TRACCIA – 22 APRILE 2024

Esercizio 1

(i)

Sia A un insieme e $\sim \in Eq(A)$. Il teorema afferma che esiste una applicazione $\tilde{\imath} : \sim \in Eq(A) \longmapsto A/\sim \in Partz(A)$ e che questa è biettiva.

(ii)

Si calcola con il coefficiente binomiale: → Sbagliato, vedi dopo che l'ho rifatto.

$$\binom{n}{k} = \binom{5}{2} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = 10.$$

(iii)

$[13]_\alpha = [202]_\alpha$, ovvero $13 \, \alpha \, 202$.

$[24]_\alpha = [1104]_\alpha = [110211]_\alpha$.

Quindi $T/\alpha = \{\{13, 202\}, \{24, 1104, 110211\}\}$.

(ii)

Una partizione in 2 sottoinsiemi può essere rappresentata come una coppia (A, B) dove:
- $A \cup B = T$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

Dato che $|T| = 5$, possiamo o prendere A e B tali che $|A| = 3$ e $|B| = 2$ oppure $|A| = 1$ e $|B| = 4$. Il numero delle parti di T con 3 elementi è dato da:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

$\binom{2}{2}$ credo

Fissati 3 elementi, ne rimangono 2 liberi. Esistono quindi $10 \cdot 1 = 10$ combinazioni possibili.

Le parti di T con 4 elementi sono invece:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = 5.$$

Fissati 4 elementi, ne rimane solo 1 libero. Facendo la somma otteniamo che il numero totale di partizioni con 2 elementi è 15.

Esercizio 2

(i)

$\vec{f}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) = \mathbb{N}$ $\quad \vec{f}(\emptyset) = \emptyset$ $\quad \overleftarrow{f}(\emptyset) = \emptyset$ $\quad \overleftarrow{f}(\{1\}) = \{(1,n) \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$

$\overleftarrow{f}(\{5\}) = \{(5,1)\}$

(ii)

f non è iniettiva in quanto ci sono coppie che hanno la stessa immagine, ad esempio (4,1) e (2,2). Infatti $f((4,1)) = 4 = f((2,2))$.

f è suriettiva in quanto $im(f) = \mathbb{N}$.

Non è biettiva di conseguenza alla non iniettività.

(iii)

Sia (S,p) un insieme ordinato. E' un reticolo $\Leftrightarrow$
$\forall x,y \in S\,(\exists \inf_{(S,p)}(\{x,y\}) \wedge \exists \sup_{(S,p)}(\{x,y\}))$.

(iv)

- Minimo = $(x,y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}^*$ è minimo $\Leftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* ((x,y) \tilde{\imath} (a,b))$

$(x,y) \tilde{\imath} (a,b) \Leftrightarrow ((x,y) = (a,b) \vee f((x,y))$ è divisore proprio di $f((a,b)))$

L'unico elemento possibile è (1,1) in quanto $f(1,1) = 1$ e divide propri. qualsiasi altro numero.

- Massimo = $(x,y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}^*$ è massimo $\Leftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* ((a,b) \tilde{\imath} (x,y))$.

L'unico elemento possibile sarebbe 0 ma non esiste alcuna coppia la cui immagine è 0. Quindi non c'è massimo.

- Minimali = $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ è minimale $\Leftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* ((a,b) \tilde{\imath} (x,y) \wedge (x,y) \tilde{\imath} (a,b) \Rightarrow (x,y) \tilde{\imath} (a,b))$.

Il minimo (1,1) è anche l'unico minimale.

- Massimali = $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ è massimale $\Leftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* ((a,b) \tilde{\imath} (x,y) \wedge (x,y) \tilde{\imath} (a,b) \Rightarrow (a,b) \tilde{\imath} (x,y))$.

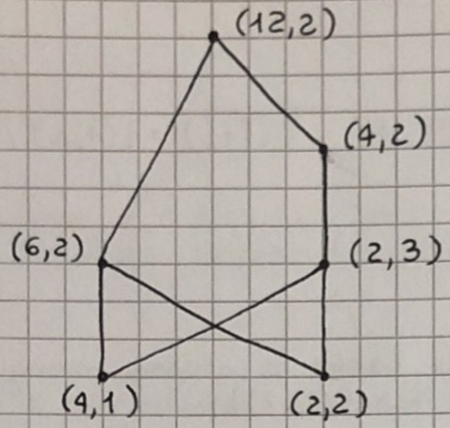
Potendo prendere valori sempre maggiori, dato che $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato, non esistono elementi massimali.

La struttura NON è un reticolo in quanto, prendendo ad esempio due elementi (1,2) e (2,1):

$$\{(1,2),(2,1)\}^{\uparrow} = \{(2,2),(4,1)\}$$

Non è possibile determinare un minimo, ovvero non è possibile determinare l'estremo superiore.

(v)



(vi)

$(M, \precsim)$ non è un reticolo in quanto non esiste minimo. Se togliamo la coppia $(2,2)$ otteniamo un reticolo distributivo e complementato, dunque booleano.

Esercizio 3

(i)

Un semigruppo è una struttura algebrica la cui operazione è associativa. Verifichiamo che $*$ lo sia: deve valere che $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_6 \, (a*(b*c) = (a*b)*c)$

$a*(b*c) = a*(\overline{3}b + \overline{4}c) = \overline{3}a + \overline{4}c$

$(a*b)*c = (\overline{3}a + \overline{4}b)*c = \overline{3}a + \overline{4}c$.

È un semigruppo.

(ii)

Dobbiamo verificare che esista l'elemento neutro (a destra e a sinistra).

$x \in \mathbb{Z}_6$ è neutro a sinistra $\iff \forall a \in \mathbb{Z}_6 \, (x*a = a)$

$x*a = \overline{3}x + \overline{4}a = a \iff \overline{3}x + \overline{4}a \equiv_6 a$

$\iff \overline{3}x \equiv_6 \overline{3}a \iff x \equiv_6 a$.

x dipende da a, quindi non esiste un unico valore che vada bene per ogni elemento della struttura. Dunque NON è un monoide.

(iii)

$\{0,3\}$ è una parte stabile $\iff \forall a,b \in \{0,3\} \, (a*b \in \{0,3\})$.

$0*0=0$ $\quad$ $3*3=3$ $\quad$ $0*3=0$ $\quad$ $3*0=3$

Quindi è una parte stabile.

Esercizio 5

(i)

Siano $\overline{3}$ e $\overline{5}$ radici di f. Quindi per Ruffini $(x-3)(x-5)$ divide f.
Sviluppando otteniamo $(x-3)(x-5) = x^2 - \overline{8}x + \overline{2}$.

Analogamente, se f è multiplo di $x^2 - \overline{8}x + \overline{2}$, le sue radici sono tutte e sole le radici dei suoi multipli.

(ii)

No in quanto $x^2 - \overline{8}x + \overline{2} = (x-3)(x-5)$

(iii)

Vero in quanto non ammette radici in $\mathbb{Z}_3$.

(iv)

Falso in quanto 3 e 5 sono primi.

(v)

Falso perché ad esempio 7 non è radice del polinomio.

(vi)

Per verificare se g e l sono associati in $\mathbb{Z}_{13}[x]$ dobbiamo determinare se esiste una costante $c \in \mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$ tale che $g(x) \equiv_{13} c \cdot l(x)$. Scriviamo esplicitamente l'equazione:

$$\overline{3}x^2 - \overline{11}x + \overline{6} \equiv_{13} c(\overline{7}x^2 + \overline{9}x - \overline{12}) \iff$$

$$\overline{3}x^2 - \overline{11}x + \overline{6} \equiv_{13} \overline{7}cx^2 + \overline{9}cx - \overline{12}c$$

Affinché i due polinomi siano uguali, i coefficienti corrispondenti devono essere congruenti in modulo 13. Ovvero:

$$\overline{3} \equiv_{13} \overline{7}c \qquad -\overset{2}{\overline{11}} \equiv_{13} \overline{9}c \qquad \overline{6} \equiv_{13} -\overset{1}{\overline{12}}c$$

Partendo da $\overline{3} \equiv_{13} \overline{7}c$ troviamo l'inverso moltiplicativo di 7 : 2.
Quindi otteniamo $c \equiv_{13} \overline{6}$.

Per il resto otteniamo lo stesso risultato. Quindi g e h sono associati e la costante di associazione è $c = 6$.

Esercizio 6

(i)

E' una tautologia.

(ii)

Non è una tautologia.