Лекция 10

5.1. Метод спектральных представлений в теории вынужденных колебаний

5.1.1. Общее решение

Рассмотрим колебания механической системы, обусловленные воздействием $\overrightarrow{F}(t)$, заданным на бесконечном интервале времени и представимым в виде интеграла Фурье

$$\vec{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{\Phi}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega, \tag{5.25}$$

где комплексный амплитудный спектр воздействия $\overrightarrow{\Phi}(\omega)$ определяется как обратное преобразование Фурье

$$\overrightarrow{\Phi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \tag{5.26}$$

Уравнение движения системы примем в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}\dot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = \mathbf{D} \cdot \vec{\mathbf{F}}(\mathrm{t}), \tag{5.27}$$

а решение этого уравнения будем искать в форме следующего интеграла Фурье

$$\vec{\mathbf{q}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{\mathbf{Q}}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega, \tag{5.28}$$

где комплексный амплитудный спектр $\overrightarrow{\mathbf{Q}}(\omega)$ процесса $\vec{\mathbf{q}}(t)$ определяется как

$$\overrightarrow{\mathbf{Q}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\mathbf{q}}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \tag{5.29}$$

Подставив (5.25) и (5.28) в уравнение (5.27), получим равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{B} + \mathbf{C}]\vec{\mathbf{Q}}(\omega) \cdot e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{D}\vec{\Phi}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\ d\omega,$$

из которого следует, что

$$\vec{\mathbf{Q}}(\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \cdot \vec{\Phi}(\omega), \qquad (5.30)$$

где матрица передаточных функций определяется как

$$\mathbf{H}(i\omega) = \left[H_{kj}(i\omega)\right] = [-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{B} + \mathbf{C}]^{-1} \cdot \mathbf{D}, \quad (k, j = 1,2, \dots, n).$$

Подставив (5.30) в (5.28) получим общее решение уравнения (5.27) в виде

$$\vec{\mathbf{q}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{H}(i\omega) \cdot \vec{\Phi}(\omega) \cdot e^{i\omega t}d\omega. \qquad (5.31)$$

Из соотношения (5.31) следует, что k-ая компонента вектора $\vec{\mathbf{q}}(t)$ определяется как

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} H_{kj}(i\omega) \cdot \Phi_{\boldsymbol{j}}(\omega) \cdot e^{i\omega t}d\omega. \qquad (5.32)$$