Esercizio 1

• $\mathbb{R}^4$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} / 2x - 2w = 0 \right\}$

W non è altro che l'insieme di tutti i vettori in cui x e w sono uguali.

i) Il vettore $0_V \in W$ in quanto $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$

ii) Prendiamo: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ e \end{pmatrix} \in W$. Allora $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \\ a+e \end{pmatrix} \in W$ in quanto la prima componente è uguale all'ultima.

iii) Prendiamo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda a \end{pmatrix} \in W$ in quanto la prima componente è uguale all'ultima.

Possiamo quindi affermare che W è un sottospazio vettoriale di V.

• $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) / x + y \geq 0\}$ $(x \geq -y)$

i) Il vettore $0_V \in W$ in quanto $0 + 0 \geq 0$

ii) Prendiamo $(a,b), (c,d) \in W$. Allora $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in W$ in quanto $(a+c)+(b+d) \geq 0 \iff$
$\iff (a+c) \geq -(b+d)$.

iii) Prendiamo $(a,b) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \notin W$ in quanto, se $\lambda \leq 0 \Rightarrow -\lambda a - \lambda b \geq 0 \iff$
$\sim -\lambda a \geq \lambda b \iff \lambda a \leq -\lambda b \iff a \leq -b$, che non è verificata.

Possiamo dunque dire che W non è un sottospazio di V.

• $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{pmatrix} T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} / T \in \mathbb{R} \right\}$

Possiamo dire subito che W non è un sottospazio di V in quanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ ma $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W$, infatti $\begin{cases} T^2 = 2 \\ T^3 = 2 \end{cases}$ non ha soluzioni.

• $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$, $\{P(T) / P(5) = 0\}$

i) Il polinomio nullo $\in W$.

ii) Prendiamo $P(5) = Q(5) = 0$. Allora $(P+Q)(5) = P(5) + Q(5) = 0 \in W$.

iii) Prendiamo $P(5) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $(\lambda P)(5) = \lambda P(5) = 0 \in W$

Possiamo dunque dire che W è un sottospazio di V.

• $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$, $\{a(T^2 - T) + b(T^3 + 2T + 1) / a, b \in \mathbb{R}\}$

i) Il polinomio nullo $\in W \iff a, b = 0$

ii) $\alpha\left(a_0(T^2-T) + b_0(T^3+2T+1)\right) + \beta\left(a_1(T^2-T) + b_1(T^3+2T+1)\right)$
$\alpha a_0(T^2-T) + \alpha b_0(T^3+2T+1) + \beta a_1(T^2-T) + \beta b_1(T^3+2T+1)$
$(T^2-T)(\alpha a_0 + \beta a_1) + (T^3+2T+1)(\alpha b_0 + \beta b_1)$

Possiamo dunque dire che W è un sottospazio di V

• $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $\{P(T) / P(2) = 1\}$

Non è un sottospazio in quanto il polinomio nullo non appartiene a W.

• $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $\{P(T) / P^2(0) - P(0) = 0\}$

i) Il polinomio nullo $\in W$

ii) Prendiamo $P := P^2(0) - P(0) = 0$ e $Q := Q^2(0) - Q(0)$. Allora $P + Q = P^2(0) + Q^2(0) + 2P(0)Q(0) - P(0) - Q(0) =$
$= 2P(0)Q(0) = 0$ ma non è detto. Supponendo di prendere il polinomio costante $P(t) = Q(t) = 1$, allora
$2P(0)Q(0) = 2$ e non a 0.

Quindi possiamo dire che W non è un sottospazio di V

• $C^0(\mathbb{R})$, $\{f / f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$

i) Prendendo $f = K$, questa è sempre periodica in 0 per qualsiasi periodo.

ii) Prendiamo $f : f(x+2\pi) = f(x)$ e $g : g(x+2\pi) = g(x)$. Allora $(f+g)(x+2\pi) = f(x+2\pi) + g(x+2\pi) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

iii) Prendiamo $f : f(x+2\pi) = f(x)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $(\lambda f)(x+2\pi) = \lambda(f(x+2\pi)) = \lambda(f(x)) = (\lambda f)(x)$

Quindi possiamo dire che W è un sottospazio di V

• $C^0(\mathbb{R})$, $\{f / f(-x) = f(x)\}$

i) $0_V \in W$

ii) Prendiamo $f : f(-x) = f(x)$ e $g : g(-x) = g(x)$. Allora $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$

iii) Prendiamo $f : f(-x) = f(x)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $(\lambda f)(-x) = \lambda(f(-x)) = \lambda(f(x)) = (\lambda f)(x)$

Possiamo dunque dire che W è un sottospazio di V.

• $C^0(\mathbb{R})$, $\{f / f(-x) = -f(x)\}$

i) $0_V \in W$

ii) Prendiamo $f : f(-x) = -f(x)$ e $g : g(-x) = -g(x)$. Allora $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))$

iii) Prendiamo $f : f(-x) = -f(x)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $(\lambda f)(-x) = \lambda(f(-x)) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda f)(x)$

Possiamo dunque dire che W è un sottospazio di V.

• $C^0(\mathbb{R})$, $\{f / \lim_{x \to \infty} f = 0\}$

i) $0_V \in W$

ii) Se facciamo $\lim_{x \to \infty} (f+g) = \lim_{x \to \infty} f + \lim_{x \to \infty} g = 0 + 0 = 0$

iii) Se facciamo $\lim_{x \to \infty} \lambda f = \lambda \lim_{x \to \infty} f = \lambda f = 0$

Possiamo dunque dire che W è un sottospazio di V.

Esercizio 2

- $\{2x+y-2z=0\} \subset \mathbb{R}^3$

$$2x = 2z - y \sim x = -\frac{y}{2} + z \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}s + t \\ y = s \\ z = \quad\; t \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\text{Span}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$

Equazione generica: $ax + by = 0$.

$$-4a + 2b = 0 \sim a = \frac{1}{2}b \Rightarrow W: x + 2y \text{ (per } b=1)$$

- $\begin{cases} \frac{x}{2} + y - z = 0 \\ -2x \quad + 2z = 0 \end{cases} \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y - z = 0 \\ -2x \quad + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = \frac{1}{2}z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Equazione generica $ax + by + cz = 0$

$$\begin{cases} a + b \quad\; = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \begin{cases} b = -c \\ a = c \end{cases} \Rightarrow W: x - y + z = 0 \text{ (per } c = 1)$$

- $\begin{cases} x + y \qquad - T = 0 \\ x + 2y - z \qquad = 0 \end{cases} \subset \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x + y \qquad - T = 0 \\ x + 2y - z \qquad = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{cases} x + y \qquad - T = 0 \\ \quad y - z + T = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -z + 2T \\ y = z - T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -s + 2t \\ y = s - t \\ z = s \\ T = t \end{cases} \Rightarrow W: \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\text{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$

Equazione generica $ax + by + cz = 0$

$$2a + c = 0 \sim a = -\frac{c}{2} \Rightarrow W: \begin{cases} y = 0 \text{ (per } b = 1 \text{ e } c = 0) \\ -\frac{x}{2} + z = 0 \text{ (per } b = 0 \text{ e } c = 1) \end{cases}$$

Esercizio 3

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Equazione generica: $ax + by + cz + dT = 0$. Quindi:

$$\begin{cases} a \quad + 2c + d = 0 \\ \quad b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -2c - d \\ b = -2c - 2d \end{cases} \sim \begin{cases} a = c + 2d \\ b = c + d \end{cases} \Rightarrow W = \begin{cases} x + y + z = 0 \text{ (per } c = 1 \text{ e } d = 0) \\ 2x + y + T = 0 \text{ (per } c = 0 \text{ e } d = 1) \end{cases}$$