

ÉLÉMENTS FINIS POUR LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

MEJDI AZAÏE
MICHEL DEVILL
ERNEST MUNI

Illustration de couverture

Iso-contours de la composante horizontale de la vitesse dans l'ailée de von Kármán
derrière un cylindre horizontal pour un nombre de Reynolds de 100 au temps $t = 150$ s.
Calcul réalisé avec le logiciel libre FreeFem++.

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANES

4.7 Equation de Burgers instationnaire

L'équation de Burgers a été introduite au chapitre 1 comme modèle unidimensionnel des équations de Navier-Stokes ne tenant pas compte de la pression et la résolution par éléments finis de sa forme stationnaire a été abordée au paragraphe 3.1.1.2. Nous en complétons l'étude dans le cas unidimensionnel en traitant à présent la variable temps.

L'équation de Burgers est non linéaire et combine deux phénomènes physiques en compétition : la diffusion et l'advection. Elle incorpore les échelles de temps caractéristiques des fluides visqueux, à savoir le temps inertiel $t_{\text{iner}} = L/U$ et le temps visqueux $t_{\text{vis}} = L^2/\nu$. La valeur du nombre de Reynolds $\text{Re} = t_{\text{vis}}/t_{\text{iner}}$ fixe l'importance relative de l'advection et de la diffusion. Pour des Re élevés, c'est l'advection qui l'emporte et le caractère de transport non linéaire devient dominant.

4.7.1 Formulation forte

La forme instationnaire de l'équation de Burgers en géométrie unidimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -1 < x < 1, \quad t \in]0, T]. \quad (4.100)$$

La transformation donnée par la relation

$$u = -\frac{2\nu}{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (4.101)$$

conduit à l'équation de diffusion linéaire pour la variable θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (4.102)$$

que l'on peut résoudre par la méthode standard de séparation des variables. Pour la facilité, nous imposons des conditions de Dirichlet homogènes

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad (4.103)$$

et la condition initiale $u(x, 0) = -\sin \pi x$. La solution analytique est donnée par la relation (1.54). Des solutions numériques de référence engendrées par méthodes d'ordre élevé ont été publiées par Badesant *et al.* [10].

Une quantité sensible à la précision du calcul spatio-temporel est la dérivée à l'origine du profil $|\partial u / \partial x|_{\text{max}}$ et l'instant t_{max} auquel cette valeur est atteinte. Par la solution analytique pour $\nu = 1/100\pi$, on calcule

$|\partial u / \partial x|_{\text{max}} = 152.00516$ en $t_{\text{max}} = 0.5105$. En effet, au cours du transitoire, les sommets du profil initial se déplacent aux premiers instants à vitesse unitaire (en norme) vers l'origine. Le profil se déforme et prend l'aspect d'une dent de scie : c'est une couche interne de cisaillement. Il faut noter que ce profil n'est pas discontinu comme il pourrait l'être en l'absence de viscosité. Dès lors la variable u reste de classe C^∞ et on peut estimer la pente en $x = 0$. A la longue, après cette phase advective, la viscosité fait son œuvre et le profil s'amortit pour s'annuler.

4.7.2 Formulation faible et méthode de Petrov-Galerkin

Choissant l'approximation u_N donnée par (4.3) et la fonction test v_N dans H_0^1 , on a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} v_N + \nu \frac{\partial u_N}{\partial x} \frac{\partial v_N}{\partial x} + v_N u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (4.104)$$

Dans le cadre de la méthode de Galerkin, l'application des EF Q_1 à (4.104) mène à l'équation semi-diskrète relative au nœud i du maillage telle qu'en notant $u_i = u(x_i)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{6} \frac{du_{i-1}}{dt} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} \frac{du_i}{dt} + \frac{h_i}{6} \frac{du_{i+1}}{dt} \\ & + \frac{u_{i-1} + u_i + u_{i+1}}{3} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_{i-1}} \\ & - \nu \left(\frac{u_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) u_i + \frac{u_{i+1}}{h_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

On y reconnaît la matrice de masse, celle de rigidité et la contribution du terme non linéaire sur trois points successifs par opposition à la valeur locale u_i qui serait celle d'un schéma aux DF. Cette combinaison linéaire de trois valeurs adjacentes est favorable à la précision du schéma.

Sous forme compacte il vient

$$[M] \frac{d\underline{u}(t)}{dt} + [K] \underline{u}(t) + [C(\underline{u}(t))] \underline{u}(t) = 0, \quad (4.106)$$

expression dans laquelle, pour des raisons de commodité, nous avons introduit un opérateur matriciel fictif $[C(\underline{u})]$ dont les composantes dépendent de l'inconnue $\underline{u}(t)$. L'écriture de l'opérateur est sans importance car seul intervient dans les développements qui suivent le résultat de son action sur $\underline{u}(t)$, ce qui n'est autre que la version discrète du terme advectif. Ainsi, en choisissant v_N dans un sous-espace $W_N \subset H_0^1$ construit à

l'aide des fonctions test (3.119) impliquant le paramètre de décentrement α , on obtient pour le terme non linéaire (voir à ce propos éq. (3.126)-(3.128))

$$\frac{u_{i-1} + u_i + u_{i+1}}{3} \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) - \frac{\alpha h}{4} \frac{u_{i+1}^2 - 2u_i^2 + u_{i-1}^2}{h^2}. \quad (4.107)$$

On remarquera que le terme de stabilisation de PG correspond à un terme diffusif sur la variable u^2 .

4.7.3 Méthodes d'Euler

La méthode d'Euler progressive (EP) est certainement la méthode la plus simple à mettre en œuvre. Appliquée à (4.106), elle s'écrit

$$\frac{[M]}{\Delta t} (\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) + [K] \underline{u}^n + [C(\underline{u}^n)] \underline{u}^n = 0. \quad (4.108)$$

Cette méthode étant explicite, elle est soumise à des conditions de stabilité. Dans le cas DF, celles-ci imposent

$$\frac{\nu \Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.109)$$

et

$$\frac{u_i^n \Delta t}{h} < 1, \quad \forall i \in [2, N]. \quad (4.110)$$

Cette dernière condition de type CFL exige qu'en un pas de temps, on ne parcoure pas une distance supérieure à la taille d'une maille de calcul. Elle provient de l'analyse de stabilité de von Neumann appliquée à des équations non linéaires, pour lesquelles on fait l'hypothèse du gel des coefficients. Dans la définition (4.73) du nombre de Courant, on a remplacé la vitesse de transport c par la vitesse locale u_i^n .

La pratique de la simulation numérique montre que traiter un écoulement à haut nombre de Reynolds par une méthode explicite constitue un choix discutable. En effet, lorsque Re croît, il faut utiliser un maillage plus dense et donc h diminue et en même temps, les vitesses u_i^n augmentent. La condition CFL s'avère dès lors extrêmement restrictive. De plus, la méthode étant du premier ordre temporel, elle n'est pas très précise dans le cadre de la simulation numérique directe pour en extraire des statistiques de moyennes temporelles. On peut cependant améliorer cette précision en pratiquant l'extrapolation de Richardson comme

mentionné au paragraphe 4.3.3. Ceci nécessite trois étapes. Une première étape effective l'intégration EP du temps $n \Delta t$ au temps $(n+1) \Delta t$, fournissant $\underline{u}_{\Delta t}^{n+1}$. En une deuxième étape, on intègre de $n \Delta t$ à $(n+1) \Delta t$ en deux pas de temps $\Delta t/2$, ce qui fournit $\underline{u}_{\Delta t/2}^{n+1}$. Enfin, en dernière étape, on écrit

$$\underline{u}^{n+1} = 2\underline{u}_{\Delta t/2}^{n+1} - \underline{u}_{\Delta t}^{n+1}, \quad (4.111)$$

la précision du résultat final étant $O(\Delta t^2)$.

Un autre choix de schéma d'intégration est celui de la méthode implicite ER. Si cette méthode se révèle inconditionnellement stable, il n'en demeure pas moins qu'elle nécessite une linéarisation de Newton. Nous traiterons ce point dans la suite.

4.7.4 Méthode d'éclatement

Nous nous concentrons à présent sur l'équation (4.106) avec l'intention de l'intégrer par un schéma temporel d'ordre deux. Considérons une méthode d'éclatement de l'opérateur advection-diffusion qui permette d'éviter les conditions de stabilité (4.109)-(4.110). Ceci revient à utiliser des intégrateurs temporels différents pour les diverses parties de la même équation. Comme la partie visqueuse de Burgers est linéaire, il est usuel de la traiter implicitement, ce qui ne pose aucun problème de résolution de système algébrique. Pour la partie non linéaire, un traitement explicite ne requiert aucune linéarisation, puisque son évaluation se fait par des opérations simples de manière collocationnelle (c-à-d. sur chaque nœud de maillage). Concrètement, on adopte par exemple ER2 pour la partie implicite et AB2 pour la partie explicite. On a

$$\begin{aligned} & \frac{[M]}{2\Delta t} (3\underline{u}^{n+1} - 4\underline{u}^n + \underline{u}^{n-1}) + [K] \underline{u}^{n+1} \\ & + \frac{3}{2} [C(\underline{u}^n)] \underline{u}^n - \frac{1}{2} [C(\underline{u}^{n-1})] \underline{u}^{n-1} = 0, \end{aligned} \quad (4.112)$$

avec une condition CFL à respecter pour la partie AB2. Comme la totalité de l'équation n'est pas traitée pas le même schéma temporel, cette procédure induit une erreur d'éclatement, que l'on peut estimer en calculant l'erreur de troncature temporelle du schéma global. Le schéma ER2/AB2 est précis au premier ordre dans le temps alors que chaque méthode prise individuellement est du second ordre. C'est la conséquence de l'éclatement. On peut tout aussi bien choisir un schéma CN/AB2 qui présente l'avantage d'être à un pas pour le visqueux et possède de bonnes propriétés de stabilité et de précision. Son erreur d'éclatement est alors en $O(\Delta t^2)$.

Une manière d'éviter l'erreur d'éclatement consiste à remplacer le schéma AB2 par une extrapolation temporelle du terme non linéaire qui est du second ordre, EXT2,

$$\left[C(\underline{u}^{n+1}) \right] \underline{u}^{n+1} \approx 2 \left[C(\underline{u}^n) \right] \underline{u}^n - \left[C(\underline{u}^{n-1}) \right] \underline{u}^{n-1}. \quad (4.113)$$

Cette combinaison ER2/EXT2 est très intéressante car elle est simple à implanter et elle ne donne pas lieu à une erreur d'éclatement.

Cependant, afin de préparer l'intégration instationnaire des équations de Navier-Stokes, nous allons choisir une méthode prédicteur-correcteur qui va minimiser le schéma CN/AB2; c'est la méthode PC-AB2/CN. Pour la simplicité nous raisonnons sur l'équation modèle

$$\frac{du}{dt} = u = f(u, t). \quad (4.114)$$

L'étape prédicteur AB2 donne

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1} = \frac{3}{2} \dot{u}^n - \frac{1}{2} \dot{u}^{n-1}. \quad (4.115)$$

Le correcteur CN est donné par

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (f^{n+1} + f^n) = \frac{1}{2} (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n). \quad (4.116)$$

En inversant cette relation, on en tire l'accélération au nouveau niveau de temps tel que

$$\dot{u}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) - \dot{u}^n. \quad (4.117)$$

Exprimons l'équation (4.106) au temps t^{n+1} . Il vient

$$[M] \dot{\underline{u}}^{n+1} + [K] \underline{u}^{n+1} + \left[C(\underline{u}^{n+1}) \right] \underline{u}^{n+1} = 0. \quad (4.118)$$

Prenant en compte la relation de l'accélération (4.117), on obtient

$$\frac{2}{\Delta t} [M] \underline{u}^{n+1} + [K] \underline{u}^{n+1} + \left[C(\underline{u}^{n+1}) \right] \underline{u}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t} [M] \underline{u}^n + [M] \dot{\underline{u}}^n. \quad (4.119)$$

Cette équation non linéaire est de la forme (3.129). On met en œuvre la méthode de Newton afin de la résoudre. Reprenons les définitions de la méthode itérative (3.133). L'incrément est tel que

$$\delta \underline{u}_{k+1} = \underline{u}_{k+1}^{n+1} - \underline{u}_k^{n+1}, \quad (4.120)$$

et le système itératif devient

$$[J_u] \delta \underline{u}_{k+1} = [M] \underline{f} - [A] \underline{u}_k^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.121)$$

avec les définitions

$$\underline{f} = \frac{2}{\Delta t} \dot{\underline{u}}^n + \underline{\dot{u}}^n, \quad (4.122)$$

$$[A] = \frac{2}{\Delta t} [M] + [K] + \left[C(\underline{u}_k^{n+1}) \right]. \quad (4.123)$$

La construction de la matrice jacobienne $[J_u]$ requiert un travail non négligeable comme nous pourrions le constater. C'est la raison pour laquelle on choisit de prendre $k = 1$. C'est la méthode de Newton à un pas (c.-à-d. à une itération). La relation (4.121) se réduit à l'équation

$$[J_u] (\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^p) = [M] \underline{f} - [A] \underline{u}^p. \quad (4.124)$$

Le jacobien $[J_u]$ est évalué via le prédicteur qui fournit \underline{u}^p . Son expression est

$$[J_u] = \frac{2}{\Delta t} [M] + [K] + \left[C(\underline{u}^p) \right] + \left[C'(\underline{u}^p) \right]. \quad (4.125)$$

Les deux derniers termes de (4.125) proviennent de la dérivée de A_i par rapport aux variables u_j comme défini en (3.132). Pour $[C']$, on a

$$\sum_j [C']_{ij} u_j = \sum_{k=i-1}^{i+1} u_k u_j \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_j \varphi'_k dx. \quad (4.126)$$

L'algorithme de calcul se déroule comme suit :

- 1) calcul de la vitesse prédite par (4.115),
- 2) calcul du jacobien $[J_u]$ et du second membre de (4.124),
- 3) calcul de \underline{u}^{n+1} ,
- 4) calcul de l'accélération $\dot{\underline{u}}^{n+1}$ par (4.117).

4.7.5 Résultats numériques

Soit le problème (4.100) avec $\nu = 1/10 \pi$, $E = 1000$ et $\Delta t = \nu$. Comme le montre la figure 4.18, la solution évolue doucement. Le calcul de la norme L^2 de l'erreur situe celle-ci à l'ordre de grandeur de $O(10^{-5})$. Ce problème test ne pose pas de grandes difficultés numériques.

Il en va autrement pour le cas $\nu = 1/100 \pi$. En effet, avec $E = 100$ éléments, la figure 4.19 fait apparaître des oscillations dès que la couche

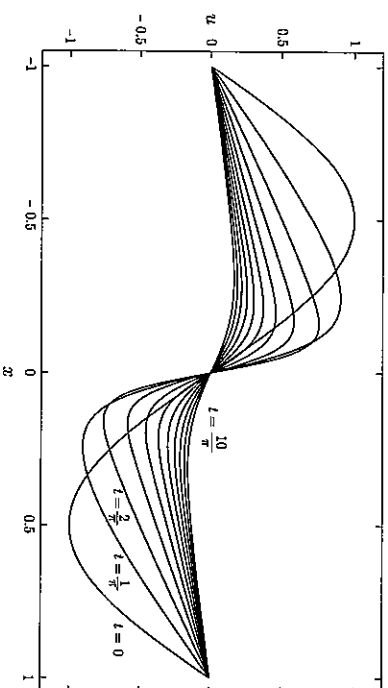


Fig. 4.18 Burgers instationnaire, $Re = 100\pi$, $t \in]0, 10/\pi]$, $E = 1000$.

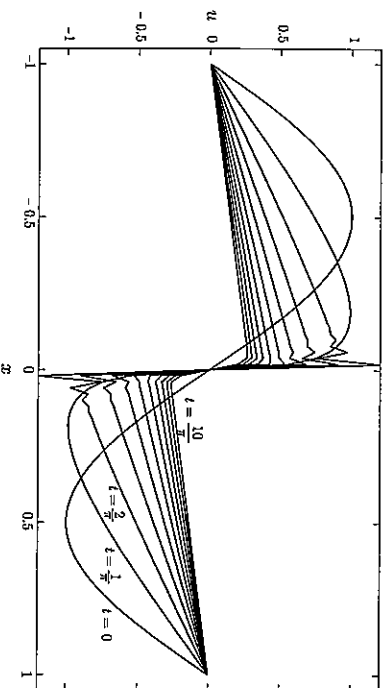


Fig. 4.19 Burgers instationnaire, $Re = 100\pi$, $t \in]0, 10/\pi]$, $E = 100$.

interne se développe. Comme le maillage est insuffisant, le nombre de Reynolds de maille local est supérieur à deux et ceci induit des instabilités de calcul. Le remède réside évidemment dans l'usage d'un maillage plus fin. Choisissons $E = 1000$. Les oscillations ont disparu comme on l'observe à la figure 4.20 et le profil en dent de scie est capté avec une bonne précision. La norme L^2 de l'erreur est $O(10^{-7})$.

Le calcul de la pente à l'origine s'effectue par différences finies centrées ou décentrées avec extrapolation à la limite. Elle vaut 155.7 au temps $t_{\max} = 0.5093$, ce qui montre que la solution numérique est très légèrement en avance (de phase) sur la solution analytique.

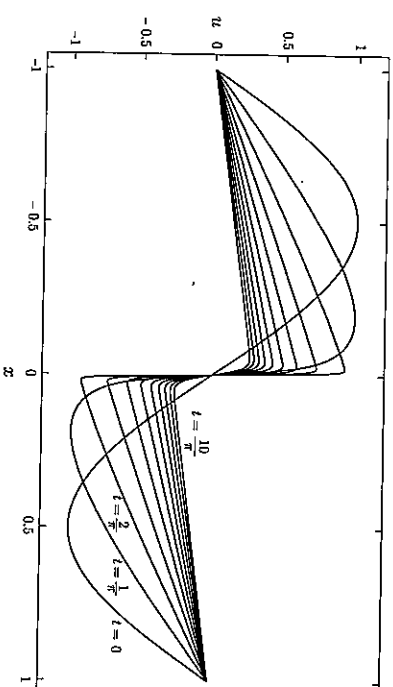


Fig. 4.20 Burgers instationnaire, $Re = 100\pi$, $t \in]0, 10/\pi]$, $E = 1000$.

4.8 Exercices

4.8.1 Soit la fonction de variable complexe

$$\zeta = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \approx e^z. \quad (4.127)$$

Chercher dans le plan de la variable complexe z le lieu des points $|\zeta| = 1$.

4.8.2 Montrer que l'extrapolation de Richardson appliquée au schéma de Crank-Nicolson fournit un schéma d'ordre quatre. Ceci implique que

$$\frac{4}{3} \left(\frac{1 + \frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} - e^x = Cx^5 + O(x^6). \quad (4.128)$$

Vérifier que la constante $C = -1/320$. Expliquer la relation qui existe entre la structure analytique de l'approximation de l'exponentielle et la mise en œuvre du schéma de calcul qui en résulte.

4.8.3 Considérer le problème différentiel

$$\frac{du}{dt} = -50u(t), \quad u(0) = 1, \quad (4.129)$$

dont la solution est $u(t) = \exp(-50t)$. On calcule la solution exacte en $T = 0.5$. On applique ensuite les méthodes EP, ER et CN pour obtenir la solution approchée au même instant à l'aide de 5, 10, 25, 50, 100,