1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Поперечные колебания абсолютно гибких стержней

К расчетной схеме абсолютно гибкого стержня (с нулевой изгибной жесткостью) сводится расчет приводных ремней, шлангов, проводов, цепей, лент, тросов, струн и т.п.

Дано: N- нормальная сила; m_0- сосредоточенная масса; μ_1 ($\mu_1 = const$) –масса единицы длины; $q_0(z,t)$ – распределённая нагрузка; $F(t)$-сосредоточенная сила; $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – кинематические воздействия (рис. 6.1). Составим уравнение динамического равновесия элемента нити длиной dz и массой dm (рис. 6.2).

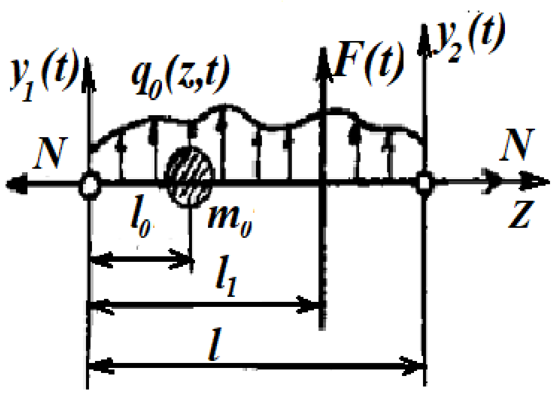


Рис. 6.1

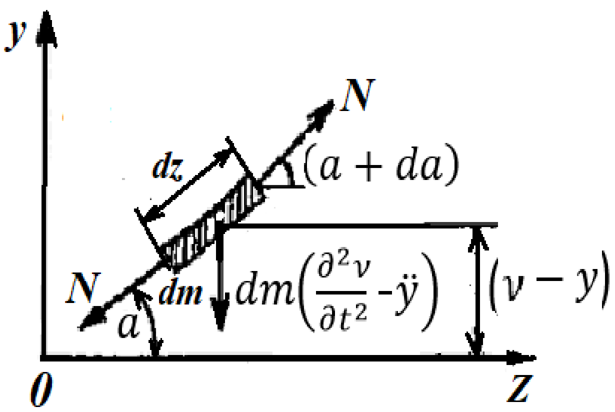


Рис. 6.2

Подлежит определению функция перечных (по оси y) перемещений $v(z,t)$.

$$\sum y = 0:\ -(dm + m_0 \cdot \delta(z - l_0) \cdot dz) \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \ddot{y}\right) + q_0 \cdot dz + N \cdot (\sin(a + da) - \sin a) = 0,$$

где $$y = y_1 \cdot \frac{l-z}{l} + y_2 \cdot \frac{z}{l}; \quad a = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Получаем уравнение для описания колебаний нити

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + c \cdot v(z,t) = q(z,t), \qquad (6.1)$$

где $c = -N\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор;

$q(z,t) = q_0(z,t) + F(t) \cdot \delta(z - l_1) + \mu \cdot \ddot{y}(z,t)$ – расчетная распределенная нагрузка;

$\mu = \mu_1 + m_0 \cdot \delta(z - l_0)$ – расчетная распределенная масса.

Решение уравнения (6.1) ищем в виде

$$\nu(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \cdot \varphi_k(t) \qquad (6.2)$$

При граничных условиях $\nu(0,t) = \nu(l,t) = 0$, где формы колебаний определяются как $f_k(z) = \sin \pi\, kz/l)$, $k \in [1,2,\dots)$.

Подставим (6.2) в (6.1). Затем умножив полученное равенство на $\sin(\pi kz/l)$ и проинтегрировав его по длине l, получим для определения $\varphi_k(t)$:

$$a_k \cdot \ddot{\varphi}(t) + \lambda_k \cdot \varphi(t) = Q_k(t), \qquad (6.3)$$

где обобщенная масса a_k, обобщенная жесткость λ_k и обобщенная сила $Q_k(t)$, соответствующие k-ой форме колебаний:

$$a_k = \frac{\mu l}{2} + m_0 sin^2 \pi k \frac{l_0}{l};$$

$$\lambda_k = N\frac{\pi^2 k^2}{2l};$$

$$Q_k(t) = \int_0^l q_0\,(z,t) \cdot \sin \pi k \frac{z}{l} dz + F(t) \cdot \sin \pi k \frac{l_1}{l} +$$

$$\mu_1 \int_0^l \ddot{y}\,(z,t) \cdot \sin \pi k \frac{z}{l} dz + m_0 \cdot \ddot{y}(l_0,t) \cdot \sin \pi k \frac{l_0}{l}$$

.

Из (6.3) следует

$$\omega_k^2 = \frac{\lambda_k}{a_k}. \tag{6.4}$$

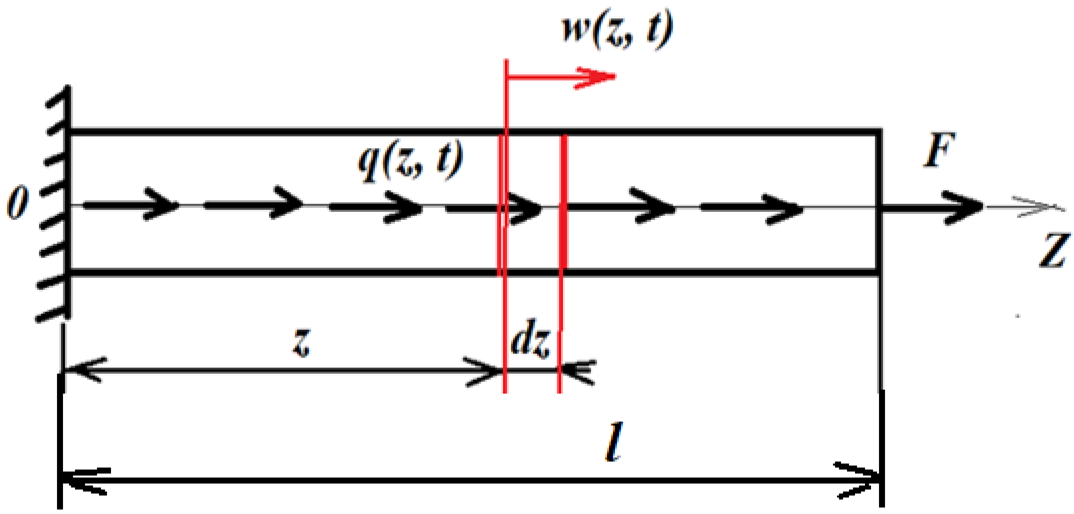
Тогда уравнения (6.3) примут в вид

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_k^2 \cdot \varphi(t) = \frac{1}{a_k} Q_k(t). \tag{6.5}$$

Лекция 13

1.2. Продольные колебания стержней

Дано: $EA,\ l,\ q(z,t),\ F,\ m$ —масса ед. длины.



Уравнение движения:

$$m \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{dt^2} + b \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(EA \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right) = q(z,t). \quad (1)$$

Для однородного стержня $EA = const$ и $m = const$, тогда

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{dt^2} + 2n \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{d\,z^2} = \frac{1}{m} \cdot q(z,t).$$

$$2n = \frac{b}{m}, \quad a^2 = \frac{EA}{m} = \frac{EA}{A\rho} = \frac{E}{\rho}.$$

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость распространения продольных волн;

ρ — плотность материала стержня.

Из (6.6) получаем дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний стержня

$$m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(EA\frac{\partial W}{\partial z}\right) = q(z,t). \qquad (6.7)$$

С точностью до обозначений ур. (6.7) совпадает с дифференциальным ур. колебаний нити (6.1).

Если ввести в рассмотрение дифференциальный оператор растяжения

$c = -\frac{\partial}{\partial z}\left(EA\frac{\partial}{\partial z}\right)$, то уравнение (6.7) примет вид

$$m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + cW = q(z,t). \qquad (6.8)$$

Уравнение (6.8) по виду совпадает с уравнением (6.1). Ниже будет показано, что к уравнению (6.8) сводятся также уравнения крутильных и изгибных колебаний валов и балок (см. п. 6.3 и п. 6.4). При этом дифференциальный оператор кручения для круглого вала будет определяться как

$$c = -\frac{\partial}{\partial z}\left(GJ_p\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

А дифференциальный оператор изгиба балки как

$$c = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

где GJ_p – жесткость сечения при кручении;

EJ – жесткость сечения при изгибе.

Рассмотрим вынужденные колебания. Решение ищем в виде разложения по собственным формам колебаний

$$W(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,(z)\varphi_k(t). \tag{6.9}$$

Здесь $f_k(z)$ – собственные формы колебаний (известны);

$\varphi_k(t)$ – координатные функции (подлежат определению).

Подставив выражение (6.9) в (6.7), получим равенство:

$$m\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_k(t) f_k(z) - EA\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) f''_k(z) = q(z,t). \tag{6.10}$$

Скалярно умножив равенство (6.10) на $f_k(z)$ и учитывая свойство ортогональности собственных форм колебаний, получаем для определения ции $\varphi_k(t)$

$$a_k\ddot{\varphi}_k(t) + \lambda_k\varphi_k(t) = Q_k(t), \tag{6.11}$$

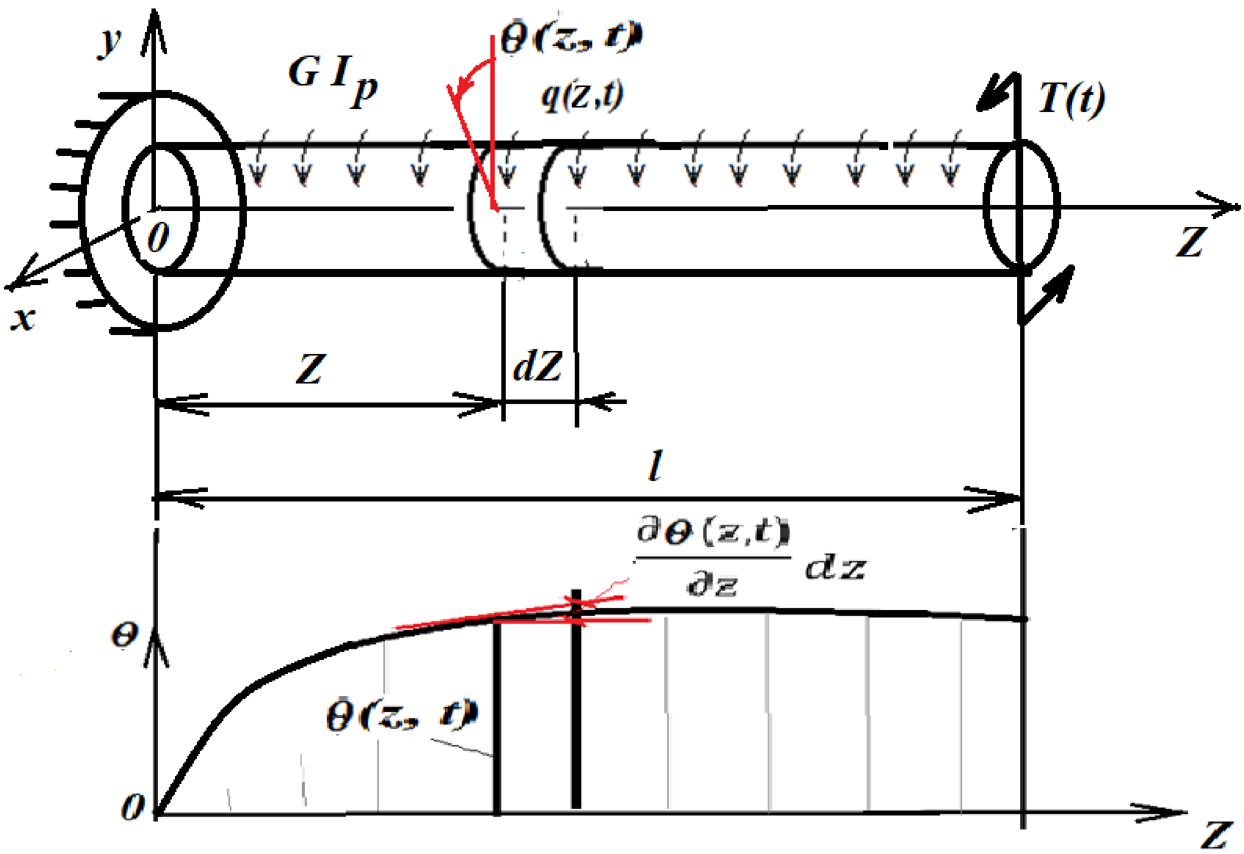
где обобщенная масса a_k, обобщенная жесткость λ_k и обобщенная сила $Q_k(t)$, соответствующие k-ой форме колебанийм:

$$a_k = (mf_k, f), \quad \lambda_k = (\text{c}f_k, f_k);$$

$$Q_k(t) = \int_0^l q(z,t) f_k(z)dz.$$

1.3. Крутильные колебания валов

Дано: $GI_p,\ l,\ q(z,t),\ T(t), \mu$ – массовый момент инерции кручению ед. длины, b – коэф. вязкого сопротивления кручению ед. длины.



Подлежит определению функция углов поворота (закручивания) поперечных сечений вала $\boldsymbol{\theta(z,t)}$!

Уравнение динамического равновесия:

$$\sum M_z = 0:\ \frac{\partial T_k(z,t)}{\partial z} \cdot dz + q(z,t) \cdot dz - \mu \cdot \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{dt^2} \cdot dz -$$

$$-b \cdot \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} \cdot dz = 0;$$

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{dt^2} + b \cdot \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial T_k(z,t)}{\partial z} = q(z,t).$$

$$T_k = GI_p \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}.$$

Окончательно получим уравнение движения:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{dt^2} + b \cdot \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(GI_p \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}\right) = q(z,t).$$

Для однородного вала $GI_p = const$ и $\mu = const$, тогда

$$\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{dt^2} + 2n \cdot \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{d\,z^2} = \frac{1}{\mu} \cdot q(z,t).$$

$$2n = \frac{b}{\mu},\quad a^2 = \frac{GI_p}{\mu} = \frac{GI_p}{I_p \rho} = \frac{G}{\rho}.$$

$a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ — скорость распространения крутильных волн;

ρ — плотность материала вала; G —модуль сдвига материала.

Задача крутильных колебаний вала идентична решению задачи о продольных колебаниях стержня!

Получим дифференциальное уравнение крутильных колебаний вала:

$$\mu\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} + c\Theta = q(z,t), \qquad (6.12)$$

где дифференциальный оператор кручения

$$c = -\frac{\partial}{\partial z}\left(GJ_p\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Уравнение (6.12) по виду совпадает с уравнением (6.1) для описания колебаний нити и с уравнением (6.7) для описания продольных колебаний стержня.

Решение уравнения (6.12) ищем в виде

$$\Theta(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\varphi_k(t), \qquad (6.13)$$

где собственные формы колебаний $f_k(z)$ определяются из уравнения (6.12) при q=0 (считаются известными);

$\varphi_k(t)$ — координатные функции (подлежат определению).

.

Подставив (6.13) в (6.12), получим равенство

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_k(t) f_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) c \varphi_k(z) = Q_k(t). \tag{6.14}$$

Скалярно умножив равенство (6.14) на $f_k(z)$, с учетом ортогональности форм колебаний, получаем систему независимых дифференциальных уравнений для определения функций $f_k(t)$

$$a_k \ddot{\varphi}_k(t) + \lambda_k \varphi_k(t) = Q_k(t), \tag{6.15}$$

где

$$a_k = (\mu f_k, f_k); \quad \lambda_k = (c f_k, f_k); \quad Q_k(t) = \int_0^l q(z,t) f_k(z) dz.$$

1.4. Изгибные колебания балок

Дано: $EI_x, l, m -$ масса ед. длины, $b -$ коэф. вязкого сопротивления ед. длины, $q(z,t)$ – распределенная нагрузка.

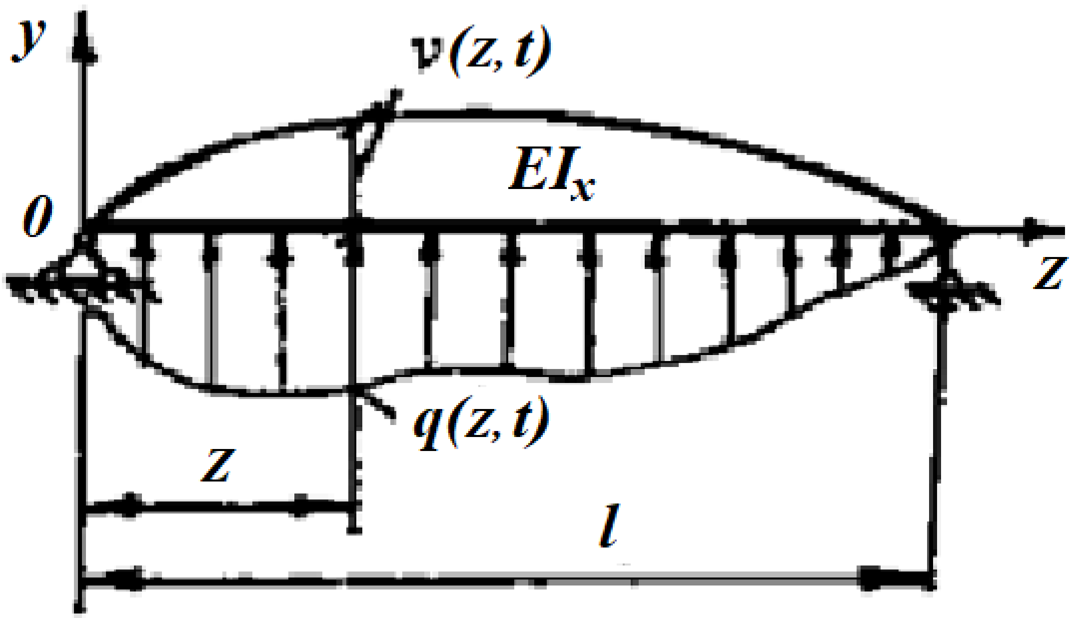


Рис. 6.6

Подлежит определению функция прогибов $v = (z, t)$.

Дифференциальное уравнение изгиба балки будет иметь вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = q(z,t) - m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b\frac{\partial v(z,t)}{\partial t},$$

или

$$m\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + b\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI_x\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\right) = q(z,t).$$

Для однородной балки $EI_x, m, b = const$:

$$m\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + b\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + EI_x\frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial z^4} = q(z,t)$$

Рис. 6.6

Дифференциальное уравнение изгиба балки будет иметь вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = q(z,t) - m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

или

$$m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cv = q(z,t)\ , \qquad (6.16)$$

где $c = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$ – дифференциальный оператор изгиба;

EJ – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

По виду уравнение (6.16) совпадает с уравнениями (6.1), (6.7), (6.12) для описания колебаний нити, продольных колебаний стержня и крутильных колебаний вала.

Решение уравнения (6.16) ищем в виде

$$v(z,t) = \sum_{k=t}^{\infty} f_k(z)\varphi_k(t), \qquad (6.17)$$

где собственные формы колебаний $f_k(z)$ считаются известными;

$\varphi_k(t) -$ координатные функции (подлежат определению).

Подставив (6.17) в (6.16), получим равенство

$$m\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{\varphi}_k(t)f_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)cf_k(z) = q(z,t). \qquad (6.18)$$

Скалярно умножив (6.18) на $f_k(z)$, с учетом ортогональности форм колебаний, получим систему независимых дифференциальных уравнений для определения $\varphi_k(t)$:

$$a_k\ddot{\varphi}_k(t) + \lambda_k\varphi_k(t) = Q_k(t), \qquad (6.19)$$

где обобщенная масса a_k, обобщенная жесткость λ_k и обобщенная сила Q_k, соответствующие k-ой форме колебаний, определяются по формулам:

$$a_k = (mf_k, f_k);$$

$$\lambda_k = (cf_k, f_k);$$

$$Q_k(t) = \int_0^l q(x,t)f_k(z)dz.$$

Применительно к балке на двух опорах имеем:

$$a_k = \frac{m}{2};$$

$$\lambda_k = \frac{EJ\pi^4k^4}{2l^3}.$$