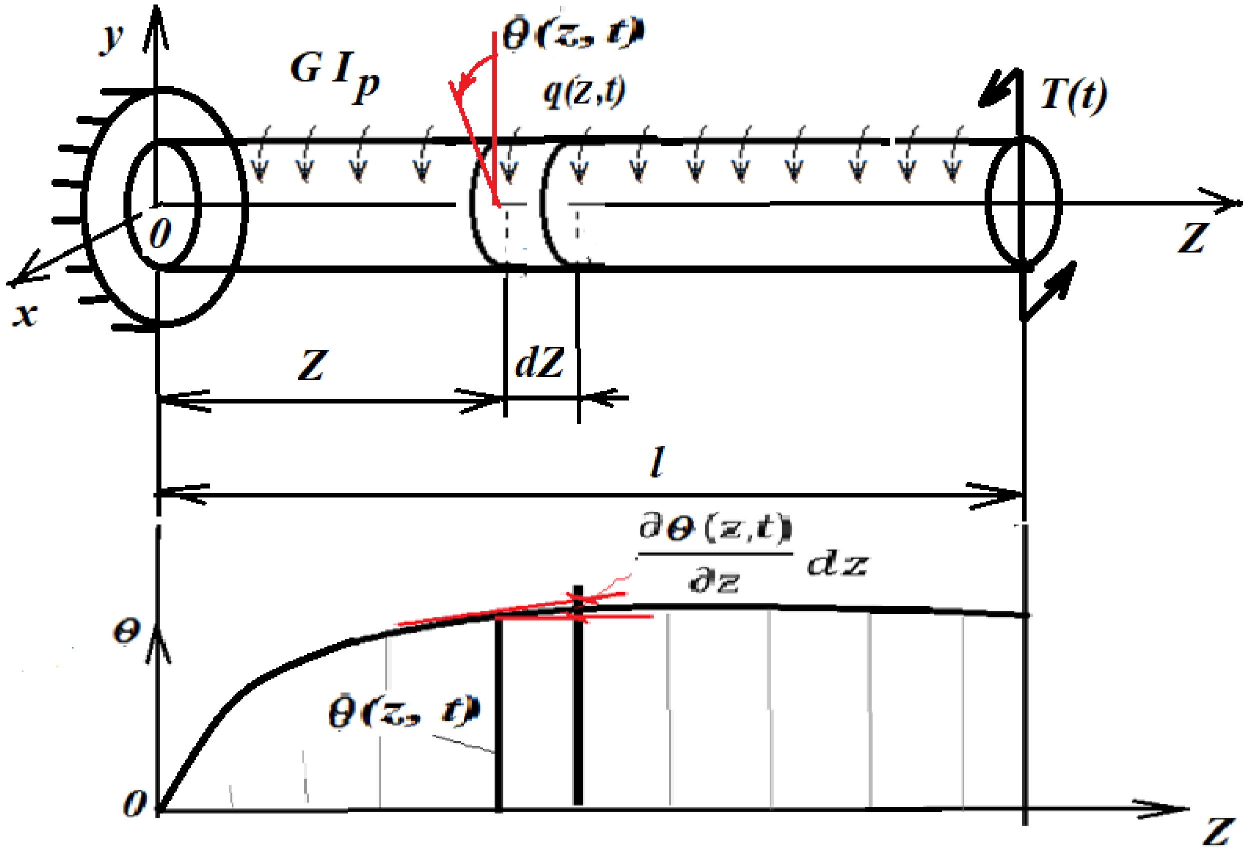
Лекция 15

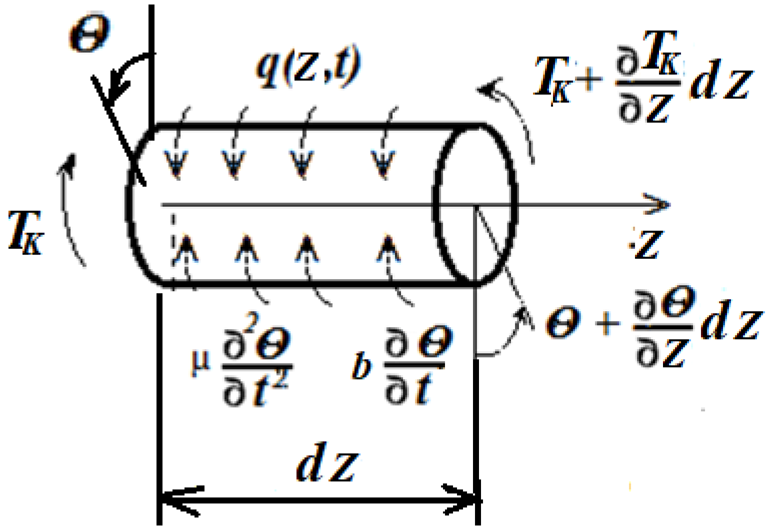
Тема: КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА

1. Уравнение движения

Дано: $GI_p,\ l,\ q(z,t),\ T(t), \mu -$ массовый момент инерции кручению ед. длины, $b -$ коэф. вязкого сопротивления кручению ед. длины.



Подлежит определению функция углов поворота (закручивания) поперечных сечений вала $\theta(z,t)$!

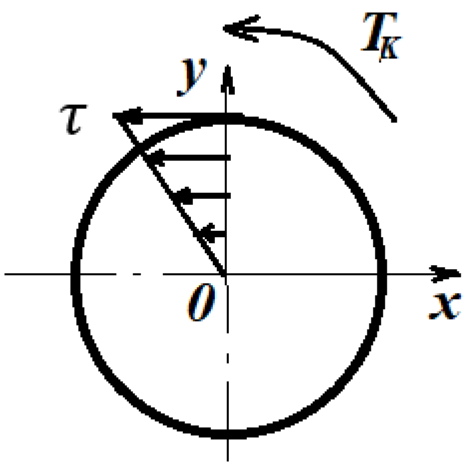


Уравнение динамического равновесия:

$$\sum M_z = 0: \frac{\partial T_k(z,t)}{\partial z} \cdot dz + q(z,t) \cdot dz - \mu \cdot \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{dt^2} \cdot dz - $$

$$-b \cdot \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} \cdot dz = 0;$$

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{dt^2} + b \cdot \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial T_k(z,t)}{\partial z} = q(z,t).$$



$$\tau = G\gamma; \quad T_k = GI_p \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}.$$

Окончательно получим уравнение движения:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2\theta(z,t)}{dt^2} + b \cdot \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(GI_p \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}\right) = q(z,t). \quad (1)$$

Для однородного вала $GI_p = const$ и $\mu = const$, тогда

$$\frac{\partial^2\theta(z,t)}{dt^2} + 2n \cdot \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2\theta(z,t)}{d\,z^2} = \frac{1}{\mu} \cdot q(z,t).$$

$$2n = \frac{b}{\mu}, \quad a^2 = \frac{GI_p}{\mu} = \frac{GI_p}{I_p\rho} = \frac{G}{\rho}.$$

$a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения крутильных волн;

ρ – плотность материала вала; G –модуль сдвига материала.

Задача крутильных колебаний вала идентична решению задачи о продольных колебаниях стержня!

1. **Свободные колебания однородного вала. Собственные частоты и собственные формы колебаний**

$$\frac{\partial^2\theta(z,t)}{dt^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2\theta(z,t)}{d\,z^2} = 0. \qquad (2)$$

$$a^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Решение ищем в форме Фурье (разделения переменных):

$$\theta(z,t) = f(z) \cdot \varphi(t),$$

$$\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial t^2} = f(z) \cdot \ddot{\varphi}(t); \quad \frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2} = f''(z) \cdot \varphi(t).$$

Подставляем в (2)

$$f(z) \cdot \ddot{\varphi}(t) - a^2 \cdot f''(z) \cdot \varphi(t) = 0,$$

$$f(z) \cdot \ddot{\varphi}(t) = a^2 \cdot f''(z) \cdot \varphi(t),$$

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{a^2 \cdot \varphi(t)} = \frac{f''(z)}{f(z)} = -\text{К}^2, \qquad \text{где } \text{К}^2 = const$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0, \text{ где } \omega^2 = a^2 \cdot K^2;$$

$$f''(z) + K^2 \cdot f(z) = 0.$$

Решаем второе уравнение:

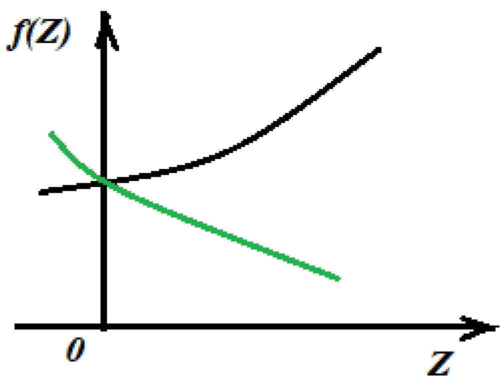
его характеристическое ур-е

$p^2 + K^2 = 0, \qquad p^2 = -K^2.$

Если $K^2 \leq 0$, то корни действительные

$$p_{1,2} = \pm K,$$

колебаний нет $f(z) = C_1 \cdot e^{Kz} + C_2 \cdot e^{-Kz}$



Если $K^2 > 0$, то корни комплексно – сопряжённые

$$p_{1,2} = \pm i \cdot K,$$

колебания есть

$f(z) = C_1 \cdot \cos Kz + C_2 \cdot \sin Kz$, *поэтому дальше рассматриваем этот случай.*

Аналогично рассматриваем первое ур-е

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0, \text{ где } \omega^2 = a^2 \cdot K^2,$$

его решение

$$\varphi(t) = \mathrm{A}_1 \cdot \cos \omega t + \mathrm{A}_2 \cdot \sin \omega t =$$
$$= \mathrm{B} \cdot \sin(\omega t + \beta).$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УР-Я (2):

$$\theta(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \cdot \varphi_n(z) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cdot \cos K_n z + C_{2n} \cdot \sin K_n z) \cdot B_n \cdot \sin(\omega_n t + \beta_n).$$

ГДЕ $f_n(z)$ *— собственные формы колебаний;*

ω_n – *собственные частоты колебаний;*

C_{1n} и C_{2n} – *константы интегрирования, определяемые из граничных условий;*

B_n – *константы интегрирования, определяемые из начальных условий;*

β_n – *фазы, определяемые из начальных условий;*

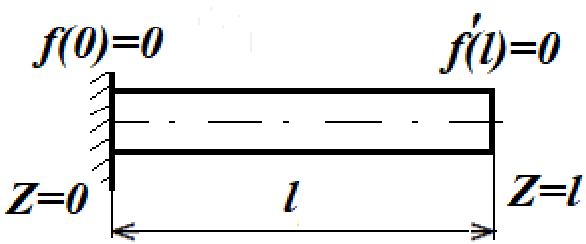
К_n – *собственные числа или коэффициенты форм колебаний.*

Примеры

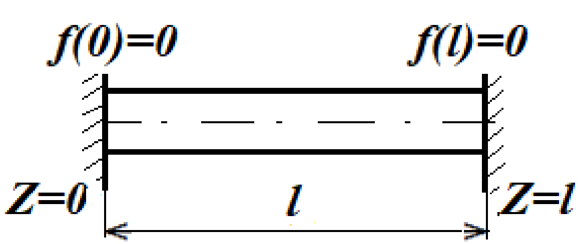
$$\theta(z,t) = f(z)\cdot\varphi(t) = f(z)\cdot sin\,\omega t.$$

$$f(z) = C_1\cdot\cos Kz + C_2\cdot\sin Kz.$$

$$f'(z) = -K\cdot C_1\cdot\sin Kz + K\cdot C_2\cdot\cos Kz.$$



а)



б)

Применительно к валу, защемленному с одной стороны, имеем:

$$f(0) = 0; \qquad f'(l) = 0;$$

$$f(0) = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 = 0,$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \to C_1 = 0.$$

$$f'(l) = K \cdot C_2 \cdot \cos Kl = 0.$$

$$\cos Kl = 0.$$

$$K_n l = \frac{\pi}{2}(2n - 1), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$$\omega_n = K_n \cdot a = \frac{\pi}{2l}(2n - 1) \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где $\rho = \frac{\mu}{J_p}$ – плотность материала стержня.

Для собственных форм колебаний $C_2 = 1$ получаем выражение

$$f_n(z) = \sin \frac{\pi}{2l}(2n - 1)z.$$

При рассмотрении вала с защемлениями по концам имеем:

$f(0) = f(l) = 0; \quad C_1 = 0; \quad C_2 \sin Kl = 0; \quad Kl = \pi n; \quad \omega_n = K_n \cdot a = (\frac{\pi n}{l}) \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

Для собственных колебаний при C_2=*1* получаем выражение

$$f_n(z) = \sin \frac{\pi n}{l} z.$$