TRACCIA - 15 GENNAIO 2024

Esercizio 1

$\forall y(\exists x((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \wedge \neg(\psi(y) \Rightarrow \vartheta(x)))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall y(\exists x((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \wedge (\psi(y) \wedge \neg \vartheta(x)))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall y(\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(y) \wedge \neg \vartheta(x))$

Esercizio 2

Consideriamo $A \neq \emptyset$. $F \in Partz(A) \Leftrightarrow$

1) $\forall x \in F(x \neq \emptyset)$

2) $\forall x, y \in F(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)$

3) $\bigcup_{x \in F} x = A.$

Il teorema fondamentale delle partizioni e relazioni di equivalenza afferma che esiste una applicazione $\tilde{\pi}$ così definita:

$$\tilde{\pi} : \sim \in Eq(A) \longmapsto A/\sim \in Partz(A)$$

e questa applicazione è biettiva.

Detto questo, una partizione di $\mathbb{Z}$ di cardinalità 2^{10} è dato dall'insieme quoziente di $\mathbb{Z}$ rispetto alla congruenza modulo 2^{10}.

Esercizio 3

Facciamo varie verifiche:

- $n=0$: $2^0 = 1 = 1$ e non minore
- $n=1$: $2^1 = 2 > 1!$ quindi non va bene
- $n=2$: $2^2 = 4 > 2!$ quindi non va bene
- $n=3$: $2^3 = 8 > 3!$ quindi non va bene
- $n=4$: $2^4 = 16 < 4!$

Dunque l'insieme dei valori è $\{n \in \mathbb{N} / n \geq 4\}$

Per quanto visto possiamo dire che $|P(a)| < |Sym(a)|$ per tutti gli insiemi con almeno 4 caratteri.

Esercizio 4

(i)

~~$*$ è associativa se $\forall (x,y),(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} ((x,y) * ((a,b) * (c,d)) = ((x,y) * (a,b)) * (c,d))$~~

$*$ è associativa se $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_{10} (a * (b * c) = (a * b) * c)$

$a * (b * c) = a * (\bar{6}b + c) = \bar{6}a + \bar{6}b + c$

$(a * b) * c = (\bar{6}a + b) * c = \bar{6}a + \bar{6}b + c$

Corrispondono, dunque è associativa.

$*$ è commutativa se $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{10} (a * b = b * a)$

$a * b = \bar{6}a + b \qquad b * a = \bar{6}b + a$

Non corrispondono dunque non è commutativa.

Vediamo gli elementi neutri. $x \in \mathbb{Z}_{10}$ è neutro a sinistra se e solo se $\forall a \in \mathbb{Z}_{10} (x * a = a)$

$x * a = \bar{6}x + a = a \iff \bar{6}x \equiv_{10} 0 \iff \bar{3}x \equiv_5 0 \iff x \in \{0, 5\}$.

Sono gli unici possibili elementi che possono essere neutri a destra. Verifichiamo:

$a * 0 = \bar{6}a + 0 \neq a \qquad a * 5 = \bar{6}a + \bar{5} \neq a$.

Dunque in $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ non ci sono elementi neutri. Poiché questa cosa, non ha senso determinare gli elementi simmetrizzabili.

Per quanto detto, $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ è un semigruppo.

(ii)

P è parte chiusa rispetto a $*$ se $\forall a, b \in P (a * b \in P)$

Prendiamo $a = 2a$ e $b = 2b$ entrambi in P.

$\bar{2}a * \bar{2}b = \bar{2}a + \bar{2}b = \bar{2}(a+b) \in P$. Quindi è una parte chiusa.

Vediamo se è associativa: ~~consideriamo~~ è associativa $\iff \forall a,b,c \in P (a * (b * c) = (a * b) * c)$. Prendiamo $a = 2a$, $b = 2b$, $c = 2c$.

$$\left.\begin{aligned} 2a * (2b * 2c) &= 2a * (2b + 2c) = 2a + 2b + 2c \\ (2a * 2b) * 2c &= (2a + 2b) * 2c = 2a + 2b + 2c \end{aligned}\right\} \text{E' associativa.}$$

Vediamo ora se è commutativa. Lo è $\iff \forall a, b \in P (a * b = b * a)$. Prendiamo sempre $a = 2a$ e $b = 2b$.

$2a * 2b = 2a + 2b \qquad 2b * 2a = 2b + 2a$

L'operazione standard di somma è commutativa, quindi $*$ è commutativa.

D è parte chiusa rispetto a $*$ $\Leftrightarrow \forall a, b \in D (a * b \in D)$.

$a = \bar{2}a + 1$, $b = \bar{2}b + 1$

$a * b = (\bar{2}a + 1) * (2b + 1) = \bar{12}a + \bar{6} + \bar{2}b + 1 = 2(\bar{6}a + b + 3) + 1 \in D$.

0 non è neutro a destra di P e $\bar{5}$ non è neutro a destra di D. Quindi sono semigruppi abeliani.

Esercizio 5

(i)

Il primo corollario dell'esistenza delle soluzioni congruenziali dice che: siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. sia $d = M.C.D(a, m)$. Allora $[a]_m$ è invertibile se e solo se a, m sono coprimi, ovvero se $d = 1$.

$[2027]_{2024} = [3]_{2024}$. 3 e 2024 sono coprimi $\Rightarrow$ è invertibile.

$[1024]_{2024}$ = non ~~sono~~ è invertibile (si possono dividere per 2)

$[-2]_{2024}$ = non è invertibile (si possono dividere per 2)

$[10001!]_{2024}$ = non è invertibile (10001! si può dividere per 2024)

(ii)

$MCD(209, 165) = \bar{11}$

L'equazione congruenziale $209x \equiv_{165} 14$ ha soluzione $\Leftrightarrow \bar{11}/14$. Questo non è vero, quindi non ha soluzione. Diverso invece per $165x \equiv_{209} 44$. Dividendo tutto per $\bar{11}$ otteniamo l'equivalente equazione congruenziale $15x \equiv_{19} 4$. Applichiamo l'algoritmo euclideo, dato che adesso 15 e 19 sono coprimi.

$15x + 19y = 1$

$19 = (1)15 + 4 \Rightarrow 4 = (1)19 + (-1)15$

$15 = (3)4 + 3 \Rightarrow 3 = (1)15 + (-3)4$

$4 = (1)3 + 1 \Rightarrow 1 = (1)4 + (-1)3$

$3 = (3)1 + 0$

$1 = (1)4 + (-1)3$

$= (1)19 + (-1)15 + (-1)15 + (3)4$

$= (1)19 + (-2)15 + (3)19 + (-3)15$

$= (4)19 + (-5)15$

Ci interessa $-\bar{5} = \bar{14}$. Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $\bar{14}$ e otteniamo: $x \equiv_{19} 18$. Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da

$\{x \in \mathbb{Z} / x = 18 + 19k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 6

(i)

E' ben definita in quanto, avendo F insieme di parti non vuote, ~~ogn~~ per ogni elemento di F è determinato il minimo e il massimo. Quindi per ogni elemento del dominio verrà associato un elemento del codominio.

(ii)

$\overleftarrow{f}(\{2\}) = \{x \in F / f(x) = 2\} =$

$= \{x \in F / \min(x) + \max(x) = 2\} = \{\{1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$.

Quindi $|\overleftarrow{f}(\{2\})| = 3$.

(iii)

f non è iniettiva, in quanto, come abbiamo visto nel punto 2, esisto elementi di f che hanno la stessa immagine.

Sì, f è suriettiva in quanto $im(f) = \mathbb{N}$.

Non è biettiva.

(iv)

$[\{2\}]_\sigma = \{x \in F / f(x) = f(\{2\})\}$

$= \{x \in F / \min(x) + \max(x) = 4\}$

$= \{\{0,4\}, \{0,1,2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}\}$

(v)

- Minimo: $x \in F$ è minimo $\iff \forall a \in F (x \tilde{\sigma} a)$.

$x \tilde{\sigma} a \iff ((x = y) \vee (f(x)$ divisore proprio di $f(y)))$. Quindi, x per essere deve avere come immagine ~~un~~ un divisore proprio di tutti gli altri elementi. L'unico elemento possibile è 1. Infatti se cerchiamo $\overleftarrow{f}(\{1\})$ otteniamo $\{0,1\} \in F$, che è il nostro minimo.

- Massimo: $x \in F$ è massimo $\iff \forall a \in F (a \tilde{\sigma} x)$.

Dobbiamo fare un discorso analogo a quanto fatto per il minimo. Qui però dobbiamo trovare $x \in F$ t.c. $f(x)$ viene diviso da tutti gli altri. Questa x può essere solo 0. Quindi il massimo è $\{0\}$.

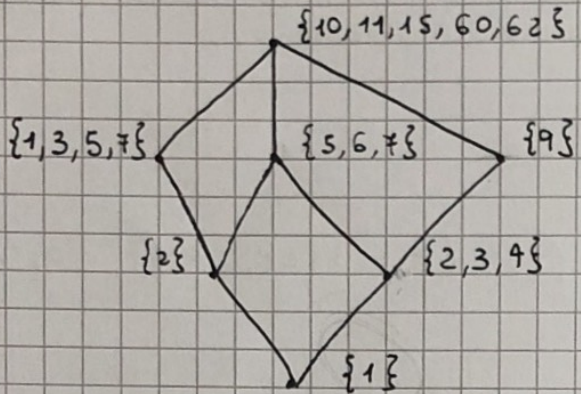
- Minimali e massimali saranno rispettivamente minimo e massimo. Questo perchè se il minimo esiste è anche l'unico minimale e il massimo se esiste è anche l'unico massimale.

$(F, \tilde{\leq})$ è un reticolo $\Leftrightarrow \forall x, y \in F\ (\exists \inf(\{x,y\}) \wedge \exists \sup(\{x,y\}))$. Non è possibile determinare un minimo comune multiplo e un massimo comune divisore per ogni coppia di elementi di F non confrontabili, quindi non è un reticolo.

(vi)

$f(\{1\}) = 2 \qquad f(\{2\}) = 4 \qquad f(\{2,3,4\}) = 6 \qquad f(\{1,3,5,7\}) = 8$

$f(\{5,6,7\}) = 12 \qquad f(\{9\}) = 18 \qquad f(\{10,11,15,60,62\}) = 72.$



$(H, \tilde{\leq})$ è un reticolo in quanto per ogni elemento non confrontabile è possibile determinare inf e sup. Non è distributivo in quanto ha un sottoreticolo isomorfo al reticolo pentagonale. Non sarà quindi neanche booleano. Non è complementato in quanto non esiste complemento per $\{5,6,7\}$. (da vedere)

(vii)

Una catena massimale può essere ottenuta dalla parte $\{\{1\}, \{2,3,4\}, \{9\}, \{10,11,15,60,62\}\}$. Un sottoreticolo booleano massimale invece dai quattro elementi $\{\{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{5,6,7\}\}$.

Esercizio 7

(i)

Per il teorema di Ruffini, $\bar{2}$ sarà radice di f_p. Calcoliamo e vediamo per quali valori si annulla:

$$(\bar{4}(2)^3 + (2)^2 - \bar{2}(2) - \bar{4})(2 + \bar{7}) = \overline{84}$$

$$\overline{84} = 2^2 \cdot 7 \cdot 3$$

Quindi $X = \{2, 7, 3\}$.

(ii)

2 è radice di f_7, come abbiamo visto nel punto precedente, quindi dividiamo f_7 per $x - \bar{2}$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\bar{4}x^3 & +x^2 & -\bar{2}x & -4 & x-2 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +8x^2 & & & \bar{4}x^2+\bar{2}x+\bar{2} \\
\cline{1-4}
// & \bar{2}x^2 & -\bar{2}x & -4 & \\
 & -2x^2 & +\bar{4}x & & \\
\cline{2-4}
 & // & \bar{2}x & -4 & \\
 & & -\bar{2}x & +4 & \\
\cline{3-4}
 & & // & 0 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
\bar{4}x^2 & +\bar{2}x & +\bar{2} & x-5 \\
\cline{4-4}
-4x^2 & +\bar{6}x & & \bar{4}x+1 \\
\cline{1-3}
// & x & +\bar{2} & \\
 & -x & -\bar{2} & \\
\cline{2-3}
 & // & 0 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
\bar{4}x & +1 & x-5 \\
\cline{3-3}
-\bar{4}x & -1 & \\
\cline{1-2}
// & 0 & \bar{4} \\
\end{array}
$$

Quindi $f_7 = (x-2)(x-5)(x-5)(x+1)$

(iii)

Per quanto trovato nel punto precedente, f_7 non ha un divisore irriducibile monico di grado 2.