Esercizio 1

$$\overbrace{\ln\left(\frac{n}{e}\right)}^{f(x)} = \Theta\left(\overbrace{\ln\left(n^{e}\right)}^{g(x)}\right)$$

1) Semplifico

$$\ln(n) - \ln(e) = \Theta(e \cdot \ln(n)) \iff \ln(n) - 1 = \Theta(e \cdot \ln(n))$$

2) Faccio il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)-1}{e\cdot\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)\left(1-\frac{1}{\ln(n)}\right)}{\ln(n)\,(e)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Ha come risultato un numero finito, quindi possiamo continuare.

3) Faccio la derivata del rapporto:

$$\frac{d}{dn}\,\frac{\ln(n)-1}{e\cdot\ln(n)} = \frac{1}{e}\,\frac{d}{dn}\left(\left(\ln(n)-1\right)\left(\ln(n)\right)^{-1}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{n\cdot\ln(n)} - \frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{\ln(n)-\ln(n)+1}{n\ln(n)^2}\right) = \frac{1}{e\,n\ln(n)^2}$$

4) Studio la positività della derivata:

$$\frac{1}{e\,n\ln(n)^2} > 0 \iff e\,n\ln(n)^2 > 0 \iff n\ln(n)^2 > 0$$

$$\begin{cases} n > 0 \\ \ln(n)^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n > 0 \\ n \in \mathbb{R} - \{1\} \end{cases} \Rightarrow n \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$$

Poiché è crescente in questo intervallo, $C_2 = \frac{1}{e}$.

Per calcolare C_1:

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)-1}{e\cdot\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\overbrace{\ln(1)}^{0} - \overbrace{\ln(e)}^{1} - 1}{e\left(\underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln(e)}_{1}\right)} = \frac{2}{e}$$