Лекция 13.

КОЛЕБАНИЯ АВТОМОБИЛЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО НЕРОВНОЙ ДОРОГЕ

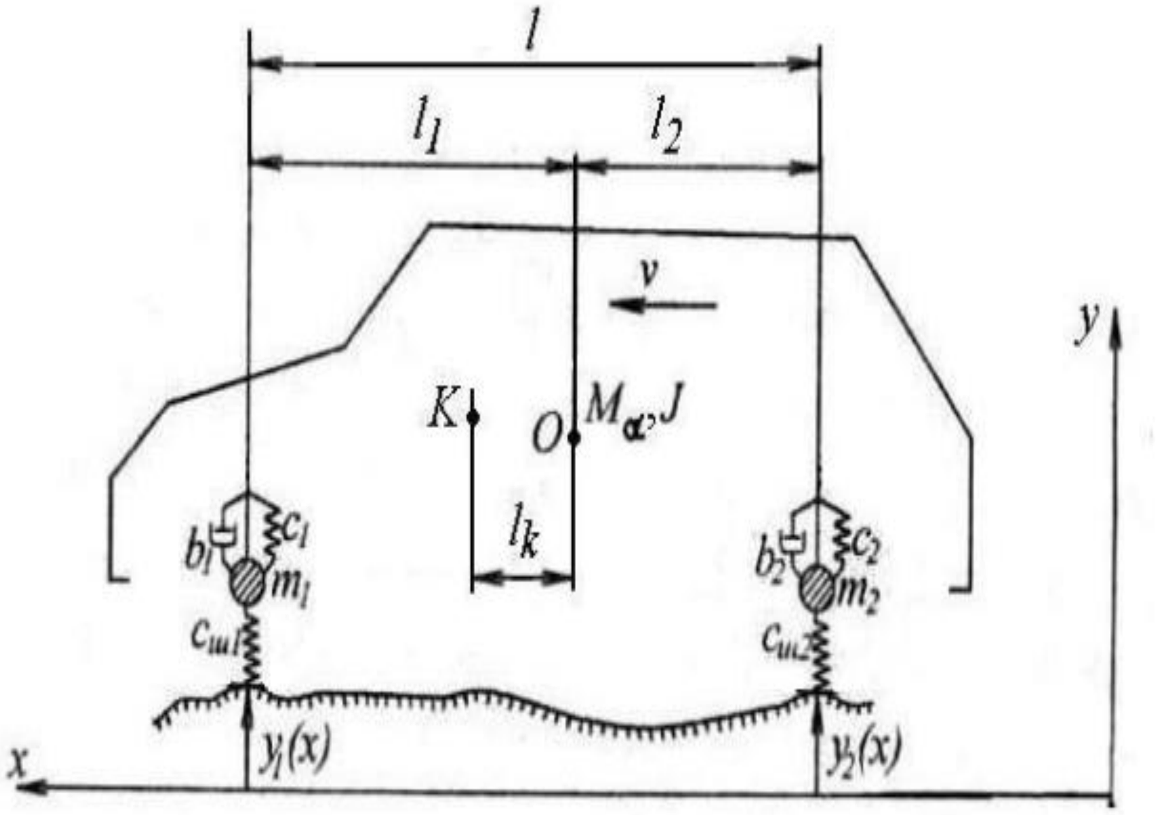

Рис. 12.1

12.3. Составление уравнений малых вынужденных колебаний автомобиля

Динамическая система автомобиля в постановке задач имеет четыре степени свободы. Введем обобщенные координаты: q_1, q_2, z_1, z_2 (рис. 12.2, *а*).

Составим выражения для кинетической энергии *T*, потенциальной энергии *П* и диссипативной функции *Ф*:

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2 + M_\alpha\left(\frac{l_2\dot{z}_1 + l_1\dot{z}_2}{l}\right)^2 + J\left(\frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{l}\right)\right];$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_{ш1}(q_1 - f_1)^2 + c_1(z_1 - q_1)^2 + c_{ш2}(q_2 - f_2)^2 + c_2(z_2 - q_2)^2\right];$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)^2 + b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)^2\right].$$

Подставив выражение для *T, П* и *Ф* в уравнение Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i \in (1,\ldots,4)$$

где $q_1 = q_1,\ q_2 = q_2,\ q_3 = Z_1,\ q_4 = Z_2,$

и после преобразований, получим систему дифференциальных уравнений:

$$m_1\ddot{q}_1 - b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_{ш1}(q_1 - f_1) - c_1(z_1 - q_1) = 0;$$
$$m_2\ddot{q}_2 - b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_{ш2}(q_2 - f_2) - c_2(z_2 - q_2) = 0;$$
$$M_\alpha\left(\frac{l_2\ddot{z}_1 + l_1\ddot{z}_2}{l}\right) + b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_1(z_1 - q_1) + c_2(z_2 - q_2) = 0;$$
$$J\left(\frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{l}\right) + b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)l_1 - b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)l_2 + c_1(z_1 - q_1)l_1 - c_2(z_2 - q_2)l_2 = 0.$$

В полученной системе уравнений первые два уравнения описывают движение подвесок, а третье и четвертое – соответственно линейное и угловое движение кузова.

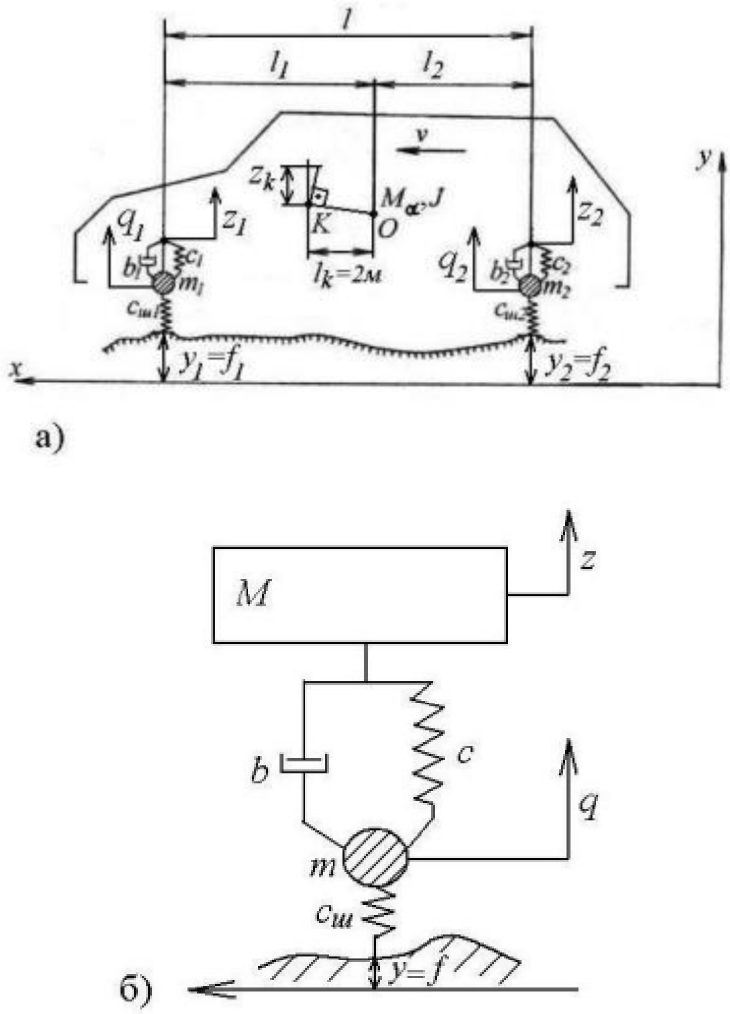

Рис. 12.2

12.4. Условие, при котором вертикальные колебания передней и задней подвесок становятся независимыми

Обозначим силы взаимодействия подвесок с кузовом через F_1 и F_2:

$$b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_1(z_1 - q_1) = F_1;$$
$$b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_2(z_2 - q_2) = F_2.$$

Решив последние два уравнения системы четырех уравнений движения относительно F_1 и F_2, получим:

$$F_1 = -\frac{\left(M_\alpha l_2^2 + J\right)}{l^2}\ddot{z}_1 - \frac{\left(M_\alpha l_1 l_2 - J\right)}{l^2}\ddot{z}_2\,;$$

$$F_2 = -\frac{\left(M_\alpha l_1^2 + J\right)}{l^2}\ddot{z}_2 - \frac{\left(M_\alpha l_1 l_2 - J\right)}{l^2}\ddot{z}_1\,.$$

В этих выражениях вторые члены в правых частях характеризуют связь между колебаниями передней и задней частей автомобиля. Если учесть, что для рассматриваемого автомобиля распределение подрессоренной массы соответствует:

$$\varepsilon = \frac{J}{M_\alpha l_1 l_2} = \frac{M_\alpha \rho^2}{M_\alpha l_1 l_2} = \frac{\rho^2}{l_1 l_2} = 0.9$$

т.е. близко к единице, то можно считать колебания передней части, описываемые координатами q_1, z_1, и колебания задней части, описываемые координатами q_2, z_2, практически независимыми друг от друга.

12.5. Двухмассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания автомобиля и их математические модели

Части подрессоренной массы, приходящиеся на упругие элементы подвесок, равны:

$$M_1 = \frac{M_\alpha l_2^2 + J}{l^2} \approx \frac{M_\alpha l_2^2 + M_\alpha l_1 l_2}{l^2} = M_\alpha \frac{l_2}{l} = 700\,кг;$$

$$M_2 = \frac{M_\alpha l_1^2 + J}{l^2} \approx \frac{M_\alpha l_1^2 + M_\alpha l_1 l_2}{l^2} = M_\alpha \frac{l_1}{l} = 800\,кг.$$

Уравнения движения двухмассовой системы имеют следующий вид:

$$M \cdot \ddot{z} + b(\dot{z} - \dot{q}) + c(z - q) = 0;$$
$$m \cdot \ddot{q} - b(\dot{z} - \dot{q}) - c(z - q) + c_ш(q - f) = 0.$$

12.6. Определение частот и форм собственных колебаний автомобиля

Рассмотрим свободные колебания автомобиля на основе эквивалентной динамической схемы, показанной на рис. б. Положим внешнее воздействие f=0, а также имея в виду, что диссипативные силы не оказывают существенного влияния на частоты и формы свободных колебаний системы, примем b=0.

Уравнения движения получают вид:

$$M \cdot \ddot{z} + c(z - q) = 0;$$
$$m \cdot \ddot{q} - c(z - q) + c_ш q = 0.$$

Решение этих уравнений может быть найдено в виде:

$$z = A_z \cdot \cos(\omega t + \beta);$$
$$q = A_q \cdot \cos(\omega t + \beta),$$

Получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд:

$$\begin{cases} (c - \omega^2 M) \cdot A_z - c \cdot A_q = 0; \\ -c \cdot A_z + (c + c_ш - \omega^2 m) \cdot A_q = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет ненулевые решения, если ее определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix} \left(c-\omega^2 M\right) & -c \\ -c & \left(c+c_ш-\omega^2 m\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие дает следующее характеристическое уравнение:

$$M \cdot m \cdot \omega^4 - \left(c \cdot m + c \cdot M + c_ш M\right) \cdot \omega^2 + c \cdot c_ш = 0.$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{M} = p_1^2; \quad \frac{c+c_ш}{m} = p_2^2; \quad \frac{c_ш}{m} = p_3^2.$$

Тогда получим:

$$\omega^4 - \left(p_1^2 + p_2^2\right) \cdot \omega^2 + p_1^2 p_3^2 = 0.$$

Корни уравнения дают следующие значения собственных частот колебательной системы, эквивалентной двухосной колесной машине:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4 p_1^2 p_3^2}};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4 p_1^2 p_3^2}}.$$

Собственные формы колебаний найдем по формулам:

$$\frac{A_{q1}}{A_{z2}} = \frac{c - \omega_1^{\,2} M}{c} = V_1,$$

$$\frac{A_{q2}}{A_{z2}} = \frac{c - \omega_2^{\,2} M}{c} = V_2.$$

Для передней части автомобиля:

$$p_1^2 = \frac{c_1}{M_1} = 118{,}57\ c^{-2},$$

$$p_2^2 = \frac{c_1 + c_{ш1}}{m_1} = 2990\ c^{-2},$$

$$p_3^2 = \frac{c_{ш1}}{m_1} = 2575\ c^{-2}.$$

Получаем собственные частоты:

- циклические

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}} = 10{,}076\ c^{-1};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}} = 54{,}836\ c^{-1};$$

- технические

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1{,}605\ Гц,$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 8{,}732\ Гц.$$

Собственные формы колебаний:

$$V_1 = \frac{A_{q_1 1}}{A_{z_1 1}} = \frac{c - {\omega_1}^2 M}{c} = 0{,}144;$$

$$V_2 = \frac{A_{q_1 2}}{A_{z_1 2}} = \frac{c - {\omega_2}^2 M}{c} = -24{,}361.$$

Для задней части автомобиля.

$$p_1^2 = \frac{c_2}{M_2} = 187{,}5\,c^{-2},$$

$$p_2^2 = \frac{c_2 + c_{ш2}}{m_2} = 573{,}3\,c^{-2},$$

$$p_3^2 = \frac{c_{ш2}}{m_2} = 240\,c^{-2}.$$

Собственные частоты:

- циклические

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}} = 8{,}04\,c^{-1};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}} = 26{,}386\,c^{-1};$$

- технические

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1{,}28\,Гц,$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 4{,}202\,Гц.$$

Собственные формы колебаний:

$$V_1 = \frac{A_{q_1 1}}{A_{z_1 1}} = \frac{c - \omega_1^{\,2} M}{c} = 0{,}655;$$

$$V_2 = \frac{A_{q_1 2}}{A_{z_1 2}} = \frac{c - \omega_2^{\,2} M}{c} = -2{,}713.$$

Найденные собственные формы колебаний частей автомобиля представлены на рис. 12.3. Для передней части на рис. 12.3, б, в, задней – на рис. 12.3, г, д.

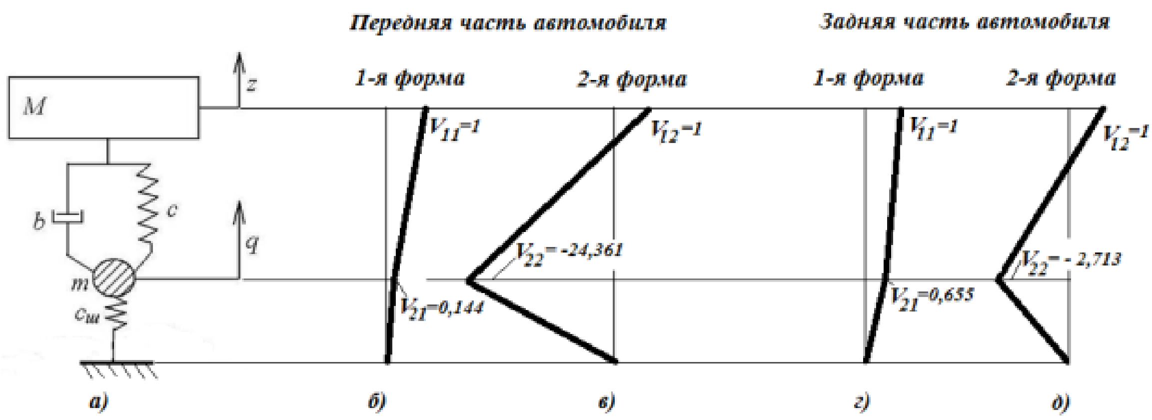

Рис 12.3

Следует проверить ортогональность полученных собственных форм: