$\log\left(\frac{n}{7}\right) = \Theta\left(\log n^4\right)$

[Considero $\log_2$]

$\log(n) - \log(7) = \Theta\left(4\log(n)\right)$

Calcolo il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)-\log(7)}{4\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\frac{\log(n)}{\log(n)}}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{\log(7)}{\log(n)}}}\right) = \frac{1}{4}$$

Calcolo la derivata del rapporto:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{4}\left(\frac{\log(n)}{\log(n)} - \frac{\log(7)}{\log(n)}\right) = \frac{\log(7)}{4}\,\frac{d}{dx}\left(1 - \log(n)^{-1}\right) = \frac{\log(7)}{4\,n\log(n)^2\ln(2)}$$

Calcolo la positività della derivata:

$$\frac{\log(7)}{8n\log(n)\ln(2)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n > 0$$

Possiamo quindi dire che $C_2 = \frac{1}{4}$ e $C_1 = \frac{\log\left(\frac{1}{4}\right) - \log(7)}{4\log\left(\frac{1}{4}\right)} = 0.6$

$n^2\log(n^2) + 15n^2 = \Theta\left(n^2\log(n)\right)$

$2n^2\log(n) + 15n^2 = \Theta\left(n^2\log(n)\right)$

Calcolo il limite del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\log(n)+15n^2}{n^2\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\log(n)}{n^2\log(n)} + \frac{15n^2}{n^2\log(n)} = \lim_{n\to\infty} 2 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{15}{\log(n)}}} = 2$$

Calcolo la derivata del rapporto

$$\frac{d}{dx}\, 2 + \frac{15}{\log(n)} = 15\,\frac{d}{dx}\left(2 + \log(n)^{-1}\right) = 15\left(0 - \frac{1}{n\log(n)^2\ln(2)}\right) = -\frac{15}{n\log(n)^2\ln(2)}$$

Studio la monotonia:

$$-\frac{15}{n\log(n)^2\ln(2)} > 0 \Rightarrow \frac{15}{n\log(n)^2\ln(2)} < 0 \Leftrightarrow n < 0$$

Dunque possiamo dire che $C_1 = 2$ e $C_2 = \frac{2\cdot 2^2\log(2) + 15\cdot 2^2}{2^2\cdot\log(2)} = 17$

$7n\sqrt{n} + 3n - 10\sqrt{n} = \Theta\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$

$\hookrightarrow n^{\frac{3}{2}} = n\sqrt{n}$

Faccio il limite del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n\sqrt{n} + 3n - 10\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\left(7 + \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{10}{n}\right)}{n\sqrt{n}} = 7$$

Calcolo la derivata del rapporto

$$\frac{d}{dn} \frac{7n\sqrt{n} + 3n - 10\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{d}{dn}\left(\frac{7n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} + \frac{3n}{n\sqrt{n}} - \frac{10\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{d}{dn}\left(7 + \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{10}{n}\right) = \frac{d}{dn}\left(7 + \left(3 \cdot n^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(10\, n^{-1}\right)\right) =$$

$$= -\frac{3}{2n\sqrt{n}} + \frac{10}{n^2}$$

Calcolo la positività della derivata

può essere qualsiasi numero $\in \mathbb{R}$

sempre positivo

$$-\frac{3}{2n\sqrt{n}} + \frac{10}{n^2} > 0 \Rightarrow \frac{3}{2n\sqrt{n}} - \frac{10}{n^2} < 0 \Rightarrow \frac{3n - 20\sqrt{n}}{2n^2\sqrt{n}} < 0 \Rightarrow n > 0$$

sempre positivo

Quindi possiamo dire che $C_1 = 7$ e $C_2 = \frac{7 \cdot 7\sqrt{7} + 3 \cdot 7 - 10\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = 6,7$

$5n^2 - 8\sqrt{n} + 1 = \Theta(n^2)$

Calcolo il limite del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 8\sqrt{n} + 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 5 - \frac{8}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} = 5$$

calcolo la derivata del rapporto:

$$\frac{d}{dn}\, 5 - \frac{8}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} = \frac{d}{dn}\left(5 - 8 \cdot n^{-\frac{3}{2}} + n^{-2}\right) = \frac{12\sqrt{n} - 2}{n^3}$$

Studio la monotonia:

$$\frac{12\overbrace{\sqrt{n}}^{\to\, n>0} - 2}{\underbrace{n^3}_{\to\, n>0}} > 0 \quad \Rightarrow n > 0$$

Possiamo così dire che $C_2 = 5$ e $C_1 = \frac{5 \cdot 5^2 - 8\sqrt{5} + 1}{5^2} \simeq 4,32$

$$\log\left(\frac{n}{7}\right) = \Theta\left(\log(n^4)\right)$$

$$\log(n) - \log(7) = \Theta\left(4\log(n)\right)$$

Calcolo il limite del rapporto :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)-\log(7)}{4\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{4\log(n)} - \frac{\log(7)}{4\log(n)} = \frac{1}{4}$$

Calcolo la derivata :

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{4} - \frac{\log(7)}{4\log(n)}\right) = \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{4} - \left(\log(7)\left(4\log(n)\right)^{-1}\right)\right) = \frac{\log(7)}{2n\ln(2)\log(n)^2}$$

Studio la monotonia della funzione :

$$\frac{\log(7)}{\underbrace{2n}_{n>0}\ln(2)\underbrace{\log(n)^2}_{n>0}} > 0 \implies n > 0$$

Possiamo quindi dire che $c_2 = \frac{1}{4}$ e $c_1 = \dfrac{\log\left(\frac{1}{4}\right) - \log(7)}{4\log\left(\frac{1}{4}\right)} \simeq 0,6$