Parametrica → cartesiana

$$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{eq. gen. } ax+by+cz=0 \longrightarrow \begin{cases}a+b=0\\2a+b-c=0\end{cases} \quad \begin{cases}b=-c\\a=c\end{cases} \Rightarrow W: x-y+z=0 \text{ (per } c=1)$$

Cartesiana → parametrica

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+y-z=0\\-2x+2z=0\end{cases} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}+y-z=0\\-2x+2z=0\end{cases} \sim \begin{cases}y=\frac{1}{2}z\\x=z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\y=\frac{1}{2}t\\z=t\end{cases} \Rightarrow W=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Vettori linearmente indipendenti/dipendenti

dei vettori $v_1,\dots,v_s$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se esistono $a_1,\dots,a_s \in \mathbb{K}$ non tutti 0 tale che $a_1v_1+\dots+a_sv_s=0_V$. Sono <u>linearmente indipendenti</u> altrimenti.

Da una matrice vediamo che i vettori sono linearmente dipendenti quando c'è almeno una variabile libera.

Basi

Sono equivalenti:
i) $\mathcal{B}$ base di V
ii) $\mathcal{B}$ insieme finito massimale dei vettori indipendenti
iii) $\mathcal{B}$ insieme finito minimale dei generatori

Trovare una base:
i) Per un sistema: risolvilo con Gauss e prendi i coefficienti
ii) Per uno span: fai come esempio sopra e vedi se ti trovi
iii) Per polinomi: fai come esempio sopra e vedi se ti trovi

$\{1-T, T^2+T, T^2+1, T^2-T\} \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \longrightarrow$ Non sono linearmente indipendenti perché $4 > \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[T]) = 3$.
Vediamo se generano:

$$\{1-T, T^2+T, T^2+1, T^2-T\} \sim \{1-T, T^2+T, T^2+1, 2T^2\} \sim \{T+T^2, T^2+T, T^2+1, 2T^2\} \sim \{T+T^2, 0, T^2+1, 2T^2\}$$
$$\sim \{1+T, 0, T^2+1, 2T^2\}$$

$$a(1+T)+b(T^2+1)+c(2T^2)=0 \sim a+aT+bT^2+b+2cT^2=0 \sim (b+2c)T^2+aT+(a+b)=0 \sim$$

$$\sim \begin{cases}b+2c=0\\a=0\\a+b=0\end{cases} \quad \begin{cases}c=0\\a=0\\b=0\end{cases} \Rightarrow \text{3 vettori linearmente indipendenti generano } \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$$

Vettore delle coordinate $v_\mathcal{B}$

$$\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\mathcal{B}}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}}_{v} \longrightarrow x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$ risolvilo, calcola x,y,z e trovi $v_\mathcal{B}$.

Somma e intersezione di sottospazi

$W, W' \subseteq V$ sottospazi. Allora:
- $W+W' \overset{def}{=} \{w+w' \,/\, w\in W, w'\in W'\} \subseteq V$
- $W\cap W' \overset{def}{=} \{v\in V \,/\, v\in W \text{ e } v\in W'\} \subseteq V$

Per $W+W'$, metti in parametrica.
Per $W\cap W'$, metti in cartesiana.

W e W' sono in somma diretta se $W\cap W' = \{0\}$ e in tal caso scriviamo $W+W' = W\oplus W'$

$$W: x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \subset \mathbb{R}^4 \text{ e } W'=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Per $W+W'$ mettiamo W in parametrica → matrice → vediamo numero di pivot → $\dim(W+W')=3=\dim(W) \Rightarrow W+W'=W$.
Per $W\cap W'$ mettiamo W' in cartesiana → matrice → vediamo numero di pivot → $\dim(W\cap W')=2=\dim(W') \Rightarrow W\cap W'=W'$

Immagine e Kernel (Matrice)

A matrice.

- $Im(A)$ = trova lo span facendo mosse di riga.
- $Ker(A)$ = imposta il sistema $= 0$ e risolvilo.

Rouché - Capelli

i) S è compatibile $\iff rk(A) = rk(A/b)$

ii) Se S è compatibile $\Rightarrow \dim(V(S)) = n - rk(A)$

Immagine e Kernel (app. lin)

$T: V \to W$ lineare:

- $Im(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } T(v) = w\} \subseteq W$
- $Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\} \subseteq V$

Teorema della dimensione

$T: V \to W$, allora

$\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = \dim(V)$

$rk(T) = \dim(Im(T))$

Abbiamo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$. Trovare $\dim(Ker(f))$, $\dim(Im(f))$, base di $Ker(f)$ e base di $Im(f)$.

$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, y+z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0, y+z = 0\} =$

$= \{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,-1,1) : z \in \mathbb{R}^3\} = Span\{(1,-1,1)\} \Rightarrow \dim(Ker(f)) = 1$ e base di $Ker(f) = \{(1,-1,1)\}$

risolvi sistema

$Im(f) = \{f(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(x+y, y+z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0) + y(1,1) + z(0,1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} =$

$= Span\{(1,0), \cancel{(1,1)}, (0,1)\} \Rightarrow rk(f) = \dim(Im(f)) = 2$ e base di $Im(f) = \{(1,0),(0,1)\}$

$(1,1) = (1,0) + (0,1)$

Esercizio verifica se applicazione esiste:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

i) Trova base: mettili a matrice e fai calcoli

ii) Vedi se c'è VL (in questo caso la 4 colonna non ha pivot)

iii) Se c'è, scrivi $(v_4)_B$ e trova coefficienti.

iv) Imposta una cosa del genere: $T(v_4) = -6\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$