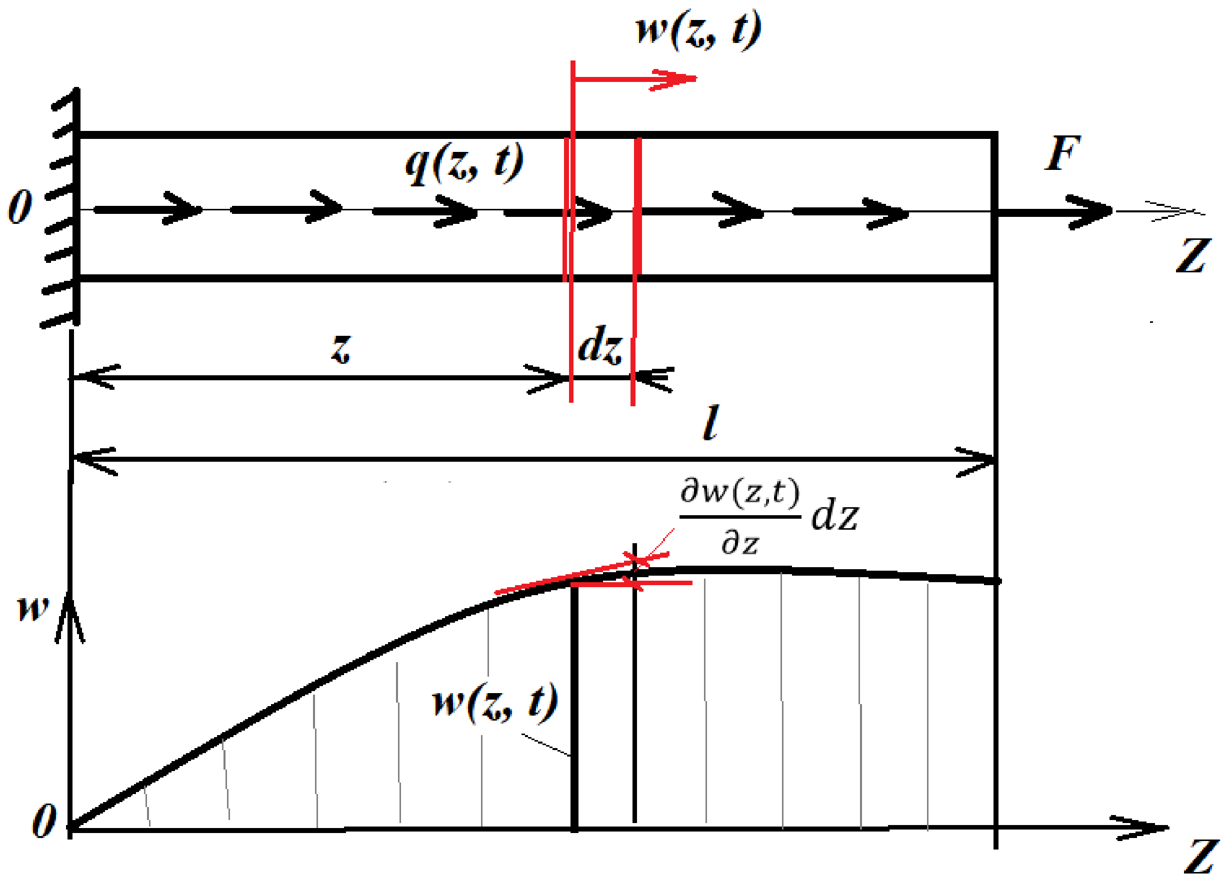
Лекция 13

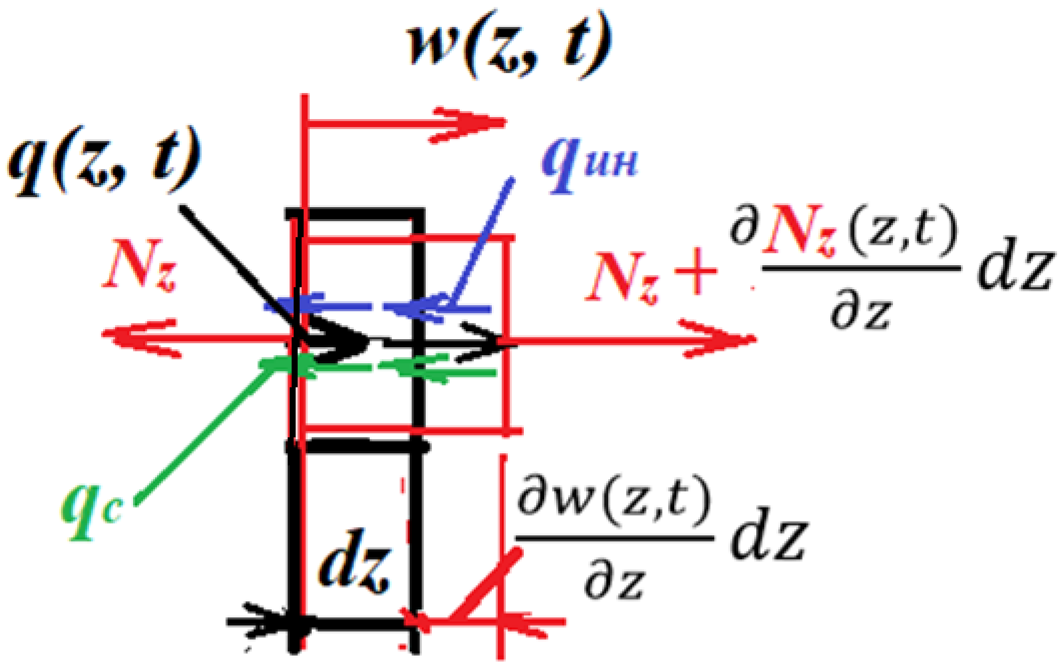
Тема: ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

1.Уравнение движения

Дано: $EA,\ l,\ q(z,t),\ F,\ m$ −масса ед. длины.



Требуется определить закон продольных перемещений поперечных сечений $w(z,t)$.

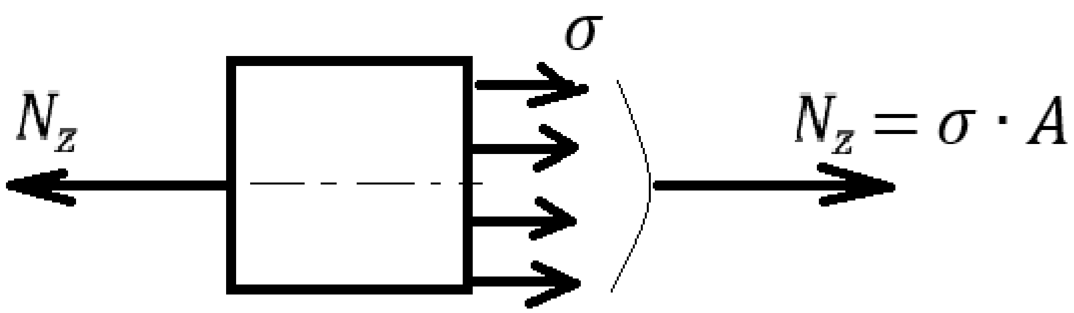


Уравнение динамического равновесия:

$$\sum Z = 0:\ \frac{\partial N_z(z,t)}{\partial z}\cdot dz + q(z,t)\cdot dz - m\cdot\frac{\partial^2 w(z,t)}{dt^2}\cdot dz -$$

$$-b\cdot\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\cdot dz = 0;$$

$$m\cdot\frac{\partial^2 w(z,t)}{dt^2} + b\cdot\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial N_z(z,t)}{\partial z} = q(z,t).$$



$$\sigma = E\varepsilon;\quad N_z = EA\varepsilon = EA\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}.$$

Окончательно получим уравнение движения:

$$m \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{dt^2} + b \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(EA\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right) = q(z,t). \quad (1)$$

Для однородного стержня $EA = const$ и $m = const$, тогда

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{dt^2} + 2n \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{d\,z^2} = \frac{1}{m} \cdot q(z,t).$$

$$2n = \frac{b}{m}, \quad a^2 = \frac{EA}{m} = \frac{EA}{A\rho} = \frac{E}{\rho}.$$

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн;

ρ – плотность материала стержня.

2. Свободные колебания. Собственные частоты и собственные формы колебаний

$$\frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} = 0, \text{ где } a^2 = \frac{E}{\rho}. \qquad (2)$$

Частное решение ищем в форме Фурье (разделения переменных):

$$W(z,t) = f(z) \cdot \varphi(t),$$

$$\frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial t^2} = f(z) \cdot \ddot{\varphi}(t); \quad \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} = f''(z) \cdot \varphi(t).$$

Подставляем в (2)

$$f(z) \cdot \ddot{\varphi}(t) - a^2 \cdot f''(z) \cdot \varphi(t) = 0,$$

,

$f(z) \cdot \ddot{\varphi}(t) = a^2 \cdot f''(z) \cdot \varphi(t),$

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{a^2 \cdot \varphi(t)} = \frac{f''(z)}{f(z)} = -\text{К}^2, \qquad \text{где } \text{К}^2 = const$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0, \; \text{ где } \omega^2 = a^2 \cdot K^2;$$

$$f''(z) + K^2 \cdot f(z) = 0.$$

Решаем второе уравнение:

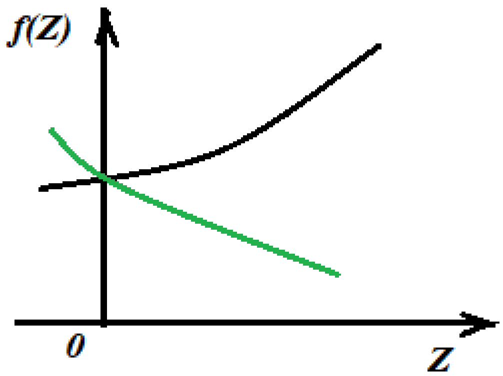
его характеристическое ур-е

$$p^2 + K^2 = 0, \qquad p^2 = -K^2.$$

Если $K^2 \leq 0,$ то корни действительные

$$p_{1,2} = \pm K,$$

колебаний нет $f(z) = C_1 \cdot e^{Kz} + C_2 \cdot e^{-Kz}$



Если $K^2 > 0,$ то корни комплексно − сопряжённые

$$p_{1,2} = \pm i \cdot K,$$

колебания есть

$f(z) = C_1 \cdot \cos Kz + C_2 \cdot \sin Kz$, *поэтому дальше рассматриваем этот случай.*

Аналогично рассматриваем первое ур-е

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0, \text{ где } \omega^2 = a^2 \cdot K^2,$$

его решение

$$\varphi(t) = \mathrm{A}_1 \cdot \cos\omega t + \mathrm{A}_2 \cdot \sin\omega t =$$
$$= \mathrm{B} \cdot \sin(\omega t + \beta).$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УР-Я (2):

$$W(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \cdot \varphi_n(z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cdot \cos K_n z + C_{2n} \cdot \sin K_n z) \cdot B_n \cdot \sin(\omega_n t + \beta_n).$$

ГДЕ $f_n(z)$ – *собственные формы колебаний;*

ω_n – *собственные частоты колебаний;*

C_{1n} и C_{2n} – *константы интегрирования, определяемые из граничных условий;*

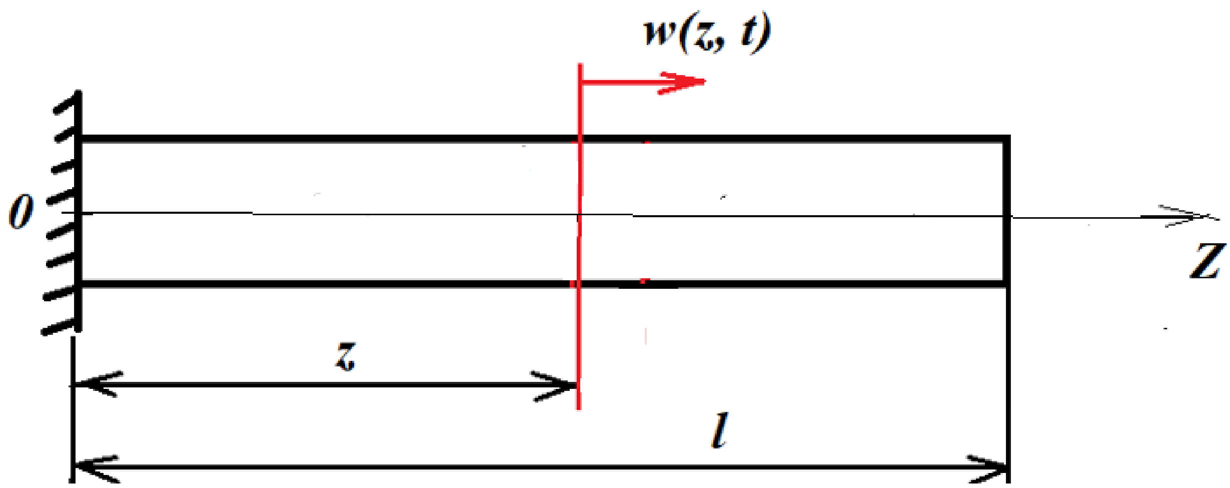
B_n – *константы интегрирования, определяемые из начальных условий;*

β_n – *фазы, определяемые из начальных условий;*

K_n – *собственные числа или коэффициенты форм колебаний.*

ПРИМЕР. Определить собственные частоты и собственные формы колебаний консольного стержня

Дано: $EA=const,\ l,\ m=const$



$$W(z,t) = f(z)\cdot\varphi(t) = f(z)\cdot\sin\omega t,$$

$$f(z) = C_1\cdot\cos Kz + C_2\cdot\sin Kz.$$

Граничные условия:

1) ***Z=0: W(0,t)=0*** $\rightarrow \boldsymbol{f(0) = 0} \rightarrow C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0;\ (1)$

2) ***Z=l:*** $\boldsymbol{N_z = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{df}{dz} = 0 \rightarrow -KC_1\sin Kl +}$
$\boldsymbol{+KC_2\cos Kl = 0}.\ \ (2)$

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0; \\ \boldsymbol{-KC_1\sin Kl + KC_2\cos Kl = 0}. \end{cases}$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \rightarrow C_1 = 0;$$

$$\boldsymbol{KC_2 \cos Kl = 0 \rightarrow \cos Kl = 0};$$

$K_n \cdot l = (n - 0{,}5) \cdot \pi$, *где* $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Собственные числа: $K_n = \frac{(n-0{,}5)\cdot\pi}{l}$.

Собственные частоты:

1) $n = 1, K_1 = \frac{\pi}{2l}, \omega_1 = K_1 \cdot a = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}};$

2) $n = 2, K_2 = \frac{3\pi}{2l}, \omega_2 = K_2 \cdot a = \frac{3\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}};$

3) $n = 3, K_3 = \frac{5\pi}{2l}, \omega_3 = K_3 \cdot a = \frac{5\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}};$

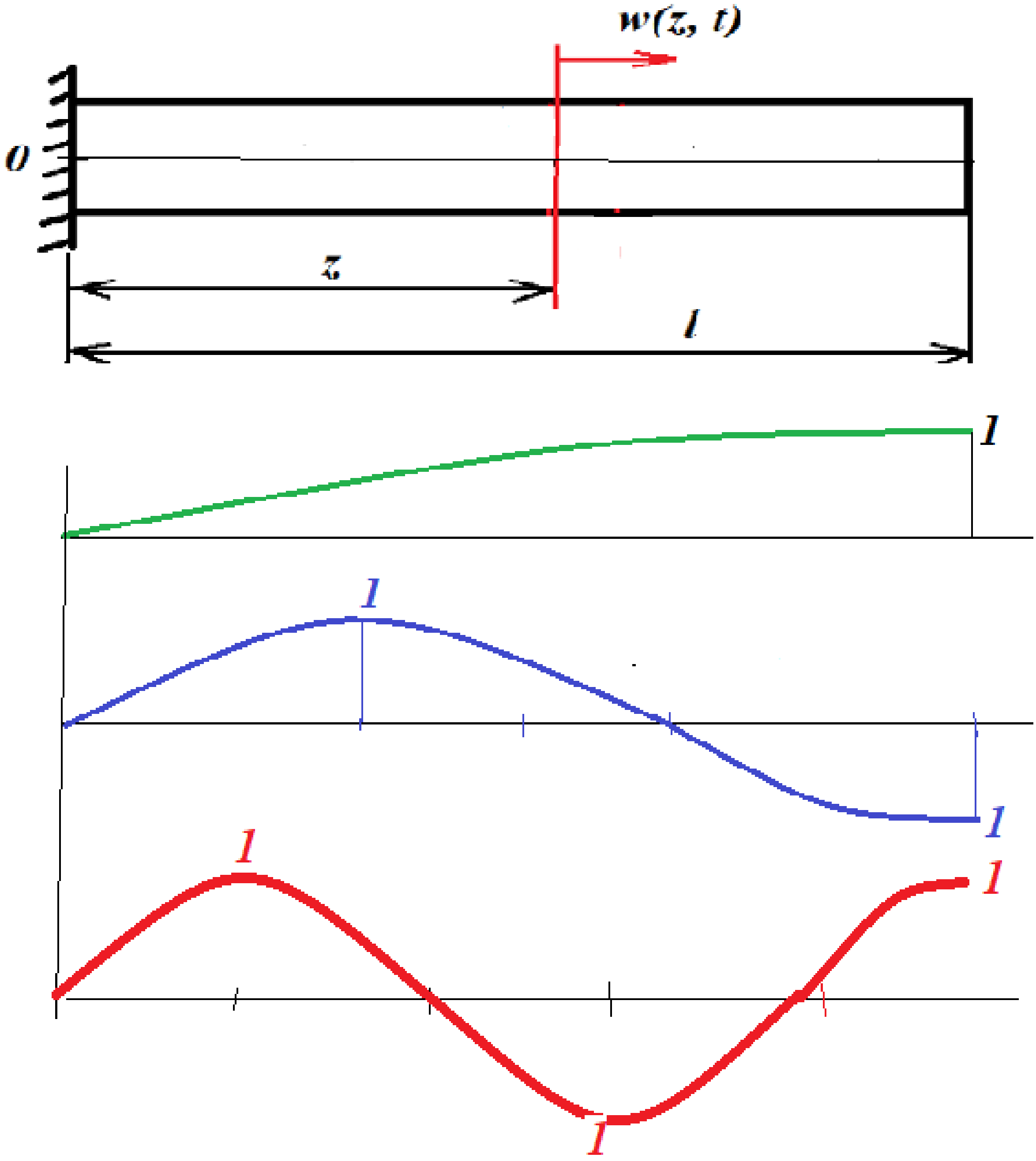
Собственные формы колебаний:

$$f_n(z) = C_2 \cdot \sin K_n z;$$

$$f_1(z) = 1 \cdot \sin\frac{\pi \cdot z}{2l};$$

$$f_2(z) = 1 \cdot \sin\frac{3\pi \cdot z}{2l};$$

$$f_3(z) = 1 \cdot \sin\frac{5\pi \cdot z}{2l};$$



Ортогональность собственных форм:

При $i \neq j$ *должно* $\left(f_i, f_j\right) = 0;$

$$\int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz = \int_0^l \sin\frac{\pi z}{2l} \cdot \sin\frac{3\pi z}{2l} \cdot dz = 0,$$

$$\int_0^l f_1(z) \cdot f_3(z) \cdot dz = \int_0^l \sin\frac{\pi z}{2l} \cdot \sin\frac{5\pi z}{2l} \cdot dz = 0,$$

$$\int_0^l f_2(z) \cdot f_3(z) \cdot dz = \int_0^l \sin\frac{3\pi z}{2l} \cdot \sin\frac{5\pi z}{2l} \cdot dz = 0.$$