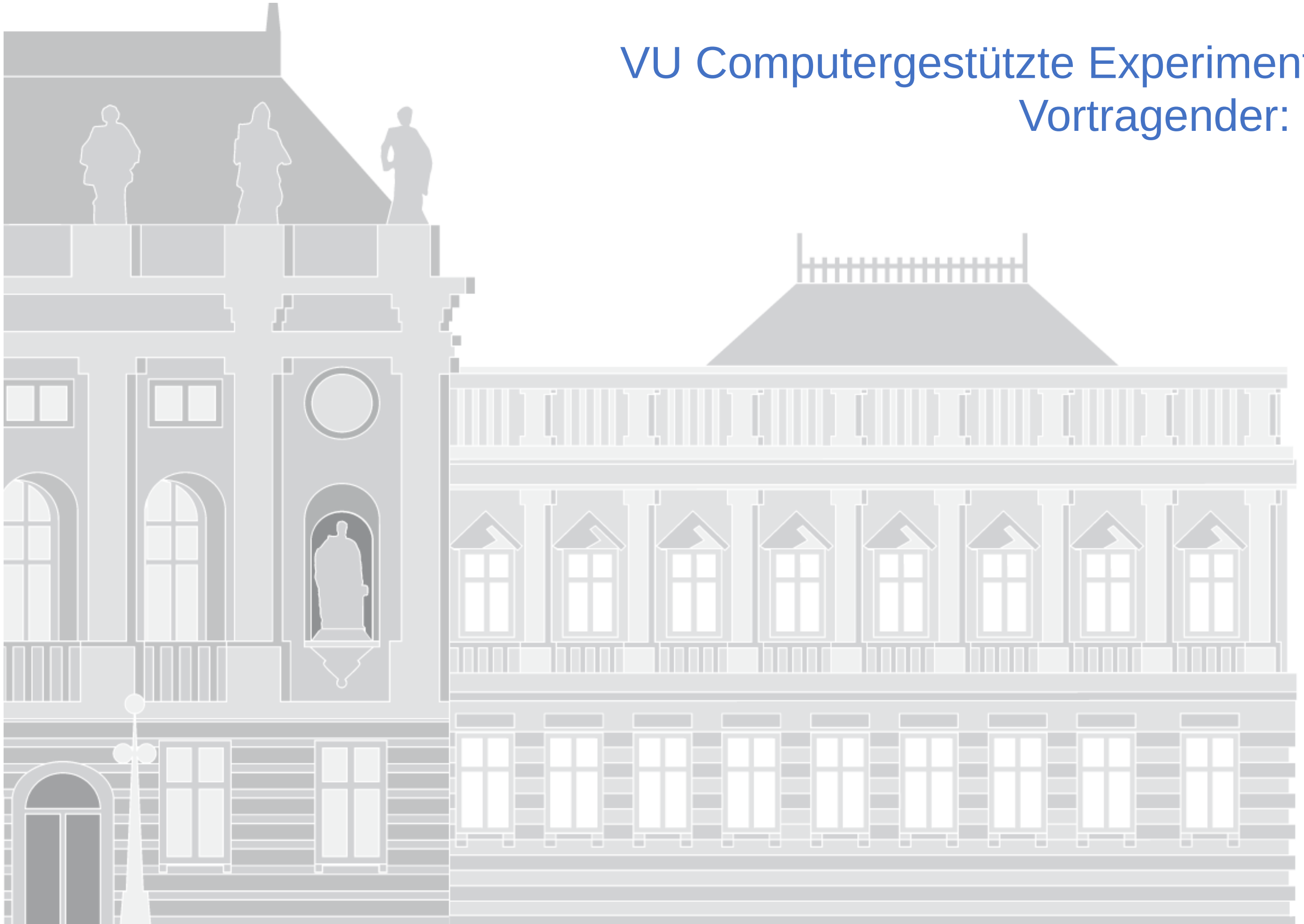
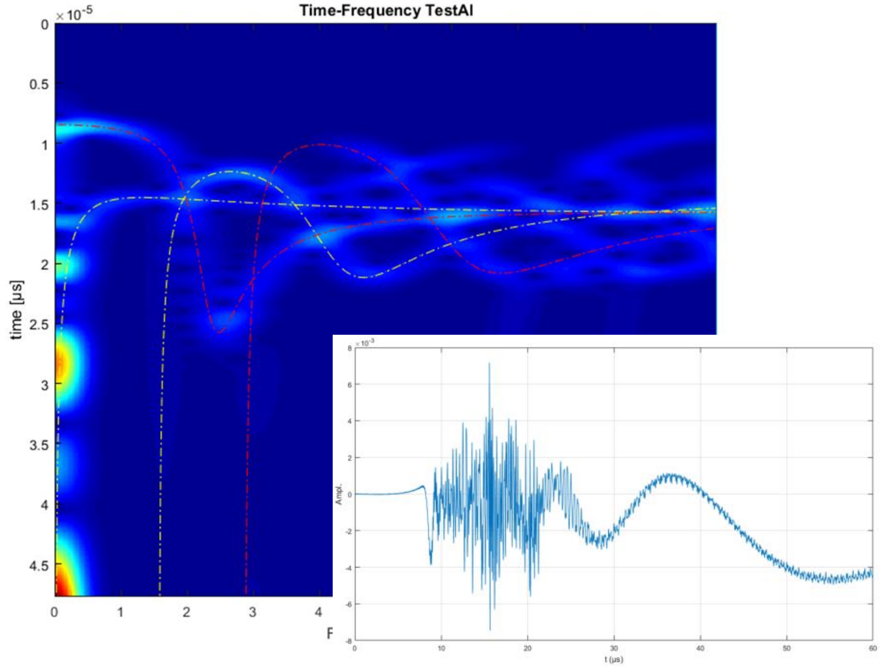
NAWI Graz
Natural Sciences

UNIVERSITÄT GRAZ
UNIVERSITY OF GRAZ
Institut für Physik



Filterung, Signal- und Bildanalyse

VU Computergestützte Experimente und Signalauswertung SS 2023
Vortragender: Robert Nuster



Motivation: Analogie-Kochrezept

Was macht einen guten/schlechten Smoothie aus?

- Zutaten (Obst, Gemüse)
- Menge (Masse, Anzahl)
- Reihenfolge / Dauer
- Verarbeitung (geschnitten, gemixt)
- Verunreinigung
- …..

Motivation

Signalverlauf:

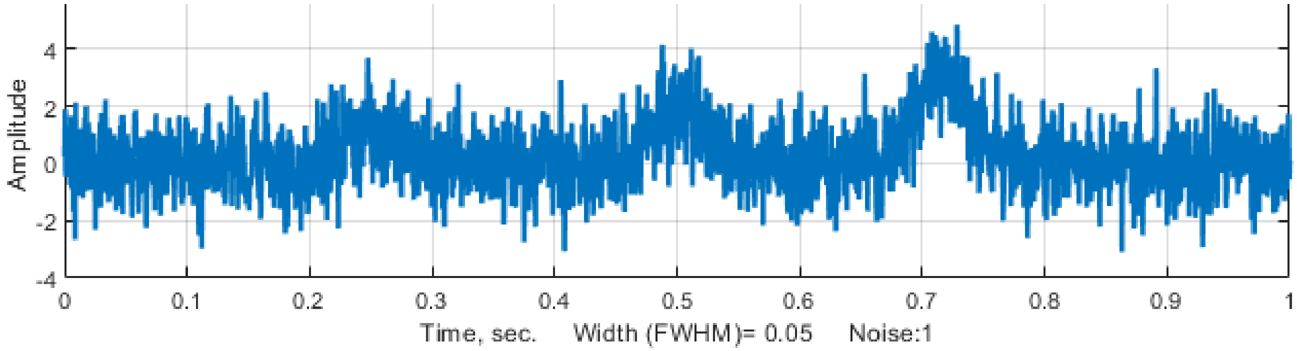


Bild:

Jean Baptiste
Joseph Fourier
(1768-1830)

Was macht eine gute/schlechte Signal-/Bildqualität aus?

- Schwingungsfrequenzen (zeitlich/räumlich)
- Schwingungsamplituden
- “Reihenfolge / Dauer”
- “Verarbeitung” (Sampling)
- Verunreinigung->Rauschen
- …..

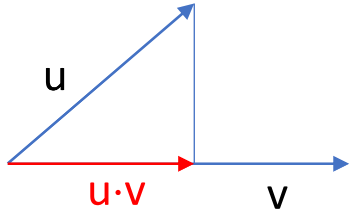
Fourieranalyse

Definition der kontinuierlichen 1D-Fouriertransformation (FT):

Hintransformation: ○—● $$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) \cdot dt$$

Rücktransformation: ●—○ $$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) \cdot d\omega$$

FT entspricht einem funktionalem Skalarprodukt!



- FT ist eine Integraltransformation die ein Signal in ein kontinuierliches Spektrum zerlegt.
- Das Spektrum entspricht der Sprektralfunktion *F(ω)* und ist im allgemeinen eine komplexe Funktion.
- f(t) muss eine integrierbare Funktion sein.

Fourieranalyse

Eigenschafgen der FT:

cos-Transformation

sin-Transformation

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\exp(-i\omega t)\cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)\cdot dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)\cdot dt = \operatorname{Re}\hat{F}(\omega) + i\operatorname{Im}\hat{F}(\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)\cdot\exp(i\omega t)\cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{F}(\omega)\right|\cdot\exp(i\varphi)\cdot\exp(i\omega t)\cdot d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\operatorname{Re}\hat{F}(\omega)\cdot\cos(\omega t) + \operatorname{Im}\hat{F}(\omega)\cdot\sin(\omega t))\cdot d\omega, \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{F}(\omega)}{\operatorname{Re}\hat{F}(\omega)}$$

Wichtig: Jede Funktion lässt sich in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen!

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= f_g(t) + f_u(t) \\ f_g(t) &= \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(-t) \\ f_u(t) &= \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(-t) \end{aligned}\right\}$$

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$$

$$\hat{F}(\omega) = \operatorname{Re}\hat{F}(\omega) + i\operatorname{Im}\hat{F}(\omega)$$

Wichtige Zusammenhänge der Fouriertransformation

Linearitätstheorem / Superpositionsprinzip:

$$a\cdot f(t)+b\cdot g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a\cdot F(\omega)+b\cdot G(\omega)$$

Skalierungssatz:

$$f(a\cdot t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Eine Streckung (Stauchung) der Zeitachse bewirkt eine Stauchung (Streckung) der Frequenzachse.

Fouriertransformation von Ableitungen:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (i\omega)^n F(\omega)$$

1. Verschiebungssatz:

$$f(t-a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)\cdot\underbrace{\exp(-i\,\omega\,a)}_{\text{Oszillationsfaktor im Frequenzbereich}}$$

Verschiebung im Zeitbereich

2. Verschiebungssatz:

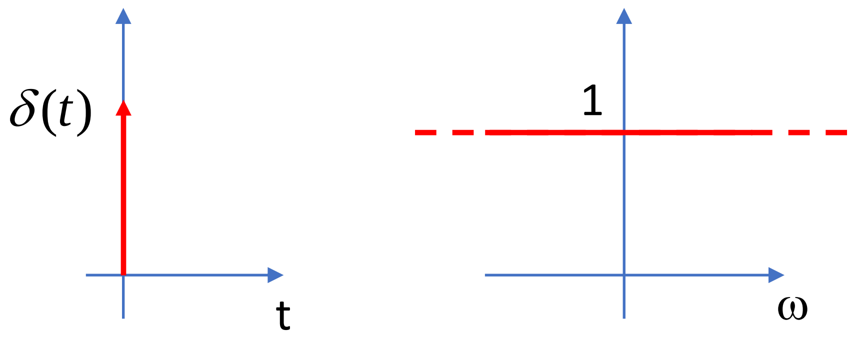
$$f(t)\cdot\underbrace{\exp(-i\omega_0 t)}_{\text{Oszillationsfaktor im Zeitbereich}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega-\omega_0)$$

Verschiebung im Frequenzbereich

Eigenschaften der FT: Extrem Fälle

FT eines Impulsstoß (Dirac-Puls):

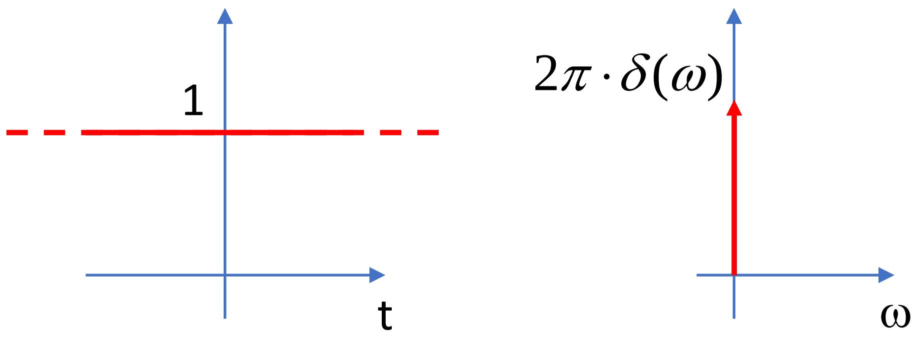
$$f(t) = \delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left|\hat{F}(\omega)\right| = 1$$



- Benötigt alle Frequenzen mit Einheitsamplitude (“weißes Spektrum”)

FT einer Konstanten (Gleichspannung):

$$f(t) = 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left|\hat{F}(\omega)\right| = 2\pi \cdot \delta(\omega)$$

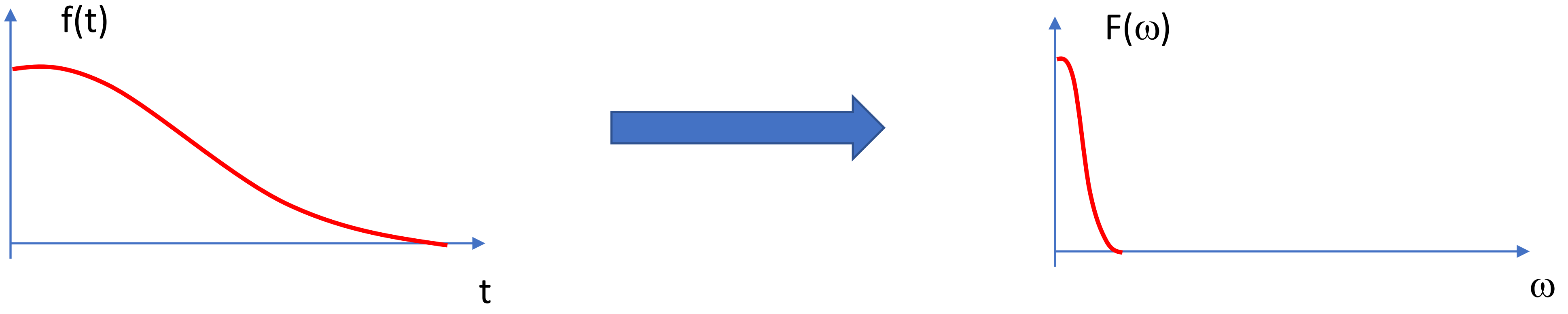


- Eine Konstante läßt sich mit einer einzigen Spektralkomponente bei ω =0 darstellen.

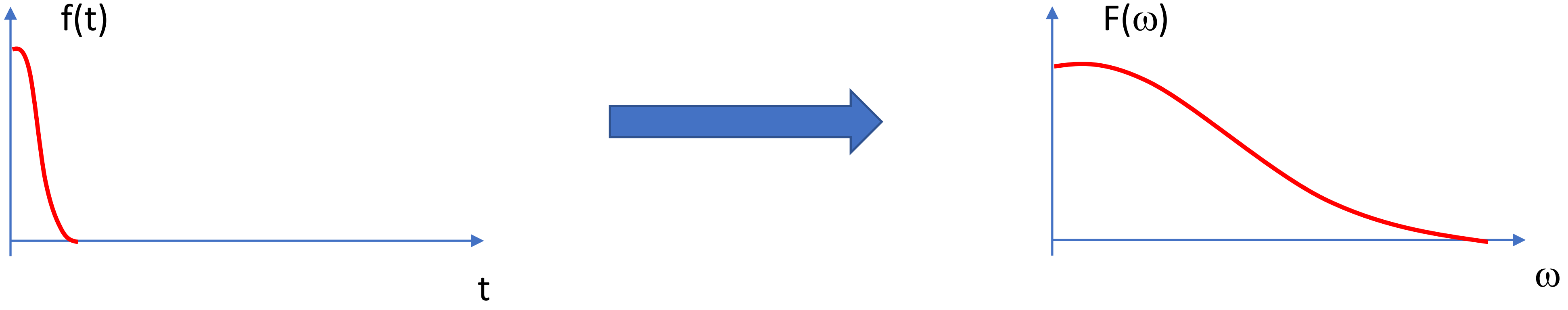
Eigenschaften der FT

<u>Allgemein gilt:</u>

- Eine langsam varierende Funktion hat nur niederfrequente spektrale Komponenten.



- Eine schnell veränderliche Funktion hat spektrale Komponenten über einen weiten Frequenzbereich.



FT wichtiger Funktionen: Rechteckfunktion

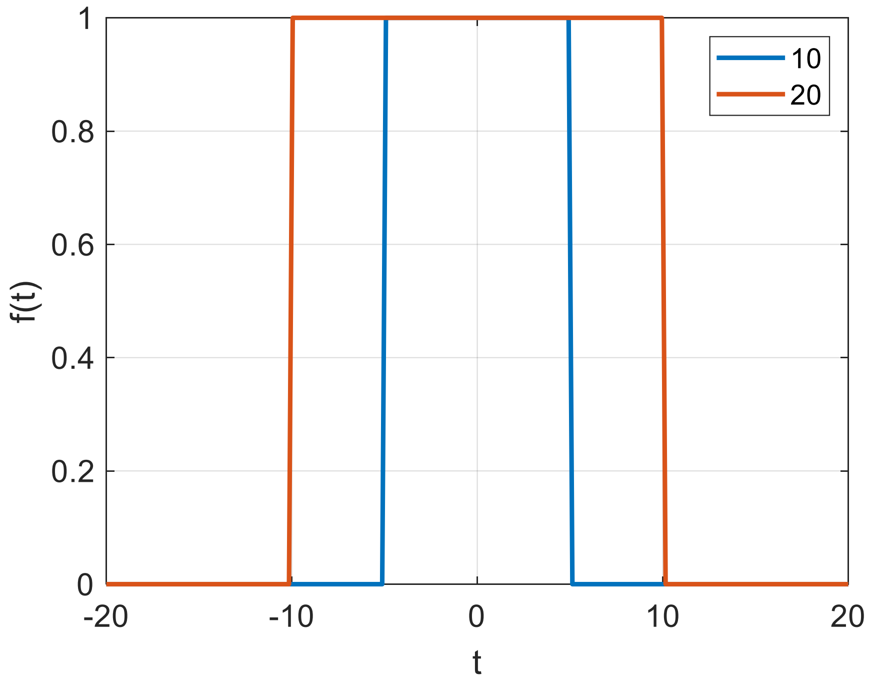
Rechteckpuls im Zeitbereich:

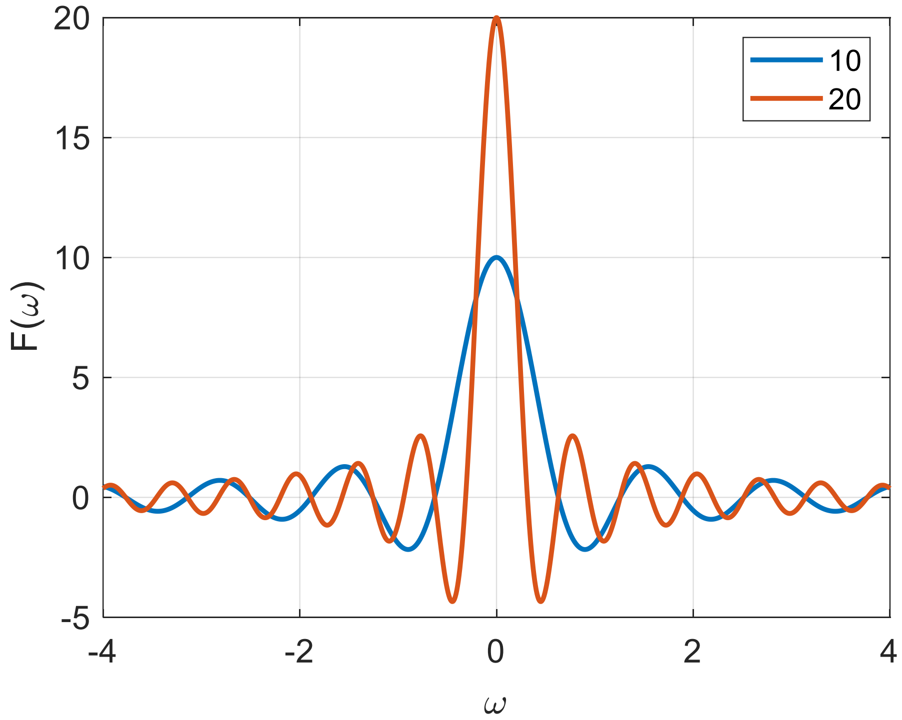
$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{für } -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

Sinc-Funktion im Frequenzbereich:

$$\hat{F}(\omega)=T\cdot\frac{\sin\left(\omega\cdot T/2\right)}{\omega\cdot T/2}=T\cdot\mathrm{sinc}(\omega\cdot T/2)$$



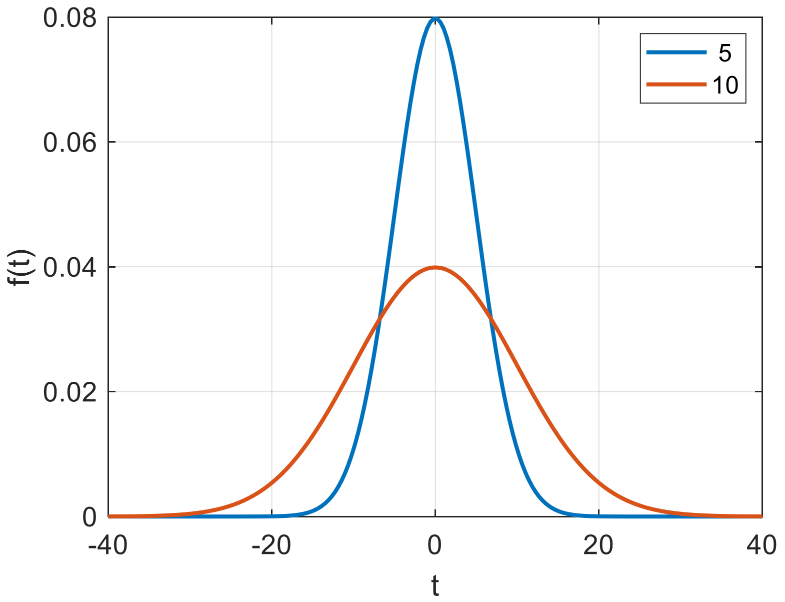


FT wichtiger Funktionen: normierte Gaußfunktion

Gaußfunktion im Zeitbereich:

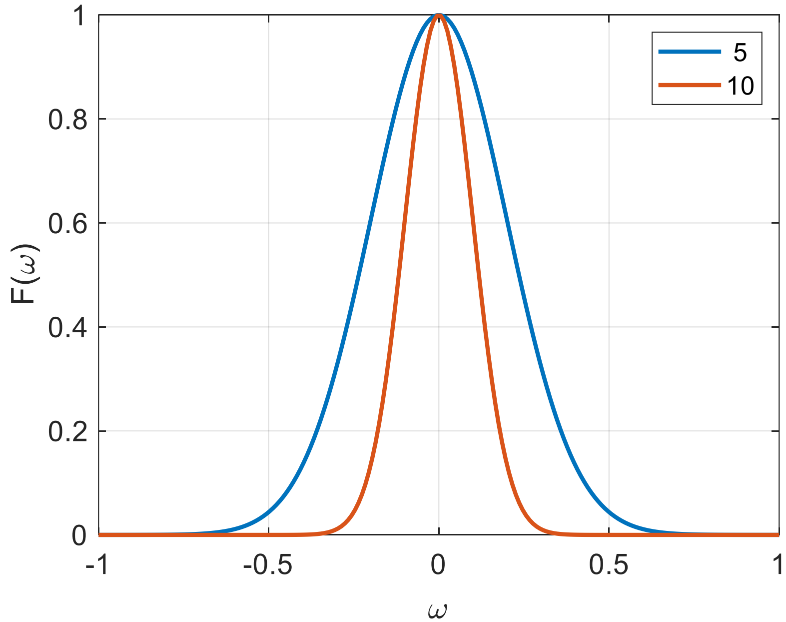
$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}\right)$$

$$2\sigma = \sqrt{2\ln 2} \cdot FWHM$$



Gaußfunktion im Frequenzbereich:

$$\hat{F}(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)$$



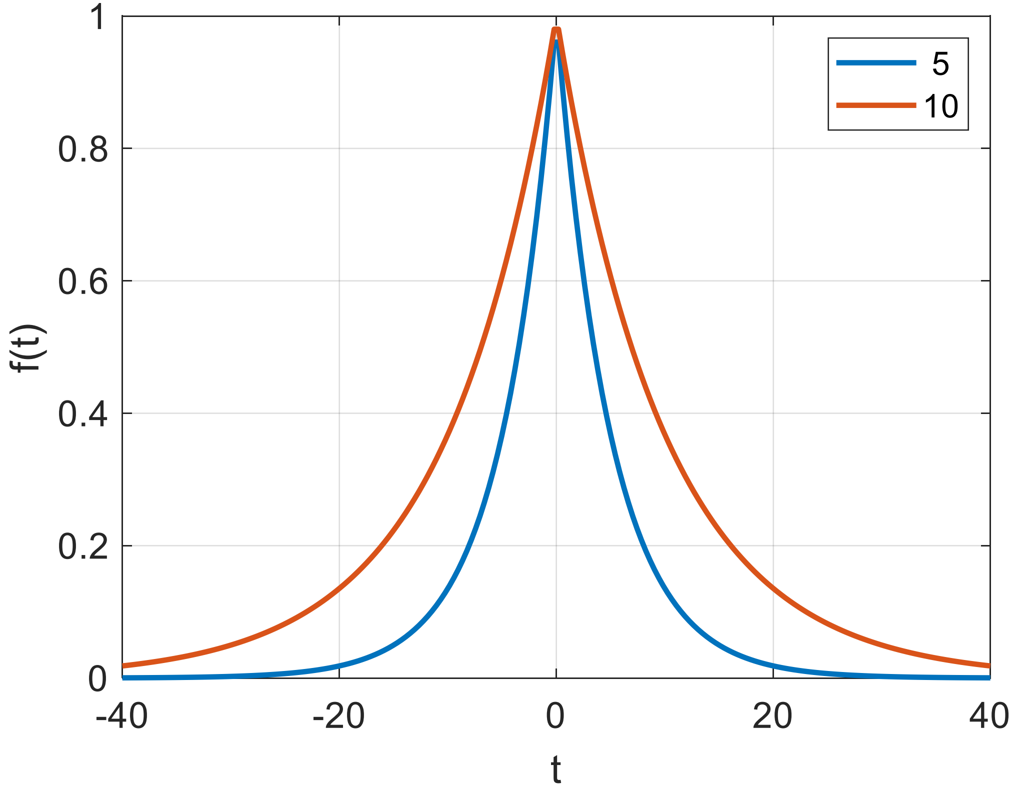
FT wichtiger Funktionen: beidseitige Exponentialfuktion

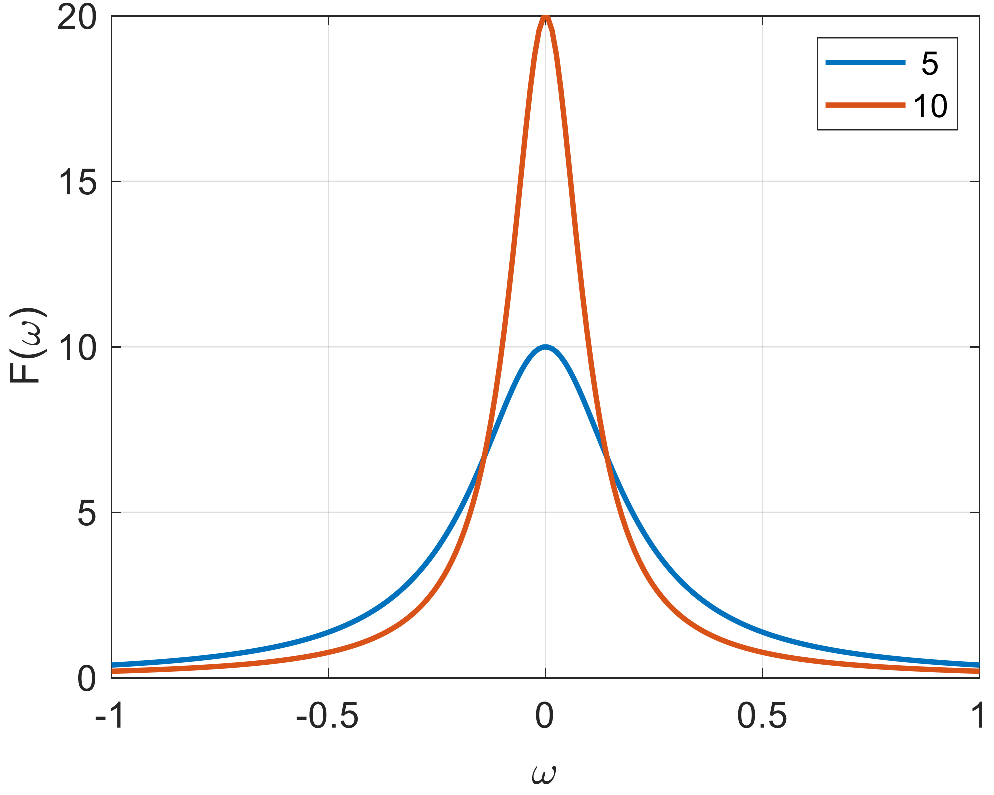
<u>Exponentialfuktion im Zeitbereich:</u>

$$f(t) = \exp\left(-|t|/\tau\right)$$

<u>Lorentzfunktion im Frequenzbereich:</u>

$$\hat{F}(\omega) = \frac{2\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$





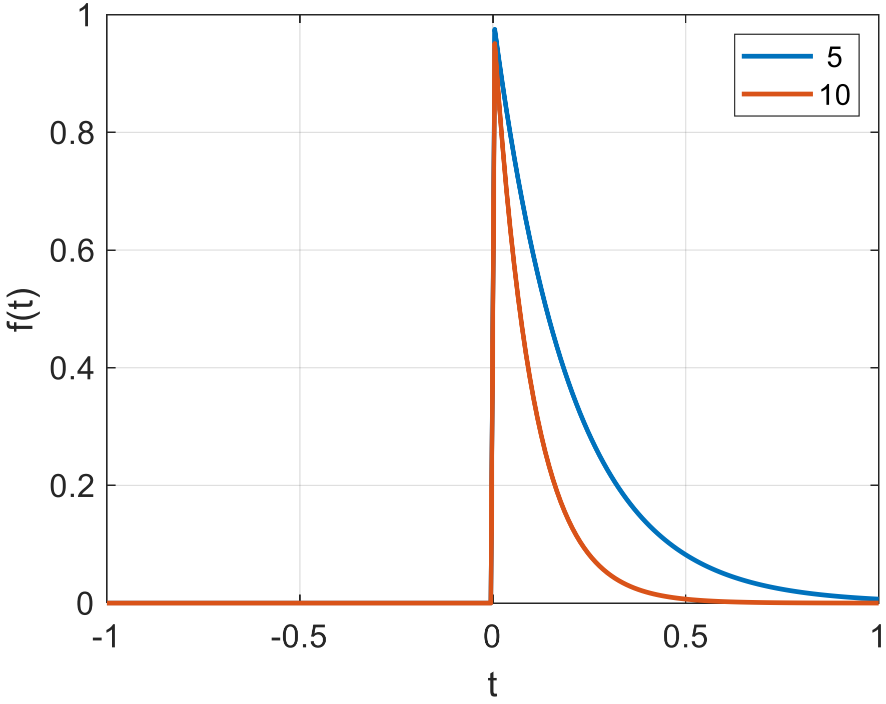
FT wichtiger Funktionen: einseitige Exponentialfuktion

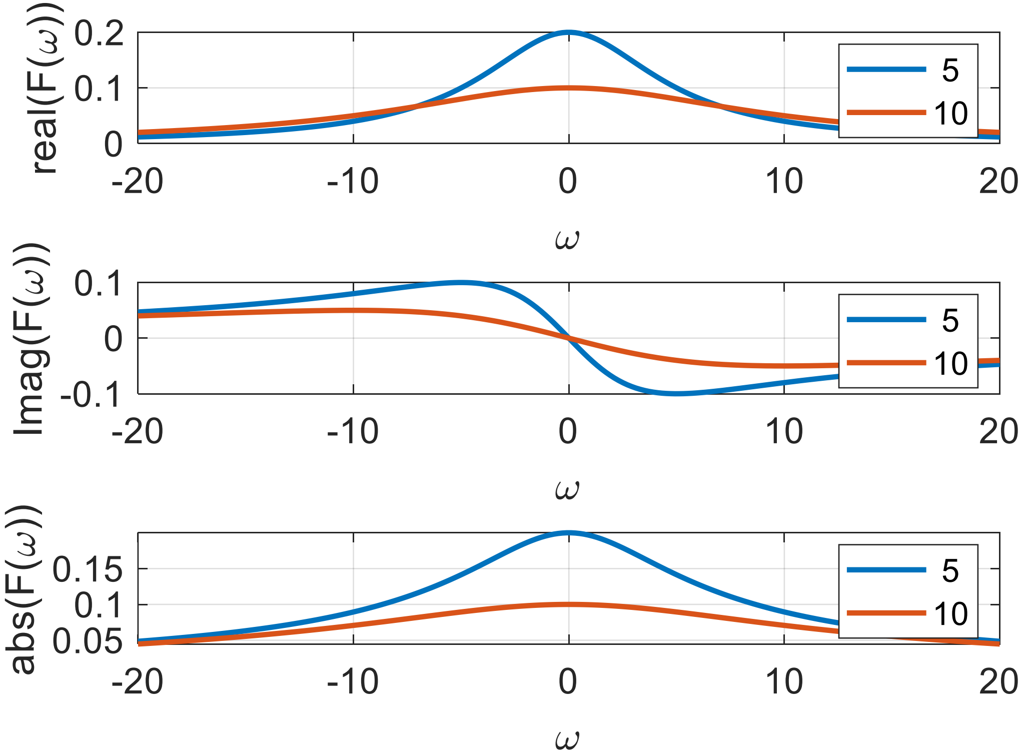
Einseitige Exponentialfuktion im Zeitbereich:

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda \cdot t) & t \geq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Lorenzform des Realteil und Dispersionsform des Imaginärteils im Frequenzbereich:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\omega} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{-i\omega}{\lambda^2 + \omega^2}$$





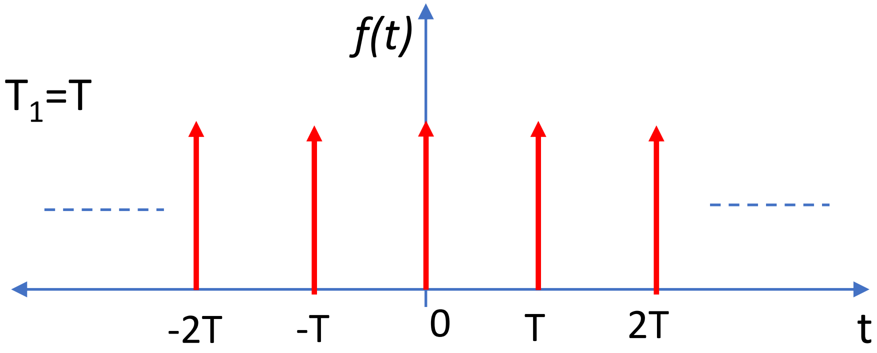
FT wichtiger Funktionen: Dirac-Stoßfolge (Kammfunktion)

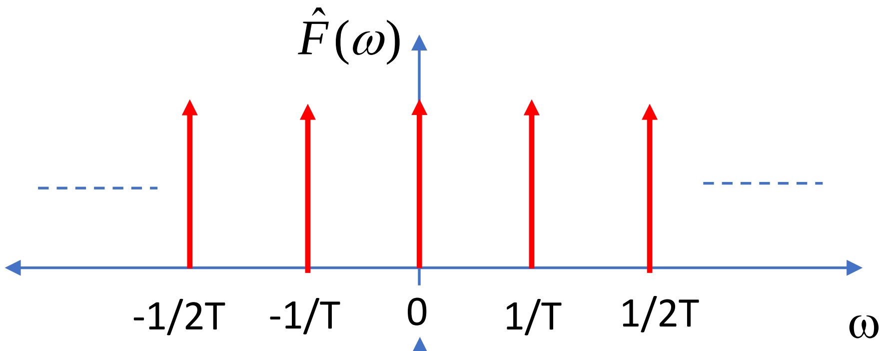
<u>Dirac-Stoßfolge im Zeitbereich:</u>

<u>Dirac-Stoßfolge im Frequenzbereich:</u>

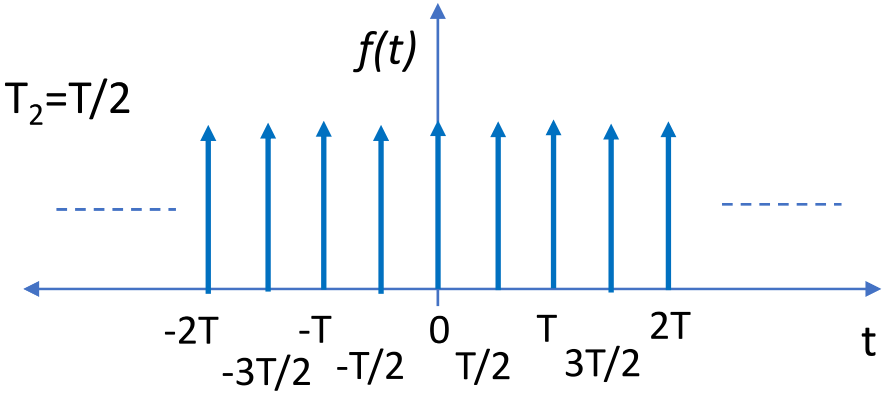
$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{F}(\omega) = \frac{1}{|T|} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)$$

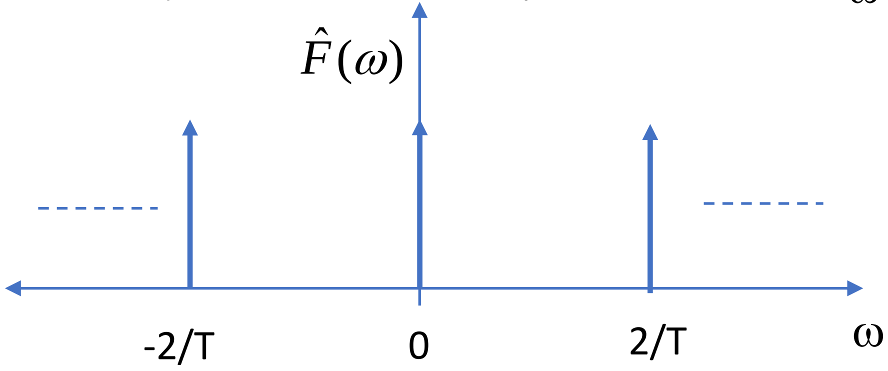
Fall: T_1=T





Fall: T_2=T/2





Einschub: Faltung, Kreuzkorrelation und Autokorrelation

Faltung im Zeitbereich:

$$h(t) = f(t) * g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot g(t-\xi)\, d\xi$$

Multiplikation im Frequenzbereich:

$$\hat{H}(\omega) = \hat{F}(\omega) \cdot \hat{G}(\omega)$$

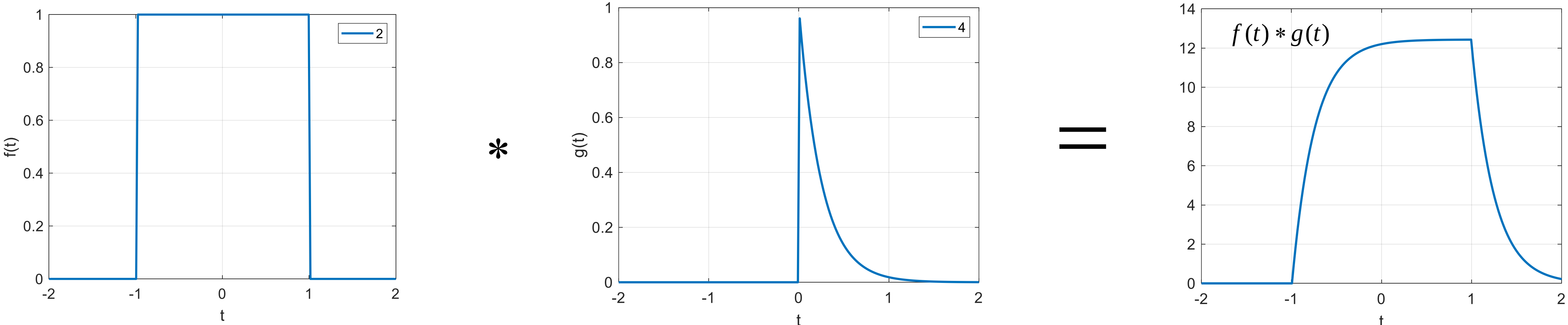
Multiplikation im Zeitbereich:

$$h(t) = f(t) \cdot g(t)$$

Faltung im Frequenzbereich:

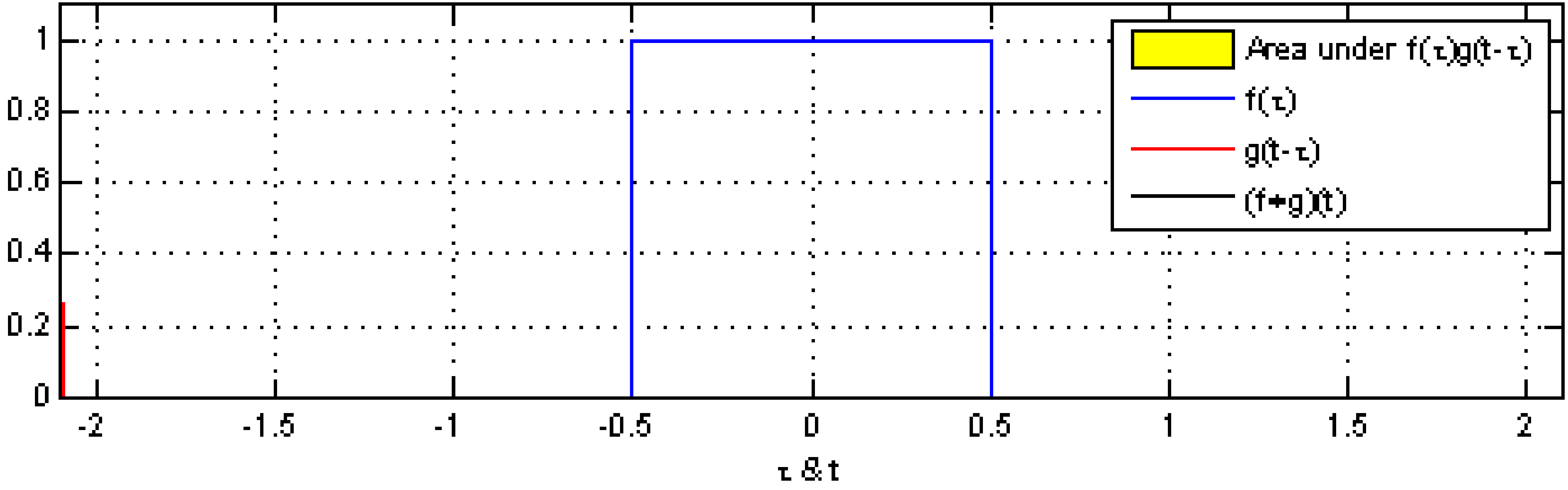
$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot G(\omega-\xi)\, d\xi$$

- Wichtig: Minuszeichen im Argument von *g und G* daher gespiegelt vor der Multiplikation!
- Die Faltung ist kommutativ, distributive und assoziativ



Wie funktioniert die Faltung zweier Funktionen?

$$h(t) = f(t) * g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot g(t-\xi)\, d\xi$$



https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_(Mathematik)

Einschub: Faltung, Kreuzkorrelation und Autokorrelation

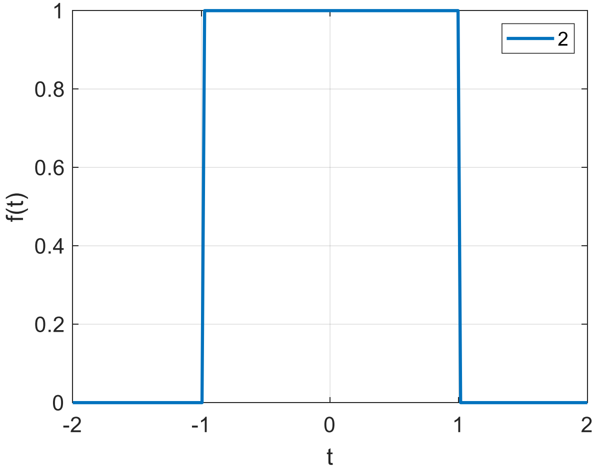
Kreuzkorrelation im Zeitbereich:

$$h(t) = f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot g^*(t+\xi)\, d\xi$$

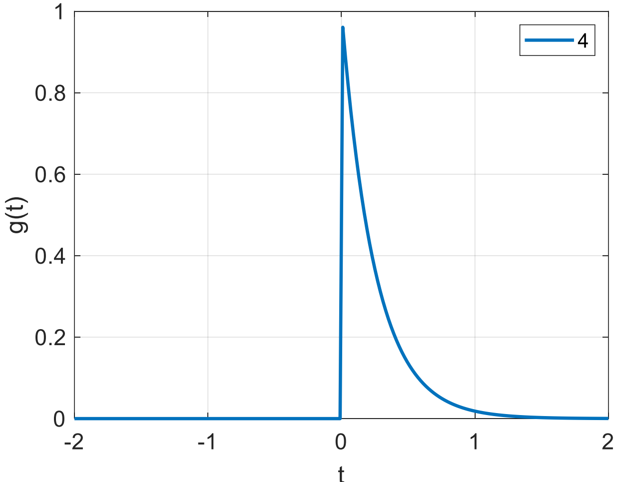
Kreuzkorrelation im Frequenzbereich:

$$\hat{H}(\omega) = \hat{F}(\omega) \cdot \hat{G}^*(\omega)$$

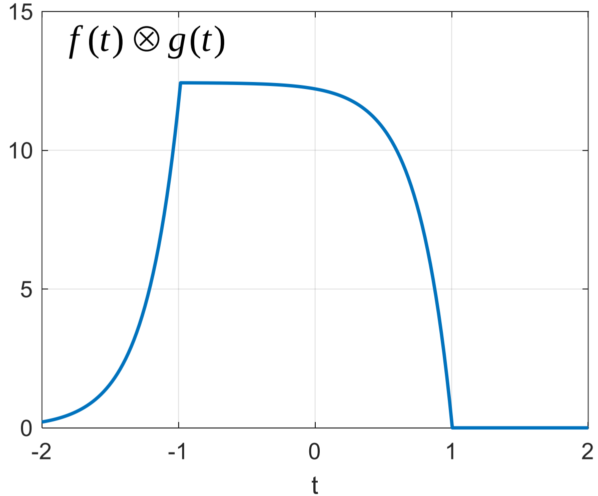
- Zur Bestimmung von Gemeinsamkeiten/Ähnlichkeiten von Funktionen
- Pluszeichen im Argument von g, d.h. g wird nicht gespiegelt. Für gerade Funktionen aber irrelevant.
- Der Stern bedeutet konjugiert complex, für reele Funktionen irrelevant.



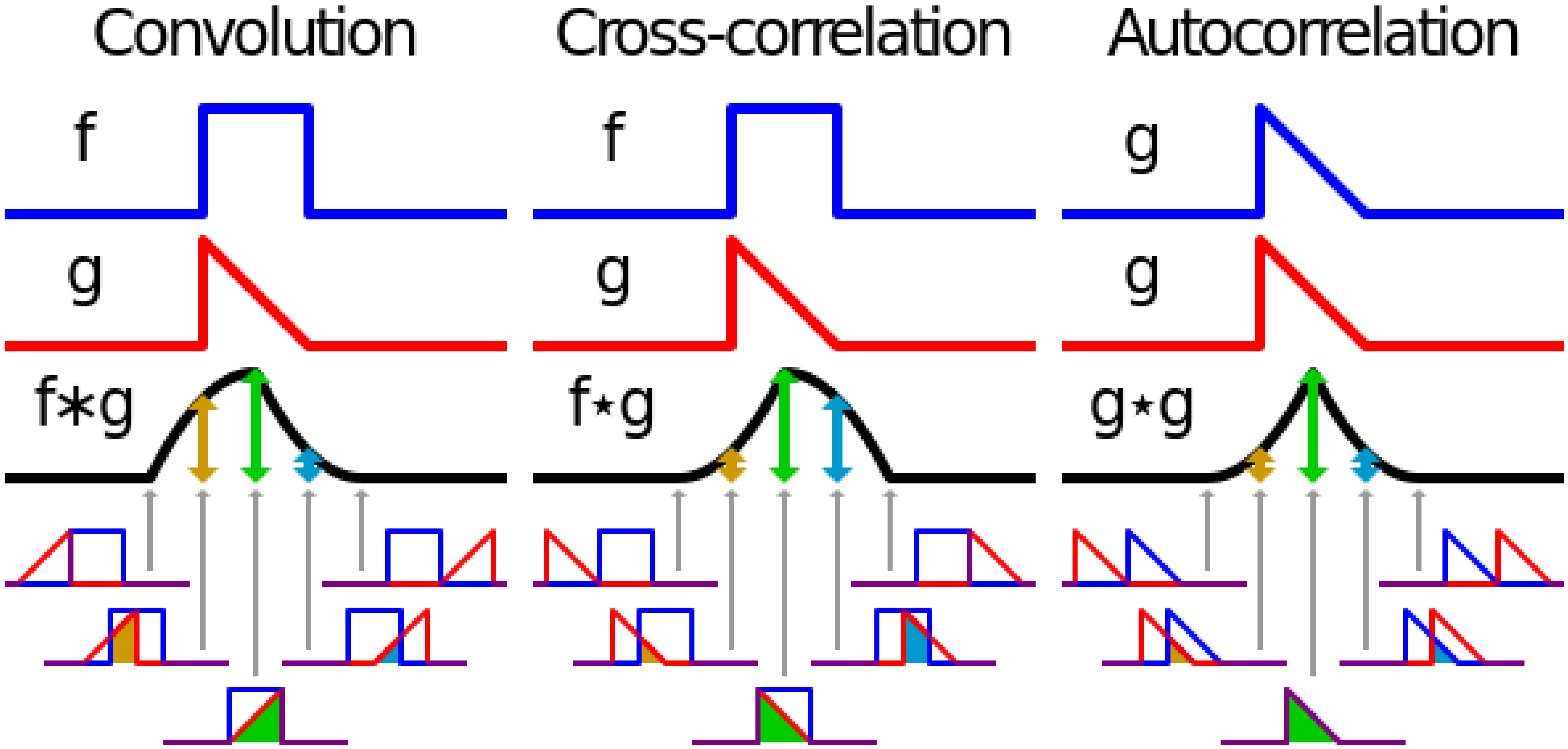
$*$



$=$



Einschub: Faltung, Kreuzkorrelation und Autokorrelation



Diskrete Fourier-Transformation von zeitbegrenzten Abtastsignalen

Definition:

$$F_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \exp(-i\,2\pi\,k\,j/N) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot W_N^{+k\,j}$$

$$mit\ W_N = \exp(-i2\pi/N)$$

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_j \cdot \exp(+i\,2\pi\,k\,j/N) = \sum_{j=0}^{N-1} F_j \cdot W_N^{-k\,j}$$

Signal nur an N diskreten Zeiten....

$$t_k = k\cdot\Delta t,\ k = 0....N-1$$

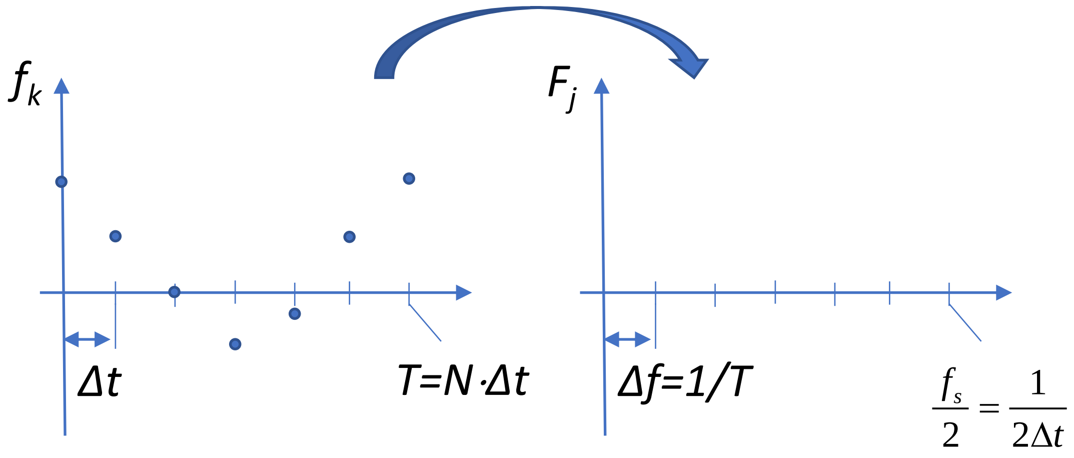
“gesampelt” und als Zahlenfolge $f(t_k)$ bekannt.

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & . & . & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & . & . & W_N^{(N-1)\cdot 2} \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & & . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{(N-1)\cdot 2} & . & . & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-komponenten

Transformationsoperator

Samplingwerte



Diskrete Fourieranalyse: Fast Fourier Transformation (FFT)

- Die FFT ist ein Algorithmus zur effizienten Berechnung der diskreten Fourier-Transformation (DFT). Die Berechnungsdauer reduziert sich dadurch erheblich, wenn die Anzahl der Datenpunkte N=2^p entspricht, d.h. die Anzahl der Stützstellen bzw. Abtastwerte eine 2er Potenz entspricht.

$$\text{Aufwand der DFT} \in \mathcal{O}\left(N^2\right)$$

$$\text{Aufwand der FFT} \in \mathcal{O}\left(N \log_2 N\right)$$

N	DFT	FFT
2	4	2
4	16	8
8	64	24
16	256	64
32	1024	160
64	4096	384
128	16384	896
256	65536	2048
512	262144	4608
1024	1048576	10240

Vorgehensweise der Berechnung von Spektren aus gemessenen Signalen mittels FFT: Daten im Zeitbereich

<u>Zugrundeliegender funktionaler Zusammenhang:</u>

s(t)= $a1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) + a2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t)$

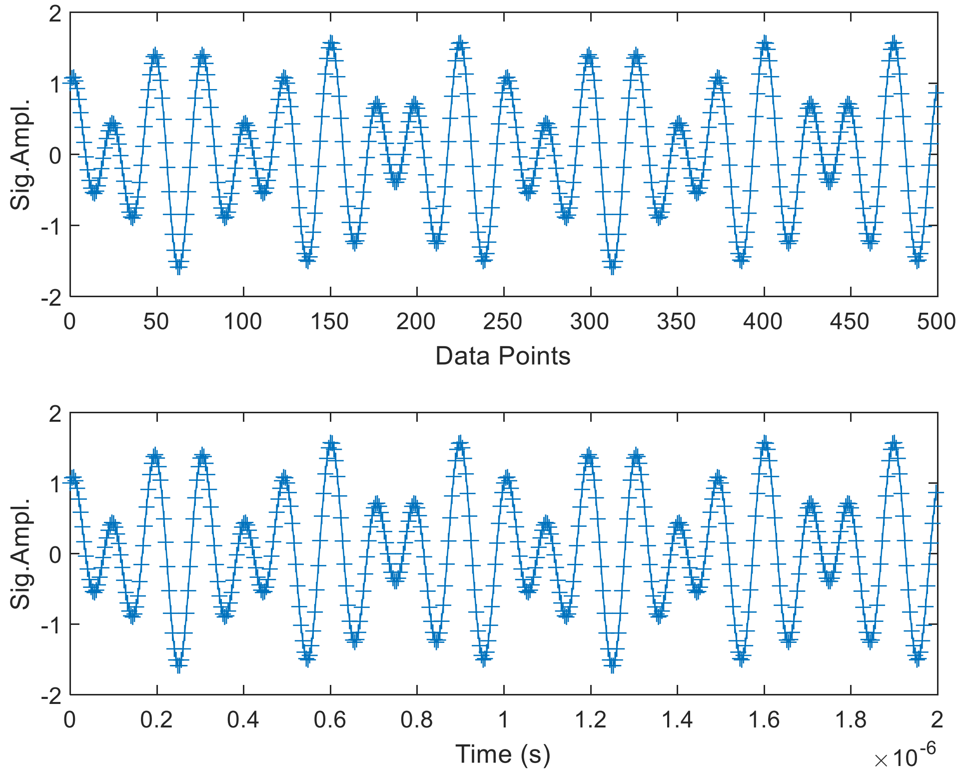
Parameter:

$a1 = 1, a2 = 0.6, f1 = 10MHz, f2 = 7MHz$

<u>Messparameter:</u>

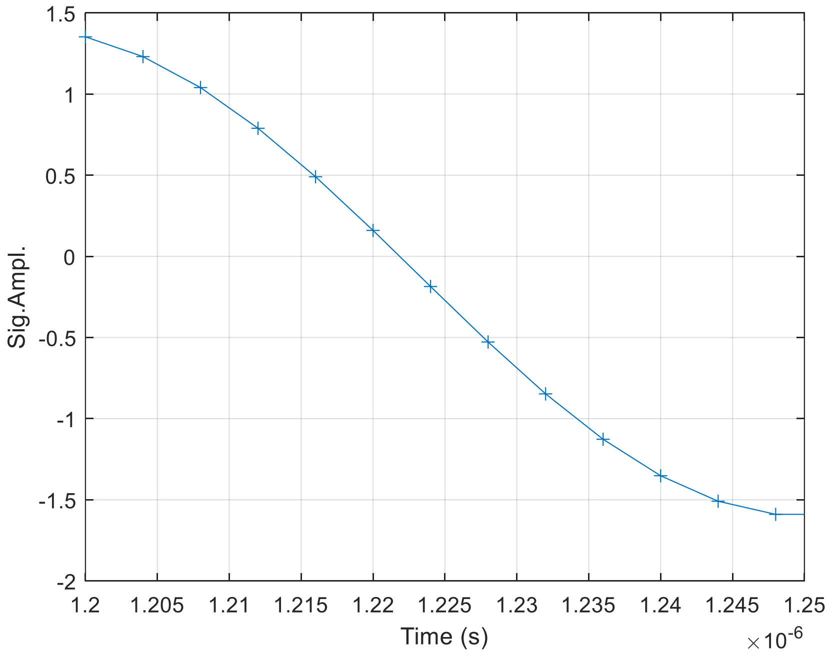
N=500…………………Anzahl der Datenpunkte

SF=250MS/s……….Abtastrate

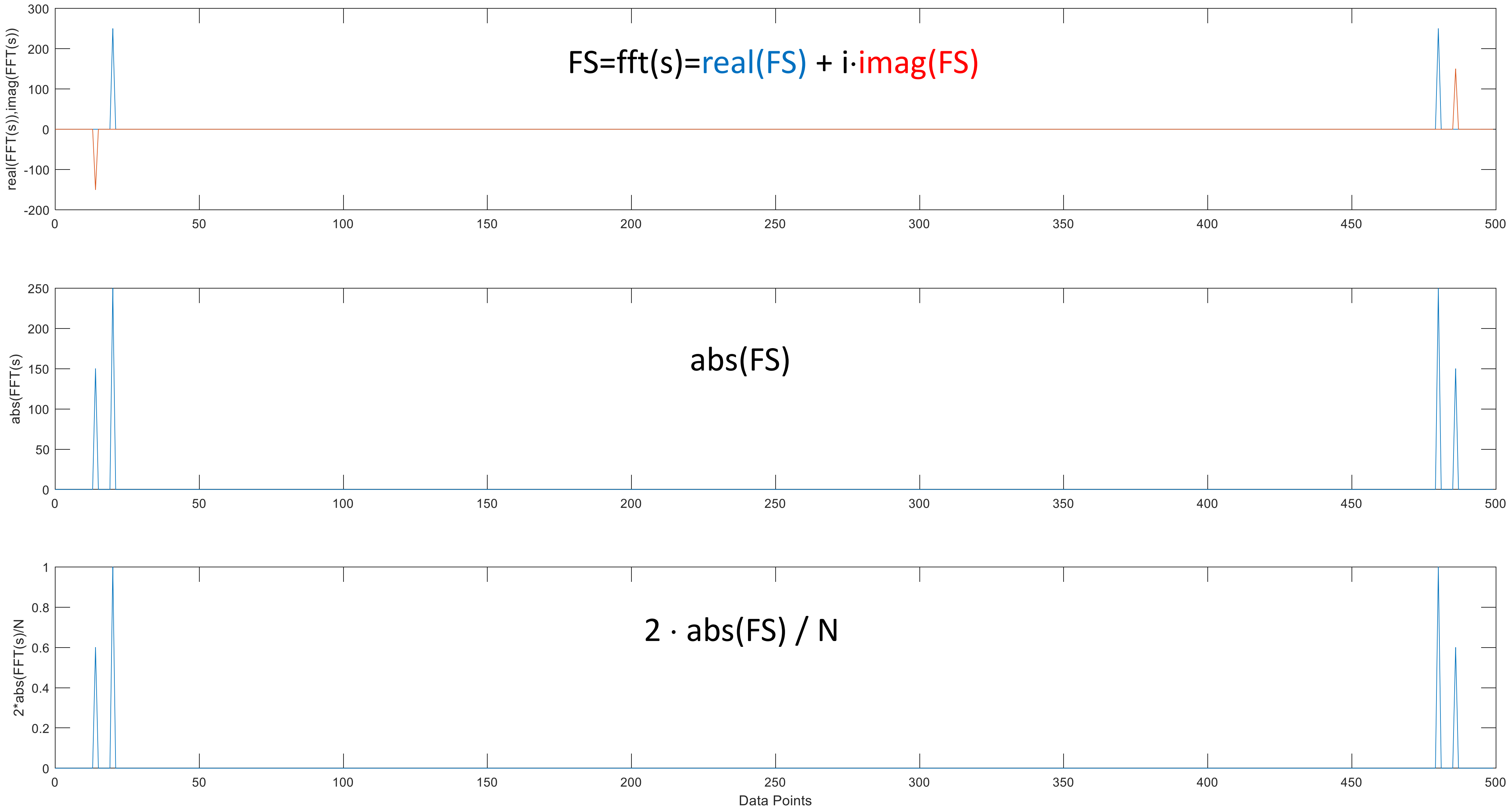


Abtastintervall?

Zeitvektor?

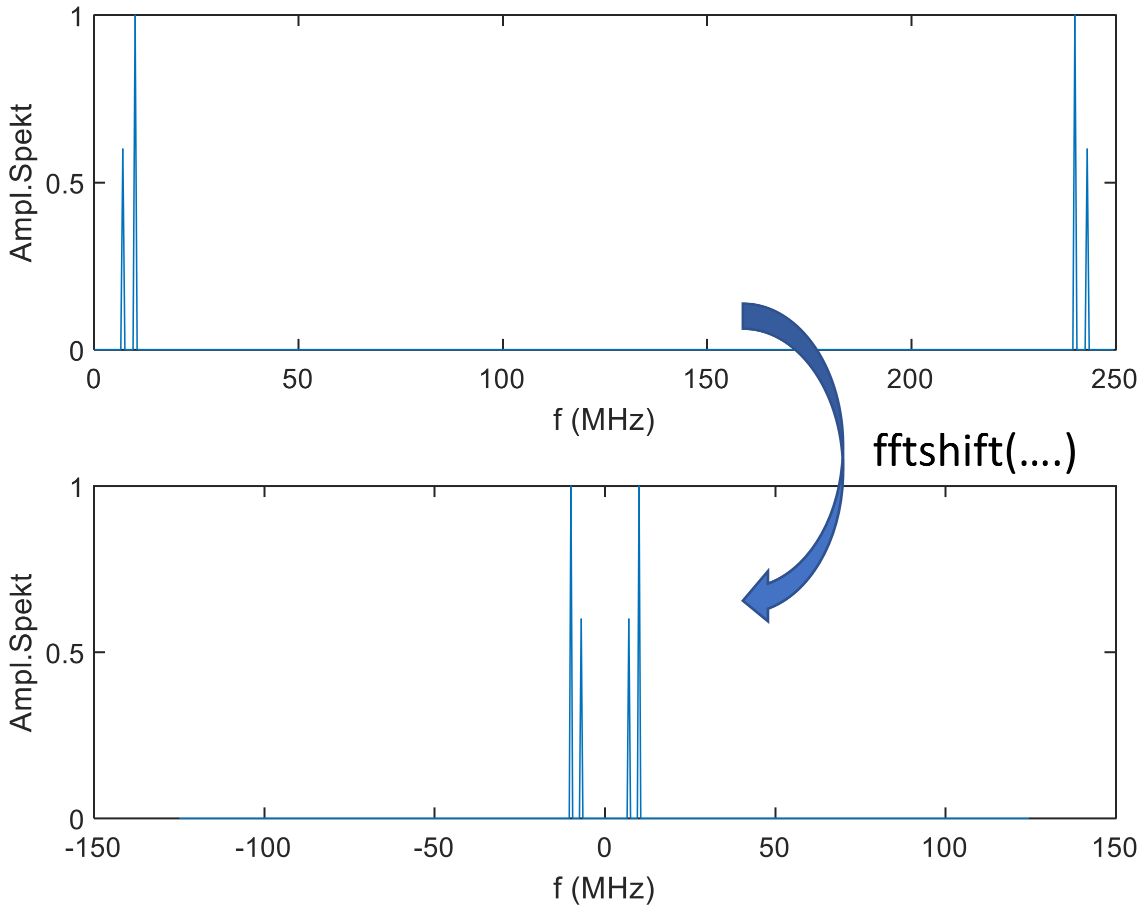


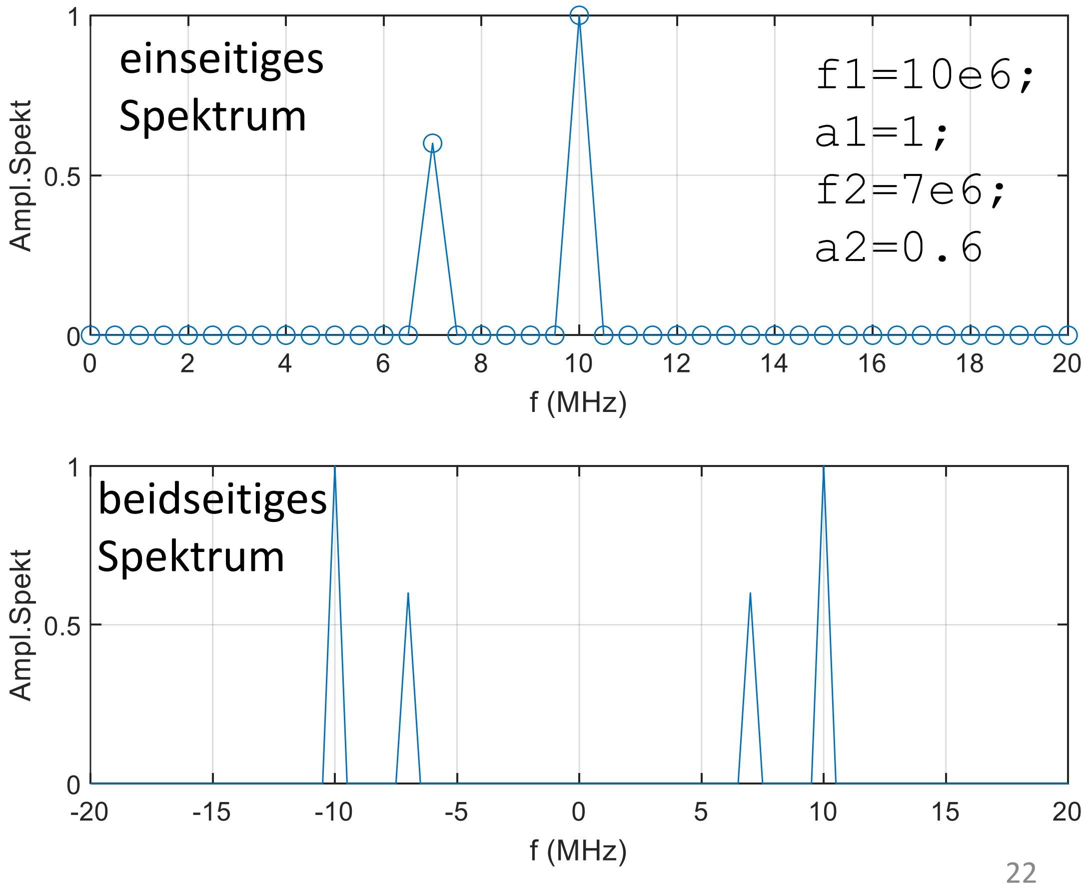
Vorgehensweise der Berechnung von Spektren aus gemessenen Signalen mittels FFT: Anpassung Amplituden im Frequenzraum



Vorgehensweise der Berechnung von Spektren aus gemessenen Signalen mittels FFT: Generierung der Frequenzachse

```
df=SamplFreq/N;                  % Frequenzintervall, Frequenzaufloesung
f=[0:N-1]*df;                    % Generierung des Frequenzvektors
fsym=f-N/2*df;                   % Generierung des symmetrischen +-Frequenzvektors
```

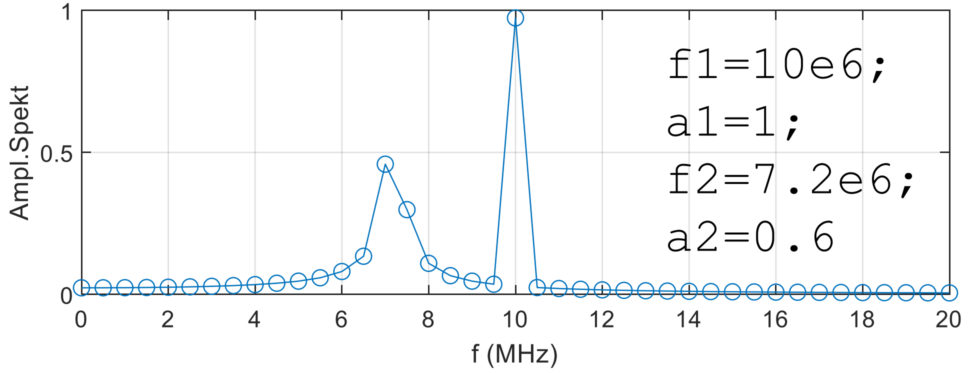


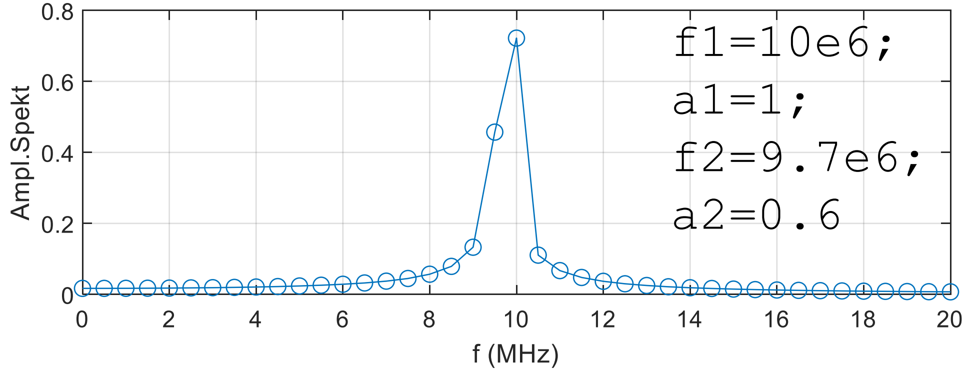


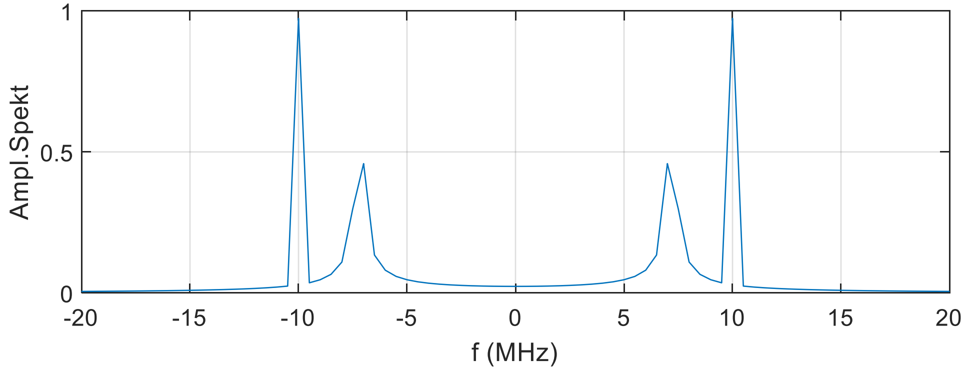
Vorgehensweise der Berechnung von Spektren aus gemessenen Signalen mittels FFT: Probleme bei Frequenzabtastung

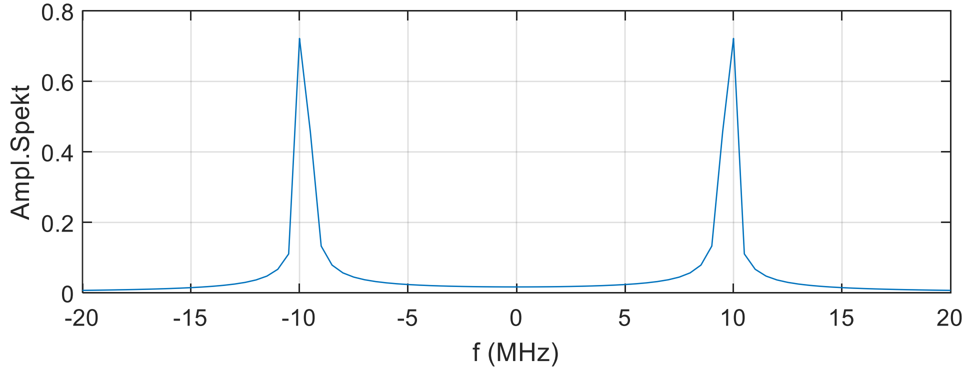
- Gibt es bei bestimmten Signalfrequenzen keinen Frequenz-Pin aufgrund der Diskretisierung, kann es zu falschen Amplitudenwerten kommen.
- Verbesserung der Frequenzabtastung/Intervall kann durch künstliches Zero-padding im Zeitbereich erreicht werden da:

```
df=SamplFreq/(Npad);% Frequenzintervall, Frequenzaufloesung
```







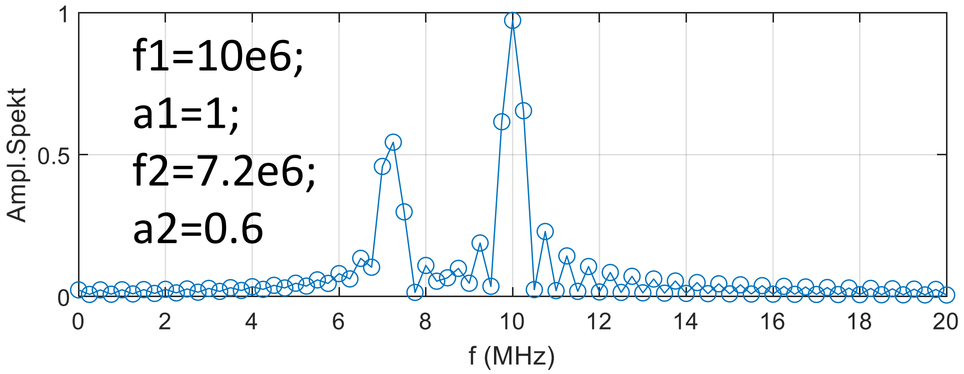


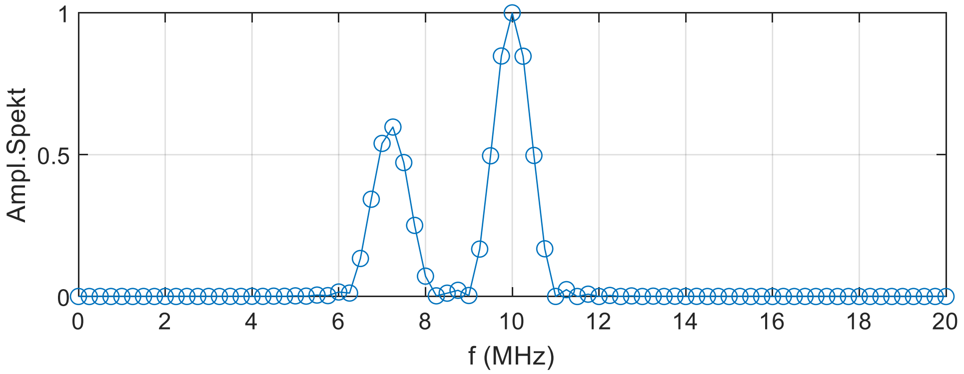
Vorgehensweise der Berechnung von Spektren aus gemessenen Signalen mittels FFT

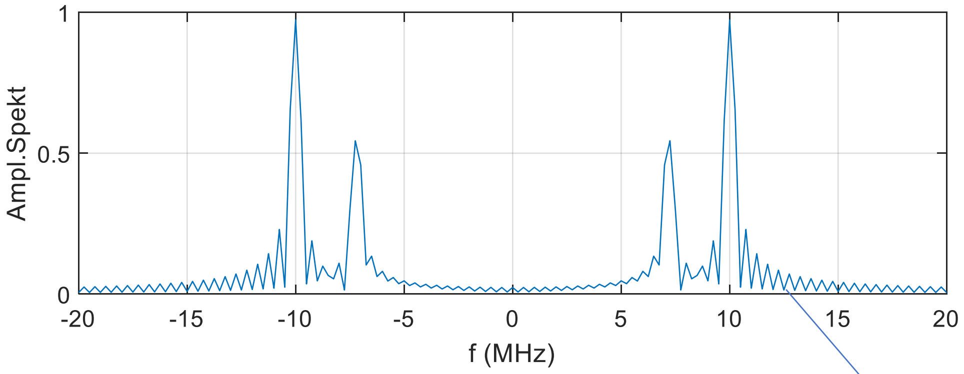
Erweiterung des Datensatzes auf die doppelte Anzahl von Punkten.

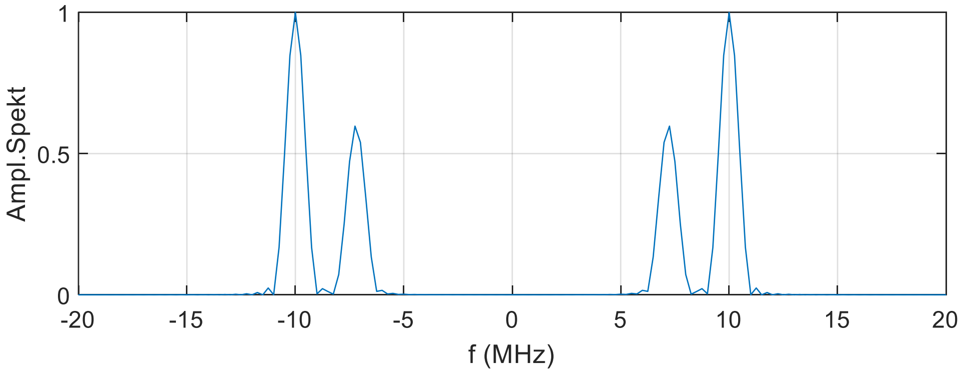
```
N_pad=2*N;
```

Y=(a1*cos(2*pi*f1*t)+a2*sin(2*pi*f2*t)).*hanning(N)';





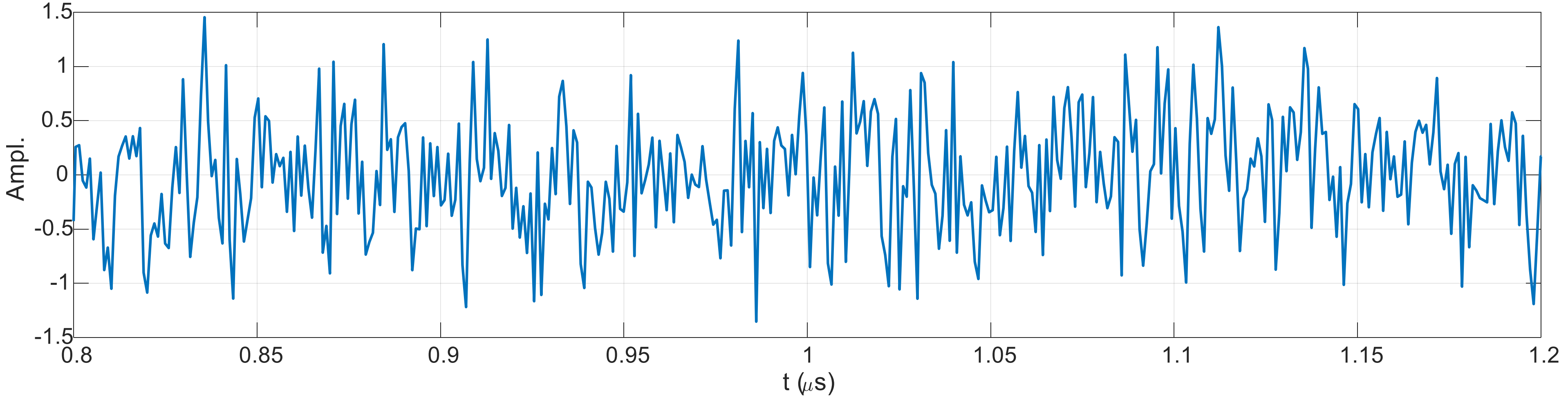


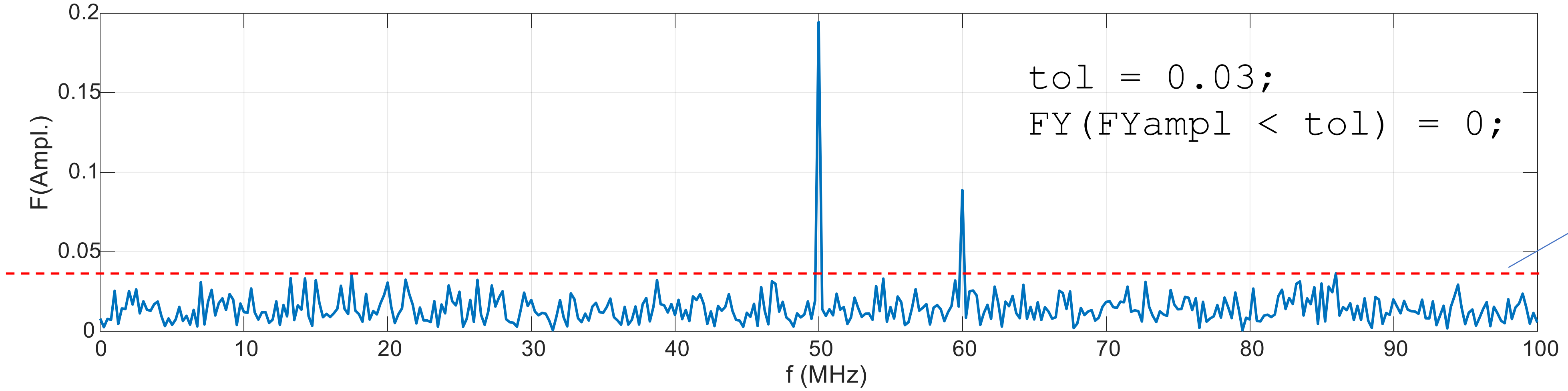


Ringing,Side loop effects?

Filterung durch Thresholding im Frequenzraum

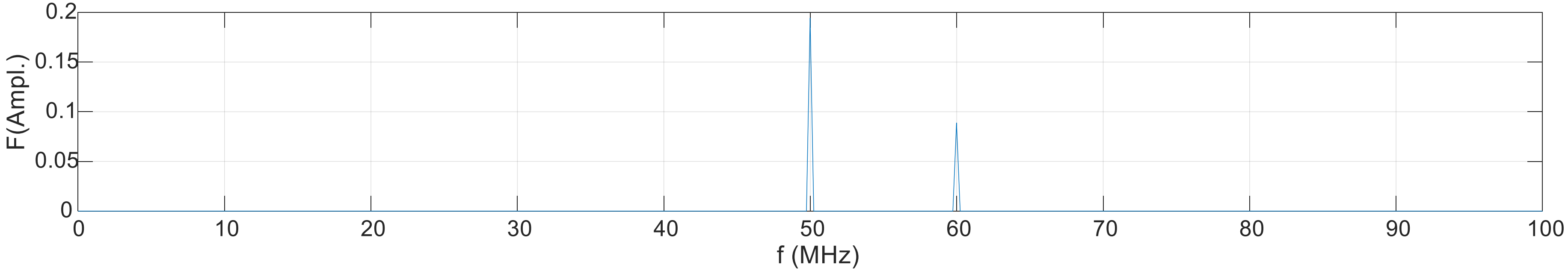
```
Y=0.2*cos(2*pi*50e6*t+2*pi/3)+0.1*cos(2*pi*60e
6*t-pi/3)+0.5*randn(1,N);
```



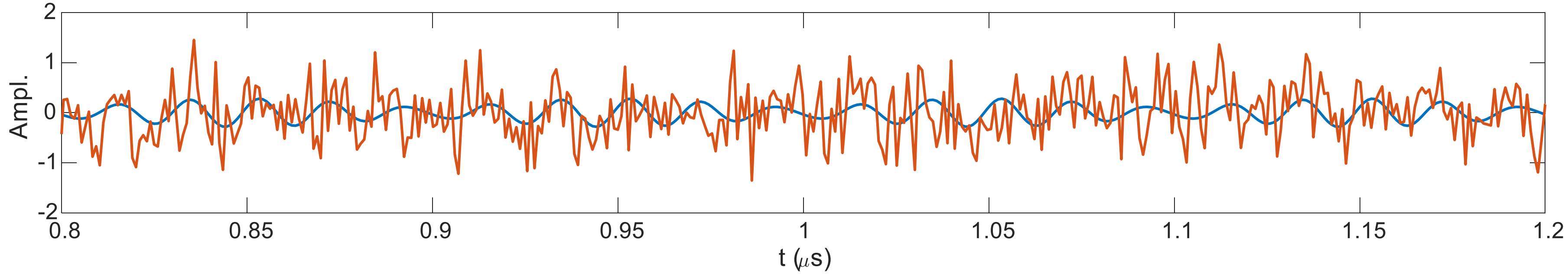


Z.B. Null setzen von Spektralkomponenten mit Amplitude kleiner als 0.03.

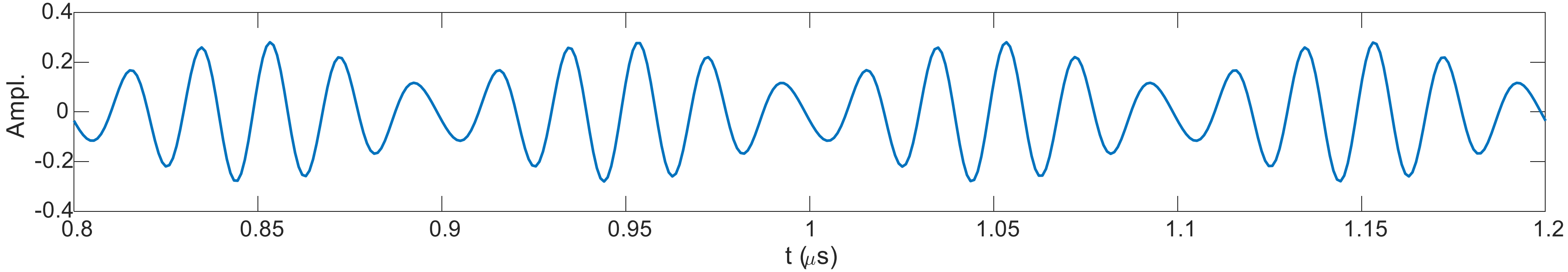
Filterung durch Thresholding im Frequenzraum



Gefiltertes Spektrum



Überlagerung Ausgangssignal mit gefilterten Signal

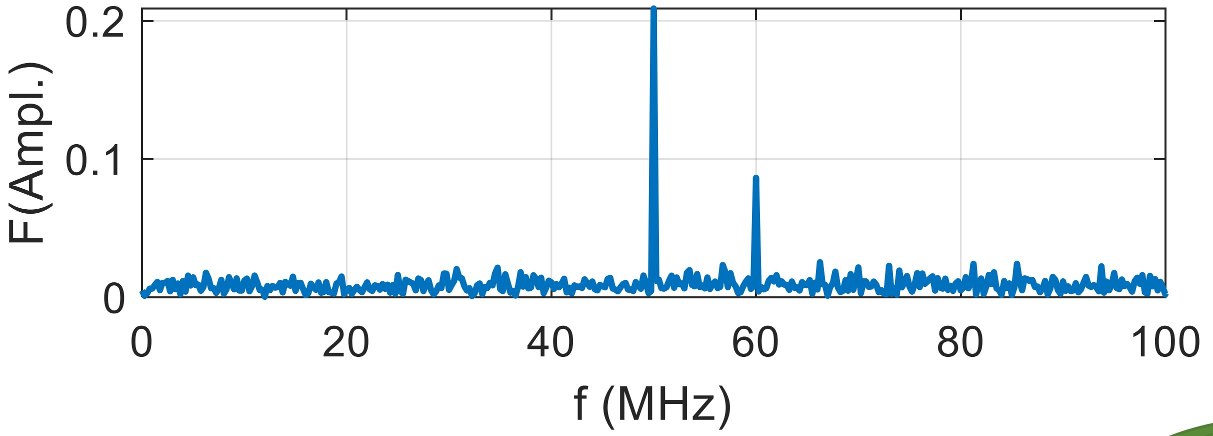


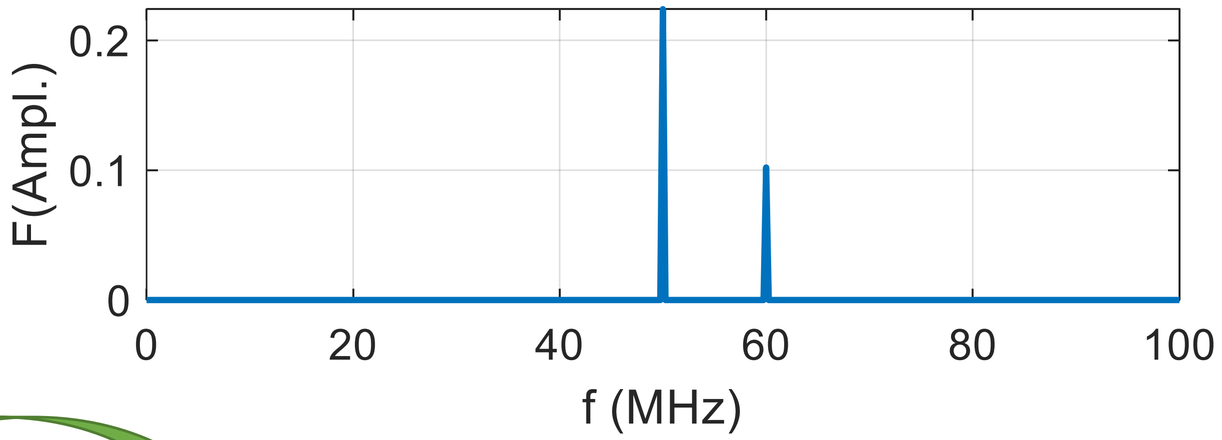
Gefiltertes Signal

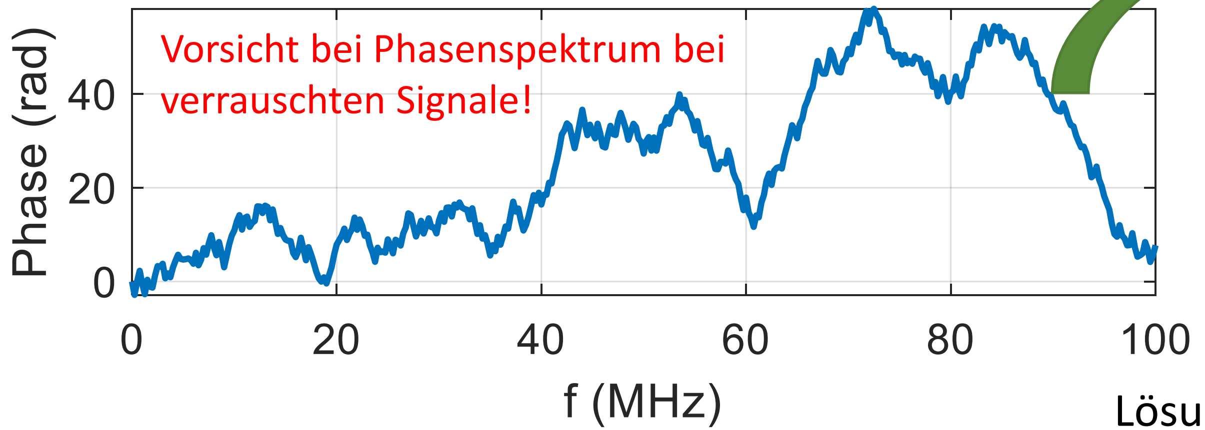
Amplituden und Phasenspektrum bei verrauschten Signalen

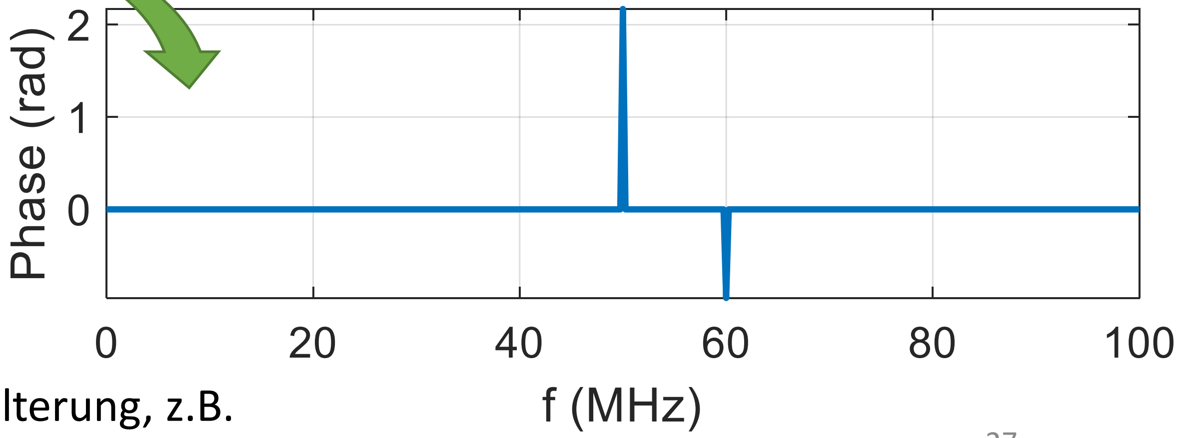
```
Y=0.2*cos(2*pi*50e6*t+2*pi/3)+
0.1*cos(2*pi*60e6*t-
pi/3)+0.5*randn(1,N)
```

```
tol = 0.03;
FY(FYampl < tol) = 0;
PhaseYg=unwrap(angle(FY));
```





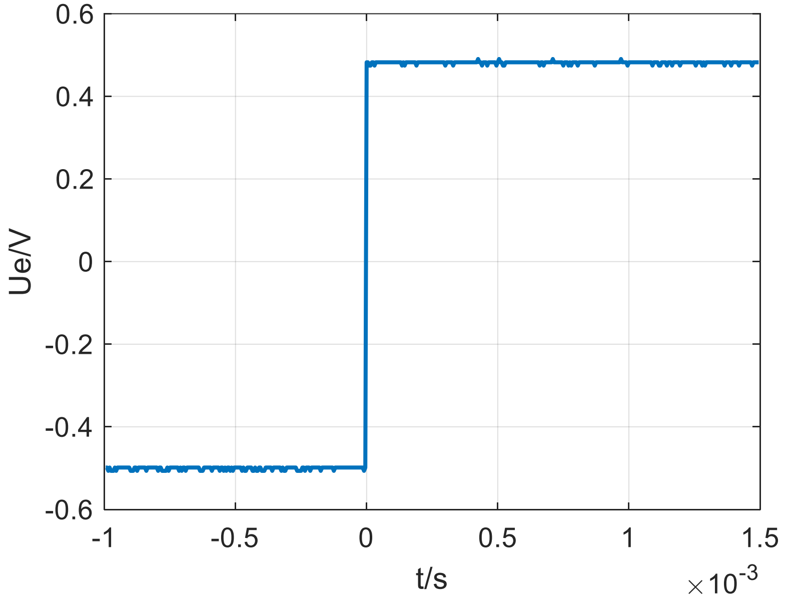




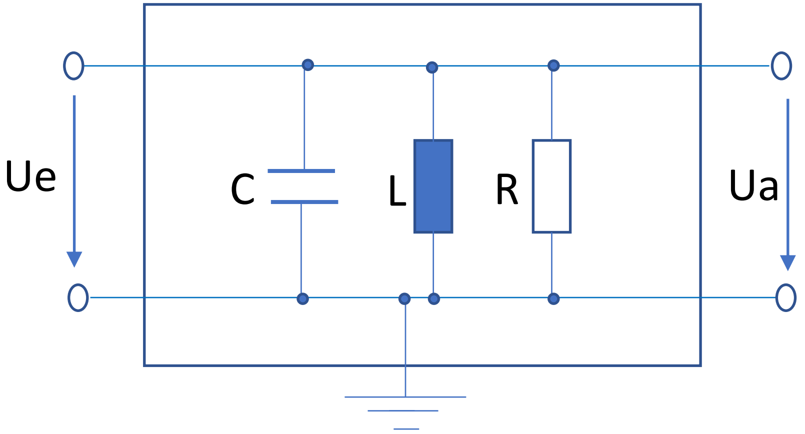
Lösung: Filterung, z.B. durch thresholding

Beispiel Signalanalyse: gedämpfte Schwingung

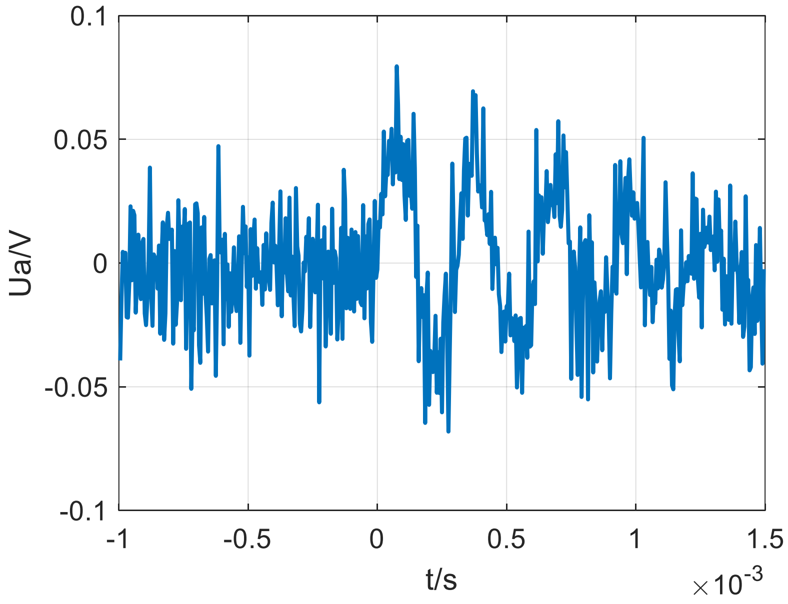
Eingangssignal



Lineares zeitinvariantes System (LTI): parallel Schwingkreis



Sprungantwort



<u>Was kann analysiert werden?</u>

- Dämpfung durch Amplitudenmessung ----> Güte
- Eigenfrequenzen durch Schwingungsperioden

<u>Wie kann die Analyse durchgeführt werden?</u>

- Direkt im Zeitbereich
- Frequenzraum nach der FT

<u>Worauf soll man bereits bei der Datenaufzeichnung achten?</u>

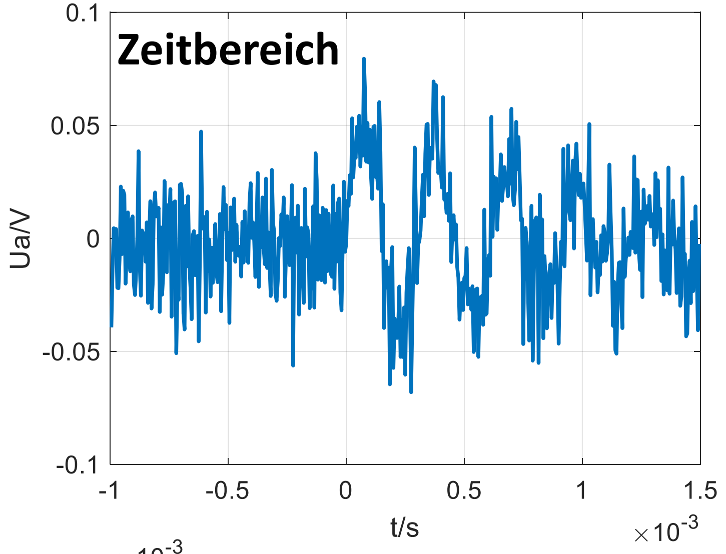
- Sampling (Zeit und Amplituden)
- Aufzeichnungsdauer
- Signalqualität

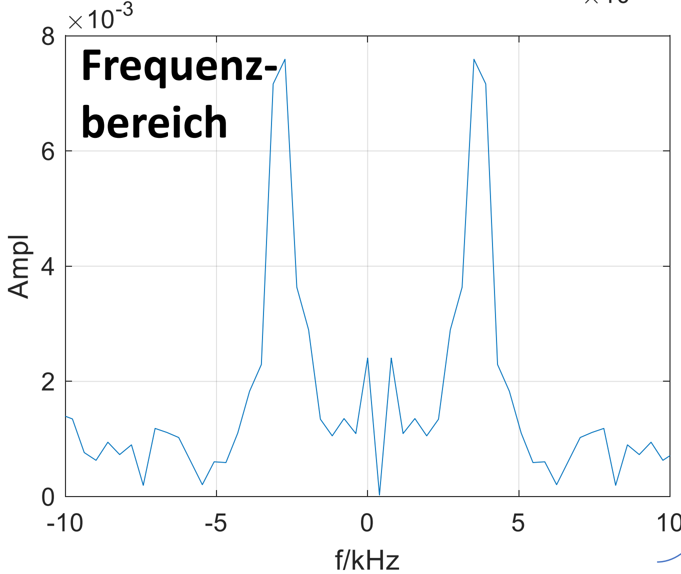
Ist die gezeigte Sprungantwort gut genug für die Analyse?

Beispiel Signalanalyse: gedämpfte Schwingung

Analyse im.....

Einzelsignal

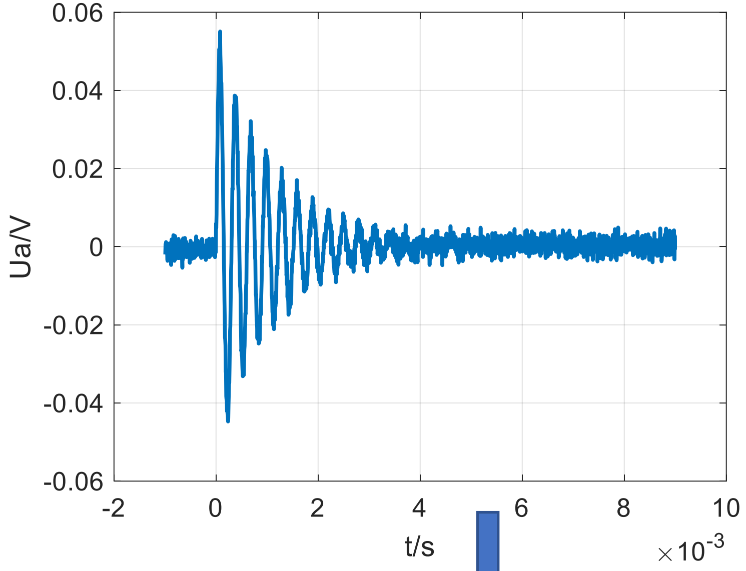




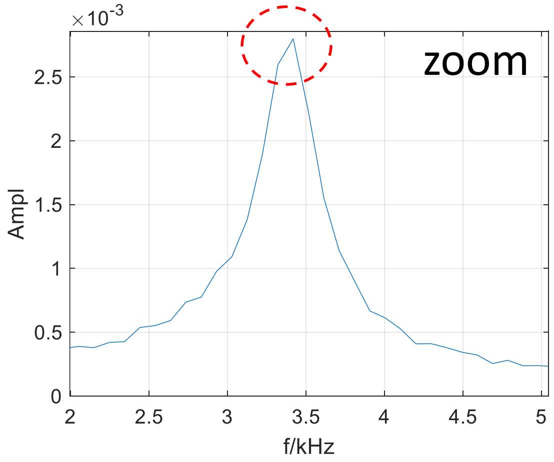
Notwendige Verbesserungen:

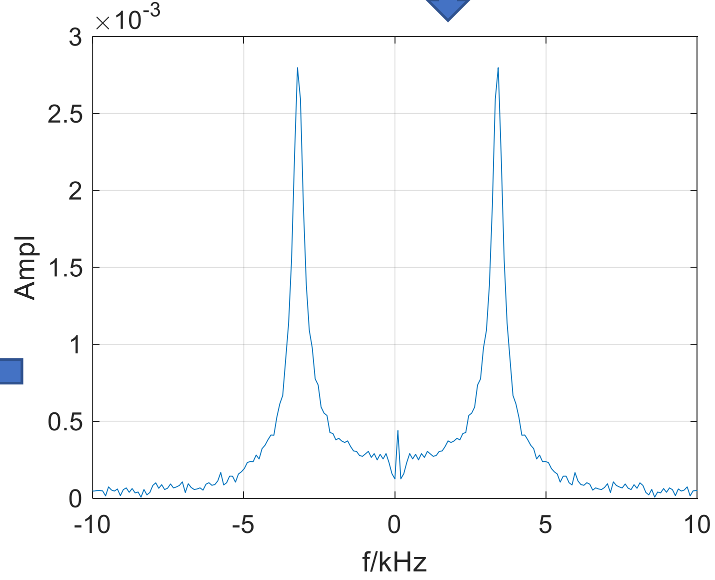
- Mittelung der Signale
- Länger Aufnahmedauer

Mittelung über 100 Signale

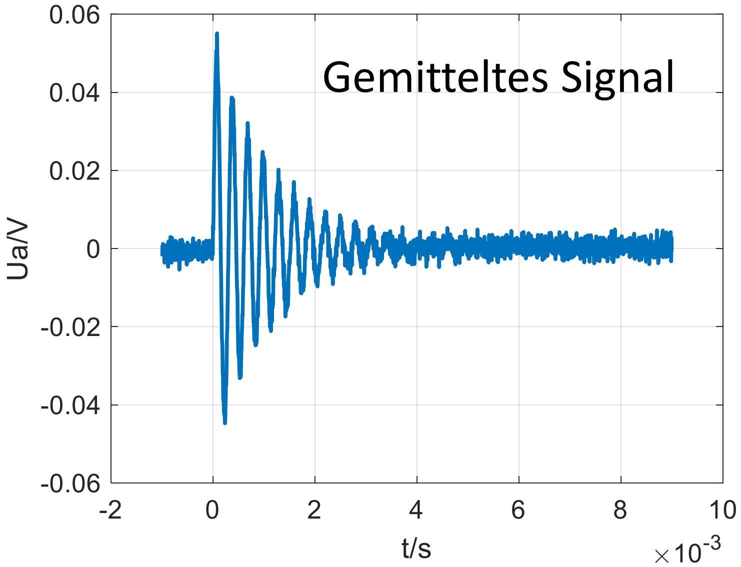


Sampling im Frequenzbereich sollte noch verbessert werden!



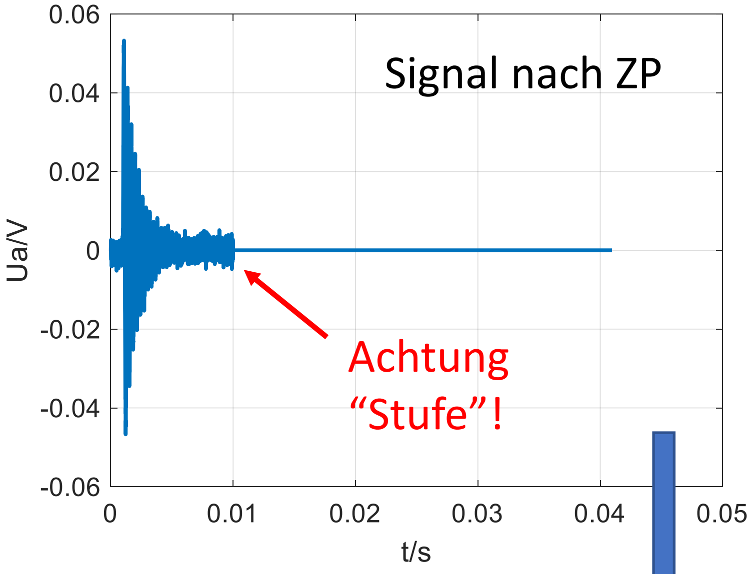


Beispiel Signalanalyse: gedämpfte Schwingung



Zero-Padding (ZP): Steigerung der Signallänge um das 4-fache zur Steigerung der Anzahl von Stützstellen im Frequenzbereich.

$$\Delta f \propto 1/\,Signall\ddot{a}nge$$



Lösung der Schwingungsgleichung:

$$U_a = U_0 \cos(\omega_e t + \phi) \cdot \exp(-\gamma t)$$

$$\omega_e = 2\pi f_e = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$$

$$FWHM = f_2 - f_1 = \frac{\gamma}{\pi}$$

$$Q = \frac{f_e}{FWHM}$$

Zoom norm. Power Spekt.