13 GIUGNO 2024

Esercizio 1

VADO A LEZIONE CIAO

(i)

Dobbiamo verificare se : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. Significa verificare la doppia inclusione.

- $A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ $\qquad x \in B \wedge x \notin C$ o viceversa.

$A \cap (B \Delta C)$ significa prendere tutte le $x \in A \wedge x \in (B \Delta C)$.

Se $x \in B \setminus C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Se $x \in C \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap C) \wedge x \notin (A \cap B) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

- $(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C)$.

Sia $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. $\Rightarrow (x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C)) \vee (x \in (A \cap C) \wedge x \notin (A \cap B))$.

Se vale l'antecedente, allora $x \in A; x \in B, \wedge x \notin C \Rightarrow x \in B \setminus C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in B \Delta C \Rightarrow x \in A \cap (B \Delta C)$.

Se vale il conseguente, allora : $x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \Rightarrow x \in C \setminus B \Rightarrow x \in C \Delta B$

$\Rightarrow x \in A \cap (C \Delta B)$.

Abbiamo quindi verificato che è distributiva.

(ii)

Non vale in quanto, prendendo $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{3\}$:

$A \cup (B \Delta C) = A \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \{1,2\} \Delta \{1,3\} = \{2,3\}$

(iii)

$(P(S), \cup)$ non è un gruppo in quanto gli elementi non sono tutti invertibili. Quindi possiamo dire che non è un anello.

(iv)

~~È un'algebra di boole~~ E' un anello booleano in quanto valgono tutte le proprietà (ho fatto i calcoli a parte).

L'algebra di bool corrispondente è $(P(S), \cup, \cap, {}^\wedge, \emptyset, S)$.

Esercizio 2

(i)

$\overleftarrow{f}(\{0\}) = \emptyset$ $\overleftarrow{f}(\{3\}) = \{x \,/\, f(a) = 3\}$ $\overrightarrow{f}(\{3\}) = \{1\}$.

(ii)

f non è iniettiva in quanto esistono più elementi di T che hanno la stessa immagine.
Ad esempio: $f(8) = 3$ e $f(27) = 3$.

Non è neanche suriettiva in quanto, come abbiamo visto nel punto (i), $\overleftarrow{f}(\{0\}) = \emptyset$.

Di conseguenza non è neanche biettiva.

(iii)

- Minimo: $x \in T$ è minimo $\iff \forall a \in T\ (x \,\sigma\, a)$

$x \,\sigma\, a \iff f(x) < f(b)$

Questo elemento non esiste in quanto la funzione non è iniettiva.
Gli elementi minimali saranno tutti gli elementi che hanno $f(x) = 1$. (i primi)

- Massimo: $x \in T$ è massimo $\iff \forall a \in T\ (a \,\sigma\, x)$.

Poiché prendiamo numeri sufficiente grandi, non esisterà massimo. Per lo stesso motivo non ci saranno neanche elementi massimali.

(iv) (Sbagliato, guarda dopo)

$x \in T$ è minorante di R $\iff x \,\sigma\, \{8\}$

$x \,\sigma\, \{8\} \iff f(x) < 3$

$\{8\}^{\downarrow} = \{x \in T \,/\, x \text{ è primo} \vee f(x) = 2\}$.

L'estremo inferiore è il massimo tra i minoranti. Quindi qualsiasi elemento la cui immagine tramite f è pari a 2.

$x \in T$ è minorante di S $\iff x \,\sigma\, \{54\}$

$x \,\sigma\, \{54\} \iff f(x) < 3$.

~~L'insieme dei minoranti sarà lo stesso trovato prima~~

Questa è una prova di penna. Allora, scrive bene, ma mi devo abituare.

(iv)

$x \in T$ è minorante di $\{8\}$ $\iff$ $x \,\sigma\, \{8\}$.

$x \,\sigma\, \{8\} \iff (x = 8 \lor f(x) < f(\{8\}) = 3)$

$\{8\}^{\downarrow} = \{x \in T \,/\, x = 8 \lor x \text{ è primo} \lor f(x) = 2\}$.

L'estremo inferiore è il massimo dei minoranti, ovvero 8.

$x \in T$ è minorante di $\{54\}$ $\iff$ $x \,\sigma\, \{54\}$

$x \,\sigma\, \{54\} \iff (x = 54 \lor f(x) < f(\{54\}) = 3)$.

$\{54\}^{\downarrow} = \{x \in T \,/\, x = 54 \lor x \text{ è primo} \lor f(x) = 2\}$.

L'estremo inferiore sarà quindi 54.

$x \in T$ è minorante di $\{8, 54\}$ $\iff$ $\forall y \in \{8, 54\} \, (x \,\sigma\, y)$

Per quanto trovato prima possiamo dire che:

$\{8, 54\}^{\downarrow} = \{x \in T \,/\, x = 8 \lor x = 54 \lor x \text{ è primo} \lor f(x) = 2\}$.

In questo caso però non c'è estremo inferiore.

(v)

$f(12) = 2$
$f(16) = 4$
$f(18) = 2$
$f(70) = 1$
$f(243) = 5$
$f(10.000) = 4$

Diagramma (L, σ)

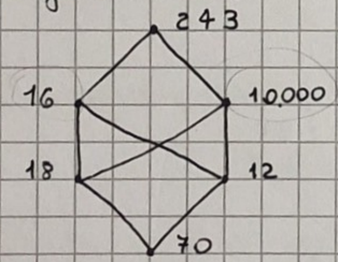
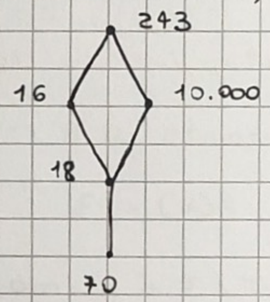


Diagramma $(L \setminus \{12\}, \sigma)$



(L, σ) è un reticolo se per ogni coppia di elementi $x, y \in L$ $(\exists \inf(\{x,y\}) \land \exists \sup(\{x,y\}))$.
Dal diagramma di Hasse corrispondente vediamo che per la coppia $(16, 10.000)$ esiste l'estremo superiore ma non quello inferiore, a differenza di $(L \setminus \{12\}, \sigma)$ che è un reticolo.

Esercizio 3

(i)

$x \in \mathbb{Z}_{10}$ è elemento neutro $\iff$ $\forall a \in \mathbb{Z}_{10} \, (x * a = a * x = a)$
ovvero è neutro sia a sinistra sia a destra.

$$x * a = \bar{5}xa + x + a = a \iff \bar{5}ax + x + a \equiv_{10} a$$

$$\iff x(\bar{5}a) \equiv_{10} 0 \iff x \equiv_{10} 0.$$

Verifichiamo adesso se 0 è neutro anche a destra:

$a * x = \bar{5}ax + a + x = a \iff \bar{x}(\bar{5}a) \equiv_{10} 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$

Infatti: $\bar{5}a \cdot \bar{0} + a + \bar{0} = a$ ✓

(ii)

Significa trovare le soluzioni dell'equazione congruenziale $\bar{6}b \equiv_{10} 2$.
$MCD(6,10) = 2$, quindi possiamo dividere tutto per 2 e otteniamo $\bar{3}b \equiv_5 1$.
Troviamo adesso l'inverso moltiplicativo di $\bar{3}$. Banalmente possiamo dire si tratti di 2. Moltiplichiamo ambo i membri per 2 e otteniamo: $b \equiv_5 2$.

(iii)

$x \in \mathbb{Z}_{10}$ è idempotente $\iff x = x * x$.

$x * x = \bar{5}x^2 + x + x = \bar{5}x^2 + 2x = x \iff \bar{5}x^2 + x \equiv_{10} 0.$

$\iff x(\bar{5}x + 1) \equiv_{10} 0$

Gli elementi idempotenti sono dunque $\{0, 5\}$.

Esercizio 4

$\bar{0}^2 = \bar{0}$ $\quad \bar{1}^2 = \bar{1}$ $\quad \bar{2}^2 = \bar{4}$ $\quad \bar{3}^2 = \bar{9}$ $\quad \bar{4}^2 = \bar{5}$ $\quad \bar{5}^2 = \bar{3}$ $\quad \bar{6}^2 = \bar{3}$

$\bar{7}^2 = \bar{5}$ $\quad \bar{8}^2 = \bar{9}$ $\quad \bar{9}^2 = \bar{4}$ $\quad \bar{10}^2 = \bar{1}$

(i)

$A = \{2, 6, 7, 8, 10\}$

$B = \mathbb{Z}_{10} \setminus A = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$

(ii)

(a) $g_{a,b}$ è irriducibile se entrambi i fattori $(x^2 - a)$ e $(x^2 - b)$ sono irriducibili, ovvero se $a, b \in A$.

(b) $g_{a,b}$ è riducibile se o a o b appartengono a B.

(c) Questo accade quando uno è riducibile e l'altro no, ovvero se $a \in A \wedge b \in B$ o viceversa.

(d) Questo capita quando entrambi sono riducibili, ovvero se $a \in B \wedge b \in B$.

(iii)

E' riducibile in quanto ha come radice 4: Possiamo quindi dividerlo per $x - 4$.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 0 - 7x^2 + 0 - 1 & x - 4 \\
-x^4 + 4x^3 & \\ \hline
// \quad 4x^3 - 7x^2 + 0 - 1 & x^3 + 4x^2 - 2x - 8 \\
\quad -4x^3 \quad 5x^2 & \\ \hline
\quad // \quad -2x^2 + 0 - 1 & \\
\quad\quad 2x^2 - 8x & \\ \hline
\quad\quad // \quad -8x - 1 & \\
\quad\quad\quad 8x - 10 & \\ \hline
\quad\quad\quad // \quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^3 + 4x^2 - 2x - 8 & x - 7 \\
-x^3 + 7x^2 & \\ \hline
// \quad // \quad -2x - 8 & x^2 - 2 \\
\quad\quad 2x - 3 & \\ \hline
\quad\quad // \quad 0 &
\end{array}$$

Dunque $x^4 - \bar{7}x^2 - \bar{1} = (x-4)(x-7)(x^2-2)$

Esercizio 5

(i)

VERO: Ogni $n \in \mathbb{N}$ appartiene a una e una sola classe di equivalenza, quindi esiste almeno una classe c tale che $n \in c$.

(ii)

VERO: ogni classe di equivalenza ha almeno un elemento, ovvero il rappresentante.

(iii)

VERO: non è altro che un'affermazione più forte della (i).

(iv)

FALSO: non è vero che ogni classe di equivalenza ha un solo elemento.

(v)

Credo vero ma non ne sono sicura.