Esercizio 1

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 1 VL quindi sono dipendenti

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ generano.

Non è una base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Sono indipendenti perché non sono proporzionali.

Non possono generare per $\#\text{vettori} = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Non sono una base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sono indipendenti

Poiché sono 4 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$, la matrice formata da questi ha rango completo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ generano $\Rightarrow$ sono una base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sono linearmente indipendenti

Poiché sono 3 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, la matrice formata da questi ha rango completo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ generano $\Rightarrow$ sono una base.

- $\{1+T^2, 1-T-T^2, 2T+3T^2\} \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$\{1+T^2, 1-T-T^2, 2T+3T^2\} \sim \{1+T^2, T+T^2, 2T+3T^2\} \sim \{1+T^2, T+T^2, T^2\}$

È una base $\Leftrightarrow x(1+T^2) + y(T+T^2) + zT^2 = 0 \Leftrightarrow x, y, z = 0$

- $\{1-T, T^2+T, T^2+1, T^2-T\} \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

Non sono linearmente indipendenti perché $4 > \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[T]) = 3$.

Vediamo se generano:

$\{1-T, T^2+T, T^2+1, T^2-T\} \sim \{1-T, T^2+T, T^2+1, 2T^2\} \sim \{T+T^2, T^2+T, T^2+1, 2T^2\} \sim \{T+T^2, 0, T^2+1, 2T^2\}$

$\sim \{1+T,\ 0,\ T^2+1,\ 2T^2\}$

$a(1+T)+b(T^2+1)+c(2T^2)=0 \sim a+aT+bT^2+b+2cT^2=0 \sim (b+2c)T^2+aT+(a+b)=0 \sim$

$\sim \begin{cases} b+2c=0 \\ a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \begin{cases} c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow$ 3 vettori linearmente indipendenti generano $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$

Possiamo dunque dire che sono una base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Sicuramente non generano in quanto $3 < \dim(\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$

Vediamo se sono linearmente indipendenti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{Sì}$$

Possiamo dunque dire che non sono una base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ T=0 \end{cases}$$

Sono 4 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ sono una base $\rightarrow$ generano.

Esercizio 2

$$W: \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \subset \mathbb{F}_2^5$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$+2$ $\qquad$ $-\frac{6}{5}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sono 3 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ sono una base

$\text{Span}\left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ T^2-2T,\ 1+T+T^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$

$\left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ T^2-2T,\ 1+T+T^2 \right\} \sim \left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ T^2-2T,\ T+T^3 \right\} \sim$

$\sim \left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ 2T^3+2T\ \ T+T^3 \right\} \sim \left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ T^3+T,\ T+T^3 \right\} \sim$

$\sim \left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ T^3+T,\ 0 \right\} \Rightarrow \left\{ 1+T^2-T^3,\ T^2+2T^3,\ T^2-2T \right\}$ sono una base

$\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-6\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\5\\-3\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$\left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-6\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\5\\-3\end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\5\\-3\end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\-1\end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\-1\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\5\\3\end{pmatrix} \right\}$

sono una base

$\text{Span}\left\{ 1-T-T^2,\ 1+T+T^2,\ 1-T+T^2 \right\} \leq \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$\left\{ 1-T-T^2,\ 1+T+T^2,\ 1-T+T^2 \right\} \sim \left\{ 1-T-T^2,\ 2,\ 1-T+T^2 \right\} \sim \left\{ 1-T-T^2,\ 2,\ 2-2T \right\} \sim \left\{ 1-T-T^2,\ 1,\ 1-T \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ 1-T-T^2,\ 1+T+T^2,\ 1-T+T^2 \right\}$ sono linearmente indipendenti