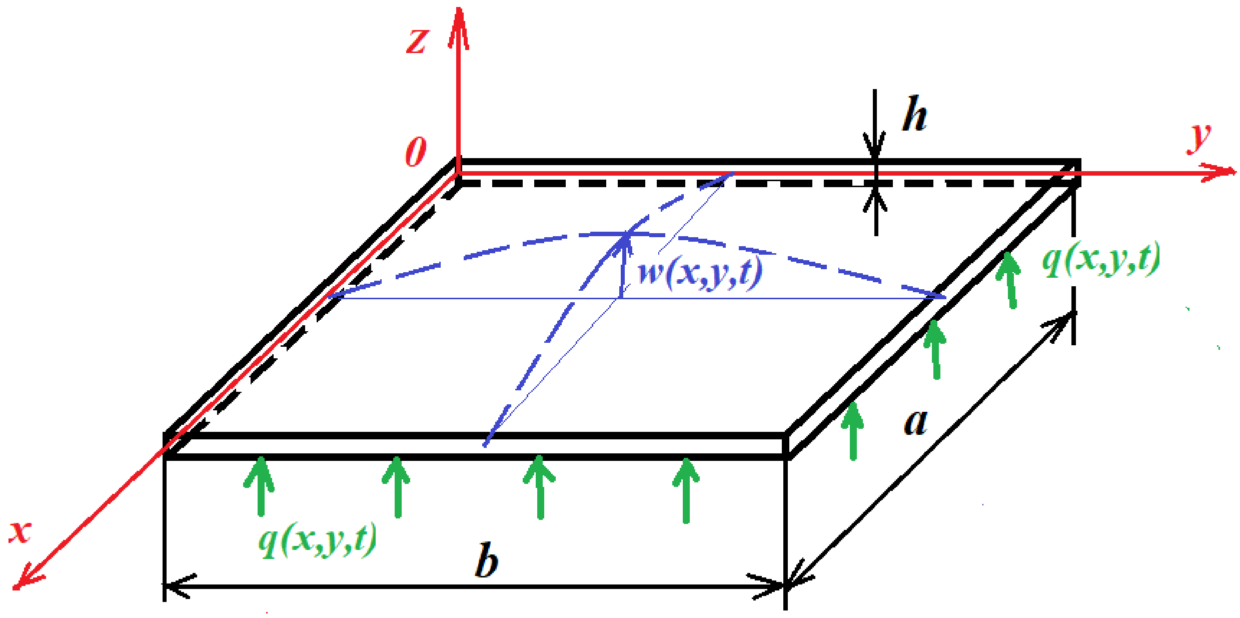
КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН



Дано: E, a, b, h, ρ **—плотность материала,** $q(x, y, t)$ **— интенсивность внешней распределённой нагрузки.**

Подлежит определению функция прогибов срединной плоскости пластины $w(x, y, t)$**.**

Из строительной механики:

дифференциальное уравнение изгибных смещений пластины

$$\nabla^2\nabla^2 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D};$$

где $\nabla^2, \nabla^2 -$ дифференциальные 2 бигармонические операторы;

$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ *−дифференциальный бигармонический оператор;*

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ **− цилиндрическая жёсткость.**

Добавим к внешней нагрузке интенсивность сил инерции

$$q_{\text{ин}} = -\rho h \cdot \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2},$$

и интенсивность сил сопротивления

$$q_{\text{с}} = -n_c \cdot \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}.$$

Получим дифференциальное уравнение изгибных колебаний пластины:

$$\nabla^2\nabla^2 w(x, y, t) + n_c \cdot \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} + \frac{12\rho}{Eh^2}\left(1 - \mu^2\right)\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{q(x,y,t)}{D}. \quad \textbf{(1)}$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

$q(x, y, t) = 0$ *и* $n_c = 0$. ***Уравнение примет вид:***

$$D \cdot \nabla^4 w(x, y, t) + m \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Функцию прогибов $w(x, y, t)$ ***ищем в виде:***

$$w(x, y, t) = f(x, y) \cdot \varphi(t),$$

где $f(x, y) -$ ***амплитудная функция;***

$\varphi(t) -$ ***функция времени.***

Подставим в (2):

$$D \cdot \varphi(t) \cdot \nabla^4 f(x, y) + m \cdot \ddot{\varphi}(t) \cdot f(x, y) = 0,$$

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{-\frac{D}{m} \cdot \varphi(t)} = \frac{\nabla^4 \cdot f(x,y)}{f(x,y)} = K^4 = const.$$

Получим два диф. уравнения:

$$\nabla^4 f(x,y) - K^4 \cdot f(x,y) = 0; \qquad (3)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0, \qquad (4)$$

где $\omega^2 = a^2 \cdot K^4 = \frac{D}{m} \cdot K^4.$

Уравнение (4) имеет решение:

$$\varphi(t) = B \cdot \cos \omega t + C \cdot \sin \omega t = A \cdot sin\,(\omega t + \alpha),$$

где ω ***–частота собственных колебаний;***

B и C или A ***и*** α ***– константы интегрирования, определяемые из начальных условий.***

Сложнее с ур. (3). Если найдём $f(x,y)$, ***то входящие в него 4 постоянных интегрирования находят из граничных условий.***

Получим систему 4-х однородных алгебраических уравнений. Приравняв её определитель нулю, найдём уравнения для определения собственных чисел K_n, ***где*** $n\epsilon[1,2,\dots,\infty)$.

Общее решение диф. уравнения (2) имеет вид:

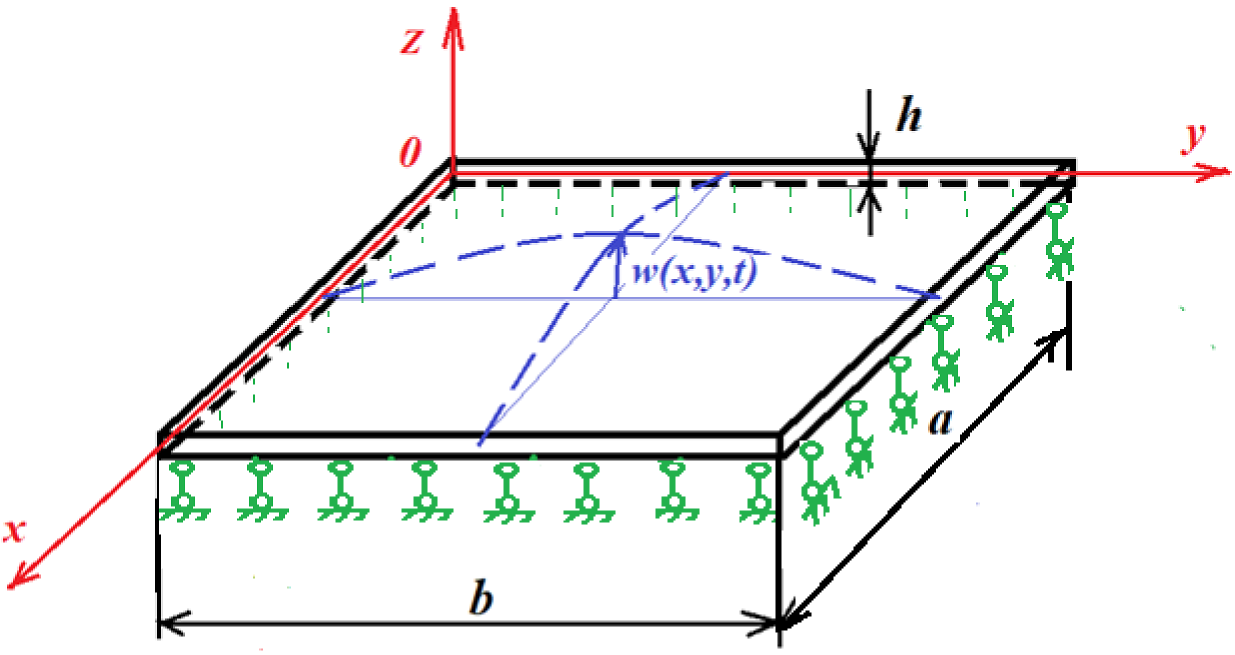
$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y) \cdot \varphi_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y) \cdot A_n \cdot sin\,(\omega_n t + \alpha_n).$$

Пример. Прямоугольная пластинка постоянной толщины шарнирно опёртая по всем краям:

$$y = 0\,, \quad y = b;$$

$$x = 0, x = a.$$



Задаёмся амплитудной функцией в виде:

$$f(x, y) = \vartheta(x) \cdot sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\ \textit{где} \quad n = 1,\ 2, \dots, \dots\ \infty$$