

# Chap I

## Exemple modèle

①

On traite dans ce chapitre le cas d'un exemple modèle par une méthode d'ET afin de se donner un fil conducteur pour l'exploration de cette méthode pour les cas généraux.

L'exemple modèle, dont on donnera une interprétation physique ultérieurement, est lié à l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & x \in [0, 1], f \in L^2([0, 1]) \\ \partial_n u = 0 & x \in \{0, 1\} = \Gamma \end{cases}$$

On limite ici volontairement la régularité de  $f$  pour faire prendre conscience que la méthode des ETs ne demande pas nécessairement une régularité forte des fonctions mixtes en jeu. En particulier, avec la régularité  $f \in L^2$ ,  $u$  ne peut pas être  $C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$ , mais on peut montrer (sans hyp.) que une solution existe.

La solution s'écrit  $u(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^1 - e^{-1}} \int_0^1 \frac{e^{1-y} + e^{y-1}}{2} f(y) dy - \int_0^x \frac{e^{xy} - e^{-xy}}{2} f(y) dy$

Premre : Exo TD

L'approximation par différences finies de cette éq. (si on augmente la régularité de  $f$ ) dérivate

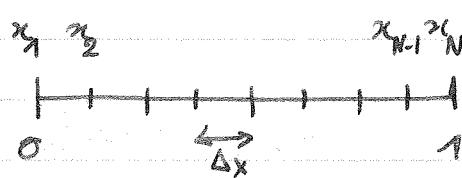
$$-\frac{f_{j+1} - 2u_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} + u_j = f_j \quad \forall j \in \{2, \dots, N-1\}$$

à laquelle on ajoute l'approximation des C.Ls  $\frac{u_1 - u_2}{\Delta x} = 0$

$$\text{et } \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x} = 0$$

On fait l'hyp. ici qu'on a discréte l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $N$  points, soit  $N-1$  sous intervalles et un pas de maillage régulier fixé à  $\Delta x$  mailles

$$(x_{j+1} - x_j = \Delta x, \forall j)$$



$$\Delta x = \frac{1-0}{N-1}$$

$$x_j = x_1 + (j-1)\Delta x, \quad j \in \{1, \dots, N\}$$

$u_j$  est une appx de  $u(x_j)$

$f_j$  est l'évaluation de  $f$  en  $x_j$

$$f_j = f(x_j)$$

Le système linéaire associé est donc

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + 1 & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + 1 & -\frac{1}{\Delta x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il suffit alors de résoudre le système linéaire par la méthode de son choix.

Autre écriture en tenant compte que l'approx des CLS conduit à  $u_1 = u_2$  et  $u_N = u_{N-1}$ ,

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & 2 & -1 & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

ou encore  $(I + R)u = f$  sous forme matricielle

La technique des différences finies est basée sur le développement de Taylor. Celle des éléments finis sur une approche complètement différente. Elle repose sur des résultats d'analyse fonctionnelle permettant de justifier que l'équation

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in \Omega \\ \partial_n u = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

équivaut à la formule intégrale (ou d't variationnelle)  
ou forme faible

$$\forall \Psi \in H^1(\Omega) = \{ \Psi : \Psi \in L^2(\Omega) \text{ et } \Psi' \in L^2(\Omega) \}$$

↑ il faut définir ce que veut dire la dérivée d'une fonction de  $L^2$

$$\int_{\Omega} (-u'' + u) \Psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \Psi(x) dx.$$

Les étapes sont les suivantes : on suppose que  $u$  à la régularité suffisante pour que l'éq aux sens :  $u \in C^{\alpha} \cap C^1(\bar{I})$  à définir? ②

① On multiplie l'éq par une fonction test  $\varphi \in C^0(\bar{I}) \cap C^1(\bar{I})$

$$-u''\varphi + u\varphi = f\varphi.$$

② On intègre sur  $I = [0, 1]$  :  $-\int_0^1 u''\varphi \, dx + \int_0^1 u\varphi \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx.$

③ On intègre par parties pour réduire au maximum l'ordre des dérivées présentes de l'éq.

$$\int_0^1 u'\varphi' \, dx + \partial_n u(0)\varphi(1) + \partial_n u(0)\varphi(0) + \int_0^1 u\varphi \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx$$

④ Trouver l'esp. fonctionnelle le plus grand possible pour  $u, \varphi$  et  $f$  pour que les intégrales soient finies : on a pour l'instant des hyp. faibles de régularité sur  $u$  et  $\varphi$ :

$$\int_0^1 u'\varphi' \, dx, \int_0^1 u\varphi \, dx, \int_0^1 f\varphi \, dx$$

Thm: Inégalité de Hölder Soit  $S \subset \mathbb{R}$  un ouvert et  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tq

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{ici on identifie } 1/\infty = 0).$$

Soit  $u \in L^p(S)$  et  $v \in L^q(S)$ , alors

$$\left| \int_S |u(x)v(x)| \, dx \right| \leq \|u\|_p \|v\|_q, \quad \|v\|_p = \left( \int_S |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

. Comme  $f \in L^2$ ,  $\int_0^1 f\varphi \, dx \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2$  et il faut donc supposer que  $\varphi \in L^2$  pour que l'intégrale fait sens soit finie.

$$\int_0^1 u\varphi \, dx \rightarrow u \in L^2, \varphi \in L^2$$

$$\int_0^1 u'\varphi' \, dx \rightarrow u' \in L^2, \varphi' \in L^2$$

Ainsi, la formule intégrale précédente a un sens si  $u \in H^1(S)$ ,  $\varphi \in H^1(S)$ .

La forme faible du pb précédent est donc :

$f$  étant donné dans  $L^2$ , trouver une fonction  $u \in H^1(S)$  tq bilinéaire théorique

$$a(u, \varphi) = f(\varphi) + \int_0^1 u'(x)\varphi'(x) \, dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x) \, dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in H^1(S)$$

On a équivalence entre solution forte et sol. équation  $C^0(S) \cap C^1(\bar{S})$

- Si  $u \in C^2(S) \cap C^1(\bar{S})$ , alors elle vérifie la forme forte

- Si on a une forme forte régulière, elle vérifie l'éq.

Quels sont les avantages de cette formulation ?

1) Régularité demandée faible

2) Approximation.

Le deuxième point est le point qui nous intéresse dans ce cours.

L'idée est de construire une suite de sous espace vectoriel de dim. finie

$$\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V = H^1(]0, 1[), \quad V_n \subset V_{n+1}, \quad \text{qui remplit } V \text{ à la limite :}$$

$$\dim V_n = N_n < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \text{C'est la méthode de Galerkin.}$$

Comme  $V_n$  est un EV de dim finie, il possède une base  $\{v_n\}_{n=1}^{N_n}$ . On note  $v_n$  un élément de  $V_n$ .

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j v_j(x), \quad \alpha_j \text{ coef.}$$

Si on injecte cette série dans la forme faible, on a

$$\sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j \left[ \int_0^1 v'_j(x) \varphi(x) dx + \int_0^1 v_j(x) \varphi'(x) dx \right] = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in V_n$$

Comme on demande que cette égalité soit vraie  $\forall \varphi \in V_n$ , elle suffit qu'elle le soit pour chaque fonction de base  $v_n$ .

Ainsi, ce problème est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j \left[ \int_0^1 v'_j(x) v_i(x) dx + \int_0^1 v_j(x) v'_i(x) dx \right] = \int_0^1 f(x) v_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N_n$$

On définit deux matrices :  $M \text{ tq } M_{ij} = \int_0^1 v_j(x) v_i(x) dx$  matrice de masse

$$R \text{ tq } R_{ij} = \int_0^1 v'_j(x) v'_i(x) dx \quad \text{matrice d'rigidité}$$

Alors, le pb précédent s'écrit

$$M\alpha + R\alpha = F \quad \text{où } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N_n} \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x) v_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f(x) v_{N_n}(x) dx \end{pmatrix}$$

On peut montrer que  $M$  et  $R$  sont inversibles et on peut donc résoudre le système linéaire. On obtient alors le vecteur des coef.

$$\text{et on construit l'approx } u_n(x) = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j v_j(x)$$

Il reste donc à trouver des esp. d'approximations  $V_h$  convenables ③

$$\rightarrow \overline{U V_h} = V$$

$\rightarrow M$  et  $R$  sont des matrices creuses

Pour le problème qui nous intéresse, on va associer la base des  $V_h$  à un maillage de  $S_2 = [0, 1]^E$ . On prend le même maillage que celui des différences finies.

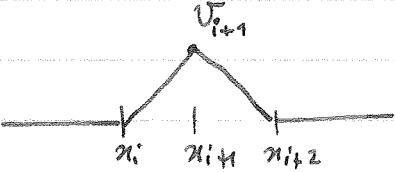


faux en dim sup!

Quelle propriété minimale demandée à  $V_h$ :  $V = H^1([0, 1]^E) \subset C^0([0, 1]^E)$   
et faut donc demander que les fonctions de  $V_h$  soient continues.  
 $\Rightarrow v_i$  sont des  $C^{0,1}$  continues.

Pour que les matrices  $M$  et  $R$  soient creuses, il faut que les intégrales  $\int_0^1 v_j' v_i' dx$  et  $\int_0^1 v_j v_i dx$  conduisent à des termes nuls. Ceci est possible dès lors que les supports sont quasi-disjoints.

On prend alors comme interpolants



incorrect ici:  
si l'on ne considère  
que ces fonctions de  
base, on trouve  
en fait que  $v_i(x) =$   
pb de Dirichlet.

Il faut rajouter  
 $v_1$  et  $v_N$



$$v_i''(x) = \begin{cases} 1/\Delta x & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -1/\Delta x & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

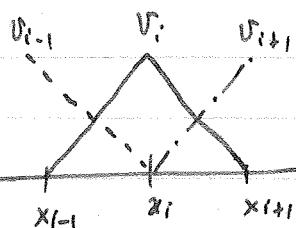
$$u(x) = \sum_{i=1}^N u_i v_i(x)$$

mais  $u_1$  et  $u_N = 0$   
(Dirichlet)

$$\Rightarrow u(x) = \sum_{i=2}^N u_i v_i(x)$$

$$\text{et } \int_0^1 v_i(x) v_j(x) dx \neq 0 \text{ si } j = i-1, i, i+1$$

$$\text{et } \int_0^1 v_i(x) v_j(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) v_j(x) dx$$



$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) v_j(x) dx = ?$$

① On divise en  $\int_{x_{i-1}}^{x_i}$  et  $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$ , puis changement de variable pour se ramener à l'intervalle  $[0, 1]$  (élément de référence)

$$\text{ex : } \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i(x) v_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})^2}{\Delta x^2} dx = \int_0^1 y^2 \Delta x dy = \frac{\Delta x}{3}$$

$y = \frac{x-x_{i-1}}{\Delta x}$

$$\text{On montre que } \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_{i-1}(x) v_i(x) dx = \frac{\Delta x}{6}$$

$$\text{et } \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i'(x) v_i'(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \text{ et } \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i'(x) v_{i-1}'(x) dx = -\frac{1}{\Delta x}.$$

On a alors plusieurs méthodes pour assembler les matrices  $M$  et  $R$ .

Assemblage global: on identifie les termes compartants de la matrice

$$I_i = [x_i, x_{i+1}] \quad M_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_{i-1}(x) v_i(x) dx; \quad M_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i^2(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i^2(x) dx; \quad M_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_{i+1}(x) v_i(x) dx$$

$$= A_{I_{i-1}}^{(i-1,i)} \quad = A_{I_{i-1}}^{(i,i)} + A_{I_i}^{(i,i)} \quad = A_{I_i}^{(i,i+1)}$$

$$= A_{I_i}^{(i,i)} \quad = A_{I_i}^{(i+1,i)}$$

Idem pour  $R$ .

Assemblage par matrices locales



$$M_e^i = \begin{bmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_{i-1}(x) v_i(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_{i-1}(x) v_{i+1}(x) dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_{i+1}(x) v_i(x) dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_{i+1}(x) v_{i+1}(x) dx \end{bmatrix}$$

Il manque les contributions de  $v_n$  et  $v_N$

→ Matrices pour Dirichlet

$$M = \begin{bmatrix} M_{e1}^1 & & & \\ & M_{e2}^2 & & \\ & & M_{e3}^3 & \\ & & & M_{e4}^4 \end{bmatrix}$$

$$M_{e1}^1 = \begin{bmatrix} A_{I_1}^{(1,1)} + A_{I_2}^{(1,2)} & A_{I_1}^{(1,2)} \\ A_{I_2}^{(1,2)} & A_{I_2}^{(2,2)} \end{bmatrix}$$

$$M_{e2}^2 = \begin{bmatrix} A_{I_2}^{(2,2)} + A_{I_3}^{(2,3)} & A_{I_2}^{(2,3)} \\ A_{I_3}^{(2,3)} & A_{I_3}^{(3,3)} \end{bmatrix}$$

$$M_{e3}^3 = \begin{bmatrix} A_{I_3}^{(3,3)} + A_{I_4}^{(3,4)} & A_{I_3}^{(3,4)} \\ A_{I_4}^{(3,4)} & A_{I_4}^{(4,4)} \end{bmatrix}$$

$$M_{e4}^4 = \begin{bmatrix} A_{I_4}^{(4,4)} & A_{I_4}^{(4,5)} \\ A_{I_4}^{(4,5)} & A_{I_4}^{(5,5)} \end{bmatrix}$$

$$M_e^t = \frac{\Delta x}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_e^t = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)

Fin 1<sup>re</sup> cours

Ainsi, les matrices  $M$  et  $R$  sont

1) Matrices pour Dirichlet

$$M = \frac{\Delta x}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } R = \frac{1}{\Delta x}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hormis les termes de bord limites, les matrices  $R$  pour le EF et les DF sont identiques

- En revanche, les matrices  $T$  sont différentes : c'est l'élément le plus marquant en 1D (ces remarques ne sont pas similaires en dimension supérieure)
- On a tendance, en 1D, à identifier les méthodes de DF et EF.

somme des  
Les deux matrices  $T$  et  $R$  est à diagonale dominante,  
et elles conduisent donc à un système linéaire inversible.

Il reste donc à traiter les termes  $\int_I f v_{i,i} dx \rightarrow$  formules de quadrature.

### Intégration numérique

L'intégration numérique consiste, comme c'est le cas pour les fonctions sur les  $\mathbb{R}$ , de discrétiser le domaine d'intégration à l'aide d'un maillage.

Dans notre cas modèle, étant en une dim. d'espace, cela revient à se ramener à une succession d'intervalles.

Il suffit ainsi de savoir intégrer des fonctions sur des intervalles de taille réduite et de les composer (on parle de formules de quadrature composées) pour obtenir une formule de quadrature globale sur le domaine d'intégration.

On distingue deux types de formules de quadrature élémentaires

- celles de type interpolation
- celles de type Gauss.

Dans tous les cas, au lieu de calculer  $I_a(f) = \int_a^b \mu(x) f(x) dx$ ,  $b > a$

on utilise la formule de quadrature à  $(n+1)$  points  $I_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k^n f(x_k)$

Type interpolation:  $\int_a^b \mu(x) f(x) dx$  remplacé par  $\int_a^b P_p(x) \mu(x) dx$

Substitution régulière de  $[a, b] \rightarrow [x_i]$

$$\int_a^b \mu(x) P_p(x) dx = \sum_{j=0}^n \left( \int_a^b \ell_j(x) \mu(x) dx \right) f(x_j)$$

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}$$

poly d'interpol. de Lagrange

$$Erreur \quad R(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b \mu(x) (f(x) - P_p(x)) dx = \int_a^b \mu(x) \frac{\prod_{k=0}^n (x - x_k)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) dx$$

$\xi = \xi(x)$

Formule exacte si:  $\forall f \in V, R(f) = 0$

- Quelques num à  $(n+1)$  pts est exacte sur  $P_n \Leftrightarrow$  elle est du type interpo. à  $(n+1)$  pts.
- Degré de précision: il vaut  $n$  si la formule est exacte pour  $x^k$ ,  $k=0, \dots, n$ , mais non exacte p/  $x^{n+1}$ .

Formules de Newton-Cotes: subdivision régulière:  $x_j = a + j \frac{h}{n}$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ .  
 $\mu(x) = 1$

$$I_n(f) = (b-a) \sum_{j=0}^n B_j^n f(x_j), \quad B_j^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b \ell_j(x) dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-j}}{j! (n-j)! n!} \int_0^1 \frac{1}{\prod_{k=0}^n (y-k)} dy$$

Rq:  $B_j^n = B_{n-j}^n \Rightarrow$  pas nécessaire de calculer tous les coeffs

(5)

## Tableau de $B_j^n$

$n$	$B_0^n$	$B_1^n$	$B_2^n$	$B_3^n$	$B_4^n$	$B_5^n$
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90	
5	19/180	25/180	5/180	50/180	25/180	19/180

→ Traپze

→ Simpson

Si  $n$  est pair, erreur est en  $\frac{1}{n^{43}}$  | degré de précision: n pair :  $n+2$   
 Si  $n$  est impair, " " " "  $\frac{1}{n^{42}}$  | n impair : n

$\Delta$  les formules de Newton-Cotes sont unstables, on ne peut donc pas les utiliser lorsque  $n$  est grand (l'interpol. n'est pas une bonne technique qd  $n \gg 1$ ).

Type fautes: Des les formules précédentes, on a fixé les  $x_j$ . On va chercher à optimiser la position des  $x_j$  sur  $[a, b]$ .  
 On considère alors dans  $I_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k^n f(x_k)$  et la fois les  $A_k^n$  et les  $x_k$  inconnus.

Thm: la formule de quadrature à  $(n+1)$  pts est exacte sur  $P_{2n+1}$ ,  $\Leftrightarrow$

1) elle est du type interp. à  $(n+1)$  pts  
 et 2) les abscisses d'interp.  $x_j$  sont tq  $v(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$  vérifie  $\int_a^b x^q v(x) \mu(x) dx = 0$   $\forall q: 0 \leq q \leq n$

Si  $\mu(x) > 0$  et continue, alors les abscisses  $x_j$  sont uniques et distincts,  
 les coefs  $A_i^n$  sont positifs et la formule est stable  
 Le d° de précision est  $2n+1$

Poly. de Legendre:  $\mu(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$

$$X_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$\int_{-1}^1 x_n \cdot x_m dx = 0 \text{ si } n \neq m, = \frac{2}{2n+1} \text{ si } n = m.$$

$$x_0 = -1; x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{2} \sqrt{3}; x_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) X_n + n X_{n-1} = 0; A_k^n = \int_{-1}^1 \frac{X_{n+1}(x)}{(x - x_k) X'_{n+1}(x_k)} dx.$$

Abrisses  $a_k$ : racines du poly de Legendre

$n$	$a_k$	$A_k$
2	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
4	$\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
	$\pm \frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{300}(322+13\sqrt{70})$
	$\pm \frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{300}(322-13\sqrt{70})$

# Chapitre 2

Équations aux dérivées partielles linéaires classiques.  
Modélisation

## I - Introduction

Soit  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière pour pouvoir dériver.

~~Alors~~ une EDP pour la fct  $u$  est une relation entre  $u$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^d$  et un nombre fini de dérivées partielles de  $u$

$$F(x_1, \dots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, D^\alpha u, \dots) = 0$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  un multi-indice  
 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u$$

L'ordre  $m \in \mathbb{N}$  d'une EDP est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

Un syst d'EDP est formé de plusieurs EDP impliquant une ou plusieurs fonctions  $u$ .

Une EDP est linéaire si  $F$  est linéaire par rapport à  $u$  et ses dérivées partielles:

$$\rightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x)$$

Si  $B(x) = 0$  : éq homogène, et  $Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u$  est un op différentiel lin.

Une EDP n'est pas donnée simplement sous cette forme. On ajoute un ensemble de contraintes.

1- Conditions initiales: si  $u = u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ , on donne

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad \text{Ou facile aussi de cauchy}$$

2- Conditions de bord ou conditions aux limites: si  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,

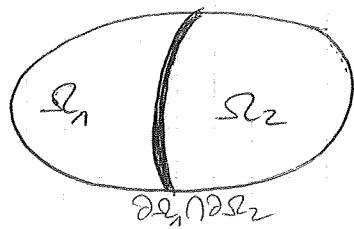
on a ~~seulement~~ trois types de contraintes usuelles:

- cond de D'irchlet où  $u$  est fixé sur  $\partial\Omega$ :  $u|_{\partial\Omega} = g$
- cond de Newmann où la dérivée normale de  $u$  est fixée:  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g$
- cond de Robin ou mixtes:  $c(x)u + \gamma(x)\frac{\partial u}{\partial n} = g$  sur  $\partial\Omega$ .

3- Conditions à l'infini:  $\Omega$  pas borné;  $u(x) \sim \phi(x)$  qd  $|x| \rightarrow \infty$  ou  $\|u\|_\infty < \infty$

4- Cond aux interfaces: si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  avec  $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  et si  $u$  est déterminé sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , alors pour pouvoir définir  $u$  sur  $\Omega$ , on a des

conditions sur  $u$ , resp  $\partial_n u$  sur  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$



### Problèmes bien posés.

Considérons une EDP sur  $\Omega$  avec des contraintes. On dit que le pb est bien posé si on a :

- existence d'une sol du pb
- unicité de cette sol
- stabilité par rapport aux données du pb

Si la sol change trop qd les données changent peu, on dit que le pb est sensible aux données.

Exemple: le pb de Cauchy pl l'éq de Laplace est un pb instable

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x,0) = n^{-k} \sin(nx) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ds } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^* \\ \text{sinus hyperbolique} \end{array}$$

On montre que  $u(x,y) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin(nx) \sinh(ny)$  est une solution du pb.

Si on a  $u_1$  sol de

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1(x,0) = \phi_0(x) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,0) = \phi_1(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{array}$$

et  $u_2$  sol de

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2(x,0) = \phi_0(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x,0) = \phi_1(x) + n^{-k} \sin(nx) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sinus hyperbolique} \end{array}$$

alors,  $u_2(x,y) = u_1(x,y) + n^{-(k+1)} \sin(nx) \sinh(ny)$

$\Rightarrow$  m si les données initiales sont proches, la sol pl y > 0 sait arbitrairement élargies

### Notion de solutions.

Soit  $u$  la sol d'un pb bien posé. De ce qu'on veut de voir, on n'a pas précisé la régularité de  $u$ , on a seulement supposé que  $u$  était suffisamment différentiable pl que les eq soient sensées.

Exemple :  $u \in C^m$  si EDP d'ordre  $m$ .

On dit alors que  $u$  est solution ~~au sens classique~~ de l'EDP.

Ds bcp de cas, un pb n'admet pas de sol régulières, l'éq des ondes avec C<sup>1</sup> non continues, les lois de conserv scalaires qui génèrent des ondes de choc. Pour que le pb soit bien posé, il faut élargir l'ensemble des  $u$ , par exemple admettre des sol non-continues. On doit transformer le pb de façon à lui garder un sens pour des fonctions non-différentiables & ou par la formulation faible du pb.

Pour une sol ~~classique~~, il y a équivalence entre formulation faible et forte.

Une sol du pb faible est appellé sol faible. Il est souvent plus facile de trouver une sol faible et de montrer a posteriori qu'elle est régulière, c'est à dire lors ~~sol~~ sol classique.

## Exemples d'EDP

En négligeant les constantes dimensionnelles physiques, on a les éq célèbres.

$$\Delta u = 0$$

Laplace

$$\Delta u - f = 0$$

Poisson

$$u_t - \Delta u = 0$$

chaleur, diffusion homogène

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

ondes

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + u = 0$$

télégraphistes

$$u_t + cu_{xx} + u_{xxx} = 0$$

KdV (vagues en eau peu profonde)

$$i\psi_t + \Delta\psi = V\psi$$

Schrödinger

$$\begin{cases} E_t = \text{rot}(H) \\ H_t = -\text{rot}(E) \end{cases}$$

Maxwell

$E$ : dipole

$$\text{div } E = \text{div } H = 0$$

$H$ : dip magnétique

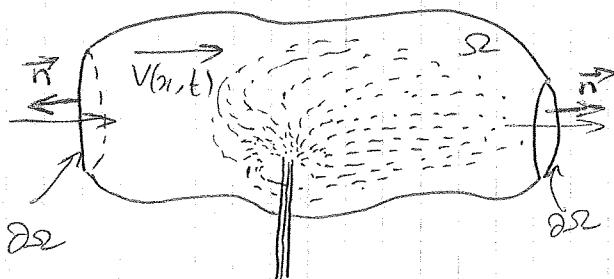
$$\begin{cases} u_t + (U \cdot \nabla) U - \Delta U = -\nabla p \\ \text{div } U = 0 \end{cases}$$

Navier Stokes

fluide incompressible visqueux.

## II - des EDP linéaires classiques

### 1 - Équation de transport



Ds  $\mathbb{R}^d$ , on considère un liquide qui évolue à la vitesse  $V(x, t)$  et ds lequel des particules polluantes sont injectées.

$u(x, t)$ : concentration des particules de polluant ds le liquide

$f(x, t)$ : source de polluants

$$U(x, t) = u(x, t) V(x, t) \text{ dip de vecteurs} \equiv \text{flux de particules de polluant}$$

On suppose que le polluant est simplement entraîné par le liquide sans diffusion ni f, V régulières

$$\text{Quantité de particules ds } \Omega \text{ à l'instant } t: m(t) = \int_{\Omega} u(x, t) dx$$

$$\text{Variation de cette qté au cours du temps: } m'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx$$

La variation de  $m$  est due à:

1) perte de polluant à travers  $\partial\Omega$

2) apparition de particules ds  $\Omega$  par  $f(x, t)$

$$\Rightarrow m'(t) = \int_{\Omega} f(x, t) dx - \int_{\partial\Omega} U(x, t) \cdot n(x) dS_x$$

Rappel: théorème de la divergence ou formule de Gauss-Green

Soit  $U$  un dip de vecteurs  $C^1$  sur  $\bar{\Omega}$ ,  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose  $\partial\Omega$  régulière, alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(U(x)) dx = \int_{\partial\Omega} U(x) \cdot n(x) dS_x, \quad n(x) \text{ vect normal unité ext à } \partial\Omega \text{ en } x \in \partial\Omega$$

$$\text{On a donc } m'(t) = \int_{\Omega} f(x, t) - \operatorname{div} U(x, t) dx \text{ et donc}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} U + \frac{\partial}{\partial t} u dx = \int_{\Omega} f(x, t) dx \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow bi d'équilibre: \frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div} U = \frac{\partial}{\partial t} u + \nabla u \cdot V + u \operatorname{div} V = f$$

Si  $V = c \in \mathbb{R}^d$  constante et si  $\phi(x)$  est la distanc init de polluants, on obtient:

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u + c \cdot \nabla u = f(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ & u(x, 0) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}} \quad \begin{array}{l} \text{Eq de transport} \\ \text{au d'advection} \end{array}$$

Résolution pour  $d=1$  : on suppose  $f=0$ , alors l'éq de transport devient

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Rappel : dérivée directionnelle : soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , alors on définit la dérivée directe de  $f$  au pt  $a \in \mathbb{R}^d$  et ds la direction  $v \in \mathbb{R}^d$  par  $\frac{df}{dv}(a) = \nabla f(a) \cdot v$ .

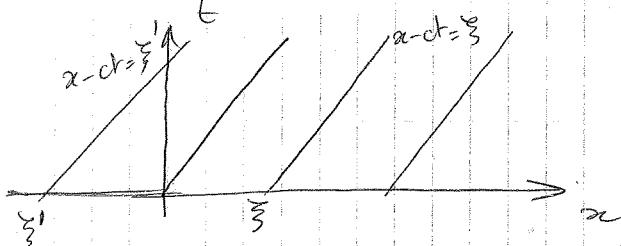
Ici, si on définit  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$ , on a  $\partial_t u + c \partial_x u = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_x u \end{pmatrix} = v \cdot \nabla u$

$\Rightarrow$  l'edp devient  $\frac{\partial u}{\partial v}(x, t) = 0 \Rightarrow u$  est constante ds la direction  $v$ !

Ou définit les droites caractéristiques du plan  $(0, x, t)$  par  $x = ct + \xi$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(ct+\xi, t)}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Dans,  $u(x, t)$  ne dépend que de  $\xi$  p/ tt  $(x, t)$  tq  $x - ct = \xi$   
 $\Rightarrow$  ce est l'eq de la lign des courbes caractéristiques.

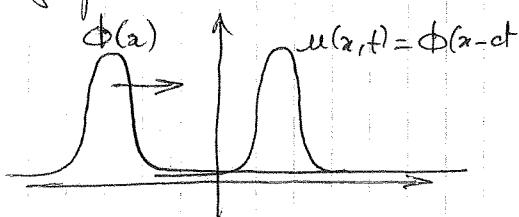


$\Rightarrow u(x, t) = F(\xi) = F(x - ct)$  est la sol  
g de l'EDP.

Il nous reste à utiliser la C.I.

$$u(x, 0) = \phi(x) = F(\xi) \Rightarrow u(x, t) = \phi(x - ct) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$\Rightarrow$  le graphe de  $u$  à l'instant  $t$  est celui de  $\phi$  translate de  $ct$



## 2- Equations de Laplace, éq de Poisson

Ou s'intéresser à l'éq lin. d'orde 2 :  $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x)$

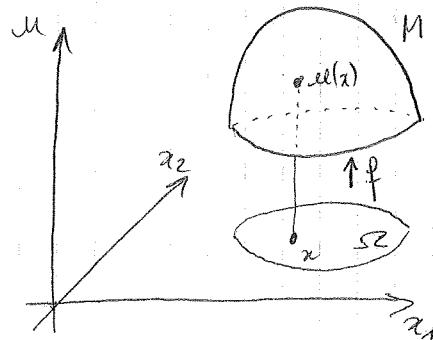
Eq de Poisson  $\rightarrow$  modélise phénomène d'équilibre  

- potentiel électrique statique
- membrane en équilibre

Si  $f=0 \rightarrow$  éq de Laplace &  $u$  est dite harmonique

## Ex de modélisation: membrane élastique

On considère une membrane élastique :  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  si on n'applique aucune force



- si on applique une force  $f$ , normale à  $\partial\Omega$ , la membrane se déforme et prend une position d'équilibre  $M$ .  
(Ex: un doigt sur la peau d'un tambour)

$$u(x) \in M : \text{position d'équilibre du pt } x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ \Rightarrow M = u(\Omega)$$

Energie potentielle de la membrane à l'équilibre :  $E(u) = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \mathcal{E} |\nabla u|^2 + f u \, dx$

$\mathcal{E}$ : tension.

Possons  $\Phi(\varepsilon) = E(u + \varepsilon \tilde{u})$  à petite déformation.

La membrane est à l'équilibre  $\Rightarrow$  énergie pot  $E(u)$  minimal  
 $\Rightarrow \Phi'(0) = 0$ .

$$0 = \Phi'(0) = \int_{\Omega} -\mathcal{E} \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} + f \tilde{u} \, dx \quad (*)$$

Formules de Green (revues plus tard) : soit  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn}(x) v(x) \, dS_x - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v(x) \, dx \quad (I)$$

$$\int_{\Omega} \Delta v(x) u(x) \, dx = \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{du}{dn}(x) v(x) - u(x) \frac{dv}{dn}(x) \right) \, dS_x \quad (II)$$

C'est l'équivalent de l'intégration par parties des PDEs si  $u, v$  2clps scalaires  $C^2(\bar{\Omega})$ , alors  $\forall 1 \leq i \leq d$ , on a :

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) \, dS_x - \int_{\Omega} u(x) \partial_i v(x) \, dx$$

$n^i$  : normale unitaire sortante.

Où a donc en appliquant Green à (\*)  $\int_{\Omega} (\mathcal{E} \Delta u + f) \tilde{u} \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathcal{E} \frac{du}{dn} \tilde{u} \, d\Gamma = 0$   
à  $\tilde{u}$  petite déform.

Cette eq nous donne deux choses : comme ceci est vrai  $\forall \tilde{u}$ ,  
en volume, on a Poisson :  $\mathcal{E} \Delta u + f = 0$  ds  $\Omega$

Sur les surfaces, on a des contraintes :  
(bord de la membrane)

- Si le bord de  $M$  est fixé (tambour) :  $u(x) = b(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$   
 $\Rightarrow$  petites déformations  $\tilde{u}$  impossibles  
 $\Rightarrow \tilde{u} = 0$  sur  $\partial\Omega$  et (\*) est vérifiée.

$\Rightarrow$  pb de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\mathcal{E}} f & \text{ds } \Omega \\ u = b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si le bord de la membrane n'est pas fixé,  $U \neq 0$  sur  $\partial\Omega \Rightarrow$  (\*\*) ne peut être vérifiée que si  $\frac{du}{dn} = 0$

$\rightarrow$  Pb de Neumann  
avec cond aux bords homogènes

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\rho} f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ces deux pb constituent pour ce cours les plus fondamentaux et toute la théorie sera développée p/ ce type de pb.

### 3<sup>e</sup>) L'équation de la chaleur

Modélisation: on s'intéresse au comportement de diffusion d'une population (cellules, insectes) ou de particules (substances chimiques) ou de la chaleur. La modélisation est exactement la même que celle effectuée pour dériver l'éq de transport. La seule modélisation vient de l'interprétation des termes et de leur formulation: on avait obtenu

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} U + \frac{\partial u}{\partial n} dn = \int_{\Omega} f(x,t) dx \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow u = -\operatorname{div} U + f \text{ sur } \partial\Omega$$

Ici, il représente soit une densité de particules, soit la température ...

$f$  : le taux de création net de particules (naissance - décès), effet de chaleur ... en volume

$U$ : flux de particules, flux de chaleur.

La modélisation est la forme de  $U$ .

Chaleur: loi de Fourier: la chaleur va des reflets chaudes vers les reflets froids à une vitesse proportionnelle à la variation de  $T$ :

$$\Rightarrow U = -k \nabla T, \quad k(x,t) \text{ conductivité de la chaleur}$$

On suppose qu'on n'ajoute pas de chaleur en volume  $\Rightarrow f = 0$

$$\Rightarrow \dot{m} = \operatorname{div}(k \nabla T) = \nabla k \cdot \nabla T + k \Delta T$$

$$\text{Si } k = \text{cte} \Rightarrow \dot{m} = k \Delta T \quad \text{éq de la chaleur}$$

Concentration de particules: loi de Fick: les particules vont des hautes densités vers les faibles densités et leur flux est proportionnel à la var. de densité

$$\Rightarrow U = D \nabla c, \quad D \text{ coef de diffusion}$$

$$\Rightarrow U = \operatorname{div}(D \nabla c) + f \quad : \text{éq de réaction-diffusion}$$

#### 4.3 L'équation des ondes

Modélisation : on reprend l'exemple de notre membrane. Cette fois, on ne cherche pas la position d'équilibre, mais le régime transitoire (oscillations) qui conduit à l'équilibre  $\Rightarrow$  c'est un phénomène temporel.

On a toujours la même expression de l'énergie potentielle (sous la force extérieure appliquée)

$$E_p = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x,t)|^2 dx,$$

mais on a aussi maintenant l'énergie cinétique  $E_c = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} u_t(x,t)^2 dx$   
 $\rho$ : densité de la membrane  
 $u_t$  représente la vitesse du déplacement (vertical) de la membrane en  $x$  et  $t$ .

$M_{tt}$  : accélération.

Principe d'Hamilton en méca : lorsque la membrane passe de l'état en  $t=0$  à l'état en  $t=T$ ,  $T > 0$ ,

alors, la fonctionnelle  $A(u) = \int_0^T E_c - E_p dt$  passe par un p<sup>1</sup> critique,  
 i.e  $A'(u) = 0$ :

$$A(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \rho u_t^2 - \rho |\nabla u|^2 dx dt$$

On pose  $\phi(\varepsilon) = A(u + \varepsilon \tilde{u})$ ,  $\tilde{u}$  perturbation admissible réelle tq  $\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}(x,T) = 0$

$$\text{On a: } 0 = \phi'(0) = \int_0^T \int_{\Omega} \rho u_t \tilde{u}_t - \rho \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} dx dt$$

$$\text{Green} \Rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (-\rho u_{tt} + \rho \Delta u) \tilde{u} dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial n} \tilde{u} ds dt = 0 \quad (*)$$

Si on choisit  $\tilde{u}$  tq  $\tilde{u}(x) = 0 \forall x \in \partial\Omega$  et  $t \in [0,T]$ , on a grâce au premier terme de (\*)

$$M_{tt} = C^2 \Delta u \quad \text{où } C = \sqrt{\frac{\rho}{\rho}} \quad \text{éq des ondes.}$$

Le second terme de (\*) impose les C.L : membrane fixée au bord :  $u(x,t) = 0$  |<sub>(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]</sub>  
 membrane libre :  $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0$

Pour compléter, il reste à imposer des C.I :  $u(x,0)$  position initiale  
 $u_t(x,0)$  vitesse

$x \in \Omega$

4

### III Classification des équations linéaires d'ordre 2

Pour  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , une équation linéaire d'ordre 2 s'écrit en tout point  $x \in \Omega$ :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) = d(x) \quad (\#)$$

où on peut supposer  $a_{ij} = a_{ji}$ .

On définit le symbole de l'équation, pour  $x \in \Omega$ , et  $\xi \in \mathbb{R}^d$  par

$$\Lambda_x(\xi) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

$\forall x \in \Omega$ ,  $\Lambda_x$  est une forme quadratique de matrice associée  $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq d}$

Définition: on dit que l'équation (#) est

- elliptique au pt  $x_*$  si  $A(x_*)$  est définie positive ou négative et a d valeurs propres réelles non nulles de même signe
- hyperbolique au pt  $x_*$  si  $A(x_*)$  est indéfinie et a d val. prop. réelles non nulles dont une de signe contraire aux d-1 autres
- parabolique au pt  $x_*$  si  $A(x_*)$  a 0 comme val. propre et d-1 val. prop. réelles non nulles de même signe

Exemples:

- 1) Laplace sur  $\mathbb{R}^d$  est elliptique en tout pt :  $\forall x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Lambda_x(\xi) = \sum_{i=1}^d \xi_i^2$$

- 2) Eq de la chaleur est parabolique en tout pt :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\Lambda_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=1}^d \xi_i^2 - \xi_{d+1}^2$$

- 3) Eq des ondes est hyperbol. en tout pt :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\Lambda_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=1}^d \xi_i^2 + \xi_{d+1}^2$$

On se souvient de ce cours maintenant qu'aux EDP elliptiques

# Chapitre 3 Théorie des pb's elliptiques linéaires et paraboliques

## I - Espaces de Sobolev

1<sup>o</sup>) Rappels sur les espaces  $L^p$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert. Soit  $V$  l'espace vectoriel des fonctions mesurables définies dans  $\Omega$ .  $\forall 1 \leq p < \infty$ , on définit la norme  $L^p$  de  $V$

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

et  $\|f\|_{\infty} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$

où le sup. essentiel est  $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf_{\substack{g \in L^{\infty} \\ g \geq f}} \sup_{x \in \Omega} g(x)$

$$L^p(\Omega) = \{f \in V; \|f\|_p < \infty\} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f \in V; \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f| < \infty\}$$

c'est le sup claque qui ne prend pas en compte les extrêmes sur des sous ensembles de mesure nulle.

Forme des fonctions  $L^p$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

1<sup>o</sup>)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , ensemble ouvert borné.  $\forall f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq C$  pour  $x \in \Omega$ , alors  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  car  $\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C |\Omega|^{1/p} < \infty$

2<sup>o</sup>)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , ouvert non borné. A priori, seules les fonctions de  $L^{\infty}(\Omega)$  sont bornées, mais pas celles de  $L^p$  qui nécessitent alors une certaine décroissance à l'infini.

3<sup>o</sup>) Les esp.  $L^p$  servent à contrôler la force des singularités.

Soit  $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $R > 0$ . Soit  $f(x) = \frac{1}{r^{\alpha}}$ ,  $r(x) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2}$ .

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} \left| \frac{1}{r^{\alpha}} \right|^p dx \right)^{1/p} \begin{cases} < \infty & \text{si } \alpha < d/p \\ = \infty & \text{si } \alpha \geq d/p \end{cases}$$

Donc, une fonction définie sur un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  appartient à  $L^p(\Omega)$   $\Leftrightarrow$  elle est essentiellement bornée et ses singularités sont plus faibles que la singularité  $r^{-d/p}$

4) Pour les fonc<sup>s</sup> sur un eus. non borné, les esp. L<sup>p</sup> contrôlent le taux de décroissance à l'infini.

On se restreint à  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$ .  $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$

$$\|f\|_{L^p}^p = \left( \int_{\mathcal{E}} \left| \frac{1}{|x|^\alpha} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \alpha > \frac{d}{p} \\ = \infty \quad \alpha \leq \frac{d}{p}.$$

Conclusion: Une fonc<sup>s</sup> sur un eus. 2 non borné  $\in L^p \Leftrightarrow$  elle décroît plus vite que  $r^{-\frac{d}{p}}$  à l'infini.

Inégalité de Hölder:  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$  ouvert,  $1 \leq p, q \leq \infty$  tq  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Soit  $u \in L^p$ ,  $v \in L^q$ , alors  $\int_{\mathcal{E}} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$

Rnikowski:  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$  ouvert,  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors,  $\forall u, v \in L^p$ ,

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Lemme:  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$  ouvert,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\forall v \in L^p(\mathcal{E})$ ,  $\exists$  une suite  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(\mathcal{E})$  tq  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v\|_p = 0$ .

Si  $\mathcal{E}$  est borné, le résultat s'étend à  $C_c^{\infty}(\mathcal{E}) = D(\mathcal{E})$ ,  $c^m(\mathcal{E}), m \geq 0$

Lemme: Dual de  $L^p(\mathcal{E})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . C'est  $L^q$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   
Pas vrai pour  $L^{\infty}$  et  $L^1$

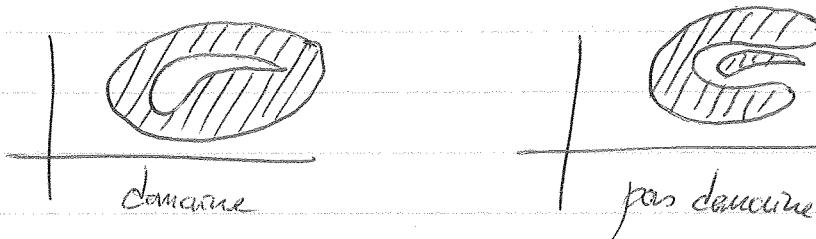
## 2. Espaces de Sobolev:

On a vu que les esp. L<sup>p</sup> contrôlent la régularité des fonctions.  
Les fonc<sup>s</sup> de L<sup>p</sup> n'admettent pas de singularités trop fortes on pour les eus. non bornés ont une décroissance assez forte à l'infini. Les esp. de Sobolev W<sup>k,p</sup> sont des sous-esp. de L<sup>p(-k)</sup> qui en plus contrôlent la régularité des dérivées.

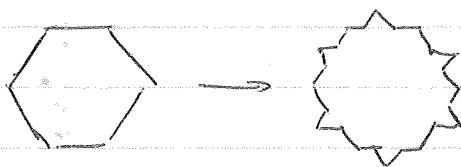
### 2.1. Frontière d'un domaine et sa régularité

Continuation de l'avis au 1<sup>er</sup> chapitre, on va étre amené à calculer des dérivées normales  $\rightarrow$  il faut une certaine régularité de  $\mathcal{E}$ .

Définition (Domaine de  $\mathbb{R}^d$ ). Un sous-ens.  $S \subset \mathbb{R}^d$  est appelé domaine si il est non vide, ouvert et connecté ( $\forall 2$  pts de  $S$ , ils peuvent être connectés par une courbe continue qui fait de  $S$ )



suite de  
Considérons un  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $S_n \subset \mathbb{R}^d$ , tq  $S_0$  est par ex. un hexagone symétrique équilatéral de longueur unité. Th,  $S_{n+1}$  est obtenu à partir de  $S_n$ . chaque face de  $S_n$  est coupée en 3 parties de longeur égale  $\epsilon_n$ ,  $e_m$  et  $e_p$ . Un triangle équilatéral de long. de coté  $\epsilon_n$  est attaché à l'ext en  $e_m$ . les points à l'intérieur sont ajoutés

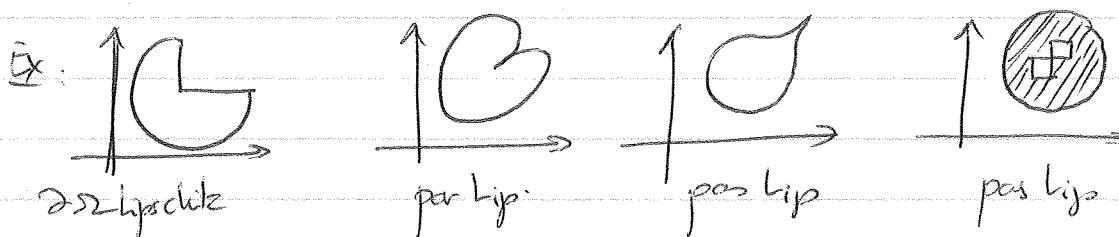


On voit  $|D_{2n}| = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3}$   
et l'ensemble limite est borné.

Cependant, le vecteur normal sortant n'est nulle part défini.

Cette situation n'existe pas pour les domaines dont la frontière  $\partial S$  est Lipschitzienne (dans  $S \subset \mathbb{R}^d$ :  $f: k$ -lipsch ( $\Rightarrow \|f(x, y)\| \leq L^2$ ,  
 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ )

Pour le bord  $\partial S$ , on dit qu'il est Lipschitz si: Il existe recouvrement fini de  $\partial S$  par des rectangles avons d-dimensionnel tq ds chaque rectangle,  $\partial S$  puisse être définie comme une flk lipsch de d-1 variables



Dans un domaine où le bord  $\partial S$  est Lipschitz, on peut tjs définir la dérivée normale.

## 2.2. Déivation faible.

Def: Un multivecto  $(x_1, \dots, x_d)$  est un vect. de nombres entiers  $\geq 0$   
 $|x| = \sum_i^d x_i$ : longeur

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^m$ . On définit la  $\alpha$ -ème dérivée partielle de  $f$  par

$$\mathcal{D}^\alpha f = \frac{\partial^{\|\alpha\|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (\mathcal{D}^\alpha f = f \text{ pour } \alpha = (0, \dots, 0))$$

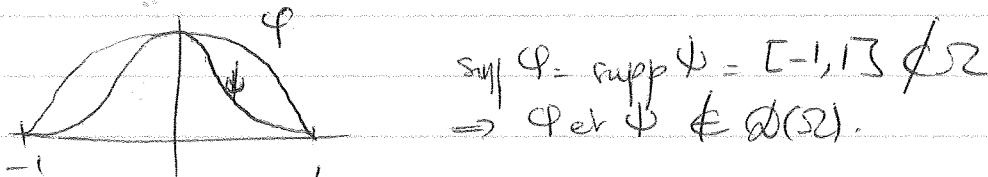
Ex

$$\mathcal{D}^\alpha f = \partial x_1 f \quad \alpha = (1, 0, \dots, 0)$$

Les esp.  $L^p$  contiennent des fonc<sup>ts</sup> n'ayant pas de dérivées ou discontinues dont les dérivées ne sont pas définies ds le sens classique  $\Rightarrow$  généraliser la notion de dérivées de telle manière qu'elle soit indép des ensembles de mesure nulle

Def :  $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \text{supp } (\varphi) \subset \Omega, \text{supp } (\varphi) \text{ compact}\}$   
 $\text{supp } (\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^d; \varphi(x) \neq 0\}$

Ex :  $\Omega = (-1, 1)$ ,  $\varphi(x) = \cos(\pi x) + 1$ ,  $\psi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$



Cependant,  $\psi$  peut être étendue par 0 ds  $\tilde{\Omega} = [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \forall \varepsilon > 0$   
et dérivée  $C^\infty \rightarrow \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$

Pas possible pour  $\varphi$  car dérivée seconde discontinue

Rq : Puisque  $\text{supp } (\varphi)$  est un domaine fermé, il ne peut pas toucher  $\partial\Omega$   
 $\Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , il y a au moins une fine cavité entre  $\partial\Omega$  et  $\text{supp } \varphi$  qui s'annule

Theor (Gauss)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , borné,  $\partial\Omega$  lipsch.  $\forall u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,

on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i ds$$

$\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_d)^T(x)$  : normale ext. sortante sur  $\partial\Omega$ .

Theor (Stokes)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  borné,  $\partial\Omega$  lipsch.  $\forall$  le champ de vecteur régulier  
 $w \in [C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^d$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot w(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) \cdot \nu(x) dx$$

Thm:  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert,  $f \in C^m(\Omega)$ ,  $\alpha$  multi indice tq  $|\alpha| \leq m$ .

$$\int_{\Omega} D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Def:  $L^p_{loc}(\Omega)$ :  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert,  $1 \leq p < \infty$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite localement  $p$ -intégrable si  $f \in L^p(K)$ ,  $\forall K \subset \Omega$  compact.

Rq:  $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq p < \infty$ .  $L^p_{loc}$  est très grand.

Ex:  $\frac{1}{x} \notin L^p(0, \infty)$ ,  $\forall p \geq 1$ , mais  $\frac{1}{x} \in L^p_{loc}(0, \infty)$   $\forall p \geq 1$ .

Def: Dérivées partielles

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert.  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $\alpha$  un multi indice. La  $\partial^\alpha f$

$D_w^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$  est dite dérivée  $\alpha$ ème partielle de  $f$  si:

$$\int_{\Omega} D_w^\alpha f \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D_w^\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cette dérivée est unique

$$\text{Ex: } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 1 - |x| \quad D_w^1 f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -1 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 f \varphi' dx &= - \left[ f \varphi \right]_{-1}^0 + \int_0^1 f \varphi' dx \\ &= - [f \varphi]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (1 - x) \varphi' dx - [f \varphi]_0^1 + \int_0^1 (-1) \varphi' dx \\ &= \int_{-1}^1 D_w^1 f \varphi' dx - f(-1)\varphi(-1) + f(1)\varphi(1) \\ &= \int_{-1}^1 D_w^1 f \varphi' dx \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0] \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{Candidate } D_w^1 f = 0 ?$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 D_w^1 f \varphi' dx = - \int_{-1}^1 f \varphi' dx = - \int_{-1}^0 f \varphi' dx - \int_0^1 f \varphi' dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi' dx - \int_0^1 \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0) - \varphi(-1) - (\varphi(1) - \varphi(0)) = 2\varphi(0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  contradiction

Les fonctions ne sont pas toutes dérивables.

## 2.3 Esp \$W^{k,p}\$ et \$H^k\$.

Def: Esp de Sobolev. \$\Omega \subset \mathbb{R}^d\$ ouvert, \$k \geq 1\$ entier et \$p \in [1, \infty]\$

On définit

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \text{ existe et est dans } L^p(\Omega) \ \forall \alpha, 1 \leq |\alpha| \leq k \}$$

\$\forall 1 \leq p < \infty\$, \$\| \cdot \|\_{k,p}\$ est définie par

$$\| f \|_{k,p} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha f \|_p^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha f \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{Pour } p = \infty, \| f \|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha f \|_\infty.$$

Pour \$p=2\$, on note \$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)\$.

$$\text{Semi-norme standard: } \| f \|_{k,2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha f \|_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha f \|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| f \|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha f \|_\infty$$

\$L^p\$: esp de Banach

\$L^2\$: esp de Hilbert (muni d'un prod scalaire)

Thm: \$W^{k,p}(\Omega)\$ est un esp de Banach. \$\forall k, p\$.

\$H^k(\Omega)\$ " " de Hilbert. muni des ps

$$(f, g)_{k,2} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha g dx - \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$$

\$\Omega \subset \mathbb{R}^d\$ borné, \$\partial\Omega\$ lipsch, \$v \in W^{k,p}\$, \$1 \leq p < \infty\$. Alors, \$\exists

$$\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \ni \lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{k,p} = 0$$

Hors le denrées jusqu'à 2.8

Rq: A) La densité des fonc régulières de \$W^{k,p}\$ n'implique pas la régularité ni même la continuité des fonc de \$W^{k,p}\$.

(Exception: \$H^1(I, a, b) \subset C^\infty(I, a, b)\$, \$H^2(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)\$, ...)

Les fonc de \$H^1\$ par exemple ne sont pas en général continues

Ex:  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$   $f(x) = \log(\log(\frac{1}{r(x)}))$ ,  $r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$   
 $\Omega = B(0, R)$ ,  $0 < R \leq e$

 $\|Df\|_2^2 = \int_{\Omega} |Df|^2 dx = -\frac{2\pi}{\log R}$  et ~~parce que~~  $\|f\|_{L^2} < \infty$   
 $\Rightarrow f \in H^1(\Omega)$  mais  $f \notin C(\bar{\Omega})$ 

## 2.4. Inégalité de Poincaré.

Un des espaces  $H^k(\Omega)$  le plus utilisé est  $H_0^k(\Omega)$   
 $H_0^k(\Omega) = \{v \in H^k(\Omega), D^\alpha v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \forall |\alpha| \leq k\}$ .

L'inégalité de Poincaré dit que la semi-norme  $\|\cdot\|_{k,2}$  est une norme pf l'esp.  $H_0^k(\Omega)$ . Le domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . De plus, cette semi-norme est équivalente à la norme  $\| \cdot \|_{H^k}$ .

Thm: Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine contenu dans le cube d-dimensionnel de côté de longueur  $C > 0$ . Alors,

$$\|u\|_{k,2} \leq C \|u\|_{k,2} \quad \forall u \in H_0^k(\Omega)$$

Thm: généralisation  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  domaine borné. Alors la semi-norme  $\|\cdot\|_{k,2}$  est une norme pf l'esp.  $H_0^k(\Omega)$ , équiv à la norme  $\|\cdot\|_{k,2}$ . Si  $\Omega$  est contenue dans un cube de côtés de long.  $C$ , alors

$$\|u\|_{k,2} \leq \|u\|_{k,2} \leq (1+C)^k \|u\|_{k,2} \quad \forall u \in H_0^k(\Omega)$$

Ceci peut être étendu à  $V = \{v \in H^k, D^\alpha v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \forall |\alpha| \leq k\}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  non borné avec équivalence

2.5 Injection des esp. de Sobolev  
de  $\|u\|_{k,2}$  de  $\|u\|_{k,2}$

Il est parfois intéressant de savoir si l'op.  $f$  d'un esp. de Banach  $U$  revient également ds un autre esp. de Banach  $V$ , i.e.

$$\|f\|_U < \infty \Rightarrow \|f\|_V < \infty$$

on envoie (et équiv) que l'op. identité  $I: U \rightarrow V$  est continue.

(On le sait déjà par ex pf  $L^p(\Omega)$ ,  $L^q(\Omega)$ ,  $C^m(\Omega)$  qd  $\Omega$  est borné (par ex)).

Def: Injection des esp. de Banach. Soient  $U$  et  $V$  deux esp. de B.tq UCV.

On dit que  $V$  est injectivement continuement ds  $V$ , et on écrit  $U \hookrightarrow V$ , si il

existe constante  $c_U, c_V$  tels que :  $\|u\|_V \leq c_V \|u\|_U$

On dit que l'injector est compact et on écrit  $U\mathcal{G}\mathcal{G}V$  si l'op. identité  $I$  est de plus compact.

Def: Continuité Hölder, sp. Hölder  $C^{k,p}(\bar{\Omega})$ .  $f \in C(\bar{\Omega})$  est continue-Hölder avec l'exposant  $\beta > 0$  si:  $\exists C_f$  tq  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq C_f \|x_1 - x_2\|^\beta, \forall x_1, x_2 \in \Omega$

L'esp  $C^{k,p}(\Omega)$  consiste en l'op des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre  $k$  sont continues Hölder d'expo  $\beta > 0$  +  $1/p \leq k$ .

Thm (Injection)  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$  borné,  $\partial\mathcal{S}$  lipschitz,  $1/p < \infty$ .

$$1) \text{ Si } kp < d, \quad W^{k,p}(\Omega) \subset \subset L^p(\Omega) \quad \text{et } q < p^*, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{d}{kp}$$

$$2) \text{ Si } kp = d, \quad W^{k,p}(\Omega) \subset \subset L^q(\Omega), \quad \text{et } q < \infty$$

$$3) \text{ Si } kp > d, \quad W^{k,p}(\Omega) \subset \subset C^{k-\lceil d/p \rceil - 1, p}(\Omega)$$

où  $\beta = \lceil d/p \rceil + 1 - d/p \approx d/p \notin \mathbb{Z}$  ou  $\beta \in [0, 1 - d/p] \cap \mathbb{Z}$ .

$$4. \text{ Si } kp > d, \quad W^{k,p}(\Omega) \subset \subset C^{k-\lceil d/p \rceil - 1, p}(\Omega)$$

où  $\beta \in [0, \lceil d/p \rceil + 1 - d/p]$ . (I.e.: partie entière).

Ex: les fonctions de  $W^{k,p}$  sont de plus en plus régulières lorsque  $kp \nearrow \infty$ .

Preuve une val. continue  $\mathcal{S} \subset \subset \mathbb{R}^d$ .

$W^{k,p} \subset C(\bar{\Omega})$  si  $kp > d$ .

$W^{k,p} \subset C^m(\bar{\Omega})$  si  $k-m > p/\beta$

Si  $kp < d$ ,  $W^{k,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ,  $p^* > p$ ,  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{d}{kp}$

Et  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ ,  $k > k'$ ,  $1/p \leq \infty$ , alors  $W^{k,p}(\Omega) \subset G W^{k',p}(\Omega)$ .

## 2.6 Traces des fonctions de $W^{k,p}$ .

$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$  un domaine borné. Comme  $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ , les fonctions sont seulement définies presque partout sur  $\bar{\Omega}$ .

Puisque la mesure de  $\partial\Omega$  est un sous ensemble de mesure nulle de  $\bar{\Omega}$ , il paraît paradoxe que les valeurs (trace) des fonctions de  $W^{k,p}$  ne puissent jamais être définies. Cependant la notion de trace est associée avec toute la classe d'équivalence des fonctions de  $W^{k,p}$  et on la définit en utilisant un représentant qui est continu jusqu'au bord.

Def : Traces des fonctions de  $W^{k,p}$

Soit  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  qui est continue jusqu'au bord  $\partial\Omega$ . On définit sa trace à la frontière  $\partial\Omega$  comme une fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $\partial\Omega$  par

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Thm : Traces de  $W^{1,p}$ . Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  borné,  $\partial\Omega$  Lipschitz, régulier.

Alors, il existe un opérateur linéaire continu  $G : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  tel que

$$1) \quad (Gf)(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \text{ si } f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$2) \quad \exists C > 0 \text{ tel que } \|Gf\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall f \in W^{1,p}(\Omega)$$

3) L'op.  $G : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  est compact

## 2.7. Formules d'intégration par parties généralisées.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine borné Lipschitz. Soit

$\nu(x) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)^T(x)$ , normale extérieure constante  
sur  $\partial\Omega$ .

Thm (Thm de Green plus formule d' $H^1$ )  
 $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i ds$$

Lemme  $\forall u \in H^1(\Omega), v \in H^2(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v(x) \cdot \nu(x) \quad x \in \partial\Omega.$$

$\forall v \in [H^1(\Omega)]^d, v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot v) u dx = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot v) v ds$$

## II - Problèmes elliptiques du second ordre

Ex modèle :  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  borné,  $\partial\Omega$  Lipschitz.

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} (b_i u) + c_i \partial_{x_i} u) + a_0 u = f$$

$n=d$ . Cette éq est elliptique si:  $A=\{a_{ij}\}$  est symétrique définie positive  $\forall x \in \Omega$ .

Simplification:  $-\nabla \cdot (a_i \nabla u) + a_0 u = f$  dans  $\Omega$ .

$$a_{ij}(x) = a_j(x) \delta_{ij}, \quad b_i(x) = c_i(x) = 0.$$

Pour assurer l'existence et unicité, on ajoute

$$a_{ii}(x) \geq c_{\min} > 0 \text{ et } a_{00}(x) \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Pour commencer, on prend des cond. de Dirichlet homogènes  $u(x)=0, x \in \partial\Omega$ .

Sol classique:  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  et on demande  $f \in C(\bar{\Omega})$ . Cependant, pour établir la solvabilité du pb, pour lequel des hypothèses plus fortes sont à demander à  $f$ .

Formulation faible

$$1) v \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} -\nabla \cdot (a_i \nabla v) + a_0 v = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$2) \text{ Formule de Green: } \int_{\Omega} a_i \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} a_0 u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \\ \text{ car } v=0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$3) \text{ Identification du plus gros opérateur par } u \text{ et } v \text{ par l'hypothèse que} \\ u, v \in H_0^1(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \quad \text{les intg. se rattachent} \\ a_1, a_0 \in L^\infty(\Omega)$$

$$\text{Forme faible: } f \in L^2(\Omega) \text{ donné, trouvez } u \in H_0^1(\Omega) \text{ t q} \\ \int_{\Omega} a_i \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On peut affaiblir  $f \in L^2$  par  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Alors,  $\int_{\Omega} f v \, dx$  doit être interprété comme un produit de dualité  $\langle f, v \rangle$  entre  $H^{-1}$  et  $H_0^1$ .

Ds le langage des formes linéaires. Soit  $V = H_0^1(\Omega)$ .  
 On définit la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$   

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\alpha_i \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v) dx$$

et la forme linéaire  $f \in V'$ ,  $f(v) = \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} fv dx$

Le problème direct: trouver  $u \in V$  tq  $a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$ .

### 15 Formes bilin., norme d'énergie et produit scalaire.

[ Chaque forme bilin  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ds un esp de B. V est associée à un unique op. lin  $A : V \rightarrow V'$  défini par  

$$(Au)(v) = \langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

- Def: Soit  $V$  un esp de Hilbert,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bil. et  $A : V \rightarrow V'$  un op. lin. relé à  $a(\cdot, \cdot)$  par la relation précédent. On dit que
- 1)  $a$  est borné si  $\exists C_a > 0$  tq  $|a(u, v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$
  - 2)  $a$  est positive si  $a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
  - 3)  $a$  est strict" si "  $> 0 \quad \forall v \neq 0 \in V$
  - 4)  $a$  est  $V$ -elliptique (circare) si  $\exists \tilde{C}_a > 0$  tq  $a(v, v) \geq \tilde{C}_a \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V$
  - 5)  $a$  est symétrique si  $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$ .

Def: Produit scal. d'énergie, norme d'énergie

Soit  $V$  un esp de H. et  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bil. sym. bornée.

Alors, elle définit un prod. scal.

$(u, v)_a = a(u, v)$  ds V appelle prod scal d'énergie  
 et induit une norme  $\|u\|_a = \sqrt{(u, u)_a}$  appelle forme d'énergie.  
 En outre, c'est une norme équivaut.

$$C_1 \|u\|_V \leq \|u\|_a \leq C_2 \|u\|_V, \quad \forall u \in V, \text{ où } C_1, C_2 \text{ sont}$$

Rq: Si  $a$  n'est pas sym., alors on n'a plus un p.s mais  
 H<sub>1/2</sub> une norme-sous-

- o Si  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , alors la symétrie est remplacée par  
 $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ .

## 2. Théorème de Lax-Rifman

Thm: Soit  $V$  un esp. de Hilbert,  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bil. continue bornée et ltf  $V'$ . Alors, il existe unique sol  $u \in V$  tel que  $a(u, v) = f(v)$ ,  $\forall v \in V$ .

Lemme: Supposons  $a_0(x) \geq c_{\min} > 0$  et  $a_0(x) \geq 0$  pp de  $S_2$ . Alors, la pof faible du pb modélisé admet une unique sol  $u \in V$ .

Preuve: Plus que  $a_0, a, \epsilon L^\infty$ ,  $\exists C_{\max} < \infty$  tq  $|a_0(x)| \leq C_{\max}$  et  $|a_0(x)| \leq C_{\max}$  pp  $\approx S_2$ . Alors

$$|a(u, v)| \leq \int_{S_2} (a_0 |Du| \cdot |Dv| + a_0 |uv|) dx \leq C_{\max} \int_{S_2} (|Du| \cdot |Dv| + |uv|) dx$$

Puisque  $Du, Dv \in L^2(S_2)^d$ , l'inégalité de Hölder donne

$$\int_{S_2} |Du| \cdot |Dv| dx \leq \left( \int_{S_2} |Du|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{S_2} |Dv|^2 dx \right)^{1/2} = \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

De manière similaire,  $\int_{S_2} |uv| dx \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$ .

$$\text{On a } \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

$$\text{et } \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow |a(u, v)| \leq 2C_{\max} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \Rightarrow a \text{ est bornée.}$$

de cté  $C_a = 2C_{\max}$ .

En utilisant le thm inégalité de Poincaré de  $H^1(\Omega)$ , avec la positivité de  $a_0$  et la croissante positivité de  $a_1$ , on obtient

$$a(v, v) = \int_{S_2} a_0 |Dv|^2 + a_1 v^2 dx \geq \int_{S_2} a_0 |Dv|^2 dx$$

$$\geq c_{\min} \int_{S_2} |Dv|^2 dx = c_{\min} \|v\|_{L^2}^2 \geq c_{\min} C_p^2 \|v\|_{L^2}^2. \forall v \in V.$$

$\Rightarrow a$  est bornée et  $V$ -elliptique.  $\Rightarrow$  d'après Lax-Rifman,  $a$  a une unique sol. faible  
(fondant vérifier  $f \in V'$ )

### 3- Conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

$$\rightarrow u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad g \in C(\partial\Omega).$$

On considère une fonction  $\tilde{g} \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C(\bar{\Gamma})$  telle que  $\tilde{g} = g$  sur  $\partial\Omega$ .  
 G s'appelle un relèvement de  $g$ .

(1)  $\tilde{g}$  n'est pas unique, mais nous venons que ceci n'est pas un pb.

On écrit  $u = \tilde{g} + U$ , alors le pb  $-\nabla \cdot (a_1 \nabla U) + a_0 U = f, \Omega$   
 $U(x) = g(x), \quad \partial\Omega$

peut être reformulé en :

$$\text{Trouver } U \in C_0^2(\Omega) \text{ tq } -\nabla \cdot [a_1 \nabla (U + \tilde{g})] + a_0 (U + \tilde{g}) = f, \Omega \\ U + \tilde{g} = g, \partial\Omega$$

ou à mandat équivalente

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla U) + a_0 U = f + \nabla \cdot (a_1 \nabla \tilde{g}) - a_0 \tilde{g}, \Omega \\ U = 0, \partial\Omega$$

À part le second membre, ce pb est similaire à ce qu'on a vu  
 précédemment. On fait donc les mêmes opérations pour trouver la forme faible

Trouver  $U \in V = H_0^1(\Omega)$  tq  $a(U, v) = \ell(v), \forall v \in V$

$$\text{avec } a(U, v) = \int_{\Omega} a_1 \nabla U \cdot \nabla v + a_0 U v \, dx, \quad v \in V$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} (f v - a_1 \nabla \tilde{g} \cdot \nabla v - a_0 \tilde{g} v) \, dx, \quad v \in V$$

On peut supposer que  $f \in L^2$  et  $\tilde{g} \in H^1$  pour que tout cela ait sens  
 (alors  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ )

On a vu que  $a$  était une forme bilin bornée,  $V$  elliptique.

$\ell(v')$  (forme linéaire continue)  $\Rightarrow$  d'après le Thm de Lax Milgram,  
 il existe  $U$  pour tout relèvement  $\tilde{g}$ .

Indépendance de la sd  $u = U + \tilde{g}$  sur le relèvement  $\tilde{g}$ .

Suffisance  $u_1 = v_1 + \tilde{g}_1 \in H^1$  et  $v_2 = v_2 + \tilde{g}_2 \in H^1$  deux sd. faites.

$u_1 - u_2 \in V = H_0^1(\Omega)$  vérifie  $a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$

En prenant  $v = u_1 - u_2$ , on a  $0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq C_1 \|u_1 - u_2\|_V^2$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_V = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ p.p } \times \Omega.$$

## 4) Caud. aux limites de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad g \in C(\partial\Omega).$$

On doit cette fois renforcer l'hyp de positivité du coef  $a_0$  en  
 $a_0(k) \geq \lambda_{\min} > 0$  ds  $\Omega$ .

Dériv de la formulation faible faite au day 1.

$$\rightarrow \text{Soit } f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega), \text{ trouv } u \in V = H^1(\Omega) \text{ dg}$$

$$\int_{\Omega} (a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v) dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \quad \forall v \in V$$

$$\Leftrightarrow a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v) dx \quad \forall u, v \in V$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \quad \forall v \in V.$$

⚠ même si  $a(u, v)$  est la m<sup>e</sup> forme bil. que ds le cas de Poincaré,  
l'espace  $V$  a maintenant changé!

.  $a(\cdot, \cdot)$  bornée bilin sur

. Coercivité : on n'obtient pas Poincaré car non nul au bord  
dsont les hyp sur  $a_0$ , et  $a_0$  qui assurent la coercivité

$$a(v, v) \geq \min(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}) \|v\|^2,$$

$\Rightarrow$  Lax Milgram : il existe une solut  $u \in V$ .

## 5) Caud. aux limites de Fourier - Robin

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f, \quad \Omega \quad f \in C(\Omega)$$

$$c_1 u + c_2 \partial_n u = g, \quad \partial\Omega \quad g \in C(\partial\Omega); \quad c_1, c_2 \in C(\partial\Omega)$$

+ hyp de positivité de  $a_0$  et  $a_1$ .  
et  $0 \leq c_2 \leq |c_1|$  sur  $\partial\Omega$ .

Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  pour construire la formulation faible

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v) dx - \int_{\partial\Omega} a_1 \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Omega} f v dx$$

La formulation faible est donc :

Soyons  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$ ,  $a_0, a_1 \in L^\infty(\Omega)$ , trouvons  $u \in V = H^1(\Omega)$  tq

$$\int_{\Omega} a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 c_1}{c_2} u v dS = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 g}{c_2} v dS$$

pour.

Soit encore trouvons  $u \in V$  tq  $a(u, v) = l(v)$  pour  $v \in V$ .

$a(\cdot, \cdot)$  est bien bornée et  $V$ -coercive  $\Rightarrow$  Lax Milgram donne l'Ex! de  $u \in V$ .

6) Combinaison de cas aux limites de Dirichlet et de Neumann.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f \quad \Omega \\ u = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N.$$

Pour chercher la forme faible, on commence par étudier la fonction  $g_0 \in C(\Gamma_D)$  à tout  $\partial\Omega$  en introduisant  $g_0 \in C(\partial\Omega)$  tq  $\bar{g}_0 = g_D$  sur  $\Gamma_D$ . La non unicité de celle-ci nous permet pas de faire.

Ensuite, on cherche un relèvement  $G \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^1(\partial\Omega)$  de  $g_0$ .  
(i.e.  $G = \bar{g}_0$  sur  $\partial\Omega$ ).

La sol u est cherchée sous la forme  $u = U + G$ .

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (a_1 \nabla (U + G)) + a_0 (U + G) = f \quad \Omega \\ U + G = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial (U + G)}{\partial n} = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right.$$

On écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (a_1 \nabla U) + a_0 U = f + \nabla \cdot (a_1 \nabla G) - a_0 G, \quad \Omega \\ U = 0 \quad \Gamma_D \\ \frac{\partial (U + G)}{\partial n} = g_N \quad \Gamma_N \end{array} \right.$$

L'op fonctionnel associé est plus :

$$V = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

⇒ formulation faible

$$\int_{\Omega} (a_1 \nabla U \cdot \nabla v + a_0 U v) dx = \int_{\Omega} (f_U - a_1 \nabla b \cdot \nabla v - a_0 b v) dx + \int_{\Gamma} \left( a_1 \underbrace{\frac{\partial(U+b)}{\partial n}}_{g_N} v \right) ds, \forall v \in V$$

⇒ Trouver  $U \in V$  tq  $a(U, v) = f(v), \forall v \in V$

$a(\cdot, \cdot)$  est bien bornée et coercive. L'inégalité de Poincaré est vérifiée dans  $V$  grâce à la C.L. nulle de  $U$  sur  $\Gamma_B$  (Voir généralisation de Poincaré)

Lax Milgram  $\Rightarrow \exists ! U \in V$  et la sol est  $u = U + a$ .

### III - Problèmes paraboliques du 2<sup>nd</sup> ordre

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , ouvert, de frontière Lip-contin. On étudie une classe d'éq. parab lin.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \text{ ds } \Omega,$$

$t$  est le temps,  $u = u(x,t)$ ,  $f = f(x,t)$ ,  $L$  opé elliptique dont les coef sont indép du temps.

On considère cette éq. sur le cylindre espace-temps  $\mathcal{Q}_T = \Omega \times (0,T)$

1 - Cond init et aux limites

Les C.L. sont du même type que celles vus précédemment : Dirichlet, Neumann, Robin au sens large  $\Rightarrow$  on les note  $(Bu)(x,t) = g(x,t)$

$$\forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

Il nous faut cependant rajouter une cond init

$$u(x,0) = u_0(x), \forall x \in \Omega.$$

Si l'on considère le pb classique, il faudrait s'assurer que  $u_0$  vérifie les C.L.

2 Forme faible.

A chaque instant  $t$ , la sol est cherché de un sens esp fermé  $V \subset H^1(\Omega)$  tq  $H_0^1(\Omega) \subset V$ . La forme de  $V$  dépend des  $a_i$  comme dans le cas elliptique.

Def:

$$L^q(0,T; W^{k,p}(\Omega)) = \{ u: (0,T) \rightarrow W^{k,p}(\Omega) \\ u \text{ mesurable et } \int_0^T \|u(t)\|_{W^{k,p}(\Omega)}^q dt < \infty \}$$

équipé de la norme

$$\|u\|_{L^q(0,T; W^{k,p}(\Omega))} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_{W^{k,p}(\Omega)}^q dt \right)^{1/q}$$

$u(t)$  signifie une fonction de  $x$  dg  $u(t): x \mapsto u(t)x$ .

Ensuite, on définit

$$C([0,T]; L^p(\Omega)) = \{ u: [0,T] \rightarrow L^p(\Omega); \|u\|_{L^p(\Omega)} \text{ est continue sur } [0,T] \}.$$

$$C([0,T]; W^{k,p}(\Omega)) = \{ u \in C([0,T]; W^{k,p}(\Omega)), \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \text{ est continue sur } [0,T] \}.$$

Une forme faible est définie comme par les pb elliptiques.

Par ex., ds cas d'cond de Dirichlet homogènes, la forme faible est :

Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $u_0 \in V = H_0^1(\Omega)$ . Trouver

$$u \in L^2(0,T; V) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)) \text{ tq}$$

$$\frac{d}{dt} (u(t), v)_{L^2} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2} + v \epsilon V, t \in (0,T)$$

$$u(0) = u_0$$

avec

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^d \left( b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} - c_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u v \right] dx.$$

### 3 - Existence et unicité.

Cela dépasse le cadre de ce cours. Cependant, on peut donner un thm permettant de s'assurer du caractère bien posé du pb.

Il faut introduire la notion de cocinéité faible de  $a(\cdot, \cdot)$  dg  $V$ .  
 $\exists c_{1,2} > 0$  tq  $a(u,u) + c_2 \|u\|_V^2 \geq c_{1,2} \|u\|_V^2 \forall u \in V$ .

Si  $a(\cdot, \cdot)$  est  $V$ -elliptique, alors, cette injéctivité est vrai avec  $c_2 = 0$ .

Par ex., ceci est vrai pour  $\Delta u = f$  avec  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Engt, la cond précédente est satisfaite pt toutes les types de pb que l'on a rencontré sur l'hyp que les coef  $a_{ij}, b_i, c_i$  et  $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ .

Thm: Soit une forme bilin à  $(\cdot, \cdot)$  continue sur  $V \times V$  et faiblement coercive. Soit  $f \in L^2(Q_T)$  et  $\forall t \in V$ , alors  $\exists! u \in L^2(0,T; V) \cap C([0,T], L^2(\Omega))$  vérifiant la forme faible précédente. En outre,

$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; V')$  et on a l'estimation

$$\max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2}^2 + C_{12} \int_0^T \|u(t)\|_{W^{1,2}}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{C_{12}} \int_0^T \|f\|_2^2.$$

Rq: La construction de la forme faible pl 6o jobs physiques du 2<sup>nd</sup> ordre est similaire (ex: eq ondes)

# Éléments finis mono dimensionnels

## I - Principe générant de l'approximation

Dans le chap précédent, nous avons obtenu le formul. variat. de plus aux limites sous la forme  $\int_a^b$

(P) Trouver  $u \in V$  Hilbert tq :  $a(u,v) = l(v), \forall v \in V$

Sous les hyp :  $a$  bilin cont si  $V$  et elliptique, l forme lin cont sur  $V$ , le thm de Lax Milgram conduit aux conclusions suivantes :

Le pb (P) admet ! sd.

On suppose maintenant que l'on connaît un sous esp.  $V_h \subset V$  de dim finie, paramétré par h et tq  $\forall v \in V$ , et un élément  $v_h \in V_h$  vérifiant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| r_h(v_h) - v_h \| = 0$$

On parle d'l'aprox intérue car  $V_h \subset V$ .  
(ou encore conforme)

Considérons alors le pb ( $P_h$ )

( $P_h$ ) Trouver  $u_h \in V_h$  tq  $a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

Ce pb admet une ! sd car  $V_h \subset V$  et donc tous les hyp pt le thm de Lax Milgram sont vérifiés.

Si  $V_h \neq V$ , alors, le pb est plus compliqué et on n'est pas assuré de l'! desd'car  $a(\cdot, \cdot)$  n'est pas nécessairement elliptique, ...

Une question importante est de savoir si  $\| u - u_h \|$  est petit!

On a le résultat suivant qui donne l'erreur d'approximation à priori :

Thm (de Céa) Soit  $V_h \subset V$ , ~~et  $V_h$  est la norme de~~

Soit  $\Gamma$  la constante de continuité de  $a$  :  $|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$   
et  $m$  celle d'ellipticité de  $a$  :  $a(v, v) \geq m \|v\|^2$ . Alors, on a :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \underbrace{\|u - v_h\|_V}_{d(u, v_h)}$$

$d(u, V_h)$ : distance de  $u$  à  $V_h$ .

Preuve: On a  $V_h \subset V$ .

On fixe  $v \in V$ ,  $a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$ . C'est donc aussi vrai pour  $V_h$ .

On a également  $a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$ .

Ainsi,  $a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$  et

~~on va démontrer que c'est~~ ~~on va démontrer que c'est~~

$$a(u - u_h, \underbrace{u_h - u + u - v_h}_{\in V_h}) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

Soit

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \xrightarrow{\text{continuité}} \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

$$m \|u - u_h\|^2 \leq \xleftarrow{\text{continuité}} \xrightarrow{\text{continuité}} \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

■

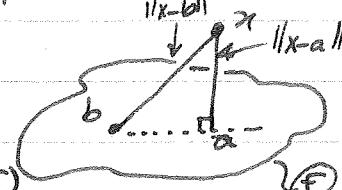
Rappel de projection: Soit  $F$  un s.e. fermé de  $H$  hilbert.

Alors,  $\forall x \in H$ ,  $\exists a \in F$  tq  $\|x - a\|_H = \inf_{b \in F} \|x - b\|_H = d(x, F)$

On note  $\text{ap}^\perp a$ :  $a = P_F x$ : proj  $\perp$  des sur  $F$

$P_F$  est caractérisé par:  $(x - P_F x, b) = 0 \quad \forall b \in F$

$$x - P_F x \perp F \quad (\text{i.e. } (P_F x, b) = (x, b) - b \text{ for all } b \in F)$$



Interprétation des thm:

$V_h$  esp. de dim finie de  $V$  Hilbert  $\Rightarrow V_h$  fermé de  $V$ .

Donc, le  $u_h$  du thm est la proj-L de  $u$  sur  $V_h$ :  $u_h = \Pi_{V_h} u$ .

En augmentant la dim de  $V_h$ , on peut espérer s'approcher aussi près que souhaité de  $u$ . Ce sera possible qd  $\frac{V_h}{V_h}$  dense de  $V$

ex:  $W$  sp de fonc continu qui sont affines par morceaux  
 $W$  dense de  $H^1(\Omega)$ .

On aura alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \Pi_{V_h} u\|_V = 0$ .

Ex. d'approx intérieure: la méthode de Galerkin

On suppose que  $V$  Hilbert est séparable. Alors, il existe  $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$  dénombrable engendrant  $V$  sans rep. dense de  $V$ .

On considère alors un sous ensemble fini  $B_m = \{w_j\}_{j=1}^m$  et le sp  $V_m$  engendré par  $B_m$ .

Soit  $\Pi_m$  l'op de proj-L de  $V$  ds  $V_m$ . On a  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Pi_m v - v\|_V = 0$  très v.

Le pb Pm est

(Pm) Trouver  $u_m \in V_m$  tq  $a(u_m, v_m) = f(v_m)$   $\forall v_m \in V_m$ .

Le pb admet ! sol do  $V_m$  qui part s'écrire sous la forme de syst lin:  $\sum_{j=1, m} A_{ij} w_j = l_i \quad \forall i = 1, m$ ,  $A_{ij} = a(w_j, w_i)$   
 $l_i = f(w_i)$

II - Éléments fins  $P_1$

1 - Pb de Dirichlet homogène

On a vu:  $\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \rightarrow$

Trouve  $u \in H_0^1([a, b])$  tq  
 $\int_a^b u' v' + u v dx = \int_a^b f v dx \quad \forall v \in H_0^1([a, b])$

Discrétisation de  $[a, b]$  en  $N$  sous intervalles ou éléments  $T_i = [x_{i-1}, x_i]$ .  
 $V_0, h$ : esp. des fonc. continues, affines par morceaux (sur chaque  $T_i$ ) et nulles aux extrémités  $a$  et  $b$

$$\frac{x_0 - x_1}{2} + \frac{x_N - x_{N-1}}{2}$$

$V_0, h$  est de dim  $N-1$  et engendré par la base de Lagrange de  $V_0, h$ , formée des  $N-1$  fonc.  $w_i \in V_0, h$  définies par les  $N-1$  conditions

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i=1, \dots, N-1 \quad \forall j=1, \dots, N-1$$

$$\text{Alors } v_h \in V_0, h, \quad v_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i(x), \quad v_i = v_h(x_i).$$

Le pblo approché s'écrit alors

Trouver  $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}$  tq  $\forall i=1, \dots, N-1$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left[ \int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx + \int_a^b a(x) w'_j(x) w'_i(x) dx \right] v_j = \int_a^b f(x) w'_i(x) dx$$

$A_{ij} = K_{ij} + M_{ij}$  : raideur  
+ masse

Le calcul des  $A_{ij}$  se fait par assemblage des contributions des éléments  $T_i$ .

$$K_{ij} = \int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} w'_j(x) w'_i(x) dx$$

Si on considère l'élément  $T_i = [x_{i-1}, x_i]$ , deux fonc. de box cohabitent:  $w_i$  et  $w_{i+1}$   
 $\Rightarrow$  l'élément  $T_i$  produira dans une contribution nulle aux coeff  $K_{i,i+1}$ ,  $K_{i+1,i}$ ,  $M_{i,i}$  et  $M_{i+1,i+1}$ .

Les contrib. élémentaires de  $T_i$  peuvent être rassemblées sous la forme d'une matrice élémentaire  $2 \times 2$

$$\text{Elem } K_i = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} \\ e_{2,1} & e_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$e_{1,1}^i = \int_{T_i} w'_{i-1}(x)^2 dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}}; \quad e_{1,2}^i = e_{2,1}^i = \int_{T_i} w'_{i-1}(x) w'_i(x) dx = -\frac{1}{x_i - x_{i-1}}$$

$$e_{2,2}^i = \int_{T_i} w'_i(x)^2 dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow \text{Elem } K_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réduire à l'élément de matrice : Elec  $\Pi_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul des coefficients du 2<sup>nd</sup> membre

$$F_i = \int_a^b f(x) w_i(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} f(x) w_i(x) dx$$

1. Si  $f$  est donné analytique, on fait des calculs exacts des intégrales.

2. Si  $f$  n'est connue qu'aux  $x_i$ ,  $i=0..N$ , on réécrit  $f$  dans le sens de  $w_i$ .

$$f(x) = \sum_{j=0}^N f_j w_j(x)$$

$\Rightarrow$  on se ramène au calcul des intégrales  $\int_{T_k} w_j(x) w_i(x) dx$

Cas 1 : formules de quadrature :

$$\text{Trapèze: } \int_{T_k} F(x) dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (F(x_{k-1}) + F(x_k))$$

$$\text{Simpson: } \dots = \frac{x_k - x_{k-1}}{6} (F(x_{k-2}) + 4F(x_{k-1}) + F(x_k))$$

Cas 2

Pour  $w_i \in P_1$  Trapèze :  $F_i = h f_i$  ( $h$  constant)

$$\text{Simpson: } f_i = \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

## 2 - Dirichlet non homogène

$$-u'' + \alpha u = f \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{Il faut faire un relèvement}$$

$$u(a) = u_0, \quad u(b) = u_b \quad u = \tilde{u} + u_0, \quad \text{où } u_0 \text{ est une fct auxiliaire}$$

$$\text{tg } u_0(a) = u_0, \quad u_0(b) = u_b$$

On se ramène donc au pb de Dirichlet homogène

Trouver  $\tilde{u} \in H_0^1(a, b)$  tq

$$\int_a^b \tilde{u}' v' + \alpha(x) \tilde{u} v dx = \int_a^b f(x) v dx - \int_a^b u_0'(x) v'(x) dx$$

$$- \int_a^b \alpha(x) u_0(x) v(x) dx; \quad \forall v \in H_0^1(a, b)$$

$\Rightarrow$  Pb approché de  $V_0, h$

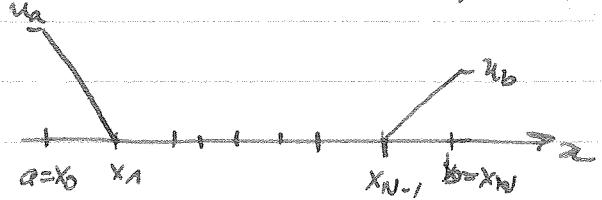
Trouver  $u_h \in V_0, h$  tq

$$\int_a^b \tilde{u}_h' v_h' + \alpha(x) \tilde{u}_h v_h dx = \int_a^b f(x) v_h dx - \int_a^b u_0'(x) v_h'(x) dx$$

$$- \int_a^b \alpha(x) u_0(x) v_h(x) dx; \quad \forall v_h \in V_0, h$$

Il reste donc à trouver le choix pratique de  $\text{Mo}(k)$ . On prend habituellement pour  $\text{Mo}$  la  $\text{f}^{\text{c}}\text{t}^{\text{o}}$  de  $V_k$  des  $\text{f}^{\text{c}}\text{t}^{\text{o}}$  cartes affines pour les éléments

$$M_0 = U_a W_0 + U_b W_N$$



l'3! d'une sd se traite immédiatement (comme précédemt).

D'un pt de vue pratique, le seul mod à apporter au syst par rapport à Drich how. concerne les seuls coefficients 1 et N-1 du second membre.

### 3 - Problème de Neumann

(FV) Trouver  $u \in H^1([a, b])$  tq  $\int_a^b u'v' + \alpha uv = \int_a^b f v dx + 2v(b) - 2v(a), \forall v \in H^1$

Le pb approché s'écrit de l'esp.  $V_3$ , des  $f_{-1}^{18}$  continu affiné par  $\text{élév. } T_1$ .

Sans restriction des Sarts, l'esp  $V_k$  est de dim  $N+1$ .

Il est enfoncé par les  $Nr^l$   $f^{ll}$  affûts par morceaux  $w_i$ ,  $i=0, \dots, N$

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i=0, \dots, N, \quad \forall j=0, \dots, N. \quad x_0=a, x_N=b.$$

Le pb affache' est Trouver  $u_0, u_1, \dots, u_N$  tq  $\forall i = 0, \dots, N$

$$\sum_{j=0}^N \left( \int_a^b w_j' w_i' + \alpha(x) w_j w_i dx \right) \varphi_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx + \int_a^b w_i(b) - \int_a^b w_i(a)$$

$$\text{On pack } F_i = \int_a^b f(x) w_i(x) dx , \quad i=1,..,N-1$$

$$F_0 = \int_a^b f(x) w_0(x) dx - f_0$$

$$F_N = \int_{-\infty}^b f(x) w_N(x) dx + V$$

$$A_{ij} = \int_a^b w_j' V w_j + \alpha w_j w_i dx \quad i,j=0,\dots,N$$

$\Rightarrow$  syst lin  $Au = F$ .

## 4. - Appr des pb de Fourier

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f & x \in ]a,b[ \\ u'(a) = k_a(u(a) - u_0) + \beta_a \\ u'(b) = -k_b(u(b) - u_b) + \beta_b \end{cases} \quad (\text{EV}) \quad \text{Trouver } u \in H^1(a,b) \text{ tq}$$

$$\int_a^b u'v' + \alpha uv \, dx + k_a u(a)v(a) + k_b u(b)v(b) = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx + k_a u_0 v(a) + k_b u_b v(b) - \beta_a v(a) - \beta_b v(b)$$

$$\forall v \in H^1(a,b)$$

On reproduit l'exp Vb précédent. Le pb approché devient

Trouver  $u_0, \dots, u_N$  tq  $\forall i = 0, \dots, N$

$$\sum_{j=0}^N \left[ \int_a^b w_j' w_i \, dx + \int_a^b k_a w_j w_i \, dx + k_a w_j(a) w_i(a) + k_b w_j(b) w_i(b) \right] u_j = \int_a^b f w_i(x) \, dx + k_a u_0 w_i(a) + k_b u_b w_i(b) - \beta_a w_i(a) - \beta_b w_i(b)$$

Pas d'ajust à avant, on a une matrice de la forme du syst linéaire sur les 1<sup>es</sup> et dernières lignes.

→ addition de la rel.  $k_a$  au cof A<sub>0,0</sub>

→ " " " "  $k_b$  " " A<sub>N,N</sub>

Si on prend  $k$  très gd, ceci permet de modéliser un cc de Dirichlet homogène

## 5. Assemblage

Boucle  $\forall$  élément passant en revue les éléments  $T_i$  et en sommant leurs contributions en les affectant aux cof adéquats du syst global.

A : matrice globale à assembler (taille, manc, s<sup>er</sup> membre)

a<sub>kk</sub> : matrice élém pl l'élément T<sub>k</sub>.

Il faut pour procéder à l'assemblage posséder un tableau associant les pts d'un élém T<sub>k</sub> et les nœuds du maillage global.

En dim 1, T<sub>k</sub> comprend 2 nœuds x<sub>k-1</sub> et x<sub>k</sub>.

Algo

Par  $K=1 \text{ à } N$  faire (boucle sur les éléments)

    Par  $i=1 \text{ à } 2$  faire (" " " numéros locaux)

        Par  $j=1 \text{ à } 2$  faire ( )

$I = K+i-2$  (numéros globaux : 0 à  $N$ )

$J = K+i-2$  ( )

$$A(I,J) = A(I,J) + a(i,j)$$

## 6. EF de Lagrange d' $\mathcal{P}_2$ sur élé $\mathbb{P}_2$ .

Comme pour le EF précédent, les élé $\mathbb{P}_k$  sont les intervalles

$$T_k = [x_{k-1}, x_k], \quad k=1, \dots, N$$

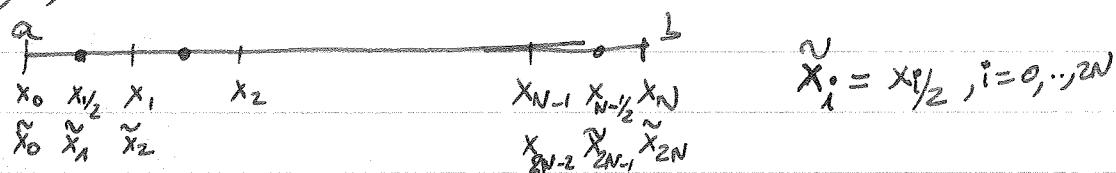
On prend maintenant l'esp  $V_h$  constitué des fonctions continues sur  $[a,b]$ , polynomiales de  $\mathcal{P}^2$  sur chaque  $T_k$ .

Un poly de  $\mathcal{P}^2$  est fixé par 3 valeurs : sur chaque  $T_k$ , on prend les extrémités et le milieu de l'intervalle.

$\Rightarrow$  on a donc une discrétisation de  $[a,b]$  constituée de  $N$  sous-intervalles comportant eux m<sup>ê</sup>me 3 pt.

$\Rightarrow$  on a une discrétisation de  $2N+1$  pt. on nomme  $\tilde{x}_i$  pt

$$i=0, \dots, 2N.$$



$V_h$  est donc constitué de  $2N+1$  fonc de base  $w_i \in V_h$  tq

$$w_i(\tilde{x}_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i=0, \dots, 2N, \quad \forall j=0, \dots, 2N$$

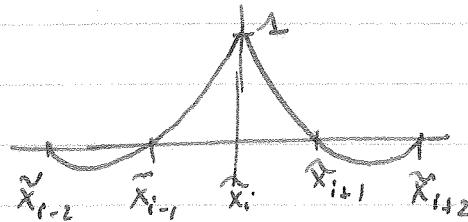
$\Rightarrow$  Sur chaque  $T_k = [x_{k-1}, x_k] = [\underbrace{\tilde{x}_{2(k-1)}}_i, \underbrace{\tilde{x}_{2k}}_{i+2}]$ , on fait un constuit le poly classique de Lagrange

$$L_i(x) = \frac{(x - \tilde{x}_{i+1})(x - \tilde{x}_{i+2})}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1})(x - \tilde{x}_{i+2})}$$

$$L_{i+1}(x) = \frac{(x - \tilde{x}_i)(x - \tilde{x}_{i+2})}{(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)(x - \tilde{x}_{i+2})}; \quad L_{i+2}(x) = \frac{(x - \tilde{x}_i)(x - \tilde{x}_{i+1})}{(\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_i)(x - \tilde{x}_{i+1})}$$

$\Rightarrow$  on a 2 types de fonctions  $w_i$ :

- $w_i$ : associé à une extrémité  $\tilde{x}_i$



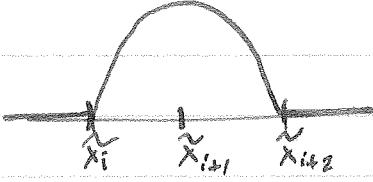
$$w_i|_{[\tilde{x}_{i-2}, \tilde{x}_i]}(x) = \frac{(x - \tilde{x}_{i-2})(x - \tilde{x}_{i-1})}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-2})(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})}$$

$$w_i|_{[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+2}]}(x) = L_i(x)$$

$w_i = 0$  en dehors de  $[\tilde{x}_{i-2}, \tilde{x}_{i+2}]$

- $w_i$ : associé aux pôles intérieurs

~~$w_i|_{[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+2}]}(x) = L_{i+1}(x)$~~



et 0 en dehors

### Application à Neumann

Trouver  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$  tels que  $\int_a^b f w_i dx$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left( \int_a^b w_j w_i dx + \alpha u_j u_i dx \right) u_j = \int_a^b f w_i dx$$

Comme précédemment, on a une matrice d'éléments de rigidité  $\int_a^b w_j w_i dx$

On fait des calculs de ces int. sur chaque élément  $T_k = [x_k, x_{k+1}] = [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+2}]$

Pour éviter des calculs trop lourds, on se ramène par changement de var à une élément de référence

$$x = \tilde{x}_{i+1} + \frac{\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_i}{2} t.$$

$$t \in [-1, 1] \longrightarrow x \in [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+2}]$$

Les fonctions  $w_i$ ,  $w_{i+1}$  et  $w_{i+2}$  rattachées à cet élément sont transformées en 3 fonctions simples suivantes sur  $[-1, 1]$

$$\lambda_{-1}(t) = \frac{t(t-1)}{2}; \quad \lambda_0(t) = -(t-1)(t+1); \quad \lambda_1(t) = \frac{t(t+1)}{2}$$

$$\lambda'_1(t) = t - \frac{1}{2}; \quad \lambda'_0(t) = -2t; \quad \lambda'_{-1}(t) = t + \frac{1}{2}$$

Matrice de masse élém.:  ~~$\alpha = Ct$~~   $\alpha = Ct$

$$\int_{-1}^1 \lambda_i(t) \lambda_j(t) dt \quad i, j = -1, 0, 1$$

Ainsi, pt l'élément  $[x_i, x_{i+2}]$ , on a:

$$M_i = \frac{\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_i}{2} \cdot \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice des rij d'un élém:  $\frac{dW_i}{dx} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dx}$

$$K_i = \frac{2}{\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_i} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

Par le calcul du 2<sup>nd</sup> membre:

- Si  $f$  est connue analytique; on fait des quadratures numériques.
- Si  $f$  n'est connue qu'aux noeuds  $\tilde{x}_i$ , on décompose  $f$  sur la base des  $w_i$  et on est amené à calculer des intgr.  $\int_a^b w_j w_i dx$  connue pt la matrice de masse.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2N} f_j w_j(x) dx$$

$$F_i = \int_a^b f(x) w_i(x) dx = \sum_{j=0}^{2N} f_j \left( \sum_{k=1}^N \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} w_j(x) w_i(x) dx \right)$$

$\Rightarrow$  L'indice  $k = i/2 + 1: [x_i, x_{i+2}]$ . Produira ainsi une carte non nulle pt les indices  $i, i+1, i+2$  (parcours).

$$\begin{pmatrix} F_i^{(k)} \\ F_{i+1}^{(k)} \\ F_{i+2}^{(k)} \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{pmatrix}$$

Assemblage

Pour  $K = 1, N$  faire ! b��de si le él<sup>e</sup>

pour  $i = 1 \text{ à } 3$  faire ! b��de si  $n^e$  locaux

pour  $j = 1 \text{ à } 3$  faire

$$I = 2K + i - 3$$

$$J = 2K + j - 3$$

$$A(I,J) = A(J,J) + a^{(ij)}$$

)  $n^e$  globaux ( $0 \text{ à } 2N$ )

On généralise fait aux él<sup>e</sup>s fins de Lagrange d<sup>d</sup><sub>k</sub> ou éléments P<sub>k</sub> en considérant des poly de d<sup>d</sup><sub>k</sub> si cheques él<sup>e</sup>s.

Ds trs cas, & le d<sup>d</sup> du polygone util<sup>e</sup>, on aura au mieux un raccord continue aux interfaces des éléments  $\rightarrow$  on ne peut pas espérer avoir un raccord des dérivées.

On parle d'éléments de rigidité C<sup>0</sup>.

### III - EF de type Hermite cubique ou éléments poutre

#### 1- R<sup>b</sup> de la poutre encastré

De certains pls, la continuité C<sup>0</sup> ne suffit pas. On demande des sol. appuis plus rigides.

Poutre encastré à ses extrémités, avec une charge appliquée d'intensité f:

$$\begin{aligned} \rightarrow & \int \frac{d^4 u}{dx^4} \cdot (x) - f(x), \quad \forall x \in [a, b] \\ & u(a)=0, u'(a)=0, u(b)=0, u'(b)=0 \end{aligned}$$

(EV) Trouver  $u \in H^2(a, b)$  tq

$$\int_a^b u'' v'' dx = \int_a^b f v dx, \quad \forall v \in H^2(a, b) \subset C^1(a, b)$$

$\rightarrow V_h$  doit être une approx de fonction C<sup>1</sup>

$[a, b] \rightarrow N$  intervalles (ou éléments)

$V_h$ : esp de fonctions continues à dérivées premières continue et polynomiale de degré 3 par élément.

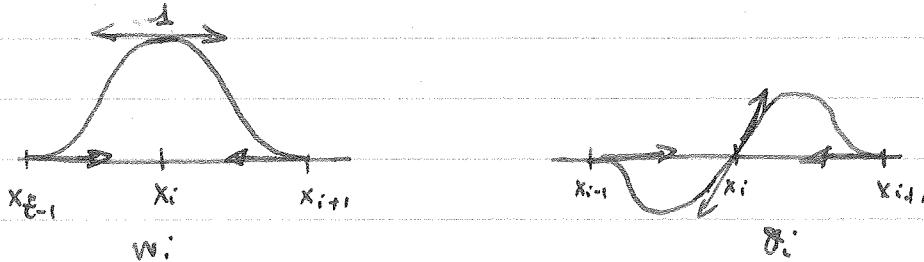
Un poly de degré 3 est déterminé par : val aux noeuds de  $T_k$   
val de la dérivée aux noeuds de  $T_k$ .

$V_h$  est de dim  $2N+2$ :  $N+1$  val aux noeuds  $x_i$ ;  
 $(N+1)$  val de dérivées

Si on considère  $V_{0,h}$ : sous esp de  $H^2(a, b)$  des fonctions de  $V_h$  nulles avec dérivées nulles en  $a$  et  $b$ . Dim:  $2N-2$ .

expansé par la double famille  $w_i$  et  $\theta_i$  définies par les  $2N-2$  cas suivants:

- $w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N-1) \quad w'_i(x_j) = 0$
- $\theta_i(x_j) = 0 \quad (i, j = 1, \dots, N-1) \quad \theta'_i(x_j) = \delta_{ij}$



$$V_h \in V_{0,h} : V_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} [v_i w_i(x) + v'_i \theta_i(x)]$$

$$v_i = v_h(x_i) ; v'_i = v'_h(x_i)$$

## 2 - Ecriture du pb approché

Trouver  $u_h \in V_{0,h}$  tq  $\int_a^b u'' v'' dx = \int_a^b f v dx \quad \forall v_h \in V_{0,h}$

Comme le pb est linéaire, cette égalité est vraie si elle est vraie p/ une base de ev  $V_h$ :  $\forall v_h \in V_{0,h} \iff \forall w_i, \theta_i, i=1, \dots, N-1$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} (u_j w_j(x) + u'_j \theta_j(x))$$

$\Rightarrow$  Trouver  $u_1, \dots, u_{N-1}, u'_1, \dots, u'_{N-1}$  tq  $\forall i = 1, \dots, N-1$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N-1} (\int_a^b w_j'' w_i'' dx) u_j + (\int_a^b \theta_j'' w_i'' dx) u'_j = \int_a^b f w_i(x) dx \\ \sum_{j=1}^{N-1} (\int_a^b w_j'' \theta_i'' dx) u_j + (\int_a^b \theta_j'' \theta_i'' dx) u'_j = \int_a^b f \theta_i(x) dx \end{cases}$$

En posant pour  $i, j = 1, \dots, N-1$

$$F_{2i-1} = \int_a^b f w_i dx ; \quad F_{2i} = \int_a^b f \theta_i dx$$

$$A_{2i-1, 2j-1} = \int_a^b w_j'' w_i'' dx ; \quad A_{2i, 2j} = \int_a^b \theta_j'' \theta_i'' dx$$

$$A_{2i, 2j-1} = \int_a^b w_j'' \theta_i'' dx ; \quad A_{2i-1, 2j} = \int_a^b \theta_j'' w_i'' dx$$

$$\Rightarrow \sum_{J=1}^{2N-2} A_{I,J} U_J = F_I, \quad \forall I = 1, \dots, 2N-2$$

$\Rightarrow$  système linéaire de  $2N-2$  éq à  $2N-2$  inconnues.

Pour assurer l'assemblage, il faut procéder aux calculs des matrices élémentaires.

On utilise la technique de l'élément de référence : aux racines à l'ordre  $3$

$$\text{obj de var: } x = x_i + (x_{i+1} - x_i)t.$$

$$t: [t_0, T] \rightarrow x: [x_i, x_{i+1}],$$

On ramène les  $w_i, w_{i+1}, \theta_i, \theta_{i+1}$  aux fonctions simples  $\phi, \lambda, \mu, \rho$ ,

$$\phi(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 ; \quad \lambda(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$\text{On a: } \frac{d\theta_i}{dx} = \frac{d\theta_i}{dt} \frac{1}{\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{h_i}} \rightarrow \mu_0(t) = h_i + (t-1)^2 ; \quad \mu_1(t) = h_i(t^3 - t^2)$$

$$\text{Les dérivées secondes sont: } \lambda_0''(t) = 12t - 6 ; \quad \lambda_1''(t) = 6 - 12t$$

$$\mu_0''(t) = h_i(6t - 6) ; \quad \mu_1''(t) = h_i(6t - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 w_i}{dx^2} = \frac{d^2 \lambda_i}{dt^2} \cdot \frac{1}{h_i^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} = \frac{d^2 \mu_i}{dt^2} \cdot \frac{1}{h_i^2}$$

$$\Rightarrow K_i = \frac{1}{h_i^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h_i & -12 & 6h_i \\ 6h_i & 6h_i^2 & -6h_i & 2h_i^2 \\ -12 & -6h_i & 12 & -6h_i \\ 6h_i & 2h_i^2 & -6h_i & 4h_i^2 \end{pmatrix}$$

## EFs bidimensionnels

Les pb que l'on cherche à approcher sont écrit sans forme variationnelle

(P) Trouver  $u \in V$ , Hilbert tq  $a(u,v) = l(v)$ ,  $\forall v \in V$ .  
a : bilin, continue, coercive  
l : forme lin, continue  $\rightarrow$  Lax Milgram assure l'Ex!

Comme en dim 1, on construit un sous esp  $V_h \subset V$  de dimension finie de telles que au sein de l'pb approché

(Ph) Trouver  $u_h \in V_h$  tq  $a(u_h, v_h) = l(v_h)$ ,  $\forall v_h \in V_h$   
 $\Rightarrow$  Ex! de sol. car  $V_h \subset V$ .

### I - Maillage

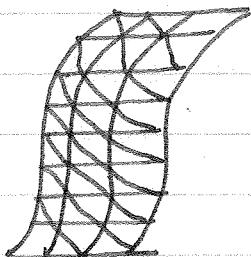
Dans une méthode d'EF, la construction de  $V_h$  nécessite la discrétisation du domaine  $\Omega$  en éléts géom. simples.

Le maillage d'un domaine en dim 2 ou 3 est un pb difficile.  
On distingue deux types

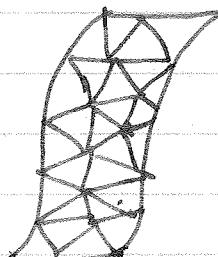
- maillage structuré: fournit une discrét. régulière obtenue par transformation d'une grille régulière sur un domaine rectangulaire
- maillage non structuré

En dim 2: les éléts géom. simples sont : triangles, quadrangles de côtés droits ou curvilignes

En dim 3: tétraèdres, pentahèdres ou hexaèdres



structuré



non structuré

Critères à vérifier:

1) Les diff  $K_i$  doivent recouvrir  $\Omega$ :  $\bigcup K_i = \overline{\Omega}$

2) L'intersection de deux él<sup>e</sup>s distincts ne peut être que l'ens. vide

- un sommet
- un côté
- une face (en dim 3)



: inter d' $\Omega$ .

$\Rightarrow \Omega$  polygonal ou approché par des polygones

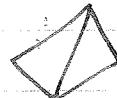
II - EFs de Lagrange triangulaires de d<sup>o</sup> 1: CF P<sub>1</sub>

$V_h$  est un esp de fonc continues affines par él<sup>e</sup> triangle.  
Ds chaque triangle, la restriction de fels de  $V_h$  est donc un poly de d<sup>o</sup> 1:  $a_0 + a_1 x + a_2 y$ .

$\rightarrow$  détermine<sup>é</sup> de manière unique par 3 val en 3 pt distincts

On choisit les sommets  $\Rightarrow$  continuité globale sur  $\Omega$

En effet.: sur une arête commune à deux triangles adjacents



les restrictions de  $f \in V_h$  sont des fonc affines fixes par 2 val aux deux sommets

$\Rightarrow$  La dim. totale de  $V_h$  est égale au nb de noeuds du maillage.  
Si on a des clés de Dirichlet sur une partie de  $\partial\Omega$ , cette dim est réduite du nb de noeuds où sont fixés une cond de Dirichlet.

## II-1. Les fonctions de base $P_1$ :

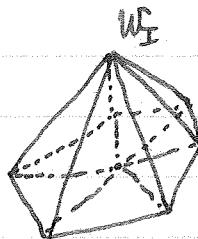
$$V_h = \{ f \text{ fonction } , f|_{T_i} \text{ affine } \quad T_i: \text{ triangle} \}$$

On prend donc comme fonctions de base les  $N$  fonctions  $w_i \in V_h$  définies par les  $N$  conditions aux  $N$  noeuds  $(x_i, y_i)$  du maillage

$$w_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

Le support des  $w_i$  est réduit à l'union des triangles dont le point  $(x_i, y_i)$  est un sommet. Alors,  $\forall v_h \in V_h$ , on a

$$v_h(x, y) = \sum_I v_I w_I(x, y)$$



## II-2. Les fonctions de forme $P_2$ :

On appelle fonctions de forme les restrictions des  $w_i$  d'un élément (triangle).

Un triangle  $T = 3$  sommets  $A_1, A_2, A_3 \Rightarrow 3$  fonctions de base non nulles cohabitent.

Les restrictions à  $T$  des  $w_{I_1}, w_{I_2}, w_{I_3}$  sont 3 fonctions polynomiales de degré 2

$$w_{Ij}(A_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

On les note  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :  $\lambda^{(1,2)} = \alpha + \beta x + \gamma y$

$$\lambda_1(x_1, y_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 = 1$$

$$\lambda_1(x_2, y_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 = 0$$

$$\lambda_1(x_3, y_3) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 = 0$$

Déterminant du syst. lin:  $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \text{ Aire}(T) \neq 0 \text{ si } A_1, A_2, A_3 \text{ non alignés}$   
 $(\vec{A_1 A_2} \text{ et } \vec{A_2 A_3} \text{ non colin})$

En résolvant le syst. lin, on trouve

$$\lambda_1(x,y) = \frac{x_2y_3 - x_3y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)}{2 \text{Aire}(T)}$$

$$\lambda_2(x,y) = \frac{x_3y_1 - x_1y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)}{2 \text{Aire}(T)}$$

$$\lambda_3(x,y) = \frac{x_1y_2 - x_2y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)}{2 \text{Aire}(T)}$$

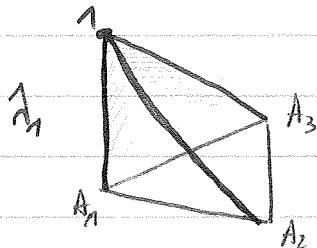
On a pour les gradients

$$\nabla \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_3}{2 \text{Aire}(T)} \\ \frac{x_3 - x_2}{2 \text{Aire}(T)} \end{pmatrix}, \quad \nabla \lambda_2 = \begin{pmatrix} \frac{y_3 - y_1}{2 \text{Aire}(T)} \\ \frac{x_1 - x_3}{2 \text{Aire}(T)} \end{pmatrix}, \quad \nabla \lambda_3 = \begin{pmatrix} \frac{y_1 - y_2}{2 \text{Aire}(T)} \\ \frac{x_2 - x_1}{2 \text{Aire}(T)} \end{pmatrix}$$

Les  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  portent le nom de coord. barycentriques de T.

En anglais : "Area coordinates" car elles représentent en chaque pt.  $M(\vec{y})$  le rapport des aires algébriques (signes)

$$\lambda_i(M) = \frac{\text{Aire}(A_i A_3 M)}{\text{Aire}(T)}$$



$$\forall v_h \in V_h, |v_h(x,y)| = v_1 \lambda_1(x,y) + v_2 \lambda_2(x,y) + v_3 \lambda_3(x,y)$$

$$\operatorname{tg} v_h(A_i) = r_i$$

## II - 3 Application

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\Gamma_D} = u_D; \quad \partial_n u|_{\Gamma_N} = g \end{cases}$$

$$V = \{f \in H^1(S_2); f(x) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_D\}$$

Refinement sur  $\Gamma_D$ : soit  $x_0$  une pt. tq  $u_0|_{\Gamma_D} = u_D$ . On pose  $u = \tilde{u} + u_0$  et on a le pb variationnel

Trouver  $\tilde{u} \in V$  tq  $f \in V$

$$\int_{S_2} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx \, dy = \underbrace{\int_{S_2} f v \, dx \, dy}_{a(\tilde{u}, v)} - \underbrace{\int_{S_2} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx \, dy}_{\int_{\Gamma_D} g v \, ds} + \underbrace{\int_{\Gamma_D} g v \, ds}_{l(v)}$$

$V_h = \{ f \in C^0, \text{ affines sur triangles}, f(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_0 \}$ .

II. ensemble des indices des noeuds de la triangulation de  $S2 \setminus \Gamma_0$   
(c'est donc ici l'ens. des noeuds  $\notin \Gamma_0$ )

III. ens. des indices des sommets  $\in \Gamma_0$ .

$$\tilde{u}_h(x,y) = \sum_{J \in \mathbb{I}} u_J w_J(x,y)$$

• Pour la fct auxiliaire  $u_0$ :  $u_{0,h}$  continue, affine par morceaux,  $u_{0,h}(x,y) = u_J$   
 $\forall (x,y) \in \Gamma_0$ .

$$u_{0,h}(x,y) = \sum_{J \in \mathbb{I}^*} u_J(x,y) w_J(x,y)$$

$$\bullet u_{0,h}(x,y) = 0 \\ \forall (x,y) \in S2 \setminus \Gamma_0$$

Problème variationnel posé

Trouver les  $u_J$ ,  $J \in \mathbb{I}$  tq

$$\sum_{J \in \mathbb{I}} \left[ \int \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, dx \, dy \right] u_J = \int_{S2} f \, w_I \, dx \, dy + \int_{\Gamma_0} g \, w_I \, dx - \sum_{J \in \mathbb{I}} \left[ \int_{S2} \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, dx \, dy \right] u_J$$

$\forall J \in \mathbb{I}$ .

$\Rightarrow$  syst lin de  $N_I$  eq à  $N_I$  inconnues où  $N_I$ : nbre de pts du maillage  
d'indices  $I \in \mathbb{I}$ .

Le syst s'écrira  $KU = F$

$$\text{mat. racineur } K_{IJ} = \int_{S2} \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, dx \, dy$$

$$F_I = \int_{S2} f \, w_I \, dx \, dy + \int_{\Gamma_0} g \, w_I \, dx \rightarrow \sum_{J \in \mathbb{I}^*} \left[ \int_{S2} \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, dx \, dy \right] u_J(x_J, y_J)$$

terme surface  $\uparrow$  intégrale courbée.  $\uparrow$  Dirichlet non homogène

Par celles-là les différents termes, au procédé par une procédure  
d'assemblage des contributions par chacun des élém.  $T_k$  de la triangulation.

$$\text{ex: } K_{IJ} = \int_{S2} \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, dx \, dy = \sum_{T_k} \int_{T_k} \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, dx \, dy.$$

## II - 4 Matrice et second membre élémentaires

Outil de base de la méthode des EF : correspondance entre

$X_I$ : noeuds du maillage global

et  $A_1, A_2, A_3$ : points d'un élément (<sup>triangle</sup> <sub>quadrangle</sub>) particulier

- Triangle  $T_k$  :
  - . sommets locaux  $A_1, A_2, A_3$
  - . sommets globaux  $X_I, X_J, X_K$
  - . fonctions de base non nulles:  $w_I, w_J, w_K$
  - . restriction à  $T_k$ :  $d_1, d_2, d_3$

$\Rightarrow$  Matrice élémentaire:  $3 \times 3$

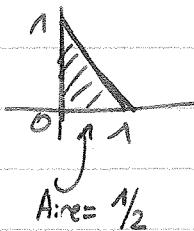
$$\text{elem } K_{ij} = \int_{T_k} \nabla d_j \cdot \nabla d_i \, dx \, dy \quad \forall ij = 1, 2, 3$$

Pour  $R_1$ , les gradients sont de fait cts par triangles

$$\Rightarrow \int_{T_k} \nabla d_j \cdot \nabla d_i \, dx \, dy = \nabla d_j \cdot \nabla d_i \int_{T_k} \, dx \, dy$$

$$= \text{Aire } T_k \nabla d_j \cdot \nabla d_i$$

Si on prend  $T_k$ : triangle rect. isocèle  $A_1(0), A_2(0), A_3(1)$   
 (appelé triangle de référence)



$$\text{elem } K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Second membre

a. Termes surfaciques  $F_S = \int_S f w_i \, dx \, dy \quad \forall i$

$$= \sum_k F_{S,i,T_k} = \sum_k \int_{T_k} f w_i \, dx \, dy$$

Si  $f$  connu analytique; on peut faire le calcul de l'int. à la main,  
 sinon on connaît  $\int_T f$  au noeuds

$$F_{S_I} = \int_{S_I} \sum_j f_j w_j w_I dx dy + I \\ = \sum_j \left[ \int_S w_j w_I dx dy \right] f_j. \quad + I.$$

$\Rightarrow$  matrice de masse élémentaire

$$\int_T d_i dx dy = \frac{\text{Aire}(T)}{3}; \quad \int_T d_i^2 dx dy = \frac{\text{Aire}(T)}{6}; \quad \int_T g_i d_i dx dy = \frac{\text{Aire}(T)}{12}$$

$i \neq j$

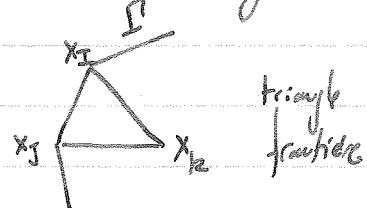
$$\Rightarrow \text{elem } M_{T_k} = \frac{\text{Aire}(T_k)}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{S_I, T_k} \\ F_{S_J, T_k} \\ F_{S_K, T_k} \end{pmatrix} = \text{elem } M_{T_k} \begin{pmatrix} f_I \\ f_J \\ f_K \end{pmatrix}$$

b. Condition de Neumann:  $F_{n_I} = \int_{\Gamma_1} g w_I dx$ .

int. le long de  $\Gamma_1 \Rightarrow$  int. simple le long d'un côté A d'un triangle  
On a  $x_I$  et  $x_J$  extrémités de A

$$g|_A = g_I w_I + g_J w_J$$



A calculer:  $g_J \int_A w_J w_I dx; g_J \int_A w_J^2 dx; g_I \int_A w_I^2 dx$

par Simpson

(abord exact)

$$\frac{1}{6} \text{Laguerre}(A) g_J$$

$$\frac{1}{3} \text{Laguerre}(A) g_{J,I}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n_I, T, I} \\ F_{n_I, T, J} \\ F_{n_I, T, K} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \text{Laguerre}(A) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_I \\ g_J \\ g_K \end{pmatrix}$$

c. Condition de Dirichlet inhomogène  $F_{d_I} = - \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_S D w_j \cdot D w_I dx dy u_d(x_j, y_j)$

Pour chaque triangle dans des p'tis d'indices  $J \in \mathcal{J}$  et  $I$  sont sommets, on a une contrib à la  $I^{\text{me}}$  component du  $2^{\text{nd}}$  membre = à

$$\sum_{J \in \mathcal{J}} \left( \int_T P_{ij} \cdot P_{di} dy \right) u_d(x_j, y_j)$$

Mat de raideur.

### Algo d'assemblage.

- $N$  triangles  $T_k$ ,  $A$  mat globale (raideur en masse)
- $a_k$ : mat. élém. relative à chaque  $T_k$ .
- tableau "numero": associe sommets de  $T_k$  et index du matrice globale

Pour  $k = 1 \text{ à } N$  faire ! boucle sur les éléments

| Pour  $i = 1 \text{ à } 3$  faire ! \* sur n° local

| |  $I = \text{numero}(k, i)$  ! n° globaux

| | Pour  $j = 1 \text{ à } 3$  faire

| | |  $J = \text{numero}(k, j)$

$$| | | A(I, J) = A(I, J) + a_k(i, j)$$

### III - Eléments triangulaires $\Pi_k$

Triangulation de  $S_2$  par Nbe triangles  $T_k$ .

$$V_h = \{ f \in C^0(\bar{S}_2), \text{ polyn. de } d^{\text{o}} k \text{ par triangle} \} \subset H^1(S_2).$$

Poly de  $d^{\text{o}} k$ :  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  coef.  $\Rightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  cond. par élém pour cauchier les restrictions pour  $T_k$ .

Soit  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  param ou d° de liberté locaux.

Continuité sur  $\bar{S}_2 \Rightarrow$  il faut et suffit d'assurer le raccord aux frontières des triangles

$A$ : arête d'un triangle,  $p \in \Pi_k(S_2)$

$p(x,y) \Big|_A = \text{poly de } d^{\text{o}} k \text{ à une seule variable}$

$\Rightarrow$  il faut  $(k+1)$  conditions pour le poly de manière unique.

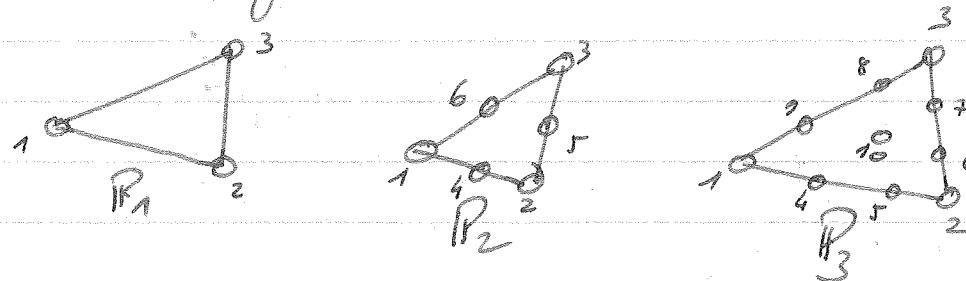
Ds le cas de l'elt de Lagrange, il faut donc  $(k+1)p^k$  par arête commune.

Pour Lagrange, il faut donc  $\frac{(k+1)(k+2)}{2} p^k$  par triangle dont  $(k+1)$  sur chaque côté

$P_1$ : 3 d° de liberté  $\Rightarrow 3 p^k$  nœuds et  $2 p^k$  par côté  
 $\Rightarrow$  nœuds possibles: 3 sommets

$P_2$ : 6 d° de lib  $\Rightarrow 6 p^k$  nœuds et  $3 p^k$  par côté  
 $\Rightarrow$  au droit les 3 sommets et les 3 milieux des côtés

$P_3$ : 10 d° de lib  $\Rightarrow 10 p^k$  nœuds et  $4 p^k$  par côté  
 $\Rightarrow$  au droit 3 sommets, 2 p<sup>k</sup> au travers de chaque côté et 6 barycentre



### III - 1 Fct<sup>e</sup> de base et fct<sup>e</sup> de forme $P_k$

On distingue les nœuds physiques et les nœuds plianture les fct<sup>e</sup> de base  
 $\rightarrow$  d° de liberté

On a donc le maillage physique et le maillage où sont situées les inconnues.  
 On note  $x_I$  les pts de ce second maillage  
 $w_I(x_I, y_I) = \delta_{IJ}$

Fct<sup>e</sup> de forme: restriction des  $w_I$  à chaque triangle.

On les note  $N_i$ ,  $i=1, \dots, n_k$ ,  $n_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$N_i(A_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n_k$$

Aj nœuds locaux du triangle  $T_e \Leftrightarrow X_I$ .

Les  $N_i$  s'expriment en fonction des coord barycentriques  $d_1, d_2, d_3$ .

$$P_2 : N_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1) \quad i=1,2,3$$

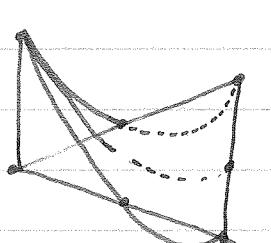
$$\nabla N_i = (4\lambda_i - 1)\nabla\lambda_i \quad i=1,2,3$$

$$N_4 = 4\lambda_1\lambda_2; \quad N_5 = 4\lambda_2\lambda_3; \quad N_6 = 4\lambda_3\lambda_1$$

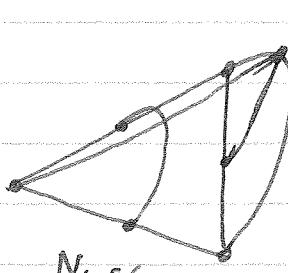
$$\nabla N_4 = 4(\lambda_1\nabla\lambda_2 + \lambda_2\nabla\lambda_1)$$

$$\nabla N_5 = 4(\lambda_2\nabla\lambda_3 + \lambda_3\nabla\lambda_2)$$

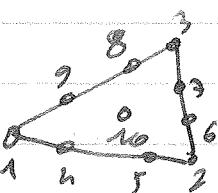
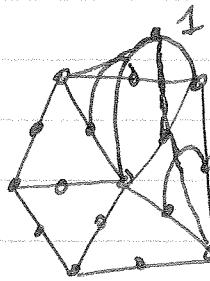
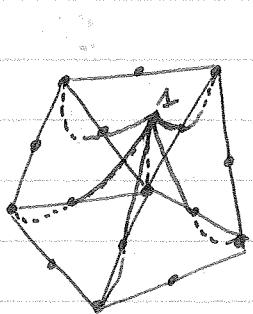
$$\nabla N_6 = 4(\lambda_3\nabla\lambda_1 + \lambda_1\nabla\lambda_3)$$



$N_{1,2,3}$



$N_{4,5,6}$



$$P_3 : N_i = \frac{\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)}{2} \quad i=1,2,3$$

$$N_{10} = \frac{9\lambda_1(3\lambda_1 - 1)\lambda_2}{2}$$

etc ..

Nous le : faut "bille", nulle si les cotés du triangle et saufement utilisée des formulations mixtes

$$N_{10} = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

### III - 2 Applications

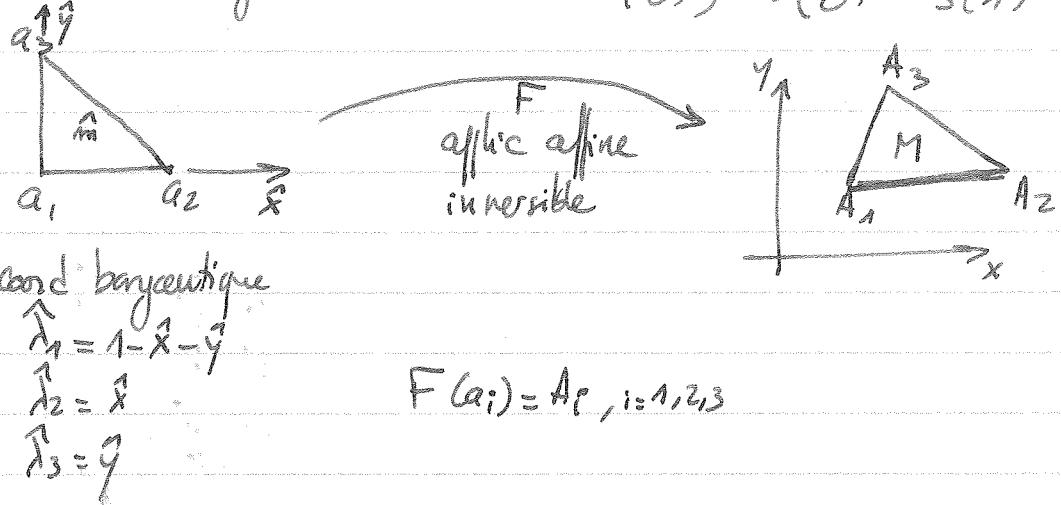
Pour le calcul des matrices de rigidité de masse, on est amené à calculer des intégrales  $\int_{\Omega} D_{ij} u_i u_j d\Omega$  et  $\int_{\Omega} u_i u_j d\Omega$

On aura parfois besoin de la formule exacte suivante

$$\int_T d_1 d_2 d_3 dx dy = 2 \text{Aire}(T) \frac{n! p! q!}{(n+p+q+2)!}$$

### a) Technique de l'élément de référence

Les calculs précédents peuvent être réalisés sur le triangle de ref isocèle rectangle de sommet  $a_1(\vec{0})$ ,  $a_2(\vec{1})$ ,  $a_3(\vec{i})$



$$F(a_i) = A_i, i=1,2,3$$

$F(\vec{m}(\vec{x}, \vec{y})) = M(x, y)$  : s'exprime à partir des  $\vec{\lambda}_i$

$$x = x_1 \lambda_1(\vec{x}, \vec{y}) + x_2 \lambda_2(\vec{x}, \vec{y}) + x_3 \lambda_3(\vec{x}, \vec{y})$$

$$y = y_1 \lambda_1(\vec{x}, \vec{y}) + y_2 \lambda_2(\vec{x}, \vec{y}) + y_3 \lambda_3(\vec{x}, \vec{y})$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobien } (F) : \det \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial x}{\partial \vec{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial y}{\partial \vec{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2 \text{Aire}(T) \\ &= \frac{\text{Aire}(T)}{\text{Aire}(M)} \quad \text{Aire}(M) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  le transfert est inversible si  $A_1, A_2, A_3$  non alignés.

$\forall M = F(\vec{m})$ , on a  $\vec{\lambda}_i(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_i(x, y) \quad \forall i = 1, 2, 3$

$\rightarrow$  les coord barycentriques sont conservées par le transfert  $F$ .

Intérêt :  $\int_T \phi(x, y) dx dy = 2 \text{Aire}(T) \int_{\vec{T}} \phi(x(\vec{x}, \vec{y}), y(\vec{x}, \vec{y})) d\vec{x} d\vec{y}$

Calcul du gradient des  $\lambda_i$ :  $\nabla_{x,y} \lambda_i = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} \end{array} \right)$

$$\nabla_{x,y} \lambda_i = \frac{1}{2\text{Aire}(T)} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \nabla_{x,y} \lambda_i$$

## IV - EFs isoparamétriques triangulaires et quadrangulaires

EFs isoparam.: EFs dont les fonctions de forme sont construites à partir des fonctions de forme mères de l'élément de référence par une transf. de l'élément de réf à l'élément réel.  
Faisant passer

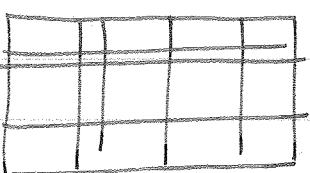
Si on arrive à exprimer cette transf à partir des fonctions de forme mères, on parle d'élément isoparam.

Dans ce cas, les fonctions servent à définir la base de l'espace d'appréhension et la géométrie des éléments.

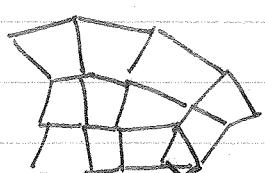
Pour les  $P_2$  précédents,  $\lambda_i$  fonction de degré 2,  $F$ : affine  
 $\Rightarrow$  les  $IP_2$  (dit droit) ne sont pas isoparam.

On dit qu'ils sont sous-paramétriques

1) Elément quadrilatéraux biliin de Lagrange: EF  $Q_{P_2}$ .



S2: décomposé en quadrangles  $C_l$ ,  $l=1,..,N_{be}$



Elément de l'EF: quadrangle (droit  $\Rightarrow$  isoparam.)  
 1<sup>er</sup> liberté: u sommet

4 valeurs définissent de façon unique un poly de degré 4

$$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$$

Problème: ceci ne fournit pas une méthode d'EF conforme acceptée

En effet, sur chaque côté commun à 2 quadrangles, la restriction

$$deg y = m x + p$$

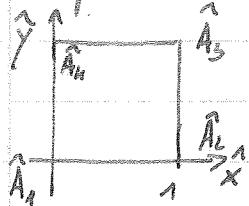
des poly est de la forme  $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$  qui est poly de degré 2 en x.



Deux pts ne suffisent pas à fixer de manière unique un poly de d'ordre 2 à une variable  $\Rightarrow$  on ne peut pas assurer la continuité inter-élémentelle  
 $\Rightarrow$  pas de continuité globale

Comment résoudre ce pb?

On prend comme élément de référence le carré unité et comme pts nodaux les 4 sommets



esp de fonc de forme ds l'élément de référence:

$$a_0 + a_1 \hat{x} + a_2 \hat{y} + a_3 \hat{x}\hat{y}$$

Fonct° de forme nulles :  $\hat{N}_i(\hat{A}_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 4$

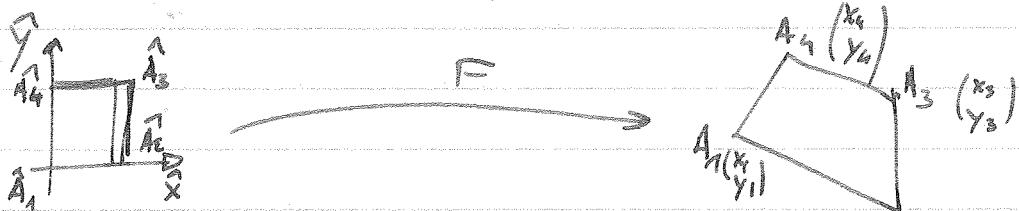
$$\Rightarrow \hat{N}_1 = (1-\hat{x})(1-\hat{y})$$

$$\hat{N}_2 = \hat{x}(1-\hat{y})$$

$$\hat{N}_3 = \hat{x}\hat{y}$$

$$\hat{N}_4 = (1-\hat{x})\hat{y}$$

$$F : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y})$$



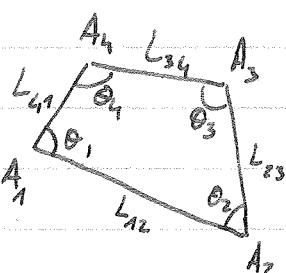
$$x = x_1 \hat{N}_1 + x_2 \hat{N}_2 + x_3 \hat{N}_3 + x_4 \hat{N}_4$$

$$y = y_1 \hat{N}_1 + y_2 \hat{N}_2 + y_3 \hat{N}_3 + y_4 \hat{N}_4$$

Cette transf est inversible si le quadrilatère est convexe!

$$\det(J_F) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(x_2-x_1)(y_4-y_3) - (x_4-x_1)(y_2-y_3)] \hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) \\
 &+ [(x_3-x_2)(y_1-y_4) - (x_1-x_2)(y_3-y_4)] \hat{N}_2(\hat{x}, \hat{y}) \\
 &+ [(x_4-x_3)(y_2-y_1) - (x_2-x_3)(y_4-y_1)] \hat{N}_3(\hat{x}, \hat{y}) \\
 &+ [(x_1-x_4)(y_3-y_2) - (x_3-x_4)(y_1-y_2)] \hat{N}_4(\hat{x}, \hat{y})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= L_{12}L_{41} \sin \theta_1 \hat{N}_1 + L_{12}L_{23} \sin \theta_2 \hat{N}_2 \\
 &+ L_{23}L_{34} \sin \theta_3 \hat{N}_3 + L_{34}L_{41} \sin \theta_4 \hat{N}_4
 \end{aligned}$$

Si le quad  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  est convexe,  $0 < \theta_i < \pi \Rightarrow \sin \theta_i > 0$   
 $\Rightarrow \det(J_F) > 0 \Rightarrow F$  inversible.

Fct<sup>10</sup> de forme Q<sub>1</sub>:  $N_i(x,y) = \hat{N}_i(\hat{x}(x,y), \hat{y}(x,y))$

Soit les fct<sup>10</sup> q définies à l'aide de F:

$$(x,y) \xrightarrow{\quad} q(x,y) = \hat{q}(\hat{x}, \hat{y}) \text{ avec } (\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow{F} (x,y)$$

$$q \in Q_1 \text{ t.q. } q(A_i) = q_i : q(x,y) = \sum_{i=1}^4 q_i N_i(x,y) = \sum_{i=1}^4 q_i \hat{N}_i(\hat{x}, \hat{y})$$

Fct<sup>10</sup> de base Q<sub>1</sub>:  $w_I(X_J) = \delta_{IJ}$ .  $\forall v_h \in V_h, v_h = \sum v_I w_I(x,y)$

$\forall v_h \in V_h, v_h \in C^0(\bar{\Omega})$ . Les  $v_h$  sont déterminées uniquement par leurs valeurs aux noeuds.

Les restrictions des fct<sup>10</sup> de base des quadrangles élémentaires ce sont les fct<sup>10</sup>  $N_i(x,y) = \hat{N}_i(\hat{x}(x,y), \hat{y}(x,y))$

$$\nabla_{xy} N_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \nabla_{xy} \hat{N}_i$$

On obtient cependant plus facilement la matrice jacobienne inverse J

$$\nabla_{xy} \hat{N}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \nabla_{xy} N_i, \quad \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}}$$

etc...

$$\text{On en déduit } \nabla_{xy} N_i = J^{-1} \nabla_{xy} \hat{N}_i$$

$$= \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} & -\frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ -\frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \end{pmatrix} \nabla_{xy} \hat{N}_i$$

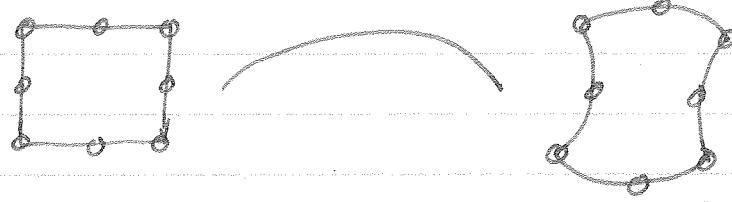
Application

Calcul des mat de masse et rigides élémentaires

$$M_{ij} = \int_C N_j(x,y) N_i(x,y) dx dy = \int_{\hat{\Omega}} \hat{N}_j(\hat{x}, \hat{y}) \hat{N}_i(\hat{x}, \hat{y}) |\det J| d\hat{x} d\hat{y}$$

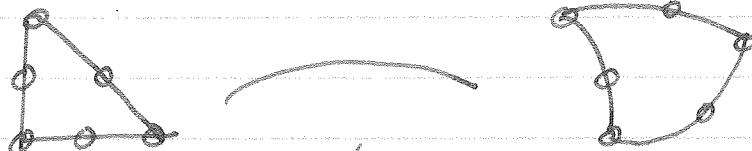
$$a_{ij} = \int_C \nabla_{xy} N_j \nabla_{xy} N_i dx dy = \int_C J^{-1} \nabla_{xy} \hat{N}_j J^{-1} \nabla_{xy} \hat{N}_i |\det J| d\hat{x} d\hat{y}$$

Elets iso. R<sub>2</sub>



$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

Elets iso P<sub>2</sub>



$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^6 x_i \hat{N}_i \\ y &= \sum_{i=1}^6 y_i \hat{N}_i \end{aligned}$$

On prend le  
pl de forme  
que pl P<sub>2</sub> sur  
le triangle direct

# Estimations d'erreur

## I - Analyse d'erreur

On regarde l'erreur que l'on produit si l'approx de  $a(u,v) = b(v)$

On a déjà un thm

Thm: Si  $|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$ ,  $a(v,v) > \alpha \|v\|^2$ , alors

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

On continuera plus la suite des pts elliptiques d'ordre 2 et l'op de  $f^{(1)}_h$  test  $H^1$  au sens exp de  $H^1$ .

On recourt à l'usu des éléments du maillage ( $\Rightarrow S2$  polygonal)

Thm  $g_d^{\text{ad}}$  (admis) Soit  $u$  une sol du pb elliptique suffisamment régulière ( $u \in H^{k+1}(S2)$ ) et  $u_h$  une approx  $P_k$  ou  $Q_k$ . On a la major. d'erreur

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq Ch^k \|u\|_{k+1,2}$$

où  $h$  est la long. du plus gd côté d'élét du maillage et  $C$  une cté indép de  $h$ .

S'il n'est pas polygonal, il faut pour avoir cette formule d'erreur appeler exact  $S2 \Rightarrow$  élts isoparamétriques.

ng Ereur pl/  $P_1$  en dim 1  $[a,b] \rightarrow N$  sous intervalles  $[x_{i-1}, x_i] = I_i$

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_{1,2} + \forall v_h \in V_h$$

On prend pour  $v_h$  l'interpolé  $P_h u$  de  $u$  ds  $V_h$ . On majore l'erreur d'approx  $\|u - v_h\|$  par une cté fois l'erreur d'interpol  $\|u - P_h u\|$ .

Thm:  $h = \max |x_i - x_{i-1}|$ , on a  $\forall x \in I_i$

$$|u(x) - P_h u(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in I_i} |u''(x)|$$

$$|u'(x) - P'_h u(x)| \leq \frac{h}{2} \max |u''(x)|$$

$$\text{d'où } \|u - P_h u\|_{1,2} \leq Ch \max |u''(x)|$$

$$\text{et enfin } \|u - u_h\|_{1,2} \leq Ch \max |u''(x)|$$

Données :  $w_i$ : fct<sup>o</sup> de base associée au noeud  $x_i$ :  $w_i(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$ ;  $w_i'(x) = \frac{1}{x_i - x_{i-1}}$   
 avec  $w_i(x) + w_i'(x) = 1$ ,  $x_{i-1}w_{i-1}(x) + x_i w_i(x) = x$   
 et  $P_h u(x) = u(x_{i-1})w_{i-1}(x) + u(x_i)w_i(x)$   
 et évidemment  $(P_h u)'(x) = u(x_{i-1})w_{i-1}'(x) + u(x_i)w_i'(x)$

$$\text{DL Taylor: } u(x_{i-1}) = u(x) + (x_{i-1} - x)u'(x) + \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2}u''(\xi_i)$$

$$u(x_i) = u(x) + (x_{i-1} - x)u'(x) + \frac{(x_i - x)^2}{2}u''(\eta_i)$$

et on a :  $P_h u(x) = u(x) + \frac{1}{2}[(x_{i-1} - x)^2 w_{i-1}(x)u''(\xi_i) + (x_i - x)^2 w_i(x)u''(\eta_i)]$   
 et  $(P_h u)'(x) = u'(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{(x_{i-1} - x)^2}{2} + \frac{(x_i - x)^2}{2}\right]u''(x)$

Or,  ~~$w_{i-1} \leq 1$~~   $0 \leq w_i \leq 1 \quad \forall i$  et  $w_{i-1}'(x) = -w_i'(x) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\|u - P_h u\|_2 = \frac{1}{2} \left\| (x_{i-1} - x)^2 w_{i-1}(x)u''(\xi_i) + (x_i - x)^2 w_i(x)u''(\eta_i) \right\|_2$$

$$\leq Ch^2 \max |u''(x)|$$

## 2- Erreurs des ETS $P_h$ en dim 2

$S_2$ : domaine polygonal discritisé par des triangles  $T_i$ .

$V_h$ : fct<sup>o</sup> continues affines par morceaux (affines sur les  $T_i$ )

On a comme pl la dim 1  $\|u - u_h\|_{H^2} \leq \frac{1}{m} \|u - v_h\|_{H^2} + v_h \in V_h$

On prend  $v_h = P_h u$ , interpolation de  $u$  ds  $V_h$ .

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{H^2} \leq C \|u - P_h u\|_{H^2}.$$

Thm :  $h$ : longeur du plus gd côté  
 $\theta_0$ : plus petit angle au sommet ) pl ts ls triangles du maillage

D<sup>2</sup>r : matrice Hennenne  $D^2r(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

$|D^2r(x,y)|$ : norme spectrale

On a:  $\forall x, y \in S_2$ .

$$|u(x,y) - P_h u(x,y)| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{xy \in S_2} |D^2r(x,y)| \Rightarrow \|u - P_h u\|_{H^2} \leq (Ch)^2 \|D^2r\|_{\infty}$$

$$|Du(x,y) - D P_h u(x,y)| \leq 3 \frac{h}{\sin(\theta_0)} \sup_{xy \in S_2} |D^2r(x,y)|$$

$$\text{et } \|u - P_h u\|_{H^2} \leq Ch \sup_{xy \in S_2} |D^2r|$$

Preuve: Dans  $T_1$ , on considère les restrictions des fonctions  $u$ :

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ sont barycentriques}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1(x,y) + \lambda_2(x,y) + \lambda_3(x,y) = 1 \\ & x_1\lambda_1(x,y) + x_2\lambda_2(x,y) + x_3\lambda_3(x,y) = x \\ & y_1 - + y_2 - + y_3 - = y \end{aligned}$$

et  $P_h u(x,y) = u(x_1, y_1)\lambda_1(x,y) + u(x_2, y_2)\lambda_2(x,y) + u(x_3, y_3)\lambda_3(x,y)$

$$\Rightarrow \nabla(P_h u)(x,y) = u(x_1, y_1)\nabla\lambda_1(x,y) + u(x_2, y_2)\nabla\lambda_2(x,y) + u(x_3, y_3)\nabla\lambda_3(x,y)$$

Développement de Taylor:  $u(x_i, y_i) = u(x, y) + \vec{MA}_i \cdot \nabla u(x, y) + \frac{1}{2} \vec{MA}_i \cdot D^2 u(\xi, \eta) \vec{MA}_i$

$$\Rightarrow P_h(u)(x,y) = u(x,y) \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}_{=1} + \underbrace{\vec{MA}_1 \cdot \nabla u \lambda_1 + \vec{MA}_2 \cdot \nabla u \lambda_2 + \vec{MA}_3 \cdot \nabla u \lambda_3}_{\underbrace{[\vec{MA}_1 + \lambda_2 \vec{MA}_2 + \lambda_3 \vec{MA}_3]}_{= \vec{OM}} \cdot \nabla u}$$

$\stackrel{\text{"car barycentre}}{\text{on en cas}} = \cancel{\sum_{i=1}^3 \lambda_i \vec{OA}_i} - \vec{OM} \sum_{i=1}^3 \lambda_i$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \cancel{(\vec{MA}_i \cdot D^2 u(\xi, \eta) \vec{MA}_i)} \lambda_i(x,y)$$

De même  $\nabla^2 P_h u(x,y) = \nabla^2 u(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \cancel{\nabla \lambda_i \vec{MA}_i \cdot D^2 u(\xi, \eta) \vec{MA}_i}$

d'où les résultats

Rmq: L'erreur la plus importante est produite par le terme sur les  $D$ .  
 Cette erreur est minimale si  $\frac{h}{\sin \theta_0}$  est min.

Pour tous les triangles de plus grande côté de longueur  $h$ , celui plus large / ce terme sera minimal. Mais celui plus large  $\sin(\theta_0)$  sera maximal.

$\Rightarrow$  forme optimale: triangle équilatéral.

## II - Analyse d'erreur en cas d'intégration numérique

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tq} \\ \quad \alpha(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

$$\text{min } (\ell_h^*) \left| \begin{array}{l} \text{Träger } u_h^* \in V_h \text{ bzg} \\ \alpha_h(u_h^*, v_h) = \ell_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

$a_h, b_h$ : approx par quadrature num des forces a et b  
 $u_h^*$  sol approchée du nouveau pb Ph.

## Deux questions :

19 Le næveau pb admet-il  $\exists!$  sol?

2) Error concise? ie  $\|u - u_h^*\|_{H^2}$

*19* La rép à la question 1 est donnée par Lao Biogram.  
Il faut que ch  $V_i$ -elliptique et cardines

Comme  $V_1$  est de dimension 1,  $a_1$  et  $b_1$  sont continues.

Par contre si l'on sait que  $V_h$  est elliptique, il faut impaire à la formule (1) de substituer.

- a • formule à coef > 0
  - b • nbre de p't suffisants

• si  $P_k$  en dim 1, 2 ou 3, il faut que le libellé de poly d'intg per élts soit tel que il suffise à définir de façon unique un poly  $P_{k-1}$ .

• Si  $\Omega_2$ , idem mais plus facile de  $\Omega_2$ .

Ex 9 Thm: Si au calcul de  $P_k$ , une formule de quad. exacte si l'exp des polys  $P_{2k-2}$  assure une erreur d'intg en norme  $H^1$  en  $O(h^2)$  donc du W croit que l'erreur d'interp.

L'erreur globale reste alors d'ordre  $k$

Idee p10:  $\Omega_k$  si le quadr. est exacte si  $\Omega_{2k-1}$

## Causígenas práticas

Dim 1

Pb modale: Trouver  $u \in H_0^1(a, b)$  tq  $a(u, v) = f(v)$ ,  $\forall v \in H_0^1$

$$a(u, v) = \int_a^b u'v' + uv dx, \quad f(v) = \int_a^b fv dx$$

Elem P<sub>1</sub>: Une formule d'ordre 0 à un pt suffisant

On choisit apprendant unel<sup>t</sup> la forme des trapèzes qui donne une err en  $O(h^2)$  en norme  $L^2$  et conduit à des mat. de masse diag.

Elem P<sub>2</sub>: Une formule d'ordre 2 suffit

On parle alors ~~aussi~~ Gauss Legendre ou Simpson

Elem P<sub>3</sub>: Une formule d'ordre  $2k+2 \approx k$  pts suffit

Dim 2: Pb  $a(u, v) = f(v)$  ds  $H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} (u - \bar{u}) v dx dy + \iint_{\Omega} u v dx dy$$

$$\bar{f}(v) = \iint_{\Omega} fv dx dy$$

P<sub>1</sub>: Formule d'ordre 0 suffit. On prend apprendant

$$\iint_{\Omega} F(x, y) dx dy = \frac{\text{Aire}(\Omega)}{3} (F(A_1) + F(A_2) + F(A_3))$$

→ err :  $O(h^2)$  en norme  $L^2$   
et mat. masse diag

P<sub>2</sub>: Formule ordre 2  $\approx 3$  pts suffit

$$\iint_{\Omega} F(x, y) dx dy = \frac{\text{Aire}(\Omega)}{3} (F(A_{1,2}) + F(A_{1,3}) + F(A_{2,3}))$$

pts  
différents

P<sub>k</sub>: Formule  $O(2k+2)$ ,  $\frac{k(k+1)}{2}$  pts

P<sub>1</sub>: Formule exacte si  $\Omega$  à h<sup>1/2</sup>

$$\iint_{\Omega} F(x, y) dx dy \approx \frac{1}{4} (F(A_1) + F(A_2) + F(A_3) + F(A_4))$$

→  $O(h^2)$  en  $L^2$

mat. masse diagonale