TRACCIA - 11 OTTOBRE 2024

Esercizio 1

$\forall x\,((p \vee q) \wedge (\exists y\,(r \wedge \neg s)))$

Esercizio 2

(i)

$*$ è commutativa $\iff \forall f,g \in T\,(f*g = g*f)$

$(f*g)(n) = f(8) + g(n) \qquad (g*f)(n) = g(8) + f(n)$

Non coincidono, quindi non è commutativa.

$*$ è associativa $\iff \forall f,g,z\,(f*(g*z) = (f*g)*z)$

$(f*(g*z))(n) = f(8) + (g*z)(n) = f(8) + g(8) + z(n)$

$((f*g)*z)(n) = (f*g)(8) + z(n) = f(8) + g(8) + z(n)$

Quindi è associativa.

(ii)

$x \in T$ è neutro a sinistra $\iff \forall f \in T\,(x*f = f)$

$(x*f)(n) = x(8) + f(n) = f(n) \iff x(8) = 0.$

Dunque è neutro a sinistra qualsiasi applicazione $x \in T$ t.c. $x(8) = 0$.

x è neutro a destra $\iff \forall f \in T\,(f*x = f)$

$(f*x)(n) = f(8) + x(n) = f(n) \iff x(n) = f(n) - f(8).$

$x(n)$ però dipende dal valore di $f(n)$ che non è costante. Quindi non c'è neutro a destra.

Possiamo quindi dire che $(T,*)$ è un semigruppo con elemento neutro a sinistra.

(iii)

$x \in T$ è cancellabile a sinistra $\iff \forall f,g \in T\,(x*f = x*g \Rightarrow f = g).$

$(x*f)(n) = x(8) + f(n) \qquad (x*g)(n) = x(8) + g(n)$

$x(8) + f(n) = x(8) + g(n) \Rightarrow x(8) - x(8) + f(n) = g(n) \Rightarrow f(n) = g(n).$

Quindi ogni applicazione è cancellabile a sinistra.

$x \in T$ è cancellabile a destra $\iff \forall f,g \in T\,(f*x = g*x \Rightarrow f = g)$

$(f*x)(n) = f(8) + x(n) \qquad (g*x)(n) = g(8) + x(n)$

$f(8) + x(n) = g(8) + x(n)$

Questo implica che $f(8) = g(8)$ ma non che f e g sono uguali per tutti gli altri valori. Quindi possiamo dire che nessun $x \in T$ è cancellabile a destra.

Avendo visto che non ci sono elementi neutri a destra, non ha senso vedere quali sono gli elementi simmetrizzabili a destra.

$f \in T$ è simmetrizzabile a sinistra $\iff \exists \bar{f} \in T \, (\bar{f} * f = x)$, dove x è elemento neutro a sinistra.

$(\bar{f} * f)(n) = \bar{f}(8) + f(n) = x(n) \implies \bar{f}(8) = x(n) - f(n)$.

$\bar{f}(8)$ è costante, quindi anche $x(n) - f(n)$ deve essere costante per ogni n. Quindi le uniche funzioni simmetrizzabili a sinistra sono le funzioni costanti.

(iv)

f è suriettiva $\iff \forall y \in \mathbb{Z} \, (\exists n \in \mathbb{Z} \, (f(n) = y))$.

Prendiamo $f, g \in S$. $(f * g)(n) = f(8) + g(n)$. Dato che g è suriettiva, esiste un y tale che $g(n) = y$. Poiché $y \in \mathbb{Z}$ allora anche $f(8) + y \in \mathbb{Z}$, quindi $(f * g)$ è suriettiva. In conclusione, S è chiuso rispetto a $*$.

f è iniettiva $\iff \forall x, y \in \mathbb{Z} \, (f(x) = f(y) \implies x = y)$.

Siano $f, g \in I$, tali che $(f * g)(n_1) = (f * g)(n_2)$.

$(f * g)(n_1) = f(8) + g(n_1)$

$(f * g)(n_2) = f(8) + g(n_2)$

$\hookrightarrow$ Perché $f(8)$ è cancellabile

$f(8) + g(n_1) = f(8) + g(n_2) \implies g(n_1) = g(n_2) \implies n_1 = n_2$

$\hookrightarrow$ perché g è iniettiva.

Dunque I è chiuso rispetto a $*$.

Per queste due verifiche fatte è banale dire che B è chiuso rispetto a $*$.

Siano $f, g \in C$. Questo significa che $f(n) = C_1$ e $g(n) = C_2$.

$(f * g)(n) = f(8) + g(n) = f(8) + C_1 \in C$.

Quindi C è chiuso rispetto a $*$.

Siano ora $f, g \in U$. Significa che $f(n) \geq 0$ e $g(n) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$(f * g)(n) = f(8) + g(n) \geq 0 \implies \mathcal{U}$ è chiuso rispetto a $*$.

Esercizio 3

Una permutazione f di X è una funzione biettiva da X in X. Dato che già sappiamo che $f(42) = 18$ e $f(18) = 42$, ai 99 elementi di X, dobbiamo togliere 2, quindi rimaniamo con 97 elementi. Il numero di permutazioni sarà quindi dato da $97!$.

Esercizio 4

$f \in Corr(A,B)$ è una applicazione se e solo se $\forall x \in A(\exists!\, y \in B(f(x)=y))$

Dobbiamo vedere che $\forall \{a,b\} \in P$ esiste un unico elemento $\{c,d\}$ tale che $f(\{a,b\}) = \{c,d\}$. Che esista è banalmente vero in quanto $\{ab\} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\{2ab\} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e, inoltre, $\{ab\} \neq \{2ab\}$.

Per l'unicità invece dobbiamo vedere che $\forall \{a,b\}, \{\bar{a},\bar{b}\} \in P$
$(\{a,b\} \neq \{\bar{a},\bar{b}\} \Rightarrow f(\{a,b\}) \neq f(\bar{a},\bar{b}\}))$

$f(\{a,b\}) = \{ab, 2ab\}$ $\quad$ $f(\{\bar{a},\bar{b}\}) = \{\bar{a}\bar{b}, 2\bar{a}\bar{b}\}$.

$\{ab\} \neq \{\bar{a}\bar{b}\}$ in quanto $\{\bar{a}\} \neq \{a\} \wedge \{\bar{b}\} \neq \{b\}$. Lo stesso vale per $\{2ab\} \neq \{2\bar{a}\bar{b}\}$.

(ii)

f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall(\{a,b\},\{x,y\}) \in P \times P\ (f(\{a,b\}) = f(\{x,y\}) \Rightarrow \{a,b\} = \{x,y\})$

L'applicazione però non è iniettiva in quanto, considerando $\{2,6\}$ e $\{4,3\}$:

$f(\{2,6\}) = 12 = f(\{4,3\})$ ma $\{2,6\} \neq \{4,3\}$.

f è suriettiva $\Leftrightarrow im(f) = P \Leftrightarrow \forall y \in P(\exists x \in P(f(x) = y))$.

Non è neanche suriettiva in quanto, se consideriamo ad esempio $\{1,3\}$, non esiste nessun elemento in P tale che $\{1,3\}$ sia immagine di quell'elemento. Di conseguenza, non è neanche biettiva.

$I = \{\{k,2k\} / k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge \exists \{a,b\} \in P / k = ab\}$.

Esercizio 5

(i)

Il grado di f è 5. Sappiamo che è riducibile, ma non ha radici i $\mathbb{Z}_{71}$. Questo significa che, per il teorema di Ruffini, non ci sono fattori irriducibili di grado 1. Per questo f deve avere un divisore irriducibile monico di grado 2 e un divisore irriducibile monico di grado 3 (in quanto la somma dei gradi deve fare 5).

(ii)

Due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ in $\mathbb{K}[x]$ (dove $\mathbb{K}$ è un campo) sono associati se esiste un $u \in \mathbb{K}^*$ tale che $f(x) = u \cdot g(x)$. Per trovare il polinomio monico associato a f, ci basta moltiplicare f per l'inverso moltiplicativo di 16 in modulo 71.

$16x \equiv_{71} 1$

$71 = (4)16 + 7 \Rightarrow 7 = (1)71 + (-4)16$
$16 = (2)7 + 2 \Rightarrow 2 = (1)16 + (-2)7$
$7 = (3)2 + 1 \Rightarrow 1 = (1)7 + (-3)2$
$2 = (2)1 + 0$

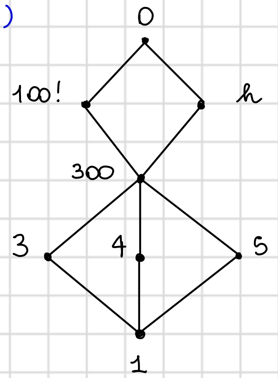
$1 = (1)71 + (-4)16 + (-3)16 + (6)7$
$= (1)71 + (-7)16 + (6)71 + (-24)16$
$= (7)71 + (-31)16$.

$\overline{-31} \equiv_{71} \overline{40}$

Moltiplicando f per $\overline{40}$ otteniamo: $g: x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 - \overline{68}x^2 + \bar{2}$ che è il polinomio monico associato ad f che stavamo cercando.

Esercizio 6

(i)



(ii)

È un reticolo. Non è distributivo in quanto ha un sottoreticolo isomorfo al reticolo diamante. Non è neanche complementato. Quindi non è booleano.

(iii)

Dobbiamo verificare che ρ soddisfi le proprietà di relazione di equivalenza.

• Riflessività: dato che $x\ \sigma_{(s,s)}\ y \iff x = y$, allora è verificata.

• Simmetria: $x \rho y \Rightarrow y \rho x$.

$x \rho y \iff x = y \lor x$ e y non sono confrontabili.

Se $x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow y \rho x$, come volevamo.

Se x e y non sono confrontabili, è equivalente a dire che y e x non sono confrontabili.

Quindi è verificata.

• Transitività: $(x \rho y \land y \rho z) \Rightarrow x \rho z$.

Se $x = y$ e $y = z$ allora $x = z$ e la proprietà è verificata

Se $x = y$ e y e z non sono confrontabili $\Rightarrow$ x e z non sono confrontabili.

Se x e y non sono confrontabili e $y = z$ $\Rightarrow$ x e z non sono confrontabili

Se x e y non sono confrontabili e anche y e z non sono confrontabili $\Rightarrow$ né $x = z$ né x e z sono confrontabili.

Quindi la proprietà è verificata.

$[3]_\rho = [4]_\rho = [5]_\rho$

$[100!]_\rho = [h]_\rho$

$[0]_\rho$

$[1]_\rho$

$[300]_\rho$

Quindi $A/\rho = \{ [3]_\rho, [100!]_\rho, [0]_\rho, [1]_\rho, [300]_\rho \} \Rightarrow |A/\rho| = 5$.

(iv)

Non ne ho idea.