ESEMPIO APPLICAZIONI ALGEBRA LINEARE

1) Ranking di Google

Vediamo i dati:

$I = \{ \text{pagine conoscenti da Google} \} = \{ p_1, \dots, p_n \}$

$L_k = \{ \text{pagine con un link verso la pagina } p_k \}$ $\left(\begin{array}{l} p_i \searrow \\ p_j \nearrow \end{array} p_k \right)$

n_k = # link da p_j ad altre pagine

x_j = punteggio della pagina p_j

Equazione:

$$x_k = \sum_{j \in L_k} \frac{x_j}{n_j}$$

punteggio di P_k → x_k

x_j → punteggio di P_j

n_j → # link uscenti da P_j

$\sum_{j \in L_k}$ → somma di tutte le pagine in L_k

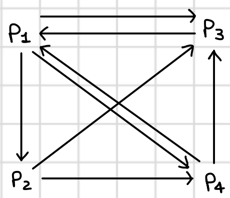
Quindi se $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } P_j \neq L_i \\ \frac{1}{n_k} & \text{se } P_i \in L_i \end{cases}$

Le nostre equazioni definiscono il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

di n equazioni in n variabili

Esempio: prendiamo questa rete



Il nostro obiettivo è quello di trovare il ranking. Prendiamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{x_4}{2} \\ x_2 = \frac{x_1}{3} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \end{cases}$$

↳ P_4 ha 2 link uscenti

$L_1 = \{ P_3, P_4 \}$

Vogliamo però l'equazione in un'altra forma:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} + x_2 = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ \underbrace{-\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2}}_{\text{variabili vincolate}} + \underbrace{x_4}_{\text{variabile libera}} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Risolvendo otteniamo}} \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2}x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{con } x_4 = 6T} (x_1, x_2, x_3, x_4) = (12T, 4T, 2T, 6T)$$

Quindi otteniamo $P_1 > P_3 > P_4 > P_2$, che è il nostro ranking.

Chiamiamo A "matrice", definita

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{dove } a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } P_j \neq L_i \\ \frac{1}{n_K} & \text{se } P_i \in L_i \end{cases}$$

prendiamo poi $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora il problema del ranking è trovare $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tale che $Av = v$.

Teorema: Il problema del ranking ha sempre soluzione se ogni pagina ha un link uscente. La soluzione è unica a meno di riscalare se e solo se la rete è connessa.

2) Machine Learning: dimensionality reduction (PCA: principal component analysis)

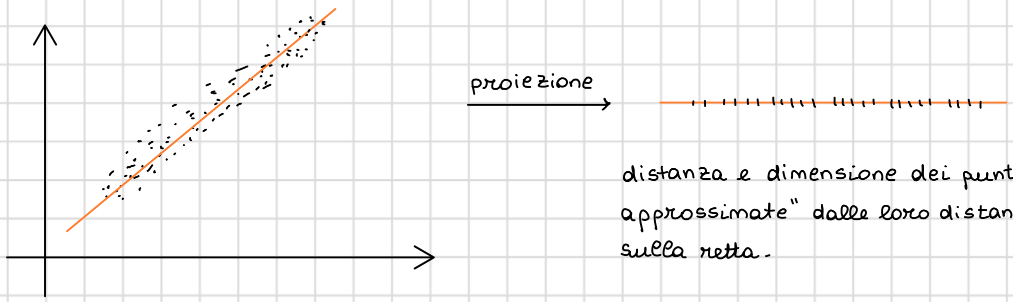
Abbiamo un insieme di dati vettoriali:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \quad \text{con } n \gg 0$$

i: sequenza temporale di dati — n: quantità di dati

Vogliamo rendere i dati m-dimensionali con $m \ll n$ perdendo "poche" informazioni.

Esempio:

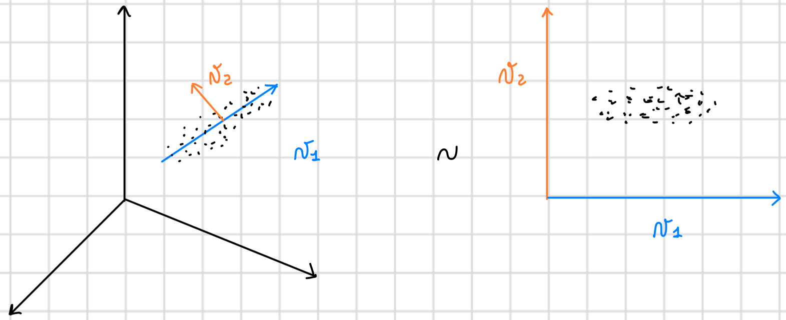


distanza e dimensione dei punti sono "ben approssimate" dalle loro distanze e posizioni sulla retta.

L'idea è quella di trovare le "direzioni principali":

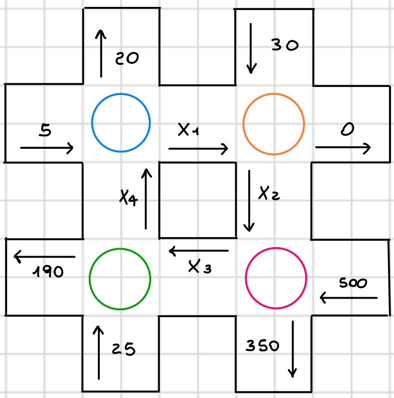
- v_1 = direzione della linea che approssima meglio i dati;
- v_2 = direzione ortogonale a v_1 che approssima meglio la proiezione dei dati nello spazio ortogonale a v_1;

  $\vdots$
- v_n = direzione ortogonale a v_1 che approssima meglio la proiezione dei dati nello spazio ortogonale a $v_1, \dots, v_{n-1}$.



Teorema: le componenti principali si ottengono con autovettori della matrice di covarianza, ordinati in base al valore assoluto degli autovalori relativi

Esempio: distribuzione traffico rete stradale.
Data una rete stradale sappiamo il traffico in alcuni sensi in alcune strade. Cosa possiamo dire sul resto?



idea: per ogni incrocio vale #auto entrata = #auto uscita

- $x_4 + 5 = x_1 + 20$
- $x_1 + 30 = x_2$
- $x_2 + 500 = x_3 + 350$
- $x_3 + 25 = x_4 + 190$

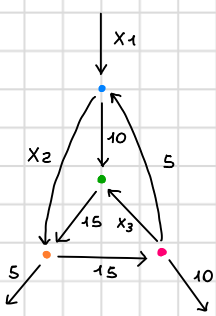
$$\begin{cases} x_4 + 5 = x_1 + 20 \\ x_1 + 30 = x_2 \\ x_2 + 500 = x_3 + 350 \\ x_3 + 25 = x_4 + 190 \end{cases} \sim \begin{cases} -x_1 + x_4 = 15 \\ x_1 - x_2 = -30 \\ x_2 - x_3 = -150 \\ x_3 - x_4 = 165 \end{cases} \sim \begin{cases} // = // \\ x_1 = -15 + x_4 \\ x_2 = 15 + x_4 \\ x_3 = 165 + x_4 \end{cases} \Rightarrow (-15 + x_4, 15 + x_4, 165 + x_4, x_4)$$

Poiché stiamo risolvendo un problema reale, applichiamo delle condizioni exstra: tutti i valori devono essere interi e ≥ 0.
Questo succede se e solo se x_4 è intero ≥ 15. Da questo otteniamo come soluzioni:

$$\begin{pmatrix} n \\ 30+n \\ 180+n \\ 15+n \end{pmatrix}$$

che sono infinite in quanto non conosciamo il numero totale di auto nel sistema.

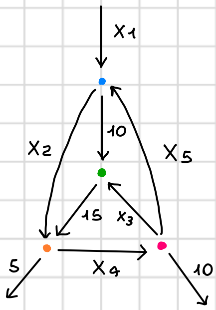
Esempio:



- $x_1 + 5 = x_2 + 10$
- $15 = x_3 + 15$
- $x_2 + 15 = 20$
- $x_3 + 10 = 15$

Il sistema in questo caso viene detto <u>incompatibile</u>

Vediamo, cambiando dei valori, cosa succede:



- $x_1 + x_5 = x_2 + 10$
- $x_4 = x_3 + x_5 + 10$
- $x_2 + 15 = x_4 + 5$
- $x_3 + 10 = 15$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_5 = x_2 + 10 \\ x_4 = x_3 + x_5 + 10 \\ x_2 + 15 = x_4 + 5 \\ x_3 + 10 = 15 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 10 \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_2 - x_4 = -10 \\ x_3 = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 10 \\ x_4 - x_5 = 15 \\ x_2 - x_4 = -10 \\ x_3 = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_5 = x_4 - 15 \\ x_2 = x_4 - 10 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow (15, x_4 - 10, 5, x_4, x_4 - 15) = \begin{pmatrix} 15 \\ 5+n \\ 5 \\ 15+n \\ n \end{pmatrix}$$ per x_4 intero ≥ 15

SISTEMI LINEARI

Def: Consideriamo un sistema S di m equazioni in n variabili.

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{pmatrix}$$

- I numeri a_{ij} sono detti <u>coefficienti del sistema</u>.
  i: indice equazione; j: indice variabile

- I numeri b_i sono i <u>termini noti</u> del sistema.

Nota: lavoriamo sul campo $\mathbb{K}$ generico a meno che non sia assunto il contrario, ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$

- Il sistema è detto <u>omogeneo</u> se $b_1 = \dots = b_n = 0$.

- Una soluzione del sistema è una n-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituendo $\alpha_1, \dots \alpha_n$ nelle equazioni, sono tutte verificate.

- Il sistema si dice <u>compatibile</u> se ammette una soluzione, <u>incompatibile</u> altrimenti.

- $V(S) = \{ \text{soluzioni di } S \} \subset \mathbb{K}^n$

Def: Due sistemi S e S' di m, m' equazioni in n variabili, sono detti equivalenti $\Leftrightarrow$ hanno le stesse soluzioni.

Avevamo detto che:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} + x_2 = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Risolvendo otteniamo}]{} \begin{cases} x_1 = 2 x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3} x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2} x_4 \end{cases}$$

Def: Una soluzione parametrica di un sistema S è un sistema S' equivalente a S, tale che esistano due sottoinsiemi disgiunti VL (variabili libere), VD (variabili dipendenti) $\subset \{x_1, \dots, x_n\}$, $VL \cup VD = \{x_1, \dots, x_n\}$ e S' è

$$S' = \begin{cases} x_{i_1} = b_i + \sum_{x_j \in VL} c_{ij} x_j \\ \\ x_{i_s} = b_s + \sum_{x_j \in VL} c_{s_j} x_j \end{cases}$$

dove a sinistra del sistema appaiono tutte e sole le variabili dipendenti.

In altre parole, ogni variabile dipendente è scritta in un modo unico come combinazione delle libere.

Oss: Un sistema S avrà diverse soluzioni a seconda della scelta di variabili libere e dipendenti, ma sono costanti il numero di VD e VL (lo vedremo meglio più avanti)

Def: il numero di variabili dipendenti è detto rango del sistema e si indica con la lettera r o $rk(S)$.

Se S' è una soluzione parametrica di S allora le soluzioni, sapendo che

$$S' = \begin{cases} x_{i_1} = b_i + \sum_{x_j \in VL} c_{ij} x_j \\ \\ x_{i_r} = b_r + \sum_{x_j \in VL} c_{r_j} x_j \end{cases}, \quad VD = \{x_{i_j}, \dots, x_{i_r}\} \text{ con } r \text{ variabili totali}$$

allora le soluzioni hanno questa forma: $V(S) = \{(\dots, \underbrace{b_i + \sum_{x_j \in VL} c_{ij} x_j}_{x_{i_j} \in VD}, \dots, \underbrace{x_j}_{x_j \in VL}, \dots, \underbrace{b_r + \sum_{x_j \in VL} c_{r_j} x_j}_{x_{i_r} \in VD}, \dots)\}$

Il sistema ha un'unica soluzione <=> non ci sono variabili libere.

Facciamo qualche esempio:

- $\begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = 2/3\, x_4 \\ x_3 = 3/2\, x_4 \end{cases} \Rightarrow \quad VD = x_1, x_2, x_3 \quad VL = x_4 \quad V(S) = \{(2x_4, \frac{2}{3}x_4, \frac{3}{2}x_4, x_4) / x_4 \in \mathbb{R}\}$

- $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + 4y = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 + 3y \\ 2x = -y \\ x = -1 - 4y \end{cases} \sim \begin{cases} -\frac{y}{2} = 1 + 3y \\ -\frac{y}{2} = -1 - 4y \\ x = -\frac{y}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{7}{2}y = -1 \\ \frac{7}{2}y = -1 \\ x = -\frac{y}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} y = -\frac{2}{7} \\ \\ x = \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow$ Soluzione unica $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$, $rk(S) = 2$

Nota: quando abbiamo un sistema con un numero di variabili minore rispetto a quello delle equazioni, allora di solito non ha soluzioni

- $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = -3x \\ x = y - z \end{cases} \sim \begin{cases} y = -3x \\ x = -3x - z \end{cases} \sim \begin{cases} y = -3x \\ 4x = -z \end{cases} \sim \begin{cases} y = -3x \\ z = -4x \end{cases} \Rightarrow \quad rk(S) = 2 \quad V(S) = \{(x, -3x, -4x) / x \in \mathbb{R}\}$

Oss: Un sistema omogeneo ha sempre la soluzione $(0, \dots, 0)$.

Verifichiamo il risultato sostituendolo nel sistema originale:

$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3x = 0 ✓ \\ x + 3x - 4x = 0 ✓ \end{cases}$

$$\bullet \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y - 1 + 3y \\ z = 1 - 3y \\ -x + y + 1 - 3y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ z = 1 - 3y \\ -x - 2y = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2 - 4y + 4y = 3 \\ z = 1 - 3y \\ x = 1 - 2y \end{cases} \sim \begin{cases} 2 = 3 \times \\ \text{''} \\ \text{''} \end{cases} \Rightarrow \text{Incompatibile}$$

Per ora le mosse che abbiamo per risolvere i sistemi sono soltanto:

- Manipolare la singola equazione.
- Sostituire il risultato di un'equazione nelle altre.

Def: Il termine di testa di un'equazione è il termine relativo alla variabile di indice più basso che appare con coefficiente diverso da 0 nell'equazione.

Ad esempio:
$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 \qquad = 1 \end{cases}$$

Termini di testa

Def: un sistema S è <u>a scala</u> $\Leftrightarrow$ per ogni equazione, nelle equazioni successive il termine di testa ha indice più alto.

I termini di testa di un sistema a scala sono detti <u>pivot</u>.

Esempi:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 1 \\ \qquad - x_2 + 2x_3 \qquad = -1 \\ \qquad\qquad x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{a scala} \qquad \begin{cases} \qquad x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{NO a scala}$$

Prop: i) Se un sistema a scala non ha equazioni nella forma $0 = b$, allora è compatibile e si risolve per sostituzione dal basso verso l'alto.

ii) Se un sistema a scala è compatibile il suo rango è uguale al numero di pivot e le VD sono le variabili pivot

iii) Un sistema a scala è incompatibile $\Leftrightarrow$ $0 = b$, $b \neq 0$.

Esempio:

$$\bullet \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 1 \\ \qquad - x_2 + 2x_3 \qquad = -1 \\ \qquad\qquad x_4 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 1 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} -x_1 + 2 + 4x_3 + 9 = 1 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -10 - 4x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -10 - 4x_3 \\ 1 + 2x_3 \\ x_3 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bullet \begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} rk(S) = 2 \\ V(S) = \{ (x_3 - 2x_4, 1 - 2x_3 + x_4, x_3, x_4) \} \end{array}$$

$$\bullet \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad 3x_3 = -6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + 1 - 2 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Quindi sappiamo fare $S' \sim S''$, con S' un sistema a scala e S'' una soluzione parametrica.
Vogliamo però fare $S \sim \, ? \sim S'$, con S un sistema qualsiasi. Quali mosse abbiamo a disposizione?

OVVIE:

- Scambiare due righe
- Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 & (-2) \\ x + z = 0 & (\frac{1}{2}) \end{cases}$$

- Sostituzione: (MA sostituiamo solo quando il sistema è già a scala)

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2y + z = 1 \\ x = 1 + z \end{cases} \sim \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

MENO OVVIE:

- Aggiungere a una riga un multipo di un'altra

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - x - 2y - z = 1 - 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -2y - z = -1 \end{cases}$$

Def: $R_i + \lambda_j S$ = sistema S in cui abbiamo sommato λ volte la j-esima riga alla i-esima.

Esempio:

$$S = \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \sim R_2 + (-1)_1 S = \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -2y - z = -1 \end{cases} \sim R_{1+2}(R_2 + (-1)_1 S) = \begin{cases} x - z = 1 \\ -2y - z = -1 \end{cases}$$

Oss: $R_i - \lambda_j (R_i + \lambda_j S) = S$ perché stiamo aggiungendo e sottraendo λ volte la j-esima riga alla i-esima.

Quindi se $V(S) \subseteq V(R_i + \lambda_j S)$ allora applicando di nuovo $V(S) \subseteq V(R_i + \lambda_j S) \subseteq V(R_i - \lambda_j (R_i + \lambda_j S)) = V(S)$, abbiamo fatto vedere che sono uguali. ($I = J \iff I \supseteq J$ e $I \subseteq J$)

Prendiamo un sistema S di m equazioni in n variabili

$$S = \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

sia $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(S)$. Vogliamo vedere che $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(R_i + \lambda_j S)$

$$R_i + \lambda_j S = \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ (a_{i1} + \lambda a_{j1}) x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn}) x_n = b_i + \lambda b_j &] \text{ } i\text{-esima riga} \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ risolve tutte le righe rimaste invariate tranne la i-esima. Dunque lavoriamo su di essa. L'idea è che se raccogliamo tutti i termini con indice i otteniamo b_i e se raccogliamo tutti i termini con indice j otteniamo b_j:

$$\begin{aligned} & (a_{i1} + \lambda a_{j1}) x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn}) x_n = b_i + \lambda b_j \\ \sim & (a_{i1} \alpha_1 + \dots + a_{in} \alpha_n) + (\lambda a_{j1} \alpha_1 + \dots + \lambda a_{jn} \alpha_n) = b_i + \lambda b_j \\ \sim & (a_{i1} \alpha_1 + \dots + a_{in} \alpha_n) + \lambda (a_{j1} \alpha_1 + \dots + a_{jn} \alpha_n) = b_i + \lambda b_j \\ \sim & \; b_i + \lambda b_j = b_i + \lambda b_j \text{, che è verificato.} \end{aligned}$$

Def: • $R_{ij}S \overset{def}{=}$ sistema con righe i,j scambiate
• $R_{\lambda j}S \overset{def}{=}$ sistema con riga i-esima moltiplicata per $\lambda \neq 0$

Esempio:

$$S = \begin{cases} y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ x \quad\quad - 2z = 1 \end{cases} \sim R_{12}S = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ x \quad\quad - 2z = 1 \end{cases} \sim R_{3-1}(R_{12}S) = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -2y - 3z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim R_{3+2(2)}\left(R_{3-1}\left(R_{12}S\right)\right) = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -5z = 4 \end{cases}$$

Teorema (Eliminazione di Gauss)
Il seguente algoritmo riduce un sistema a scala.
1) Trovo la variabile con indice minimo j_1, e scambio le righe per portarlo alla prima riga;
2) Sommo multipli della prima riga alle successive per eliminare la variabile x_{j_1} da tutte le altre. Il termine x_{j_1} della prima riga è il primo pivot.
3) Se il sistema così ottenuto è a scala, fine. Altrimenti si riparte da 1 ignorando la prima riga.

Esempio:

$$\begin{cases} -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \sim R_{12} \begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \sim R_{3-1} \begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim R_{3+2} \begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -3 \end{cases} \sim R_{4-3} \begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_4 - x_5 = -3 \end{cases}$$

Risolviamo per sostituzione:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x + x_4 + x_5 = 1 \\ + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_4 - x_5 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_5}{2} \\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_5 \\ x_4 = -\frac{3}{2} + \frac{x_5}{2} \end{cases} \Rightarrow V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{x_5}{2} \\ -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_5 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_5 \\ -\frac{3}{2} + \frac{x_5}{2} \end{pmatrix} \middle/ x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Def: La <u>dimensione</u> di $V(S)$ $[\dim(V(S))]$ è il numero di variabili libere in una soluzione di S. In altre parole
$\dim(V(S)) = \#\text{variabili} - rk(S)$.

<u>Nota</u>: un sistema che non pone vincoli su una variabile NON la esclude.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$ è un sistema in $x_1, \underline{x_2}, x_3, x_4$, quindi $\dim(V(S)) = 4 - 2 = 2$.

Esempio:
Lavoriamo sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_4=0 \\ x_1+x_3+x_4=1 \end{cases} \sim_{R_{12}} \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_3+x_4=1 \end{cases} \sim_{R_{3-1}} \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3=1 \end{cases} \sim_{R_{3-2}} \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ x_4=0 \end{cases}$$

$r_K(S)=3$ e $\dim(V(S))=1$

$$\begin{cases} x_1=1+x_3 \\ x_2=1+x_3 \\ x_4=0 \end{cases} \Rightarrow V(S)=\left\{ \begin{pmatrix} 1+x_3 \\ 1+x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ x_3 \in \mathbb{F}_2 \right\}$$, abbiamo due soluzioni per la scelta di x_3: $\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$

Oss.: • Se $|\mathbb{K}|=\infty$ allora $|V(S)| \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{matrix} \right.$
• Se $|\mathbb{K}|=q$ allora $|V(S)| \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ q \end{matrix} \right.$

SISTEMI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO

k è un parametro che deve assumere valori in $\mathbb{K}$. Il sistema i cui coefficienti e termini noti dipendo da k si indica con S_k. Lo tratteremo come un numero qualsiasi evitando di dividere per zero.

Esempio:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_1+x_3-2x_4=k \\ x_1-kx_2-kx_4=k \end{cases} \sim_{\substack{R_{3-1}\\R_{4-1}}} \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_2-x_3-x_4=k-1 \\ (-k+1)x_2-2x_3+(-k+1)x_4=k-1 \end{cases} \sim_{\substack{R_{3-2}\\R_{4-(-k+1)}}} \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ -2x_3-2x_4=k \\ (k+3)x_3=2k-2 \end{cases} \sim$$

$$\sim_{R_3:(-2)} \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_3+x_4=-\frac{k}{2} \\ (k+3)x_3=2k-2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_3+x_4=-\frac{k}{2} \\ (-k+3)x_4=(-k+3)-\frac{k}{2} \end{cases}$$

Per $k=3$:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_3+x_4=-\frac{3}{2} \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow r_K(S)=3 \qquad \dim(V(S))=1$$

Per $k \neq 3$:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_3+x_4=-\frac{k}{2} \\ x_4=-\frac{k}{2} \end{cases} \Rightarrow r_K(S)=4,$$ soluzione unica $(\dim(V(S))=0) = \left(k,-1+\frac{k}{2},0,-\frac{k}{2}\right)$

dividiamo per $(-k+3)$

NOTAZIONE VETTORIALE

Def: definiamo uno spazio vettoriale $\mathbb{K}^n = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Big/ a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K} \right\}, +, \cdot \right)$

• $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

• $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{K}$

Esempio:

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad V(S) = \left\{\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}x_3 - x_4,\ 1 - 3x_3 + x_4,\ x_3, x_4\right)\right\} \longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 1 - 3x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Def: La notazione vettoriale di $V(S)$ è:

$$V(S) = \left\{ v_0 + \sum_{x_j \in VL} x_j v_j \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{0,1} \\ \vdots \\ \alpha_{0,n} \end{pmatrix} + x_{j_1} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{1,n} \end{pmatrix} + \dots + x_{j_{n-r}} \begin{pmatrix} \alpha_{n-r,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-r,n} \end{pmatrix} \right\}$$

SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

Def: Sia $S = \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ allora il sistema omogeneo associato $S_0 = \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Oss: S omogeneo $\iff 0 \in V(S) \iff V(S) = V(S_0)$

Esempio:

$$S = \begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad S_0 = \begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$V(S_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ma è uguale a $V(S)$ senza il termine costante.

Th: prendo S sistema compatibile, $v_0 \in V(S) \subset \mathbb{K}^n$. Ogni soluzione di S si scrive come $v_0 + w$, con $w \in V(S_0)$, ovvero $V(S) = v_0 + V(S_0)$ e chiamo v_0 soluzione particolare di S.

Dim: Vogliamo mostrare:

1) Se $w \in V(S_0)$, $v_0 + w \in V(S)$
2) Se $v_0, v_1 \in V(S)$, $v_1 - v_0 \in V(S_0)$

Punto 1: $v_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ allora $v_0 + w = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$ che deve soddisfare la i-esima equazione di S.

$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n = b_i \longrightarrow$ * sostituiamo $\longrightarrow b_i + 0 = b_i$ ✓

risolve $V(S)$ ↳ risolve $V(S_0)$

Punto 2: $v_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, allora $v_1 - v_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma_n - \alpha_n \end{pmatrix}$ che risolve sempre la i-esima equazione di S.

Sostituendo otteniamo $b_i - b_i = 0$ ✓

Corollario: se $V(S) = \left\{ v_0 + \sum_{x_j \in VL} x_j v_j \right\}$ allora $V(S_0) = \left\{ \sum_{x_j \in VL} x_j v_j \right\}$

*

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \sim$

$\sim a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = b_i \sim$

$\sim \underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ perché } v_0 \in V(S)} + \underbrace{(a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n)}_{0 \text{ perché } w \in V(S_0)} = b_i \sim$

$\sim b_i + 0 = b_i$ ✓

NOTAZIONE MATRICIALE

Def: una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una collezione di mn elementi di $\mathbb{K}$ indicizzati da due indici $1 \leq i \leq m$ (idice di riga) e $1 \leq j \leq n$ (indice di colonna).

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La i-esima riga A_i di A è il vettore riga $(a_{i1}, \dots, a_{in})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La j-esima colonna A^j di A è il vettore colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = (1\ 0\ 1)$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = (1\ 2)$ $\quad A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notazione: a volte scriveremo $A = (A^1 \dots A^n)$ o $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

Def: dato un sistema di m equazioni in n variabili,

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

la <u>matrice dei coefficienti</u> di S è:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il <u>vettore dei termini noti</u> di S è $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.
La <u>matrice completa</u> di S è:

$$(A|b) = (A^1 \dots A^n / b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Esempio:

- $S = \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$

Def: Le mosse di riga $R_{i+\lambda j}$, R_{ij}, $R_{\lambda i}$ sono definite anche nelle matrici e $R_*(A|b)$ è la matrice completa di $R_*(S)$, in altre parole fare mosse sul sistema o sulla matrice è uguale.

Def: Una matrice A è a scala se sotto e a sinistra del primo termine non nullo di ogni riga ci sono solo zeri. Questi termini sono i pivot di A.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss: S è a scala <=> (A|b) è a scala

Quindi abbiamo una nuova tattica: $S \longrightarrow (A|b) \longrightarrow (A'|b') \longrightarrow S'$

sistema — matrice completa — a scala — sistema a scala

Esempio:

- $S = \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_{2-1} \\ R_{3-2(1)}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim_{R_{3-\frac{1}{2}(2)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & & -3/2 \end{array}\right)$

$$\sim \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y = 1 \\ 0 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Incompatibile}$$

- $S = \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 1 \\ -2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{x_4}{2} - \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow V(S) \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_0} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V(S_0)} \right\}$

Oss: S è compatibile <=> quando $(A', b') \sim (A|b)$ è una forma a scala della matrice $(A|b)$, nessun pivot di $(A'|b')$ sta nell'ultima colonna

Esempio:

può essere omesso in questo caso

$$S = \begin{cases} x_1 + kx_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + (k-2)x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - kx_4 = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & (k-2) & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -k & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & (1+k) & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & (k-2) & 0 \\ 0 & 1 & (2-2k) & -k & 0 \end{array}\right) \sim_{R_{23}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & (k-2) & 0 \\ 0 & 2 & (1+k) & -2 & 0 \\ 0 & 1 & (2-2k) & -k & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & (k-2) & 0 \\ 0 & 0 & (k-1) & (-2k+2) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2k) & (-2k+2) & 0 \end{array}\right)$$

Assumiamo $k \neq 1$ poi ci torniamo dopo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & (k-2) & 0 \\ 0 & 0 & (k-1) & (-2k+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-6k & 0 \end{array}\right)$$

Se $K \neq 1 \wedge K \neq 2/3$, soluzione unica ($r_K = 4$).
Se $K = 2/3$, allora:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r_K = 3, \text{ compatibile} \quad \dim(V(S)) = 1$$

Per $K = 1$, allora andiamo a sostituire il valore nell'ultimo passaggio in cui avevamo assunto $K \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \end{array}\right) \sim_{R_{34}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \Rightarrow r_K = 3, \text{ compatibile} \quad \dim(V(S)) = 1$$

Esempio: $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$

$\hookrightarrow$ classi di resto modulo 3

$$S = \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y + 2Kz = 2 \\ x + 2y + (K+1)z = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2K & 2 \\ 1 & 2 & (K+1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2K & 2 \\ 0 & 0 & (K+2) & 1 \end{array}\right)$$

Per $K = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 0 = 1 \quad \times \end{cases} \Rightarrow \text{Incompatibile}$$

Per $K \neq 1$:

$$\begin{cases} x = 2(1 + 2y + 2z) = 2\left(1 + \frac{2K}{K+2} + 1 + \frac{2}{K+2}\right) = 1 + \frac{K+1}{K+2} \\ y = -\frac{2K}{K+2} + 2 \\ z = \frac{1}{K+2} \end{cases}$$

SPAZI VETTORIALI

Def: Un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è una quaterna $(V, +, 0, \cdot)$, dove:

A) $(V, +, 0_V)$ è un gruppo commutativo con operazione $+$ ed elemento neutro 0_V. In particolare:

$v + (w + u) = (v + w) + u$, $v + 0_V = v$, $v + w = w + v$, $v + (-v) = 0_V$

associatività, el. neutro, commutatività, unicità inverso

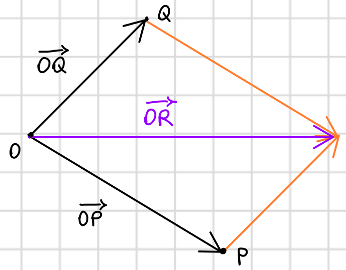
B) Abbiamo una moltiplicazione $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ tale che:
$(\lambda v) \mapsto \lambda \cdot v$

- $\gamma(\lambda v) = (\gamma\lambda)v$
- $(\gamma + \lambda)v = \gamma v + \lambda v$
- $\lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v'$
- $\lambda 0_V = 0_V$, $1 \cdot v = v$, $0 \cdot v = 0_V$

Esempio:

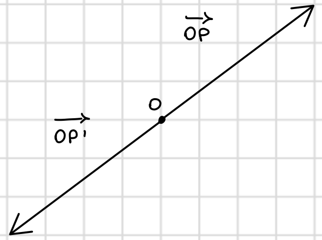
- $\left(\mathbb{K}^n, +, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdot\right)$ è uno spazio vettoriale perché le proprietà valgono per il campo $\mathbb{K}$ e quindi su ogni componente.

- $V_O = \{$segmenti orientati sul piano euclideo $O\}$ ↳ origine



$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ dove R é il vertice del parallelepipedo con lato $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ opposto a O.

Oss: - Per costruzione $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$, ed é associativa.
- L'inverso é il segmento con stessa direzione e lunghezza ma verso opposto.
- $0_V = \overrightarrow{OO}$



$R = O \Rightarrow \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO} = 0_V$

$\lambda \cdot \overrightarrow{OP}$ = segmento con stesso verso, direzione e lunghezza $\lambda \| \overrightarrow{OP} \|$ se $\lambda > 0$, verso opposto se $\lambda < 0$.

- $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, 0_{m,n}, \cdot)$ spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$- \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \vdots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$- \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ & \vdots & \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{K}[T]$ = polinomi nella variabile T
  - $p = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$, $q = b_0 + b_1 T + \dots + b_n T^n$
    $p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) T^1 + \dots + (a_n + b_n) T^n$
  - $0_{\mathbb{K}[T]} = 0$
  - $\lambda p = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_n T^n$

- $\mathbb{K}_{\leq d}[T]$ = polinomi di grado $\leq d$ con le stesse operazioni.

  $\mathbb{R}_{\leq 2}[T] = \{a + bT + cT^2 \,/\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$

- $C^0(\mathbb{R})$ = funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$
  - $f, g \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f + g \in C^0(\mathbb{R})$
  - $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda f \in C^0(\mathbb{R})$
  - $\underline{0}$ funzione costante 0, continua

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Quando abbiamo una nuova classe di oggetti vogliamo capire:
1) Quali trasformazioni
2) Sotto-oggetti
3) "Buona descrizione"

Nel nostro caso partiamo dal punto (2) e vediamo cos'è un sottospazio di uno spazio vettoriale.

Def: Sia $(V, +, 0, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un sottospazio $W \subset V$ è un sottoinsieme contenente lo 0_V tale che $(W, +, 0_V, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dove le operazioni sono le restrizioni delle operazioni di V.

Prop: Un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$
i) $0_V \in W$
ii) Se $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$
iii) Se $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda w \in W$

Esempio:

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, infatti:

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0+0 \\ -0 \end{pmatrix}$, si ottiene con $x, y = 0$

ii) Prendiamo $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 + y_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \in W$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + y_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \in W$ due elementi generici, allora:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 + y_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + y_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 + y_0 + x_1 + y_1 \\ -y_0 - y_1 \end{pmatrix} \overset{\text{raccogliamo}}{=} \begin{pmatrix} (x_0 + x_1) \\ (x_0 + x_1) + (y_0 + y_1) \\ -(y_0 + y_1) \end{pmatrix} \in W$$ scegliendo $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$.

iii) $\lambda \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda(x+y) \\ \lambda(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x + \lambda y \\ -\lambda y \end{pmatrix} \in W$ scegliendo λx e λy.

- $\left\{ \begin{pmatrix} x+1 \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ NON è un sottospazio in quanto non vale la proprietà (i).

- $\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ NON è un sottospazio per la proprietà (iii) se $\lambda < 0$

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ \sqrt[3]{x^3+y^3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ NON è un sottospazio per la proprietà (ii), infatti prendendo:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, la loro somma $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a W? Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \\ \sqrt[3]{x^3+y^3} = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x^3 + y^3 = 2^3 = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ 2 = 8 \quad \times \end{cases}$$

• $V = \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / a, b, d \in \mathbb{K} \right\}$ é un sottospazio perché:

i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \iff a, b, d = 0$

ii) $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & d_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1) & (b_0 + b_1) \\ (b_0 + b_1) & (d_0 + d_1) \end{pmatrix} \in W$

iii) $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \in W$

• $V = \mathbb{K}_{\leq 2}[T]$, $W = \{ a(T-1) + b(T^2 - T) / a, b \in \mathbb{K} \}$ é un sottospazio.

Prendiamo ora: $W' = \{ a(T-1) + b(T^2 - T) + c(T^2 - 2T + 1) / a, b, c \in \mathbb{K} \}$
Questo é un sottospazio. Osserviamo che $W' \supseteq W$, però $T^2 - 2T + 1 = T^2 - T - (T-1)$. Quindi
$a(T-1) + b(T^2 - 1) + c(T^2 - 2T + 1) = a(T-1) + b(T^2-1) - c(T-1) + c(T^2 - 1) =$
$= (a-c)(T-1) + (b+c)(T^2 - T) \in W \Rightarrow W = W'$. Quindi la presentazione di W era ridondante.

• $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$, $V(S) \in \mathbb{R}^3$ é un sottospazio. Infatti:

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é una soluzione

ii) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in V(S) \Rightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 + z_0 + z_1 = 0 \\ -x_0 - x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(x_0 + z_0)}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(x_1 + z_1)}} = 0 \\ \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{(-x_0 + y_0 + z_0)} + \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{(-x_1 + y_1 + z_1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in V(S)$

iii) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in V(S) \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_0 + \lambda z_0 = 0 \\ -\lambda x_0 + \lambda y_0 + \lambda z_0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda(x_0 + z_0) = 0 \ \checkmark \\ \lambda(-x_0 + y_0 + z_0) = 0 \ \checkmark \end{cases}$

• $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$ NON é un sottospazio perché non vale la proprietà (i)

PRESENTAZIONI PARAMETRICHE, CARTESIANE

Def: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, prendiamo $U \subseteq V$ un sottinsieme. Il sottospazio generato da U è:

$$\text{Span } U = \left\{ \sum_{v_j \in J} a_j v_j \ / \ J \subseteq U \text{ finito}, a_j \in \mathbb{K} \right\}$$

Se $U = \{ v_1, \dots, v_s \}$ é finito, allora $\text{Span } U = \{ a_1 v_1 + \dots + a_s v_s / a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K} \}$

Notazione: una scrittura $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ é una combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_s$.

Esempio:

- $\text{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) \subset \mathbb{R}^3$

$$= \left\{ a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_1+a_2\\-a_2\end{pmatrix}\right\}$$

- $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{K})$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\right\}$$

- $\text{Span}\{(\{1, T^2, T^4, T^{2n}, \dots\})\} \subset \mathbb{R}[T]$

$=$ {polinomi con soli termini pari}

Prop: $\text{Span}\, U$ è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di V.

Dim: per semplicità supponiamo che $U = \{v_1, \dots, v_s\}$, e che quindi sia finito. Lo $\text{Span}\, U = \{a_1v_1 + \dots + a_sv_s\}$.

i) $0_V = 0v_1 + \dots + 0v_s$ ✓

ii) $v = a_1v_1 + \dots + a_sv_s$ e $v' = b_1v_1 + \dots + b_sv_s$
$v + v' = a_1v_1 + \dots + a_sv_s + b_1v_1 + \dots + b_sv_s = (a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_s+b_s)v_s \in \text{Span}(U)$ ✓

iii) $v = a_1v_1 + \dots + a_sv_s$
$\lambda v = \lambda(a_1v_1 + \dots + a_sv_s) = (\lambda a_1)v_1 + \dots + (\lambda a_s)v_s \in \text{Span}(U)$ ✓

Notazione: Una presentazione parametrica per $W \subset V$ è una scrittura $W = \text{Span}\, U$

Oss: $\text{Span}\, U$ è il più piccolo sottospazio contenente U.

Esempio:

- $W = \{p(T) \in \mathbb{K}_{\leq 2}[T] \,/\, p(1) = 0\}$
allora $\text{Span}\{T-1, T^2-T\} = \text{Span}\{T-1, T^2-2T+1\} = \text{Span}\{T^2-T, T^2-2T+1\} =$
$= \text{Span}\{T-1, T^2-T, T^2-2T+1\}$

Prop: Se S è un sistema omogeneo in n variabili allora $V(S) \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio vettoriale.

Dim: Sappiamo che $V(S) = \{X_{j_1}v_{j_1} + \dots + X_{j_{n-r}}v_{j_{n-r}}\}$ dove $X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-r}}$ sono VL. Questo dice che
$V(S) = \text{Span}\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-r}}\}$

(È possibile utilizzare anche le proprietà della definizione di sottospazio vettoriale)

Esempio:

- $\{x - y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è dato da $x = y + z$ =>

$$\Rightarrow V(S) = \left\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

- $$\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Oss: Una scrittura nella forma $W = V(S)$ o $W : S$ è una presentazione cartesiana per $W \subseteq \mathbb{K}^n$.

Esempio:

- $W = p(1) = 0 \subset \mathbb{K}_{\leq 2}[T]$
- $W = a_{12} = a_{21} \subset \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{K})$

E' possibile passare da una presentazione parametrica a quella cartesiana e viceversa. Per passare da cartesiana → parametrica, prendiamo:

$$W = \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

risolviamo il sistema.
Per il contrario, prendiamo il seguente esempio:

$$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Vogliamo trovare un sistema S tale che $V(S) = W$.

1) Cerco delle equazioni che si annullano in $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Prendiamo quindi un'equazione generica $ax + by + cz = 0$ e sostituiamo:

$$\begin{cases} a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 0 = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 2 + c(-1) = 0 \end{cases} \underset{\text{sottraiamo } 2-1}{\sim} \begin{cases} a + b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}$$

2) Per ogni VL nei coefficienti abbiamo un'equazione => $W : \underset{\text{per } c = 1}{-x + y + z = 0}$

Esempio:

$$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

1) $a - 2b + 2c = 0 \sim a = 2b - 2c$

2) $W : \begin{cases} 2x + 2y = 0 & (b = 1, c = 0) \\ -2x + z = 0 & (b = 0, c = 1) \end{cases}$

La descrizione parametrica, del tipo:

$$W = \operatorname{Span} U = \{a_1 v_1 + \ldots + a_s v_s \,/\, a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{K}\}$$
$$\uparrow$$
$$U = \{v_1, \ldots, v_s\}$$

è ottima per descrivere generici vettori appartenenti a W.
La presentazione cartesiana, del tipo:

$$W: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

è, invece, ottima per dire se un certo v appartiene a W.

Esempio:

- $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4$

Vogliamo la presentazione cartesiana, quindi prendiamo l'equazione generica $ax+by+cz+dT=0$ e la applichiamo:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -c + \frac{d}{2} \\ b = -c - \frac{d}{2} \end{cases} \Rightarrow W: \begin{cases} -x - y + z = 0 & (c=1, d=0) \\ x - y + 2T = 0 & (c=0, d=2) \end{cases}$$

l'importante è che uno sia 0 e l'altro un numero

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{z}{2} - T \\ y = \frac{z}{2} + T \end{cases} \Rightarrow W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Notiamo che contiene un elemento in meno

Chiaramente $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \supseteq \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. Contenuto inverso? Proviamo il primo:

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

(E' come dire che $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Span} U$)

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 1 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2 \\ 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 = 1 - \frac{a_3}{2} \\ a_2 = \frac{a_3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \overbrace{- \frac{a_3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{a_3}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}}^{=0}$$

Possiamo scrivere in più di un modo perché una combinazione di v_1, v_2, v_3 fa 0

Domande :

- Cos'è una presentazione parametrica minima ?
- Quando è che la scrittura $a_1v_1 + \dots + a_sv_s = v$ è unica ?
- Come capire se $\operatorname{Span} U = \operatorname{Span} U'$?

INDIPENDENZA LINEARE, BASI

Def : dei vettori $v_1, \dots, v_s$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se esistono $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ non tutti 0 tale che $a_1v_1 + \dots + a_sv_s = 0_V$. Sono <u>linearmente indipendenti</u> altrimenti.

Esempi :

- v_1 é linearmente dipendente $\Leftrightarrow$ $a v_1 = 0_V$ con $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $v_1 \neq 0_V$
- Se $v_j = 0_V$, allora $v_1, \dots, v_j, \dots, v_s$ sono sempre dipendenti, infatti : $\overset{0_V}{\overset{\shortparallel}{0v_1}} + \dots + \overset{1\cdot 0_V}{\overset{\shortparallel}{1v_j}} + \dots + \overset{0_V}{\overset{\shortparallel}{0v_s}} = 0_V$
- v_1, v_2 sono dipendenti se $a_1v_1 + a_2v_2 = 0_V$ con a_1, a_2 non entrambi 0.
  - $a_1 = 0, a_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = 0_V$
  - $a_2 = 0, a_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = 0_V$
  - $a_1, a_2 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$, quindi sono proporzionali $(v_1 = \lambda v_2)$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono indipendenti
- $T^2 - 2T + 1,\ T^2 + T - 1$ sono indipendenti
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ sono dipendenti

Esempi :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono dipendenti o indipendenti ?

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x + 3y - z \\ x - y + 3z \\ 2x + y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1 VL $\Rightarrow \infty$ soluzioni $\Rightarrow$ sono dipendenti

- $T^2 - 2T + 1,\ T^2 - 1,\ T^2 + T$ sono indipendenti ?

$$a(T^2 - 2T + 1) + b(T^2 - 1) + c(T^2 + T) = 0 \sim (a + b + c)T^2 + (-2a + c)T + (a - b) = 0 \sim \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a - b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a - b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sono indipendenti

- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{F}_3)$ sono indipendenti ?

$$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ c'è 1 VL $\Rightarrow$ sono dipendenti

ne esiste uno non nullo — dato che v_j è combinazione lineare degli altri

OSS: $v_1, \dots, v_s$ sono dipendenti $\Leftrightarrow \exists\, j$ t.c. $v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_s v_s \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v_j \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_s\} \Leftrightarrow \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_s\} = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_s\}$

Dim: $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = 0$, $a_j \neq 0$. Allora $a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1}, \dots, a_s v_s = -a_j v_j \sim$

$\sim \sum_{i \neq j} -\frac{a_i}{a_j} v_i = v_j \sim \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i = v_j$. Quindi se $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$, allora:

$$v = \underbrace{\sum_{i \neq j} a_i v_i}_{\in} + a_j \underbrace{\left(\sum_{i \neq j} \alpha_i v_i\right)}_{\in}$$

$\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_s\}$ $\square$

Prop: $v \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$. Esiste una scrittura $v = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$ con $(a_1, \dots, a_s) \neq (b_1, \dots, b_s)$ se e soltanto se $v_1, \dots, v_s$ sono dipendenti

Dim: Se $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ allora $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s \sim (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_s - b_s) v_s = 0$.
$\quad \| \quad b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$

Quindi se $\exists\, j$ con $a_j \neq b_j$ i vettori $v_1, \dots, v_s$ sono dipendenti.
Viceversa se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0$ è una combinazione non banale ($\exists\, \alpha_j \neq 0$), allora $v = v + 0_V =$
$= a_1 v_1 + \dots + a_s v_s + (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s) = \underbrace{(a_1 + \alpha_1)}_{b_1} v_1 + \dots + \underbrace{(a_s + \alpha_s)}_{b_s} v_s$, e dato che $\alpha_j \neq 0$, $b_j \neq a_j$ $\square$

Def: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, insieme ordinato, è una base di $V \Leftrightarrow$
i) $\operatorname{Span} \mathcal{B} = V$
ii) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti

Se $V = \{0_V\}$, per definizione $\mathcal{B}_V = \emptyset$.

Esempio:

- $V = \mathbb{K}^n$ ha la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Facciamo una verifica:

$\operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} / a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^n$
$\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \\ \frac{7}{11} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0 \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \sim x_1 = \dots = x_n = 0$

- $V = \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ha base canonica $\mathcal{E}_{m,n} = \{E_{ij}\}_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}}$ ($m \cdot n$ elementi):

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Per capire: $\mathcal{E}_{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• $V = \mathbb{K}_{\leq d}[T]$ $\quad B = \{1, T, T^2, \dots, T^d\}$ ($d+1$ elementi) è una base.
Verifichiamo:

$P(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_d T^d \in \text{Span}\, B$

$x_i 1 + x_1 T + \dots + x_d T^d = 0 \iff x_1 = \dots + x_n = 0$

OSS: B base di V. Allora $U = \{v_1, \dots, v_s\}$ genera $V \iff B \subset \text{Span}\, U$.

Dim: $B \subset \text{Span}\, U \Rightarrow \text{Span}\, B \leq \text{Span}\, U \Rightarrow V \subseteq \text{Span}\, U$ $\square$

Esempio:

• $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^2$, infatti $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{Span}\, U$,

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 2/3 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 2/3 \\ y = -1/3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\text{Span}\, U = \mathbb{R}^2$

Th: Sono equivalenti:
i) B base di V
ii) B insieme finito massimale dei vettori indipendenti
iii) B insieme finito minimale dei generatori

Dim: (i $\Rightarrow$ ii) $\quad$ ↳ sfruttiamo l'osservazione sopra

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ indipendenti. $B \cup \{v\} = \{v_1, \dots, v_n, \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m}_{\text{Span}\, B}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow -a_1 v_1 - \dots - a_m v_m + v = 0$ non indipendenti.

(ii $\Rightarrow$ iii)
$B = \{v_1, \dots, v_s\}$ massimale indipendenti. Supponiamo per assurdo che $B \setminus \{u\}$ genera comunque V $\Rightarrow$
$\Rightarrow u$ è combinazione lineare degli altri $\Rightarrow$ il sistema e dipendente, ma per ipotesi B completo è costituito da vettori indipendenti.

(iii $\Rightarrow$ i)
$U' = \{v_1, \dots, v_r\}$ generatori minimale. Se fossero dipendenti $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$, con $a_j \neq 0$. Quindi:
$a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_r v_r = -a_j v_j \Rightarrow v_j \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_r\}$ il che è un assurdo $\Rightarrow$ indipendenti $\square$

Prop: i) $\text{Span}\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_s\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_s\}$
ii) $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti $\iff v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_s$ lo sono.
iii) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_s\}$ è una base $\iff \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_s\}$ lo è.

Dim: i) L'operazione è invertibile quindi basta mostrare che $\text{Span}\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_s\} \subseteq \text{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$.
$v = a_1 v_1 + \dots + a_j (v_j + \lambda v_i) + \dots + a_s v_s = a_1 v_1 + \dots + (a_i + \lambda a_j) v_i + \dots + a_j v_j + \dots + a_n v_s \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$.

ii) Basta mostrare che se $v_1, \dots, v_s$ sono dipendenti $\Rightarrow v_1, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_s$ lo sono.
Se $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = 0$, allora $a_1 v_1 + \dots + (a_i + \lambda a_j) v_i + \dots + a_j (v_j + \lambda v_i) + \dots + a_s v_s =$
$= (a_1 v_1 + \dots + a_s v_s) - \lambda a_j v_i + \lambda a_j v_i = 0 + 0 = 0$

iii) Segue da (i) e da (ii) $\square$

Esempio:

- $U = \{2T^2+T-1,\ T^2-T,\ T^2+2\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$?

$$\{2T^2+T-1,\ T^2-T,\ T^2+2\} \sim \{3T-1,\ T^2-T,\ T^2+2\} \sim \{3T-1,\ -T-2,\ T^2+2\} \sim \{-7,\ -T-2,\ T^2+2\} \sim$$

$\sim \{1, -T, T^2\}$ base $\Rightarrow$ U è base.

Prop: $W \subseteq \mathbb{K}^n$ descritto da un sistema lineare omogeneo S. Le soluzioni di S sono

$$\begin{cases} x_{i_1} = \sum_j \alpha_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_{i_r} = \sum_j \alpha_{rj} x_j \end{cases}$$

dove x_j sono le variabili libere, quindi $V(S) = \{x_{j_1} v_1 + \dots + x_{j_{n-r}} v_{n-r}\}$. Allora $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ è una base di W.

Dim: $\text{Span}\{v_1, \dots, v_{n-r}\} = W$ per costruzione. Per essere indipendenti v_s è l'unico tra $v_1, \dots, v_{n-r}$ che ha un coefficiente diverso da 0 alla posizione j_s $\Rightarrow$ per avere $a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} = 0$ dovremmo avere $\underbrace{a_1}_{\text{coef. } j_1} = \dots = \underbrace{a_{n-r}}_{\text{coef. } j_{n-r}} = 0$ $\square$

Esempio:

- $V: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{x_3}{2} + \frac{3}{2} x_4 \end{cases}$

$$V(S) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Indipendenti: $a \begin{pmatrix} -2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2a + b \\ -a/2 + 3/b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$

Se $W \subseteq V = \text{Span}\, U$, come troviamo una base?

Idea 1: $U = \{v_1, \dots, v_s\}$, facciamo delle combinazioni lineari fino a che $U \sim \{\overbrace{v_1', \dots, v_d'}^{\text{lin. ind.}}, 0, \dots, 0\} \Rightarrow$ base $B_W = \{v_1', \dots, v_d'\}$

Esempio:

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \sim$$

Vogliamo che sia unico con questo coefficiente $\neq 0$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$-\frac{1}{3}$

Vediamo se sono indipendenti:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3y \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 0$$

In generale possiamo sempre estrarre una base da un insieme di generatori.

Th: Se $U = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$, esiste una base di Span U fatta di elementi di U. In particolare se V è generato da un numero finito di elementi allora V ha una base.

Dim: Se $v_{i_1}, \dots, v_{i_d}$ sono linearmente indipendenti massimali in $U \Rightarrow$ generano Span $U \Rightarrow$ sono una base $\square$

Esempio:

perché è combinazione dei primi due

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base.

- $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ e $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{F}_3^4$

Vogliamo trovare una base di Span U e vedere se Span $U = \mathbb{F}_3^4$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$-$ $-$ $+$ $+$ $-$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ indipendenti $\quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y+2z \\ 2x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$, quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base.

Per la seconda richiesta, abbiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in$ Span U, infatti:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x+y+2z = 0 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Però $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \operatorname{Span} U$, infatti $\begin{pmatrix}x\\y\\x+y+2z\\2x+y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \sim \begin{cases}x=0\\y=1\\2z=2\\z=2\end{cases} \begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\\z=2\end{cases}$ incompatibile $\Rightarrow \operatorname{Span} U \subsetneq \mathbb{F}_3^4$

Vogliamo un criterio per dire se dei vettori indipendenti sono una base.

Th: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base. Allora:

i) Se $s > n$ allora $w_1, \dots, w_s \in V$ sono dipendenti

ii) Se $s = n$ e $w_1, \dots, w_s \in V$ sono indipendenti, allora sono una base.

iii) Se $s < n$ allora $w_1, \dots, w_s$ non generano V.

Dim: Prendiamo $V \neq \{0_V\}$ e $w_1, \dots, w_s \in V$ indipendenti. $w_1 = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ e a meno di permutare $v_1, \dots, v_n$ possiamo assumere $a_1 \neq 0$. Allora $w_1, v_2, \dots, v_n$ è ancora una base perché $\operatorname{Span}\{w_1, v_2, \dots, v_n\} = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Diciamo di aver scambiato $v_1, \dots, v_d$ con $w_1, \dots, w_d$ $(1 \le d < n)$ e $\{w_1, \dots, w_d, \dots, v_n\}$ è ancora una base. Allora $w_{d+1} = a_1w_1 + \dots + a_dw_d + \dots + a_nv_n$ e qualche coefficiente a_{d+e} sarà $\neq 0$ altriment $w_{d+1} = a_1w_1 + \dots + a_dw_d$ contro l'ipotesi di indipendenza. Quindi possiamo sostituire fino a n elementi.

Allora:

i) Se $s > n$, $w_1, \dots, w_n$ è base assurdo $\Rightarrow w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ dipendenti, assurdo.

ii) Se $s = n$, $w_1, \dots, w_n$ è base

iii) Se $s < n$ $w_1, \dots, w_s, \dots, v_n$ base $\Rightarrow v_n \notin \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_s\}$ $\square$

Cor: i) Ogni base di V ha lo stesso numero di elementi

ii) Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, allora ogni insieme di generatori formato da n elementi è una base.

Def: Uno spazio vettoriale V è di dimensione finita se ammette una base. La dimensione di V ($\dim V$) è il numero di elementi in una qualsiasi base di V.

OSS: $\dim V(s)$ = numero di variabili libere.

Esempio:

- $\dim \mathbb{K}^n = n$ $\quad B = \{e_1, \dots, e_n\}$
- $\dim \mathbb{K}_{\le d}[T] = d+1$ $\quad B = \{1, T, \dots, T^d\}$
- $\dim \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$ $\quad B = \{E_{11}, \dots, E_{ij}, \dots, E_{mn}\}$

COORDINATE RISPETTO A UNA BASE

Prendiamo V un $\mathbb{K}$ spazio-vettoriale e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Ricordiamo che B è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

- $\operatorname{Span} B = V$ (generatori)
- Se $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ allora $a_1, \dots, a_n$ sono unici (indipendenti)

Da queste due proprietà otteniamo:

Prop/Def: Ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$. $a_1, \ldots, a_n$ sono le coordinate di v rispetto a B. Il vettore:

$$v_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

è il vettore delle coordinate di v rispetto a B

Esempio:

- $V = \mathbb{K}^n$, $B = \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Se prendiamo $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

- $V = \mathbb{K}_{\leq d}[T]$, $B = \{1, \ldots, T^d\}$

  $P(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_d T^d \Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{d+1}$

  Se invece prendiamo:

  $B' = \{T^d, T^{d-1}, \ldots, 1\} \Rightarrow P_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_d \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{d+1}$

  Esempio concreto:

  $P(T) = 3T - T^2 + 2T^3 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$

  $P_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $V = \mathbb{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{32} \end{pmatrix}$

  Concretamente:

  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Abbiamo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e vogliamo trovare v_B. Per farlo dobbiamo risolvere:

  $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

  Verifico:

  $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ $\Rightarrow v_B = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

  Prendiamo ora $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo w_B:

  $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow w_B = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

E se volessimo risolverli insieme?

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

1ª eq. 2ª eq

Diciamo di voler trovare le coordinate di $\binom{a}{b}$:

$$\binom{a}{b} = a\binom{1}{0} + b\binom{0}{1} = a\left(\frac{2}{3}\binom{2}{1} - \frac{1}{3}\binom{1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{3}\binom{2}{1} + \frac{2}{3}\binom{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\right)\binom{2}{1} + \left(-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)\binom{1}{2} \Rightarrow$$

$$\binom{a}{b}_B = \binom{2/3a - 1/3b}{-1/3a + 2/3b} = a\binom{1}{0}_B + b\binom{0}{1}_B$$

• $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $B = \{T^2+T+1, T^2-2T, T+3\}$. B è una base perché:

$$\{T^2+T+1, T^2-2T, T+3\} \sim \{3T+1, T^2-2T, T+3\} \sim \{-8, T^2-2T, T+3\} \sim \{1, T^2-2T, T+3\} \sim$$

$$\sim \{1, T^2-2T, T\} \sim \{1, T^2, T\} \text{ base.}$$

Ora prendiamo:

$P(T) = 2T^2+T-1$. Vogliamo trovare P_B:

$$a(T^2+T+1) + b(T^2-2T) + c(T+3) = 2T^2+T-1 \sim$$
$$\sim (a+b)T^2 + (a-2b+c)T + (a+3c) = 2T^2+T-1$$

Facciamo il confronto tra grado a grado:

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ a-2b+c = 1 \\ a + 3c = -1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E se avessimo messo tutto in coordinate dall'inizio?

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B' = \{T^2, T, 1\}$

Vogliamo risolvere: $a v_{1_{B'}} + b v_{2_{B'}} + c v_{3_{B'}} = (2T^2+T-1)_{B'}$:

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$ che è lo stesso sistema di prima!

Perché succede?

Def: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base. Definiamo:

$$\varphi_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \varphi_B(v) \stackrel{def}{=} v_B$$

$$\psi_B : \mathbb{K}^n \longrightarrow V \qquad \psi_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$\Rightarrow$ Isomorfismo coordinato

Esempio:

- $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $B = \{T^2+T+1, 2T^2-T, T+3\}$, $v = 2T^2+T-1$.

$$\varphi_B(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \psi_B(v) = 2(T^2+T-1) - (T+3) = 2T^2+T-1$$

Prop:
- $\varphi_B(v+v') = \varphi_B(v) + \varphi_B(v')$
- $\varphi_B(\lambda v) = \lambda \varphi_B(v)$
- $\psi_B(X+Y) = \psi_B(X) + \psi_B(Y)$
- $\psi_B(\lambda X) = \lambda \psi_B(X)$

Dim:
- $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, $v' = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$

  $v+v' = (a_1+b_1)v_1 + \ldots + (a_n+b_n)v_n \Rightarrow \varphi_B(v+v') = (v+v')_B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \varphi_B(v) + \varphi_B(v')$
- $\lambda v = \lambda a_1 v_1 + \ldots + \lambda a_n v_n \Rightarrow \varphi_B(\lambda v) = \lambda \varphi_B(v)$
- $\psi_B(X+Y) = \psi_B\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = (x_1+y_1)v_1 + \ldots + (x_n+y_n)v_n = \psi_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \psi_B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- $\psi_B\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \psi_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\square$

Idea: se ripeto le operazioni di V forse possiamo fare i conti dopo aver applicato φ_B.

Prop: $\psi_B(\varphi_B(v)) = v$ e $\varphi_B(\psi_B(X)) = X$. In altre parole $\psi_B \circ \varphi_B = Id_V$ e $\varphi_B \circ \psi_B = Id_{\mathbb{K}^n}$

Dim: $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$.

$$\psi_B(\varphi_B(v)) = \psi_B(v_B) = \psi_B\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = v$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi_B(\psi_B(X)) = \varphi_B(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n) = (x_1v_1 + \ldots + x_nv_n)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \quad \square$$

Cor: la coppia φ_B, ψ_B da' un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$ che manda la base B in $\mathcal{E}$ e viceversa.

$$\left(\varphi_B(v_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_j \text{ perché } v_j = 0v_1 + \ldots + 0v_{j-1} + 1v_j + \ldots + 0v_n\right)$$

Cor: i) $w_1, \ldots, w_s \in V$ sono indipendenti $\Leftrightarrow (w_1)_B, \ldots, (w_s)_B$ lo sono

ii) $\text{Span}\{w_1, \ldots, w_s\} = W \Leftrightarrow \text{Span}\{(w_1)_B, \ldots, (w_s)_B\} = \varphi_B(W) \longrightarrow$ sottospazio di $\mathbb{K}^n$

iii) $a_1w_1 + \ldots + a_sw_s = v \Leftrightarrow a_1(w_1)_B + \ldots + a_s(w_s)_B = (v)_B$

Dim: i) Se $w_1,\dots,w_s$ sono dipendenti, $a_1w_1+\dots+a_sw_s = 0_V \Rightarrow \varphi_B(a_1w_1+\dots+a_sw_s) = \varphi_B(0_V) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi_B(a_1w_1)+\dots+\varphi_B(a_sw_s) = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow a_1(w_1)_B+\dots+a_s(w_s)_B = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow (w_1)_B,\dots,(w_s)_B$ sono dipendenti.
Se $a_1(w_1)_B+\dots+a_s(w_s)_B = 0 \Rightarrow \psi_B(a_1(w_1)_B+\dots+a_s(w_s)_B) = \psi_B(0) \Rightarrow a_1w_1+\dots+a_sw_s = 0_V$

ii) $w \in \mathrm{Span}\{w_1,\dots,w_s\} \Rightarrow w = a_1w_1+\dots+a_sw_s \Rightarrow \varphi_B(w) = \varphi_B(a_1w_1+\dots+a_sw_s) \Rightarrow$
$\Rightarrow w_B = a_1(w_1)_B+\dots+a_s(w_s)_B$.
Viceversa:
$w_B \in \mathrm{Span}\{(w_1)_B+\dots+(w_s)_B\} \Rightarrow w_B = x_1(w_1)_B+\dots+x_s(w_s)_B \Rightarrow \psi_B(w_B) = \psi_B(x_1(w_1)_B+\dots+x_s(w_s)_B) \Rightarrow$
$\Rightarrow w = x_1w_1+\dots+x_sw_s$

iii) Uguale a (ii) $\square$

Esempio:

• $\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\underset{A_1}{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{A_2}{\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}}, \underset{A_3}{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}}\right\}$?

Prendiamo $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$A \in \mathrm{Span}\{A_1, A_2, A_3\} \overset{\text{base } \mathcal{E}}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&0&2&2\\1&-1&2&-1\\0&1&1&3\end{array}\right) \text{ ha soluzione } \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&1&1\\0&-2&1&-2\\0&1&1&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&1&1\\0&0&-1&-4\\0&0&2&4\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&4\\0&0&0&-4\end{array}\right) \text{ Non ha soluzione } \Rightarrow A \notin \mathrm{Span}\{A_1, A_2, A_3\}$$

RISPONDERE A DOMANDE SUI VETTORI CON MOSSE DI RIGA

Prop: $v_1,\dots,v_s \in \mathbb{K}^n$, $A = (v_1,\dots,v_s)$. Prendiamo A' ottenuto da A con mosse di riga. Allora $v_1,\dots,v_s$ sono indipendenti $\Leftrightarrow$ le colonne di A' lo sono.

Dim: $x_1v_1+\dots+x_sv_s = 0$ è equivalente al sistema $\left(A \middle| \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ che è equivalente al sistema $\left(A' \middle| \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ $\square$

Cor: $v_1,\dots,v_s \in \mathbb{K}^n$, $A = (v_1,\dots,v_s)$, allora se $A' \sim A$ è a scala, le colonne di A corrispondenti alle colonne di A' in cui appare un pivot, sono una base di $\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_s\}$

Dim: Prendiamo:

$$A' = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}P_1 & & & * \\ & P_2 & & \\ & & P_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ j_1 \;\cdots\cdots\; j_d\end{array}$$

colonne pivot agli indici $j_1,\dots,j_d$. Possiamo assumere $P_1=\dots=P_d=1$. Quindi:

$$A' = \begin{pmatrix}1 & & & * \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix}. \quad (A')^{j_1},\dots,(A')^{j_d} \text{ sono indipendenti: } x_1\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}*\\1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \dots + x_d\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_d = 0$.

Inoltre ogni colonna è $\left.\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}^{d}$ che è chiaramente dipendente da $(A')^{j_1},\dots,(A')^{j_d}$. Quindi $A^{j_1},\dots,A^{j_d}=v_{j_1},\dots,v_{j_d}$ sono indipendenti e generano Span $\{v_1,\dots,v_s\}$ $\square$

Cor: Per ogni $A'\sim A$ a scala il numero di pivot di A' è sempre lo stesso, ovvero $\dim(\text{Span}\{A^1,\dots,A^n\})$.

In particolare questo ci assicura che dato un sistema S ogni sua soluzione ha lo stesso numero di variabili dipendenti e libere.

Esempio:

- $v_1,\dots,v_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\6\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\end{pmatrix}$. Vogliamo trovare una base di Span $\{v_1,\dots,v_4\}$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\1&0&2&4\\0&2&6&1\\1&2&8&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&3&2\\0&2&6&1\\0&3&9&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&3&2\\0&0&0&-3\\0&0&0&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&3&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Base è data da v_1, v_2, v_4 e v_3 è dipendente da v_1 e v_2. Come lo scriviamo?

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\6\\8\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\1&0&2\\0&2&6\\1&2&8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)\sim\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$$

- $p_1,\dots,p_4=\{T^3-1,\ T^3+T^2+T-3,\ T^2-2T+1,\ T^3-2T^2+T\}$. Vogliamo trovare una base di Span $\{p_1,\dots,p_4\}$.
  $\mathcal{E}=\{1,T,T^2,T^3\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$.

$$\varphi_{\mathcal{E}}\{p_1,\dots,p_4\}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-3&1&0\\0&1&-2&1\\0&1&1&-2\\1&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-3&1&0\\0&1&-2&1\\0&1&1&-2\\0&-2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-3&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&3&-3\\0&0&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-3&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p_1, p_2, p_3$ sono base.

Scriviamo p_4 come:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-3&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow 2(T^3-1)-(T^3+T^2+T-3)-(T^2-2T+1)=T^3-2T^2+T$.

Qualche osservazione:

Teorema di completamento a base

Th: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, $s<n$, $v_1,\dots,v_s\in V$ linearmente indipendenti. Allora esiste una base B di V tale che $B=\{v_1,\dots,v_s,v'_{s+1},\dots,v'_n\}$

Dim: $B'=\{v'_1,\dots,v'_n\}$ base di V. Allora come nella dimostrazione che ogni base ha lo stesso numero di elementi a meno di riordinare B', possiamo sostituire $v'_1,\dots,v'_n$ con $v_1,\dots,v_s$ e $B=\{v_1,\dots,v_s,v'_{s+1},\dots,v'_n\}$ base $\square$

Esempio:

- $V = \mathbb{R}^4$, $v_1, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ indipendenti. Allora $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ base. Ma $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ è una base?

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&0\\2&1&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&2&1&0\\0&1&0&0\\0&3&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{base}$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ completamento di $\{v_1, v_2\}$.

OSS: $W \subseteq V$ sottospazio. Se $\dim(W) = \dim(V)$ allora $W = V$.

Sapendo che $W \subseteq V$, ci manca dire che $V \subseteq W$. Prendiamo $v \in V$. Questo può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di una base di V, tra cui anche $\{w_1, \dots, w_n\}$ (perché $W \subseteq V$). Quindi $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \Rightarrow v \in W \Rightarrow W = V$

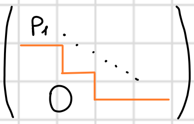
*

Dim: $\dim(V) = n = \dim(W)$ (per ipotesi). Allora $\{w_1, \dots, w_n\}$ base di $W \Rightarrow$ sono $n = \dim(V)$ vettori indipendenti in $V \Rightarrow$ sono una base di V. Ma $W \supseteq \text{Span}\{w_1, \dots, w_n\} = V \Rightarrow W = V$

$\square$

Prop: Sia A matrice $m \times n$. Allora il numero massimo di colonne indipendenti di A è uguale al numero massimo di righe indipendenti di A.

Dim: $A' \sim A$ a scala. Allora il numero massimo di colonne indipendenti è uguale al numero di pivot di A', che è uguale al numero di righe non nulle di A' =



numero di righe indipendenti di A'.

Però le mosse di riga non cambiano questo numero $\Rightarrow$ numero di righe indipendenti di A' = numero di righe indipendenti di A

$\square$

Esempio:

- $$\begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&0&1&1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&2&1&3\\0&4&2&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&2&1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow A^1, A^2, A^4$ sono indipendenti e anche A_1, A_2, A_3 lo sono.

SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

Def: $W, W' \subseteq V$ sottospazi. Allora:
- $W + W' \overset{def}{=} \{w + w' \mid w \in W, w' \in W'\} \subseteq V$
- $W \cap W' \overset{def}{=} \{v \in V \mid v \in W \text{ e } v \in W'\} \subseteq V$

Prop: i) $W + W'$ è il più piccolo sottospazio contenente W e W'
ii) $W \cap W'$ è il più grande sottospazio contenuto in W e W'
iii) Se $W = \text{Span}\, U$, $W' = \text{Span}\, U' \Rightarrow W + W' = \text{Span}(U \cup U')$
iv) Se $W = V(S)$, $W' = V(S') \Rightarrow W \cap W' = V(S \cup S')$ dove:

$$S \cup S' = \begin{cases} S \\ S' \end{cases}$$ (sono tutte le equazioni messe insieme)

Dim: (i) Se $W'' \supseteq W$ e W' allora sicuramente ogni $w+w' \in W'' \Rightarrow W'' \supseteq W+W'$. Dobbiamo quindi solo dimostrare che è un sottospazio.

- $0_V = \underbrace{0_V}_{\in W} + \underbrace{0_V}_{\in W'} \in W+W'$
- $\lambda(w+w') = \underbrace{\lambda w}_{\in W} + \underbrace{\lambda w'}_{\in W'} \in W+W'$
- $(w_0+w_0') + (w_1+w_1') = \underbrace{(w_0+w_1)}_{\in W} + \underbrace{(w_0'+w_1')}_{\in W'} \in W+W'$

(ii) Se $W'' \subseteq W$ e $W' \Rightarrow W'' \subseteq W \cap W'$, quindi basta mostrare che è un sottospazio.

- $0_V \in W \cap W'$
- $v \in W \cap W'$, allora $\lambda v \in W$ e $\lambda v \in W' \Rightarrow \lambda v \in W \cap W'$
- $v_0, v_1 \in W \cap W'$, allora $v_0 + v_1 \in W$ e $v_0 + v_1 \in W' \Rightarrow v_0 + v_1 \in W \cap W'$

(iii) $W = \text{Span}\, U$ e $W' = \text{Span}\, U'$. Sicuramente $\text{Span}(U \cup U')$ appartiene a ogni sottospazio contenuto in $W \cup W' \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{Span}(U+U') \subseteq W+W'$. D'altronde W e $W' \subseteq \text{Span}(U \cup U') \Rightarrow$ sono uguali.

(iv) $W = V(S)$ e $W' = V(S') \Rightarrow v$ soddisfa sia S che $S' \Leftrightarrow v \in V(S) \cap V(S') = W \cap W'$ $\square$

Esempio:

- $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, $W' = x+2y+z=0$. Vogliamo calcolare $W+W'$ e $W \cap W'$.

<u>$W+W'$</u>: mettiamo W' in parametrica: $x = -2y - z \Rightarrow W' = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow W+W' = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

<u>$W \cap W'$</u>: mettiamo W in cartesiana. L'equazione generica è $ax+by+cz=0$, quindi:

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+2c=0 \\ -2b-c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -\frac{3}{2}c \\ b = -\frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow W: 3x+y-2z=0 \text{ (per } c=-2)$$

$$W \cap W': \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow W \cap W': \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $W, W' \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$. In particolare: $W: \begin{cases} P(0)=0 \\ P(1)=0 \end{cases}$ e $W': \begin{cases} P'(0)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases}$

<u>$W \cap W'$</u>: $P(T) = a+bT+cT^2+dT^3 \Rightarrow P'(T) = b+2cT+3dT^2$.

$$W: \begin{cases} a=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \qquad W': \begin{cases} b=0 \\ b+2c+3d=0 \end{cases}$$

$$W \cap W': \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+b+c+d=0 \\ b+2c+3d=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c+d=0 \\ d=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow W \cap W' = \{0\}$$

<u>$W+W'$</u>: portiamo W e W' in parametrica:

$$W: \begin{cases} a=0 \\ b+c+d=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a=0 \\ b=-c-d \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\{-T+T^2, -T+T^3\}$$

$W' : \begin{cases} b = 0 \\ 2c + 3d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} b = 0 \\ c = -\frac{3}{2} d \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\{1, -3T^2 + 2T^3\}.$

Mettiamo in base $B: \{1, T, T^2, T^3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W+W') = 4 \Rightarrow W + W' = \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$$

- $W : x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \subset \mathbb{R}^4$ e $W' = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$

$\underline{W + W'}$: $W : x = x_2 - 2x_3 - x_4 \Rightarrow W : \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(W+W') = 3 = \dim(W) \Rightarrow W + W' = W.$

$\underline{W \cap W'}$: $\begin{cases} a + b - c + 2d = 0 \\ a \quad + c - 3d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b - c + 2d = 0 \\ -b + 2c - 5d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -c + 3d \\ b = 2c - 5d \end{cases} \Rightarrow W' : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$W \cap W' : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \dim(W \cap W') = 2 = \dim(W') \Rightarrow W \cap W' = W'$$

Def: W e W' sono in somma diretta se $W \cap W' = \{0\}$ e in tal caso scriviamo $W + W' = W \oplus W'$

Th (formula di Grassman) : W, W' sottospazi di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. $\dim(W) + \dim(W') = \dim(W+W') + \dim(W \cap W')$

Dim: Vogliamo mostrare: $\dim(W+W') = \overset{d}{\dim(W)} + \overset{d'}{\dim(W')} - \overset{s}{\dim(W \cap W')}$. Prendiamo $B_{W \cap W'} = \{u_1, \dots, u_s\}$ base dell'intersezione. Per il teorema di estensione proviamo a costruire:

$B_W = \{u_1, \dots, u_s, w_{s+1}, \dots, w_d\}$
$B_{W'} = \{u_1, \dots, u_s, w'_{s+1}, \dots, w'_{d'}\}$

Per quanto fatto vedere prima:
$W + W' = \text{Span}\{B_W \cup B_{W'}\} = \text{Span}\{\overset{s}{u_1, \dots, u_s}, \overset{d-s}{w_{s+1}, \dots, w_d}, \overset{d'-s}{w'_{s+1}, \dots, w'_{d'}}\} \Rightarrow \dim(W+W') \leq s + d - s + d' - s = d + d' - s.$

Vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow B_W \cup B_{W'} = B_{W+W'}$ è una base di $W + W'$ $\Leftrightarrow$ sono indipendenti. Dunque mostriamo che lo sono:

$a_1u_1 + \dots + a_su_s + b_{s+1}w_{s+1} + \dots + b_dw_d + c_{s+1}w'_{s+1} + \dots + c_{d'}w'_{d'} = 0 \sim$

$\sim \underbrace{\underbrace{(a_1u_1 + \dots + a_su_s)}_{\in W \cap W'} + \underbrace{(b_{s+1}w_{s+1} + \dots + b_dw_d)}_{\in W}}_{\in W} = \underbrace{-(c_{s+1}w'_{s+1} + \dots + c_{d'}w'_{d'})}_{\in W'} \Rightarrow$ entrambi i termini $\in W \cap W'$.

Però* $c_{s+1}w'_{s+1} + \dots + c_{d'}w'_{d'} \in W \cap W' = \text{Span}\{u_1, \dots, u_s\} \Leftrightarrow c_{s+1} = \dots = c_{d'} = 0$ perché $w'_{s+1}, \dots, w'_{d'}$ sono indipendenti da $u_1, \dots, u_s \Rightarrow a_1u_1 + \dots + a_su_s + b_{s+1}w_{s+1} + \dots + b_dw_d = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_s = b_1, \dots, b_s = 0$ perché sono indipendenti. Dunque sono una base di $W + W'$ $\square$

* Il fulcro della dimostrazione è qui

Cor: i) W, W' sono in somma diretta $\iff \dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') \iff B_W \cup B_{W'}$ è una base di $W+W'$
ii) $W+W' = V \iff \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') = n$
iii) $W \supseteq W' \iff \dim(W+W') = \dim(W)$
iv) $W \subseteq W' \iff \dim(W \cap W') = \dim(W)$

Dim: i) $W \cap W' = \{0\} \iff \dim(W \cap W') = 0 \iff \dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') - 0$
ii) $\dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') = n \Rightarrow \dim(W+W') = \dim V \Rightarrow W+W' = V$
iii) $\dim W+W' = \dim(W) \Rightarrow \dim(W+W') - \dim(W) = \dim(W') - \dim(W \cap W') \Rightarrow \dim(W') = \dim(W \cap W') \Rightarrow$
$\Rightarrow W' = W \cap W' \iff W' \subseteq W$ (ragiona in termini insiemistici)
iv) $\dim(W \cap W') = \dim(W) \Rightarrow \dim(W \cap W') - \dim(W) = \dim(W') - \dim(W+W') \Rightarrow W \subseteq W'$ per il punto precedente.

Def: W, W' si dicono supplementari se sono in somma diretta e $W \oplus W' = V \iff \dim(W \cap W') = 0,\ \dim(W+W') = n$.

MOLTIPLICAZIONE MATRICE-VETTORE

Prendiamo $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e un certo $v \in \mathbb{K}^n$, definiti in questo modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad e \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Def: abbiamo una moltiplicazione $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ data da:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Esempio:

- $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + (-1) y \\ 0 \cdot x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Prop: $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $v, w \in \mathbb{K}^n$. Allora:
i) $A(\lambda v) = \lambda(Av)$
ii) $A(v+w) = Av + Aw$
iii) $(\lambda A)v = \lambda(Av)$
iv) $(A+B)v = Av + Bv$

Dim: (i) e (iii) sono ovvie.
(ii):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1+y_1) + \ldots + a_{1n}(x_n+y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1+y_1) + \ldots + a_{mn}(x_n y_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) \\ (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n) + (a_{m1}y_1 + a_{mn}y_n) \end{pmatrix} = Av + Aw$$

(iv):

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})x_1 + \dots + (a_{1n}+b_{1n})x_n \\ \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})x_1 + \dots + (a_{mn}+b_{mn})x_n\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + (b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) + (b_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)\end{pmatrix} = Av + Bv$$

$\square$

OSS: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2}\end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix} = x_1A^1 + x_2A^2 + \dots + x_nA^n$

combinazione lineare delle colonne di A

Def: $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

i) $\mathrm{Im}(A) = \{w \in \mathbb{K}^m / \exists v \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } w = Av\}$

ii) $\mathrm{Ker}(A) = \{v \in \mathbb{K}^n / Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m\}$

Prop: i) $\mathrm{Im}(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^m$ ed è uguale a $\mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$

ii) $\mathrm{Ker}(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ ed è uguale a $V(S)$, dove S è definito da $(A/0)$

Dim: (i):

$A \cdot 0 = 0$, $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ e $A(v+v') = Av + Av'$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(A)$ è un sottospazio.

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = x_1A^1 + \dots + x_nA^n \in \mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$ e se $a_1A^1 + \dots + a_nA^n \in \mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$, allora

$w = A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$

Ogni vettore di $\mathrm{Im}(A)$ è combinazione lineare di $A^1, \dots, A^n$ e ogni combinazione lineare di $A^1, \dots, A^n$ è vettore di $\mathrm{Im}(A)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$

(ii):

$A(0) = 0$, se $Av = 0$, $A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda 0 = 0$ e se $Av + Av' = 0$, $A(v+v') = 0 + 0 = 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(A)$ è un sottospazio.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \sim \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0\end{cases} \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in V(S)$$

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Vogliamo trovare $\mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Ker}(A)$.

Sapendo che $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^4\}$, procediamo per mosse di riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

1^a, 2^a e 4^a colonna con pivot $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2\end{pmatrix}\right\}$

Per calcolare Ker(A), risolviamo il sistema (A/0).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ -X_2 + 2X_3 - 3X_4 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} X_1 = -X_3 \\ X_2 = 2X_3 \\ X_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Ker(A) = Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

OSS: $\dim(Ker(A)) = \dim(V(S)) =$ numero di VL per il sistema $(A/0) = n - \#$pivot per $A' \sim A$ a scala $=$
$n - \dim(Span\{A^1, \dots, A^n\}) = n - \dim(Im(A))$

Abbiamo così dimostrato:

Prop: Se $A \in M_{m,n}$, allora $n = \dim(Ker(A)) + \dim(Im(A))$

IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Consideriamo:

$$S = \begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$ sistema di m equazioni in n variabili e (A/b) matrice completa.

OSS: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in V(S) \iff A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = b$. Infatti $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}$.

Quindi il sistema si può scrivere equivalentemente come $AX = b$, dove $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

i) Quando ha soluzione? $\iff \exists v \in \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ t.c. $Av = b \iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_n A^n = b \iff$

$\iff b \in Span\{A^1, \dots, A^n\} = Im(A) \iff \dim(Span\{A^1, \dots, A^n\}) = \dim(Span\{A^1, \dots, A^n, b) \iff \dim(Im(A)) = \dim(Im(A/b))$

ii) Se il sistema è compatibile, cos'è $\dim(V(S)) = \#VL$?
Prendiamo S_0 sistema omogeneo associato.

$V(S_0) = Ker(A) \Rightarrow \dim(V(S_0)) = n - \dim(Im(A))$. Ricordiamo che $V(S) = v_0 + V(S_0) \Rightarrow \dim(V(S)) = \dim(V(S_0)) =$
$= n - \dim(Im(A))$

soluzione particolare

Notazione: $r_K(A) \overset{def}{=} \dim(Im(A))$

Abbiamo così dimostrato:

Th (Rouché-Capelli): Consideriamo:

$$S = \begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n = b_n \end{cases}$$ sistema $m \times n$

E diciamo che (A/b) è la matrice completa. Allora:
i) S è compatibile $\iff r_K(A) = r_K(A/b)$
ii) Se S è compatibile $\Rightarrow \dim(V(S)) = n - r_K(A)$

Cor: i) Se $r_K(A) = n$, allora S é compatibile
ii) Se S compatibile allora ha soluzione unica $\iff r_K(A) = n$

Dim: (i)

$r_K(A) = \#$pivot di $A' = \#$ max di righe indipendenti $\leq m$. Però anche $(A|b)$ ha m righe $\Rightarrow r_K(A|b) \leq m$. Quindi se $r_K(A) = m \geq r_K(A|b) \Rightarrow$ sono uguali.

(ii)

Soluzione unica $\iff \dim(V(S)) = 0 \iff r_K(A) = n$ $\square$

Notazione: "discutere" un sistema S vuol dire trovare se é compatibile e nel caso anche $\dim(V(S))$.

Esempio:

- Discutere al variare di $K \in \mathbb{R}$ il sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + kx_3 + x_4 = k \\ 3x_1 + (2k-2)x_2 + (3-k)x_3 + (-2k-3)x_4 = -3k-1 \\ 2x_1 + 2kx_2 + (2-2k)x_3 + (-2k-2)x_4 = -2k \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & k & 1 & k \\ 3 & 2k-2 & 3-k & -2k-3 & -3k-1 \\ 2 & 2k & 2-2k & -2k-2 & -2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & k & 1 & k \\ 0 & 2k+4 & 3+2k & -2k & -1 \\ 0 & 2k+4 & 2 & -2k & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & k & 1 & k \\ 0 & 2k+4 & 3+2k & -2k & -1 \\ 0 & 0 & -1-2k & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k \neq -2, -\frac{1}{2}$ allora $r_K(A) = 3 = r_K(A|b) \Rightarrow$ compatibile, $\dim(V(S)) = 4-3 = 1$

Per $k = -2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right) \quad r_K(A) = 3 = r_K(A|b) \Rightarrow \text{compatibile}, \dim(V(S)) = 4-3 = 1$$

Per $k = -\frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow r_K(A) = 2 \neq r_K(A|b) = 3 \Rightarrow \text{incompatibile}$$

PARAMETRICO $\longrightarrow$ CARTESIANO RIVISITATO

Abbiamo $W \subseteq \mathbb{K}^n$, $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{d1} \\ \vdots \\ x_{dn} \end{pmatrix} \right\} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Vogliamo una rappresentazione cartesiana:

Prendiamo l'equazione generica $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, equazione generica in n variabili. Vogliamo imporre che che sia soddisfatta da $v_1, \dots, v_n$

$$\begin{cases} a_1x_{11} + \dots + a_nx_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_1x_{d1} + \dots + a_nx_{dn} = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_{11}a_1 + \dots + x_{1n}a_n = 0 \\ \\ x_{d1}a_1 + \dots + x_{dn}a_n = 0 \end{cases}$$

La matrice associata sarà:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} X_{11} & \dots & X_{1n} & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ X_{d1} & \dots & X_{dn} & 0 \end{array}\right)$$ le righe sono $v_1, \dots, v_n$.

$v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti $\Rightarrow rk \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ & \vdots & \\ X_{d1} & \dots & X_{dn} \end{pmatrix} = d \Rightarrow$ per Rouché-Capelli la dimensione delle soluzioni

è $n-d \Rightarrow$ prendendo una base abbiamo $n-d$ equazioni indipendenti

Prendiamo S un sistema di $n-d$ equazioni omogenee così ottenuto. $S = (A|0)$. Allora $rk(A) = n-d$ per costruzione $\Rightarrow V(S)$ ha dimensione d. Per costruzione $v_1, \dots, v_d \in V(S) \Rightarrow v_1, \dots, v_d$ è una base di $V(S) \Rightarrow V(S) = Span\{v_1, \dots, v_d\}$

Quindi il nostro algoritmo per ottenere una presentazione cartesiana funziona.

Esempio: (molto importante)

- Al variare di $K \in \mathbb{R}$ consideriamo $V_K = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ e $W_K: \begin{cases} X_1 - 3X_2 + KX_3 + (2K-2)X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_3 + (K-2)X_4 = 0 \end{cases}$

i) Ottenere al variare di $K \in \mathbb{R}$ le dimensioni di $V_K, W_K, V_K + W_K, V_K \cap W_K$.
ii) Trovare per quali K abbiamo $V_K \oplus W_K = \mathbb{R}^4$.

$\dim(V_K) = 2, \forall K$

$\dim W_K$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & K & 2K-2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & K-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & K & 2K-2 & 0 \\ 0 & 2 & -3-K & -K & 0 \end{array}\right)$ $rk(A) = 2 \Rightarrow \dim(W_K) = 4-2 = 2 \quad \forall K$.

Portiamo V_K in cartesiana. L'equazione generica è $a_1X_1 + \dots + a_4X_4 = 0$. Dunque:

$\begin{cases} a_1 \quad -a_3 - 2a_4 = 0 \\ a_1 - a_2 \quad + 2a_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 \quad -a_3 - 2a_4 = 0 \\ -a_2 + a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 = a_3 + 2a_4 \\ a_2 = a_3 + 4a_4 \end{cases} \Rightarrow V_K: \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \; (a_3 = 1, a_4 = 0) \\ 2X_1 + 4X_2 + X_4 = 0 \; (a_3 = 0, a_4 = 1) \end{cases}$

$V_K \cap W_K$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & K & 2K-2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & K-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & K-1 & 2K-2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & K-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K-5 & 2K & 0 \\ 0 & 0 & -6 & K-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-K+1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K^2-1}{6} & 0 \end{array}\right)$$

Ci sono 3 pivot sicuri più 1 da controllare.

$\dim V_K \cap W_K = 4 - 4 = 0$ per $K \neq \pm 1$
$\dim V_K \cap W_K = 4 - 3 = 1$ per $K = \pm 1$

Usando Grassman, $\dim(V_K + W_K) = \begin{cases} 2+2-0 = 4 & \text{per } K \neq \pm 1 \\ 2+2-1 = 3 & \text{per } K = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow V_K + W_K = \mathbb{R}^4$ se $K \neq \pm 1$

APPLICAZIONI LINEARI

Def: Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Un'applicazione lineare da V a W è una funzione $T: V \longrightarrow W$, tale che:
i) $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ (omogeneità)
ii) $T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall v, v' \in V$ (additività)

OSS: Se $T: V \longrightarrow W$ lineare, allora $T(0_V) = 0_W$, infatti $T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0_W$

Esempio:

- Abbiamo già visto che data B base di V, le applicazioni:

$$\varphi_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n, \qquad (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\psi_B : \mathbb{K}^n \longrightarrow V, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

sono lineari.

- Data $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, l'applicazione

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, \quad v \longmapsto Av$$

è lineare

- Dato $v \in \mathbb{K}^n$, l'applicazione

$$\mathbb{M}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{K}^m, \quad A \longrightarrow Av$$

è lineare. Infatti:

i) $(\lambda A)v = \lambda(Av)$
ii) $(A+B)v = Av + Bv$

- Prendiamo $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ data da $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y + z \\ x \quad -2z \end{pmatrix}$, è lineare. Infatti:

i) $$T\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x - 3\lambda y \\ -\lambda x + \lambda y + \lambda z \\ \lambda x \quad -2\lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(2x - 3y) \\ \lambda(-x + y + z) \\ \lambda(x \quad -2z) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y + z \\ x \quad -2z \end{pmatrix} = \lambda T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ii) $$T\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+x') - 3(y+y') \\ -(x+x') + (y+y') + (z+z') \\ (x+x') \quad -2(z+z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x-3y) + (2x'-3y') \\ (-x+y+z) + (-x'+y'+z') \\ (x \quad -2z) + (x' \quad +2z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y + z \\ x \quad -2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' - 3y' \\ -x' + y' + z' \\ x' \quad -2z' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

OSS: $T(v) = L_A(v)$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z - 1 \\ y - 3z + 1 \end{pmatrix}$ non è lineare, infatti:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 1 \\ 0 - 3 \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x^2 - y^2 \\ x + y \end{pmatrix}$ non è lineare, infatti:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{non omogenea}$$

- $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, non è lineare, infatti:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt[3]{1^3+1^3} = \sqrt[3]{2} \neq 1+1 = 2 \Rightarrow \text{non è additiva}$$

Prop: $T: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$ è lineare $\Leftrightarrow$ $f_1,\dots,f_m$ sono polinomi omogenei di grado 1,

cioé $f_i(x_1,\dots,x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$ e in tal caso:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dim: $(\Leftarrow)$

chiaro perché allora $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(\Rightarrow)$

$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ è lineare $\Leftrightarrow$ $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

(Questo sarà evidente con il teorema di esistenza e unicità) $\square$

Esempio:

- $F: \mathbb{K}_{\leq d}[T] \longrightarrow \mathbb{K}_{\leq d}[T]$, $F(P(T)) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{K}$. È lineare, infatti:

  i) $(\lambda P)(x_0) = \lambda P(x_0)$

  ii) $(P+Q)(x_0) = ((a_0+b_0) + \dots + (a_d+b_d)T^d)(x_0) = ((a_0+b_0) + \dots + (a_d+b_d)x_0^d) = (a_0 + \dots + a_dT^d) + (b_0 + \dots + b_dT^d) =$
  $= P(x_0) + Q(x_0)$

- $F: \mathbb{R}_{\leq d}[T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(P(T)) = \int_a^b P(T)\,dT$, è lineare. Infatti:

  i) $\int_a^b \lambda P(T)\,dT = \lambda \int_a^b P(T)\,dT$

  ii) $\int_a^b P(T)+Q(T)\,dT = \int_a^b P(T)\,dT + \int_a^b Q(T)\,dT$

- $F: \mathbb{K}_{\leq d}[T] \longrightarrow \mathbb{K}_{\leq d+r}[T]$, $F(P) = P\cdot Q$, è lineare. Infatti:

  i) $(\lambda P)\cdot Q = \lambda(P\cdot Q)$

  ii) $(P_0+P_1)Q = P_0Q + P_1Q$

- $P \longmapsto P+Q$ non lineare perché $0 \longmapsto Q \neq 0$
- $P \longmapsto P^2$ non lineare perché $2P \longmapsto 4P^2 \neq 2P^2$
- $P \longmapsto P+P'$ non lineare perché $2P \longmapsto 2P\cdot 2P' \neq 2(PP')$

IMMAGINE E NUCLEO

Def: $T: V \longrightarrow W$ lineare, allora:
- $\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } T(v) = w\} \subseteq W$
- $\mathrm{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_V\} \subseteq V$

Prop: i) $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Ker}(T)$ sono sottospazi

ii) Se $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ base di V, allora $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$

iii) Se $T = L_A$ allora $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(A)$

Dim: (i + ii)

$T(v) \in Im(T)$. $T(v) = T(a_1v_1, \dots, a_nv_n) \overset{\text{additività}}{=} T(a_1v_1) + \dots + T(a_nv_n) \overset{\text{omogeneità}}{=} a_1T(v_1) + \dots + a_nT(v_n) \in$
$\in Span\{T(v_1) + \dots + T(v_n)\} \Rightarrow Im(T) \subseteq Span\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$.

Viceversa, se abbiamo $a_1T(v_1) + \dots + a_nT(v_n) \in Span\{v_1, \dots, v_n\} = T(a_1v_1) + T(a_nv_n) =$
$= T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) \in Im(T) \Rightarrow Im(T) = Span\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$. In particolare è un sottospazio.

Vediamo per il Kernel: $T(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in Ker(T)$ se $v \in Ker(T) \Rightarrow T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0_W = 0_W \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda v \in Ker(T)$. Se $v, v' \in Ker(T) \Rightarrow T(v + v') = T(v) + T(v') = 0_W + 0_W = v + v' \in Ker(T)$

(iii) Ovvio per definizione $\square$

Esempio:

- $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $F(p) = p'$ quindi $a + bT + cT^2 \longmapsto b + 2c$.

$Im(F) = Span\{F(1), F(T), F(T^2)\} = Span\{0, 1, 2T\} = Span\{1, T\}$
$Ker(F): b + 2cT = 0 \iff b = 0, c = 0 \Rightarrow Ker(F) = Span\{1\}$

- $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 4}[T]$, $F(p) = p(T^2 - T)$.

$Im(F) = Span\{F(1), F(T), F(T^2)\} = Span\{\overset{\text{indipendenti}}{T^2 - T, T^3 - T^2, T^4 - T^3}\}$
$Ker(F): F(a + bT + cT^2) = (a + bT + cT^2)(T^2 - T) = -aT + (a - b)T^2 + (b + c)T^3 + cT^4 = 0 \iff$

$$\begin{cases} -a = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow Ker(F) = \{0\}$$

- $F(p) = (T - 2)p'(T) + 3p(T) - (T^2 - 1)p(2)$, $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$Im(F) = Span\{F(1), F(T), F(T^2)\} = Span\{-T^2 + 4, -2T^2 + 4T, T^2 - 4T + 4\}$. In base $\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Span\{-T^2 + 4, -2T^2 + 4T\}$$

$Ker(F): (T - 2)(b + 2cT) + 3(a + bT + cT^2) - (T^2 - 1)(a + 2b + 4c) = (-2b + 3a + a + 2b + 4c) + (-4c + b + 3b)T +$
$+ (2c + c - a - 2b - 4c) = 0 \iff$

$$\begin{cases} 4a + 4c = 0 \\ -4c + 4b = 0 \\ -c - a - 2b = 0 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases} \Rightarrow Ker(T) = Span\{-1 + T + T^2\}$$

Teorema (della dimensione): $T: V \longrightarrow W$ applicazione lineare, allora $\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = \dim(V)$.

Dim: l'obiettivo è quello di costruire una base di V che faccia funzionare l'uguaglianza
$\underset{\overset{\shortparallel}{r}}{\dim(Im(T))} + \underset{\overset{\shortparallel}{d}}{\dim(Ker(T))} = \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\dim(V)}$. $\{u_1, \dots, u_d\}$ base di $Ker(T)$. Per il teorema del completamento,

$B = \{\underbrace{u_1, \dots, u_d}_{d}, \underbrace{v_{d+1}, \dots, v_n}_{n-d}\}$ base di V.

$Im(T) = Span\{T(B)\} =$ insieme delle immagini degli elementi di B $= Span\{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{T(u_1)}, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{T(u_d)}, T(v_{d+1}), \dots, T(v_n)\}$

Se mostriamo che $T(v_{d+1}),\dots,T(v_n)$ è base $\Rightarrow r = n-d$ e abbiamo finito. Basta che sono indipendenti:
$a_{d+1}T(v_{d+1})+\dots+a_nT(v_n) = 0_W \sim T(a_{d+1}v_{d+1})+\dots+T(a_nv_n) = 0_W \sim T(a_{d+1}v_{d+1},\dots,a_nv_n) = 0_W \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_{d+1}v_{d+1}+\dots+a_nv_n \in Ker(T) \Rightarrow a_{d+1}v_{d+1},\dots,a_nv_n = b_1u_1+\dots+b_du_d$ che è base di $Ker(T)$ $\sim$
$\sim -b_1u_1-\dots-b_du_d+a_{d+1}v_{d+1}+a_nv_n = 0$ linearmente indipendenti $\Rightarrow a_{d+1}=\dots=a_n=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow T(v_{d+1}),\dots,T(v_n)$ sono indipendenti come voluto.

APPLICAZIONI LINEARI E BASI

Not: $T: V \longrightarrow W$ lineare, allora $rk(T) = dim(Im(T))$.

Def: $A \in M_{m,n}$. A^T matrice $m \times n$ ottenuta cambiando righe e colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS: $(A+B)^T = A^T+B^T$ e $(\lambda A)^T = \lambda A^T$. Quindi la trasposta è applicazione lineare da $M_{m,n}(K)$ in $M_{n,m}(K)$.

Esempio:

- $T_K: M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da $T_K(A) = A - KA^T$ con $K \in \mathbb{R}$.
  i) T_K lineare, infatti:
  - $T_K(\lambda A) = \lambda A - K(\lambda A)^T = \lambda A - \lambda K A^T = \lambda(A-KA^T) = \lambda T_K(A)$
  - $T_K(A+B) = (A+B) - K(A+B)^T = (A+B) - K(A^T+B^T) = (A-KA^T)+(B-KB^T) = T_K(A)+T_K(B)$

  ii) $dim(Ker(T_K))$ e $rk(T_K)$ per $K \in \mathbb{R}$. Prendiamo base $\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-K \end{pmatrix}$$

In base $\mathcal{E}$, $Im(T_K) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1-K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -K \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-K \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1-K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K & 0 \\ 0 & -K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-K \end{pmatrix} \text{ se } K \neq 1 \begin{pmatrix} 1-K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 1-K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-K \end{pmatrix}$$

Quindi se $K \neq 1,-1$,
$rk(T) = 4 \Rightarrow dim(Ker(T)) = 4-4 = 0$

Per $K = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(T) = 3 \Rightarrow dim(Ker(T)) = 4-3 = 1$

Per $K = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(T) = 1$, $dim(Ker(T)) = 4-1 = 3$

Teorema (esistenza e unicità): V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $w_1, \dots, w_n \in W$ elementi qualsiasi. Allora esiste un'unica applicazione lineare $T: V \longrightarrow W$ t.c. $T(v_j) = w_j$ $\forall j \in [1, n]$.

In altre parole scegliere un'applicazione lineare $T: V \longrightarrow W$ è come scegliere una funzione $f: B \longrightarrow W$.

Dim: (unicità)

Assumiamo F, T lineari da V a W t.c. $F(v_j) = T(v_j) = w_j$ $\forall j$. Allora se $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$,
$F(v) = F(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = F(a_1v_1) + \dots + F(a_nv_n) = a_1F(v_1) + \dots + a_nF(v_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n$.
$T(v) = T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \dots + a_nT(v_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n$.
Quindi $T(v) = F(v)$ $\forall v \in V$.

(Esistenza)

Dobbiamo definire $T: V \longrightarrow W$ t.c. $T(v_j) = w_j$ $\forall j$ e dimostrare che è lineare. Definiamo:
$T(\underline{a_1v_1 + \dots + a_nv_n}) \overset{def}{=} a_1w_1 + \dots + a_nw_n$.
↳ scrittura unica perché B base. Se non fosse così $\overset{def}{=}$ non avrebbe senso
è una funzione ben definita perché perché ogni v si scrive unicamente come $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Ora dobbiamo vedere che è lineare.

- Omogenea: $T(\lambda v) = T(\lambda(a_1v_1 + \dots + a_nv_n)) = T(\lambda a_1v_1 + \dots + \lambda a_nv_n) = \lambda a_1w_1 + \dots + \lambda a_nw_n =$
$= \lambda(a_1w_1 + \dots + a_nw_n) = \lambda T(v)$

- Additiva: $v' = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$
$T(v + v') = T((a_1v_1 + \dots + a_nv_n) + (b_1v_1 + \dots + b_nv_n)) = T((a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_n+b_n)v_n) =$
$= (a_1+b_1)w_1 + \dots + (a_n+b_n)w_n = (a_1w_1 + \dots + a_nw_n) + (b_1w_1 + \dots + b_nw_n) = T(v) + T(v')$ $\square$

Esempio:

- $V = \mathbb{R}_{\le}[T]$, $B = \{T^2+1, T^2-T-1, T-1\}$. $F: \mathbb{R}_{\le 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\le 1}[T]$ definita da $F(T^2+1) = 2T$, $F(T^2-T-1) = 2T-1$, $F(T-1) = 1$. Vogliamo:
  i) Cos'è $F(2T^2 + 3T - 2)$?
  ii) Come possiamo descrivere F?

  i) Scrivo $2T^2 + 3T - 2$ in termini di B. Passo in coordinate rispetto a $\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$.
  $B_\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad P_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P = \frac{4}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{10}{3}P_3 \Rightarrow F(P) = \frac{4}{3}F(P_1) + \frac{1}{3}F(P_2) + \frac{10}{3}F(P_3) = \frac{4}{3} \cdot 2T + \frac{1}{3}(2T-1) + \frac{10}{3} = 4T + 3$

  ii) Supponiamo che $F(P_j) = P_j'$, $j = 1, 2, 3$, per ogni j $\Rightarrow F(P) = P'$ $\forall P$.

Cor: Se $T, F: V \longrightarrow W$ lineari, sono uguali su una base B qualsiasi allora $T = F$.

Esempio:

- Può esistere $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Idea: estraiamo base da $v_1, \dots, v_4$, scriviamo i rimanenti in termini della base e controlliamo che su questi abbia il valore corretto. Estraiamo una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ base.}$$

Scriviamo v_4 come combinazione:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow v_4 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{3}{2} v_3.$$

Se $T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $T(v_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ NON esiste T

INIETTIVITA', SURIETTIVITA' PER APPLICAZIONI LINEARI

Ricordiamo: $f: I \to J$ è:

- Iniettiva: se $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, o equivalentemente per $y \in J$ esiste al più un singolo $x \in I$ t.c. $f(x) = y$

  Esempio: $f(x) = \arctan(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva ma non suriettiva.

- Suriettiva: se per ogni $y \in J$ esiste almeno un $x \in I$ t.c. $f(x) = y$, in altre parole $\mathrm{Im}(f) = J$.

  Esempio: $f(x) = x^3 - x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva ma non iniettiva.

- Bigettiva: se è sia iniettiva che suriettiva, cioè se per ogni $y \in J$ esiste un unico $x \in I$ t.c. $f(x) = y$.

  Esempio: $f(x) = x^3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è bigettiva.

Prop: i) $T: V \to W$ lineare è iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$
ii) $T: V \to W$ lineare è suriettiva $\Leftrightarrow$ data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora $\mathrm{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} = W$.

Dim: (i)
Iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. E' equivalente a dimostrare che $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0_V\} \Rightarrow$ NON è iniettiva.
Se $v \neq 0_V \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow T(v) = T(0_V) = 0_W \Rightarrow$ non è iniettiva.

$\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\} \Rightarrow$ iniettiva. E' equivalente a dimostrare che NON iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Ker}(T) \neq \{0_V\}$.
Se $T(v_1) = T(v_2)$, $v_1 \neq v_2$ allora $T(v_1) - T(v_2) = 0_W \sim T(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ e per ipotesi $v_1 \neq v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \neq 0_W$.

(ii)
Chiaro perché abbiamo visto che $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$.

OSS: i) Se T iniettiva allora $\dim(V) \leq \dim(W)$, infatti se $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$, per il teorema della dimensione $\dim(V) = \dim(\underbrace{\mathrm{Im}(T)}_{\subseteq W}) + 0 \leq \dim(W)$

ii) T suriettiva $\Rightarrow \dim(V) \geq \dim(W)$ perché $\mathrm{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} = W$
iii) T bigettiva $\Rightarrow \dim(V) = \dim(W)$

Prop: i) T iniettiva $\Leftrightarrow$ data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base, allora $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sono linearmente indipendenti
ii) T bigettiva $\Leftrightarrow$ data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base, allora $T(v_1), \dots, T(v_n)$ è una base di W.

Dim: (i)

- $T(v_1),\dots,T(v_n)$ indipendenti $\Rightarrow Ker(T)=\{0_V\}$
  $v\in Ker(T)$, $v=a_1v_1+\dots+a_nv_n \Rightarrow 0_W=T(v)=a_1T(v_1)+\dots+a_nT(v_n)$
  $T(v_1),\dots,T(v_n)$ indipendenti $\Rightarrow a_1=\dots=a_n=0 \Rightarrow v=0_V$

- $Ker(T)=\{0_V\} \Rightarrow T(v_1),\dots,T(v_n)$ linearmente indipendenti.
  Se $a_1T(v_1)+\dots+a_nT(v_n)=0_W \Rightarrow T(a_1v_1+\dots+a_nv_n)=0_W \Rightarrow a_1v_1+\dots+a_nv_n\in Ker(T) \Rightarrow$
  $\Rightarrow a_1v_1+\dots+a_nv_n=0_V \Rightarrow a_1=\dots=a_n=0$

(ii)
Chiaro perché suriettiva $\Leftrightarrow T(v_1),\dots,T(v_n)$ sono generatori.

Def: $T:V\to W$ lineare è invertibile se e solo se esiste $F:W\to V$ t.c. $T\circ F=Id_W$ e $F\circ T=Id_V$. F è detta l'inversa di T e la coppia (T,F) è un isomorfismo tra V e W.

Esempio:

- V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ base, allora φ_B e ψ_B sono inverse l'una dell'altra e (φ_B,ψ_B) è un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$.

Teorema: $T:V\to W$ lineare è invertibile $\Leftrightarrow$ è bigettiva. Inoltre la sua inversa è unica e la scriveremo T^{-1}.

Dim: (invertibile $\Rightarrow$ bigettiva)
Vale in generale per funzioni qualsiasi.

(bigettiva $\Rightarrow$ invertibile)
$B=\{v_1,\dots,v_n\}$ base, allora $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}\overset{def}{=}\{w_1,\dots,w_n\}$ base di W. Per il teorema di esistenza e unicità esiste un'unica F t.c. $F(w_j)=v_j \ \forall i=1,\dots,n$. $F:W\to V$. Allora:
$T\circ F(w_j)=T(F(w_j))=T(v_j)=w_j \Rightarrow T\circ F(w_j)=Id_W(w_j)\ \forall_j \Rightarrow T\circ F=Id_W$.
$F\circ T(v_j)=F(T(v_j))=F(w_j)=v_j \Rightarrow F\circ T(v_j)=Id_V(v_j)\ \forall_j \Rightarrow F\circ T=Id_V$

Quindi F è l'inversa di T ed è unica per l'unicità $\square$

Cor: $T:V\to W$ lineare. Sono equivalenti:
A) T invertibile
B) T bigettiva
C) T manda una base di V in una base di W
D) $Ker(T)=\{0_V\}$ e $rk(T)=dim(W)$
E) $dim(V)=dim(W)$ e $Ker(T)=\{0_K\}$
F) $dim(V)=dim(W)=rk(T)$

Vediamo ora due esempi importanti. Prendiamo V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, W e $W'\subset V$ sottospazi tali che $W\oplus W'=V$. Definiamo:

Def: La proiezione su W lungo W' è l'unica applicazione lineare $\pi_W^{W'}:V\to V$ tale che se $w\in W$ allora $\pi_W^{W'}(w)=w$ e se $w'\in W'$ allora $\pi_W^{W'}(w')=0_V$

In altre parole $\pi_W^{W'}|_W=Id_W$ e $\pi_W^{W'}|_{W'}=0$.

Perché esiste ed è unica? Ricordiamo che $V = W \oplus W' \iff$ date B_W e $B_{W'}$ basi di W e W', allora $B = B_W \cup B_{W'}$ base di V. Quindi $B = \{\underbrace{w_1, \dots, w_d}_{B_W}, \underbrace{w'_{d+1}, \dots, w'_n}_{B_{W'}}\}$. Allora per il teorema di esistenza e unicità esiste unica $T: V \longrightarrow V$ tale che $T(w_j) = w_j$ $(j = 1, \dots, d)$ e $T(w'_j) = 0_V$ $(j = d+1, \dots, n)$. E' immediato che $T = \pi_W^{W'}$.

Esempio:

- $V = \mathbb{R}^3$, $W: x - y + z = 0$, $W' = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. $\mathbb{R}^3 = W \oplus W'$, come calcoliamo $\pi_W^{W'}(v)$?.

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad B_{W'} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Prendiamo $v = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Vogliamo trovare le coordinate rispetto a B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\pi_W^{W'}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \pi_{W'}^{W}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \pi_W^{W'}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in W} + \frac{1}{2}\pi_W^{W'}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in W} + \frac{3}{2}\pi_W^{W'}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in W'} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora il caso in cui $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Ci serve sapere $\pi_W^{W'}(e_j)$ con $j = 1, 2, 3$. Questo è equivalente a trovare $(e_1)_B, (e_2)_B, (e_3)_B$ che è equivalente a tre sistemi $(w_1\ w_2\ w_3 \mid e_j)$ con $j = 1, 2, 3$. In pratica:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ Dunque $e_1 = -\frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w'_3$, $e_2 = w_1 + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w'_3$, $e_3 = \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w'_3$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi_W^{W'}(e_1) = -\frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}, \quad \pi_W^{W'}(e_2) = w_1 + \frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}, \quad \pi_W^{W'}(e_3) = \frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_W^{W'}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$$

OSS: $\text{Im}(\pi_W^{W'}) = W$, $\text{Ker}(\pi_W^{W'}) = W'$

Facciamo ora un secondo esempio in cui abbiamo $T: V \longrightarrow W$ invertibile e T^{-1} l'inversa. Vogliamo calcolare esplicitamente T^{-1}.

Esempio:

- $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $F(a + bT + cT^2) = (a+c)(1+T+T^2) - (a + bT + cT^2)$, $\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$.
  $F(1) = T + T^2$, $F(T) = -T$, $F(T^2) = (1+T)$. Mettendo tutto in base $\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r_k = 3 \Rightarrow \dim(\text{Im}(F)) = 3 \Rightarrow F \text{ invertibile}.$$

Dobbiamo ora calcolare F^{-1}. Ci basta sapere $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(T)$ e $F^{-1}(T^2)$. Per adesso sappiamo solo che $F(T+T^2)=1$, $F(-T)=T$ e $F(1+T)=T^2$. Quindi per calcolare F^{-1} basta sapere le coordinate di $1, T, T^2$ rispetto a $B=\{T+T^2, -T, 1+T\}$. In coordinate:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & 1 & T & T^2 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1=(-T)+(1+T)$, $T=-(-T)$, $T^2=(T^2+T)+(-T)$ $\Rightarrow F^{-1}(1)=F^{-1}(-T)+F^{-1}(1+T)=T+T^2$, $F^{-1}(T)=-F^{-1}(-T)=-T$, $F^{-1}(T^2)=F^{-1}(T^2+T)+F^{-1}(-T)=1+T$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow F^{-1}(a+bT+cT^2)=a(T+T^2)-b(T)+c(1+T)$.

F è l'inversa di se stessa! Quindi trovare cosa fa T^{-1} su una base B' di W equivale a scrivere la base B' in termini delle immagini di una base B di V.

SOMMA E COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

Def/Prop: $T, F: V \to W$ lineari, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- i) $T+F: V \to W$ è l'applicazione lineare definita da $T+F(v)=T(v)+F(v)$ per ogni v.
- ii) $\lambda T: V \to W$ è l'applicazione lineare definita da $(\lambda T)(v)=\lambda(T(v))$ per ogni v.
- iii) $G\circ T: V \to U$ è l'applicazione lineare definita da $G\circ T(v)=G(T(v))$ per ogni v.

Dim: i) $T+F$ lineare:
- $(T+F)(\lambda v)=T(\lambda v)+F(\lambda v)=\lambda T(v)+\lambda F(v)=\lambda(T(v)+F(v))=\lambda(T+F)(v)$
- $(T+F)(v+v')=T(v+v')+F(v+v')=T(v)+T(v')+F(v)+F(v')=(T+F)(v)+(T+F)(v')$.

ii) λT lineare è ovvio

iii) $G\circ T$ lineare:
- $G(T(\lambda v))=G(\lambda T(v))=\lambda G(T(v))=\lambda(G\circ T)(v)$
- $G(T(v+v'))=G(T(v)+T(v'))=G(T(v))+G(T(v'))=G\circ T(v)+G\circ T(v')$ $\square$

Esempio:

- $F: \mathbb{R}_{\leq 3}[T] \to \mathbb{R}^3$. $F(P(T))=\begin{pmatrix} -P'(0)+2P(1) \\ 5(P\cdot(T+1))''(2) \\ 3P(-1)+P''(-2) \end{pmatrix}$. E' lineare? Lo è $\Leftrightarrow$ lo è ognuno dei coefficienti

i) $P \mapsto -P'(0)+2P(1)$ è lineare perché è la somma di un'applicazione lineare.
$P \mapsto 2P(1)$ è la composizione di $P \mapsto P' \mapsto -P'(0)$ che sono lineari.

ii) $5(P(T+1))''(2)$ lineare perché è composizione di $P \xmapsto{\text{molt. per } 5(T+1)} 5P(T+1) \xmapsto{\text{derivata seconda}} 5(P(T)(T+1))'' \xmapsto{\text{valutazione in } T=2} 5(P(T+1))''(2)$

iii) Stessa cosa di (i) e (ii).

LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI

Def: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)=\{T: V\to W \mid T \text{ lineare}\}$.

Cor: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con operazioni $+,\cdot$ e l'applicazione 0 che manda tutto in 0_W.

Dim: Bisogna verificare che sia un gruppo per + e che $\lambda(T+F)=\lambda T+\lambda F$, $1\cdot T=T$, $(\lambda+\gamma)F=\lambda F+\gamma F$. Sono verifiche tutte immediate calcolando su un vettore v, ad esempio:

$$\lambda(T+F)(v) \overset{def}{=} \lambda(T(v)+F(v)) \overset{\text{proprietà di } W}{=} \lambda T(v)+\lambda F(v) \overset{def}{=} (\lambda T+\lambda F)(v) \quad \square$$

Se prendiamo $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, l'associazione $A \mapsto L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_A(v) = Av$ manda $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
E' lineare?

Prop: l'applicazione $A \mapsto L_A$ è lineare. In altre parole
- $L_{(A+B)} = L_A + L_B$ • $L_{(\lambda A)} = \lambda L_A$

Dim: • $L_{A+B}(v) = (A+B)(v) = Av + Bv = L_A(v) + L_B(v)$
• $L_{\lambda A}(v) = (\lambda A)(v) = \lambda L_A(v)$ $\square$

$A \mapsto L_A$ è isomorfa? In altre parole, è vero che ogni $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si scrive come L_A per qualche A?
Osserviamo che se $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora $T \mapsto (T(v_1), \dots, T(v_n)) \in W \times \dots \times W$ è un'applicazione lineare ed è bigettiva per il teorema di esistenza e unicità, quindi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \simeq W^n = W \times \dots \times W$.
Se ora scelgo B' base di W, $T \mapsto (T(v_1), \dots, T(v_n)) \xrightarrow{\varphi_{B'}} (T(v_1)_{B'}, \dots, T(v_n)_{B'}) \in (\mathbb{K}^m)^n$, che è di nuovo lineare e bigettiva. Però $\mathbb{K}^m \times \dots \times \mathbb{K}^m \simeq \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ $(A^1, \dots, A^n) \mapsto (A^1, \dots, A^n)$ => abbiamo costruito un'applicazione lineare bigettiva $\Phi^B_{B'} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \to \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

OSS: Una base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ è data dalle controimmagini tramite $\Phi^B_{B'}$ della base $\mathcal{E} = \{E_{ij}\}$ di $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$\Phi^B_{B'}(T) = E_{ij} \iff T(v_s) = \begin{cases} w_i & s = j \\ 0_W & s \neq j \end{cases}$ => base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ è data da $T_{i,j}$ con $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ dove

$T_{i,j}(v_s) \overset{def}{=} \begin{cases} w_i & s = j \\ 0_W & s \neq j \end{cases}$

Cor: $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$

LA MATRICE ASSOCIATA A UN'APPLICAZIONE LINEARE

Def: data $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W, definiamo $T^B_{B'} = \Phi^B_{B'}(T)$ la matrice associata a T nelle basi B e B'.

In altre parole $T^B_{B'} = (T(v_1)_{B'} \dots T(v_n)_{B'})$.
In che senso la matrice $T^B_{B'}$ rappresenta l'applicazione T?

Prop: $T^B_{B'} \cdot v_B = (T(v))_{B'}$

Dim: $T^B_{B'} = (T(v_1)_{B'} \dots T(v_n)_{B'})$ => $T^B_{B'} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 T(v_1)_{B'} + \dots + a_n T(v_n)_{B'}$. Quindi se $v_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$
$(\iff v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$, $T^B_{B'} \cdot v_B = a_1 T(v_1)_{B'} + \dots + a_n T(v_n)_{B'} = a_1 \varphi_{B'}(T(v_1)) + \dots + a_n \varphi_{B'}(T(v_n)) =$
$= \varphi_{B'}(a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)) = \varphi_{B'}(T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) = \varphi_{B'} T(v) = T(v)_{B'}$ $\square$

Conseguentemente ogni informazione su T può essere letta da $T^B_{B'}$ a meno di passare in coordinate.
Esempio:

- i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ x - 2y \end{pmatrix}$, $B = \mathcal{E} = \{e_1, e_1, e_3\}$, $B' = \mathcal{E}' = \{e_1, e_2\}$.

$$T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = (T(e_1)_{\mathcal{E}'}\ T(e_2)_{\mathcal{E}'}\ T(e_3)_{\mathcal{E}'}) = \left(\begin{pmatrix} 1 - 0 + 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}'} \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}'} \begin{pmatrix} 0 - 0 + 2 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}'} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

ii) $F: \mathbb{R}_{\leq 3}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $F(P(T)) = P'(T)$, $\mathcal{E} = \{1, T, T^2, T^3\}$, $\mathcal{E}' = \{1, T, T^2\}$.

$$F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \left(F(1)_{\mathcal{E}'} \;\; F(T)_{\mathcal{E}'} \;\; F(T^2)_{\mathcal{E}'} \;\; F(T^3)_{\mathcal{E}'}\right) = \left(0_{\mathcal{E}'} \;\; (1)_{\mathcal{E}'} \;\; (2T)_{\mathcal{E}'} \;\; (3T^2)_{\mathcal{E}'}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se $P(T) = 2 - 3T + 4T^2 + T^3$, allora $F(P(T))_{\mathcal{E}'} = F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} \cdot (P(T))_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(P(T)) = \Psi_{\mathcal{E}'} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 8T + 3T^2$

iii) $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(P(T)) = \int_0^1 P(T)\, dT$, $\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$, $\mathcal{E}' = \{1\}$.

$F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \left(F(1)_{\mathcal{E}'}, F(T)_{\mathcal{E}'}, F(T^2)_{\mathcal{E}'}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Quindi se $P(T) = 1 - 2T + T^2$ allora

$F(P(T)) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Una base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \longleftrightarrow$ base di $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Sapendo che $T_{i,j}(v_s) = \begin{cases} 0 & j \neq s \\ w_i & j = s \end{cases}$ e $E_{ij} = \begin{array}{c} \scriptstyle i,j \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$,

vogliamo costruire $(\Phi^B_{B'})^{-1} \sim$ applicazione F t.c. $(E_{ij}) = T_{ij}$.

L'idea è:

$v \in V \longmapsto v_B \in \mathbb{K}^n \longmapsto A \cdot v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \longmapsto \Psi_{B'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 w_1 + \ldots + x_m w_m$ che è lineare da V a W. Quindi questo procedimento dà l'applicazione:

$$\Psi^B_{B'} : \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$
$$A \longmapsto \underbrace{\Psi_{B'} \circ L_A \circ \Psi_B}_{\text{composizione di applicazioni lineari}}$$

Facciamo una verifica diretta:

- $\Psi^B_{B'}(\lambda A) = \lambda \Psi^B_{B'}(A)$
- $\Psi^B_{B'}(A + B) = \Psi^B_{B'}(A) + \Psi^B_{B'}(B)$

$\Rightarrow$ è lineare

Per vedere che $\Psi^B_{B'} = (\Phi^B_{B'})^{-1}$ la calcoliamo su E_{ij}. Quindi:

$\Psi^B_{B'}(E_{ij}) = \Psi_{B'} \circ L_{E_{ij}} \circ \Psi_B \Rightarrow \Psi_{B'} \circ L_{E_{ij}} \circ \Psi(v_s) = \Psi_{B'} \circ L_{E_{ij}}(e_s) = \Psi_{B'}(E_{ij} \cdot e_s) = \Psi_{B'}\left(\begin{cases} 0 & s \neq j \\ e'_i & s = j \end{cases}\right) =$

$\begin{cases} 0 & s \neq j \\ w_i & s = j \end{cases} \Rightarrow \Psi^B_{B'}(E_{ij}) = T_{ij} \iff \Psi^B_{B'} = (\Phi^B_{B'})^{-1}$

Ricordiamo la formula fondamentale per $T^B_{B'}$: $T^B_{B'} \cdot v_B = T(v)_{B'}$.

Cor:
- $\mathrm{Ker}(T) = \Psi_B \,\mathrm{Ker}(T^B_{B'})$
- $\mathrm{Im}(T) = \Psi_{B'} \,\mathrm{Im}(T^B_{B'})$

Dim: immediata dalla formula.

Esempio:

- $T: \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A - A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = B'$.

$T^B_{B'} = \left(T(E_{11})_B \;\ldots\; T(E_{22})_B\right\}$

$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dunque: $T^B_{B'} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Ker e Im</u>: $\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Im(T^B_{B'}) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Im(T) = Span\left\{ \psi_{B'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

e $Ker(T^B_{B'})$: $x_2 = x_3 \Rightarrow Ker(T^B_{B'}) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Ker(T) = \psi_B\, Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$

$= Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $T(A) = A + A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $B = B' = \mathcal{E}$.

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Ker e Im</u>: $\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Im(T^B_{B'}) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Im(T) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

e $Ker(T^B_{B'}) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Ker(T^B_{B'}) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Ker(T) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $F: \mathbb{R}_{\le 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. $F(p) = \begin{pmatrix} ((T^2-2)p)'(1) \\ ((T^2-3T)p)''(1) \\ -p'(1) - 2p''(1) \end{pmatrix}$. $B = \{1, T, T^2\}$, $B' = \mathcal{E}$.

$F(1) = \begin{pmatrix} 2T(1) \\ 2(1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F(T) = \begin{pmatrix} (3T^2-2)(1) \\ (6T-6)(1) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad F(T^2) \begin{pmatrix} (4T^3-4T)(1) \\ (12T^2-18T)(1) \\ -2T(1)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow F^B_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

<u>Ker e Im</u>: $\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ker(F^B_{B'})$: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -6z \end{cases} \sim \begin{cases} x = 3z \\ y = -6z \end{cases} \Rightarrow Ker(F) = Span\{3 - 6T + T^2\}$

e $Im(F^B_{B'}) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Im(F) = Span\{2 + 2T,\ 1 - T^2\}$.

Ricordiamo che se $V = W \oplus W'$, allora $\Pi_W^{W'}$ è l'unica applicazione lineare $V \to V$ t.c.:
- $\Pi_W^{W'}(w) = w \quad \forall w \in W$
- $\Pi_W^{W'}(w') = 0_V \quad \forall w' \in W'$

Esempio:

- $V = \mathbb{R}^3$, $W = x - y + z = 0$ e $W' = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Se $B = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in W}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in W'}\right\}$ allora:

$$\left(\overset{T}{\Pi}{}_W^{W'}\right)_B^B = \left(T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_B \; T\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}_B \; T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_B\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_B \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}_B \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

OSS: Se $B = B_W \cup B_{W'}$ allora: $(\Pi_W^{W'})_B^B = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$ $\quad$ (W | W')

- $$(\Pi_W^{W'})_\mathcal{E}^B = \left(T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_\mathcal{E} \; T\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}_\mathcal{E} \; T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_\mathcal{E}\right) = \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Ricordiamo: $T(e_1) = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$, $T(e_3) = \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} \Rightarrow (\Pi_W^{W'})_\mathcal{E}^\mathcal{E} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\0&1&0\\-1/2&1/2&1/2\end{pmatrix}$.

Ker e Im: $\sim \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Im} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = W$

e Ker: $\begin{cases}x = z\\ y = 0\end{cases} \Rightarrow \text{Ker} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = W$ come richiesto

MATRICI DI CAMBIO BASE

Consideriamo $T = Id_V \in \text{Hom}_\mathbb{K}(V,V)$. Per definizione $Id_V(v) = v \;\; \forall v \in V$. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

$Id_V{}_B^B = (Id_V(v_1)_B \dots Id_V(v_n)_B) = ((v_1)_B \dots (v_n)_B) = (e_1 \dots e_n)$. Infatti $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.

Prendiamo ora $B \neq B'$. Per proprietà fondamentale delle matrici associate:

$$(Id_V{}_{B'}^B)\, v_B = (Id_V(v))_{B'} = v_{B'}.$$

Abbiamo cambiato coordinate dalla base B alla base B'. Normalmente $v_B \xrightarrow{\text{sist. lin.}} v_{B'}$ ma se cerchiamo $(Id_V)_{B'}^B$ è solo una moltiplicazione! Come la troviamo?

$Id_V{}_{B'}^B = (Id_V(v_1)_{B'} \dots Id_V(v_n)_{B'}) = ((v_1)_{B'} \dots (v_n)_{B'}) \Rightarrow$ basta mettere in coordinate i vettori di B.

Esempio:

- $B = \{1, T, T^2, T^3\}$, $B' = \{T^3 - T, T^3 + 2T + 1, T^2 + T - 1, T - 3\}$, $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$. Vogliamo $Id_V{}_{B'}^B = (1_{B'} \dots T^3_{B'})$:

$$x_1(T^3 - T) + x_2(T^3 + 2T + 1) + x_3(T^2 + T - 1) + x_4(T - 3) = T^j \sim x_1\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix} = e_j \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&-1&-3&1&0&0&0\\-1&2&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&0&0&0&1\\0&3&1&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&1&-1&-3&1&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&0&0&0&1\\0&1&1/3&1/3&0&1/3&0&1/3\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&-4/3&-10/3&1&-1/3&0&-1/3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 1 & -1/3 & 4/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{10} \\ x_2 = \frac{1}{10} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{3}{10} \end{cases} \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{10} \\ x_2 = \frac{3}{10} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{10} \end{cases} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -\frac{4}{10} \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{7}{10} \\ x_2 = \frac{3}{10} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Id_{V\,B}^{\;\mathcal{E}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad Id_{V\,\mathcal{E}}^{\;B} = \left((T^3-T)_{\mathcal{E}} \;\; (T^3+2T+1)_{\mathcal{E}} \;\; (T^2+T-1)_{\mathcal{E}} \;\; (T-3)_{\mathcal{E}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $P(T) = 2T^2 - T + 2$, $P(T)_B = ? = Id_{V\,B}^{\;\mathcal{E}} \cdot P_{\mathcal{E}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 3/10 \\ 1/4 \\ -6/5 \end{pmatrix}$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI, PRODOTTO TRA MATRICI

Consideriamo $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{F} U$. Date basi B_V, B_W, B_U vogliamo trovare una relazione tra le matrici $T^{B_V}_{B_W}$, $F^{B_W}_{B_U}$, $(F \circ T)^{B_V}_{B_U}$.

Vediamo per prima cosa il <u>prodotto tra matrici</u>:

$A \;\; m \times n \longleftrightarrow T \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$
$B \;\; s \times m \longleftrightarrow F \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^s)$

La composizione $F \circ T : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^s$ corrisponde a $C \;\; s \times n$. Per trovarla: $C(e_j) = B(A \cdot e_j) = BA^j$ possiamo vederlo come un'operazione $\mathbb{M}_{s \times m}(\mathbb{K}) \times \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{s \times n}(\mathbb{K})$?

Def: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \dots & b_{sm} \end{pmatrix}$ allora $BA = (b_{i1} a_{j1} + \dots + b_{im} a_{jm})_{\substack{i \le s \\ j \le n}}$

In altre parole $C_{ij} = B_j A^j$ cioè $C = (BA^1 \dots BA^n)$. Questo prende il nome di <u>prodotto riga per colonna</u>.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB \neq BA$ anche se hanno la stessa taglia

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

I_n è l'unica matrice tale che, equivalentemente:
i) $I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$
ii) $I_n v = v \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$

perché (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow L_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$.
Data una base B qualsiasi di V, $(Id_V)^B_B = I_n$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI

i) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
ii) $(A+B)C = AC + BC$
iii) $A(B+C) = AB + AC$
iv) $A(BC) = (AB)C$ (proprietà associativa)

Dim: (i), (ii), (iii) Sono vere per le corrispettive proprietà $(\lambda A)v = \lambda(Av)$, $(A+B)v = Av + Bv$, $A(v+v') = Av + Av'$ applicate colonna per colonna.

(iv)
Consideriamo A $d\times m$, B $m\times n$ e C $n\times s$.
$A(BC) = A(BC^1 \dots BC^s) = (A(BC^1), \dots, A(BC^s))$
$(AB)C = ((AB)C^1 \dots (AB)C^s)$.
Quindi basta dimostrare che le colonne sono uguali, ovvero (prendendo $C^j = v$)
$A(Bv) = (AB)v \quad \forall v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$$A\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A(B(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)) = A(x_1 Be_1 + \dots + x_n Be_n) = A(x_1 B^1 + \dots + x_n B^n) =$$

$$= x_1 AB^1 + \dots + x_n AB^n = x_1 (AB)^1 + \dots + x_n (AB)^n = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \square$$

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -1 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cor: $L_A \circ L_B = L_{AB}$

Dim: $L_A \circ L_B(v) = L_A(B\cdot v) = A(B\cdot v) = (AB)v$. D'altro canto $L_{AB}(v) = (AB)v \quad \square$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI E PRODOTTI

Teorema: $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$, $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,U)$. B_V, B_W, B_U basi dei rispettivi spazi. Allora:

$$(F\circ T)^{B_V}_{B_U} = F^{B_W}_{B_U} \cdot T^{B_V}_{B_W}$$

Dim: $(F\circ T)^{B_V}_{B_U}$ è definita dall'equazione $(F\circ T)^{B_V}_{B_U}(v_{B_V}) = (F\circ T(v))_{B_U}$ (se la calcoliamo per $v_1, \dots, v_n \in B_V$ otteniamo le colonne della matrice).

Calcoliamo $(F^{B_W}_{B_U} \cdot T^{B_V}_{B_W})v_{B_V} \overset{\text{prop. assoc.}}{=} F^{B_W}_{B_U}(T^{B_V}_{B_W} v_{B_V}) = F^{B_W}_{B_U}(T(v)_{B_W}) = F(T(v))_{B_U} = (F\circ T(v))_{B_U} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ le due matrici sono uguali. $\square$

Esempio:

- $\int P(T)\,dT = P(T) + c \in \mathbb{R}_{\leq d+1}[T]/c$ "polinomi modulo costanti". $(T^2+2T+c)+(T^3-T+c) = T^3+T^2+T+c$.

$F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[T]/C$, $P(T) \longmapsto \int P(T)\,dT$ è lineare.

$F(1) = T + C$, $F(T) = \frac{T^2}{2} + C$, $F(T^2) = \frac{T^3}{3} + C$. $B = \{1, T, T^2\}$, $B' = \{T+C, T^2+C, T^3+C\}$

$F^{B}_{B'} = \left(F(1)_{B'} \; F(T)_{B'} \; F(T^2)_{B'}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Definiamo: $G(p) = \int (p\cdot(T+1)) - (p'\cdot T^2)\,dT$

$G: \mathbb{R}_{\leq 1}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[T]/C$, $p \longmapsto \overset{q}{\overset{\parallel}{p(T+1) - p'\cdot T^2}} \longmapsto \int q\,dT$

$G = F \circ S$, $S(p) = p(T+1) - p'\cdot T^2$. $F(q) = \int q\,dT$.

$B = \{1, T\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 1}[T]$

$B' = \{1, T, T^2\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$B'' = \{T+C, T^2+C, T^3+C\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]/C$

$G^{B}_{B''} = F^{B'}_{B''} \cdot S^{B}_{B'}$

$S^{B}_{B'} = \left(S(1)_{B'} \; S(T)_{B'}\right) = \left((T+1)_{B'} \; (T)_{B'}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F^{B'}_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow G^{B}_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi ad esempio:

$G(3-4T)_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G(3-4T) = -\frac{T^2}{2} + 3T + C$

Cor (formula di cambio base): $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$, B_V, C_V basi di V, $B_W\ C_W$ basi di W. Allora:

- $T^{C_V}_{B_W} = T^{B_V}_{B_W}\, Id_V{}^{C_V}_{B_V}$
- $T^{B_V}_{C_W} = Id_W{}^{B_W}_{C_W}\, T^{B_V}_{B_W}$
- $T^{C_V}_{C_W} = (Id_W)^{B_W}_{C_W}\, T^{B_V}_{B_W}\, (Id_V)^{C_V}_{B_V}$

Dim: Immediata dal teorema $\square$

Quindi per cambiare base di partenza, moltiplichiamo a destra; per cambiare base in arrivo moltiplico a sinistra.

Esempio:

- $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $W' = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. $V = W \oplus W'$.

$T = \pi^{W'}_{W}$, $B = \left\{\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}$. Vogliamo $T^{B}_{B}, T^{B}_{\mathcal{E}}, T^{\mathcal{E}}_{B}, T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$.

- $T^{B}_{B} = \left(T(v_1)_B \; T(v_2)_B \; T(v_3)_B\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$- T_{\mathcal{E}}^{B} = Id_{V\,\mathcal{E}}^{B} \cdot T_B^B$.

$$Id_{V\,\mathcal{E}}^{B} = ((v_1)_\mathcal{E}\ (v_2)_\mathcal{E}\ (v_3)_\mathcal{E}) = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow T_\mathcal{E}^B = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = (T(v_1)\ 0\ 0)$$

$- Id_{V\,B}^{\mathcal{E}} = (Id_V(e_1)_B\ \ Id_V(e_2)_B\ \ Id_V(e_3)_B) = ((e_1)_B\ (e_2)_B\ (e_3)_B)$. Calcoliamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&0&-1&-1&1&0\\0&1&-1&-1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-1&0&1\end{array}\right) \sim \begin{cases}x=-1\\y=0\\z=1\end{cases} \begin{cases}x=3\\y=-1\\z=-1\end{cases} \begin{cases}x=-1\\y=1\\z=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Id_{V\,B}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix} \Rightarrow T_B^\mathcal{E} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$- T_\mathcal{E}^\mathcal{E} = Id_\mathcal{E}^B\, T_B^B\, Id_B^\mathcal{E} = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&3&-1\\-1&3&-1\end{pmatrix}$$

OSS: $Id_\mathcal{E}^B \cdot Id_B^\mathcal{E} = Id_\mathcal{E}^\mathcal{E} = I_n$

OSS: diciamo di avere tre basi $B, B', \mathcal{E}$ di V. Se sappiamo esprimere i vettori di B, B' in base $\mathcal{E}$, come calcoliamo $Id_{V\,B'}^{B}$? $Id_{B'}^{B} = \underbrace{Id_{B'}^{\mathcal{E}}}_{\substack{\text{risolvo}\\ x_1v'_1+\dots+x_nv_n = e_j}}\ \underbrace{Id_\mathcal{E}^B}_{\text{immediato}}$

Esempio:

- $B' = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $B = \left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$. Vogliamo trovare $(Id_{\mathbb{R}^3})_{B'}^{B} = Id_{B'}^{\mathcal{E}} \cdot Id_\mathcal{E}^B$.

$$Id_\mathcal{E}^B = ((v_1)_\mathcal{E}\ (v_2)_\mathcal{E}\ (v_3)_\mathcal{E}) = \begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$$Id_{B'}^{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\-1&2&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&2&0&1&-1&0\\0&2&1&0&1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-1&-1\\0&1&0&1/2&-1/2&0\\0&0&1&-1&2&1\end{array}\right) \text{ già risolto! } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Id_{B'}^{\mathcal{E}} = ((e_1)_{B'}\ (e_2)_{B'}\ (e_3)_{B'}) = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\1/2&-1/2&0\\-1&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow Id_{B'}^{B} = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\1/2&-1/2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-4&0\\-1/2&-1/2&1\\5&6&1\end{pmatrix}$$

Esempio:

- $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$, $W' = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. $W \oplus W' = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Vogliamo $(\pi_W^{W'})_\mathcal{E}^\mathcal{E}$.

$B = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

$$(\pi_W^{W'})_\mathcal{E}^\mathcal{E} = Id_\mathcal{E}^B \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} Id_B^\mathcal{E}.$$

$$Id_B^\mathcal{E} = ((E_{11})_B\ (E_{12})_B\ (E_{21})_B\ (E_{22})_B) \overset{\substack{\text{risolviamo a}\\ \text{occhio il sistema}}}{=} \left(e_2\ \ \frac{e_1+e_3}{2}\ \ \frac{-e_1+e_3}{2}\ \ e_4\right) = \begin{pmatrix}0&1/2&-1/2&0\\1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\pi^{W'}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2&-1/2&0\\1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2&-1/2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1/2&-1/2&0\\0&-1/2&1/2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

• W, W' come prima, vogliamo trovare $(\pi^{W}_{W'})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$. $B' = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{W'}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{W} \Big\}$

$$(\pi^{W'}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = Id^{B'}_{\mathcal{E}} (\pi^{W'}_{W})^{B'}_{B'} \, Id^{\mathcal{E}}_{B'} = Id^{B'}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} Id^{\mathcal{E}}_{B'}.$$

$$Id^{\mathcal{E}}_{B'} = \big((E_{11})_{B'} \; (E_{12})_{B'} \; (E_{21})_{B'} \; (E_{22})_{B'}\big) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\\0&1/2&-1/2&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\pi^{W'}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\\0&1/2&-1/2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

MATRICI E APPLICAZIONI INVERSE

Quello che è apparso spesso è $\left(A \,\middle|\, \begin{smallmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{smallmatrix}\right) = (A \mid I_n)$ con n sistemi lineari. Quando appare?

OSS: Se T, F sono inverse l'una dell'altra allora:
$F^{B'}_{B} T^{B}_{B'} = Id_V{}^{B}_{B} = I_n$
$T^{B}_{B'} F^{B'}_{B} = Id_V{}^{B'}_{B'} = I_n$
In particolare se $T = Id_V$ allora $F = Id_V$ e otteniamo $Id^{B}_{B'} Id^{B'}_{B} = Id^{B'}_{B} Id^{B}_{B'} = I_n$

Questi sono casi particolari di matrici inverse.

Def: A, B matrici $n \times n$ sono inverse l'una dell'altra se

$$AB = BA = I_n = \begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}$$

Prop: i) A è invertibile $\Leftrightarrow$ L_A invertibile $\Leftrightarrow$ A ha rango massimo $\Leftrightarrow$ $Ker(A) = \{0\}$
ii) Se A è invertibile la sua inversa è unica. La chiamiamo A^{-1}.

Dim: (i)
Se B è inversa di A, $L_A \circ L_B = L_{AB} = L_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$ e $L_B \circ L_A = \ldots = Id_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow L_A$ è invertibile.
Se L_A invertibile, $T = (L_A)^{-1}$ allora $T = L_B$ per qualche B $n \times n$. Allora $Id_{\mathbb{K}^n} = L_A \circ T = L_A \circ L_B = L_{AB} \Rightarrow$
$\Rightarrow L_{AB} = Id_{\mathbb{K}^n} = L_{I_n} \Leftrightarrow AB = I_n$. Stessa cosa: $BA = I_n$.

(ii)
Se A è invertibile la sua inversa è l'unica matrice associata a $(L_A)^{-1}$ nella base canonica.

Esempio:

• $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Questo esempio è come dire che possiamo avere $T: V \longrightarrow W$ e $F: W \longrightarrow V$ t.c. $T \circ F = Id_W$ e $F \circ T \neq Id_V$ quando $\dim(W) \neq \dim(V)$.

Prop: $\dim(V) = \dim(W) = n$, $T \in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$, $F \in Hom_{\mathbb{K}}(W,V)$, $A, B \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
i) $F \circ T = Id_V \iff T \circ F = Id_W$
ii) $AB = I_n \iff BA = I_n$

Dim: $(i, \Rightarrow)$
T deve essere iniettiva $\Rightarrow$ se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W. Infatti $F(w_j) = v_j$. Allora $T \circ F(w_j) = T(F(w_j)) = T(v_j) = w_j \Rightarrow T \circ F = Id_W$.
$(\Leftarrow)$
Stessa cosa scambiano F e T.

$(ii, \Rightarrow)$
$AB = I_n \iff L_A \circ L_B = Id_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow L_B \circ L_A = Id_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow BA = I_n$.
$(\Leftarrow)$
Stessa cosa. $\square$

Prop (inversa del prodotto/composizione): $T: V \longrightarrow W$, $F: W \longrightarrow V$, A, B $n \times n$, $\dim(V) = \dim(W) = n$.
i) $T \circ F$ invertibile $\iff F \circ T$ invertibile $\iff T$ e F invertibili.
ii) $(T \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ T^{-1}$
iii) AB invertibili $\iff BA$ invertibile $\iff A$ e B invertibili
iv) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Dim: (i)
$T \circ F$ invertibile $\iff$ bigettiva $\Rightarrow T$ suriettiva $\overset{\text{teo. della dim}}{\Longrightarrow} T$ bigettiva $\Rightarrow T$ invertibile.
Inoltre $T \circ F$ bigettiva $\Rightarrow F$ iniettiva $\overset{\text{teo. della dim}}{\Longrightarrow} F$ bigettiva $\Rightarrow F$ invertibile.
Quindi se F e T sono bigettive $\Rightarrow F \circ T$ è bigettiva $\Rightarrow$ invertibile.
Per $F \circ T$ invertibile $\Rightarrow T \circ F$ invertibile, il procedimento è lo stesso.

(ii)
$T \circ F$ invertibile $\Rightarrow T$ e F sono invertibili $\Rightarrow$ esiste $F^{-1} \circ T^{-1}$. Allora $(T \circ F) \circ (F^{-1} \circ T^{-1}) \overset{\text{associativa}}{=}$
$= T \circ (F \circ F^{-1}) \circ T^{-1} = (T \circ Id_V) \circ T^{-1} = T \circ T^{-1} = Id_W \Rightarrow$ è un'inversa destra $\Rightarrow$ è l'inversa.

(iii) e (iv)
Vera per i punti (i) e (ii) applicati a L_A e L_B $\square$

CALCOLO DELL'INVERSA CON GAUSS-JORDAN

Se A $n \times n$ di rango massimo $\Rightarrow$ è invertibile, allora $B = A^{-1} \iff A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff AB^j = e_j \; \forall j$.

Quindi per trovare A^{-1} basta risolvere $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_j$ con $j = 1, \dots, n$ $\sim$

$$\sim \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \right)$$

Def: una matrice è a scala ridotta se:
i) E' a scala
ii) Tutti i pivot sono uguali a 1.
iii) Tutti i termini sopra a un pivot sono 0.

Esempio:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è a scala ridotta

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è a scala ma NON ridotta

OSS: i) Una matrice quadrata di rango massimo a scala ridotta è sempre l'identità I_n.
ii) Se A è a scala ridotta, il sistema $(A|b)$ è risolto solo spostando i termini a destra.

Esempio:

- $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 + 2 \\ x_3 = -2x_5 + 1 \\ x_4 = x_5 \end{cases}$

- $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = 2 - x_4 \end{cases}$

Teorema (Algoritmo di Gauss-Jordan): $A \in M_{m,n}(K)$, allora:
i) Otteniamo A' a scala con l'eliminazione di Gauss
ii) Partendo dall'ultimo pivot, dividiamo la riga per rendere il pivot uguale a 1 e la usiamo per cancellare ogni termine sopra il pivot.
iii) Ripetiamo ignorando l'ultima riga.

Esempio:

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

CALCOLO DELL'INVERSA

Prendiamo A invertibile. Allora $(A|I_n) \overset{\text{Tramite Gauss-Jordan}}{\sim} (I_n|A^{-1})$

OSS: la prima parte dell'algoritmo ci dice se A è invertibile.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, vogliamo trovare A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad T_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y + 2kz \\ kx + 2y + 2z \\ x - y + kz \end{pmatrix}$

i) Per quali valori di K T è invertibile?
ii) Per $K = -1$, calcolare $(T_{-1}^{-1})_B^B$, dove $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(i)

$$T_K = L_A, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2k \\ k & 2 & 2 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2k \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 2k+2 & 2k^2+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2k \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 0 & -2(2k^2+3k-1) \end{pmatrix} \Rightarrow k \neq \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(ii)

$$(T_{-1}^{-1})_B^B = Id_B^{\mathcal{E}} (T^{-1})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} Id_{\mathcal{E}}^B = Id_B^{\mathcal{E}} (T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^{-1} Id_{\mathcal{E}}^B = (Id_{\mathcal{E}}^B)^{-1} \underbrace{(T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^{-1}}_{= A^{-1}} Id_{\mathcal{E}}^B$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Id_{\mathcal{E}}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow (Id_{\mathcal{E}}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T^{-1})_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 11/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -\frac{15}{4} & -1/2 & -3/4 \\ 15/2 & 3 & 5/2 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo un sistema lineare di n equazioni in n variabili:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Risoriviamolo come $AX = b$. Allora se A è invertibile la soluzione si ottiene per qualsiasi b moltiplicando per A^{-1}.
$AX = b \iff A^{-1}AX = A^{-1}b \iff X = A^{-1}b$. Per esempio, se il sistema è:

$$\begin{cases} 2x + y - z = b_1 \\ x \qquad + 2z = b_2 \\ -x - y - z = b_3 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Troviamo l'inversa di A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

Quindi la soluzione è :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} \\ -\frac{b_1}{4} - \frac{3}{4}b_2 - \frac{5}{4}b_3 \\ -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}$$

ENDOMORFISMI, CONIUGIO, SIMILITUDINE

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \overset{def}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$
$GL(V) \overset{def}{=} \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \,/\, T \text{ invertibile}\}$
$GL_n(A) \overset{def}{=} \{A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \,/\, A \text{ invertibile}\}$
↳ gruppo generale lineare

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ è uno spazio vettoriale, ma anche un <u>anello</u> con $T \cdot F = T \circ F$ e $1 = Id_V$. Stessa cosa per $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ con moltiplicazione e I_n. $GL(V)$ e $GL_n(\mathbb{K})$ sono gruppi con operazioni composizione e prodotto e elementi neutri Id_V e I_n.

Dato $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ e B base di V, possiamo considerare la matrice T_B^B (Senza sapere le basi possiamo estrarre più informazioni da T_B^B che da $T_{B'}^B$). Abbiamo una funzione :

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \times \{B \text{ base di } V\} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

$\Phi(T,B) = T_B^B$ (Se fissiamo B, è lineare ed è una mappa di anelli : $\Phi(T \circ F, B) = (T \circ F)_B^B = T_B^B \cdot F_B^B$)

Le domande che sorgono spontanee sono :
i) Dato $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, quali A $n \times n$ si possono scrivere come T_B^B per qualche B ?
ii) Data A $n \times n$, quali $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ hanno A come matrice associata per qualche base B ?

Def: i) Due matrici $n \times n$ A, B sono <u>simili</u> se esiste $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP = B$
ii) Due endomorfismi T, F sono <u>coniugati</u> se esistono basi B, B' tali che $T_B^B = F_{B'}^{B'}$

Prop: i) A è la matrice associata a T in una base B <=> è simile a $T_{B'}^{B'}$ per qualche base B'.
ii) T e F sono coniugate se e solo se T_B^B e F_B^B sono simili per qualche base B.

Dim: (i)
$$A = T_B^B \iff A = \underbrace{Id_B^{B'}}_{P} T_{B'}^{B'} \underbrace{Id_{B'}^{B}}_{P^{-1}} \iff A = P T_{B'}^{B'} P^{-1} \iff P^{-1}AP = T_{B'}^{B'}$$

(ii)
$$T_B^B = F_{B'}^{B'} \iff T_B^B = \underbrace{Id_{B'}^{B}}_{P} F_B^B \underbrace{Id_B^{B'}}_{P^{-1}} \iff P^{-1}T_B^B P = F_B^B \iff T_B^B, F_B^B \text{ sono coniugati} \quad \square$$

Prop: similitudine e coniugio sono relazioni di equivalenza, cioè :
i) $A \sim A$ (riflessiva)
ii) $A \sim B \iff B \sim A$ (simmetrica)
iii) $A \sim B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (transitiva)

Dim: verifichiamo per $A \sim B \iff A$ simile a B.
(i)
$I_n^{-1} A I_n = I_n A I_n = A \Rightarrow A \sim A$

(ii)
$$P^{-1}AP = B \iff P^{-1}A\overbrace{PP^{-1}}^{I_n} = BP^{-1} \iff \overbrace{PP^{-1}}^{I_n}A = PBP^{-1} \iff A = PBP^{-1}.$$
$Q = P^{-1} \Rightarrow Q^{-1}BQ = A \Rightarrow B \sim A$

(iii)
$P^{-1}AP = B,\ Q^{-1}BQ = C \Rightarrow Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = C \iff (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = C \iff (PQ)^{-1}A(PQ) = C \Rightarrow A \sim C$ $\square$

Quindi la risposta alle domande sopra è:
i) Le matrici che rappresentano T su una base sono tutte le simili a T_B^B, B qualsiasi.
ii) Gli endomorfismi coniugati a T sono tutti quelli t.c. $T_B^B \sim F_B^B$ per B qualsiasi.

Però determinare se $A \sim B$ sembra difficile. Abbiamo così nuove domande:
i) Data A, qual è la matrice simile ad A "più semplice", o meglio, qual è una "forma standard" per le matrici simili ad A?
ii) Quali caratteristiche di A e T sono invarianti per cambio base/similitudine?

OSS: $rk(A)$, $\dim(Ker(A))$, $rk(T)$, $\dim(Ker(T))$ sono invarianti perché dipendono solo da T (o L_A) e non da una base scelta. Però sono invarianti anche per $T_{B'}^B$.

L'obiettivo è quello di trovare invarianti per coniugio/similitudine.

IL DETERMINANTE

Vogliamo una funzione $\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ che distingua matrici invertibili da non. Richiediamo le seguenti proprietà. Scriviamo le matrici per colonne, $A = (v_1, \dots, v_n)$.

Assiomi del determinante:
A) $\det(\dots v_j + v_j' \dots) = \det(\dots v_j \dots) + \det(\dots v_j' \dots)$
B) $\det(\dots \lambda v_j \dots) = \lambda \det(\dots v_j \dots)$
C) $\det(\dots v \dots v \dots) = 0$
D) $\det(I_n) = \det(e_1 \dots e_n) = 1$

Le proprietà (A) e (B) si riassumono dicendo che il determinante è multilineare nelle colonne. La proprietà (C) afferma che il determinante è alternante. La proprietà (D) afferma che il determinante è normalizzato.

Alcune conseguenze degli assiomi sono:

i) $\det(\dots v_i \dots v_j \dots) = \det(\dots v_i \dots v_j + \lambda v_i \dots)$

Esempio: $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dim: $\det(\dots v_i \dots v_j + \lambda v_i \dots) \overset{A}{=} \det(\dots v_i \dots v_j \dots) + \det(\dots v_i \dots + \lambda v_i \dots) \overset{B}{=} \det(\dots v_i \dots v_j \dots) +$
$+ \lambda \underbrace{\det(\dots v_i \dots v_i \dots)}_{=0} \overset{C}{=} \det(\dots v_i \dots v_j \dots)$

ii) $\det(\dots 0 \dots) = 0$

Dim: $\det(\dots 0 \dots) \overset{B}{=} 0 \cdot \det(\dots e_i \dots) = 0$

iii) Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\det(v_1 \dots v_n) = 0$

Esempio: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=0} = 0$

Dim: se $v_j = \sum_{i \neq j} a_i v_i$ allora $\det(\dots v_j \dots) = \det(\dots \sum_{i \neq j} a_i v_i \dots) \overset{A}{=} \sum_{i \neq j} \det(\dots \underset{\text{posizione } j}{a_i v_i} \dots) \overset{B}{=} \sum_{i \neq j} a_i \det(\dots \underset{\text{posizione } i}{v_i} \dots \underset{\text{posizione } j}{v_i} \dots)$
$\overset{C}{=} \sum_{i \neq j} a_i \cdot 0 = 0$

iv) $\det(\dots v_i \dots v_j \dots) = -\det(\dots v_j \dots v_i \dots)$

Esempio: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Dim: $\det(\dots v_i \dots v_j \dots) \overset{(i)}{=} \det(\dots v_i \dots v_j - v_i \dots) \overset{(ii)}{=} \det(\dots v_j \dots v_j - v_i) \overset{(i)}{=} \det(\dots v_j \dots -v_i \dots) = $
$\overset{B}{=} -\det(\dots v_j \dots v_i \dots)$

v) $\det(v_1 \dots v_n) = 0$ se e solo se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti

Dim: Basa vedere che se $v_1, \dots, v_n$ è base, $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. L'idea è quella di fare mosse di colonna e moltiplicare il determinante per un numero $\neq 0$. Quindi:

$$\det(v_1 \dots v_n) \underset{\text{sulle colonne}}{\overset{G.J}{=\!=}} \lambda \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{D}{\Rightarrow} \det(v_1 \dots v_n) = \lambda \neq 0$$

Esempio: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$

vi) Se A è triangolare, quindi $A = \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ o $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix}$ allora $\det(A) = d_1 \dots d_n$ → Si moltiplicano gli elementi della diagonale principale

Dim: se $d_j = 0 \Rightarrow rk(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$ se tutti sono diversi da 0.

$$\det(A) \underset{\text{di colonna}}{\overset{\text{mosse}}{=\!=}} \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \overset{B,D}{=} d_1 \dots d_n$$

Questo implica:

Prop: Se una funzione det che rispetta gli assiomi A-D esiste, è unica.

Dim: la possiamo calcolare esplicitamente per ogni matrice M:
- Se M non è invertibile, $\det(M) = 0$
- Se M è invertibile, $\det(M) \overset{\text{Gauss}}{=} \pm \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix} = \pm d_1, \dots, d_n$ $\square$

OSS: Non è ancora detto che esista.

Esempio:

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -3$

Teorema (sviluppo di Laplace): La seguente funzione rispetta le proprietà A-D e quindi è il determinante.
- $\det(a) = a$
- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Se M $n \times n$, definiamo M_i^j come la matrice $n-1 \times n-1$ ottenuta rimuovendo l'i-esima riga e la j-esima colonna.
Allora, fissata una colonna M^j, abbiamo:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_i^j)$$

Nota: possiamo scegliere noi la colonna.

Notazione: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m1} \end{vmatrix}$

Esempio:

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3-(-1)2 = 5$

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = +1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-2) - 0 + 1(2-4) = -2$

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right) =$

$= 3\left(\left(-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) - \left(-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)\right) = 3((4-4)-(4-4)) = 3(0-0) = 0$

Teorema (Laplace per righe): la funzione definita ricorsivamente da $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_i^j$ rispetta gli assiomi A - D e quindi è uguale al determinante.

Esempio:

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 3$

Ricordiamo: $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^T = (a_{ji})$

OSS: Calcolare per colonne il determinante di A è come calcolare per righe il determinante di A^T.

Prop: i) $\det(A) = \det(A^T)$
ii) le proprietà A - D, i - vi valgono anche per le righe
iii) In particolare possiamo fare mosse di riga e:
- $\det(R_{i+\lambda j}A) = \det(A)$
- $\det(R_{\lambda i}A) = \lambda\det(A)$
- $\det(R_{ij}A) = -\det(A)$

Dim: (i)
Si ottiene per induzione confrontando lo sviluppo per colonne di A e per righe di A^T.

(ii) e (iii)
Sono conseguenze immediate.

Vogliamo ora vedere come si comporta il determinante rispetto al prodotto.

Teorema (Binet): Siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Allora $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$

Dim: per prima cosa ricordiamo che AB è invertibile <=> A e B sono invertibili, quindi se $\det(A)$ o $\det(B) = 0$ abbiamo AB non invertibile $\Rightarrow \det(AB) = 0$ quindi la formula vale se $\det(A)$ o $\det(B) = 0$. Ora assumiamo che $\det(A) \neq 0$. Definiamo $f(B) = \frac{\det(AB)}{\det(A)}$

Teorema vale $\iff f(B) = \det(B) \iff f$ rispetta A-D. Verifichiamo:

A) $f(\dots v_j + v_j' \dots) = \dfrac{\det(A(\dots v_j + v_j' \dots))}{\det(A)} = \dfrac{\det(Av_1 \dots Av_j + Av_j' \dots Av_n)}{\det(A)} \overset{\substack{\text{A sul num.}\\ \downarrow}}{=} \dfrac{\det(\dots Av_j \dots) + \det(\dots Av_j' \dots)}{\det(A)} =$

$= \dfrac{\det(\dots Av_j \dots)}{\det(A)} + \dfrac{\det(\dots Av_j' \dots)}{\det(A)} = f(\dots v_j \dots) + f(\dots v_j' \dots)$

B) $f(\dots \lambda v_j \dots) = \dfrac{\det(A(\dots \lambda v_j \dots))}{\det(A)} = \dfrac{\det(\dots \lambda Av_j \dots)}{\det(A)} \overset{B}{=} \dfrac{\lambda \overset{\det(AB)}{\overset{\|}{\det(\dots Av_j \dots)}}}{\det(A)} = \lambda f(B)$

C) $f(\dots v \dots v \dots) = \dfrac{\det(A(\dots v \dots v \dots))}{\det(A)} = \dfrac{\det(\dots Av \dots Av \dots)}{\det(A)} \overset{C}{=} \dfrac{0}{\det(A)} = 0$

D) $f(I_n) = \dfrac{\det(A I_n)}{\det(A)} = \dfrac{\det(A)}{\det(A)} = 1$ $\square$

Cor: Se $\det(A) \neq 0$ allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Dim: $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

$\| $

$\det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ $\square$

Cor: $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$. Quindi matrici simili hanno lo stesso determinante.

Dim: $\det(P^{-1}AP) = (\det(P^{-1}))\det(AP) = \dfrac{1}{\det(P)} \det(A)\det(P) = \det(A)$ $\square$

Cor/Def: Data $T \in \mathrm{End}_K(V)$ definiamo $\det(T) = \det(T_B^B)$ per una qualsiasi base B. Questa funzione è ben definita.

Dim: data B', $T_{B'}^{B'} = Id_{B'}^{B} T_B^B Id_B^{B'} = (Id_B^{B'})^{-1} T_B^B Id_B^{B'} \Rightarrow \det(T_{B'}^{B'}) = \det(Id_B^{B'})^{-1}\det(T_B^B)\det(Id_B^{B'}) =$
$= \det(T_B^B)$ $\square$

Cor (formula di Cramer): S sistema $n \times n$, $(A|b)$ matrice completa. Se $\det(A) \neq 0$ l'unica soluzione di S è data da:

$$V(S) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j = \frac{\det(A^1 \dots \overset{\substack{j\\ \downarrow}}{b} \dots A^n)}{\det(A)}$$

Dim: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ soluzione, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overset{\substack{j\\ \downarrow}}{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ 0 & & x_n & \ddots & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \dots \overset{\substack{j\\ \downarrow}}{b} \dots e_n)$. Allora $AM_j = \left(Ae_1 \dots A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \dots Ae_n\right) =$

$(A^1 \dots \overset{\substack{j\\ \downarrow}}{b} \dots A^n)$. Quindi $\det(A^1 \dots b \dots A^n) = \det(A)\det(M_j) = \det(A)\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ 0 & & x_n & \ddots & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{mosse di colonna}}{=\!=} \det(A)\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & x_j & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} =$

$\det(A) \cdot x_j \Rightarrow x_j = \det(A^1 \dots b \dots A^n) \cdot (\det(A))^{-1}$ $\square$

Esempio:

- $T_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ 2x \quad +z \\ 2x+ky-2z \end{pmatrix}, \quad F_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ kx+y+z \end{pmatrix}$

i) Trovare per quali K $T_K \circ F_K$ e $F_K \circ T_K$ sono invertibili

ii) Per $K=1$ risolvere $T_K \circ F_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con Cramer.

(i)

$T_K \circ F_K$ e $F_K \circ T_K$ sono invertibili $\iff \det(T_K)\det(F_K) \neq 0 \iff \det(T_K)$ e $\det(F_K) \neq 0$.

$$\det(T_K) = \det(T_\mathcal{E}^\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & K & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & K & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & K & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & K \end{vmatrix} = 3(K+2) \Rightarrow K \neq -2$$

$$\det(F_K) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ K-1 & 1 \end{vmatrix} = -K+2 \Rightarrow K \neq 2$$

Quindi sono invertibili se $K \neq \pm 2$

(ii)

$$(T_1 \circ F_1)_\mathcal{E}^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad S: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$V(S) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3(-3) = 9 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Cor (inversa con Cramer): $\det(A) \neq 0$, allora vale la formula $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^c)^T$ dove $A^c = \left((-1)^{i+j} \det(A_i^j)\right)_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}}$

Dim: Formula di Cramer applicata a $(A \mid I_n)$ $\square$

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 9$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

IL TEOREMA DEGLI ORLATI

Vogliamo usare il determinante per calcolare il rango di $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (non necessariamente quadrata).

Def: un <u>minore</u> di A è una matrice $m-s \times n-s'$ ottenuta rimuovendo s righe e s' colonne.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è il minore di A ottenuto rimuovendo 1^a riga e 3^a e 5^a colonna

<u>OSS</u>: $r_K(A) \geq r_K(A')$ per qualsiasi minore A'.

Dim: Se r righe/colonne di A' sono indipendenti allora le componenti righe/colonne di A lo sono. $\square$

Def: A' minore di A. Un orlato di A' è un minore di A ottenuto aggiungendo una riga e una colonna di A'.

Esempio:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ orlato di A'.

Teorema (criterio degli orlati): $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora:

i) Il rango di A è il massimo r per cui esiste A' minore $r \times r$ con $\det(A') \neq 0$

ii) Se A' minore quadrato con $\det(A') \neq 0$ e tutti gli orlati di A' hanno $\det = 0$ allora $r_K(A) = r_K(A')$.

Come lo usiamo? Partiamo da A' con $\det \neq 0$. Se i suoi orlati hanno $\det = 0$ fine. Se A'' orlato di A' ha $\det \neq 0$ allora ripartiamo da A''.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow r_K \geq 2$

$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ guardiamo gli orlati:

$(3,1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4,1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$(3,2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4,2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Tutti gli orlati hanno $\det = 0 \Rightarrow r_K(A) = r_K(A') = 2$

• Vogliamo $r_K \begin{pmatrix} 1 & 0 & K & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & K-2 \\ 2 & 1 & K+2 & -K \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 2 & K+1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & K-2 \\ 0 & 1 & K+2 & -K \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} K & 0 \\ 1 & K-2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} K-1 & -2K+2 \\ K+1 & -2K+2 \end{matrix} \end{pmatrix}$

Proseguiamo con gli orlati:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & K \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K-1 \end{vmatrix} = K-1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K-2 \\ 0 & 0 & -2K+2 \end{vmatrix} = -2(K-1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & K \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K+1 \end{vmatrix} = K+1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K-2 \\ 0 & 0 & -2K+2 \end{vmatrix} = -2(K-1)$$

Non si annullano assieme! Vediamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 1 & 1 & K-2 \\ 0 & 0 & K-1 & -2K+2 \\ 0 & 0 & K+1 & -2K+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K-1 & -2K+2 \\ K+1 & -2K+2 \end{vmatrix} = (-2K+2)\begin{vmatrix} K-1 & 1 \\ K+2 & 1 \end{vmatrix} = (-2K+2)(K-1-K-1) = 4(K+1) \Rightarrow r_K = \begin{cases} 3, & K=-1 \\ 4, & K \neq -1 \end{cases}$$

Un modo più pratico è di controllare prima il determinante di A, poi per $K=-1$ cercare un minore 3×3 con det $\neq 0$.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Def: $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$, $v \in V$ è un <u>autovettore</u> se e solo se $Tv = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $v \neq 0_V$ allora λ è un <u>autovalore</u> per T. (stessa cosa se A matrice $n\times n$)

Def: Lo <u>spettro</u> di T (stessa cosa per A $n\times n$) è l'insieme $sp(T) \subset \mathbb{K}$ dato da:
$sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \lambda \text{ autovalore di } T\}$.

Esempio:
- $T = Id_V \Leftrightarrow$ ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$ autovettore con autovalore $\lambda = 1$.
- 0_V è autovettore per ogni T, infatti $T0_V = \lambda 0_V$ per ogni λ
- $T = L_A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, allora:
  - e_1 autovettore con autovalore 1
  - e_2 autovettore con autovalore 2
  - e_3 autovettore con autovalore 3
- $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $F(p) = p'$, $F(1) = 0 = 0 \cdot 1 \Rightarrow$ autovettore con $\lambda = 0$. Ogni autovettore è un multiplo di 1.
- $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $F(p) = T \cdot p'$ allora:

$$\left.\begin{array}{l} -F(1) = 0 \Rightarrow 1 \text{ autovettore con } \lambda = 0 \\ -F(T) = T \Rightarrow T \text{ autovettore con } \lambda = 1 \\ -F(T^2) = 2T^2 \Rightarrow T^2 \text{ autovettore con } \lambda = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{1, T, T^2\}, \text{ quindi } F^B_B = (F(1)_B \; F(T)_B \; F(T^2)_B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Def: i) Una matrice $n\times n$ è <u>diagonale</u> se e solo se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$
ii) Un endomorfismo $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ è <u>diagonalizzabile</u> $\Leftrightarrow$ esiste B base di V t.c. T^B_B è una matrice diagonale.
iii) Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste $P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $P^{-1}AP = D$, con D diagonale.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, infatti se $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ allora $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ NON è diagonalizzabile

OSS: T è diagonalizzabile $\iff T_B^B$ lo è per una qualche base B. A è diagonalizzabile $\iff L_A$ lo è.

Dim: T è diagonalizzabile $\iff \exists B'$ con $T_{B'}^{B'}$ diagonale $\iff Id_{B'}^{B} T_B^B Id_B^{B'}$ diagonale. Se chiamiamo $Id_B^{B'} = P$ allora $Id_{B'}^{B} = P^{-1}$ e $P^{-1} T_B^B P$ è diagonale. Viceversa se $P^{-1} T_B^B P$ diagonale e $B' = \{\psi_B(P^1), \dots, \psi_B(P^n)\}$ allora $P = Id_B^{B'}$ e $P^{-1} T_B^B P = Id_{B'}^{B} T_B^B Id_B^{B'} = T_{B'}^{B'}$.

A è diagonalizzabile $\iff \exists P$ con $P^{-1}AP$ diagonale. $B = \{P^1, \dots, P^n\}$ base di $\mathbb{K}^n$ perché P invertibile quindi $P^{-1}AP = Id_B^{\mathcal{E}} L_{A\,\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} Id_{\mathcal{E}}^{B} = L_{A\,B}^{B}$ diagonale. $\square$

Prop: Sono equivalenti:
i) T (rispettivamente A) diagonalizzabile
ii) Esiste B base di V formata da autovettori per T (rispettivamente per A)

Dim: Le affermazioni sono equivalenti per T e A per quanto visto prima, quindi dimostriamo per $T \in \mathrm{End}\,\mathbb{K}$.

(i $\Rightarrow$ ii)
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $T_B^B = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow (d_1 e_1 \dots d_n e_n) = T_B^B = (T(v_1)_B \dots T(v_n)_B) \Rightarrow T(v_j)_B \overset{(v_j)_B = e_j}{=} d_j e_j \sim$

$\sim T(v_j)_B = d_j (v_j)_B \iff T(v_j) = d_j v_j$

(ii $\Rightarrow$ i)
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $T(v_j) = \lambda_j v_j$. $T_B^B = (T(v_1)_B \dots T(v_n)_B) = ((\lambda_1 v_1)_B \dots (\lambda_n v_n)_B) \overset{(v_j)_B = e_j}{=} (\lambda_1 e_1 \dots \lambda_n e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\square$

Cor: T_B^B diagonale $\iff B$ base di autovettori.

Dim: immediato dalla dimostrazione sopra.

Vogliamo ora:
1) Sviluppare strumenti per trovare autovettori/autovalori
2) Sviluppare strumenti per capire se "sono abbastanza" (cioè se formano una base).

OSS: La diagonalizzabilità può dipendere dal campo $\mathbb{K}$.

IL POLINOMIO CARATTERISTICO

L'obiettivo è quello di trovare $sp(T)$.

Def: Il polinomio caratteristico di $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ (o $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$) è $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda Id_V)$ ($p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$).

OSS: $p_T(\lambda)/p_A(\lambda)$ dipende solo dalla classe di coniugio/similitudine di T/A.
(se due polinomi sono coniugati allora hanno lo stesso polinomio. Idem per le matrici)

Dim: Se $T_B^B = F_{B'}^{B'}$ allora $\det(T-\lambda Id_V) = \det((T-\lambda Id_V)_B^B) = \det(T_B^B - \lambda {Id_V}_B^B) = \det(T_B^B - \lambda I_n) =$
$= \det(F_{B'}^{B'} - \lambda I_n) = \det(F - \lambda Id_V)$.

Se $B = P^{-1}AP$ allora $\det(B-\lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I_n P) = \det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P) =$
$= \det(P)^{-1}\det(P)\det(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n)$ $\square$

Prop: $\alpha \in Sp(T) \iff P_T(\alpha) = 0$

Dim: $(\Rightarrow)$
$\alpha \in Sp(T) \Rightarrow \exists v \neq 0, T(v) = \alpha v \sim T(v) = \alpha Id_V(v) \sim (T-\alpha Id_V)(v) = 0 \Rightarrow \ker(T-\alpha Id_V)$ non banale $\Rightarrow$
$\Rightarrow \det(T-\alpha Id_V) = 0 \sim P_T(\alpha) = 0$.

$(\Leftarrow)$
$\det(T-\alpha Id_V) = 0 \Rightarrow \ker(T-\alpha Id_V)$ non banale $\Rightarrow \exists v \neq 0, (T-\alpha Id_V)v = 0_V \sim T(v) = \alpha Id_V(v) \sim$
$\sim T(v) = \alpha v$ $\square$

<u>OSS</u>: $P_T(\lambda)$ è un polinomio in λ di grado $n = \dim(V)$, con termine di testa $(-1)^n$ e termine costante $\det(T)$.

Cor: $sp(T)$ contiene al più n elementi distinti.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 + 1 - \lambda - 1) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3) \Rightarrow Sp(A) = \{0, 3\}$

Dopo aver trovato $sp(T)$, cerchiamo gli autovettori.

Def: i) V_α è un autospazio
ii) $V_0 = \ker(T)$

Dim: (i)
$T(v) = \alpha v, T(v') = \alpha v' \Rightarrow T(\lambda v) = (\lambda\alpha)v = \alpha(\lambda v), T(v+v') = \alpha v + \alpha v' = \alpha(v+v')$
(ii)
$T(v) = 0 \cdot v \iff T(v) = 0_V$ $\square$

V_α si dice <u>autospazio</u> per l'autovalore α

<u>OSS</u>: $V_\alpha = \ker(T - \alpha Id_V)$.

Quindi per cercare V_α risolviamo $(T-\alpha Id_V)_B^B v = 0$ per qualche base $B \sim (T_B^B - \alpha I_n \mid 0)$

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Sp(A) = \{0, 3\}$

$V_0: Av = 0 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim x = -y - z \Rightarrow V_0 = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$V_3: (A-3I_3)v = 0 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

I vettori $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sono indipendenti, infatti $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ base di autovettori $\Rightarrow L_{A\,B}^{\;B} = Id_B^{\mathcal{E}}\, L_{A\,\mathcal{E}}^{\;\mathcal{E}}\, Id_{\mathcal{E}}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Prop: $P_T(\lambda)$ (rispettivamente $P_A(\lambda)$) dipende solo dalla classe di coniugio di T (rispettivamente di similitudine di A).

Dim: mostriamo per A. $B = P^{-1}AP$, allora $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
$P_B(\lambda) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(AP - \lambda P)) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) =$
$= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) = \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda)$ $\square$

Quindi se $T \sim F$ (rispettivamente $A \sim B$) allora $P_T(\lambda) = P_F(\lambda)$ (rispettivamente $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$)

ALCUNI LEMMI SUI POLINOMI

L'anello $\mathbb{K}[T]$ è una <u>fattorizzazione unica</u>, cioè $p \in \mathbb{K}[T]$ si scrive come $p = p_1 \cdots p_r$ dove $p_1, \dots, p_r$ sono polinomi irriducibili e i fattori sono unici a meno di moltiplicare per costanti e permutare.

Esempio:
- $T^3 - 1 = \underset{\text{irriducibili}}{(T-1)(T^2+T+1)}$ in $\mathbb{R}[T]$

Il grado di $P(T) = a_0 + \dots + a_d T^d$ è $\deg(P) = d$ $(a_d \neq 0)$. Il grado di $p \cdot q$ è la somma dei gradi $\deg(P) + \deg(q)$.
In particolare se $P = P_1 \dots P_r$ allora $\deg(P) = \deg(P_1) + \dots + \deg(P_r)$.

<u>OSS</u>: in $\mathbb{R}[T]$ i polinomi irriducibili hanno grado 1 $(aT+b)$ o 2 (aT^2+bT+c). Un polinomio di grado 2 è irriducibile $\Leftrightarrow \Delta(p) < 0 \Leftrightarrow$ radici complesse.

Teorema (fondamentale dell'algebra): Ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[T]$ si fattorizza in fattori di grado 1:
$p(T) = a(T - \alpha_1) \dots (T - \alpha_n)$, $n = \deg(P)$.

Teorema (Ruffini): $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (T - \alpha) / P \sim P = (T - \alpha) q$

Quindi:
- $P_T(\lambda)$ ha al più n radici costanti con molteplicità.
- Queste radici e le rispettive molteplicità sono <u>uniche</u>.

<u>Obiettivo</u>: dato $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ (rispettivamente A $n \times n$) trovare tutte le radici reali di $P_T(\lambda)$ (rispettivamente $P_A(\lambda)$). Se:
- $\dim(V) = 2$: facile
- $\dim(V) = 3$: se riusciamo a scrivere $P_T(\lambda) = \pm(\lambda - \alpha)\overset{\deg = 2}{Q(\lambda)}$ abbiamo finito.

Altrimenti?

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -2-\lambda \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (2+2\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1)+(2+2\lambda)(-2\lambda-2) = -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1-4\lambda^2-8\lambda-4 = -(\lambda^3+7\lambda^2+11\lambda+5).$

Come troviamo le radici?

Lemma di Gauss: $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$, $P(T) = a_0 + \ldots \pm T^d$ (termine di testa ± 1). Allora:
  i) Se $p(\alpha)=0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ allora $\alpha \in \mathbb{Z}$
  ii) Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ radice allora α / a_0

Quindi nel caso di $\lambda^3+7\lambda^2+11\lambda+5$, radici razionali possibili sono $\pm 1, \pm 5$.
Per $\lambda = 1$, $1+7+11+5 \neq 0$, quindi non va bene
Per $\lambda=-1$, $-1+7-11+5=0$, va bene.

Divisore con resto: dati $p(T), q(T)$, $\deg(q) < \deg(P)$, $\exists!\, s(T), r(T)$ t.c. $P(T) = q(T)\cdot s(T) + r(T)$ e $\deg(r) < \deg(q)$.

Nel nostro caso:

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3+7\lambda^2+11\lambda+5 & \lambda+1 \\ \hline \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^2+6\lambda+5 \\ \quad 6\lambda^2+11\lambda+5 & \\ \quad 6\lambda^2+6\lambda & \\ \qquad 5\lambda+5 & \\ \qquad 5\lambda+5 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda^3+7\lambda^2+11\lambda+5 = (\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+5) \Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+5)$

risolviamo e otteniamo $-1, -5$

Quindi $sp(A) = -1, -5$.

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA

Def: $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ (rispettivamente $A_{n\times n}$), $\alpha \in sp(T)$ (rispettivamente $\alpha \in sp(A)$).
  i) La molteplicità algebrica di α, scritto $ma(\alpha)$, è il massimo d per cui $(\lambda-\alpha)^d / P_T(\lambda)$ (risp. $P_A(\lambda)$).
  ii) La molteplicità geometrica di α è il $mg(\alpha) = \dim(V_\alpha)$ dove $V_\alpha = \{v \in V / T(v) = \alpha v\}$.

OSS: i) $ma(\alpha)$ e $mg(\alpha)$ dipendono solo dalla classe di coniugio/similitudine.
  ii) $\sum_{\alpha \in sp(T)} ma(\alpha) \leq n$. È uguale $\Leftrightarrow P_T(\lambda) / P_A(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.
  iii) $mg(\alpha) \geq 1$ per ogni α.

Dim: (i)
$T^B_B = F^{B'}_{B'}$. $ma(\alpha, T) = ma(\alpha, F)$ perché $P_T(\lambda) = P_F(\lambda)$.
$mg(\alpha,T) = \dim(V_{\alpha,T}) = \dim(Ker(T - \alpha Id_V)) = \dim(Ker(T^B_B - \alpha {Id_V}^B_B)) = Ker(T^B_B - \alpha I_n) =$
$= Ker(F^{B'}_{B'} - \alpha I_n) = Ker(F^{B'}_{B'} - \alpha {Id_V}^{B'}_{B'}) = Ker(F - \alpha Id_V) = \dim(V_{\alpha,F}) = mg(\alpha, F)$.

(ii)
$\sum_{\alpha \in sp(T)} ma(\alpha) = \#$ fattori di grado 1 nella scomposizione $\leq \deg(P_T(\lambda)) = n$.
È uguale $\Leftrightarrow$ tutte le radici sono in $\mathbb{K}$.

(iii)
$\alpha \in Sp(T) \Leftrightarrow V_\alpha \neq \{0_V\} \Rightarrow mg(\alpha) \geq 1$

Esempio:

- $F(p) = p' \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_{\le 2}[T])$.

  $p_F(\lambda) = -\lambda^3 \Rightarrow Sp(F) = \{0\}$, $ma(0) = 3$.

  $mg(0) = \dim(V_0) = \ker(F - 0 \cdot Id_V) = \ker(F)$

  $$F_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(F) = \mathrm{Span}\{1\} \Rightarrow mg(0) = 1 < ma(0) = 3$$

Prop: $\alpha \in Sp(T)$ (rispettivamente $\alpha \in Sp(A)$). Allora $ma(\alpha) \geq mg(\alpha)$

Dim: $mg(\alpha) = d$, $\{v_1, \dots, v_d\}$ base di V_α. $B = \{v_1, \dots, v_d, v'_{d+1}, \dots, v'_n\}$ (teorema completamento).

$T_B^B = (T(v_1)_B \dots T(v_d)_B \, T(v'_{d+1})_B \dots T(v'_n)_B) = ((\alpha v_1)_B \dots (\alpha v_d)_B \; *) = (\alpha e_1 \dots \alpha e_d \; *) =$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{d} & \underbrace{*}_{n-d} \end{array}\right). \quad p_T(\lambda) = \det(T_B^B - \lambda I_n) = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha-\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \alpha-\lambda \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & * \end{array}\right| \quad \text{sviluppiamo per colonne } d \text{ volte} =$$

$$= (\alpha-\lambda)^d \det(\underset{n-d \times n-d}{*}) = (-1)^d (\lambda-\alpha)^d Q(\lambda) \Rightarrow (\lambda-\alpha)^d \mid p_T(\lambda) \Rightarrow ma(\alpha) \geq d = mg(\alpha)$$ $\square$

IL CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITA'

Vogliamo dimostrare:

Teorema (criterio di diagonalizzabilità): $T \in End_K(V)$, $\dim(V) = n$ (risp. A $n \times n$).

i) T (risp. A) è diagonalizzabile

ii) $\sum_{\alpha \in Sp(T)} ma(\alpha) = n$ e $mg(\alpha) = ma(\alpha)$ per ogni $\alpha \in Sp(T)$ (risp. $Sp(A)$)

iii) $\sum_{\alpha \in Sp(T)} mg(\alpha) = n$ (risp. $Sp(A)$)

Inoltre in tal caso una base di autovettori è data da $\bigcup_{\alpha \in Sp(T)} B_{V_\alpha}$.

Ci servono alcuni passi preliminari:

Prop: $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in Sp(T)$, $v_1, \dots, v_r \neq 0$ rispettivamente in $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_r}$. Allora $v_1, \dots, v_r$ sono indipendenti.

Dim: Per induzione, $r = 1$ è ovvio.

Assumiamo vero per $r-1$.

$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$. Allora $T(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) = T(0) = 0 \rightsquigarrow a_1 \alpha_1 v_1 + \dots + a_r \alpha_r v_r = 0$, possiamo assumere $a_1 \neq 0$. Abbiamo due casi. Quando $\alpha_1 = 0$, $v_2, \dots, v_r$ sono indipendenti $\Rightarrow a_2 = \dots = a_r = 0$ e abbiamo finito.

Quando $\alpha_1 \neq 0$ mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0 \\ a_1 \alpha_1 v_1 + \dots + a_r \alpha_r v_r = 0 \end{cases} \xrightarrow{-\alpha_1} \begin{cases} a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0 \\ a_2(\alpha_2 - \alpha_1) v_2 + \dots + a_r(\alpha_r - \alpha_1) v_r = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2(\alpha_2 - \alpha_1) v_2 + \dots + a_r(\alpha_r - \alpha_1) v_r = 0$$

$v_2, \dots, v_r$ indipendenti $\Rightarrow$ coefficienti sono 0 ma $\alpha_j - \alpha_1 \neq 0 \; \forall j \neq 1 \Rightarrow a_2 = \dots = a_r = 0$ $\square$

Cor: $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in Sp(T)$ allora $\dim(V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_r}) = \dim(V_{\alpha_1}) + \dots + \dim(V_{\alpha_r}) = mg(\alpha_1) + \dots + mg(\alpha_r)$.

Dim (idea): $B_{V_{\alpha_1}} \cup \dots \cup B_{V_{\alpha_r}}$ è base di $V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_r}$, indipendenti per proposizione. $\square$

Dim (del teorema): (i ⇒ iii)

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di autovettori allora ogni v_j appartiene a un certo V_{α_j} ⇒

⇒ $\sum_{\alpha \in Sp(T)} \dim(V_\alpha) \geq n$. Sappiamo anche che è $\leq n$ per il corollario di sopra.

(iii ⇒ i)

$\sum_{\alpha \in Sp(T)} \dim(V_\alpha) = \dim(V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_r}) \Rightarrow V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_r} = V \Rightarrow B_{V_{\alpha_1}} \cup \dots \cup B_{V_{\alpha_r}} = B$ è una base formata da autovettori.

(iii ⇒ ii)

$mg(\alpha) \leq ma(\alpha)$, ma se $\sum_\alpha mg(\alpha) = \sum_\alpha ma(\alpha) \Rightarrow$ sono uguali e $\sum_\alpha ma(\alpha) = n$.

(ii ⇒ iii)

Ovvio $\sum_\alpha ma(\alpha) = \sum_\alpha mg(\alpha) = n$ $\square$

Cor: Siano $T, F \in End_{\mathbb{K}}(V)$ (risp. A, B $n \times n$) t.c. $P_T(\lambda) = P_F(\lambda)$. Allora se T è diagonalizzabile $T \sim F$ ⇔ ⇔ anche F è diagonalizzabile.

Dim: (⇐)

$$F_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} \underbrace{\alpha_1 \ddots \alpha_1}_{ma(\alpha_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\alpha_r \ddots \alpha_r}_{ma(\alpha_r)} \end{pmatrix} = T_B^B$$

dove B, B' sono basi di autovettori per T e F ordinate appropriatamente.

(⇒)

Se F non è diagonalizzabile allora esiste $\alpha \in Sp(F) = sp(T)$ tale che $mg(\alpha, F) \neq ma(\alpha, F) = ma(\alpha, T) = mg(\alpha, T)$

⇒ non possono essere coniugate $\square$

Cor: Se $P_T(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e tutte distinte è diagonalizzabile

Dim: $\sum_\alpha ma(\alpha) = n$ e $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 1$ $\square$

Esempio:

- $T(P) = P'$. $sp(T) = \{0\}$, $ma(0) = 3$, $mg(0) = 1$ ⇒ NON è diagonalizzabile
- $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $sp(A) = \{-1, -5\}$, $ma(-1) = 2$, $ma(-5) = 1$

$ma(-5) = 1 \Rightarrow mg(-5) = 1$

$mg(-1)$: $(A + I_3 | 0) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $rk(A + I_3) = 1$

⇒ $\dim(V_{-1}) = 2$ ⇒ $ma(-1) = mg(-1)$ ⇒ è diagonalizzabile

$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo una base di autovettori:

V_{-1}: $x - 2y + z = 0 \sim x = 2y - z \Rightarrow V_1 = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

V_{-5}: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow V_{-5} = Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow B = B_{V_{-1}} \cup B_{V_{-5}} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Qualche esempio importante :

$T, T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ o $A, A' \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Per capire se sono simili, confrontiamo in ordine :
- Determinante
- Polinomio caratteristico
- Molteplicità geometriche (per α con $m_a(\alpha) > 1$)

- Se a un qualche passaggio sono diverse allora non sono coniugati / simili, fine.
- Se tutti uguali e sono diagonalizzabili => simili, fine.
- Se tutti uguali ma non sono diagonalizzabili (qualche $m_a > m_g$) => non sappiamo.

PRODOTTI SCALARI

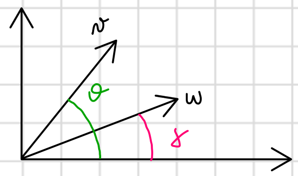
Vogliamo "algebrizzare" i concetti di lunghezza e angolo. Come?

Esempio:

- In $\mathbb{R}^2$, partendo dalla geometria analitica :

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ => lunghezza di $v \overset{def}{=} \|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$

angolo :



angolo tra v e w è $\vartheta - \gamma$, molto lontano dall'algebra. Quindi proviamo a fare qualche conto

$\|v\| = \lambda$, $\|w\| = \lambda'$, allora

$$v = \begin{pmatrix} \lambda\cos\vartheta \\ \lambda\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} \lambda'\cos\gamma \\ \lambda'\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\vartheta-\gamma) = \cos\vartheta\cos(-\gamma) - \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}(-\gamma) = \cos\vartheta\cos\gamma + \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

Quindi se $\alpha = \vartheta - \gamma$ = angolo tra v e w, $\cos\alpha = \cos\vartheta\cos\gamma + \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\gamma$. Se :

$$v = \begin{pmatrix} \lambda\cos\vartheta \\ \lambda\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \lambda'\cos\gamma \\ \lambda'\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x_0x_1 + y_0y_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\,\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$ già più trattabile !

Osserviamo che $x_0x_1 + y_0y_1$, $x_0^2+y_0^2$, $x_1^2+y_1^2$ sono la stessa operazione applicata a (v,w), (v,v), (w,w)

$$\underset{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{v}} \cdot \underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{w}} \overset{def}{=} x_0x_1 + y_0y_1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v\cdot w}{\sqrt{v\cdot v}\,\sqrt{w\cdot w}}$$

Che proprietà ha questa operazione ?

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } (\lambda v)\cdot w = \lambda(v\cdot w) = v\cdot(\lambda w) \\ \text{ii) } (v+v')\cdot w = v\cdot w + v'\cdot w \\ \quad\; v\cdot(w+w') = v\cdot w + v\cdot w' \end{array}\right\}\ \text{Bilineare}$$

iii) $v\cdot w = w\cdot v$ simmetrica

Vogliamo generalizzare queste idee. Per il resto degli argomenti $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Def: V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare su V è un'applicazione $g: V\times V \to \mathbb{R}$ tale che :

i) $g(\lambda v, w) = g(v, \lambda w) = \lambda g(v,w)$

ii) $g(v+v', w) = g(v,w) + g(v',w)$

in altre parole, g è bilineare. Se inoltre g è simmetrica, cioè

iii) $g(v,w) = g(w,v)$

allora diciamo che g è un prodotto scalare e scriviamo $g(v,w) \overset{def}{=} \langle v, w\rangle_g$

Notazione : (V, g) indica uno spazio con un prodotto scalare g assegnato.

Esempio:

- $V = \mathbb{R}^n$, $g(v,w) = v^T w$ o equivalentemente $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ è il

  prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ o prodotto "dot". Lo scriviamo $v \cdot w \overset{\text{def}}{=} v^T w$.

Verifichiamo le proprietà i - iii

i) $(\lambda v) \cdot w = (\lambda v)^T w = \lambda (v^T w) = v^T (\lambda w)$

ii) $(v + v') \cdot w = (v + v')^T w = (v^T + (v')^T) w = v^T w + (v')^T w = v \cdot w + v' \cdot w$

$\quad v \cdot (w + w') = v^T (w + w') = v^T w + v^T w' = v \cdot w + v \cdot w'$

iii) $v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = w \cdot v$

<u>OSS</u>: Se dimostriamo prima che g è <u>simmetrica</u> basta mostrare (i) e (ii) da <u>uno solo</u> dei due lati, infatti se

$g(w,v) = g(v,w) + g(v',w) \Rightarrow g(w+w', v) = g(w,v) + g(w',v)$

$$\underset{\parallel}{g(w+w',v)} = \underset{\parallel}{g(w,v) + g(w',v)}$$
$$g(v, w+w') = g(v,w) + g(v,w')$$

Vediamo due modi di "produrre" prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$:

1) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Quali polinomi $g(X,Y) = g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sono prodotti scalari?

- No termini costanti: $(g(0,0) = 0)$
- No termini di grado 1: $(g(X,0) = g(0,Y) = 0)$ e ogni termine deve contenere sia un x_j che un y_j.
- Dato che $g(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^2 g(X,Y)$ é omogeneo di grado 2
- Dato che $g(X,Y) = g(Y,X)$ per ogni $\alpha x_i y_j$ deve apparire $\alpha x_j y_i$.

L'abbiamo descritto completamente.

Prop: $g(X,Y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ è un prodotto scalare $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$. Inoltre se un polinomio $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ è in questa forma.

Esempio:

- $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2 x_2 y_2 + 2 x_3 y_1 + 2 x_1 y_3$ é un prodotto scalare

- $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_3 + x_3 y_3 - x_3 y_1 - x_1 y_3$ non è un prodotto scalare.

Possiamo scrivere un prodotto scalare a partire da una matrice?

Lemma: A $m \times n$, B $n \times s$, allora $(A \cdot B)^T = \underset{s \times n}{B^T} \underset{n \times m}{A^T} \in \mathbb{M}_{s \times m}(\mathbb{K})$

Esempio:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T\right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Def: $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ è <u>simmetrica</u> se $A^T = A$

Esempio:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ NON è simmetrica

OSS: $A = (a_{ij})$ è simmetrica $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$

Claim: $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dato da $g(X,Y) = X^T A Y = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare.

Per iniziare osserviamo che X^TAY è una matrice 1×1 cioè un numero reale. Perché?

$$X^T A Y$$

$1\times n$ $\quad$ $n\times n$ $\quad$ $n\times 1$

$1\times n \quad n\times 1$

1×1

Verifichiamo le proprietà:

- Simmetrico: $(X^TAY)^T = X^TAY = g(X,Y)$ perché è una matrice 1×1 quindi è simmetrica. Ma:
$$(X^T(AY))^T = (AY)^T\underbrace{(X^T)^T}_{\text{trasposta 2 volte è matrice originale}} = (AY)^T X = Y^T A^T X = Y^T A X = g(Y,X)$$

- Bilineare: basta dimostrare che è lineare a destra dato che è simmetrica.
  - $g(X, \lambda Y) = X^T A(\lambda X) = X^T(\lambda AY) = \lambda(X^TAY) = \lambda g(X,Y)$
  - $g(X, Y+Y') = X^T A(X+Y') = X^T(AY + AY') = X^TAY + X^TAY' = g(X,Y) + g(X,Y')$

Abbiamo dimostrato:

Prop: $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dato da $g(X,Y) = X^TAY$ dove A $n\times n$ simmetrica è un prodotto scalare

Esempio:

- $A = I_n$, $X^T I_n Y = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ è il prodotto standard su $\mathbb{R}^n$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^T = A$. $g(X,Y) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$

OSS: il prodotto dato da $A = (a_{ij})$ $n\times n$ simmetrica è data da $g(X,Y) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_i$ quindi le due descrizioni date sono equivalenti.

LA MATRICE ASSOCIATA A UN PRODOTTO SCALARE

Domanda:

1) Possiamo scrivere ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ in questo modo?
2) Dato un prodotto scalare su V, possiamo scegliere delle coordinate e scriverlo "in coordinate" in questo modo?

Prop: g, g' prodotti scalari su V. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Allora se per ogni i,j $g(v_i, v_j) = g'(v_i, v_j)$ i due prodotti sono uguali, cioè $g(v,w) = g'(v,w)$ $\forall v,w \in V$.

Dim: $g(v,w) = g(a_1v_1+\dots+a_nv_n, b_1v_1+\dots+b_nv_n) = g(a_1v_1, b_1v_1+\dots+b_nv_n)+\dots+g(a_nv_n, b_1v_1+\dots+b_nv_n) =$
$= a_1 g(v_1, b_1v_1+\dots+b_nv_n)+\dots+a_n g(v_n, b_1v_1+\dots+b_nv_n) =$
$= a_1b_1 g(v_1,v_1)+\dots+a_1b_n g(v_1,v_n)+\dots+a_nb_n g(v_n,v_n) = \sum_{i,j} a_ib_j g(v_i,v_j) = \sum_{i,j} a_ib_j g'(v_i,v_j) =$

$g(v_i,v_j) = g'(v_i,v_j)$

$= \sum_i a_i g'(v_i, b_1v_1+\dots+b_nv_n) = g'(a_1v_1+\dots+a_nv_n, b_1v_1+\dots+b_nv_n) = g'(v,w)$

Teorema: (V,g) spazio con prodotto scalare, B base di V. Esiste un'unica matrice simmetrica $A_{g,B}$ tale che $g(v,w) = v_B^T A_{g,B} w_B$ per ogni $v,w \in V$. Abbiamo $A_{g,B} = (\langle v_i,v_j\rangle_g)_{\substack{i\le n\\ j\le n}}$

Dim: $A_{g,B}$ è simmetrica perché $\langle v_i,v_j\rangle_g = \langle v_j,v_i\rangle_g$.
Quindi basta far vedere che il prodotto scalare g' definito da $g'(v,w) = v_B^T A_{g,B} w_B$ è uguale al prodotto g.
Per la proposizione basta vederlo sulla base. Ma:

$$g'(v_i,v_j) = (v_i)_B^T A_{g,B}(v_j)_B = e_i^T A_{g,B} e_j = e_i^T A_{g,B}^j = (0\dots1\dots0)\begin{pmatrix}\langle v_i,v_j\rangle_g\\ \vdots\\ \langle v_i,v_j\rangle_g\\ \vdots\\ \langle v_i,v_j\rangle_g\end{pmatrix} = \langle v_i,v_j\rangle_g$$

Quindi $g'=g$ $\square$

Esempio:
- $g = \cdot$ su $\mathbb{R}^n$, $B=\mathcal{E}$. $A_{\cdot,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle\end{pmatrix}$

ma $\langle e_i,e_j\rangle = e_i\cdot e_j = e_i^T e_j = (0\dots1\dots0)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \Rightarrow A_{\cdot,\mathcal{E}} = I_n$

- $(\mathbb{R}^3,\cdot)$, $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$A_{\cdot,B} = \begin{pmatrix}(1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} & (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} & (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ * & (1\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} & (1\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ * & * & (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&2&2\\2&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

li conosciamo già per simmetria

Cosa succede se cambiamo le coordinate?

Prop: (V,g) spazio con prodotto scalare. B, B' basi di V. Allora

$$A_{g,B'} = (Id_B^{B'})^T A_{g,B}\, Id_B^{B'}$$

Dim: $A_{g,B'}$ è l'unica matrice tale che $g(v,w) = v_{B'}^T A_{g,B'} w_{B'}$. Osserviamo che, dato che $v_B = Id_B^{B'} v_{B'}$ e $w_B = Id_B^{B'} w_{B'}$, abbiamo $g(v,w) = v_B^T A_{g,B} w_B = (Id_B^{B'} v_{B'})^T A_{g,B}(Id_B^{B'} w_{B'}) =$
$= (v_{B'})^T \underbrace{(Id_B^{B'})^T A_{g,B}\, Id_B^{B'}}_{} w_{B'}$
$\hookrightarrow$ questa matrice soddisfa la proprietà di $A_{g,B'} \Rightarrow$ è $A_{g,B'}$ $\square$

Esempio:
- $(\mathbb{R}^3,\cdot)$, $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$A_{\cdot,B'} = (Id_{\mathcal{E}}^{B'})^T A_{\cdot,\mathcal{E}}\, Id_{\mathcal{E}}^{B'} = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&2&2\\2&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

<u>OSS</u>: $A_{\cdot,B} = (v_1\dots v_n)^T(v_1\dots v_n)$

VETTORI E SOTTOSPAZI ORTOGONALI

Def: (V,g) spazio con prodotto scalare, $v,w \in V$ sono g-ortogonali se $\langle v,w\rangle_g = 0$.

Esempio:

- $(\mathbb{R}^3,\cdot)$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ sono ortogonali, infatti $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2-1-1 = 0$

- $(\mathbb{R}^4, g)$, $A_{g,\varepsilon} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ è ortogonale a se stesso, infatti $(1\,0\,0\,1)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1-1=0$

Notazione: scriviamo $v \perp_g w$ per "v è g-ortogonale a w".

Def: (V,g) spazio con prodotto. $W, W' \subset V$. $W \perp_g W'$ se $\forall w \in W, w' \in W'$ $w \perp_g w'$. Il sottospazio ortogonale a W è: $W^{\perp_g} \overset{def}{=} \{v \in V \,/\, \langle w,v\rangle = 0 \;\; \forall w \in W\}$

Esempio:

- $(\mathbb{R}^3,\cdot)$ $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$. Cos'è $W^\perp$?

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W^\perp \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \;\; \forall a,b \in \mathbb{R} \sim (x\;y\;z)\begin{pmatrix}a-b\\2a-b\\a+3b\end{pmatrix} = 0 \sim$$

$$\sim (x\;y\;z)\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix} + (x\;y\;z)\begin{pmatrix}-b\\-b\\3b\end{pmatrix} = 0 \sim a(x\;y\;z)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b(x\;y\;z)\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Scegliendo $a=1, b=0$ e $a=0, b=1$ otteniamo:

$$\sim \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y+3z=0\end{cases} \sim \begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+4z=0\end{cases} \sim \begin{cases} x = 7z \\ y=-4z\end{cases} \Rightarrow W^\perp = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$$

Possiamo sempre ridurci a una base di W?

Prop: $B_W = \{w_1, \dots w_d\}$. Allora $v \in W^{\perp_g} \iff \langle w_1, v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle_g = 0$

Dim: Ovviamente se $v \in W^{\perp_g} \Rightarrow \langle w_1,v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle_g = 0$.
Supponiamo $\langle w_1,v\rangle_g = \dots = \langle w_d,v\rangle_g = 0$ allora $\langle w,v\rangle_g = \langle a_1w_1 + \dots + a_dw_d, v\rangle_g =$
$= \langle a_1w_1,v\rangle_g + \dots + \langle a_dw_d,v\rangle_g = a_1\underbrace{\langle w_1,v\rangle_g}_{=0} + \dots + a_d\underbrace{\langle w_d,v\rangle_g}_{=0} = 0$ $\square$

Esempio:

- $(\mathbb{R}^3, g)$ definito da $A_g = \begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&1&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}$. $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Troviamo $W^{\perp_g}$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W^{\perp_g} \iff \begin{cases}(x\;y\;z)\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&1&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \\ (x\;y\;z)\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&1&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\end{cases} \sim \begin{cases}(x\;y\;z)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \\ (x\;y\;z)\begin{pmatrix}8\\-2\\5\end{pmatrix} = 0\end{cases} \sim 8x-2y+5z=0 \sim$$

$$\sim x = \frac{y}{4} - \frac{5}{8}z \Rightarrow W^{\perp_g} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\8\end{pmatrix}\right\}$$

Def: (V,g) spazio con prodotto scalare. $V^{\perp g} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle_g = 0 \ \forall w \in V\}$ è il nucleo di g.

Prop: data B base di V abbiamo $(V^{\perp g})_B = \mathrm{Ker}(A_{g,B})$

Dim: se $v_B \in \mathrm{Ker}(A_{g,B})$ allora $\langle v, w\rangle_g = \langle w, v\rangle = w_B^T(A_{g,B}\, v_B) = w_B^T \cdot 0 = 0$.

se $v \in V^{\perp g}$, scriviamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A_{g,B}\, v_B$. Allora:

$$X^T A_{g,B}\, v_B = \langle \psi_B X, v\rangle_g = 0$$

$$(x_1 \dots x_n)(A_{g,B}\, v_B) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2 \Rightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_B \in \mathrm{Ker}(A_{g,B})$ $\square$

Esempio:

- $(\mathbb{R}^3, g)$ definito da $A_g = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ allora $(\mathbb{R}^3)^{\perp} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

PRODOTTI SCALARI, ORTOGONALITA'

Ricapitoliamo: (V,g) spazio con prodotto scalare. Dato $W \subset V$:

i) $W^{\perp g} = \{v \in V / \langle w, v\rangle_g = 0 \ \ \forall w \in W\}$

ii) Il nucleo di g è $V^{\perp g} = \{v \in V / \langle v', v\rangle_g = 0 \ \forall v' \in V\}$

Diciamo che g è <u>degenere</u> (risp. non degenere) se $V^{\perp g} \neq \{0_V\}$ (risp $= \{0_V\}$).

Abbiamo visto: $\psi_B(V^{\perp g}) = \mathrm{Ker}(A_{g,B})$

Prop: se $\dim(W) = d$ e $\dim(V) = n$ allora $\dim(W^{\perp g}) \geq n-d$.

Dim: consideriamo $T: V \to \mathbb{R}^d$ definita da $T(v) = \begin{pmatrix} \langle w_1, v\rangle_g \\ \vdots \\ \langle w_d, v\rangle_g \end{pmatrix}$ dove $w_1, \dots, w_d$ base di W.

T è lineare perché g è bilineare a destra.

Allora $v \in W^{\perp g} \Leftrightarrow \langle w_1, v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(T)$.

$\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq d$, quindi $n = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq n-d$ $\square$

<u>OSS</u>: Se g non degenere, $\dim(W^{\perp g}) = n-d$

PRODOTTI DEFINITI POSITIVI

Def: (V,g) spazio con prodotto scalare. g è detto:

- definito positivo (risp. negativo) se $\langle v, v\rangle_g > 0 \ \forall v \neq 0_V$ (risp. < 0)
- Semidefinito positivo (risp. negativo) se $\langle v, v\rangle_g \geq 0 \ \forall v$ (risp. ≤ 0)
- indefinito altrimenti (cioè se esiste $v_+ \in V$ con $\langle v_+, v_+\rangle > 0$ e $v_- \in V$ con $\langle v_-, v_-\rangle < 0$)

Esempio:

- Il prodotto standard su $\mathbb{R}^n$ è definito positivo, infatti:

$X \cdot X = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2$ somma di quadrati $\Rightarrow$ è ≥ 0 ed è $0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$.

- Il prodotto scalare su $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ data da $\langle A,B\rangle_g = Tr(A^T B)$ è definito positivo.
- $g(p,q) = (p(1)-p'(1)+p''(1))(q(1)-q'(1)+q''(1))$ è semidefinito positivo, infatti $g(p,p) = (p(1)-p'(1)+p''(1))^2 \geq 0$ ma $g(T,T)=0$.

Prop: i) Se g è semidefinito ma non definito allora è degenere. In particolare se g è non degenere e $\langle v,v\rangle_g = 0$ con $v \neq 0$ allora g è indefinito.
ii) Se g è indefinito allora esiste $v \neq 0 \in V$ t.c. $\langle v,v\rangle_g = 0$.

dim (solo ii): g indefinito $\Rightarrow$ esistono v_+, v_- con $\langle v_+,v_+\rangle_g > 0$ e $\langle v_-,v_-\rangle_g < 0$.
consideriamo $v_T = Tv_+ + (1-T)v_-$ e $P(T) = \langle v_T, v_T\rangle_g = \langle Tv_+ + (1-T)v_-, Tv_+ + (1-T)v_-\rangle_g =$
$= T^2\langle v_+,v_+\rangle_g + 2(T-T^2)\langle v_+,v_-\rangle_g + (1-T)^2\langle v_-,v_-\rangle_g$ è polinomio di grado 2 $\Rightarrow$ è una funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

$P(0) = \langle v_0,v_0\rangle_g = \langle v_-,v_-\rangle_g < 0$ $\Rightarrow$ per il teorema degli zeri $\exists T_0 \in (0,1)$ t.c. $P(T_0) = 0$ $\Rightarrow$
$P(1) = \langle v_1,v_1\rangle_g = \langle v_+,v_+\rangle_g > 0$ $\Rightarrow \langle v_{T_0}, v_{T_0}\rangle_g = 0$

UN CRITERIO DI POSITIVITA'

Def: A matrice $n\times n$. L'i-esimo minore principale di A è la sottomatrice $i\times i$ formata dalle prime i righe e i colonne

$$\begin{pmatrix} \boxed{\boxed{\boxed{1}\ 2\times2}\ 3\times3} & \\ & \end{pmatrix}$$

Prop: (V,g) spazio con prodotto scalare, B base. g definito positivo $\Leftrightarrow$ i determinanti dei minori principali sono tutti >0. g definito negativo se il segno dell'i-esimo minore principale è $(-1)^i$.

Esempio:
- $g = \cdot \Rightarrow A_{g,\varepsilon} = I_n$

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ tutti i minori principali hanno determinante $=1$.

- g definito da $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora:

$|2| = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Quindi non è definito positivo (indefinito)

SPAZI METRICI

Notazione: (V,g) con g definito positivo è detto uno spazio metrico.
Se (V,g) spazio metrico definiamo $\|v_g\| = \sqrt{\langle v,v\rangle_g}$ (norma di v)

OSS: $\|v_g\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$

ORTOGONALE E PROIEZIONE

Lemma: (V,g) spazio metrico, $W \subseteq V$. Allora $W \cap (W^{\perp g}) = \{0_V\}$.

Dim: $v \in W \cap W^{\perp g}$, allora $\langle \underset{\in W}{v}, \underset{\in W^{\perp g}}{v}\rangle_g = 0 \Rightarrow v = 0_V$ $\square$

Prop: (V,g) spazio metrico, $W \subseteq V$ allora $V = W \oplus W^{\perp g}$

Dim: sappiamo:

i) $W \cap W^{\perp g} = \{0_V\}$

ii) $\dim(W^{\perp g}) \geq n - \dim(W)$.

Per Grassman: $\dim(W + W^{\perp g}) = \overset{d}{\dim(W)} + \overset{\geq n-d}{\dim(W^{\perp g})} - \overset{0}{\dim(W \cap W^{\perp g})} \Rightarrow \dim(W + W^{\perp g}) \geq n \overset{\text{sono sottospazi di } V}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \dim(W + W^{\perp g}) = n \Rightarrow W \oplus W^{\perp g} = V$ $\square$

Def: (V,g) spazio metrico allora $\pi_W^{\perp g} \overset{def}{=} Pr_W^{W^{\perp g}}$ è la proiezione ortogonale su W

BASI ORTOGONALI / ORTONORMALI

Def: (V,g) spazio con prodotto scalare. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base è:

- Ortogonale se $\langle v_i, v_j \rangle_g = 0$ per $i \neq j$
- Ortonormale se $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

OSS:
- B ortogonale $\Leftrightarrow A_{g,B}$ diagonale
- B ortonormale $\Leftrightarrow A_{g,B} = I_n$

OSS: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base ortonormale allora g è definito positivo

Dim: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow \langle v, v \rangle_g = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \rangle_g =$

$= \langle a_1 v_1, a_1 v_1 \rangle_g + \dots + \langle a_n v_n, a_n v_n \rangle_g + \sum_{i \neq j} \langle a_i v_i, a_j v_j \rangle_g = a_1^2 \underset{=1}{\langle v_1, v_1 \rangle_g} + \dots + a_n^2 \underset{=1}{\langle v_n, v_n \rangle_g} + \sum_{i \neq j} a_i a_j \overset{=0}{\langle v_i, v_j \rangle} =$

$= a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$ e $= 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \Leftrightarrow v = 0$ $\square$

Domanda: Se g è definito positivo esiste una base ortonormale?

Idea: possiamo fare combinazioni dei vettori di una base per renderli ortogonali. v_1, v_n linearmente indipendenti.

Se $w_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle_g}{\langle v_1, v_1 \rangle_g} v_1$ allora $\langle w_2, v_1 \rangle_g = \langle v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle_g}{\langle v_1, v_1 \rangle_g} v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle - \left\langle \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1, v_1 \right\rangle =$

$= \langle v_2, v_1 \rangle - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\underset{\neq 0}{\langle v_1, v_1 \rangle}} \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle - \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow v_1 \perp_g w_2$!

Esempio:

$\cdot\ (\mathbb{R}^3, \cdot)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/9 \\ -5/9 \\ 20/9 \end{pmatrix}$$

Teorema (algoritmo di Gram-Schmidt): $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V spazio metrico. Il seguente algoritmo produce una base $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormale e tale che $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_r\}$ $\forall r \leq n$.

1) Costruisco una base ortogonale:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|_g^2} w_1 \quad \cdots \quad w_d = v_d - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle}{\|w_i\|_g^2} w_i \quad \cdots \quad w_n = v_n - \sum_{i<n} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|_g^2} w_i$$

2) La normalizziamo:

$$u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|_g} = \frac{1}{\sqrt{\langle w_i, w_i \rangle_g}} w_i$$

Dim: Supponiamo di aver prodotto $w_1, \dots, w_{d-1}$ ortogonali tra loro.

$$w_d = v_d - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle_g}{\|w_i\|_g^2} w_i. \quad \text{per } s<d: \ \langle w_d, w_s \rangle_g = \left\langle v_d - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle_g}{\|w_i\|_g^2} w_i , w_s \right\rangle =$$

$$= \langle v_d, w_s \rangle_g - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle_g}{\|w_i\|_g^2} \overset{0 \text{ se } i \neq s}{\overset{\|}{\langle w_i, w_s \rangle}} = \langle v_d, w_s \rangle_g - \frac{\langle v_d, w_s \rangle_g}{\langle w_s, w_s \rangle_g} \langle w_s, w_s \rangle_g = \langle v_d, w_s \rangle_g - \langle v_d, w_s \rangle_g = 0 \qquad \square$$

Cor: sono equivalenti:

i) (V, g) spazio metrico

ii) Esiste $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortonormale per g

Dim: abbiamo visto: esiste una base ortonormale $\Rightarrow$ metrico $\Rightarrow$ esiste base ortonormale $\square$

Esempio:

• $(\mathbb{R}^3, \bullet)$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ vogliamo estrarre da B una base ortonormale U.

1) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{semplifichiamo } w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $$U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Prop: (V, g) spazio metrico. $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonale. Allora dato $v \in V$:

$$v_W = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle v, w_1 \rangle_g}{\langle w_1, w_1 \rangle} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle v, w_n \rangle_g}{\langle w_n, w_n \rangle} \end{pmatrix}$$

In altre parole se $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$ allora $a_j = \frac{\langle v, w_j \rangle_g}{\langle w_j, w_j \rangle_g}$. In particolare se $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormale allora $v_u = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$

Dim: $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonale, $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$.

$\langle v, w_j \rangle_g = \langle a_1 w_1 + \dots + a_j w_j + \dots + a_n w_n, w_j \rangle_g = \underbrace{\langle a_1 w_1, w_j \rangle_g}_{0} + \dots + \langle a_j w_j, w_j \rangle_g + \dots + \underbrace{\langle a_n w_n, w_j \rangle_g}_{0} =$

$= \langle a_j w_j, w_j \rangle_g = a_j \langle w_j, w_j \rangle_g \Rightarrow a_j = \frac{\langle v, w_j \rangle_g}{\langle w_j, w_j \rangle_g}$ come voluto $\square$

Esempio:

- g su $\mathbb{R}^3$ dato nella base canonica da $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Costruiamo W ortogonale da $\mathcal{E}$.

$w_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle e_2, w_1 \rangle_g}{\langle w_1, w_1 \rangle_g} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, w_1 \rangle_g}{\langle w_1, w_1 \rangle_g} w_1 - \frac{\langle e_3, w_2 \rangle_g}{\langle w_2, w_2 \rangle_g} w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{(-1\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{(-1\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Quindi $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Vogliamo v_W dove $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$a_1 = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{6} = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{6} = -\frac{11}{6}$

$a_3 = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{(-2\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(-2\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{2}{3}$

Quindi $v_W = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -11/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. E se volessimo $Id_W^{\mathcal{E}}$?

$Id_W^{\mathcal{E}} = \left((e_1)_W\ (e_2)_W\ (e_3)_W \right) = \left(\frac{\langle w_i, e_j \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} \right)_{i,j}$

$e_1 = w_1$

$e_2 = \frac{\langle e_2, w_1 \rangle_g}{\langle w_1, w_1 \rangle_g} w_1 + \frac{\langle e_2, w_2 \rangle_g}{\langle w_2, w_2 \rangle_g} w_2 + \frac{\langle e_2, w_3 \rangle_g}{\langle w_3, w_3 \rangle_g} w_3 =$ usiamo i conti già fatti

$$= \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}{2} w_1 + \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}}{6} w_2 + \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{3} w_3 = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$$

$$e_3 = \frac{\langle e_3, w_1\rangle_g}{\langle w_1, w_1\rangle_g} w_1 + \frac{\langle e_3, w_2\rangle_g}{\langle w_2, w_2\rangle_g} w_2 + \frac{\langle e_3, w_3\rangle_g}{\langle w_3, w_3\rangle_g} w_3 =$$

$$= \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}{2} w_1 + \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}}{6} w_2 + \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{3} w_3 = \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{6} w_2 + \frac{1}{3} w_3$$

Quindi $Id_W^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/6\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$

BASI ORTOGONALI E PROIEZIONI

$W \subseteq V$, vogliamo calcolare $\pi_W^{\perp g}(v)$.

Se $w_1, \dots, w_d$ base ortogonale di W, $v_{d+1}, \dots, v_n$ base di $W^{\perp g}$

Se $v = a_1 w_1 + \dots + a_d w_d + a_{d+1} w_{d+1} + \dots + a_n w_n$: $\pi_W^{\perp g}(v) = \pi_W^{\perp g}(\overset{\in W}{a_1 w_1 + \dots + a_d w_d}) + \pi_W^{\perp g}(\overset{=0}{a_{d+1} w_{d+1} + \dots + a_n w_n}) =$

$$= \frac{\langle v, w_1\rangle_g}{\|w_1\|_g^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_d\rangle}{\|w_d\|_g^2} w_d$$

Abbiamo dimostrato:

Prop: Se $W = \{w_1, \dots, w_d\}$ base ortogonale di W allora $\pi_W^{\perp g}(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle_g}{\|w_1\|_g^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_d\rangle_g}{\|w_d\|_g^2} w_d$

Esempio:

- $W: 2x - 2y + z = 0 \subset \mathbb{R}^3$, $g = \bullet$. Vogliamo calcolare $(\pi_W^{\perp g})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

1) Troviamo una base ortogonale:

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \quad w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{(-1\ 0\ 2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{(1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

2) Calcoliamo le immagini di e_1, e_2, e_3

$$\pi_W^{\perp g}(e_1) = \frac{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}{18}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1/18\\1/18\\2/9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/9\\4/9\\-2/9\end{pmatrix}$$

$$\pi_W^{\perp g}(e_2) = \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}{18}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/18\\1/18\\2/9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/9\\5/9\\2/9\end{pmatrix}$$

$$\pi_W^{\perp g}(e_3) = \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}{18}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/9\\2/9\\8/9\end{pmatrix}$$

Quindi $(\pi_W^{\perp g})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}4/9 & 4/9 & -2/9\\ 4/9 & 5/9 & 2/9\\ -2/9 & 2/9 & 8/9\end{pmatrix}$

DISTANZE E ANGOLI

Def: (V,g) spazio metrico, allora la distanza $d(v,v')$ è data da $d(v,v') = \|v-v'\|_g = \|v'-v\|_g$

OSS: $d(v,v') = 0 \iff v-v' = 0_V \iff v = v'$

Lemma (Teorema di Pitagora): se $v \perp_g w$ allora $\|v+w\|_g^2 = \|v\|_g^2 + \|w\|_g^2$

Dim: $\|v+w\|_g^2 = \langle v+w, v+w\rangle_g = \langle v,v\rangle_g + \langle w,w\rangle_g + 2\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} = \langle v,v\rangle_g + \langle w,w\rangle_g = \|v\|_g^2 + \|w\|_g^2$

Teorema (Cauchy-Schwartz): $|\langle v,w\rangle_g| \leq \|v\|_g \|w\|_g$ e l'= vale $\iff$ v e w sono dipendenti

Dim: $v = \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w + \left(v - \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right) \Rightarrow \|v\|^2 = \left\|\frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right\|_g^2 + \left\|v - \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right\|_g^2 \geq \left\|\frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right\|_g^2 \sim$

$\sim \|v\|^2 \geq \left\langle \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w, \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w \right\rangle \sim \|v\|_g^2 \geq \frac{\langle v,w\rangle_g^2}{\langle w,w\rangle_g^2} \langle w,w\rangle_g \sim \|v\|_g^2 \geq \frac{\langle v,w\rangle_g^2}{\|w\|_g^2} \sim$

$\sim \|v\|_g^2 \|w\|_g^2 \geq \langle v,w\rangle^2$ estraiamo la radice $\|v\|_g \|w\|_g \geq |\langle v,w\rangle_g|$. Vale l'uguaglianza $\iff$ componente $\perp_g$ a $w = 0 \iff$ linearmente dipendenti $\square$

Cor: $-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle_g}{\|v\|_g \|w\|_g} \leq 1$

Def: L'angolo tra v e w è l'unico angolo $\alpha \in [0,\pi]$ t.c. $\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|_g \|w\|_g}$

Esempio:

- $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ allora l'angolo tra v e w è dato da $\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$

DISTANZA VETTORE-SOTTOSPAZIO

Def: dato W sottospazio di (V,g) e $v \in V$, definiamo la distanza tra v e W: $d(v,W) = \min_{w \in W} d(v,w)$

Come la calcoliamo?

Idea 1: se troviamo w_0 in W t.c. $v - w_0 \perp_g W$ allora $d(v,W) = \|v - w_0\|_g$

Dim: $d(v,W) \leq \|v-w_0\|_g$. Prendiamo $w_1 \neq w_0 \in W$. Allora $d(v,w_1) = \|v-w_1\|_g = \|(v-w_0) + (w_0-w_1)\|_g$ e $v - w_0 \perp \underbrace{w_0 - w_1}_{\in W}$.
Pitagora: $\|v-w_1\|_g^2 = \|v-w_0\|_g^2 + \|w_0-w_1\|_g^2 \Rightarrow \|v-w_1\|_g \geq \|v-w_0\|_g$.
Quindi w_0 realizza la distanza minima $\square$

Idea 2: possiamo prendere $w_0 = \pi_W^{\perp_g}(v)$

Dim: $v - \pi_W^{\perp_g}(v) = v - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v,w_i\rangle_g}{\langle w_i,w_i\rangle_g} w_i$ dove $W = \{w_1,\dots,w_d\}$ base ortogonale di $W \Rightarrow$ dato $w \in W$

$$\langle v - \Pi_W^{\perp g}(v), w \rangle = \langle v, w \rangle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w_i \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} \langle w_i, w \rangle = \langle v, w \rangle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w_i \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} \langle w_i, a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \rangle_g =$$

raccogliamo

$$= \langle v, w \rangle_g - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w_i \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} a_i \langle w_i, w_i \rangle_g = \langle v, w \rangle - \langle v, a_1 w_1 + \dots + a_d w_d \rangle = \langle v, w \rangle_g - \langle v, w \rangle_g = 0$$

Quindi $v - \Pi_W^{\perp g}(v) \in W^{\perp g}$ $\square$

Abbiamo dimostrato:

Prop: $d(v, W) = \| v - \Pi_W^{\perp g}(v) \|_g$

Esempio:

- Vogliamo $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, W\right)$ in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ con $W: 2x - 2y + z = 0$.

Sappiamo che $\left(\Pi_W^{\perp g}\right)_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{pmatrix}$ Quindi $v - \Pi_W^{\perp g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 2/9 \\ -1/9 \end{pmatrix}$

Quindi $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, W\right) = \left\| \begin{pmatrix} -2/9 \\ 2/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{4+4+1} = \frac{1}{3}$