# TRACCIA - 10 SETTEMBRE 2024

## Esercizio 1

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | F | V | F |
| V | F | V | V | V | F | V |
| V | F | F | V | V | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | F |
| F | F | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | F |

| $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
|---|
| V |
| V |
| V |
| V |
| V |
| F |
| V |
| F |

Possiamo così dire che non è una tautologia.

## Esercizio 2

(i)

$(\mathbb{Z}_{12}, *)$ è un semigruppo se l'operazione è associativa, ovvero se $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_{12}\ (a*(b*c) = (a*b)*c)$

$a*(b*c) = a*(b+\bar{9}c) = a+\bar{9}b+\bar{9}c$

$(a*b)*c = (a+\bar{9}b)+\bar{9}c = a+\bar{9}b+\bar{9}c$.

Dunque è un semigruppo. Per essere commutativo, $*$ deve essere commutativa, ovvero $\forall a,b \in \mathbb{Z}_{12}\ (a*b = b*a)$

$a*b = a+\bar{9}b$

$b*a = b+\bar{9}a$

Non è, dunque, un semigruppo commutativo.

Per essere un monoide, deve essere determinato l'elemento neutro. Ovvero l'elemento $x \in \mathbb{Z}_{12}$ tale che $\forall a \in \mathbb{Z}_{12}\ (x*a = a*x = a)$

$x*a = x+\bar{9}a = a \Leftrightarrow x+\bar{9}a \equiv_{12} a \Leftrightarrow x \equiv_{12} \bar{4}a$

Poiché $x$ dipende da $a$, significa che non esiste elemento neutro a sinistra. Quindi non è un monoide e di conseguenza neanche un gruppo.

(ii)

Dato il punto (i), possiamo dire che $S = \emptyset$. Troviamo gli elementi neutri a destra:

$a * x = a + 9x = a \iff a + \overline{9}x \equiv_{12} a \iff \overline{9}x \equiv_{12} 0 \iff x = 0 \vee x = 4 \vee x = 8$.

Dunque $D = \{0, 4, 8\}$. $D \cup S = \{0, 4, 8\}$. Questo insieme, chiamiamolo $D$, è parte stabile di $(\mathbb{Z}_{12}, *) \iff \forall a, b \in D (a * b \in D)$.

$0 * 4 = \overline{36} = \overline{0}$ $\quad 0 * 8 = \overline{72} = \overline{0}$ $\quad 4 * 0 = \overline{4}$ $\quad \overline{4} * \overline{8} = \overline{4}$

$8 * 0 = \overline{8}$ $\quad 8 * 4 = \overline{8}$

Dunque è una parte stabile.

(iii)

$T$ è parte stabile se $\forall a, b \in T (a * b \in T)$. Prendiamo $\overline{3}a$ e $\overline{3}b$ (dato che $a$ e $b \in T$).

$\overline{3}a * \overline{3}b = \overline{3}a + \overline{3}b = \overline{3}(a + b)$.

Vediamo che tipo di struttura è. Vediamo se $*$ è associativa:

$\overline{3}a * (\overline{3}b + \overline{3}c) = \overline{3}a * (\overline{3}b + \overline{3}c) = \overline{3}a + \overline{3}b + \overline{3}c$

$(\overline{3}a * \overline{3}b) * \overline{3}c = (\overline{3}a + \overline{3}b) * \overline{3}c = \overline{3}a + \overline{3}b + \overline{3}c$

E' un semigruppo, commutativo (banale la verifica). Vediamo l'elemento neutro:

$\overline{3}x * \overline{3}a = \overline{3}x + \overline{3}a = \overline{3}a \iff \overline{3}x \equiv_{12} 0 \iff x \equiv_{12} 0$.

$\overline{3}a * \overline{3}x = \overline{3}a + \overline{3}x = \overline{3}a \iff \overline{3}x \equiv_{12} 0 \iff x \equiv_{12} 0$.

Dunque $0$ è elemento neutro a sinistra e a destra. Quindi $(T, *)$ è un monoide.

Per essere un gruppo, ogni elemento di $T$ deve essere invertibile, ovvero $\forall a \in T (\exists x \in T (a * x = x * a = 0))$.

$\overline{3}a * \overline{3}x = \overline{3}a + \overline{3}x = 0 \iff \overline{3}x \equiv_{12} -\overline{3}a \iff \overline{3}x \equiv_{12} -\overline{3}a + \overline{12}$

$\iff \overline{3}x \equiv_{12} -3(a - 4)$.

Dunque $(T, *)$ è un gruppo abeliano.

(iv)

(a) La soluzione è solo 7.

(b) La soluzione è 5.

## Esercizio 3

(i)

La funzione è suriettiva ma non iniettiva in quanto ad esempio:

- $2x+5 \Rightarrow f(2x+5) = 10$

  $-2x-5 \Rightarrow f(-2x-5) = 10$.

(ii)

$\overrightarrow{\varphi}(\{1, x^5+1\}) = \{\overrightarrow{\varphi}(1), \overrightarrow{\varphi}(x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+1)\} = \{1, 0\}$

$\overleftarrow{\varphi}(\{3\}) = \{3, f_{n,3}\}$ dove $f_{n,3}$ è un polinomio di grado n tale che $\prod_{i=0}^{n-1} a_i = 1$ e $a_n = 3$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

$\overleftarrow{\varphi}(\{2,4\}) = \{2x+1, -2x-1, 2, f_{n,2}\} \cup \{4x+1, -4x-1, 4, f_{n,4}\}$.

In $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi irriducibili di grado 1 sono $\{x+3, -x-3, -3x-1, 3x+1\}$.

(iii)

Per quanto osservato in precedenza, è banale dire che ogni classe in $\mathbb{Z}[x]/\sim_\varphi$ è infinita.

(iv)

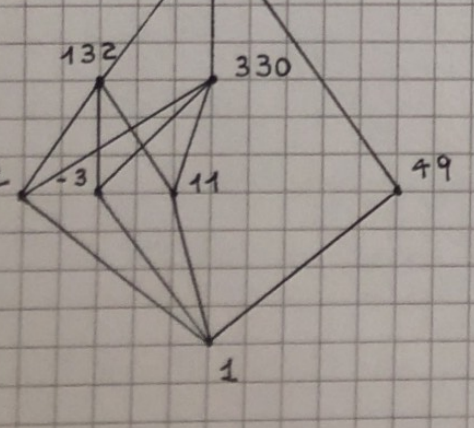
Due polinomi f e g in $A[x]$ sono associati $\Leftrightarrow f/g \wedge g/f$. Per i punti precedenti, dato che in $\mathbb{Z}$ la fattorizzazione non è unica, è sempre possibile costruire due polinomi associati appartenenti alla stessa classe di equivalenza.

## Esercizio 4

(i)

$\rho_A$ non è una relazione d'ordine in quanto $2\,\rho_A\,14 \wedge 14\,\rho_A\,2$ ma $2 \neq 14$. Quindi non è antisimmetrica.

(ii)




(iii)

$\inf_{(S,\rho)}(\{2,49\}) = 2 \wedge 49 = 1$

$\sup_{(S,\rho)}(\{2,49\}) = 2 \vee 49 = 0$

(iv)

È un reticolo. Non è distributivo dato che un suo sottoreticolo è isomorfo al reticolo pentagonale. È complementato.

# TRACCIA - 11 OTTOBRE 2024

## Esercizio 1

$\forall x\,((p \vee \neg q) \wedge (\exists y\,(r \wedge \neg s)))$.

## Esercizio 2

(i)

Banale la verifica della $\overset{\text{non}}{\vee}$ commutatività.

E' associativa $\iff \forall f, g, z \in T\ (f * (g * z) = (f * g) * z)$

$(f * (g * z))(n) = f(8) + (g * z)(n) = f(8) + g(8) + z(n)$

$((f * g) * z)(n) = (f * g)(8) + z(n) = f(8) + g(8) + z(n)$.

Quindi è associativa e commutativa.

(ii)

$x \in T$ è elemento neutro a sinistra $\iff \forall f \in T\ (x * f = f)$.

$(x * f)(n) = x(8) + f(n) = f(n) \iff x(8) = 0$.

Quindi gli elementi neutri a sx sono $\{x \in T \mid x(8) = 0\}$.

Per il neutro a dx invece:

$(f * x)(n) = f(8) + x(n) = f(8). \iff x(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Quindi l'unico elemento a destra è la funzione nulla.

Mettendo insieme i risultati ottenuti possiamo dire che l'unico elemento neutro (a sx e a dx) è la funzione nulla.

Con questo possiamo dire che $(T, *)$ è un monoide. Per essere un gruppo, ogni elemento di $T$ deve essere invertibile, ovvero:

$\forall f \in T\ (\exists x \in T\ (f * x = x * f = 0_T))$ dove $0_T$ è la funzione nulla.

$(f * x)(n) = f(8) + x(n) = 0_T$

n però non è costante. Gli unici elementi invertibili sono le funzioni costanti. Dunque $(T, *)$ non è un gruppo.

(ii)

Gli elementi simmetrizzabili, per quanto detto al punto (i), sono le funzioni costanti.

$x \in T$ è cancellabile a sx $\iff \forall f, g \in T\ (x * f = x * g \Rightarrow f = g)$.

$(x * f)(n) = x(8) + f(n)$ $\qquad$ $(x * g)(n) = x(8) + g(n)$.

$x(8) + f(n) = x(8) + g(n) \iff x(8) = 0$.

Quindi gli elementi cancellabili a sinistra sono $\{x \in T \mid x(8) = 0\}$.

Per la cancellabilità a destra deve valere che $(f * x = g * x) \Rightarrow f = g$.

$(f * x)(n) = f(8) + x(n)$ $\qquad$ $(g * x) = g(8) + x(n)$

$f(8) + x(n) = g(8) + x(n) \Rightarrow f(8) = g(8) \iff x(n) = 0$.

Dunque l'unico elemento cancellabile è la funzione nulla.

(iv)

- Per S sì.
- Per I no
- Per B no.
- Per C sì
- Per U ?

## Esercizio 3

~~...~~ $|X|! = 99!$

## Esercizio 4

(i)

$f \in Corr(A,B)$ è una funzione se vale che:

$\forall x \in A \, (\exists!\, y \in B \, (f(x) = y))$

DIM CHE SE

$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\} \Rightarrow \{c_1 = a_1 b_1, d_1 = \{a_1, b_1\}\}$

$=$

$\{c_2 = a_2 b_2, d_2 = \{a_2, b_2\}\}$

↳ Struttura, poi bisogna fare i calcoli

(ii)

$f$ è iniettiva $\iff \forall x, y \in P\, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.

~~Non lo è in quanto elementi diversi hanno la stessa immagine. Ad esempio:~~

$\cancel{f(\{2,0\}) = \{0,0\} = f(\{1,0\})}$.

Non lo è in quanto ci sono elementi distinti che hanno la stessa immagine. Ad esempio:

$f(\{2,6\}) = \{12, 24\} = f(\{3,4\})$.

Non è neanche suriettiva in quanto, ad esempio, $\overleftarrow{f}(\{1,1\}) = \emptyset$.

Di conseguenza non è biettiva.

## Esercizio 6