

Equation de Burgers : Aspects qualitatifs et Résolution Numérique.

Leclercq Ludivine Lepoutère Guillaume

Encadré par M. E. Creusé

2010/2111

Table des matières

1	Introduction	2
2	Etude préliminaire	4
3	Méthode des caractéristiques	6
3.1	Rappels sur l'équation de transport	6
3.2	Équation de Burgers	7
4	Formulation variationnelle	16
5	Condition de choc	21
6	Problèmes de Riemann	24
7	Condition d'entropie et solution entropique	30
8	Étude de schémas numériques pour la résolution de l'équation de Burgers	33
8.1	Un premier essai	33
8.2	Un deuxième essai	35
8.3	Schéma de Lax-Friedrichs	39
8.4	Quelques mots sur les schémas de Godunov	49
8.4.1	Principe des volumes finis	49
8.4.2	Schéma de Godunov	49
9	Conclusion	51
A	Code Matlab Schéma non conservatif (8.1)	53
B	Code Matlab Schéma schéma conservatif 2eme essai(8.3)	55
C	Code Matlab Schéma LAX-FRIEDRICHS (8.5)	57
D	Code Matlab Calcul des ordres de convergence pour LAX-FRIEDRICHS	59

Chapitre 1

Introduction

Ce TER a pour but d'étudier l'équation aux dérivées partielles dite de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (1.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t) \end{aligned}$$

Étudions d'abord un exemple d'obtention de cette équation.

Considérons une autoroute rectiligne sur laquelle on étudie l'évolution du trafic routier. On note $u(x, t)$ la vitesse des voitures en $(t, x(t))$, où l'on suppose que $x \longrightarrow x(t)$ est une fonction de t . On suppose u suffisamment régulière pour justifier toutes les opérations de dérivation ci-dessous. On suppose également que chaque véhicule garde une vitesse constante au cours du temps, d'où

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + x'(t)u(x(t), t) = 0$$

Or, par définition de u , $x'(t) = u(x(t), t)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + u(x(t), t)\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation est dite conservative (on parle de loi de conservation) car elle exprime une quantité physique constante au cours du temps (dans notre exemple il s'agit de la vitesse), i.e la divergence est nulle :

$$\operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2}, u\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} \\ u \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + \frac{\partial}{\partial t}u = 0$$

L'équation de Burgers, que l'on doit au physicien néerlandais Johannes Martinus Burgers, est connue pour représenter un phénomène réel : le «sonic boom» ou « bang sonique »

engendré par un avion supersonique. En effet, près du sol, le bruit engendré par le bang se concentre sur des zones où la pression est gouvernée par (1.1). Cette équation est également très utilisée pour modéliser des problèmes de mécanique des fluides, ou pour étudier le trafic routier.

L'équation de Burgers, comme l'équation de transport, est du type hyperbolique. Néanmoins, il existe une différence non négligeable entre les 2 : l'équation de Burgers n'est pas linéaire. Quelles seront les conséquences de la non linéarité dans la recherche de la solution ? La méthode des caractéristiques reste-t-elle valable ? Quels schémas numériques pourra-t-on utiliser pour approcher la solution de cette équation ?

Dans ce TER, nous aborderons, dans un premier temps, la méthode des caractéristiques qui nous permettra de calculer les solutions fortes de l'équation de Burgers, et nous comparerons les résultats avec ceux obtenus pour l'équation de transport. A travers divers exemples, nous nous apercevrons que pour certaines données initiales, cette méthode n'est plus valable. C'est pourquoi nous introduirons la notion de formulation variationnelle qui nous donnera des solutions faibles. Certains problèmes, comme les problèmes de Riemann, nous donneront plusieurs solutions, dont certaines avec des chocs. Nous aborderons la notion d'entropie afin de choisir la solution physique, c'est à dire la "bonne" solution. Ensuite, nous étudierons différents schémas numériques et nous introduirons la notion de schéma conservatif. Nous allons nous apercevoir que, comme pour l'équation de transport, certains schémas sont mal adaptés et nous tenterons d'expliquer pourquoi. Les résultats théoriques seront confirmés par une application numérique grâce au logiciel Matlab.

Chapitre 2

Etude préliminaire

Comme nous l'avons vu, l'équation de Burgers sous forme conservative, $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) = 0$ peut s'écrire sous la forme non conservative $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Cette dernière équation est dite "quasi-linéaire", alors que l'équation de Burgers est non linéaire.

Notons (C) une courbe d'équation $x = g(t)$ dans le plan (x, t) (figure 2.1). Calculons la dérivée de $u(x, t)$ par rapport au temps le long de la courbe (C) .

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + g'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\end{aligned}$$

Il s'agit donc de la dérivée de u par rapport au temps dans une direction tangentielle à la courbe (C) au point $(g(t), t)$. (Voir figure 2.1)

Prenons le cas général. En un point $M(x, t)$ donné, pour $u(x, t)$, fonction régulière, on a :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x}$$

où $p = \frac{dx}{dt}$ est la pente de la tangente.

Alors, $\frac{du}{dt}$ s'annule dans la direction $u \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
c'est à dire, si et seulement si u vérifie l'équation de Burgers.

Bilan : La dérivée de u par rapport au temps s'annule dans la direction u si et seulement si u vérifie l'équation de Burgers (1.1).

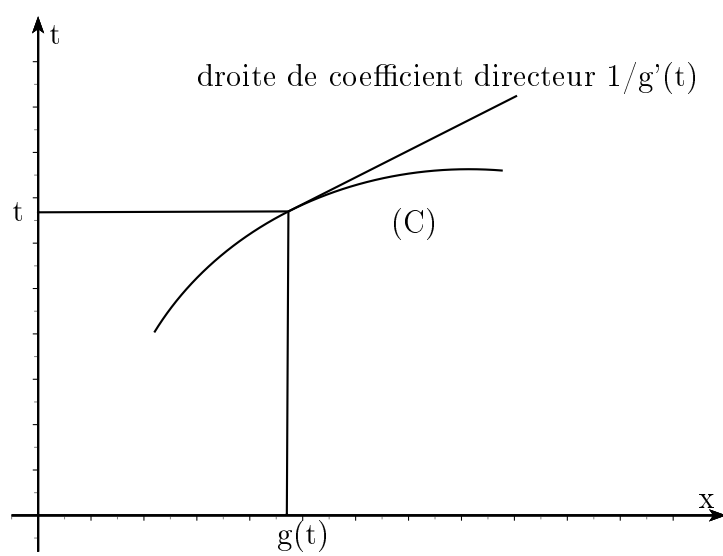


FIGURE 2.1 – Courbe (C)

Chapitre 3

Méthode des caractéristiques

3.1 Rappels sur l'équation de transport

Considérons l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) = 0 & \text{où } c > 0, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+. \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

On note $x = ct + \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, et on suppose que u est solution de (3.1), et qu'elle est suffisamment régulière. On suppose également que u_0 est suffisamment régulière. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt}u(ct + \xi, t) = \frac{\partial}{\partial t}u(ct + \xi, t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(ct + \xi, t) = 0$$

D'où l'on tire que u est constante le long des caractéristiques $x = ct + \xi$, ce qui nous donne la solution

$$u(t, x) = u_0(x - ct), \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$$

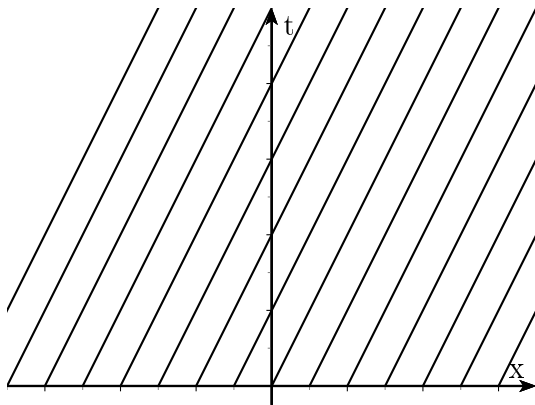


FIGURE 3.1 – Droites caractéristiques pour l'équation de transport, $c > 0$

3.2 Équation de Burgers

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

Soit $C = \{(x(t), t) : x'(t) = u(x(t), t), x(0) = \xi\}$.

Pour u vérifiant (3.2) et pour $(x(t), t) \in C$, calculons la dérivée de u par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + x'(t)\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + u(x(t), t)\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2}(x(t), t) = 0 \quad \text{car } u \text{ vérifie (3.2).} \end{aligned}$$

Alors, on a que u est constante le long des courbes caractéristiques (C). Nous allons montrer que ces courbes sont en réalité des droites, comme pour l'équation de transport.

Comme u est constante le long des courbes, on a :

$$\begin{aligned} x'(t) &= u(x(t), t) = u(x(0), 0) \\ &= u_0(x(0)) = u_0(\xi) \end{aligned}$$

On intègre par rapport à t :

$$\begin{aligned} x(t) &= u_0(\xi)t + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ x(0) &= k = \xi. \end{aligned}$$

On a donc :

$$x(t) = u_0(\xi)t + \xi.$$

On a bien l'équation d'une droite (voir figure (3.2)).

Bilan : Si u vérifie l'équation de Burgers, alors elle est constante le long de droites caractéristiques d'équation $x(t) = u_0(\xi)t + \xi$.

Remarque : Contrairement à l'équation de transport, les pentes de ces droites caractéristiques ne sont plus constantes en ξ et dépendent en particulier de la donnée initiale u_0 .

Soit $(x, t) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}^+$.

Afin de trouver la solution $u(x, t)$, on veut trouver $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $u_0(\xi)t + \xi - x = 0$. Aussi on aura $u(x, t) = u(\xi, 0)$.

On pose $F(x, t, \xi) = u_0(\xi)t + \xi - x = 0$.

Voyons dans quelles conditions l'existence et l'unicité de ξ peuvent être établies.

(A) Dans un premier temps, nous supposons que $u_0 : \xi \longrightarrow u_0(\xi)$ est une fonction croissante. En dérivant la fonction F on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(x, t, \xi) = u'_0(\xi)t + 1.$$

u_0 étant une fonction croissante on a que $u'_0(\xi) \geq 0$, où $\frac{\partial}{\partial \xi} F(x, t, \xi) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Le théorème des fonctions implicites nous dit que si $\frac{\partial}{\partial \xi} F(x, t, \xi) \neq 0$ et $F(x, t, \xi) = 0$ alors il existe une unique fonction $\phi(x, t)$ telle que $\xi = \phi(x, t)$ où ϕ est une fonction de classe C^1 telle que $u_0(\phi(x, t)) + \phi(x, t) - x = 0$.

Par la suite notons $\xi = \phi(x, t) = \xi(x, t)$. Pour u_0 croissante, on a alors existence et unicité de ξ .

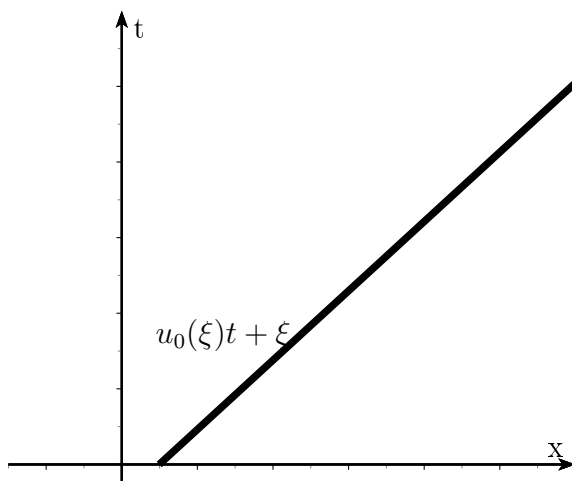


FIGURE 3.2 – Caractéristique issue de ξ pour l'équation de burgers

$u(x, t) = u(u_0(\xi)t + \xi, t) = u(\xi, 0) = u_0(\xi)$ car u est constante le long de la droite. La solution unique du problème de Cauchy (3.2) est $u(x, t) = u_0(\xi(x, t))$.

Exemple :

Considérons le problème de Cauchy suivant (Voir figure (3.3)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad u_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[, \\ x^2 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Cherchons la solution de ce problème, qui correspond bien à une donnée croissante. Pour cela distinguons 2 cas :

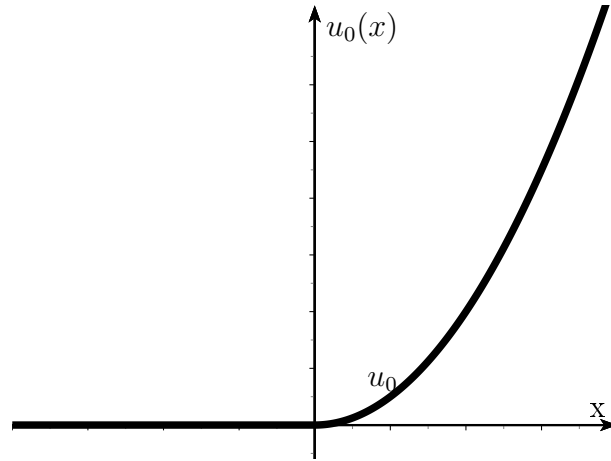


FIGURE 3.3 – Représentaion de u_0 croissante

– 1^{er} cas : $x \leq 0$

Je cherche donc ξ tel que $u_0(\xi)t + \xi - x = 0$. Il est clair que $\xi = x$ est la solution car $u_0(\xi) = 0$ pour $\xi \leq 0$.

Alors la solution est $u(x, t) = u_0(x) = 0$ car $x \leq 0$.

– 2^{me} cas : $x > 0$

On cherche alors ξ tel que $x = u_0(\xi)t + \xi = \xi^2 t + \xi$. On résout alors l'équation du second degré suivante : $\xi^2 t + \xi - x = 0$.

$\Delta = 1 + 4tx$ où $x > 0$ et $t \geq 0$ donc $\Delta \geq 0$.

On a alors 2 solutions réelles distinctes : $\xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4xt}}{2t}$.

Or, on a que $\xi > 0$, on garde donc $\xi = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4xt}}{2t}$.

On a alors

$$\begin{aligned} u_0(x) = \xi^2 &= \frac{(\sqrt{1 + 4xt} - 1)^2}{4t^2} = \frac{1 + 4xt + 1 - 2\sqrt{1 + 4xt}}{4t^2} \\ &= \frac{1 + 2xt - \sqrt{1 + 4xt}}{2t^2} \end{aligned}$$

Bilan : La solution unique du problème de Cauchy est (Voir figure (3.4)) :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2t^2}(1 + 2xt - \sqrt{1 + 4xt}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

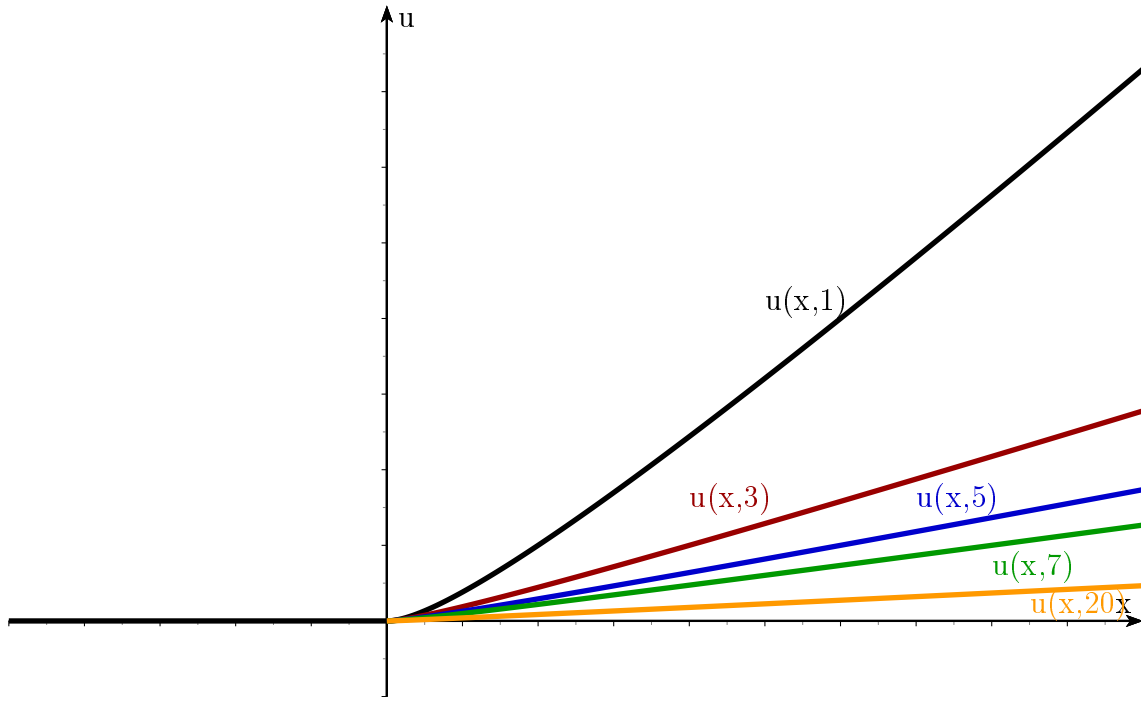


FIGURE 3.4 – Représentation de la solution à différents temps

(B) Supposons u_0 décroissante.

Un premier exemple :

On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy suivant, où on a une donnée initiale décroissante (voir figure (3.5)).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - 2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 4x + 2x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{On a } x(t) = \begin{cases} t + \xi & \text{si } \xi \leq 0, \\ (1 - 2\xi^2)t + \xi & \text{si } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \\ (2 - 4\xi + 2\xi^2)t + \xi & \text{si } \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1, \\ \xi & \text{si } \xi \geq 1 \end{cases}.$$

Les équations des courbes caractéristiques étant, comme précédemment pour l'équation de Burgers, $x = u_0(\xi)t + \xi$, on obtient les droites de la figure (3.6).

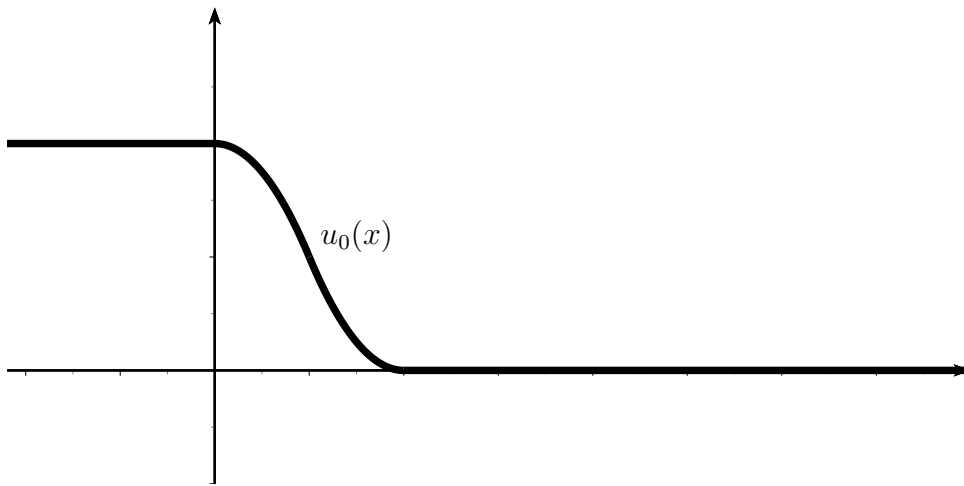


FIGURE 3.5 – Représentation de u_0 décroissant du premier exemple

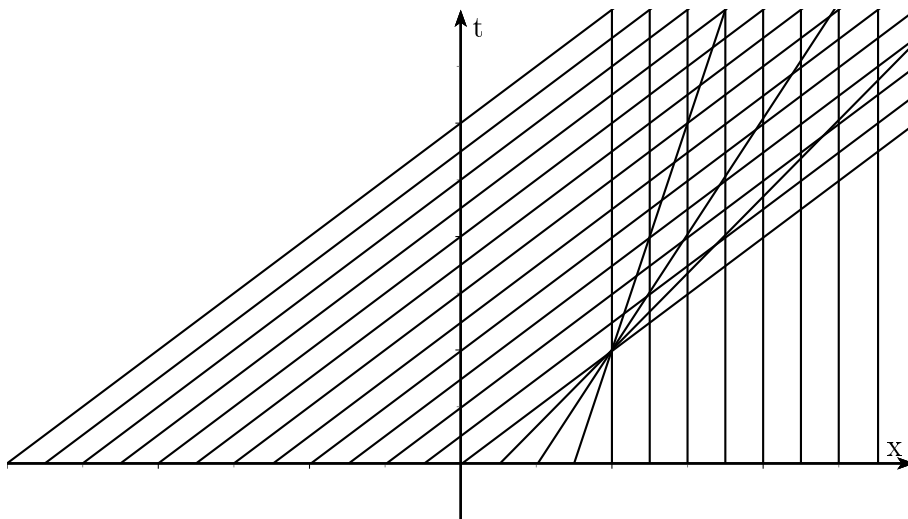


FIGURE 3.6 – Droites caractéristiques de l'exemple 1

On rencontre un problème : les droites caractéristiques se coupent. Si on se place à l'intersection de deux droites, la solution étant constante et égale à la pente de la droite, on aurait deux valeurs différentes pour la solution u . Or, il nous faut une solution unique.

Question : Comment trouver la solution de l'équation pour une fonction u_0 décroissante ?

Revenons à notre fonction $\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, t, \xi) = u'_0(\xi)t + 1$.

Alors, si $t = \frac{-1}{u'(\xi)} > 0$, on a $\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, t, \xi) = 0$.

On ne peut donc plus appliquer le théorème des fonctions implicites comme dans le cas où u_0 est croissante.

$\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, t, \xi) = u'_0(\xi)t + 1$ est une fonction affine, donc, $t_0 = \frac{-1}{u'_0(\xi)}$ est la seule valeur annulant $\frac{\partial F}{\partial \xi}$.

Donc, si on prend $t \in [0, t_0[$, on a $\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, t, \xi) \neq 0$

et on applique le TFI comme précédemment.

On choisit donc

$$t_0 = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{-1}{u'_0(y)} \right) > 0$$

$$t_0 = \frac{-1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} u'_0(y)}$$

Retour à l'exemple :

Calculons t_0 .

$$u'_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -4x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -4 + 4x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\inf_{y \in [0,1]} u'_0(y) = -2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2}.$$

Alors, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, les droites caractéristiques ne se coupent pas et u , solution, est unique, comme le montre la figure (3.7).

D'où le calcul de la solution pour $t < 1/2$.

Sur $]-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned} x &= t + \xi \\ u_0(\xi) &= 1 \text{ si } \xi \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad x - t \leq 0 \end{aligned}$$

Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

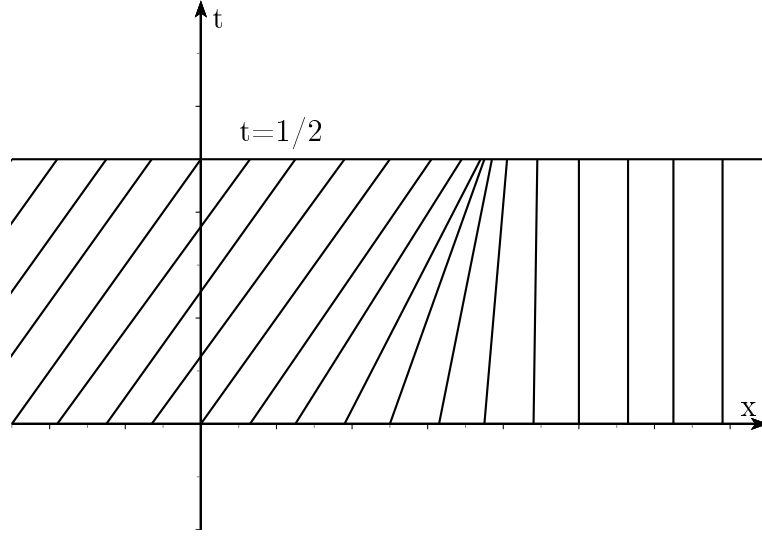


FIGURE 3.7 – Illustration d'un temps maximum pour la résolution classique

$$\begin{cases} x = (1 - 2\xi^2)t + \xi \\ u_0(\xi) = 1 - 2\xi^2 \end{cases}$$

$$-2\xi^2 t + \xi + t - x = 0$$

$$\Delta = 1 + 8t(t - x)$$

$$\xi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8t(t - x)}}{4t} \quad \text{mais} \quad \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

On garde donc,

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1 + 8t(t - x)}}{4t}$$

pour

$$\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad i.e. \quad \begin{cases} \text{si } \xi = 0 & \text{alors } x = t \\ \text{si } \xi = \frac{1}{2} & \text{alors } x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - t > 0 \text{ et } x - \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}$$

$$u_0(\xi) = 1 - 2\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8t(t - x)}}{4t}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8t^2}(1 - \sqrt{1 + 8t(t - x)})^2$$

On procède de la même façon sur les autres intervalles et on obtient la solution suivante (voir figure 3.8) :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{8t^2}(1 - \sqrt{1 - 8t(x - t)})^2 & \text{si } x - t > 0 \text{ et } x - \frac{1}{2}t < \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{t}(4t - 1 + \sqrt{1 + 8t(x - 1)}) + \frac{1}{8t^2}(4t - 1 + \sqrt{1 + 8t(x - 1)})^2 & \text{si } x < 1 \text{ et } x - \frac{1}{2}t \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

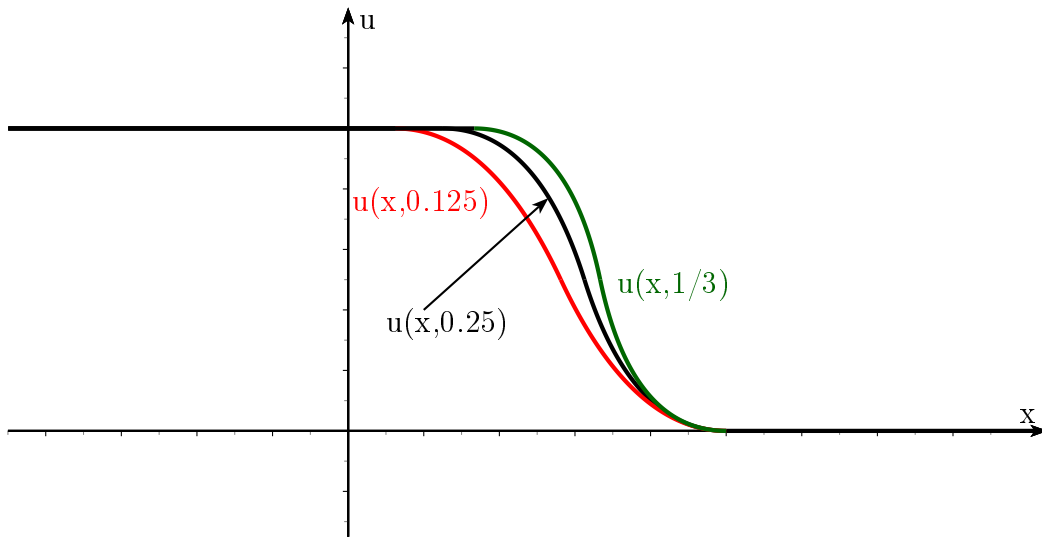


FIGURE 3.8 – Représentation de la solution à différents temps

Un deuxième exemple :

On considère le problème suivant (voir figure (3.9)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

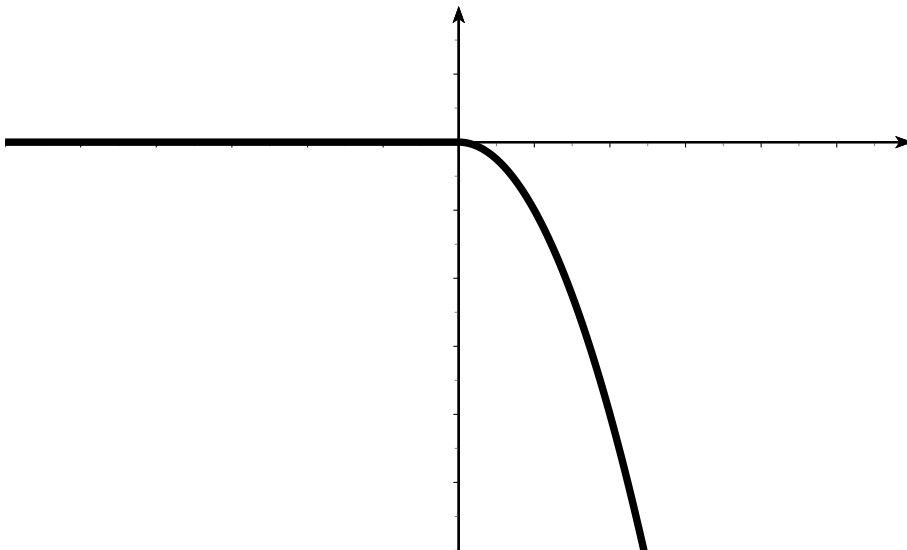


FIGURE 3.9 – Fonction u_0 pour l'exemple 2

Cette fois encore on a une fonction u_0 décroissante. u_0 étant la pente des droites caractéristiques, pour $x \leq 0$, on a une pente nulle et pour $x \geq 0$, une pente égale à $-x^2$, pente

négative décroissante (voir figure (3.10)).

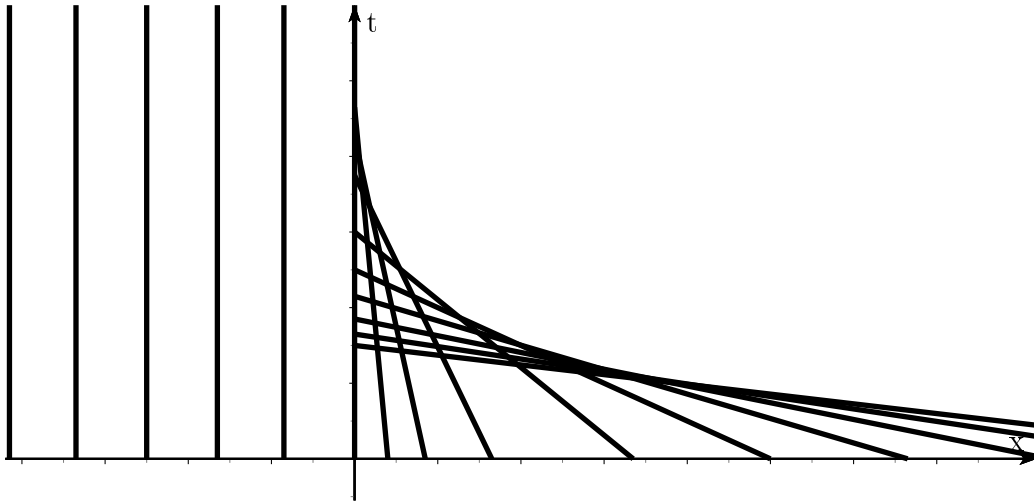


FIGURE 3.10 – Droites caractéristiques de l'exemple 2

On va essayer de calculer t_0 , comme précédemment.

$$u'_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$\inf_{y \in \mathbb{R}} u'_0(y) = -\infty$ d'où $t_0 = 0^+$.

Ici, la stratégie qui consiste à chercher un t_0 maximal tel que la méthode des caractéristique soit efficace ne fonctionne plus. Quelque soit le point sur lequel on se place dans le plan $t > 0$, on sera au point d'intersection de plusieurs droites caractéristiques. On a donc plusieurs valeurs possibles pour la solution. Alors, la fonction tend à devenir discontinue. Pour tenter de résoudre ce problème, nous devons donner une nouvelle méthode qui accepte les solutions discontinues. Mais, si u n'est plus régulière, ses dérivées partielles n'existent plus et l'équation de Burgers n'a plus de sens. Nous allons donc présenter le problème sous forme variationnelle.

Remarque : Dans le cas de l'équation de transport (3.1), on ne rencontrait pas ce problème en partant d'une donnée initiale u_0 régulière. En effet, les droites caractéristiques sont toutes parallèles, et donc on ne rencontre pas de problème en se plaçant sur une droite caractéristique.

Chapitre 4

Formulation variationnelle

Nous avons vu précédemment que certaines solutions de l'équation de Burgers sont discontinues. Dans ce chapitre, nous allons présenter le problème autrement afin de traiter ces solutions discontinues. Nous allons parler de formulation variationnelle pour l'équation de Burgers.

Soit l'équation de Burgers : $\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0$.

Soit ω une fonction test, $\omega(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ à support compact borné K . Alors $\omega = 0$ sur ∂K et à l'extérieur de K .

On appelle Π le demi-plan $t > 0$ et Δ la droite $t = 0$ (voir figure (4.1)).

Pour la suite, notons $\Omega = K \cap \Pi$ et $X = (x, t)$.

Tout d'abord remarquons que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} - \left[\frac{\partial u}{\partial t} \omega + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \omega \right] dX + \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} dX \\ &= \int_{\Omega} -\omega \frac{\partial u}{\partial t} - \cancel{u \frac{\partial \omega}{\partial t}} - \cancel{\frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x}} - \omega \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + \cancel{u \frac{\partial \omega}{\partial t}} + \cancel{\frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x}} dX \\ &= \int_{\Omega} -\omega \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} \right] dX. \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix}$$

Appliquons la formule de Green à cette intégrale.

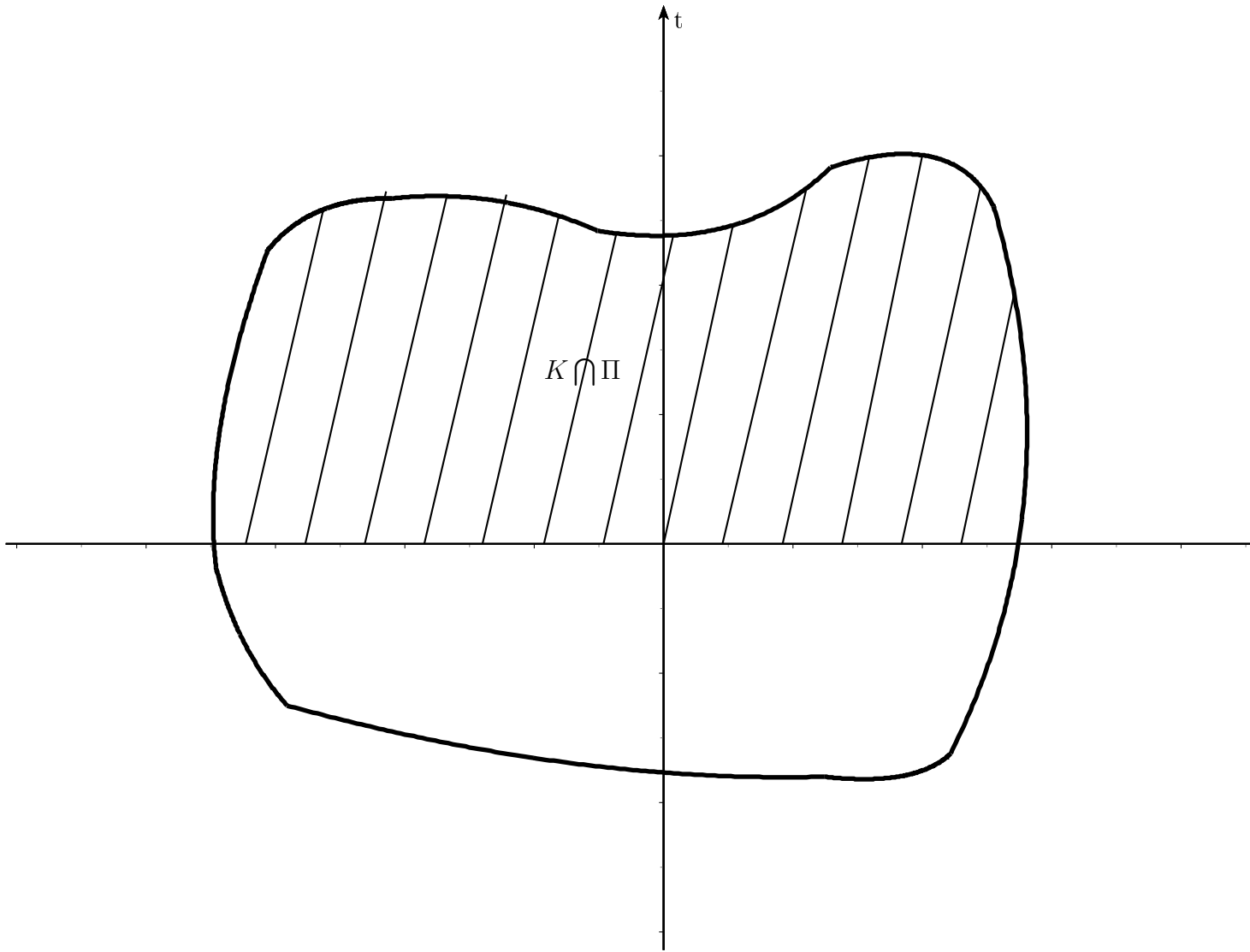


FIGURE 4.1 – Domaine K

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -\omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) dX &= \int_{\Omega} -\omega \frac{\partial u}{\partial t} dX - \int_{\Omega} \omega \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} dX \\
&= \int_{\partial\Omega} -\omega u n_t d\sigma + \int_{\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial t} dX - \int_{\partial\Omega} \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma + \int_{\Omega} \frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} dX \\
&= - \int_{\partial\Omega} \omega u n_t + \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma + \int_{\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} dX
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} -\omega \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} \right] dX \\
&= - \int_{\partial\Omega} \omega u n_t + \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma + \int_{\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} dxdt
\end{aligned}$$

On remarque que $\partial(K \cap \Pi) = (\partial\Omega) \cap \Pi + \Delta \cap \Omega$ d'où :

$$\begin{aligned}
&- \int_{\partial(K \cap \Pi)} \omega u n_t + \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma \\
&= - \int_{\partial\Omega \cap \Pi} \omega u n_t + \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma - \int_{\Omega \cap \Delta} \omega u n_t + \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma
\end{aligned}$$

Comme ω est à support compact K, ω est nulle sur la frontière ∂K de K, et la première intégrale est donc nulle.

On a que $\vec{n} = (0, -1)$ sur Δ , et que $t = 0$ sur Δ :

$$- \int_{\partial(K \cap \Pi)} \omega u n_t + \omega \frac{u^2}{2} n_x d\sigma = + \int_{\Delta \cap K} \omega u d\sigma = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \omega(x, 0) dx$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} \right) dxdt = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \omega(x, 0) dx \quad (4.1)$$

Si u est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad u \in C^1,$$

Alors, grâce à (4.1), on a que u vérifie le problème variationnel :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) - \omega(x, 0) dx = 0 \quad (4.2)$$

$\forall \omega \in C^1$.

On a que (3.2) \Rightarrow (4.2), pourvu que u soit régulière.

Mais on remarque que pour (4.2) garde son sens, u n'a pas besoin d'être aussi régulière car on a transféré les opérations de dérivations sur la fonction test ω . L'idée est donc maintenant de rechercher les fonctions u solutions de (4.2), qui sont "autorisées" à ne plus être continues. Cependant montrons que dans le cas où la solution u à la régularité escomptée, alors on a évidemment : (4.2) \Rightarrow (3.2).

En effectuant (4.2)-(4.1) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} -\omega \left(\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} [u_0(x) - u(x, 0)] \omega(x, 0) dx = 0$$

Si on prend une fonction ω à support K borné dans le demi-plan $t > 0$, i.e. $Int(\Pi)$, alors pour $t = 0$, $\omega(x, t) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \omega(x, 0) dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} -\omega \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) dx dt = 0 \end{aligned}$$

On prend une fonction $\omega \neq 0$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Retrouvons les conditions initiales :

u vérifiant $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \omega(x, 0) dx = 0$$

Pour $\omega \neq 0$, on a alors $u_0(x) - u(x, 0) = 0$.

On a donc bien l'équivalence entre le problème variationnel (4.2) et notre problème de Cauchy (3.2).

Quel est l'intérêt de la formulation variationnelle ?

Pour notre problème de Cauchy, si on a une fonction u_0 non dérivable, on ne peut pas calculer la solution car les dérivées partielles n'ont plus de sens. Alors, dans la formulation variationnelle on reporte la dérivée sur la fonction test qui est au moins C^1 . Ainsi, avec u au moins C^1 par morceaux, on peut résoudre le problème variationnel (4.2). Si u est solution de (4.2), alors u est appelée solution faible de l'équation de Burgers. Si une solution du problème de Cauchy admet des discontinuités, ils sont appelés "chocs".

Chapitre 5

Condition de choc

On s'intéresse à $u(x, t)$, solution de la formulation variationnelle, que l'on autorise maintenant à être décroissante. Sans perte de généralité, supposons que u soit néanmoins C^1 par morceaux. Soit $u_1 \in C^1(K_1)$, $u_2 \in C^1(K_2)$ et $K_1 \cup K_2 = \Omega$ (voir figure (5.1)).

Les K_i sont séparés par des arcs de courbe réguliers (les chocs), sur lesquels u sera autorisée à admettre des discontinuités. Sur chaque morceau, nous pouvons refaire le raisonnement précédent pour trouver la formulation variationnelle. Ainsi, on satisfait l'équation de Burgers sauf sur les chocs. Et $u(x, 0) = u_0(x)$ est vraie pour tout x où la fonction u_0 est continue.

Soit (C) un arc du demi-plan $t \geq 0$.

Soit $v \in C^1(K)$, $K \subset (x, t)$, $t > 0$, $K \cap (C) \neq \emptyset$.

Soit $\sigma = (C) \cap K$, $\Sigma_1 = \partial K_1 \setminus \sigma$ et $\Sigma_2 = \partial K_2 \setminus \sigma$.

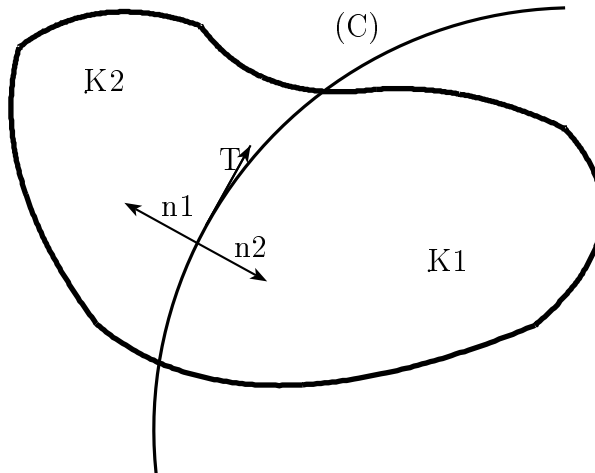


FIGURE 5.1 – Domaine de définition de u

Théorème 1 (THÉORÈME DE RANKINE-HUGONIOT) :

Soit $u(x, t)$ une fonction définie sur 2 domaines K_1 et K_2 séparés par un arc de courbe (C) d'équation $x = g(t)$. On appelle $u_1 = u|_{K_1}$ et $u_2 = u|_{K_2}$. Si u_1 et u_2 sont solutions de l'équation de Burgers (avec condition initiale) dans leur domaine respectif et si g vérifie la condition de saut de Rankine-Hugoniot suivant :

$$g'(t)[u_1(g(t), t) - u_2(g(t), t)] = \frac{u_1^2}{2}(g(t), t) - \frac{u_2^2}{2}(g(t), t)$$

alors u est solution faible de l'équation de Burgers avec condition initiale, c'est à dire solution du problème variationnel.

Remarque : $g'(t)$ est appelée vitesse de propagation de la discontinuité ou vitesse de propagation du choc.

Démonstration du théorème :

On va montrer que si u_1 et u_2 sont solutions fortes de l'équation de Burgers, et si la condition de saut de Rankine-Hugoniot est vérifiée alors u est une solution faible de l'équation de Burgers.

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact. On peut donc écrire :

$$\int_{K_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_1^2}{2} \right) \varphi \, dxdt + \int_{K_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_2^2}{2} \right) \varphi \, dxdt = 0 \iff I_1 + I_2 = 0$$

Calcul de I_1 :

$$I_1 = \int_{K_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} \varphi \, dxdt + \int_{K_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_1^2}{2} \varphi \, dxdt$$

On applique la formule de Green et on obtient :

$$I_1 = \int_{\partial K_1} u_1 \varphi n_1^{(t)} d\sigma - \int_{K_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt + \int_{\partial K_1} \frac{u_1^2}{2} \varphi n_1^{(x)} d\sigma - \int_{K_1} \frac{u_1^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdt$$

où $\vec{n}_1 = (n_1^{(x)}, n_1^{(t)})$ vecteur unitaire normal à ∂K_1 .

Le vecteur $\vec{\tau}$ unitaire tangent à (C) , courbe paramétrée par la fonction $g(t)$ a pour composantes :

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\partial g(t)}{\partial t} \frac{1}{\|\vec{\tau}\|_2}, \frac{\partial g(t)}{\partial x} \frac{1}{\|\vec{\tau}\|_2} \right) = \left(\frac{g'(t)}{\sqrt{1 + g'^2(t)}}, \frac{1}{\sqrt{1 + g'^2(t)}} \right)$$

Le vecteur unitaire sortant \vec{n}_1 se déduit de $\vec{\tau}$ par rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

D'où $\vec{n}_1 = (\frac{1}{\sqrt{1+g'^2(t)}}, -\frac{g'(t)}{\sqrt{1+g'^2(t)}})$ et $d\sigma(x, t) = \sqrt{1+g'^2(t)}dt$.

On en conclut que :

$$I_1 = \int_{\partial K_1} (\frac{u_1^2}{2} - g'(t)u_1)\varphi dt - \int_{K_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u_1^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt$$

On fait de même pour l'intégrale I_2 avec $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$.

On obtient :

$$I_2 = \int_{\partial K_2} (g'(t)u_2 - \frac{u_2^2}{2})\varphi dt - \int_{K_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u_2^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt$$

D'où

$$\int_{\partial K_1} (\frac{u_1^2}{2} - g'(t)u_1)\varphi dt + \int_{\partial K_2} (g'(t)u_2 - \frac{u_2^2}{2})\varphi dt - \int_{K_1 \cup K_2} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = 0$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} & - \int_{K_1 \cup K_2} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_0^{+\infty} \varphi(g(t), t) (\frac{u_1^2}{2} + u_1 g'(t)) - \varphi(g(t), t) (\frac{u_2^2}{2} + u_2 g'(t)) dt \\ & + \int_{-\infty}^{g(0)} \varphi(x, 0) u_2(x, 0) dx - \int_{g(0)}^{+\infty} \varphi(x, 0) u_1(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

u vérifie la condition de saut de Rankine-Hugoniot,

$g'(t)[u_1(g(t), t) - u_2(g(t), t)] = \frac{u_1^2}{2}(g(t), t) - \frac{u_2^2}{2}(g(t), t)$, alors la 2^{eme} intégrale est nulle.

u_1 et u_2 étant solutions fortes de l'équation de Burgers avec conditions initiales, on a que $u_1(x, 0) = u_0(x)$ si $x < g(0)$ et $u_2(x, 0) = u_0(x)$ si $x > g(0)$.

D'où u est une solution faible de l'équation de Burgers avec conditions initiales.

□

Remarque :

La condition de saut de Rankine-Hugoniot nous permet de calculer la vitesse du choc :

$$g'(t) = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul de ces solutions faibles et voir si elles sont toujours bien définies.

Chapitre 6

Problèmes de Riemann

Définition 1 Pour l'équation de Burgers, un problème de Riemann est un problème de Cauchy avec la donnée initiale suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < 0 \\ u_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Contrairement à tout ce qu'on a étudié jusqu'à présent, la donnée initiale de ce problème n'est pas continue.

Avant d'étudier ce problème, rappelons alors la solution obtenue pour l'équation de transport (3.1), dans le cas d'une donnée initiale non régulière. Prenons l'exemple du créneau. Pour obtenir la solution de l'équation il suffit de faire une translation de la donnée initiale, c'est à dire que la solution conserve l'irrégularité de la donnée initiale. (voir figure (6.1)).

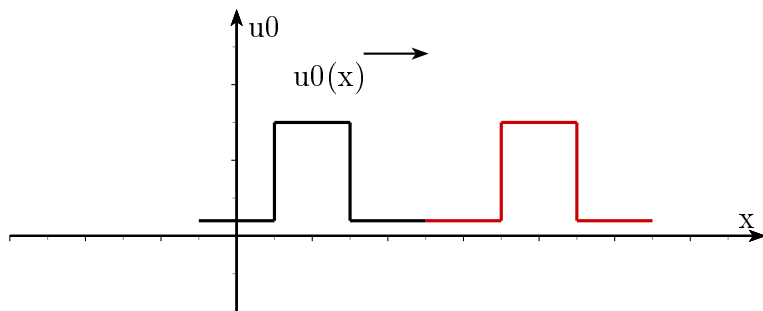


FIGURE 6.1 – Transport d'un signal créneau dans le cas de l'équation de transport

On peut se demander si on observe le même phénomène lors de la résolution de l'équation de Burgers avec une donnée initiale irrégulière. La solution est-elle aussi irrégulière ? Ou alors la solution est-elle régularisée ? Pour répondre à ces questions étudions les problèmes de Riemann pour l'équation de Burgers.

1^{er}CAS : u_0 est décroissante :

On a $u_1 > u_2$. On ne peut pas résoudre ce problème avec la méthode des caractéristiques : en effet, la donnée initiale u_0 n'est pas régulière. On n'a donc pas de solution forte à ce problème, mais une solution faible avec un choc dont la pente vaut $s = (u_1 + u_2)/2$. (Figure 6.2 et figure 6.3)

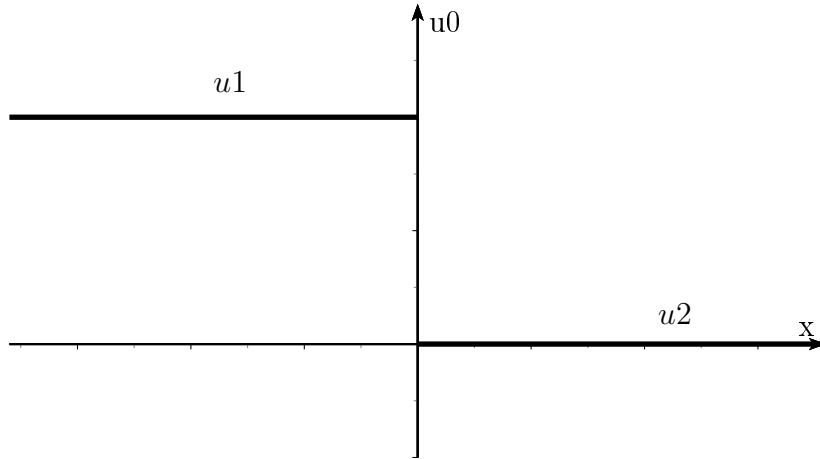


FIGURE 6.2 – u_0 pour le problème de Riemann décroissant

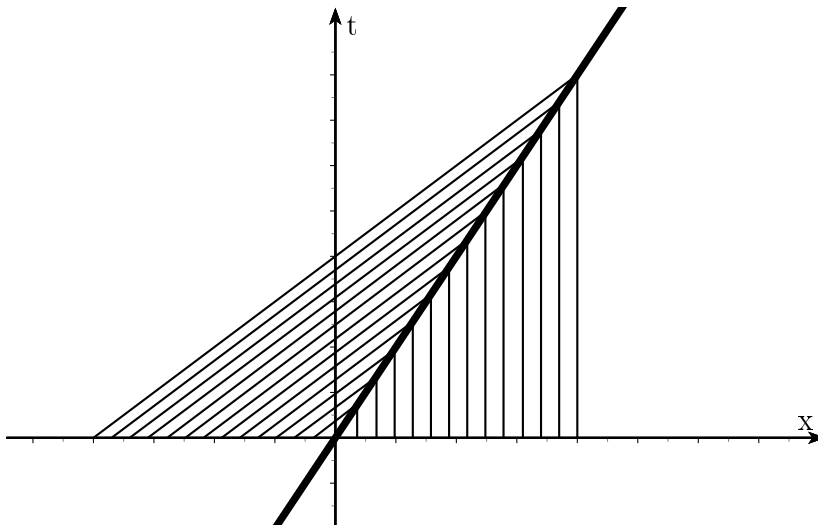


FIGURE 6.3 – Droites caractéristiques pour u_o décroissant

Une solution faible de ce problème de Riemann s'écrit (nous verrons plus tard que cette solution est unique) :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < st \\ u_2 & \text{si } x > st \end{cases} \quad (6.1)$$

Cette solution présente une discontinuité, ou encore un choc, le long de la courbe $x = st$ et correspond à une onde de choc. (voir figure (6.4))

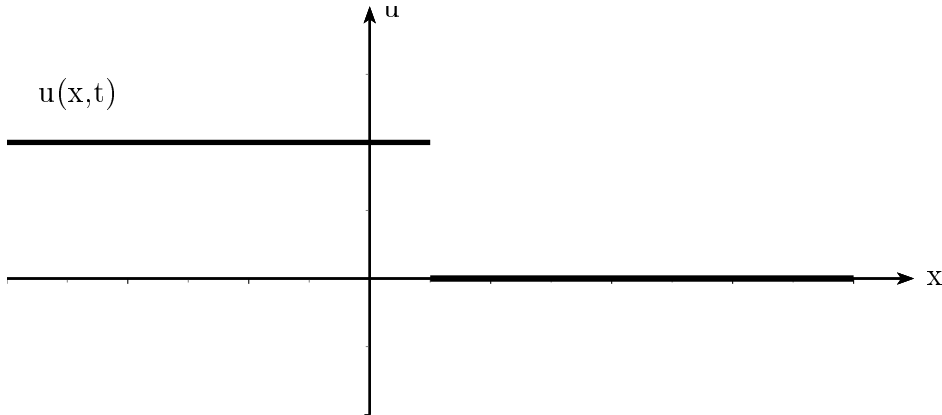


FIGURE 6.4 – Solution du problème de Riemann à un temps t

$2^{me} CAS$: u_0 est croissante :

On a $u_1 < u_2$ (voir figure (6.5)). Les droites caractéristiques ne se croisent pas (figure (6.6)), donc on pourrait donner comme solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < u_1 t \\ u_2 & \text{si } x > u_2 t \end{cases}$$

Quelle est la solution pour $u_1 t \leq x \leq u_2 t$?

On cherche $u(x, t)$ de la forme $U(\frac{x}{t}) \in C^1(\mathbb{R})$.

Ce qui nous donne $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{-x}{t} U'(\frac{x}{t})$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{t} U'(\frac{x}{t})$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \iff \frac{-x}{t} U'(\frac{x}{t}) + U(\frac{x}{t}) \frac{1}{t} U'(\frac{x}{t}) = 0.$$

D'où $U(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$.

Une solution de ce problème de Riemann est donc (voir figure (6.7)) :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < u_1 t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_1 t \leq x \leq u_2 t \\ u_2 & \text{si } x > u_2 t \end{cases} \quad (6.2)$$

On voit sur la figure (6.6) que l'on a le domaine $\{(x, t) = t > 0, u_1 t \leq x \leq u_2 t\}$, des droites caractéristiques d'équation $x = \alpha t$. Ceci est une onde de raréfaction, ou encore une onde de détente.

Mais, on peut trouver une autre solution faible. En effet, grâce à la formulation variationnelle de l'équation on peut trouver une solution faible avec un choc, comme pour le cas

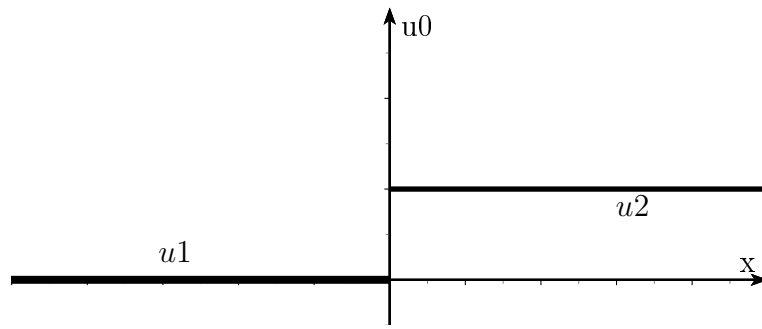


FIGURE 6.5 – u_0 croissante

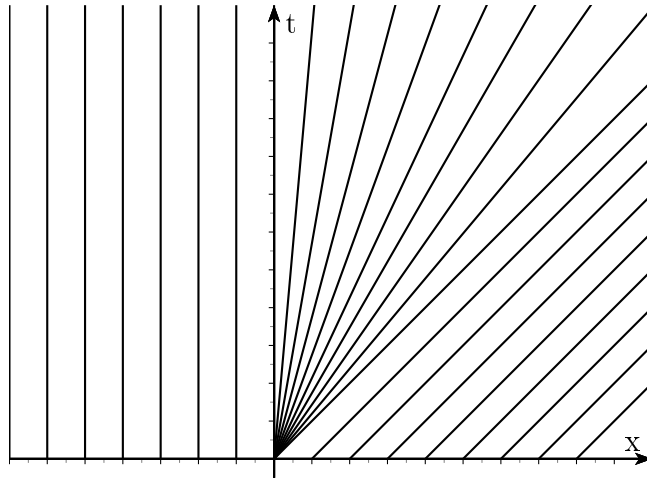


FIGURE 6.6 – Droites caractéristiques pour Riemann croissant : onde de raréfaction ou onde de détente

où u_0 est décroissante. Ici, les caractéristiques "sortent" du choc au lieu d'y "entrer" comme quand u_0 est décroissante.(figure 6.8)

Cette autre solution s'écrit (voir figure (6.9)) :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < st \\ u_2 & \text{si } x > st \end{cases} \quad (6.3)$$

où s est la vitesse de propagation du choc.

On a alors deux solutions distinctes pour le même problème, alors qu'on veut une solution unique. Il faut donc choisir la bonne solution. Nous allons introduire les notions de condition d'entropie et de solution entropique, qui nous permettront d'écarter les solutions "non physiques".

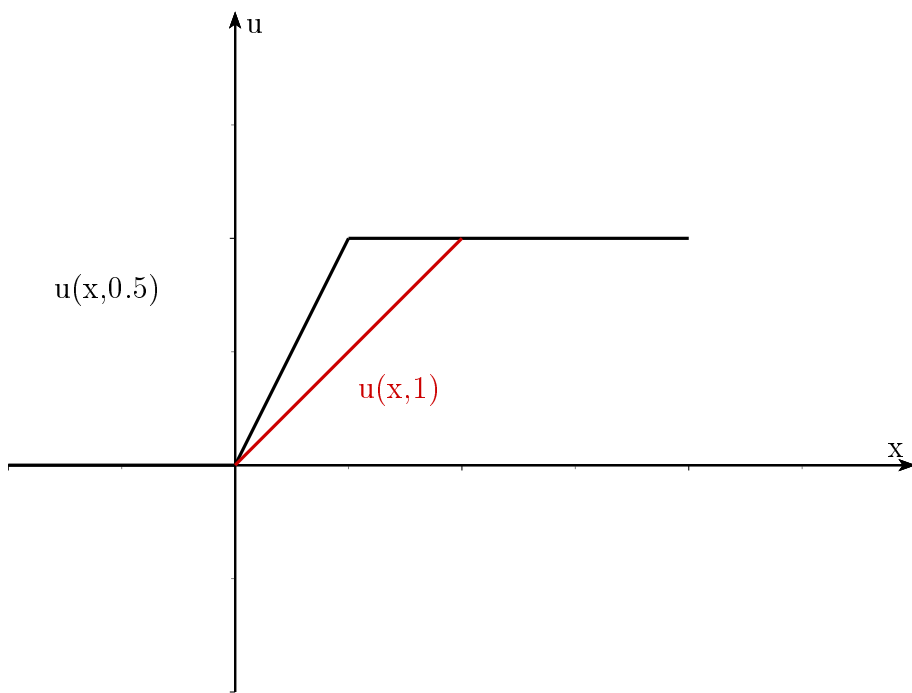


FIGURE 6.7 – Solution du problème de Riemann croissant

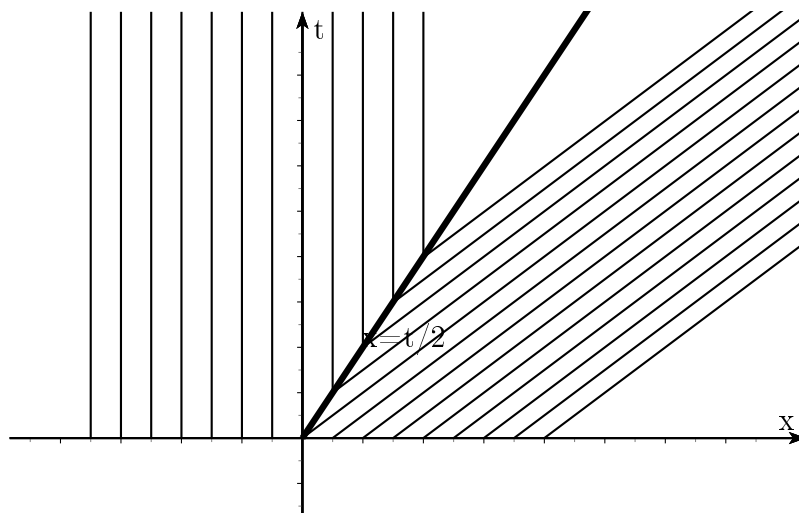


FIGURE 6.8 – Droites caractéristiques avec choc pour u_0 croissante

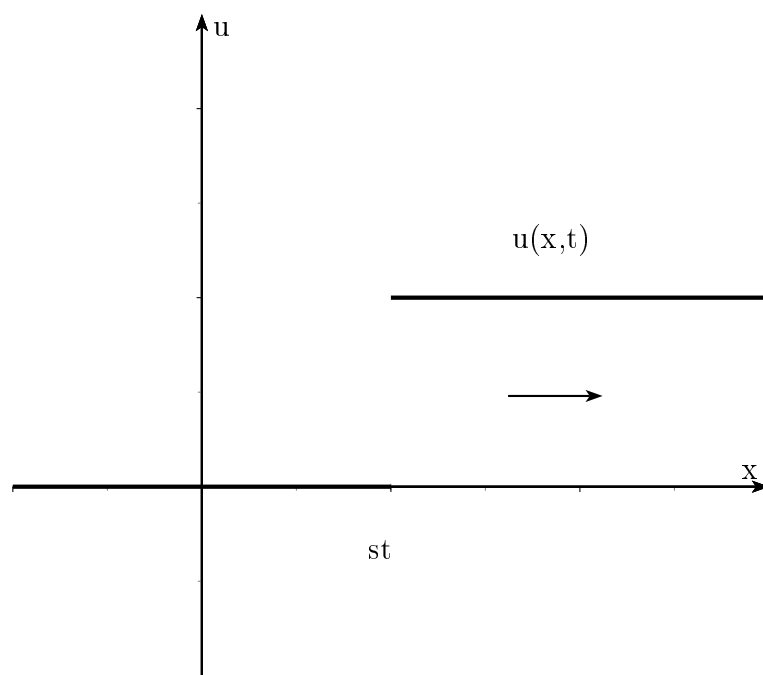


FIGURE 6.9 – Solution du problème de Riemann croissant

Chapitre 7

Condition d'entropie et solution entropique

Définition 2 Une solution faible consistant en un choc (u_1, u_2) de l'équation de Burgers avec donnée initiale est dite solution entropique si on a la condition d'entropie suivante :

$$u_1 > s > u_2$$

où s est la vitesse de propagation du choc.

Par exemple, si on considère un problème de Riemann cela correspond au cas où u_0 est décroissante. La solution (6.1) est alors une solution entropique. De plus, dans ce cas on dit que le choc est entropique (les caractéristiques "entrent" dans le choc).

Théorème 2 (THÉORÈME DE OLEINIK) (*admis*) :

Dans le cas de l'équation de Burgers, il existe au plus une solution entropique.

Alors, pour le problème de Riemann décroissant, la solution (6.1) est l'unique solution entropique, c'est à dire l'unique solution physique. Nous remarquons que l'irrégularité est conservée et " transportée " comme pour l'équation de transport. Dans le cas de l'équation de transport, on avait une translation de "longueur c ". Ici, on transporte l'irrégularité à une vitesse st , qui dépend cette fois ci du temps.

Il nous faut procéder autrement pour choisir la solution entropique parmi les deux solutions faibles calculées précédemment pour le cas u_0 croissante, où le choc est non entropique. Pour cela, nous allons considérer l'équation de Burgers dite visqueuse, ou équation de Burgers avec terme dissipatif :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec } \nu > 0. \quad (7.1)$$

Cette équation est du type parabolique, comme l'équation de la chaleur. En pratique, ν est petit, on a une dissipation faible. On remarque que si $\nu \rightarrow 0$ on retrouve l'équation de Burgers " classique ". Nous allons calculer la solution de l'équation visqueuse en faisant

tendre ν vers 0. Cette solution sera la solution entropique. Cette procédure est appelée procédure de viscosité.

On va considérer une approximation régulière de la donnée initiale u_0 , avec une "zone régularisée" de taille ν . Par exemple, pour le cas du problème de Riemann suivant :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On peut régulariser la donnée initiale de la façon suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\nu} & \text{si } 0 \leq x \leq \nu \\ 1 & \text{si } x > \nu \end{cases}$$

On obtient les droites caractéristiques de la figure 7.1 :

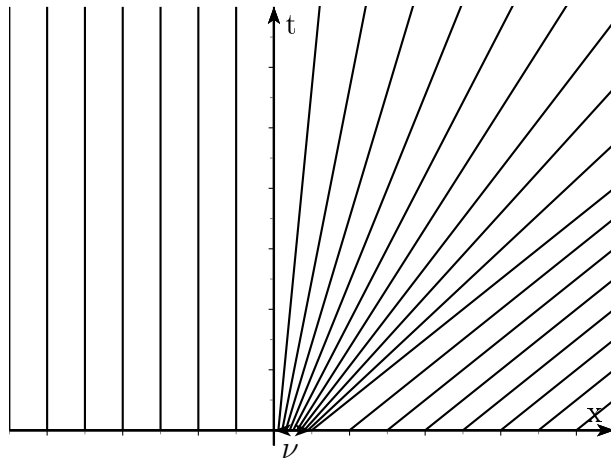


FIGURE 7.1 – Courbes caractéristiques pour le problème de Riemann "régularisé"

Si $\nu \rightarrow 0$ on obtient les droites caractéristiques de la figure (7.2).

On remarque que le tracé est très proche de celui qui correspond à l'onde de détente. La solution entropique est donc la solution (6.2). Cette solution, qui correspond à la solution physique, est la limite du problème avec données initiales régularisantes. Cette fois ci, contrairement à l'équation de transport, la discontinuité de la donnée initiale "disparaît", et la solution est régularisée. On parle d'effet régularisant. On pouvait s'attendre à ce phénomène. En effet, nous avons ajouté un terme dissipatif à l'équation de Burgers pour trouver cette solution. Ce terme dissipatif est une dérivée seconde en espace, et on sait que pour l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, on observe cet effet régularisant : la solution est très régulière, même avec une donnée initiale qui ne l'est pas.

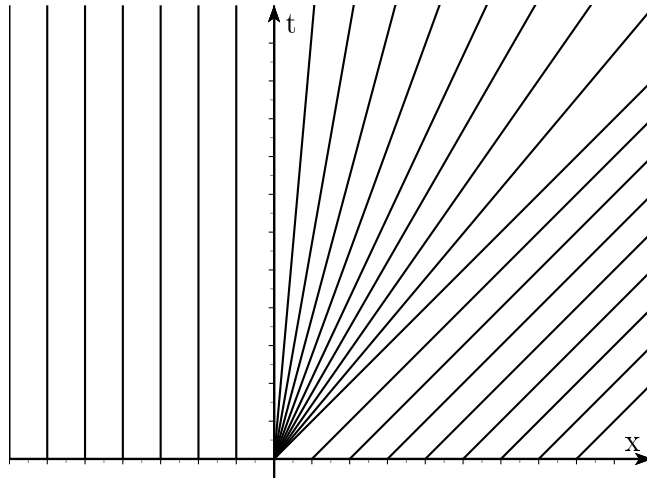


FIGURE 7.2 – Droites caractéristiques pour $\nu \rightarrow 0$

Bilan :

Pour le problème de Riemann avec u_0 décroissante, la solution entropique est la solution (6.1) :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < st \\ u_2 & \text{si } x > st \end{cases} \quad (7.2)$$

Pour le problème de Riemann avec u_0 croissante, la solution entropique est la solution (6.2) :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < u_1 t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_1 t \leq \frac{x}{t} \leq u_2 t \\ u_2 & \text{si } x > u_2 t \end{cases} \quad (7.3)$$

Chapitre 8

Étude de schémas numériques pour la résolution de l'équation de Burgers

Dans cette partie, nous allons étudier divers schémas numériques : consistance, stabilité... Puis grâce à des applications numériques réalisées sous Matlab, nous verrons que certains sont beaucoup mieux adaptés que d'autres et nous tenterons d'expliquer pourquoi. Dans la suite, nous noterons u_j^n l'approximation de $u(x_j, t_n)$, h le pas de discrétisation en espace, et Δt le pas de discrétisation en temps.

8.1 Un premier essai

Dans un premier temps, nous remarquons que la forme non conservative de l'équation de Burgers $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ est de la même forme que l'équation de transport (3.1). La différence est que la constante c a été remplacée par la fonction u . Nous allons donc trouver un schéma numérique à partir de cette forme non conservative. Discrétisons l'équation grâce au développements de Taylor.

On discrétise en temps :

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On discrétise en espace, et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} + O(h)$$

On note u_j^n l'approximation de $u(x, t)$.

On obtient alors le schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (8.1)$$

Ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 1 en espace.

Dans le cas de l'équation de transport (3.1), en procédant de la même manière, on obtient le schéma décentré amont. La seule différence est que la constante c a ici été remplacée par le terme u_j^n . On sait que pour l'équation de transport, si $c < 0$, le schéma est inconditionnellement instable. Et pour $c > 0$, le schéma est stable à condition que $c \frac{\Delta t}{h} \leq 1$ (condition CFL).

Pour avoir un résultat similaire à celui de l'équation de transport, on va considérer que le terme u_j^n est une constante que nous appellerons u . Ainsi, nous aurons le même type de condition CFL. Au niveau de l'algorithme, il faudra alors tester la condition CFL à chaque itération alors que pour l'équation de transport, la condition reste la même à chaque itération.

Sous Matlab, nous testons le schéma numérique (8.1) pour le problème de Riemann décroissant suivant :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

L'algorithme nous donne comme solution $u(x, t) = u_0(x)$, $\forall t$. Or, on sait que la solution entropique de ce problème de Riemann est :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

La discontinuité de la donnée initiale devrait se propager à la vitesse $1/2$ d'après la condition de Rankine-Hugoniot. On a convergence vers une solution mais celle-ci n'est pas la bonne. Ce type de schéma ne convient donc pas (voir figure (8.1)). A partir de maintenant, nous partirons de la forme conservative de l'équation de Burgers pour arriver à des schémas dits conservatifs.

Définition 3 *Un schéma numérique est dit conservatif s'il s'écrit sous la forme :*

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (F(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) - F(u_{j-p-1}^n, \dots, u_{j+q-1}^n))$$

Si $p = 0$ et $q = 1$, F est une fonction de 2 variables seulement :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)) \quad (8.2)$$

La fonction F est appelée flux numérique.

Définition 4 *Un schéma numérique conservatif est dit consistant si la fonction de flux numérique vérifie :*

$$F(u, \dots, u) = \frac{u^2}{2}$$

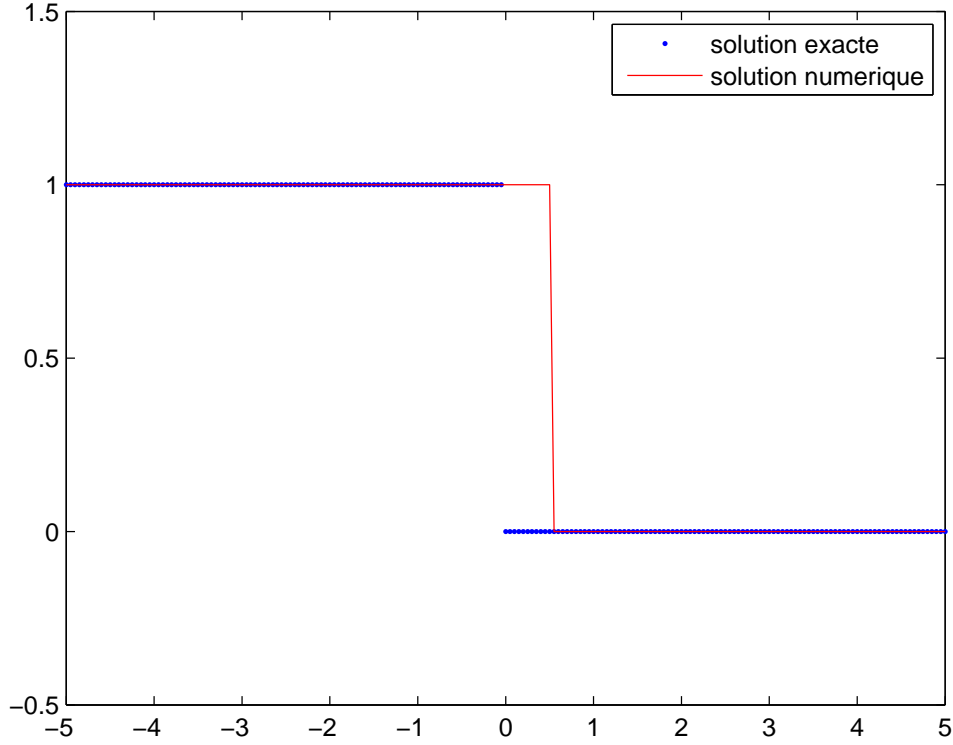


FIGURE 8.1 – Solution numérique et solution exacte pour le problème de Riemann décroissant avec schéma non conservatif

8.2 Un deuxième essai

Cette fois ci, nous allons discrétiser la forme conservative de l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

La discrétisation en temps nous donne :

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

En espace, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2(x, t)}{2} = \frac{\frac{u^2}{2}(x + h, t) - \frac{u^2}{2}(x - h, t)}{2h} + O(h^2)$$

Cela nous donne le schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right). \quad (8.3)$$

On remarque que ce schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et l'ordre 2 en espace.

Ce schéma est bien un schéma conservatif. En effet, si on note :

$$F(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2} \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(u_j^n)^2}{2}, \text{ on a que } u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)).$$

Calculons $F(u, u)$:

$$F(u, u) = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} = \frac{u^2}{2}. \text{ Ce schéma numérique est donc consistant.}$$

On remarque qu'il est consistant à l'ordre 1 en temps et l'ordre 2 en espace.

Étudions maintenant la stabilité du schéma. Tout d'abord on remarque que :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) \\ &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2h} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right) (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Pour l'étude de la stabilité par transformée de Fourier, on va "linéariser" le schéma en remplaçant $\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$ par u . On a alors :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{u \Delta t}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$\forall \xi$ on a :

$$\begin{aligned} \widehat{u^{n+1}} &= \widehat{u^n} - \frac{u \Delta t}{2h} (e^{ih\xi} \widehat{u^n} - e^{-ih\xi} \widehat{u^n}) \\ &= \widehat{u^n} \left(1 - \frac{u \Delta t}{h} \left(\frac{e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}}{2} \right) \right) \\ &= \widehat{u^n} \left(1 - \frac{u \Delta t}{h} i \sin(h\xi) \right) \\ &= \widehat{u^n} \cdot M(\xi) \end{aligned}$$

Pour que le schéma soit stable il faut vérifier la condition $|M(\xi)|^2 \leq 1$.

$$|M(\xi)|^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 + u^2 \frac{\Delta t^2}{h^2} \sin^2(h\xi) \leq 1 \quad \forall \xi$$

Ceci est impossible. Le schéma est donc inconditionnellement instable.

On pouvait s'attendre à ce résultat. En effet, le schéma numérique (8.3) "linéarisé" correspond au schéma de Richardson centré, qui est inconditionnellement instable pour l'équation de transport.

RESULTATS NUMERIQUES :

Nous avons testé ce schéma numérique pour 2 problèmes. D'abord le problème avec une donnée u_0 croissante régulière (voir figure(8.2)) :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2x^2 + 4x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad (8.4)$$

Pour le problème (8.4), on obtient les résultats suivants :

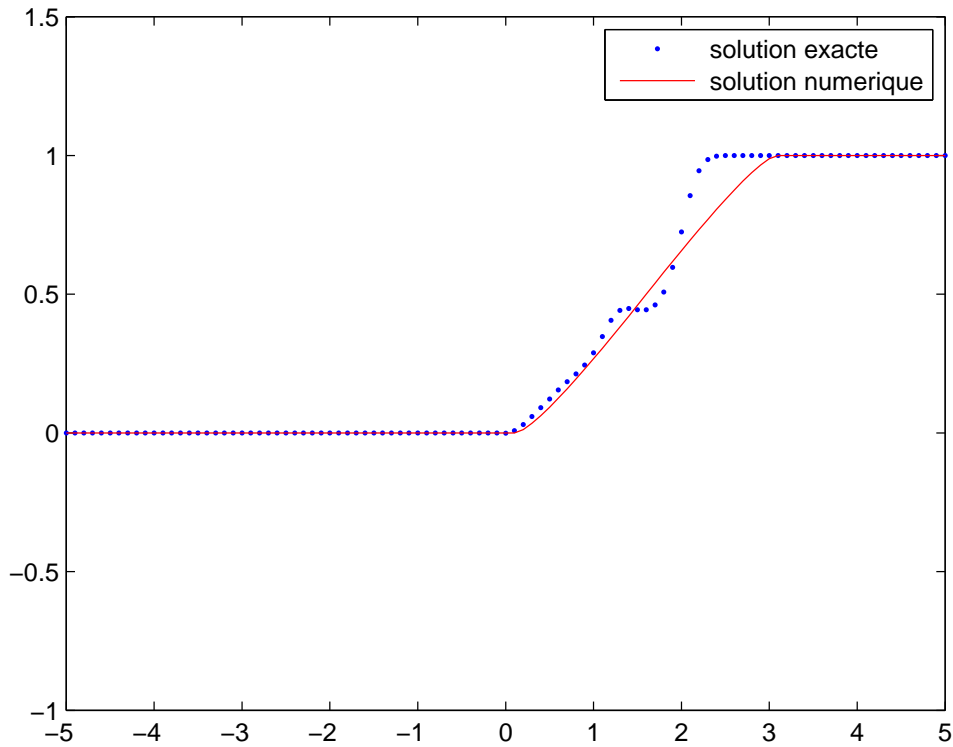


FIGURE 8.2 – Solution numérique et solution exacte pour le problème (8.4) avec le schéma (8.3)

Nous avons également testé ce schéma pour une donnée initiale non régulière : le problème de Riemann décroissant.

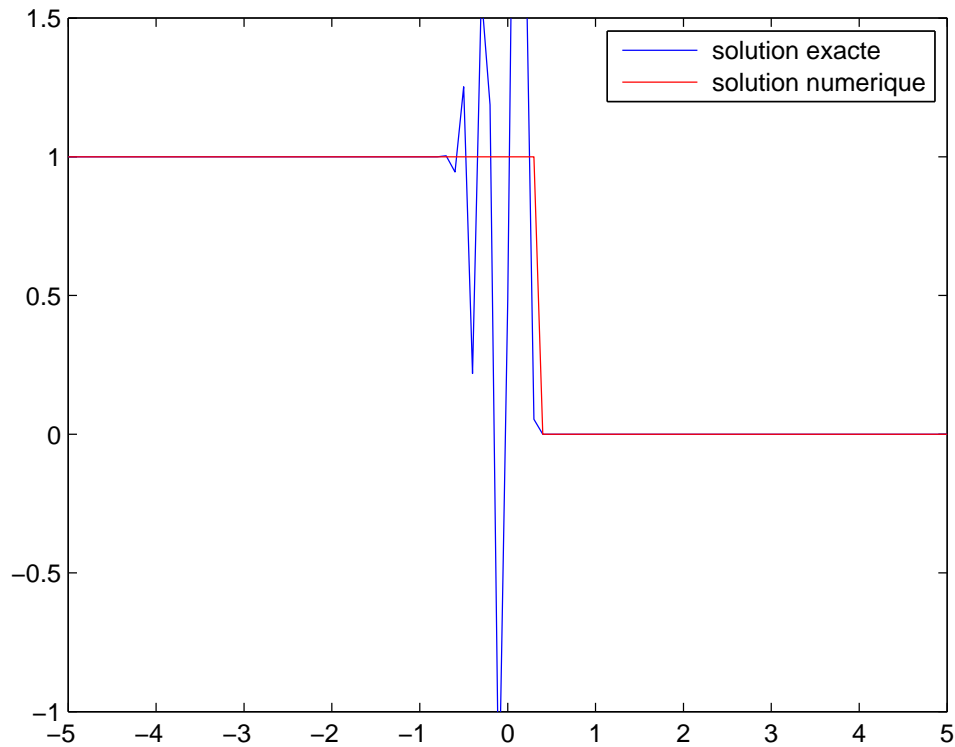


FIGURE 8.3 – Solution numérique et solution exacte pour le problème de Riemann décroissant avec le schéma (8.3)

Les résultats obtenus confirment que ce schéma n'est pas adapté pour la résolution de l'équation de Burgers. En effet, que la donnée initiale soit régulière ou non, la solution numérique ne coïncide pas du tout avec la solution analytique. Nous allons donc essayer d'appliquer un autre schéma conservatif.

8.3 Schéma de Lax-Friedrichs

Nous allons maintenant nous intéresser au schéma de Lax-Friedrichs, qui est un schéma bien adapté à la résolution de l'équation de transport.

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{1}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) = 0 \quad (8.5)$$

On a que :

$$\begin{aligned} (8.5) &\iff \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2\Delta t} \\ &\iff \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) = \frac{h^2}{2\Delta t} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

Ce dernier schéma correspond en fait à un schéma de discrétisation de l'équation de Burgers avec terme de viscosité (7.1), avec $\nu = \frac{h^2}{2\Delta t}$.

Le schéma numérique (8.5) est un schéma consistant en $O(\Delta t + h^2 + \frac{h^2}{\Delta t})$ pour l'approximation de l'équation de Burgers (1.1). Il est consistant en $O(\Delta t + h)$ pour l'approximation de l'équation de Burgers visqueuse (7.1).

Ce schéma est bien un schéma conservatif. En effet, si on note :

$$F(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2\Delta t^2} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + \frac{(u_j^n)^2}{2} \right) - \frac{h}{2\Delta t^3} (u_{j+1}^n - u_j^n), \text{ on a que}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)).$$

Calculons $F(u, u)$:

Intéressons nous maintenant à la stabilité du schéma numérique. Comme précédemment, nous allons utiliser les transformées de Fourier, et nous devons "linéariser" le schéma, en remplaçant $\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$ par u .

$$\begin{aligned} (8.5) &\iff \frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{1}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \\ &\iff u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{u\Delta t}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

D'où, $\forall \xi$:

$$\begin{aligned}\widehat{u^{n+1}} &= \frac{e^{ih\xi}\widehat{u^n} + e^{-ih\xi}\widehat{u^n}}{2} - \frac{u\Delta t}{2h}(e^{ih\xi}\widehat{u^n} - e^{-ih\xi}\widehat{u^n}) \\ &= \widehat{u^n}(\cos(ih\xi) - \frac{u\Delta t}{h} i \sin(ih\xi)) \\ &= \widehat{u^n} M(\xi)\end{aligned}$$

Pour que le schéma soit stable, on doit avoir $|M(\xi)| \leq 1$.

$$\begin{aligned}|M(\xi)| \leq 1 &\iff \cos^2(ih\xi) + \frac{u^2\Delta t^2}{h^2}\sin^2(ih\xi) \leq 1 \\ &\iff \frac{u^2\Delta t^2}{h^2} \leq 1 \\ &\iff |u|\frac{\Delta t}{h} \leq 1\end{aligned}$$

Ceci est notre condition de stabilité CFL. Encore une fois, nous remarquons qu'on obtient une condition CFL similaire à celle obtenue pour le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de transport (3.1).

RÉSULTATS NUMÉRIQUES :

Nous avons testé ce schéma numérique pour différents problèmes. On constate que pour des solutions régulières (croissantes ou décroissantes), la solution numérique est très proche de la solution exacte. Dans un premier temps, nous avons résolu le problème (3.3) avec donnée initiale décroissante et régulière. On constate que les 2 solutions sont très proches (voir figures (8.4) et (8.5)). Nous avons également appliqué ce schéma numérique à des problèmes de Riemann. Dans les 2 cas, on observe un effet régularisant. En effet, pour Riemann décroissant, le schéma numérique ne capture pas le choc, mais le lisse (voir figures (8.6) et (8.7)). Pour le problème de Riemann croissant, on a une solution exacte qui est continue mais pas dérivable. Mais la solution numérique semble plus régulière que la solution exacte (voir figure (8.8) et (8.9)). On peut expliquer cela par le fait que le schéma (8.5) est une approximation de l'équation de Burgers visqueuse (7.1) : le terme dissipatif a un effet régularisant.

Nous pouvons remarquer que plus le pas de discrétisation en espace h est petit, plus la solution numérique et la solution exacte sont proches. Afin de respecter la condition de stabilité CFL, lors de nos tests numériques, nous avons modifié le pas de temps Δt dès lors que l'on modifiait la valeur du pas h .

Grâce à Matlab nous avons calculé l'ordre de convergence de cette méthode en norme $L2$ et en norme infinie (Voir figure (8.10)). Pour se faire, nous avons calculé l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique, en norme $L2$ ou norme infinie, pour différents pas de discrétisation en espace, et nous avons tracé le logarithme de l'erreur en fonction du

logarithme du pas. Nous avons pris soin d'adapter le pas en temps en fonction du pas en espace afin de toujours respecter la condition de stabilité CFL. On obtient bien des droites, ce qui nous prouve qu'on a convergence de la solution.

Le schéma de Lax-Friedrichs est donc un schéma qui nous donne des bonnes approximations des solutions de l'équation de Burgers, mais il ne capture pas les chocs. Il existe d'autres schémas numériques aux différences finies.

Nous pouvons citer par exemple les schémas numériques suivants :

Le schéma leap-frog (saute-mouton) :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right)$$

Le schéma de Lax-Wendroff :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2h} \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) + \frac{\Delta t^2}{2h^2} \left[u_{j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_j^n)^2}{2} \right) - u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{(u_j^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} \right) \right]$$

Pour obtenir des schémas qui régularisent moins les solutions, nous n'allons plus utiliser les schémas aux différences finies mais les schémas aux volumes finis type Godunov, qui capturent mieux les chocs.

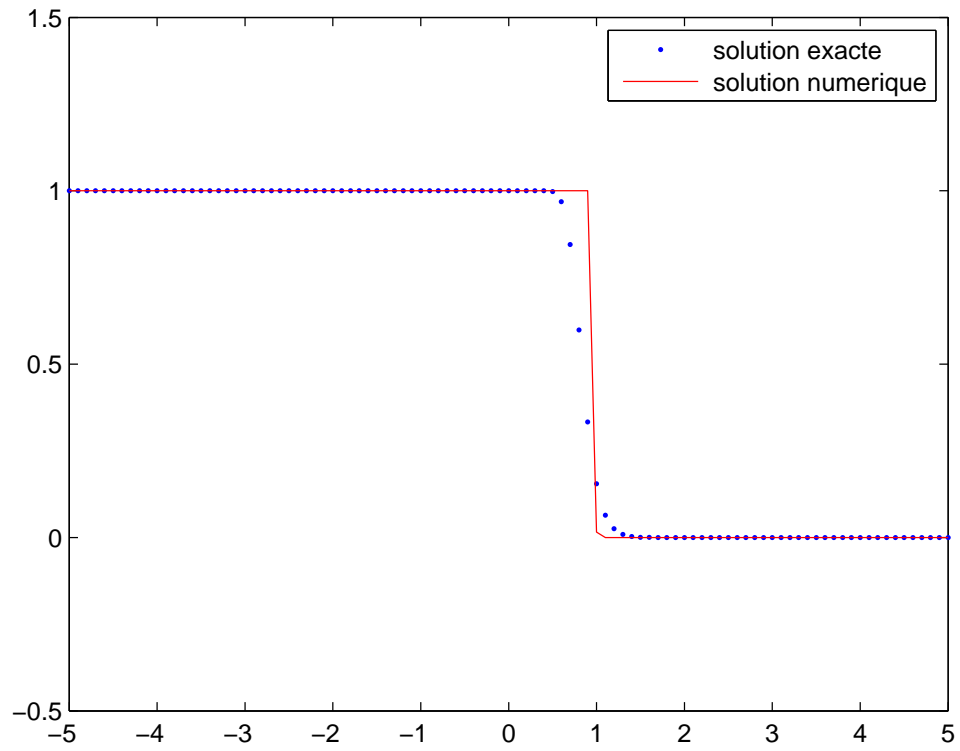


FIGURE 8.4 – Solution numérique et solution exacte pour le problème (3.3) décroissant avec le schéma de Lax-Friedrichs (8.5), pour un pas de discrétisation $h = 0.1$

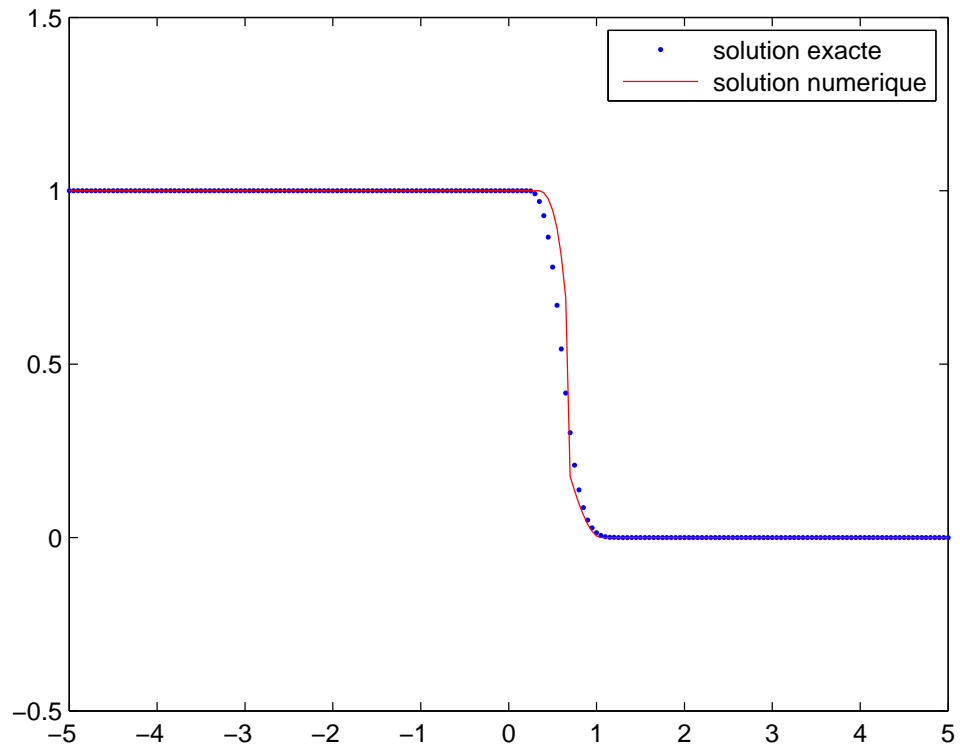


FIGURE 8.5 – Solution numérique et solution exacte pour le problème (3.3) décroissant avec le schéma de Lax-Friedrichs (8.5), pour un pas de discrétisation $h = 0.05$

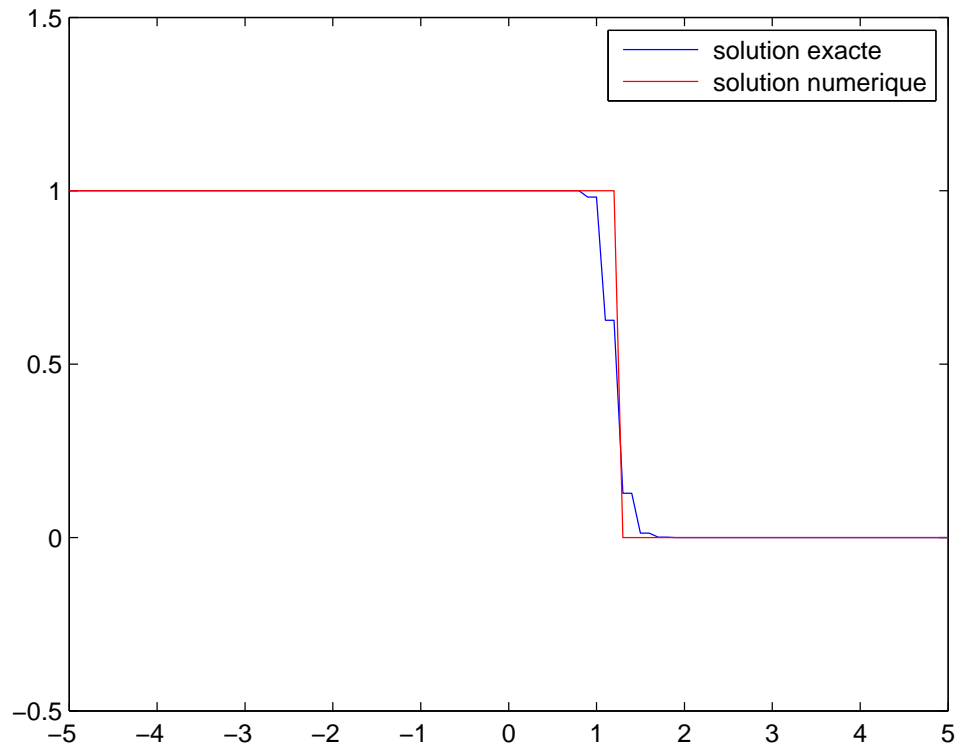


FIGURE 8.6 – Solution numérique et solution exacte pour le problème de Riemann décroissant avec le schéma de Lax-Friedrichs (8.5), pour un pas de discrétisation $h = 0.1$

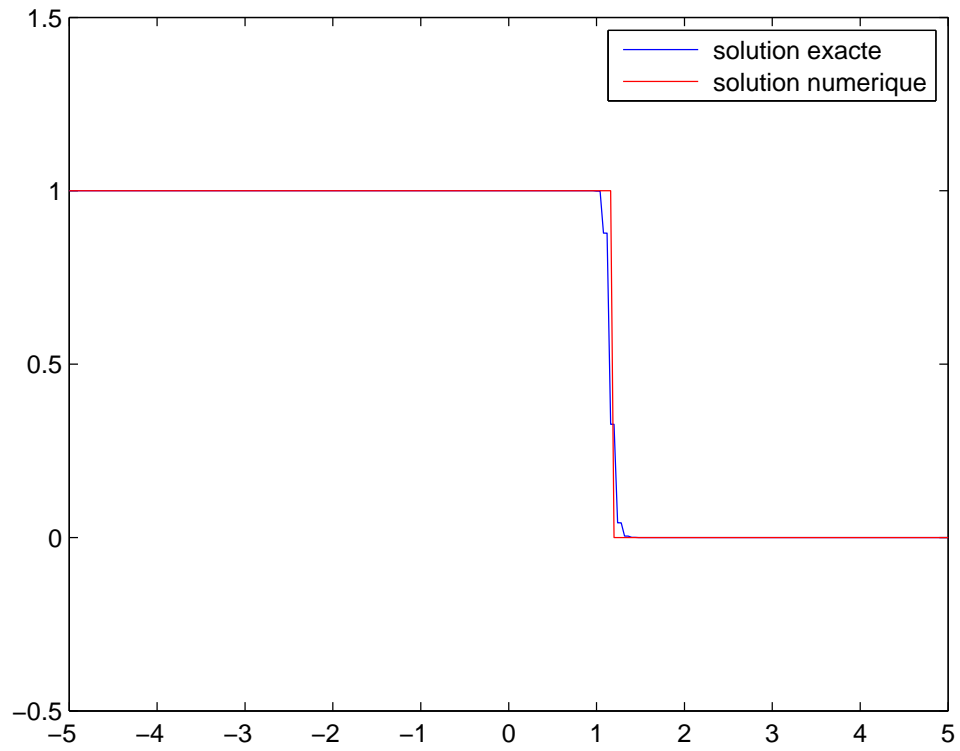


FIGURE 8.7 – Solution numérique et solution exacte pour le problème de Riemann décroissant avec le schéma de Lax-Friedrichs (8.5), pour un pas de discrétisation $h = 0.05$

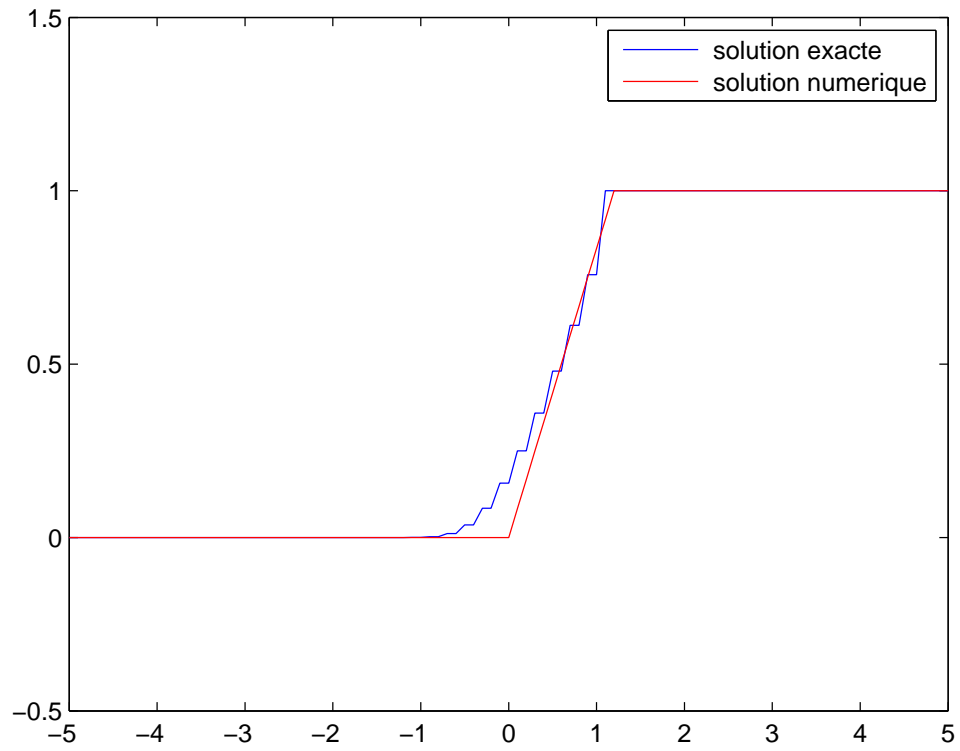


FIGURE 8.8 – Solution numérique et solution exacte pour le problème de Riemann croissant avec le schéma de Lax-Friedrichs (8.5), pour un pas de discrétisation $h = 0.1$

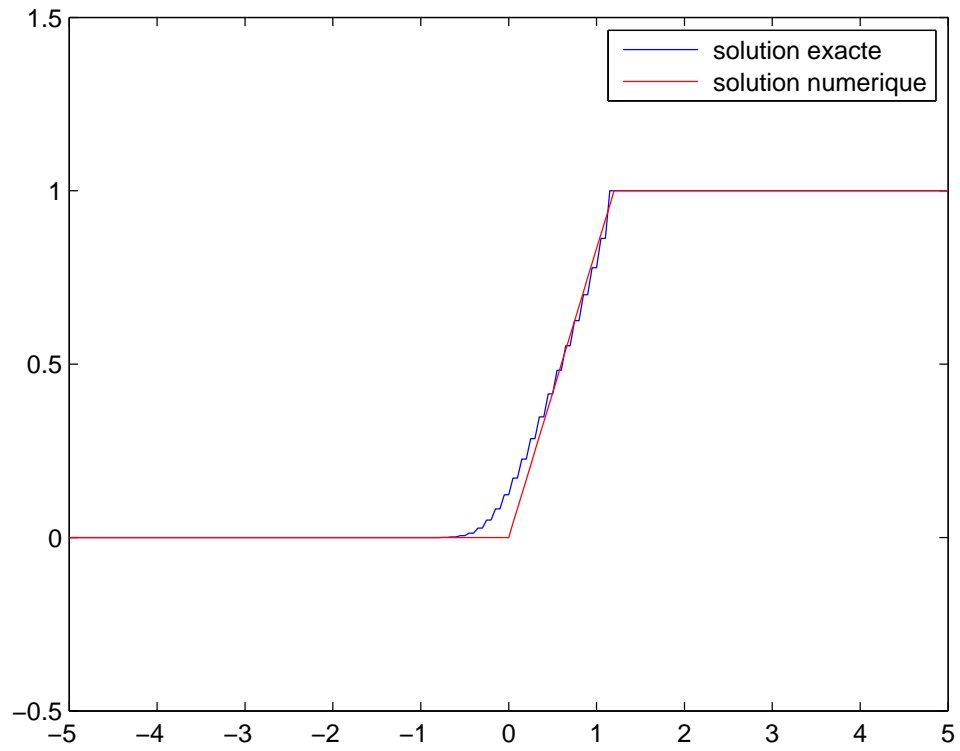


FIGURE 8.9 – Solution numérique et solution exacte pour le problème de Riemann croissant avec le schéma de Lax-Friedrichs (8.5), pour un pas de discrétisation $h = 0.05$

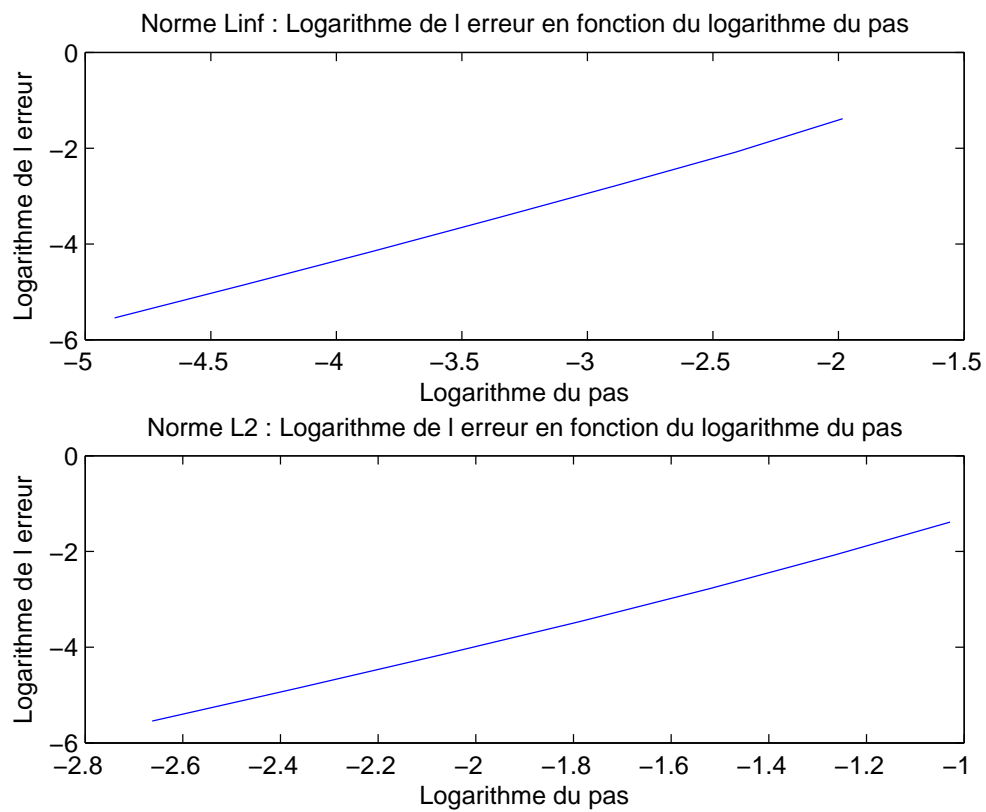


FIGURE 8.10 – Ordre de convergence de la méthode de LAX-FRIEDRICHS en norme 2 et en norme infinie

8.4 Quelques mots sur les schémas de Godunov

Jusqu'ici nous avons étudié des schémas aux différences finies. Nous allons maintenant nous intéresser aux schémas aux volumes finis qui sont des schémas conservatifs.

8.4.1 Principe des volumes finis

On considère l'équation de Burgers : $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0$.

En intégrant chaque membre de l'équation sur $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$, on obtient :

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u^2}{2}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - \frac{u^2}{2}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) dt = 0$$

Notons \bar{u}_j^n la valeur moyenne de u dans l'intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$:

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx.$$

On obtient alors :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u^2}{2}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - \frac{u^2}{2}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) dt.$$

Que l'on peut encore écrire de la façon suivante :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u^2}{2}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u^2}{2}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) dt \right).$$

Si on compare cette équation avec le schéma numérique (8.2), on voit que la fonction numérique de flux $F(u_j, u_{j+1})$ "correspond" à un flux moyen sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$:

$$F(u_j, u_{j+1}) \sim \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u^2}{2}(x_{j+1/2}, t) dt. \quad (8.6)$$

Pour l'équation de Burgers, la forme générale d'un schéma aux volumes finis est donc :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{h} (F(u_j, u_{j+1}) - F(u_{j-1}, u_j)). \quad (8.7)$$

8.4.2 Schéma de Godunov

Le schéma de Godunov (1959), est un schéma aux volumes finis (8.7) conservatif basé sur la résolution des problèmes de Riemann (on dit qu'il fait intervenir des solveurs de Riemann). Le principe consiste à approcher la solution par une fonction constante par morceaux sur

chaque intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ (voir figure (8.11)). Chaque point de discrétisation $x_{j+\frac{1}{2}}$ peut être vu comme un point de discontinuité séparant u_j^n et u_{j+1}^n . Alors, sur chaque interface de maille, nous résolvons un problème de Riemann, ce qui nous permet de calculer la valeur des intégrales entre t_n et t_{n+1} , ce qui nous donnera le flux numérique grâce à (8.6).

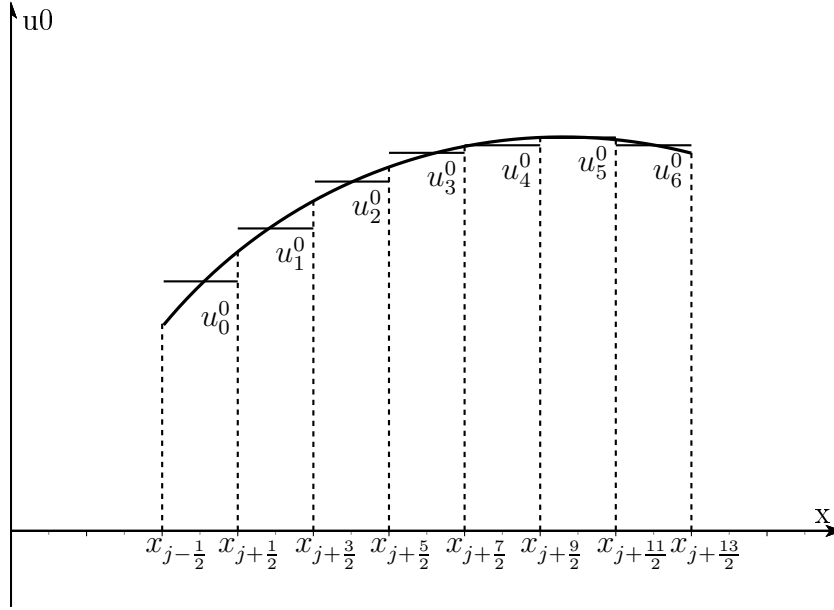


FIGURE 8.11 – Approximation constante par morceaux de la donnée initiale

Le schéma numérique de Godunov peut donc s'écrire :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} \left(\frac{R(u_{j+1}^n, u_j^n)^2}{2} + \frac{R(u_{j-1}^n, u_j^n)^2}{2} \right) \quad (8.8)$$

où $R(u_{j+1}^n, u_j^n)$ est calculée explicitement grâce à la solution entropique du problème de Riemann avec comme valeur à gauche de la discontinuité u_j^n et à droite de la discontinuité u_{j+1}^n . Il s'agit en fait de la valeur de la solution entropique du problème de Riemann au point de discontinuité.

Nous remarquons que cette résolution explicite impose une condition au pas de temps Δt . En effet si nous résolvons un problème de Riemann décroissant nous avons vu que la solution du problème dépendra de la vitesse du choc. Donc si la vitesse est importante nous devons prendre un pas de temps Δt petit pour que notre solution ne sorte pas du domaine de définition de notre problème. Dans le cas contraire nous translaterions notre solution du problème de Riemann jusque dans l'intervalle $]x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{3}{2}}[$.

Chapitre 9

Conclusion

Dans ce TER, nous avons donc vu que selon les conditions initiales, l'équation de Burgers possède une solution forte ou des solutions faibles. S'il y a une solution forte, elle peut se calculer grâce à la méthode des caractéristiques, qui nous permet également de calculer les solutions de l'équation de transport. Du fait de la non linéarité de cette équation hyperbolique, certaines solutions consistent en un choc, entropique ou non. Nous avons résolu les problèmes de Riemann, ce qui est indispensable pour pouvoir mettre en œuvre les schémas aux volumes finis de Godunov. Enfin, nous avons étudié différents schémas numériques aux différences finies afin de résoudre numériquement plusieurs problèmes de Cauchy pour l'équation de Burgers. Mais surtout, ce TER nous a permis de mettre en évidence les différences et les similitudes entre l'équation de Burgers et l'équation de transport.

L'étude de cette équation nous a permis de prendre du recul par rapport aux équations hyperboliques linéaires telles que l'équation de transport, mais aussi par rapport aux équations paraboliques comme l'équation de la chaleur. En effet, nous avons approfondi certaines notions utiles à la résolution de ces équations, comme la méthode des caractéristiques. Nous avons trouvé très intéressant le fait d'adapter nos connaissances pour ce problème plus complexe que ce que nous avons étudié avant. Nous avons par exemple adapté nos connaissances sur les approximations par différences finies, et nous avons pris de connaissance d'une autre méthode : celle des volumes finis. Nous avons trouvé enrichissant d'apprendre à maîtriser les logiciels Latex et Matlab.

Il serait intéressant de s'intéresser davantage aux méthodes Godunov qui utilisent les solveurs de Riemann, et de se demander comment mettre en œuvre ces méthodes avec Matlab. Nous aurions aimé aborder d'autres schémas numériques aux volumes finis comme celui de Engquist-Osher qui est une généralisation du schéma de Lax-Wendroff. Nous pourrions aussi étudier d'autres équations hyperboliques non linéaires comme les équations de Navier-Stokes qui sont surtout utiles en mécanique des fluides. Dans ce TER, nous avons étudié les aspects mathématiques de l'équation de Burgers, mais nous pourrions faire un lien plus important avec la physique et il serait très instructif d'appliquer nos méthodes de résolutions à des problèmes physiques plus concrets, notamment en mécanique des fluides ou en dynamique des gaz.

Enfin, nous tenons à remercier chaleureusement notre encadrant M. Emmanuel Creusé qui nous a fourni une aide très précieuse et qui a toujours été présent pour répondre à nos interrogations.

Bibliographie

- [1] J.LEVEQUE Randall, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Basel, 2nd Edition, 1992.
- [2] DI MENZA Laurent, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Ed.Cassini, 2009.
- [3] EUVRARD Daniel, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 2nd Edition, 1992.
- [4] SHEID Jean-François, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*, [En ligne], Adresse URL : <http://www.iecn.u-nancy.fr/~scheid/Enseignement/polyM2R.pdf>

Annexe A

Code Matlab Schéma non conservatif (8.1)

```
function [solution]=non_conservatif(h,dt,T,u0)
%schema issu de l'equation de burgers linearisé
% Nombre de points de discrétisation en temps :
Nt=floor(T/dt)+1;
% On se place sur [-5;5], d'où le nombre de points de discrétisation en
% espace :
Nx=floor(10/h)+1;
solution=zeros(Nt+1,Nx);
solution(1,:)=u0;                                %On remplit la matrice solution avec pour la
                                                    ligne 1 la solution
                                                    après 1 itérations en temps

temps=0;
i=1;
moy=0.00001;                                     %Variable déterminant le pas de temps grâce à la CFL
iter=1;
while (temps<T & iter<10000)
    i=i+1;
    dt=min(h/moy,dt);                            %réaffectation de la valeur du pas de temps en
                                                    fonction de la valeur
                                                    de la fonction au temps précédent

    moy=0;
    temps=dt+temps;
    solution(i,1)=solution(i-1,1)-(dt/h)*(solution(i-1,1)-
    solution(i-1,1))*solution(i-1,1);             %on prend des conditions au limites
                                                    de Dirichlet avec des fonctions
                                                    constantes sur les bords

    for j=2:Nx
        moy=max(moy,abs(solution(i-1,j)));
        solution(i,j)=solution(i-1,j)-(dt/h)*
        (solution(i-1,j)-solution(i-1,j-1))*solution(i-1,j);
    end
end
```

```
    if moy==0
        iter=10000;
    end
    iter=iter+1;
end
end
```

Annexe B

Code Matlab Schéma schéma conservatif 2eme essai(8.3)

```
function [solution]=premierschema(h,dt,T,u0)
%schema centre en espace et amont en temps
% Nombre de points de discrétisation en temps :
Nt=floor(T/dt)+1
% On se place sur [-5;5], d'où le nombre de points de discrétisation en espace :
Nx=floor(10/h)+1
solution(1,:)=u0;          %On remplit la matrice solution
                             avec pour la ligne i la solution après
                             i itérations en temps ;

temps=0;
i=1;
moy=0.00001;               %Variable déterminant le pas de temps grâce à la CFL
iter=1;
while (temps<T & iter<10000)
    i=i+1;
    dt=min(h/moy,dt);      %réaffectation de la valeur du pas de temps
                             en fonction de la valeur de la fonction
                             au temps précédent

    moy=0;
    temps=dt+temps;
    solution(i,1)=solution(i-1,1)-(dt/(2*h))*
    (solution(i-1,2)^2/2-solution(i-1,1)^2/2);
    %on prend des conditions au limites de Dirichlet
    avec des fonctions constantes sur les bords
    for j=2:Nx-1
        moy=max(moy,abs((solution(i-1,j+1)-solution(i-1,j-1))/2));
        solution(i,j)=solution(i-1,j)-(dt/(2*h))*
        (solution(i-1,j+1)^2/2-solution(i-1,j-1)^2/2);
    end
    solution(i,Nx)=solution(i-1,Nx)-(dt/(2*h))*
    (solution(i-1,Nx)/2-solution(i-1,Nx-1)^2/2);
```



```
        iter=iter+1;  
end  
end
```

Annexe C

Code Matlab Schéma LAX-FRIEDRICHS (8.5)

```
function [solution]=Lax_Friedrich(h,dt,T,u0)
%schema avec terme dissipatif et  $\mu=dt^2/h^2$ 
% Nombre de points de discrétisation en temps :
Nt=floor(T/dt)+1;
% On se place sur [-5;5], d'où le nombre de points de discrétisation en
% espace :
Nx=floor(10/h)+1;
solution(1,:)=u0;                                %On remplit la matrice
                                                    solution avec pour la ligne i la
                                                    solution après i itérations en temps ;

temps=0;
i=1;
moy=0.00001;                                     %Variable déterminant le pas de temps grâce à la CFL
iter=1;
while (temps<T & iter<10000)
    i=i+1;
    dt=min(h/moy,dt);
    moy=0;
    temps=dt+temps;

    %on prend des conditions au limites de Dirichlet
    avec des fonctions constantes sur les bords
    solution(i,1)=solution(i-1,1)-(dt/(2*h))*(solution(i-1,2)^2/2-
    solution(i-1,1)^2/2)+(solution(i-1,2)-
    2*solution(i-1,1)+solution(i-1,1))/2;
    for j=2:Nx-1
        moy=max(moy,abs((solution(i-1,j+1)-solution(i-1,j-1))/2));
        solution(i,j)=solution(i-1,j)-(dt/(2*h))*
        (solution(i-1,j+1)^2/2-solution(i-1,j-1)^2/2)+(solution(i-1,j+1)+
        solution(i-1,j-1)-2*solution(i-1,j))/2;
    end
end
```

```

solution(i,Nx)=solution(i-1,Nx)-(dt/(2*h))*
(solution(i-1,Nx)/2-solution(i-1,Nx-1)^2/2)+(solution(i-1,Nx)+
(i-1,Nx-1)-2*solution(i-1,Nx))/2;
if moy==0
    iter=50;
end
iter=iter+1;
end
end

```

Annexe D

Code Matlab Calcul des ordres de convergence pour LAX-FRIEDRICHS

```
logdx=[]; %vecteur contenant le log des différents pas en espace
err=[]; %vecteur contenant le log de l'erreur Linf pour les différents pas en espace
errl2=[] %vecteur contenant le log de l'erreur L2 pour les différents pas en espace
for k=(1/2.^(2:8))

    mat=visqueux(k,k/2,3,u0(k));
    Nx=floor(5/k)+1; %Nombre de point de discrétisation en espace sur ]-5,0[
    solex=[]; % SOLution EXact au temps final de la simulation
    Nt=floor((1/2+1/2*size(mat,1)*k)/k)+1;
    %nombre de point de discrétisation sur le
    demi intervalle ou la fonction n'est pas constante
    h=k;
    dt=k/2;
    for i=1:Nx %x E [-5,0]
        solex(i)=0;
    end

    for i=(Nx+1):(Nx+Nt-1) %x E [0 , 1/2+1/2*t]
        solex(i)=(1-sqrt(1+8*size(mat,1)*dt*(i-Nx-1)*h))^2/8/(size(mat,1)*dt)^2;
    end
    for i=(Nx+Nt):(Nx+2*Nt-2) %x E [1/2+1/2*t, 1+t]
        alpha=1+4*size(mat,1)*dt;
        beta=(alpha-sqrt(alpha^2-8*size(mat,1)*dt*
            ((i-Nx-1)*h+size(mat,1)*dt)))/4/size(mat,1)/dt;
        solex(i)=-2*beta^2+4*beta-1;
    end

    for i=(Nx+Nt+Nt-1):(size(mat,2)); %x E [1+t , 5]
        solex(i)=1;
    end
end
```

```

logdx=[logdx log(h)];
err=[err log(norm(abs(mat(size(mat,1),:)-solex),inf))];
%erreur en norme Linf
errl2=[errl2 log(norm(abs(mat(size(mat,1),:)-solex),2))];
%erreur en norme L2

end
subplot(2,1,1)
plot(err,logdx)
title('Norme Linf : Logarithme de l erreur en fonction du logarithme du pas')
xlabel('Logarithme du pas');
ylabel('Logarithme de l erreur');
subplot(2,1,2)
plot(errl2,logdx)
xlabel('Logarithme du pas');
ylabel('Logarithme de l erreur');
title('Norme L2 : Logarithme de l erreur en fonction du logarithme du pas')

```