Entropia e Teoria dell'Informazione

Laureando: Claudio Meggio
Realtore: Sonia Mazzucchi

Anno Accademico
2016/2017

Università degli Studi di
Trento

Indice

Introduzione

Esempio

i. Quando vado in palestra mi alleno
ii. Il vincitore delle prossime elezioni sarà Claudio Baglioni
iii. QUER W LKS E W

Esempio

i. Quando vado in palestra mi alleno
ii. Il vincitore delle prossime elezioni sarà Claudio Baglioni
iii. QUER W LKS E W

Definizione Informazione

In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiamo la funzione **informazione** $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ come:

$$I(E) = -\log_a(\mathbb{P}(E)).$$

Definizione:

U viene detta **misura di incertezza** se soddisfa le seguenti:

- $U(X)$ è un massimo quando ha distribuzione uniforme
- $U(p_1 ... p_n, 0) = U(p_1 ... p_n)$
- $U(p_1 .... p_n)$ è continua per tutti i suoi argomenti.
- Presa Y variabile casuale allora
  $U(X, Y) = U_X(Y) + U(X)$
  dove $U_X(Y) = \sum_{j=1}^{n} p_j U(Y|X = j)$

Entropia

Definizione Entropia

Data X variabile casuale definiamo la sua **Entropia** come:

$$H(X) := \mathbb{E}(I(X)) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log(p_j)$$

Teorema:

$U(X)$ è una misura di incertezza se e solo se

$$U(X) = KH(X), \quad K > 0$$

Proprietà

Teorema

$$H(X) \leq \log(n)$$

Con l'uguaglianza sse X ha distribuzione uniforme

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} H(x) - \log(n) &= -\frac{1}{ln(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j ln(p_j) + ln(n)\right) \\ &= -\frac{1}{ln(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j (ln(p_j) + ln(n))\right) \\ &\leq \frac{1}{ln(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{1}{p_j n} - 1\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Entropia Condizionata

Definizione Entropia Condizionata

$$H_X(Y) := \mathbb{E}[H.(Y)] = \sum_{j=1}^{n} p_j H_j(Y)$$

dove $H_j(Y) := -\sum_{k=1}^{m} p_j(k) \log(p_j(k))$

Entropia Condizionata

Definizione Entropia Condizionata

$$H_X(Y) := \mathbb{E}[H.(Y)] = \sum_{j=1}^{n} p_j H_j(Y)$$

dove $H_j(Y) := -\sum_{k=1}^{m} p_j(k) \log(p_j(k))$

Disuguaglianza di Shannon

$$H_X(Y) \leq H(Y)$$

Dimostrazione:

Disugauglianza di Jensen con

$$\lambda_j = p_j \quad f(x) = x \log(x) \quad x_j = p_j(k)$$

Codici

Canale di Comunicazione

$$SORGENTE \rightarrow CANALE \rightarrow RICEVENTE$$

Definizione Capacità

Viene definita capacità di un canale la quantità

$$\begin{aligned} C := & \max_{\{p_1 \dots p_n\}} I(S, R) \\ = & \max_{\{p_1 \dots p_n\}} (H(R) - H_S(R)) \end{aligned}$$

Errore

Probabilità media d'errore

$$P(E) = \sum_{i=1}^{N} P_{x_j}(E) p_j$$

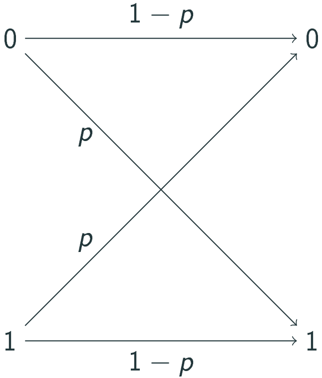
Dove E è l'evento 'viene inviato x_i, ma suppongo sia stato inviato x_j' con $i \neq j$

Distanza di Hamming

Numero di simboli che differiscono nelle due parole

Canale binario simmetrico

Sorgente S distribuita come una variabile casuale di Bernoulli di parametro ϵ



Capacità canale binario simmetrico:

$$C = 1 - H_b(p)$$

Velocità di Trasmissione

Viene detta **velocità di trasmissione** il numero di bits d'informazione che passano attraverso un canale

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Velocità

Velocità di Trasmissione

Viene detta **velocità di trasmissione** il numero di bits d'informazione che passano attraverso un canale

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

supponendo di ricevere

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

Velocità

Velocità di Trasmissione

Viene detta **velocità di trasmissione** il numero di bits d'informazione che passano attraverso un canale

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & {\color{red}1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

supponendo di ricevere

$$1 \quad 1 \quad {\color{red}0} \quad 1 \quad 1$$

Nel teorema di Shannon verranno codificate parole di lunghezza dV con parole di lunghezza d.
Il numero totale delle parole da codificare sarà $M = 2^{dV}$ e le parole codice corrispondenti verranno scelte con distribuzione uniforme.

Lemma 1

Per ogni fissato $\delta_1 > 0$, scelto d sufficientemente grande vale:

$$\mathbb{P}(A) \leq \delta_1$$

Lemma 2

Siano ρ e δ_2 due numeri reali non negativi e supponiamo che le parole del codice siano $M = 2^{d(C-\rho)}$ dove $C = 1 - H_b(p)$ è la capacità del canale allora, per d sufficientemente grande vale:

$$\mathbb{P}(B) \leq \delta_2$$

Teorema di Shannon

Dati $\delta, \rho > 0$ possiamo trovare un codice tale per cui se la velocità di trasmissione in un canale binario simmetrico è $V = C - \rho$ allora

$$\mathbb{P}(E) < \delta$$

Dimostrazione:

Ricordando che $E = A \cup B$, e quindi $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Conclusioni

- è possibile estendere il teorema a qualsiasi tipo di canale
- non costruttività del teorema
- teorema inverso

GRAZIE DELL'ATTENZIONE