



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento Matematica

Corso di Laurea in
Matematica

ELABORATO FINALE

TITOLO

Sottotitolo (alcune volte lungo - opzionale)

Supervisore
Sonia Mazzucchi

Laureando
Claudio Meggio

Anno accademico 2017/2018

Ringraziamenti

...thanks to...

Indice

Sommario	2
1 Informazione ed Entropia per variabili casuali discrete	2
1.1 Informazione	2
1.2 Entropia	3
1.3 unicità dell'Entropia	4
1.4 Misc sull'entropia	4
2 Proin rhoncus a sapien in.	6
2.1 Cras in aliquam quam, et	6
2.1.1 Sed pulvinar placerat enim, a	6
2.2 Vivamus hendrerit imperdiet ex. Vivamus	6
3 Conclusioni	6
Bibliografia	7
A Titolo primo allegato	9
A.1 Titolo	9
A.1.1 Sottotitolo	9
B Titolo secondo allegato	10
B.1 Titolo	10
B.1.1 Sottotitolo	10

Sommario

« La mia più grande preoccupazione era come chiamarla. Pensavo di chiamarla informazione, ma la parola era fin troppo usata, così decisi di chiamarla incertezza. Quando discussi della cosa con John Von Neumann, lui ebbe un'idea migliore. Mi disse che avrei dovuto chiamarla entropia, per due motivi: "Innanzitutto, la tua funzione d'incertezza è già nota nella meccanica statistica con quel nome. In secondo luogo, e più significativamente, nessuno sa cosa sia con certezza l'entropia, così in una discussione sarai sempre in vantaggio » (Claude Shannon)

1 Informazione ed Entropia per variabili casuali discrete

1.1 Informazione

Fondamentali in questa tesi saranno i concetti di Informazione ed entropia.

Bisogna anzitutto specificare che in Probabilità il significato di Informazione ha un connotato diverso da quello della lingua parlata. Condideriamo ad esempio le seguenti frasi:

- i. Quando vado in palestra mi alleno
- ii. Il vincitore delle prossime elezioni politiche sarà Claudio Baglioni
- iii. QUER W LKS E W

istintivamente diremo che la frase contenente maggior informazione è (ii) in quanto contiene un'informazione totalmente nuova seguita poi da (i) ed in fine (iii) la quale non avendo significato non conterrà nessuna informazione.

Questa scala però tiene conto sia del significato della frase sia della quantità di *sorpresa* che porta, in questo senso (iii) non ha significato, ma porta *sorpresa*, mentre (ii) contiene sia significato che sorpresa.

Nel mondo della matematica si è visto che il concetto di significato è difficile da esprimere e si è dunque preferito puntare sul concetto di *sorpresa* per esprimere il significato di *informazione*.

Per definire in maniera rigorosa il nostro concetto di **informazione** poniamoci in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dati due eventi E_1, E_2 vogliamo che la nostra funzione d'informazione I soddisfi alcuni criteri:

1. $I(E) \geq 0$ per ogni $E \in \mathcal{F}$
2. se $\mathbb{P}(E_1) \leq \mathbb{P}(E_2)$ allora $I(E_1) \geq I(E_2)$
3. se E_1, E_2 sono indipendenti allora $I(E_1 \cup E_2) = I(E_1) + I(E_2)$

Con queste richieste ci viene naturalmente in mente una funzione che le soddisfa.

Definizione 1.1.1. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiamo la funzione $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ come:

$$I(E) = -\log_a(\mathbb{P}(E)). \quad (1.1.1)$$

dove a è una costante positiva (nel libro viene moltiplicato per K , ma tale costante è inutile dato che già scegliere la base coincide col moltiplicare per una costante $\log_a(x) = \frac{\log_b(y)}{\log_b(a)}$).

Si verifica facilmente che la funzione I così definita rispetta le proprietà che preposte, l'unico problema nasce per un evento E tale che $\mathbb{P}(E) = 0$ in questo caso $I(E) = \infty$, questa occorrenza può essere interpretata come l'incapacità di ottenere informazioni da un evento impossibile. La funzione *Informazione* possiede inoltre la desiderabile proprietà di essere nulla qualora la probabilità di un evento sia 1.

Essendo questa funzione sarà spesso associata a codici risulterà comodo scegliere 2 come base del logaritmo in questo modo supponendo di avere una variabile casuale X con distribuzione di Bernoulli con parametro $p = \frac{1}{2}$ abbiamo che

$$I(X = 0) = I(X = 1) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (1.1.2)$$

Per questo d'ora in avanti con \log si intenderà \log_2 .

1.2 Entropia

Il secondo concetto fondamentale è quello di *entropia*.

Data una variabile casuale discreta X a valori $\{x_1 \dots x_n\}$ e con legge di probabilità $\{p_1 \dots p_n\}$ non si può sapere a priori che valore assumerà X e di conseguenza quanta informazione verrà inviata. Definiamo quindi l'*entropia*.

Definizione 1.2.1. si dice **entropia** di una variabile casuale discreta X il valore

$$H(X) := \mathbb{E}(I(X)) = -\sum_{j=1}^n p_j \Phi(p_j) \quad (1.2.1)$$

dove

$$\Phi(p) := \begin{cases} \log_2(p) & \text{se } p \neq 0 \\ 0 & \text{se } p = 0 \end{cases}$$

Per convincersi della sensatezza di questa definizione si immagini di voler scommettere con una moneta modificata come segue:

1. esce testa con probabilità $p_1 = 0.95$
2. esce testa con probabilità $p_2 = 0.6$
3. esce testa con probabilità $p_3 = 0.5$

usando la definizione di Entropia otteniamo:

1. $H_1(p_1) = 0.286$
2. $H_2(p_2) = 0.971$
3. $H_3(p_3) = 1$

ovviamente nel primo caso la probabilità di predire il risultato corretto è molto alta dato che la moneta è pesantemente modificata e infatti il sistema avrà una bassa entropia, nel secondo caso l'entropia aumenta nel terzo l'indecisione è massima e l'entropia di conseguenza ha anch'essa massimo.

Per convincersi di quanto detto in maniera più matematica si ha il seguente teorema:

Teorema 1.2.1. Sia X una variabile casuale discreta allora vale:

1. $H(X) \geq 0$ e $H(X) = 0$ se e solo se esiste un valore X , x_1 t.c. $\mathbb{P}(x_1) = 1$
2. $H(X) \leq \log(n)$ e l'uguaglianza varrà solo quando X ha distribuzione uniforme

D'ora in avanti con il simbolo H_n si indicherà l'entropia di una variabile casuale uniforme discreta con immagine di dimensione n , quindi

$$H_n = \log(n) \quad (1.2.2)$$

1.3 unicità dell'Entropia

Si può dimostrare che la scelta della funzione di entropia come *misura di incertezza* è unica a meno di una costante moltiplicativa. Inanzitutto definiamo la *misura di incertezza*:

Definizione 1.3.1. sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e X variabile casuale di legge $\{p_1, \dots, p_n\}$ la funzione U viene detta **misura di incertezza** se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $U(X)$ è un massimo quando ha distribuzione uniforme
2. se Y è un'altra variabile casuale allora $U(X, Y) = U_x(Y) + U(X)$
3. $U(p_1, \dots, p_n, 0) = U(p_1, \dots, p_n)$
4. $U(p_1, \dots, p_n)$ è continua per tutti i suoi argomenti.

c'è un teorema....

1.4 Misc sull'entropia

Definizione 1.4.1. Siano X e Y due variabili casuali definite sullo stesso spazio di probabilità, definiamo la loro **entropia congiunta** $H(X, Y)$ come:

$$H(X, Y) := - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(p_{jk}) \quad (1.4.1)$$

dove con p_{jk} intendiamo $P(X = j, Y = k)$

Osserviamo subito che $H(X, Y) = H(Y, X)$.

Può essere interessante capire come si comporta l'entropia nel caso le variabili in considerazione siano dipendenti, per fare ciò definiremo l'*entropia condizionata*, prima però un pò di notazione: chiameremo con $p_j(k)$ la probabilità condizionata che $Y = k$ sapendo che $X = j$.

Definizione 1.4.2. La funzione $H_j(Y)$ sarà detta **entropia condizionale di Y data $X = j$** dove

$$H_j(Y) := - \sum_{k=1}^m p_j(k) \log p_j(k) \quad (1.4.2)$$

prendiamo una variabile casuale X di legge di probabilità $\{p_1, \dots, p_n\}$ ossiamo considerare ora la variabile casuale $H.(Y)$ che avrà immagine $\{H_1(Y), \dots, H_n(Y)\}$ e legge di probabilità $\{p_1, \dots, p_n\}$, $H.(Y)$ sarà quindi funzione di X .

Definizione 1.4.3. definiamo l'**entropia condizionale di Y data X** , $H_X(Y)$ come:

$$H_X(Y) := \mathbb{E}[H.(Y)] = \sum_{j=1}^n p_j H_j(Y) \quad (1.4.3)$$

Lemma 1.4.1.

$$H_X(Y) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(p_j(k)) \quad (1.4.4)$$

Dimostrazione. come sostituendo in 1.4.3, 1.4.2 otteniamo

$$H_X(Y) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_j p_j(k) \log(p_j(k)) \quad (1.4.5)$$

Ricordando che

$$p_j(k) = \mathbb{P}(Y = k | X = j) \text{ e } p_j = \mathbb{P}(X = j)$$

otteniamo che

$$p_j p_j(k) = \mathbb{P}(X = j, Y = k) = p_{jk}$$

e possiamo concludere. \square

Lemma 1.4.2. *se X e Y sono indipendenti allora vale:*

$$H_X(Y) = H(Y) \quad (1.4.6)$$

Dimostrazione. supponiamo che la legge di probabilità di Y sia $\{q_1 \dots q_m\}$ allora ci basterà notare che nel caso in cui X e Y sono indipendenti $p_j(k) = \mathbb{P}(Y = k | X = j) = \mathbb{P}(Y = k) = q_k$ e dunque 1.4.5 diventa

$$H_X(Y) = - \sum_{k=1}^m q_k \log(q_k) \sum_{j=1}^n p_j = - \sum_{k=1}^m q_k \log(q_k) 1 = H(Y)$$

\square

Teorema 1.4.1. *Date due variabili casuali X, Y vale:*

$$H(X, Y) = H(X) + H_X(Y). \quad (1.4.7)$$

Dimostrazione. sapendo che $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ quindi $p_{jk} = p_j p_j(k)$ sostituendo direttamente nella def di entropia congiunta 1.4.1 otteniamo

$$H(X, Y) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(p_j p_j(k)) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(p_j(k)) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(p_j)$$

possiamo concludere ricordando che $\sum_{k=1}^m p_{jk} = p_j$ \square

Corollario 1.4.1. *se X e Y sono indipendenti allora vale:*

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \quad (1.4.8)$$

Dimostrazione. basta applicare 1.4.6 al teorema precedente \square

Definizione 1.4.4. *date due variabili casuali X, Y definiamo **mutua informazione di X e Y***

$$I(X, Y) := H(Y) - H_X(Y) \quad (1.4.9)$$

Notiamo che $H_X(Y)$ è l'informazione contenuta in Y che non è contenuta in X e quindi l'informazione di Y contenuta in X sarà $H(Y) - H_X(Y) = I(X, Y)$

Teorema 1.4.2. *Per siano X e Y due variabili casuali con legge di probabilità rispettivamente legge di probabilità $\{p_1 \dots p_n\} \{q_1 \dots q_m\}$*

1. $I(X, Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log\left(\frac{p_{jk}}{p_j q_k}\right)$
2. $I(X, Y) = I(Y, X)$
3. *se X e Y sono indipendenti allora $I(X, Y) = 0$*

Dimostrazione. si proceda come segue:

1. sempre ricordando che $\sum_{k=1}^m p_{jk} = p_j$ possiamo scrivere

$$H(Y) = - \sum_{k=1}^m q_k \log(q_k) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(q_k)$$

e dunque per ?? otteniamo

$$I(X, Y) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log(q_k) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p_{jk} \log p_j(k)$$

2. immediato da 1.

3. semplicemente ricordando che se X e Y sono indipendenti $H_X(Y) = H(Y)$

□

2 Proin rhoncus a sapien in.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

2.1 Cras in aliquam quam, et

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

2.1.1 Sed pulvinar placerat enim, a

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

2.2 Vivamus hendrerit imperdiet ex. Vivamus

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget

sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

3 Conclusioni

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

Bibliografia

- [1] Ict business. <http://www.ictbusiness.it/>. ultimo accesso 15/06/2015.
- [2] Dollimore J. e Kindberg T Coulouris G. F. *Distributed Systems: concepts and Design*. Addison-Wesley, second edition edition, 1994.
- [3] Triggs B. Dalal N. Histograms of oriented gradients for human detection. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 886–893, San Diego, USA, 20-26 June 2005.
- [4] Donoho D. L. Compressed sensing. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 52(4):1289–1306, 2006.

Allegato A Titolo primo allegato

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

A.1 Titolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

A.1.1 Sottotitolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

Allegato B Titolo secondo allegato

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

B.1 Titolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.

B.1.1 Sottotitolo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec sed nunc orci. Aliquam nec nisl vitae sapien pulvinar dictum quis non urna. Suspendisse at dui a erat aliquam vestibulum. Quisque ultrices pellentesque pellentesque. Pellentesque egestas quam sed blandit tempus. Sed congue nec risus posuere euismod. Maecenas ut lacus id mauris sagittis egestas a eu dui. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Pellentesque at ultrices tellus. Ut eu purus eget sem iaculis ultricies sed non lorem. Curabitur gravida dui eget ex vestibulum venenatis. Phasellus gravida tellus velit, non eleifend justo lobortis eget.