Esercizio 1

Ricordiamo che una matrice è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+k & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2k & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcoliamo il determinante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+k & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2k & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} =$$

$$= 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1+2k \\ 1 & -k & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2+k & 3 \\ 1 & -k & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2+k & 3 \\ 2 & 0 & 1+2k \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2+k & 3 \\ 2 & 0 & 1+2k \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4k - 4 - 2k^2 - 11k + 13 + 4k^2 - 2k - 2 = 2k^2 - 9k + 7$$

Era anche possibile fare mosse del terzo tipo (sommando la 4^a riga alla 3^a e 2^a, che non altera il determinante) così da eliminare la 4^a colonna e calcolare semplicemente il determinante di una matrice 3×3.

$2k^2 - 9k + 7 \neq 0$ $\qquad\qquad$ $\Delta = b^2 - 4ac = 25$

$k \neq \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \neq \dfrac{9 \pm 5}{4} \Rightarrow k \neq \frac{7}{3}$ o $k \neq 1$

ii) Prendendo $B = \{1, T, T^2\}$, scriviamo F su questa base :

$$\begin{aligned} F(1) &= T^2 - k \\ F(T) &= -T - kT \\ F(T^2) &= 2 - kT^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k & 0 & 2 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 2 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = (-1-k)\begin{vmatrix} -k & 2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = (-1-k)(k^2-2)$$

$\Rightarrow k \neq -1, \pm\sqrt{2}$

Esercizio 2

i) $$\begin{pmatrix} 1 & 2+k & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2k & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzo Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2k & -1 \\ 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2k^2-5k}{2k^2-9k+7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2k & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2k^2-9k+7}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3-k}{2k^2-9k+7}$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+k & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1+2k & 0 \\ 1 & -k & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2k^2-5k+3}{2k^2-9k+7}$$

Quindi, per $k \neq 1, \frac{7}{2}$ la soluzione è:

$$\frac{1}{2k^2-9k+7} \begin{pmatrix} 2k^2-5k \\ 1 \\ 3-k \\ 2k^2-5k+3 \end{pmatrix}$$

ii) $$\begin{pmatrix} -k & 0 & 2 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(F_k)} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1-k & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & -1-k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} -k & 2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} & 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1-k & 0 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} -k & 0 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$-k(-1-k) = k+k^2$$

$$= \frac{1}{(-1-k)(k^2-2)} \begin{pmatrix} k+k^2 & 0 & 1+k \\ 0 & k^2-2 & 0 \\ 2+2k & 0 & k+k^2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Studiamo il determinante della sottomatrice di grado 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Studiamo ora gli orlati della sottomatrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k+1 & 1 \\ -2 & 2k-2 & 0 \\ -1 & k-1 & k-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2k-2 \\ -1 & k-1 \end{vmatrix} + (k-2)\begin{vmatrix} 1 & -k+1 \\ -2 & 2k-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & k+3 & 0 \\ -1 & 2k-1 & k-2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2k-1 & k-2 \end{vmatrix} + (k+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & k-2 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3$$

$k^2 - 4k + 3 \neq 0$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$

$$k \neq \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \neq \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow k \neq 1, 3$$

Studiamo quindi per $k=1$ guardando l'ultimo orlato:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{compatibile}$$

Per $k=3$ invece:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -13 - 9 = 22 \Rightarrow \text{incompatibile}$$