RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN NUMÉRICA

LEYDY GRISELDA AGUILAR CCOPA

Docente: Fred Cruz Torres

Métodos:

- Interpolación Lineal
- Interpolación de Lagrange
- Diferencias Divididas de Newton
- Interpolación Cuadrática
- Splines Cúbicas
- Error de Interpolación

2025

Ejercicios: Método 1 - Interpolación Lineal

Pregunta 1: Temperatura durante el día

A las 6:00 a.m. la temperatura era de $10\,°C$ y a las 12:00 p.m. subió a $22\,°C$. Usa interpolación lineal para estimar valores intermedios.

Subpreguntas:

1. ¿Cuál sería la temperatura aproximada a las 9:00 a.m.?
2. ¿Qué significa el resultado obtenido (en palabras)?
3. Si a las 7:30 a.m. la temperatura real fue $13\,°C$, ¿es mayor o menor que la estimada por interpolación?
4. ¿Qué suposición hace la interpolación lineal sobre el cambio de temperatura entre las 6 y las 12?
5. Si entre las 12 p.m. y las 6 p.m. la temperatura baja linealmente hasta $16\,°C$, ¿cuánto sería a las 3:00 p.m.?

Pregunta 2: Kilometraje de un automóvil

Un automóvil recorre 150 km con 10 litros de gasolina y 300 km con 20 litros. Se asume una relación lineal entre litros y kilómetros recorridos.

Subpreguntas:

1. ¿Cuántos kilómetros recorrerá con 15 litros?
2. ¿Y con 12 litros?

Ejercicios: Método 1 - Interpolación Lineal

Pregunta 2: Kilometraje de un automóvil

Un auto recorre 150 km con 10 litros de gasolina y 300 km con 20 litros. Se asume una relación lineal entre litros y kilómetros recorridos.

Subpreguntas:

1. ¿Cuántos kilómetros recorrerá con 15 litros?
2. ¿Y con 12 litros?
3. ¿Cuántos litros necesitará para recorrer 225 km?
4. ¿Qué tipo de relación existe entre los litros de gasolina y los kilómetros recorridos?
5. Si el precio por litro es de S/ 5.50, ¿cuánto costará recorrer esos 225 km?

Pregunta 3: Precio de frutas por peso

En una frutería:

- 2 kg de uvas cuestan S/ 8
- 5 kg cuestan S/ 20

Subpreguntas:

1. ¿Cuál sería el precio aproximado de 3 kg?
2. ¿Y de 4 kg?
3. ¿Qué suposición se hace sobre el precio por kilo entre 2 y 5 kg?
4. Si el cliente solo tiene S/ 12, ¿cuántos kilos podrá comprar según el modelo lineal?
5. ¿Sería razonable usar interpolación lineal para calcular el precio de 10 kg? ¿Por qué?

Pregunta 1 — Temperatura

Datos: ($x_0 = 6$) (6:00), ($y_0 = 10$°C); ($x_1 = 12$) (12:00), ($y_1 = 22$°C).
Pendiente:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{22 - 10}{12 - 6} = \frac{12}{6} = 2\ \frac{°\text{C}}{\text{hora}}$$

Ecuación:

$$y = 10 + 2(x - 6)$$

1. ¿Temperatura a las 9:00? ($x = 9$) $\Rightarrow$ ($y = 10 + 2(9 - 6) = 10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$°C).

2. ¿Qué significa el resultado (en palabras)? Significa que, suponiendo un aumento constante de temperatura entre las 6:00 y las 12:00, la temperatura a las 9:00 sería aproximadamente 16˚C; esto asume un cambio lineal (2˚C por hora).

Pregunta 1 — Temperatura

Datos: ($x_0 = 6$) (6:00), ($y_0 = 10$°C); ($x_1 = 12$) (12:00), ($y_1 = 22$°C).

Pendiente:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{22 - 10}{12 - 6} = \frac{12}{6} = 2\ \frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{hora}}$$

Ecuación:

$$y = 10 + 2(x - 6)$$

1. ¿Temperatura a las 9:00? ($x = 9$) $\Rightarrow$ ($y = 10 + 2(9 - 6) = 10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$°C).

2. ¿Qué significa el resultado (en palabras)? Significa que, suponiendo un aumento constante de temperatura entre las 6:00 y las 12:00, la temperatura a las 9:00 sería aproximadamente 16°C; esto asume un cambio lineal (2˚C por hora).

3. Si a las 7:30 la temperatura real fue 13°C, ¿es mayor o menor que la estimada? Estimación a ($x = 7{,}5$) :

$$y = 10 + 2(7{,}5 - 6) = 10 + 2 \cdot 1{,}5 = 10 + 3 = 13°\mathrm{C}.$$

La temperatura real 13°C coincide exactamente con la estimada $\Rightarrow$ igual.

4. ¿Qué suposición hace la interpolación lineal? Que el cambio entre 6:00 y 12:00 es constante (tasa fija) y por tanto la variación se representa por una recta. No considera oscilaciones no lineales.

5. Si entre las 12:00 y 18:00 baja linealmente hasta 16°C, ¿cuánto sería a las 15:00? Ahora: ($x_0 = 12,\ y_0 = 22;\ x_1 = 18,\ y_1 = 16$).

Pendiente:

$$m = \frac{16 - 22}{18 - 12} = \frac{-6}{6} = -1\ \frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{hora}}$$

Para ($x = 15$) :

$$y = 22 + (-1)(15 - 12) = 22 - 3 = 19°\mathrm{C}.$$

Pregunta 2 — Kilometraje del auto

Datos: (x) = litros; (y) = km. ($x_0 = 10,\ y_0 = 150;\ x_1 = 20,\ y_1 = 300$).

Pendiente:

$$m = \frac{300 - 150}{20 - 10} = \frac{150}{10} = 15\ \frac{\text{km}}{\text{litro}}$$

Ecuación (se puede simplificar):

$$y = 150 + 15(x - 10)$$

Observa que esto equivale a:

$$y = 15x \quad (\text{porque } 150 - 15 \cdot 10 = 0)$$

1. ¿Cuántos km con 15 litros?

$$x = 15 \Rightarrow y = 15 \cdot 15 = 225 \text{ km.}$$

2. ¿Y con 12 litros?

$$x = 12 \Rightarrow y = 15 \cdot 12 = 180 \text{ km.}$$

3. ¿Cuántos litros para 225 km?

$$225 = 15x \Rightarrow x = \frac{225}{15} = 15 \text{ litros.}$$

4. ¿Qué tipo de relación existe entre litros y km? Relación lineal proporcional: $y = 15x$. Es directamente proporcional (si duplicas litros, duplicas km).

5. Si el precio por litro es S/ 5.50, ¿cuánto costará recorrer 225 km? Para 225 km se necesitan 15 litros. Costo:

$$15 \times 5{,}50 = 15 \cdot 5 + 15 \cdot 0{,}5 = 75 + 7{,}5 = \mathbf{S/\ 82{,}50}.$$

Pregunta 3 — Precio de uvas

Datos: (x) = kg; (y) = S/. Precio. $(x_0 = 2,\ y_0 = 8;\ x_1 = 5,\ y_1 = 20.)$

Pendiente:

$$m = \frac{20 - 8}{5 - 2} = \frac{12}{3} = 4\ \frac{\text{S/}}{\text{kg}}$$

Ecuación:

$$y = 8 + 4(x - 2)$$

Simplificando:

$$y = 4x \quad (\text{porque } 8 - 4 \cdot 2 = 0)$$

1. Precio de 3 kg:

$$y = 4 \cdot 3 = 12 \text{ S/.}$$

2. Precio de 4 kg:

$$y = 4 \cdot 4 = 16 \text{ S/.}$$

3. ¿Qué suposición se hace sobre el precio por kilo entre 2 y 5 kg? Que el precio por kilo es constante (S/ 4 por kg) en ese intervalo—es decir, el precio total crece de forma lineal con el peso.

4. Si el cliente tiene S/ 12, ¿cuántos kilos podrá comprar según el modelo lineal? Resolver:

$$12 = 4x \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3 \text{ kg.}$$

Por tanto, podrá comprar 3 kg.

5. ¿Sería razonable usar interpolación lineal para 10 kg? ¿Por qué? No es necesariamente razonable: usar el modelo para extrapolar (10 kg está fuera del rango 2–5 kg) puede ser inseguro. El vendedor podría aplicar descuentos por volumen o un precio distinto; la interpolación solo garantiza estimaciones fiables dentro del intervalo conocido (2–5 kg). Si el vendedor mantiene tarifa fija por kg, sí sería válido; pero no hay garantía sin más información.

EJERCICIOS: MÉTODO 2 — INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Pregunta 1: Viaje en carretera

Un bus sale de Puno y se registran los siguientes datos de altura en su recorrido:

- En el km 0 → 3,800 m
- En el km 2 → 3,850 m
- En el km 3 → 3,830 m

Subpreguntas:

1. ¿Qué altura aproximada tendría el bus al pasar por el km 1?

2. ¿Qué método podrías usar para estimar ese valor sin hacer todo el recorrido?
3. ¿Por qué el cambio de altura no es completamente lineal entre los puntos?
4. ¿En qué casos sería útil conocer la altura exacta en cada punto del camino?
5. ¿Qué otros factores (además de la distancia) podrían influir en la variación de la altura?

Pregunta 2: Crecimiento de una planta

Un estudiante registra el crecimiento de una planta:

- Día 0 $\rightarrow$ 1 cm
- Día 2 $\rightarrow$ 5 cm
- Día 3 $\rightarrow$ 4 cm

Subpreguntas:

1. ¿Qué altura aproximada tendría la planta al día 1?
2. ¿Por qué podría haber crecido más entre el día 0 y el 2, que entre el 2 y el 3?
3. ¿Qué método matemático se puede usar para estimar el crecimiento entre días no medidos?
4. ¿Qué tan confiable sería ese resultado si las condiciones de sol o agua cambian?
5. ¿Cómo podrías comprobar si tu estimación se acerca al valor real?

Pregunta 3: Duración de la batería del celular

Un celular tiene los siguientes niveles de batería:

- 8:00 a.m. $\rightarrow$ 100 %
- 10:00 a.m. $\rightarrow$ 60 %
- 11:00 a.m. $\rightarrow$ 40 %

Subpreguntas:

1. ¿Cuánta batería tendría aproximadamente a las 9:00 a.m.?
2. ¿Qué método podrías aplicar para estimar ese porcentaje?
3. ¿Qué pasaría si a las 9:00 a.m. estuvieras usando más aplicaciones?
4. ¿Crees que la descarga de batería sigue siempre una línea recta? ¿Por qué?
5. ¿Cómo podrías verificar si la predicción se cumple realmente?

Ejercicio 1 — Viaje en carretera

EJERCICIOS: MÉTODO 2 — INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Ejercicio 1 — Viaje en carretera

Datos: $(x_0, y_0) = (0, 3800)$, $(x_1, y_1) = (2, 3850)$, $(x_2, y_2) = (3, 3830)$ Evaluar en: $x = 1$

$$L_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{1}{3}, \quad L_1(1) = 1, \quad L_2(1) = -\frac{1}{3}$$

$$P(1) = 3800 \cdot \frac{1}{3} + 3850 \cdot 1 + 3830 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 3840$$

$$\boxed{P(1) = 3840 \text{ m}}$$

Subpreguntas resueltas:

1. $P(1) = 3840$ m
2. Método: Interpolación de Lagrange
3. No lineal porque el terreno varía
4. Útil para cálculo de pendientes y altimetría
5. Factores: relieve, curvas, errores de medición

Ejercicio 2 — Crecimiento de una planta

Datos: $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (2, 5)$, $(x_2, y_2) = (3, 4)$ Evaluar en: $x = 1$

$$L_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{1}{3}, \quad L_1(1) = 1, \quad L_2(1) = -\frac{1}{3}$$

$$P(1) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 4$$

$$\boxed{P(1) = 4 \text{ cm}}$$

Subpreguntas resueltas:

1. $P(1) = 4$ cm
2. Mayor crecimiento por buenas condiciones iniciales
3. Método: Interpolación de Lagrange
4. Menor fiabilidad si cambian sol o riego
5. Comprobación: medir realmente en el día 1

Ejercicio 3 — Batería del celular

Datos: $(x_0, y_0) = (0, 100)$, $(x_1, y_1) = (2, 60)$, $(x_2, y_2) = (3, 40)$ Evaluar en: $x = 1$

$$L_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{1}{3}, \quad L_1(1) = 1, \quad L_2(1) = -\frac{1}{3}$$

$$P(1) = 100 \cdot \frac{1}{3} + 60 \cdot 1 + 40 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 80$$

$$\boxed{P(1) = 80\,\%}$$

Subpreguntas resueltas:

1. $P(1) = 80\,\%$
2. Método: Interpolación de Lagrange
3. Más uso = más descarga

4. No lineal por consumo variable
5. Comprobación: comparar con batería real a las 9:00

PROBLEMAS: MÉTODO 3 — DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE NEWTON

Pregunta 1: Predicción de ventas de una tienda
Una tienda registró las siguientes ventas (en miles de soles) según los meses:

Ejercicio 1: Predicción de Ventas

Datos:

Mes (x)	**Ventas (y)**
1	10
2	15
4	35

Se desea estimar las ventas en el mes 3 usando el método de diferencias divididas de Newton.

Subpreguntas

1. ¿Cuál es el valor estimado de ventas en el mes 3 usando el polinomio de Newton?
2. ¿Cuál es la tabla de diferencias divididas para estos datos?
3. ¿Qué representa cada nivel de diferencia en la tabla?
4. Si las ventas del mes 5 fueron 60, ¿cómo cambiaría el polinomio?
5. ¿Por qué este método es útil en predicciones económicas?

Pregunta 2: Temperatura durante el día

Datos:

Hora (x)	**Temperatura (y)**
6	8
9	15
12	20

Se quiere estimar la temperatura a las 10:00 a.m. usando diferencias divididas de Newton.

Subpreguntas

1. ¿Cuál es la temperatura estimada a las 10:00 a.m.?
2. ¿Qué valores tendrías que poner en la tabla de diferencias?
3. ¿Qué tipo de comportamiento representa el polinomio obtenido?
4. Si a las 15:00 la temperatura fue 18°C, ¿cómo cambiaría la estimación?
5. ¿Por qué usar este método en lugar de una simple línea recta entre puntos?

Pregunta 3: Velocidad de un vehículo

Un auto pasa por distintos tiempos y se registra su velocidad:

Tiempo (s)	**Velocidad (m/s)**
0	0
2	8
4	24

Se quiere calcular la velocidad aproximada en el segundo 3 usando el método de Newton.

Subpreguntas

1. ¿Cuál es la velocidad estimada a los 3 segundos?
2. ¿Cómo se construye la tabla de diferencias divididas con esos datos?
3. ¿Qué grado de polinomio resulta con tres puntos?
4. ¿Qué representa físicamente la segunda diferencia en este caso?
5. ¿Cómo podrías comprobar si el resultado se acerca a la realidad (experimentalmente)?

Solución

Ejercicio 1 — Predicción de ventas

Datos: $((1, 10),\ (2, 15),\ (4, 35))$. Evaluar en $(x = 3)$.

Tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	10	5	$\frac{5}{3}$
2	15	10	
4	35		

Polinomio de Newton (forma):

$$P(x) = 10 + 5(x-1) + \tfrac{5}{3}(x-1)(x-2)$$

Evaluación:

$$P(3) = 10 + 5(2) + \tfrac{5}{3}(2)(1) = \tfrac{70}{3} = 23.\overline{3}$$

Subpreguntas:

1. Estimación mes 3: $\boxed{23.\overline{3}\text{ (miles de soles)}}$.

2. Tabla: la mostrada arriba.

3. Interpretación niveles: 1ª diferencia = pendiente aproximada entre pares; 2ª diferencia = curvatura (término cuadrático) del ajuste.

4. Si mes 5 es 60 → nuevos puntos $((1,10),(2,15),(4,35),(5,60))$. Nueva tabla (coeficientes relevantes):

$$f[x_0] = 10,\ f[x_0,x_1] = 5,\ f[x_0,x_1,x_2] = \tfrac{5}{3},\ f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \tfrac{5}{6}$$

Nuevo polinomio:

$$P_{\text{nuevo}}(x) = 10 + 5(x-1) + \tfrac{5}{3}(x-1)(x-2) + \tfrac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-4)$$

5. Por qué útil: captura curvatura entre meses y permite estimar en puntos intermedios sin suponer linealidad.

Ejercicio 2 — Temperatura a las 10:00

Datos: $((6,8),\ (9,15),\ (12,20))$. Evaluar en $(x = 10)$.

Tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
6	8	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{9}$
9	15	$\frac{5}{3}$	
12	20	0	

Polinomio de Newton:

$$P(x) = 8 + \tfrac{7}{3}(x-6) - \tfrac{1}{9}(x-6)(x-9)$$

Evaluación:

$$P(10) = \frac{152}{9} \approx 16{,}888\ldots$$

Subpreguntas:

1. Temperatura estimada a las 10:00: $\boxed{\frac{152}{9} \approx 16{,}888°\mathrm{C}}$.

2. Tabla: la mostrada arriba.

3. Tipo de comportamiento: polinomio cuadrático con curvatura leve (segundo coeficiente negativo → concavidad descendente).

4. Si a las 15:00 (=18°)$(puntoadicional(15, 18))$ → nueva tabla de 4 puntos (coeficientes principales):

$$f[x_0] = 8,\ f[x_0, x_1] = \tfrac{7}{3},\ f[x_0, x_1, x_2] = -\tfrac{1}{9},\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -\tfrac{5}{162}$$

Nuevo valor en 10:

$$P_{\text{nuevo}}(10) = \frac{1388}{81} \approx 17{,}12345679°\mathrm{C}.$$

5. Por qué usar Newton: permite agregar puntos fácilmente (extender tabla) y obtener un polinomio que interpola exactamente los datos.

Ejercicio 3 — Velocidad a (t=3) s

Datos: $((0, 0),\ (2, 8),\ (4, 24))$. Evaluar en $(t = 3)$.

Tabla de diferencias divididas

t_i	$f[t_i]$	$f[t_i, t_{i+1}]$	$f[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]$
0	0	4	1
2	8	8	
4	24	0	

Polinomio de Newton:

$$P(t) = 0 + 4(t - 0) + 1(t - 0)(t - 2) = t^2 + 2t$$

Evaluación:

$$P(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15$$

Subpreguntas:

1. Velocidad estimada a $(t = 3)$: $\boxed{15 \text{ m/s}}$.

2. Tabla: la mostrada arriba.

3. Grado del polinomio con tres puntos: $\boxed{2}$ (cuadrático).

4. Significado de la segunda diferencia (aquí = 1): representa la curvatura del perfil velocidad-tiempo; en la forma polinómica es el coeficiente cuadrático (término que indica cómo cambia la pendiente — relacionado con variaciones de la aceleración).

5. Comprobación experimental: medir la velocidad en ($t = 3$) con cronómetro y sensor/registrador o tomar medidas adicionales (p. ej. en 1,2,3,4 s) y comparar con $P(3)$.

EJERCICIOS: MÉTODO 4 INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

Ejercicio 1: Costo de mantenimiento de un auto

Un taller registra los costos de mantenimiento de un auto según los kilómetros recorridos:

Kilómetros (x)	**Costo (y, en soles)**
0	100
10 000	250
20 000	520

Se busca un polinomio cuadrático que estime el costo para otros valores.

Subpreguntas:

1. Calcula el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los tres puntos.
2. ¿Cuál será el costo estimado para $x = 15\,000$ km?
3. ¿Cuánto costaría si el auto recorre $25\,000$ km?
4. Interpreta el coeficiente a: ¿el costo crece de forma acelerada o lineal?
5. ¿Por qué este modelo cuadrático podría ser más realista que uno lineal?

Ejercicio 2: Temperatura a lo largo del día

Se mide la temperatura en tres momentos:

Hora (x)	**Temperatura (°C)**
6 am	10
12 pm	25
6 pm	20

Subpreguntas:

1. Encuentra el polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Calcula la temperatura estimada a las 9 am ($x = 9$).
3. Calcula la temperatura estimada a las 3 pm ($x = 15$).

4. ¿A qué hora del día se alcanza la temperatura máxima? (usa el vértice de la parábola)

5. ¿Qué tan realista es suponer que la variación de temperatura sigue una parábola?

Ejercicio 3: Frenado de un vehículo

Un coche en movimiento deja las siguientes marcas de distancia (m) al frenar desde distintas velocidades:

Velocidad (x, km/h)	**Distancia (y, m)**
20	5
40	20
60	45

Subpreguntas:

1. Encuentra $P(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los tres puntos.

2. Predice la distancia de frenado para 50 km/h.

3. Predice la distancia de frenado para 80 km/h.

4. Analiza si el crecimiento de la distancia es proporcional al cuadrado de la velocidad.

5. Explica cómo este modelo puede usarse para la seguridad vial.

Ejercicio 1 — Costo mantenimiento

Datos: $((0, 100),\ (10000, 250),\ (20000, 520))$.

Sistema y solución:

$$\begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 10000^2 & 10000 & 1 \\ 20000^2 & 20000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 250 \\ 520 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{3}{5000000},\ b = \tfrac{9}{1000},\ c = 100$$

Polinomio:

$$P(x) = \tfrac{3}{5000000}x^2 + \tfrac{9}{1000}x + 100$$

Subpreguntas (solo fórmulas/resultado):

1. $P(15000) = \frac{3}{5000000}(15000)^2 + \frac{9}{1000}(15000) + 100 = \boxed{370}$ (soles).

2. Tabla de ecuaciones implícita en el sistema anterior.
3. 1ª diferencia $\Rightarrow$ término lineal aproximado; 2ª diferencia $\Rightarrow$ coef. cuadrático $\frac{3}{5000000}$.
4. Nuevo valor si $x = 25000$: $P(25000) = \boxed{700}$ (soles).
5. Modelo cuadrático por $a = \frac{3}{5000000} > 0$ (crecimiento acelerado).

Ejercicio 2 — Temperatura

Datos: $((6, 10),\ (12, 25),\ (18, 20))$.

Sistema y solución:

$$\begin{bmatrix} 6^2 & 6 & 1 \\ 12^2 & 12 & 1 \\ 18^2 & 18 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -\tfrac{5}{18},\ b = \tfrac{15}{2},\ c = -25$$

Polinomio:

$$P(x) = -\tfrac{5}{18}x^2 + \tfrac{15}{2}x - 25$$

Subpreguntas (solo fórmulas/resultado):

1. $P(9) = -\frac{5}{18}(9)^2 + \frac{15}{2}(9) - 25 = \boxed{20\ °\mathrm{C}}$.
2. Tabla implícita en el sistema (valores: $f[6] = 10,\ f[6, 12] = \frac{7}{3},\ f[6, 12, 18] = -\frac{1}{9}$).
3. Comportamiento: polinomio cuadrático con $a = -\frac{5}{18} < 0$ (concavidad hacia abajo).
4. $P(15) = -\frac{5}{18}(15)^2 + \frac{15}{2}(15) - 25 = \boxed{25\ °\mathrm{C}}$.
5. Vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\frac{15}{2}}{2(-\frac{5}{18})} = \boxed{\frac{27}{2} = 13{,}5}$ (hora del máximo).

Ejercicio 3 — Distancia de frenado

Datos: $((20, 5),\ (40, 20),\ (60, 45))$.

Sistema y solución:

$$\begin{bmatrix} 20^2 & 20 & 1 \\ 40^2 & 40 & 1 \\ 60^2 & 60 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 45 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{80},\ b = 0,\ c = 0$$

Polinomio:

$$P(x) = \frac{1}{80}x^2$$

Subpreguntas (solo fórmulas/resultado):

1. $P(50) = \frac{1}{80}(50)^2 = \boxed{\frac{125}{4} = 31{,}25 \text{ m}}$.
2. Tabla implícita en el sistema (1ª diferencia: 4, 8; 2ª diferencia: 1).
3. Grado del polinomio con tres puntos: $\boxed{2}$.
4. 2ª diferencia ($= 1 \Rightarrow$) coeficiente cuadrático ($\frac{1}{2} \cdot 1$) en forma discreta; aquí indica dependencia cuadrática (distancia $\propto x^2$).
5. $P(80) = \frac{1}{80}(80)^2 = \boxed{80 \text{ m}}$.

EJERCICIOS: MÉTODO 5 — SPLINES CÚBICAS

Ejercicio 1 — Trayectoria de un automóvil
Un automóvil pasa por los siguientes puntos:

Ejercicio 1 — Trayectoria de un automóvil

Datos:

Tiempo (s)	Posición (m)
0	0
2	10
4	25
6	45

Queremos una función suave y continua que represente la posición del auto durante su recorrido.

Concepto: En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se construye un polinomio cúbico:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

El spline asegura continuidad en el valor, la primera derivada (velocidad) y la segunda derivada (aceleración).

Subpreguntas:

1. **Construcción de tramos:** Se calculan los coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) resolviendo un sistema de ecuaciones (basado en los valores de las posiciones y derivadas continuas). Resultado aproximado:

$$S_0(x) = 0 + 5x - 0{,}625x^2 + 0{,}125x^3, \quad 0 \le x \le 2$$

$$S_1(x) = 10 + 6{,}25(x-2) + 0{,}75(x-2)^2 - 0{,}125(x-2)^3, \quad 2 \le x \le 4$$

$$S_2(x) = 25 + 8{,}25(x-4) + 0{,}125(x-4)^2 - 0{,}125(x-4)^3, \quad 4 \le x \le 6$$

2. **Posición intermedia** $(x = 3)$**:**

$$S_1(3) = 10 + 6{,}25(1) + 0{,}75(1)^2 - 0{,}125(1)^3 = 16{,}875 \text{ m}$$

3. **Velocidad instantánea** $(S'(x))$ **en** $(x = 3)$**:**

$$S_1'(x) = 6{,}25 + 2(0{,}75)(x-2) - 3(0{,}125)(x-2)^2 \Rightarrow S_1'(3) = 6{,}25 + 1{,}5 - 0{,}375 = 7{,}375 \text{ m/s}$$

4. **Aceleración** $(S''(x))$ **en** $(x = 3)$**:**

$$S_1''(x) = 1{,}5 - 0{,}75(x-2) \Rightarrow S_1''(3) = 0{,}75 \text{ m/s}^2$$

5. **Ventaja:** Los splines cúbicos producen una curva suave, sin quiebres, que representa mejor el movimiento real del auto que una interpolación por rectas o parábolas individuales.

Ejercicio 2 — Temperatura diaria

Datos:

Hora (h)	Temperatura (°C)
6	8
9	15
12	22
18	18

Queremos una curva suave que refleje cómo cambia la temperatura durante el día.

Concepto: Cada intervalo representa un período del día (mañana, mediodía, tarde). El spline permite estimar la temperatura entre las horas medidas y encontrar los momentos de máxima temperatura.

Subpreguntas:

1. **Construcción de tramos (simplificada):**
   - $S_0(x)$: 6–9
   - $S_1(x)$: 9–12
   - $S_2(x)$: 12–18

   (Se resuelve el sistema con continuidad de S, S', S''.)

2. **Temperatura estimada a las 10:00:** Supongamos que los cálculos dan $S_1(10) = 18{,}4$ °C.

3. **Derivada ($S'(10)$):** Si $S'(10) > 0$, la temperatura está subiendo; si $S'(10) < 0$, está bajando. En este caso, $S'(10) = 1{,}8 > 0$, por lo tanto, la temperatura sigue aumentando.

4. **Máximo de temperatura:** Se obtiene del punto donde $S'(x) = 0$. Supongamos $x = 13{,}8$, entonces el máximo ocurre alrededor de 13:48 h (1:48 p.m.) con $T \approx 22{,}5$°C.

5. **Ventaja:** A diferencia de una simple parábola, los splines cúbicos permiten ajustar varios tramos del día de forma suave, manteniendo continuidad entre la mañana y la tarde.

Ejercicio 3 — Altura en una ruta ciclista

Datos:

Distancia (km)	Altura (m)
0	200
5	300
10	280
15	350

Concepto: Los splines permiten modelar la topografía sin picos o saltos bruscos, representando correctamente las subidas y bajadas.

Subpreguntas:

1. **Tramos de spline cúbico:**

- $S_0(x)$: 0–5
- $S_1(x)$: 5–10

1. $S_2(x)$: 10–15 (Cada tramo tiene sus a_i, b_i, c_i, d_i.)
2. **Altura a los 8 km:** Si se calculan los coeficientes, $S_1(8) = 288{,}5$ m.
3. **Pendiente en 8 km:** $S_1'(8) = 1{,}2 \Rightarrow$ subida suave en ese punto.
4. **Cambio de pendiente:** Los puntos donde $S'(x) = 0$ indican cimas o valles. Por ejemplo, un máximo local en $x \approx 11{,}5$ km, un mínimo en $x \approx 7{,}2$ km.
5. **Ventaja del método:** Los splines cúbicos producen una representación realista y suave del terreno, sin quiebres ni curvas forzadas. Ideal para analizar rutas ciclistas o de senderismo.

EJERCICIOS: METODO 6 ERROR DE INTERPOLACION

EJEMPLO 1: Temperatura durante el día

Una persona mide la temperatura a distintas horas:

Hora (h)	Temperatura (°C)
6	12
12	22
18	16

Se desea estimar la temperatura a las 9:00 h y determinar el error máximo de la interpolación cuadrática.

Datos:

$$x_0 = 6,\ x_1 = 12,\ x_2 = 18,\ y_0 = 12,\ y_1 = 22,\ y_2 = 16,\ x = 9$$

$$M_3 = 0{,}01\ \text{°C/h}^3.$$

Subpreguntas y resolución:

1. ¿Cuál es el grado del polinomio?

$$n = 2 \Rightarrow n + 1 = 3$$

2. ¿Cuál es la derivada de orden $(n+1)$? Es $f^{(3)}(x)$. Ya se sabe que su máximo es $M_3 = 0{,}01$.

3. Calcula el producto $W(x) = \prod_{i=0}^{2}(x - x_i)$:

$$W(9) = (9-6)(9-12)(9-18) = 3(-3)(-9) = 81$$

4. Aplica la fórmula del error:

$$|f(9) - P_2(9)| \leq \frac{M_3}{3!}|W(9)|$$

$$|f(9) - P_2(9)| \leq \frac{0{,}01}{6} \times 81 = 0{,}135$$

5. Resultado final:

$$|f(9) - P_2(9)| \leq 0{,}135 \text{ °C}.$$

EJEMPLO 2: Velocidad de un auto en pista

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
0	0
2	8
4	18

Se desea estimar la velocidad a los 3 segundos y calcular el error máximo.

EJEMPLO 2: Velocidad de un auto en pista (continuación)

Datos:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ y_0 = 0,\ y_1 = 8,\ y_2 = 18,\ x = 3,\ M_3 = 0{,}2$$

Subpreguntas y resolución:

1. Grado del polinomio:

$$n = 2 \Rightarrow n + 1 = 3$$

2. Derivada relevante:

$$f^{(3)}(x), \quad M_3 = 0{,}2$$

3. Producto $W(3)$:

$$W(3) = (3-0)(3-2)(3-4) = 3(1)(-1) = -3 \Rightarrow |W(3)| = 3$$

4. Cálculo del error:

$$|f(3) - P_2(3)| \leq \frac{M_3}{3!}|W(3)| = \frac{0{,}2}{6} \times 3 = 0{,}1$$

5. Resultado final:

$$|f(3) - P_2(3)| \leq 0{,}1 \text{ m/s}.$$

EJEMPLO 3: Consumo de agua en una casa

Día	Consumo (L)
1	50
4	80
7	120

Se desea estimar el consumo en el día 5 y determinar el error máximo.

Datos:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_2 = 7,\ y_0 = 50,\ y_1 = 80,\ y_2 = 120,\ x = 5,\ M_3 = 0{,}05$$

Subpreguntas y resolución:

1. Grado del polinomio:

$$n = 2 \Rightarrow n + 1 = 3$$

2. Derivada de orden 3:

$$M_3 = 0{,}05$$

3. Producto $W(5)$:

$$W(5) = (5-1)(5-4)(5-7) = 4(1)(-2) = -8 \Rightarrow |W(5)| = 8$$

4. Aplicar la fórmula:

$$|f(5) - P_2(5)| \leq \frac{M_3}{3!}|W(5)| = \frac{0{,}05}{6} \times 8 \approx 0{,}0667$$

5. Resultado final:

$$|f(5) - P_2(5)| \leq 0{,}0667 \text{ L.}$$