5.1. Метод главных координат в теории вынужденных колебаний

Рассмотрим вынужденные колебания, описываемые уравнением

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}\dot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = \vec{\mathbf{Q}} = \mathbf{D}\vec{\mathbf{F}}. \qquad (5.50)$$

Как и при изучении свободных колебаний перейдем от обобщенных координат $\vec{\mathbf{q}}$ к главным координатам $\vec{\mathbf{u}}$**:**

$$\vec{\mathbf{q}} = \boldsymbol{V}\vec{\mathbf{u}}.$$

Получим уравнение вынужденных колебаний в главных координатах

$$\boldsymbol{\mu}\ddot{\vec{\mathbf{u}}} + \boldsymbol{\beta}\dot{\vec{\mathbf{u}}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\vec{\mathbf{F}}. \qquad (5.51)$$

Предполагаем, что в системе пропорциональное демпфирование, т.е. матрица диссипативных коэффициентов **B** представима в виде двух матриц, одна из которых (характеризует внешнее трение) пропорциональна матрице масс **M**, а другая (характеризует внутреннее трение) – матрице жесткостей **C**, т.е.

$$\mathbf{B} = \eta_1 \mathbf{M} + \eta_2 \mathbf{C},$$

где η_1, η_2 – коэффициенты пропорциональности.

Уравнения (5.51) переходят в n независимых уравнений:

$$\ddot{u}_k + 2n_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = f_k(t), \qquad (5.52)$$

где

$$f_k(t) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{a=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \nu_{ak} d_{a\beta} F_\beta(t).$$

При **D = E** (единичная матрица)

$$f_k(t) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{a=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \nu_{ak} F_a(t).$$

Уравнения (5.52) представим в операторной форме

$$L_k\{u_k(t)\} = f_k(t); \qquad (5.53)$$

$$u_k(t) = W\{f_k(t)\}, \qquad (5.54)$$

где $L_k = p^2 + 2n_k p + \omega_k^2$; $W_k = L_k^{-1}$.

При решении уравнений (5.52), (5.53), (5.54) в случае стационарных воздействий целесообразно воспользоваться методом спектральных представлений Фурье, а в случае нестационарных воздействий – методом функций Грина.

5.1.1. Решение методом спектральных представлений Фурье

Вводим передаточные функции $H_k(i\omega)$ – амплитуды реакций на гармонические воздействия с единичными амплитудами

$$H_k(i\omega) = e^{-i\omega t} W_k\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2n_k i\omega}. \quad (5.55)$$

Внешние воздействия и реакции на них представим в виде интегралов Фурье:

$$f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,; \qquad u_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (5.56)$$

где амплитудные спектры

$$F_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-i\omega t} dt\,;$$

$$U_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{-i\omega t} dt. \qquad (5.57)$$

В соответствии с (5.54), (5.55) и (5.56) имеем:

$$u_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\omega) W_k\{e^{i\omega t}\} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(i\omega) F_k(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \qquad (5.58)$$

Из сопоставления соотношений (5.56) и (5.58) получаем амплитудные спектры процессов $U_k(t)$:

$$U_k(\omega) = H_k(i\omega) \cdot F_k(\omega). \qquad (5.59)$$

Так как

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \nu_{jk} u_k(t), \qquad (5.60)$$

то амплитудные спектры процессов $q_j(t)$ будут определяться как

$$Q_j(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \nu_{jk} U_k(\omega). \qquad (5.61)$$

Обратные преобразования Фурье от (5.61) будут определять искомые процессы $q_j(t)$:

$$q_j(t) = Q_j(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega. \qquad (5.62)$$

В векторной форме записи имеем:

$$\vec{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{V}\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{V} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathbf{u}}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathbf{Q}}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega. \qquad (5.63)$$

5.1.2. Решение методом функций Грина

Вводим функции Грина $g_k(t)$ – реакции на дельта-воздействия:

$$L_k\{g_k(t)\} = \delta(t)$$

$$g_k(t) = W_k\{\delta(t)\} = \frac{1}{\omega_{kn}} e^{-n_k t} \sin \omega_{kn} t. \qquad (5.64)$$

Представим внешние воздействия в виде интегралов Дирака

$$f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau. \qquad (5.65)$$

В соответствии с (5.53), (5.64) и (5.65) имеем:

$$u_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\tau) W_k\{\delta(t-\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\tau) g_k(t-\tau) d\tau = u_{0k}\tilde{g}_k(t) + \dot{u}_{0k} g_k(t) + \int_0^t f_k(\tau) \cdot g_k(t-\tau) d\tau, \quad (5.66)$$

где

$$\tilde{g}_k(t) = e^{-n_k t}\left(\cos\omega_{kn} t + \frac{n_k}{\omega_{kn}} \sin\omega_{kn} t\right). \qquad (5.67)$$

Если ввести в рассмотрение диагональные матрицы

$$G_0(t) = diag[\tilde{g}_k(t), k = 1,2, \dots, n];$$

$$G_1(t) = diag[g_k(t), k = 1,2, \dots, n],$$

то соотношение (5.66) можно представить в векторно-матричной форме

$$\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) = \mathbf{G_0}(\mathbf{t})\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{0} + \mathbf{G}(\mathbf{t})\dot{\vec{\mathbf{u}}}_\mathbf{0} + \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau) \cdot \vec{\mathbf{f}}(\tau)d\tau. \qquad (5.68)$$

Обратный переход от $\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$ к $\vec{\mathbf{q}}(\mathbf{t})$ производится по формуле:

$$\vec{\mathbf{q}} = \boldsymbol{V}\vec{\mathbf{u}}.$$