Лекция 8

Тема 5 «КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ»

5.1. Уравнение движения

Уравнения движения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=Q_j, \qquad (j=1,2,\ldots,n) \quad (5.1)$$

где $\dot{q}_j$ – точка сверху означает производную по времени t;

T – кинетическая энергия системы;

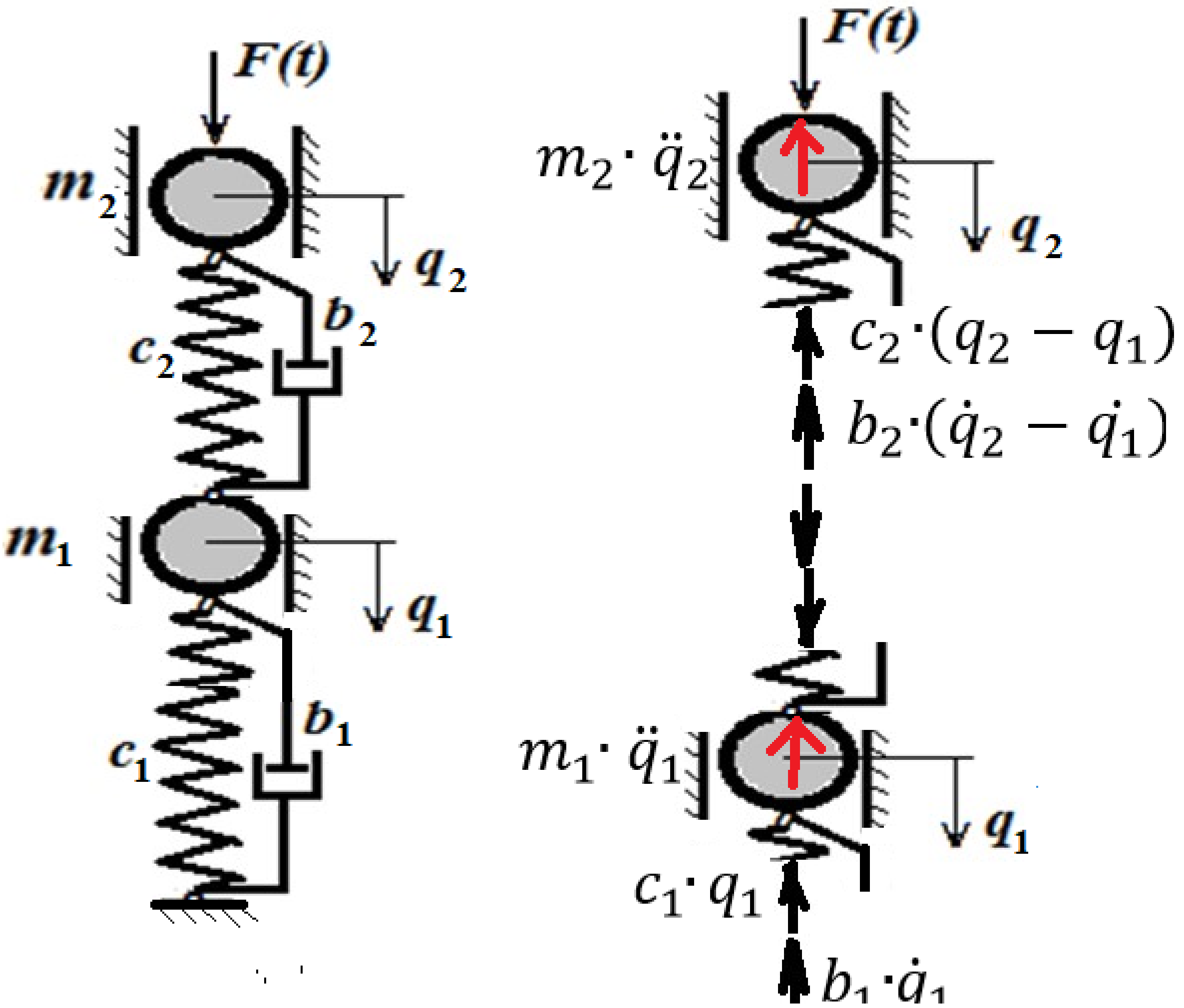
П – потенциальная энергия системы;

Ф – диссипативная функция Релея;

Q_j – обобщенные силы.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{\mathbf{q}}}+\mathbf{B}\dot{\vec{\boldsymbol{q}}}+\mathbf{C}\vec{\mathbf{q}}=\vec{\boldsymbol{F}},$$

где $\boldsymbol{M}$ − матрица масс (коэффициентов инерции); $\boldsymbol{B}$ − матрица потерь (коэффициентов демпфирования); $\boldsymbol{C}$ − матрица жесткостей (коэффициентов жесткости); $\vec{\boldsymbol{F}}$ −вектор внешних нагрузок.



$$m_2\ddot{q}_2 + b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + c_2(q_2 - q_1) - F(t) = 0;$$

$$m_1\ddot{q}_1 - b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + b_1\dot{q}_1 - c_2(q_2 - q_1) + b_1\dot{q}_1 = 0.$$

5.2. Свободные колебания без сопротивления

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}\vec{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \qquad (5.2)$$

с начальными условиями: $\vec{\boldsymbol{q}}(0) = \vec{\boldsymbol{q}}_{\mathbf{0}}$; $\quad \dot{\vec{\boldsymbol{q}}}(0) = \dot{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\mathbf{0}}$.

$\boldsymbol{M}$ – матрица масс (коэффициентов инерции); $\boldsymbol{C}$ – матрица жесткостей (коэффициентов жесткости).

Колебания в такой системе называются свободными и имеют вид:

$$\vec{\boldsymbol{q}}(t) = \vec{\boldsymbol{\nu}} \cdot \sin(\omega t + \beta), \tag{5.3}$$

где $\vec{\boldsymbol{\nu}}, \omega, \beta$ – параметры, подлежащие определению.

Подставив (5.3) в (5.2), приходим к уравнению для определения вектора $\vec{\boldsymbol{\nu}}$**:**

$$[\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] \overline{\cdot \vec{\boldsymbol{\nu}}} = \mathbf{0}. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) имеет отличное от нуля решение, если его определитель равен нулю, т.е.

$$det[\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0. \tag{5.5}$$

При колебаниях системы около положения устойчивого равновесия все корни уравнения (5.5) относительно ω^2 положительные. Извлекая из них квадратные корни и принимая во внимание корни только со знаком «+», найдем для системы с n степенями свободы n собственных частот колебаний $\omega_k \quad (k = 1,2, \dots, n)$, которые вначале будем считать различными, а случай кратных частот рассмотрим ниже. Упорядоченная по мере возрастания последовательность чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называется спектром частот собственных колебаний системы. Каждой частоте $\omega_k \ (k = 1,2, \dots, n)$ соответствует вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_k$, определяемый в соответствии с (5.4) из решения уравнения

$$\left[\mathbf{C} - \omega_k^2 \mathbf{M}\right] \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}. \tag{5.6}$$

Векторы $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}$ составляют спектр форм и называются собственными формами колебаний.

Совокупность спектров форм $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}$ и собственных частот ω_k называется спектром собственных колебаний механической системы.

Умножив соотношение (5.6) слева на вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}}$, получим

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{C} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}} - \omega_k^2 \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}} = 0. \tag{5.7}$$

Отсюда следует зависимость, связывающая спектры частот и форм собственных колебаний:

$$\omega_k^2 = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{C} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}}{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}}, \tag{5.8}$$

которую называют формулой Релея.

Соотношение (5.6) представляет собой однородную систему уравнений для определения элементов следующей матрицы форм колебаний

$$\boldsymbol{v} = [\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}] = \left[v_{jk}\right] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix},$$

(5.9)

где индекс j указывает на номер обобщенной координаты,

k – номер формы (j, k = 1, 2, …, n).

Поскольку система уравнений (5.6) является однородной, то одну из строк в матрице (5.9) можно принять произвольной. Для определенности примем, что $\nu_{11} = \nu_{12} = \cdots = \nu_{1n} = 1$. Остальные элементы матрицы (5.9) однозначно определяются из решения системы уравнений (5.6).

Из (5.6) следует также одно важное свойство форм колебаний, для установления которого запишем это уравнение применительно к некоторым k-ой и j-ой формам колебаний

$$\mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k} = \omega_k^2 \cdot \mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k}; \quad \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{j} = \omega_j^2 \cdot \mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{j}. \qquad (5.10)$$

Умножив первое уравнение слева на $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{T}}$, второе – на $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}}$ и вычтя из первого уравнение второе с учетом известного из теории матриц тождества

$$\vec{x}^T A \vec{y} = \vec{y}^T A \vec{x}$$

Получим

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{j} = \left(\omega_k^2 - \omega_j^2\right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k} = 0.$$

Две разные формы колебаний ортогональны с весами С и М, т.е. при $k \neq j$ выполняются соотношения:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j^T \cdot \mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k} = 0; \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_j^T \cdot \mathbf{C}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k} = 0 \tag{5.11}$$

Величины

$$\mu_k = \vec{\boldsymbol{v}}_k^T \cdot \mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k}; \quad \lambda_k = \vec{\boldsymbol{v}}_j^T \cdot \mathbf{C}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{k} \tag{5.12}$$

называются обобщенными массами и обобщенными жесткостями, соответствующими k-ой форме колебаний.

Лекция 9

5.3. Метод главных координат в теории свободных колебаний

5.3.1. Системы без сопротивления

Рассмотрим свободные колебания, описываемые уравнением

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = \mathbf{0}, \tag{5.13}$$

с начальными условиями: $\vec{\boldsymbol{q}}(0) = \vec{\boldsymbol{q}}_{\mathbf{0}}$; $\quad \dot{\vec{\boldsymbol{q}}}(0) = \dot{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\mathbf{0}}$.

Введем в рассмотрение новый вектор переменных $\vec{\boldsymbol{u}}$**,** определяемый из решения уравнения

$$\mathbf{V} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{q}}, \tag{5.14}$$

где **V** – матрица собственных форм колебаний (5.9).

Поставив (5.14) в (5.13) и умножив полученное равенство слева на $\mathbf{V}^T$, получим уравнение

$$\boldsymbol{\mu}\ddot{\vec{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}, \tag{5.15}$$

где в соответствии с (5.8) и (5.12):

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{V^T M V} = diag[\mu_k, k = 1,2, \dots, n];$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{V^T C V} = diag\left[\omega_k^2 \mu_k, k = 1,2, \dots, n\right] \tag{5.16}$$

С учетом (5.16) уравнение (5.15) распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0, \;\; k = 1,2, \dots, n; \tag{5.17}$$

с решениями вида

$$u_k(t) = u_{0k} \cos \omega_k t + \frac{\dot{u}_{0k}}{\omega_k} \sin \omega_k t, \tag{5.18}$$

где с учетом (5.14)

$$\vec{u}_0 = V^{-1}\vec{q}_0; \quad \dot{\vec{u}_0} = V^{-1}\dot{\vec{q}}_0. \tag{5.19}$$

В соответствии с (5.14) и (5.18) общее решение равнения (5.13) можно представить в форме разложения по собственным формам колебаний:

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \nu_{jk} u_k(t), \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{5.20}$$

5.3.2. Системы с сопротивлением

Рассмотрим теперь свободные колебания в системе с демпфированием, описываемой уравнением

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}\dot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = 0. \tag{5.21}$$

Как и при исследовании уравнения (5.13), перейдем к главным координатам. Подставив (5.14) в (5.21) и умножив полученный результат слева на $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$, приходим к уравнению

$$\boldsymbol{\mu}\ddot{\vec{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{\beta}\dot{\vec{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}, \tag{5.22}$$

где матрицы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ определяются по формулам (5.16), а $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{V}$.

Если матрицу β можно представить в виде

$$\boldsymbol{\beta} = 2n_1\mathbf{M} + 2n_2\mathbf{C},$$

где n_1 и n_2 – некоторые константы, то эта матрица будет диагональной с элементами $2n_k\mu_{\boldsymbol{k}}$, где

$$n_k = n_1 + n_2\omega_k^2, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

В этом случае уравнение (5.22) распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{u}_k + 2n_k\dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \qquad (5.23)$$

С решениями вида

$$u_k(t) = e^{-n_k t}\left[u_{0k}\left(\cos\widetilde{\omega}_k t + \frac{n_k}{\widetilde{\omega}_k}\sin\widetilde{\omega}_k t\right) + \frac{\dot{u}_{0k}}{\widetilde{\omega}_k}\sin\widetilde{\omega}_k t\right], \qquad (5.24)$$

где начальные условия u_{0k} и $\dot{u}_{0k}$, а $\widetilde{\omega}_k = \sqrt{\omega_k^2 - n_k^2}$.

Подставив выражения (5.24) в (5.20), получаем решение уравнения (5.21).

5.3.3. Особые случаи определения спектра собственных колебаний

В случае, когда в системе обнаруживается несколько одинаковых частот собственных колебаний соотношение (5.4) представляет собой n – r независимых уравнений, где r – число одинаковых частот. В этом случае r форм колебаний могут быть выбраны произвольно. При этом можно, например, принять, что r верхних строк в матрице форм (5.9) состоят из единиц. Так, при n = r = 2 (т.е. при двух одинаковых частотах в системе с двумя степенями свободы, показанной, например, на рис.5.1) можно принять $\nu_{11} = \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{22} = 1$. Движение такой системы можно описать уравнениями

$$m\ddot{x} + cx = 0; \qquad m\ddot{y} + cy = 0;$$

и законами

$$x = A\cos\omega t\,; \qquad y = B\cos\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{c/m}$;

постоянные A и B определяются из начальных условий, в зависимости от которых имеем движение по прямой, - окружности или – эллипсу.

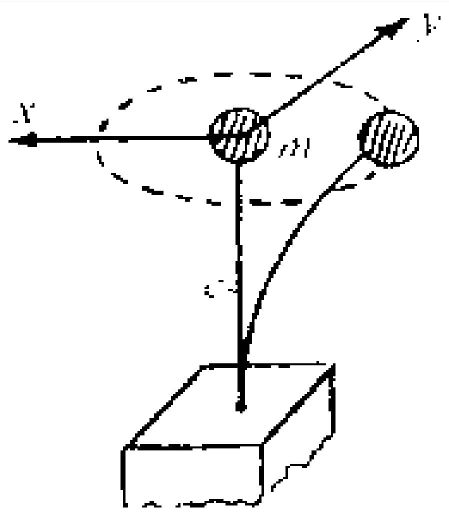


Рис. 5.1