Entropia e Teoria dell'Informazione

Claudio Meggio

Anno Accademico
2016/2017

Università degli Studi di
Trento

Indice

- Proprietà Informazione ed Entropia
- Codici
- Entropia Nelle catene di Markov
- Variabili casuali assolutamente continue

Introduzione

Esempio

i. Quando vado in palestra mi alleno
ii. Il vincitore delle prossime elezioni sarà Claudio Baglioni
iii. QUER W LKS E W

Esempio

i. Quando vado in palestra mi alleno
ii. Il vincitore delle prossime elezioni sarà Claudio Baglioni
iii. QUER W LKS E W

Definizione Informazione

In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiamo la funzione **informazione** $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ come:

$$I(E) = -\log_a(\mathbb{P}(E)).$$

Definizione:
U viene detta **misura di incertezza** se soddisfa le seguenti:

- $U(X)$ è un massimo quando ha distribuzione uniforme

- $U(p_1 ... p_n, 0) = U(p_1 ... p_n)$

- $U(p_1 .... p_n)$ è continua per tutti i suoi argomenti.

- Presa Y variabile casuale allora
  $U(X, Y) = U_X(Y) + U(X)$
  dove $U_X(Y) = \sum_{j=1}^{n} p_j U(Y|X = j)$

Definizione Entropia

Data X variabile casuale definiamo la sua **Entropia** come:

$$H(X) := \mathbb{E}(I(X)) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log(p_j)$$

Teorema:
$U(X)$ è una misura di incertezza se e solo se

$$U(X) = KH(X), \quad K > 0$$

Teorema

$$H(x) \leq \log(n)$$

Con l'uguaglianza sse X ha distribuzione uniforme

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} H(x) - \log(n) &= -\frac{1}{ln(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j ln(p_j) + ln(n)\right) \\ &= -\frac{1}{ln(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j (ln(p_j) + ln(n))\right) \\ &\leq \frac{1}{ln(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{1}{p_j n} - 1\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Entropia Condizionata

Definizione Entropia Condizionata

$$H_X(Y) := \mathbb{E}[H.(Y)] = \sum_{j=1}^{n} p_j H_j(Y)$$

dove $H_j(Y) := -\sum_{k=1}^{m} p_j(k) \log(p_j(k))$

Entropia Condizionata

Definizione Entropia Condizionata

$$H_X(Y) := \mathbb{E}[H.(Y)] = \sum_{j=1}^{n} p_j H_j(Y)$$

dove $H_j(Y) := -\sum_{k=1}^{m} p_j(k) \log(p_j(k))$

Disuguaglianza di Shannon

$$H_X(Y) \leq H(Y)$$

Dimostrazione:

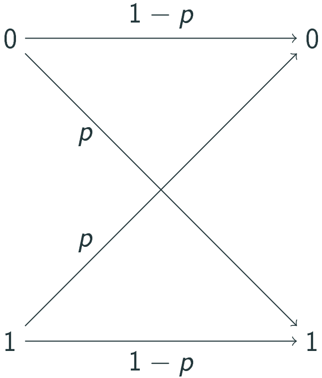
Disugauglianza di Jensen con

$$\lambda_j = p_j \quad f(x) = x \log(x) \quad x_j = p_j(k)$$

Codici

Canale Binario simmetrico

$$SORGENTE \rightarrow CANALE \rightarrow RICEVENTE$$



Definizione Capacità

Viene definita capacità di un canale la quantità

$$C := \max_{\{p_1 \ldots p_n\}} I(S, R)$$
$$= \max_{\{p_1 \ldots p_n\}} (H(R) - H_S(R))$$

Capacità canale simmetrico binario $C = 1 - H_S(R)$

Velocità

Velocità di trasmissione è definita come il numero di bits d'informazione che vengono trasmessi attraverso il canale. Nel nostro caso (un simbolo al secondo) la velocità è data da $I(R,S)$. (La velocità dipende quindi dalla distribuzione della variabile casuale)

Nel nostro caso si decide di codificare non singoli simboli ma intere parole di lunghezza dV con parole di lunghezza d (supporremo V $<$ 1). il numero totale delle parole da codificare è $M = 2^{dV}$ e le parole codice corrispondenti vengono scelte casualmente con una distribuzione uniforme (ognuna di queste ha probabilità $1/2^d$ di essere scelta). Il codice consiste quindi in una M-pla di possibili parole con d digits. Ognuno di tali codici ha probabilità $1/2^{Md}$. (questa sarebbe l'idea del random coding)

Errore

Probabilità media d'errore

$$P(E) = \sum_{i=1}^{N} P_{x_j}(E) p_j$$

Distanza di Hamming

Numero di simboli che differiscono nelle due Regola di decisione

da errore se ci sono più parole nella stessa sfera, oppure non ve ne sono

Lemma 1

Per ogni fissato $\delta_1 > 0$, scelto d sufficientemente grande vale:

$$\mathbb{P}(A) \leq \delta_1$$

Lemma 2

Siano ρ e δ_2 due numeri reali non negativi e supponiamo che le parole del codice siano $M = 2^{d(C-\rho)}$ dove $C = 1 - H_b(p)$ è la capacità del canale allora, per d sufficientemente grande vale:

$$\mathbb{P}(B) \leq \delta_2$$

Teorema di Shannon

Dati $\delta, \rho > 0$ possiamo trovare un codice tale per cui se la velocità di trasmissione in un canale binario simmetrico è $V = C - \rho$ allora

$$\mathbb{P}(E) < \delta$$

commenti

Conclusioni

FINE

GRAZIE DELL'ATTENZIONE