

Совместное управление

Самарин Алексей

Апрель 2022

1 Мотивация

Дана система из двух агентов:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= Ax_1 + Bu_1 \\ \dot{x}_2 &= Ax_2 + Bu_2 \\ y &= C(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

каждый агент измеряет только относительный выход y .

Требуется решить задачу слежения: $y(t) \rightarrow g(t)$. $g(t)$ — неизвестный заранее непрерывный ограниченный сигнал.

Обозначим $z = x_1 - x_2$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu_1 - Bu_2 \\ y &= Cz\end{aligned}$$

Агентам требуется совместно управлять системой. Проблема заключается в том, что регулятор, генерирующий u_1 не знает о u_2 и наоборот.

2 Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu_1 + Bu_2 \\ y = Cx \\ y \rightarrow g \end{cases}$$

Пусть

$$u_1 = u_2 = K(x - w)$$

где $w(t)$ определяется на основе $g(t)$. Тогда $A + 2BK$ должна быть устойчивой.

2.1 Стандартный наблюдатель

Если бы регуляторы знали состояние друг друга, то можно было бы построить обычный наблюдатель.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK(\hat{x}_1 - w) + BK(\hat{x}_2 - w) \\ \dot{\hat{x}}_1 = Ax_1 + BK(\hat{x}_1 - w) + BK(\hat{x}_2 - w) + F(C\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = Ax_2 + BK(\hat{x}_1 - w) + BK(\hat{x}_2 - w) + F(C\hat{x}_2 - y) \end{cases}$$

Наблюдателей 2, так как предполагается, что они реализуются разными устройствами. Ошибка наблюдения подчиняется уравнению

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

2.2 Изолированный наблюдатель

Когда регуляторы не могут передавать информацию, то построение стандартного наблюдателя невозможно.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK(\hat{x}_1 - w) + BK(\hat{x}_2 - w) \\ \dot{\hat{x}}_1 = Ax_1 + BK(\hat{x}_1 - w) + \cancel{BK(\hat{x}_2 - w)} + F(C\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = Ax_2 + \cancel{BK(\hat{x}_1 - w)} + BK(\hat{x}_2 - w) + F(C\hat{x}_2 - y) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (A + FC)e_1 + BK(\hat{x}_2 - w) \\ \dot{e}_2 = (A + FC)e_2 + BK(\hat{x}_1 - w) \end{cases}$$

В наблюдателе всегда будет присутствовать ошибка, которая будет передаваться в управление, что приведет к большей ошибке слежения. Вопрос, когда можно подобрать матрицы K, F , чтобы ошибка слежения была ограниченной. В задаче консенсуса для многих агентов сформулировано только достаточное условие: действительная часть спектра матрицы A не положительна.

2.3 Нелинейный наблюдатель

Строим каскадным наблюдателем нелинейную оценку для e_1, e_2 . И получаем новую оценку $\tilde{x}_i = \hat{x}_i + \hat{e}_i$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK(\tilde{x}_1 - w) + BK(\tilde{x}_2 - w) \\ \dot{\hat{x}}_1 = Ax_1 + BK(\tilde{x}_1 - w) + F(C\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = Ax_2 + BK(\tilde{x}_2 - w) + F(C\hat{x}_2 - y) \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (A + FC)e_1 + BK(\tilde{x}_2 - w) \\ \dot{e}_2 = (A + FC)e_2 + BK(\tilde{x}_1 - w) \\ \dot{\hat{e}}_1 = observer(\hat{e}_1, \hat{x}_1, y) \\ \dot{\hat{e}}_2 = observer(\hat{e}_2, \hat{x}_2, y) \\ \tilde{x}_1 = \hat{x}_1 + \hat{e}_1 \\ \tilde{x}_2 = \hat{x}_2 + \hat{e}_2 \end{cases}$$

Есть две проблемы

1. Помеха в наблюдателе зависит от \hat{e} .
2. Каскадный наблюдатель рассчитан на ограниченную помеху, а в текущей системе есть переходные процессы.

Моделирование показывает, что если начальные условия близки к нулю, и переходные процессы поэтому проходят с малой амплитудой, то все работает.

Если начальные условия большие, то переходные процессы занимают значительное время. А при некоторых параметрах, система становится неустойчивой.

2.3.1 Применение сатурации

Как справиться с начальными переходными процессами? По сути в переходном процессе, если помеха превосходит ограничение, заложенное в каскадном наблюдателе, каскадный наблюдатель дает неверную оценку. Результаты моделирования показывают, что $\|\hat{e} - e\| \gg 0$.

Идея состоит в том, чтобы “включить” каскадный наблюдатель после завершения переходных процессов. Один из возможных вариантов — сатурация \hat{e} в управлении.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \hat{x}_1 + sat(\hat{e}_1, \lambda) \\ \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 + sat(\hat{e}_2, \lambda) \end{aligned}$$

Тогда в переходном процессе $sat(\hat{e})$ можно интерпретировать, как ограниченную помеху. Так как система устойчива, то после завершения переходного процесса это приведет к ограниченной ошибке слежения и наблюдения и, следовательно, к ограниченному управлению. Тогда каскадный наблюдатель начнет работать правильно и через какое-то время будет выдавать точную оценку. Это можно назвать вторым переходным процессом. По его

завершению $\tilde{x}(t) = x(t)$.

$$\begin{aligned} I : \exists T_1 : \forall t > T_1 \Rightarrow \|u_1\| \leq \alpha, \|u_2\| \leq \alpha \\ \Downarrow \\ II : \exists T_2 : \forall t > T_2 \Rightarrow \|\hat{e}_1 - e_1\| \leq \beta, \|\hat{e}_2 - e_2\| \leq \beta \end{aligned}$$

Константа α зависит от w и ее можно регулировать

1. Значением сатурации
2. Выбором матриц K и F

Константа β зависит от каскадного наблюдателя. В идеальном случае она равна 0. В реальном скользящем режиме есть небольшие колебания относительно нуля.

Система для шага I (где каскадный наблюдатель - помеха в управлении)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu_1 + Bu_2 \\ \dot{\hat{x}}_1 &= Ax_1 + Bu_1 + F(C\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= Ax_2 + Bu_2 + F(C\hat{x}_2 - y) \\ y &= Cx \\ u_1 &= K(\hat{x}_1 - w + \xi_1) \\ u_2 &= K(\hat{x}_2 - w + \xi_2) \\ \|\xi_1\|, \|\xi_2\| &\leq \lambda \end{aligned}$$

Система для шага II (каскадный наблюдатель начинает работать)

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (A + FC)e_1 + Bu_2 \\ \dot{e}_2 &= (A + FC)e_2 + Bu_1 \\ \|u_1\|, \|u_2\| &\leq \alpha \\ \dot{\hat{e}}_1 &= observer(\hat{e}_1, Ce_1) \\ \dot{\hat{e}}_2 &= observer(\hat{e}_2, Ce_2) \\ \hat{e}_1 &\rightarrow e_1 + \varepsilon_1 \\ \hat{e}_2 &\rightarrow e_2 + \varepsilon_2 \\ \|\varepsilon_1\|, \|\varepsilon_2\| &\leq \beta \end{aligned}$$

Система для шага III (будто знаем точное значение x)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu_1 + Bu_2 \\ u_1 &= K(x - w + \varepsilon_1) \\ u_2 &= K(x - w + \varepsilon_2) \\ \|\varepsilon_1\|, \|\varepsilon_2\| &\leq \beta \end{aligned}$$

2.3.2 Сокращение шага II

Результаты моделирования показывают, что шаг II растянут по времени. Это вызвано тем, что на первом шаге \hat{e} успевает уйти далеко от e .

Так как результатом первого шага будет известное ограничение на e : $\|e\| \leq \gamma$, то нет смысла увеличивать \hat{e} больше γ . Пусть $observer_\gamma$ - каскадный наблюдатель, но который не дает \hat{e} выйти за пределы $\|\hat{e}\| < \gamma$. Этого можно добиться например сатурацией \hat{e} после каждого шага интегрирования.

$$\hat{e}[t + dt] = sat(\hat{e}[t] + observer(\hat{e}[t], Ce[t])dt, \gamma)$$

Моделирование показывает, что такой наблюдатель тоже сходится к e , но это, конечно, требует доказательства.

Раньше после первого шага было $\|\hat{e} - e\| \gg 0$, а сейчас $\|\hat{e} - e\| < 2\gamma$. Поэтому время шага II значительно сократилось.

2.3.3 Моделирование нелинейного наблюдателя

Когда начальные условия близки к нулю, то шага I нет или он очень короткий, поэтому сразу наблюдаем значительное улучшение по сравнению с линейным наблюдателем, и даже со стандартным наблюдателем.

Когда переходные процессы длительны (шаг I), то заметна сильная разница в разных подходах.