancel{6\sqrt{3}} - 3$

$= 4 - 3$

$= 1$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ f(x) = 5x - 3$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ g(x) = 2x + 3$

$f(a) = g(a)$

$a = ?$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = 5a - 3 \\ g(a) = 2a + 3 \\ f(a) = g(a) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 5a - 3 = 2a + 3 \\ 3a = 6 \\ a = \frac{6}{3}; \ a = 2. \end{array}$$

3. $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$

$2^{2x+1} \cdot 2^3 = 2^0$

$2^{2x+1+3} = 2^0$

$2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$x = \frac{-4}{2}; \ x = -2$

4. $A = \{3, 4, 5, 6\}$

$\overline{ab}, \ a \neq b$

$$\left.\begin{array}{ll} a \in \{3, 4, 5, 6\} & 4 \text{ nr} \\ b \in \{4, 5, 6\} & 3 \text{ nr} \end{array}\right| \Rightarrow 12 \text{ nr.}$$

5. $A(4,0)$

$B(0,2)$

$C(3,3)$

M – mij AB

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \; ; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

$M(2,1)$

$$MO = \sqrt{(x_O - x_M)^2 + (y_O - y_M)^2}$$

$$MO = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$MO = \sqrt{5}$$

$$MC = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2}$$

$$MC = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

$$MC = \sqrt{5}$$

$$MO = MC = \sqrt{5}$$

6. $E(x) = 2\sin x \cdot \sin 2x - \cos x$

$x = \frac{\pi}{6}$

$$E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 30 \cdot \sin 60 - \cos 30$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} - {}^{2)}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$= 0.$$

SUBIECTUL II

1. $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$

a) $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3 - 2$

$= 1$

b) $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & +3a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3a - 2a & -6a + 6a \\ a - a & -2a + 3a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(3-2) & a(-6+6) \\ 0 & a(-2+3) \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow aI_2.$$

c) $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 3 + \cancel{a^2} & 2 - \cancel{2a^2} \\ 1 - \cancel{a^2} & 1 + \cancel{3a^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3a + \cancel{a^2} & 2a - \cancel{2a^2} \\ a - \cancel{a^2} & a + \cancel{3a^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 3a & 2 - 2a \\ 1 - a & 1 + a \end{pmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 - 3a & 2 - 2a \\ 1 - a & 1 + a \end{vmatrix} =$$

$(3-3a)(1-a) - (2-2a)(1-a)$

$3(1-a)(1-a) - 2(1-a)(1-a)$

$3(1-a)^2 - 2(1-a)^2$

$(1-a)^2 \geq 0 \ \forall \ a \in \mathbb{R}.$

2. a) $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$

$0 \circ 2 = 0 - 0 + 3 \cdot 2^2$

$0 \circ 2 = 12$

b) $2x \circ x = (2x)^2 - 8x^2 + 3x^2$

$= 4x^2 - 8x^2 + 3x^2$

$= -x^2$

$2x \circ x = -1$

$\Rightarrow -x^2 = -1$

$x = \pm 1$

c) $m \circ n = m^2 - 4mn + 3n^2$

$m^2 - 2mn + n^2 - 2mn + 2n^2$

$(m-n)^2 - 2n(m+n) = 3$

$(m-n)(m-n-2n) = 3$

$(m-n)(m-3n) = 3$

$m < n \Rightarrow S = (-4,-1); (0,1)$

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 5 + \frac{4x - 4}{x^2}$$

a) $$f'(x) = \frac{(4x-4)' \cdot x^2 - (4x-4)(x^2)'}{x^4}$$

$$= \frac{4x^2 - 8x^2 + 8x}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x}(-4x + 8)}{x^{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{4(2 - x)}{x^3}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} 5 + \frac{4x - 4}{x^2} = 5 + \frac{1}{\infty} = 5 + 0 = 5$$

c)

x	0		2		∞
$f'(x)$		$+ + + + +$	0	$- - - - - -$	
$f(x)$		$\nearrow$	6	$\searrow$	5

$f'(x) = 0$

$x = 2$

$f(2) = 5 + 1$

$= 6$

$f(1) = 5$

$x \in [1, \infty)$

$f(x) \in [6, 5]$

$5 \leq f(x) \leq 6 \quad |f(x) - f(y)| \leq 1$

2. $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = 3x^2 + 4\ln x$

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(3x^2 + \cancel{4\ln x} - \cancel{4\ln x}\right) dx$

$\displaystyle\int_1^2 3x^2\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}\Big|_1^2 = x^3\Big|_1^2 = 8-1$

$= 7$

b) $\displaystyle\int_1^e x\left(\cancel{3x^2} + 4\ln x - \cancel{3x^2}\right) dx$

$\displaystyle = \int_1^e 4x\ln x\,dx = 2x^2\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = 4x \qquad g(x) = \dfrac{4x^2}{2}$

$= 2x^2\ln x\Big|_1^e - x^2\Big|_1^e$

$= 2e^2 - e^2 + 1$

$= e^2 + 1$

c) $F''(x) = f'(x)$

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,f'(x) = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^{\sqrt{e}} = \frac{(3e+2)^2 - 3^2}{2} = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$