**Лекция 16**

## Тема: ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

Дано: $EI_x, l, m -$ масса ед. длины, $b -$ коэф. вязкого сопротивления ед. длины, $q(z,t)$ – распределенная нагрузка.

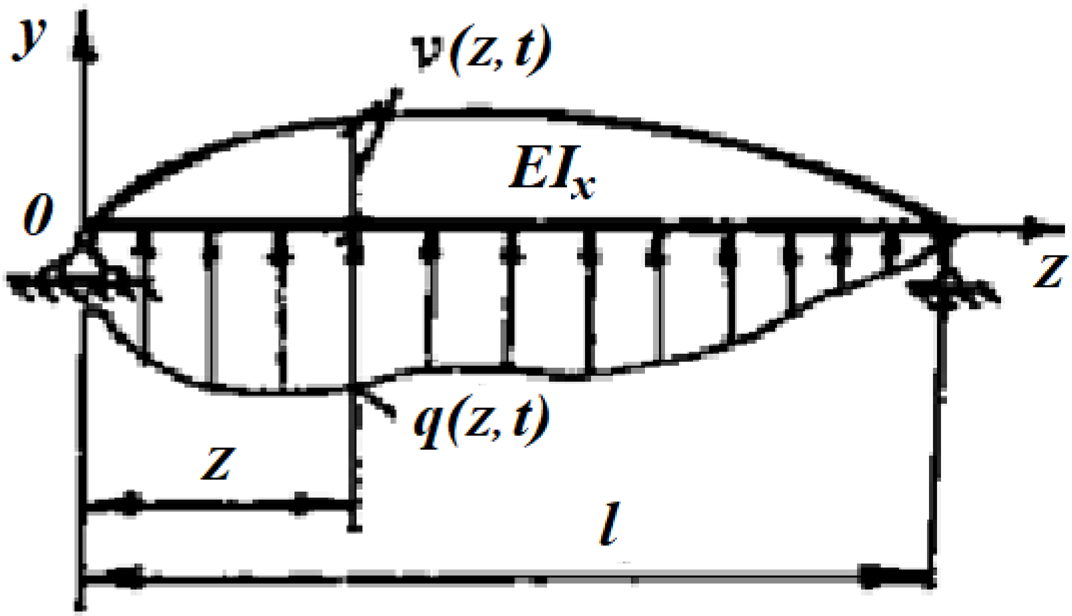



*Рис. 6.6*

*Подлежит определению функция прогибов* $v = (z, t)$.

*Из курса сопротивления материалов:*

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x;$$

$$\frac{d}{dz}\left(EI_x \frac{d^2 v}{dz^2}\right) = \frac{dM_x}{dz} = Q_y;$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EI_x \frac{d^2 v}{dz^2}\right) = \frac{d^2 M_x}{dz^2} = \frac{dQ_y}{dz} = q(z).$$

*В нашей задаче имеем интенсивности распределенных нагрузок:*

$$q_{\text{ин}} = m \frac{\partial^2 \nu(z,t)}{\partial t^2}; \quad q_{\text{с}} = b \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}; \quad q(z,t).$$

Дифференциальное уравнение изгиба балки будет иметь вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right) = q(z,t) - m \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} - b \frac{\partial v(z,t)}{\partial t},$$

или

$$m \frac{\partial^2 \nu(z,t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI_x \frac{\partial^2 \nu(z,t)}{\partial z^2}\right) = q(z,t).$$

Для однородной балки $EI_x, m, b = const$:

$$m \frac{\partial^2 \nu(z,t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + EI_x \frac{\partial^4 \nu(z,t)}{\partial z^4} = q(z,t).$$

# Свободные колебания однородной балки. Собственные частоты и собственные формы колебаний

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0}, \qquad \textbf{(1)}$$

где $$\boldsymbol{a^2 = \frac{EI_x}{m} = \frac{EI_x}{A \cdot \rho}}.$$

Решение ищем в виде

$$v = v(z,t) = f(z) \cdot \varphi(t).$$

$$f(z) \cdot \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \boldsymbol{a^2} \cdot \boldsymbol{\frac{d^4 f(z)}{dz^4}} \cdot \boldsymbol{\varphi(t) = 0};$$

$$\frac{f^{IV}}{f} = -\frac{\ddot{\varphi}}{a^2 \cdot \varphi} = K^4 = const!$$

*Это соотношение даёт два диф. уравнения:*

$$f^{IV} - K^4 \cdot f = 0; \qquad (2)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0, \qquad (3)$$

$$где\ \omega^2 = a^2 \cdot K^4 = \frac{EI_x}{m} \cdot K^4.$$

*Решение ур. (2):*

*характеристическое уравнение*

$$p^4 - K^4 = 0.$$

$$p^2 = \pm K^2$$

$$p_{1,2} = \pm K; \qquad p_{3,4} = \pm i \cdot K.$$

$$f(z) = A_1 \cos Kz + A_2 \sin Kz + A_3 e^{Kz} + A_4 e^{-Kz},$$

*или в форме функций Крылова*

$$f(z) = C_1 S(Kz) + C_2 T(Kz) + C_3 U(Kz) + C_4 V(Kz),$$

*где*

$$S(Kz) = \frac{1}{2}(ch\,Kz + \cos Kz);$$

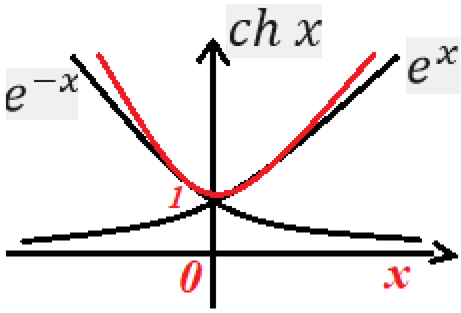
$$T(Kz) = \frac{1}{2}(sh\,Kz + \sin Kz);$$

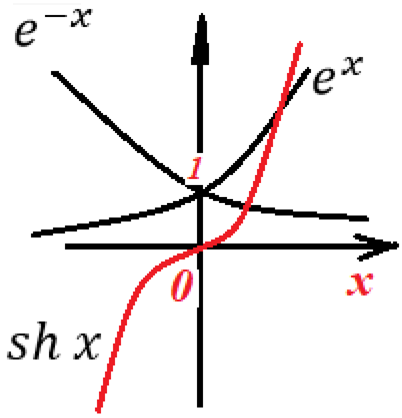
$$U(Kz) = \frac{1}{2}(ch\,Kz - \cos Kz);$$

$$V(Kz) = \frac{1}{2}(sh\,Kz - \sin Kz).$$

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$




*Переход при дифференцировании по Z:*

$$S, T, U, V$$

При Z=0 все равны нулю кроме первой:

$$S(0) = 1; \quad T(0) = U(0) = V(0) = 0!$$

Решение диф. Уравнения (3):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0.$$

его характеристическое ур. $p^2 + \omega^2 = 0,$

$$p_{1,2} = \pm i\omega.$$

Тогда решение имеет вид:

$$\varphi(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t = B \cdot \sin(\omega t + \beta).$$

Общее решение имеет вид:

$$v(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \cdot \varphi_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} S(K_n z) + C_{2n} T(K_n z) + C_{3n} U(K_n z) +$$

$$+ C_{4n} V(K_n z)) \cdot B_n \sin(\omega_n t + \beta_n)$$

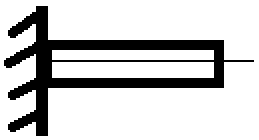
$K_n$ *−собственные числа;*

$\omega_n == a \cdot K^2 = \sqrt{\frac{EI_x}{m}} \cdot K^2$ *−собственные частоты;*

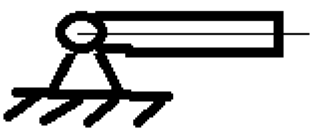
$f_n(z)$ *− собственные формы.*

*Функции Крылова упрощают выполнение граничных условий:*

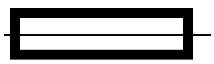
$$M_x = EI_x \frac{d^2 f(z)}{dz^2}; \quad Q_y = EI_x \frac{d^3 f(z)}{dz^3};$$



$$f(0) = 0; \quad \frac{df}{dz} = 0.$$

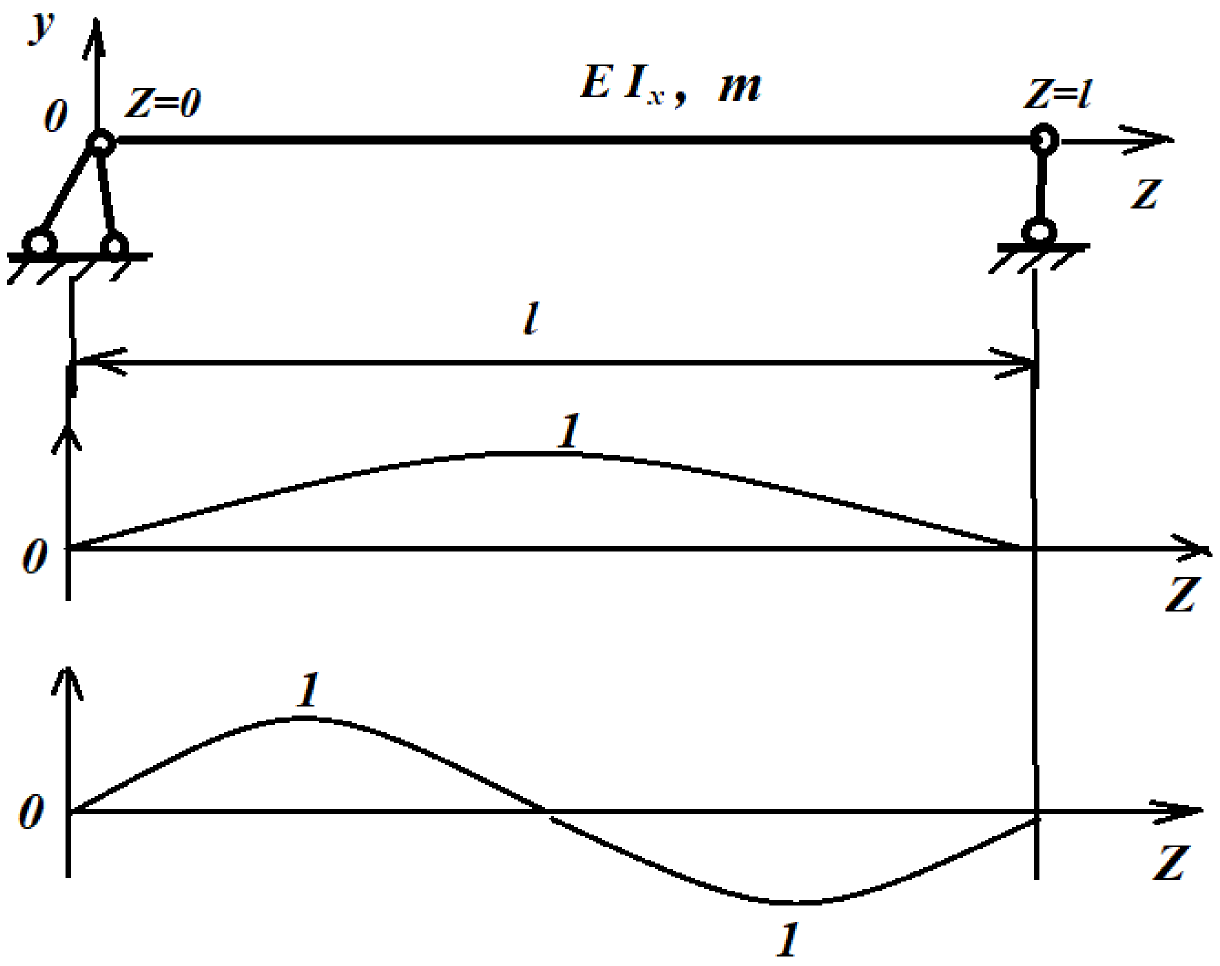


$$f(0) = 0; \quad \frac{d^2 f}{dz^2} = 0.$$



$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^3 f}{dz^3} = 0$$

***Пример.*** *Определить собственные частоты и собственные формы колебаний:*




$$w(z,t) = f(z) \cdot \sin \omega t,$$

$$f(z) = C_1 \cdot S(Kz) + C_2 \cdot T(Kz) + C_3 \cdot U(Kz) + C_4 \cdot V(Kz);$$

$$\frac{df}{dz} = K \cdot C_1 \cdot V(Kz) + K \cdot C_2 \cdot S(Kz) + K \cdot C_3 \cdot T(Kz) +$$

$$+ K \cdot C_4 \cdot U(Kz);$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = K^2 \cdot C_1 \cdot U(Kz) + K^2 \cdot C_2 \cdot V(Kz) + K^2 \cdot C_3 \cdot S(Kz) +$$

$$+ K^2 \cdot C_4 \cdot U(Kz).$$

1) $z=0$: $f(0) = 0$; $\frac{d^2 f}{dz^2} = 0$;

2) $z = l$: $f(l) = 0$; $\frac{d^2 f}{dz^2} = 0$.

***Z=0:***

$$\boldsymbol{C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 0 = 0, \rightarrow C_1 = 0};$$

$$\boldsymbol{K^2 \cdot C_2 \cdot 0 + K^2 \cdot C_3 \cdot 1 + K^2 \cdot C_4 \cdot 0 = 0, \rightarrow C_3 = 0};$$

***Z=l:***

$\boldsymbol{C_2 \cdot T(Kl) + C_4 \cdot V(Kl) = 0}$;

$\boldsymbol{K^2 \cdot C_2 \cdot V(Kl) + K^2 \cdot C_4 \cdot T(Kl) = 0}$.

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} T(Kl) & V(Kl) \\ V(Kl) & T(Kl) \end{vmatrix} = 0};$$

$\boldsymbol{(T(Kl))^2 - (V(Kl)^2 = 0,}$

$$\boldsymbol{\sin Kl = 0};$$

$\boldsymbol{K_n l = \pi n}$, ***где n=1, 2, …., ∞***