КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н.ТУПОЛЕВА

М.А.ДАРАГАН, С.И. ДОРОФЕЕВА, Е.В. СТРЕЖНЕВА
В.В. СОЛОВЬЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Казань 2009

Введение

Настоящий практикум по высшей математике (Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных) является продолжением предыдущего пособия тех же авторов "Интегральное исчисление функций одной переменной"(Практикум по высшей математике). Он охватывает часть учебного материала второго семестра. По каждой теме приводятся основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач, рассматриваются типовые задачи с подробными решениями, рекомендуются задачи для аудиторных занятий и самостоятельной работы из сборника задач [8,9]. В принятой нумерации формул первое число указывает номер занятия, второе – номер формулы. Нумерация теорем, примеров и рисунков аналогична нумерации формул. В качестве образца приводятся два варианта контрольной работы по теме "Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных", один из них с подробными решениями задач. Основное внимание уделено задачам, способствующим уяснению фундаментальных понятий и методов высшей математики.

Занятие первое

Тема: "ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ."

Основные теоретические сведения

Точкой x n-мерного пространства называют упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$. Число x_i называют i-й координатой точки x, $i = \overline{1, n}$.

Расстояние между двумя точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,. \tag{1.1}$$

Совокупность точек n-мерного пространства, для которых определено расстояние согласно формуле (1.1), называют *n-мерным арифметическим евклидовым пространством* и обозначают через R^n.

Расстояние между точками в n-мерном евклидовом пространстве обладает свойствами:

1° $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2° $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $\forall x$ и $y \in R^n$.

3° $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $\forall x,y,z \in R^n$.

Пусть $x \in R^n$ и $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек y пространства R^n, таких, что $\rho(x,y) < \varepsilon$, называют *n-мерным шаром* с центром в точке x и радиусом ε или *ε-окрестностью* точки x и обозначают через $V(x;\varepsilon)$; таким образом,

$$V(x;\varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x,y) < \varepsilon\} \ . \tag{1.2}$$

Точку $x \in R^n$ называют *точкой прикосновения* множества $D \subset R^n$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества D.

Если у точки $x \in D$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества D, кроме самой точки x, то эту точку называют *изолированной точкой* множества.

Точку $x \in R^n$ называют *предельной точкой* множества D, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества D, отличную от x .

Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in R^n$. Тогда множество $\left\{x^{(m)}\right\}$, $m = \overline{1,\infty}$ называют *последовательностью точек* пространства R^n.

Точку $x \in R^n$ называют *пределом последовательности* $\left\{x^{(m)}\right\}$, $m = \overline{1,\infty}$, если

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0 \ . \tag{1.3}$$

Пишут

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x \ . \tag{1.4}$$

Если $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, то говорят, что последовательность точек $\left\{x^{(m)}\right\}_{m = \overline{1,\infty}}$ сходится к точке x и эту последовательность называют *сходящейся*.

Всякая ε -окрестность точки x содержит все точки данной сходящейся последовательности, за исключением, быть может, определенного числа их.

Понятие предела последовательности $\left\{x^{(m)}\right\}_{m = \overline{1,\infty}}$ точек пространства R^n может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m = \overline{1,\infty}$. Справедлива

Теорема 1.1. Для того чтобы последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$, $m = \overline{1,\infty}$,

$x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right) \in R^n$ сходилась к точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i \ , \quad i = \overline{1, n} \ . \tag{1.5}$$

Сходящиеся последовательности точек обладают свойствами:

1° Если последовательность точек имеет предел, то он единственный.

2° Если последовательность $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, $m = \overline{1, \infty}$, сходится, то она ограничена, т.е. существует n-мерный шар $V(0, \varepsilon)$ такой, что

$$\left\{x^{(m)}, m = \overline{1, \infty}\right\} \subset V(0, \varepsilon).$$

Пусть D – произвольное множество точек пространства R^n.

Если каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ ставится в соответствие по какому-либо закону некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in R$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* $f : D \to R$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Множество D называют *областью определения (существования)* функции, а множество $E = \{u \in R : u = f(x), x \in D\}$ *областью значений функции* $u = f(x)$. При $n > 1$ числовые функции называют *функциями нескольких (многих) переменных.* В случае $n = 2$ вместо $u = f(x_1, x_2)$ пишут также $z = f(x, y)$, в случае $n = 3$ вместо $u = f(x_1, x_2, x_3)$ – также $u = f(x, y, z)$.

Каждой функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ n переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответствует ее график в $n + 1$-мерном пространстве точек $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Множество точек пространства R^{n+1} вида $(x_1, \ldots, x_n, f(x))$, $x \in D$ называют *графиком функции* f. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ является поверхность. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, \ldots, x_n) = C$, где C – некоторая постоянная, называется *множеством уровня функции* f, соответствующим данному значению C. В случае $n = 2$ множество уровня называется также *линией уровня*, в случае $n = 3$ – *поверхностью уровня*, а при $n > 3$ – *гиперповерхностью уровня.*

Пусть функция f определена на множестве $D \subset R^n$, D_1 – некоторое подмножество множества D и $x^{(0)}$ – предельная точка множества D_1. Число A называют *пределом функции* f *по множеству* D_1 в точке $x^{(0)}$ (или, что то же, при x, стремящемся к x^0), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_1$, $x \neq x^{(0)}$, $\rho(x, x^{(0)}) < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x\to x^{(0)},\ x\in D_1} f(x) = A \ . \tag{1.6}$$

Если $A = 0$, то функцию называют *бесконечно малой* по множеству D_1 в точке $x^{(0)}$.

Аналогично случаю функции одной переменной, для пределов функций нескольких переменных по множеству справедливы соответствующие теоремы о пределах суммы, произведения и частного.

Функция f, определенная на множестве $D \subset R^n$, называется *непрерывной в точке* $x^{(0)} \in D$ по множеству D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)}) < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $\left|f(x) - f(x^{(0)})\right| < \varepsilon$.

Если точка $x^{(0)}$ является изолированной точкой множества D, то в этой точке функция f всегда непрерывна.

Если же точка $x^{(0)}$ является предельной для множества D, то

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in D} f(x) = f(x^{(0)}) \tag{1.7}$$

или

$$\lim_{\rho(x, x^{(0)}) \to 0,\ x \in D} \Delta u = 0 \ ,$$

где $\Delta u = f(x) - f(x^{(0)})$ – приращение функции в точке $x^{(0)}$, соответствующее изменению аргумента от точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ до точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\rho(x^{(0)}, x) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$.

Справедлива

Т е о р е м а 1.2. Всякая элементарная функция любого числа переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.

Функцию f называют непрерывной на множестве D, если она непрерывна по этому множеству в каждой его точке.

Функция $f(x)$, определенная на множестве $D \subset R^n$, называется *равномерно непрерывной на* D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек $x \in D$, $x' \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x') < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Если некоторая точка не является точкой непрерывности функции, то ее называют точкой разрыва функции, а функцию – разрывной. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т.д.

П р и м е р ы р е ш е н и я з а д а ч

Пример 1.1. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. Область определения – множество точек, находящихся внутри круга $x^2 + y^2 < 4$ и на его границе.

Пример 1.2. Найти область определения функции $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$ и изобразить ее на плоскости. Определить линии уровня функции.

Решение. Область определения находится из условия $-1 \leq 1 - (x^2 + y^2) \leq 1$

или после преобразования $-2 \le -(x^2+y^2) \le 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2 \le 2$. Всякая окружность $x^2+y^2=r^2 \le 2$ есть линия уровня, так как на этой окружности (рис.1.1)
$f(x,y) = \arcsin(1-x^2-y^2) = \text{const}$.

Пример 1.3. Найти область определения и линии уровня функции

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

Решение. Область определения есть плоскость с исключенной парой прямых $y = \pm x$, т.к. $x^2 \ne y^2$. Всякий луч $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $t \ne 0$, где $\alpha \ne \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\alpha \ne \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, есть линия уровня

$$f\left(t\cos\alpha, t\sin\alpha\right) = \frac{t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha}{t^2\cos^2\alpha - t^2\sin^2\alpha} = \text{const} \; .$$

Пример 1.4. Найти область определения функции

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2z^2-6x^2-3y^2-6}} \; .$$

Решение. Преобразуем подкоренное выражение функции. Учитывая, что показатель степени корня четный и сам корень находится в знаменателе дроби, получим

$$2z^2-6x^2-3y^2-6 > 0 \text{ или } \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3} < -1 \; .$$

Последнее неравенство определяет часть R^3, расположенную внутри двуполостного гиперболоида.

Пример 1.5. Найти пределы:

$$) \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1} \; ; \qquad) \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \; .$$

Решение. а) При $x=0$, $y=0$ имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем выражение под знаком предела, домножив на неполный квадрат суммы выражение $\left(\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt[3]{(x^2+y^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2+1)-1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\sqrt[3]{(x^2+y^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+y^2+1} + 1 \right) = 3 \ .$$

б) Перейдем к полярным координатам с полюсом в точке $(0,0) : x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Функция $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi$ ограничена, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right)}{r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \lim_{r\to 0} r^2\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = 0 \ .$$

Пример 1.6. Доказать, что не существует $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение. Пусть переменная $M(x,y) \to O(0,0)$ по прямой $y = kx$, где $k =$ const, тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} \ ,$$

т.е. функция $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ вдоль всякой прямой $y = kx$ сохраняет постоянное значение, зависящее от углового коэффициента k. Поэтому при стремлении $M(x,y) \to O(0,0)$ по различным прямым функция будет иметь различные предельные значения, а это значит, что предела в точке $(0,0)$ не существует.

Пример 1.7. Найти в точке M(4,0) предел $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{tg} xy}{y}$.

Решение. В точке $(4,0)$ $f(x,y)$ не определена. Умножив и разделив эту функцию на $x \neq 0$, получим

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ y \to 0}} x \cdot \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ y \to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \to 4 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} = 4 \ , \ .. \lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1 \ .$$

Пример 1.8. Доказать, что в точке $M(0,0)$ функция $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ предела не имеет.

Решение. Используем определение (1.4). Выберем две последовательности точек, сходящиеся к $M(0,0)$: $M_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ и $M_n'\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

$$f(M_n) = \frac{1/n}{1/n+1/n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(M_n) = \frac{1}{2} \ .$$

$$f(M_n') = \frac{0}{0+1/n} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(M_n') = 0 \ .$$

Итак, для различных последовательностей точек получены разные пределы, следовательно, предела функции $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ в точке $M(0,0)$ не

существует.
<u>*Пример 1.9.*</u> Найти точки разрыва функции:

$$) \ z = \frac{x^2 + 2xy + 10}{y^2 - 2x + 1} \ , \quad) \ u = \frac{4}{x^2 + y^2 - z} \ .$$

<u>*Решение.*</u>
а) Условие непрерывности данной функции нарушено в тех точках множества R^2, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2 - 2x + 1 = 0$ или $x = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$. Следовательно, точки разрыва образуют параболу $x = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$ с осью симметрии - осью абсцисс и вершиной в т.(0,5;0).
б) Функция терпит разрыв в каждой точке параболоида вращения $z = x^2 + y^2$.
<u>*Пример 1.10.*</u> Доказать, что функция $u = x + 2y + 3$ равномерно непрерывна на плоскости.
<u>*Решение.*</u> Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\forall M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(M_1, M_2) \ = \ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta(\varepsilon)$$

будут выполнены неравенства $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, $|y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon)$ и, следовательно

$$|u(M_1) - u(M_2)| = |x_1 + 2y_1 - x_2 - 2y_2| \leq |x_1 - x_2| + 2\,|y_1 - y_2| < 3\delta(\varepsilon) = \varepsilon \ .$$

По определению это означает, что функция $u(x, y)$ равномерно непрерывна на плоскости.

Задачи для аудиторных занятий

Из сборника задач [6]: 7.1,7.9-7.15 нечетные, 7.33-7.37 нечетные, 7.45-7.49 нечетные.

Задачи для самостоятельной работы

Из сборника задач [6]: 7.2, 7.8-7.14 четные, 7.32-7.36 четные, 7.44-7.48 четные.

<u>Занятие второе</u>

Тема: "ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ"

Основные теоретические сведения

Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Фиксируя переменную $y = y_0$, получим функцию одной переменной x: $z = f(x, y_0)$. Обычную производную этой функции в точке $x = x_0$ называют *частной производной* функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по x и обозначают через $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \overset{def}{=} \left.\frac{d\ f(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} \tag{2.1}$$

или

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

где $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ – приращение функции по переменной x.

Аналогично вводится частная производная по y :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \overset{def}{=} \left.\frac{d\ f(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0} \tag{2.2}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} \overset{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \ ,$$

где $\Delta_y z$ – приращение функции по переменной y. Линейные функции $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ переменных dx, dy, (дифференциалов независимых переменных) называют *частными дифференциалами* функции $f(x, y)$ соответственно по переменным x, y и обозначают через $d_x z = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx$, $d_y z = \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Аналогичные определения имеют место для любого числа перемен- ных.

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, то

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \overset{def}{=} \left.\frac{df(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_i}\right|_{x_i = x_i^{(0)}} \tag{2.3}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \overset{def}{=} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} \ ,$$

где

$$\Delta_{x_i} u = f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) -$$
$$-f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \ .$$

Согласно определению (2.3), частная производная функции f по переменной x_i в точке $x^{(0)}$ является числом. При изменении точки $x^{(0)}$ изменяется и значение частной производной. Таким образом, частную производную от функции f можно рассматривать как функцию от n переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ называют *однородной функцией* степени m (показатель однородности), если для любого действительного числа $t \neq 0$ справедливо равенство

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ . \tag{2.4}$$

Если однородная степени m функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по каждой переменной, то выполняется тождественное равенство (теорема Эйлера)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + x_n f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) = mf(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Частный дифференциал $d_{x_i}u$ определяется по формуле

$$d_{x_i}u \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \ , \quad -\infty < dx_i < +\infty \ , \tag{2.5}$$

где dx_i – *дифференциал независимой переменной* x_i.

При вычислении частных производных пользуются правилами вычисления обычных производных, так как в правых частях (2.1), (2.2), (2.3) – обыкновенные производные.

Пусть функция f определена в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0). Функцию двух переменных $z = f(x, y)$ называют *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0), если существуют такие два числа A и B, что *полное приращение функции* $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\, \rho \ , \tag{2.6}$$

где при $\rho \neq 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется *дифференциалом* функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается через dz. Таким образом,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \qquad \text{или} \qquad dz = Adx + Bdy \ . \tag{2.7}$$

Справедливы

Т е о р е м а 2.1. (Необходимые условия дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = Adx + Bdy$ – ее дифференциал в этой точке, то в точке (x_0, y_0) функция f непрерывна и $A = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{dy}$.

С л е д с т в и е. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то она имеет единственный дифференциал

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \text{или} \qquad dz=d_xz+d_yz\ . \tag{2.8}$$

Т е о р е м а 2.2. (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть функция $z=f(x,y)$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) имеет частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, которые непрерывны в самой точке (x_0,y_0); тогда функция дифференцируема в этой точке.*

Функцию $f(x,y)$, дифференцируемую в каждой точке множества D, называют *дифференцируемой на множестве* D.

Определения и утверждения, сформулированные здесь для функции двух переменных, переносятся и на случай функции $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Для *полного приращения* и *дифференциала* функции в точке $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(o)}\right)$ справедливы формулы

$$\Delta u=f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ldots,x_n^{(0)}+\Delta x_n\right)-f\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)\ ,$$

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \tag{2.9}$$

и при достаточно малом $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}$, где $\Delta x_1=x_1-x_1^{(0)}$, …, $\Delta x_n=x_n-x_n^{(0)}$, для дифференцируемой функции $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ имеют место приближенные равенства:
$\Delta u\approx du$,

$$f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ldots,x_n^{(0)}+\Delta x_n\right)\approx f\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)+df\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right). \tag{2.10}$$

Пусть задана функция $f(x,y)$ и найдены ее частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ как функции $x,y\in D$. Частные производные f'_x и f'_y называют также *частными производными 1-го порядка.*

Частные производные по x и y от частных производных 1-го порядка $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ называют *частными производными 2-го порядка* и обозначают соответственно через $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f''_{xx}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ или f''_{xy}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ или f''_{yx}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ или f''_{yy}.

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}\overset{def}{=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}\overset{def}{=}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \; . \tag{2.11}$$

Подобным же образом определяют и обозначают *частные производные 3-го,* 4-го, 5-го и т.д. порядков. Частную производную по любой из независимых переменных от частной производной $(m-1)$–го порядка функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $n=2,3\ldots$ называют *частной производной m-го порядка.*

Частную производную, полученную дифференцированием по различным переменным, называют *смешанной частной производной.*

Количество частных производных от функции f при увеличении m, очевидно, растет. Однако при некоторых, часто выполняющихся условиях, многие смешанные частные производные по одним и тем же переменным совпадают, т.е. не зависят от порядка дифференцирования.

Справедлива

Т е о р е м а 2.3. Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке; тогда $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Из теоремы 2.3 следует, что m-я смешанная частная производная (при условии существования и непрерывности частных производных) не зависит от порядка дифференцирования, т.е. справедливы следующие равенства: $f''_{xy}=f''_{yx}$; $f'''_{xyx}=f'''_{yxx}=f'''_{xxy}$; $f^{(4)}_{xyxy}=f^{(4)}_{xxyy}$ и т.д.

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до m -го порядка включительно.

Дифференциалом 2-го порядка, который обозначается через d^2z, называют дифференциал от ее 1-го дифференциала, рассматриваемого как функцию независимых переменных x,y, при фиксированных dx и dy, т.е.

$$d^2z \stackrel{def}{=} d\,(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \; . \tag{2.12}$$

Дифференциал 2-го порядка имеет особое значение для приложений.

Аналогично определяется *дифференциал 3-го порядка*:

$$\begin{aligned} d^3z &\stackrel{def}{=} d\left(d^2z\right) = d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 \; . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Вообще, $d^mz = d\left(d^{m-1}z\right)$.

Дифференциал m-го порядка функции $z=f(x,y)$, где x, y – независимые переменные, выражают символической формулой

$$d^mz \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону,

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k} \ . \tag{2.14}$$

Числа C_m^k в равенстве (2.14) означают коэффициенты бинома Ньютона (количество сочетаний из m элементов по k), т.е.

$$C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \ .$$

Подобным же образом определяются дифференциалы 2-го порядка d^2u, 3-го порядка d^3u и, вообще, m-го порядка $d^m u$ функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\,(du) \ , \\ d^3u &= d\left(d^2u\right) \ , \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ d^m u &= d\left(d^{m-1}u\right) \ . \end{aligned}$$

Дифференциал m-го порядка функции $u = f\,(x_1, \ldots, x_n)$ выражается символической формулой

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^m f \ , \tag{2.15}$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Найти частные производные функции $z = 6 - x^2y + 5e^x$.
Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(6 - x^2y + 5e^x\right)'_x = -2xy + 5e^x \ .$$

Рассматривая x как постоянную величину, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(6 - x^2y + 5e^x\right)'_y = -x^2 \ .$$

Пример 2.2. Найти частные производные и первый дифференциал:

$$) \ \ u = x^2 \sin y + \cos(xy^2) \ ; \quad) \ \ u = x^5 - 3y^4 + xyz \ .$$

Решение.
а) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin y - y^2 \sin(xy^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y - 2xy \sin(xy^2) \ .$$

Согласно формуле (2.7) запишем дифференциал:

$$du = \big(2x\sin y - y^2\sin(xy^2)\big)\,dx + \big(x^2\cos y - 2xy\sin(xy^2)\big)\,dy\ .$$

б) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 + yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -12y^3 + xy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

тогда $du = \big(5x^4 + yz\big)\,dx + \big(xz - 12y^3\big)\,dy + xydz\ .$

Пример 2.3.
Показать, что $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=3$, если $u=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$.
Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\ ;\quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3\left(x^3-xyz+y^3-xyz+z^3-xyz\right)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}=3\ .$$

Пример 2.4. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$.
Решение. Найдем частные производные:

$$z'_x=y+e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\ ,\quad z'_y=x+xe^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x}\ .$$

Подставляя их значения в данное выражение, получим

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy+xe^{\frac{y}{x}}-ye^{\frac{y}{x}}\right)+\left(xy+ye^{\frac{y}{x}}\right)=$$

$$=xy+\left(xy+e^{\frac{y}{x}}x\right)=xy+z\ .$$

Пример 2.5. Проверить справедливость теоремы Эйлера об однородных (2.4) функциях, если $z=x^3+5y^2x-4y^3$.
Решение. Данная функция является однородной степени 3, так как

$$(tx)^3+5\,(ty)^2\,tx-4\,(ty)^3=t^3\left(x^3+5y^2x-4y^3\right).$$

Согласно теореме Эйлера должно выполняться равенство

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=3f(x,y)\ . \tag{2.16}$$

Действительно, находим частные производные f'_x, f'_y и подставляем их выражения в (2.16); имеем

$$f'_x=3x^2+5y^2\ ,\quad f'_y=10xy-12y^2\ ,$$

$$x\left(3x^2+5y^2\right)+y\left(10xy-12y^2\right)=3x^3+5xy^2+10xy^2-12y^3=3\left(x^3+5xy^2-4y^3\right).$$

Пример 2.6. Найти для функции $z=5x^2-xy+3y^2+5x+2y-1$, полное приращение и полный дифференциал в точке (1,2) при $\Delta x=0,1$; $\Delta y=0,2$. Оценить абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение. $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 5(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)\times$ $\times(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 5(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y) - 1 - 5x^2 + xy - 3y^2 - 5x-$ $-2y+1 = 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + 6y\Delta y + 3\Delta y^2 + 5\Delta x + 2\Delta y$,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (10x - y + 5)\,dx + (6y - x + 2)\,dy \ .$$

Подставляя в выражение Δz и dz значения $x = 1$; $y = 2$; $\Delta x = dx = 0,1$; $\Delta y = dy = 0,2$, получим $\Delta z = 4,5$ и $dz = 3,9$.

Абсолютная погрешность $|\Delta z - dz| = 4,05 - 3,9 = 0,15$, а относительная погрешность $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \dfrac{0,15}{4,05} \approx 0,037$.

Пример 2.7. Найти производные 2-го порядка, если $u = z^{xy}$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^{xy}\ln z^y = z^{xy} y \ln z \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z^{xy}\ln z^x = z^{xy} x\ln z \ , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1} \ .$$

Теперь находим производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (u'_x)'_x = z^{xy} y\ln z \cdot y \ln z = y^2 \cdot \ln^2 z \cdot z^{xy} \ ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x \cdot z^{xy-1}(xy\ln z + 1) \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (u'_x)'_y = (z^{xy})'_y\, y\ln z + \ln z\,(y)'_y\, z^{xy} = z^{xy}\ln z \cdot xy \cdot \ln z + z^{xy}\ln z =$$

$$= z^{xy}\ln z\,(xy\ln z + 1) \ ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \ ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = xy\,(xy-1)\,z^{xy-2} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(u'_y\right)'_y = x\ln z\,(z^{xy})'_y = x^2\ln^2 z \cdot z^{xy} \ ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = yz^{xy-1}(xy\ln z + 1) \ .$$

Пример 2.8. Показать, что функция $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если φ и ψ произвольные функции аргумента $t = \dfrac{y}{x}$.

Решение. Найдем первые частные производные, учитывая, что $t'_x = -\dfrac{y}{x^2}$, $t'_y = \dfrac{1}{x}$.

$$z'_x = \varphi + x\varphi'_t t'_x + y\psi'_t t'_x = \varphi - x\varphi'_t\frac{y}{x^2} - y\psi'_t\frac{y}{x^2} \ ,$$

$$z'_y = x\varphi'_t t'_y + \psi + y\psi'_t t'_y = x\varphi'_t\frac{1}{x} + \psi + y\psi'_t\frac{1}{x} \ .$$

Найдем вторые производные, помня, что если φ и ψ функции аргумента t, то и φ'_t и ψ'_t также функции аргумента t.

$$z''_{xx} = \varphi'_t\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \varphi'_t\left(\frac{y}{x}\right)'_x - \frac{y}{x}\left(\varphi'_t\right)'_x - \left(\psi'_t\right)'_x\frac{y^2}{x^2} - \psi'_t\left(\frac{y^2}{x^2}\right)'_x =$$

$$= -\frac{y}{x^2}\varphi_t' + \frac{y}{x^2}\varphi_t' - \frac{y}{x}\varphi_{tt}^{''}\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \psi_{tt}^{''}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{y^2}{x^2} + \psi_t'\frac{2y^2}{x^3} \ ;$$

$$z_{xy}^{''} = (z_x')_y' = -\frac{y}{x}\varphi_{tt}^{''}\frac{1}{x} - \frac{2y}{x^2}\psi_t' - \frac{y^2}{x^2}\psi_{tt}^{''}\frac{1}{x} \ ; \quad z_{yy}^{''} = \varphi_{tt}^{''}\frac{1}{x} + \psi_t'\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\psi_t' + \frac{y}{x}\psi_{tt}^{''}\frac{1}{x} \ .$$

Подставляя в данное выражение найденные частные производные, получим

$$\frac{y^2}{x}\varphi_{tt}^{''} + \frac{y^3}{x^2}\psi_{tt}^{''} + \frac{2y^2}{x}\psi_t' - \frac{2y^2}{x}\varphi_{tt}^{''} - \frac{4y^2}{x}\psi_t' - \frac{2y^3}{x^2}\psi_{tt}^{''} + \frac{y^2}{x}\varphi_{tt}^{''} + \frac{2y^2}{x}\psi_t' + \frac{y^3}{x^2}\psi_{tt}^{''} = 0 \ .$$

Пример 2.9. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков для функции $z = 3x^2 - 5xy - y^2$.

Решение.

1-й способ. Имеем $z_x' = 6x - 5y$, $z_y' = -5x - 2y$, тогда

$$dz = (6x - 5y)\,dx - (5x + 2y)\,dy \ .$$

Найдем вторые производные: $z_{xx}^{''} = 6$, $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''} = -5$, $z_{yy}^{''} = -2$, тогда

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = z_{xx}^{''}dx^2 + +2z_{xy}^{''}dxdy + z_{yy}^{''}dy^2 =$$

$$= 6dx^2 - 10dxdy - 2dy^2 \ .$$

2-й способ.

$$dz = d\left(3x^2\right) - d\,(5xy) - d\left(y^2\right) = 6xdx - 5\,(ydx + xdy) - 2ydy =$$

$$= (6x - 5y)\,dx - (5x + 2y)\,dy \ .$$

Дифференцируя еще раз и помня, что dx и dy не зависят от x и y, получим:

$$d^2z = (6dx - 5dy)\,dx - (5dx + 2dy)\,dy =$$

$$= 6dx^2 - 5dydx - 5dxdy - 2dy^2 = 6dx^2 - 10dxdy - 2dy^2 \ .$$

Пример 2.10. Найти d^3z, если $z = e^x\cos y$.

Решение. Найдем частные производные 3-го порядка, помня, что очередность дифференцирования не имеет значения:

$$\begin{array}{llll} z_x' = e^x\cos y \ , & z_y' = -e^x\sin y \ ; & & \\ z_{xx}^{''} = e^x\cos y \ , & z_{xy}^{''} = -e^x\sin y \ , & z_{yy}^{''} = -e^x\cos y \ ; & \\ z_{xxx}^{'''} = e^x\cos y \ , & z_{xxy}^{'''} = -e^x\sin y \ , & z_{xyy}^{'''} = -e^x\cos y \ , & z_{yyy}^{'''} = e^x\sin y \ . \end{array}$$

Используя формулу (2.13) запишем:

$$d^3z = e^x\left(\cos y dx^3 - 3\sin y dx^2dy - 3\cos y dxdy^2 + \sin y dy^3\right) \ .$$

З а д а ч и д л я а у д и т о р н ы х з а н я т и й

Из сборника задач [6]: 7.55-7.63 нечетные, 7.69; 7.79; 7.81; 7.87.

Задачи для самостоятельной работы

Из сборника задач [6]: 7.56-7.64 четные, 7.68; 7.76; 7.80; 7.82; 7.88.

Занятие третье

Тема: "ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА. НЕИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ."

Основные теоретические сведения

Теорема 3.1. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одной переменной дифференцируемы в точке t_0 и пусть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0, имеет в t_0 производную и эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{3.1}$$

или, подробнее,

$$\frac{df\left(x(t_0), y(t_0)\right)}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t_0)}{dt} \ .$$

Теорема 3.2. Пусть функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ одной переменной дифференцируемы в точке t_0 и пусть $x_1^{(0)} = x_1(t_0)$, …, $x_n^{(0)} = x_n(t_0)$. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то сложная функция $u = f\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, имеет в t_0 производную и эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \ . \tag{3.2}$$

Теорема 3.3. Пусть в окрестности точки $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, задана функция $u = u\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, а на некотором множестве $D_t \subset R^k$ – функции $x_i = x_i\left(t_1, \ldots, t_k\right)$, $i = \overline{1, n}$ такие, что $x_i\left(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}\right) = x_i^{(0)}$. Если функция $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и в точке $t^{(0)} = \left(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}\right)$ существуют частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n}$, то сложная функция $u(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t_j}$, $j = \overline{1, k}$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \ , \quad j = \overline{1, k} \ . \tag{3.3}$$

Формула (3.3) выражает собой *правило дифференцирования сложной функции* в общем случае. При этом выражение для дифференциала 1-го порядка будет иметь такой же вид, как и в случае функции $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (см.2.9) (*свойство инвариантности* формы дифференциала 1-го порядка относительно выбора переменных)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \ . \tag{3.4}$$

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов. Если u и v - функции нескольких переменных, то имеют место общие правила нахождения дифференциалов:

1) $d(u+v) = du + dv$;

2) $d\,(u \cdot v) = udv + vdu$;

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Выражения для дифференциалов высших порядков сложной функции, вообще говоря, отличаются от выражения (см. (2.15))

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m u \ ,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ – независимые переменные. Например, дифференциал 2-го порядка выражается формулой

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} d^2 x_n \ . \tag{3.5}$$

Дифференцирование неявных функций

1. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$, где F – дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию от x, т.е. неявную функцию $y = f(x)$ или $y = y(x)$. Дифференцируя левую часть тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ как сложную функцию одной переменной x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \ , \tag{3.6}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \ , \tag{3.7}$$

если $F'_y \neq 0$ в соответствующей точке (x, y).

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием (3.7) или (3.6).

2. Пусть уравнение $F(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$, где F – дифференцируемая функция переменных $x_1, \ldots, x_n, u$, определяет u как функцию независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, т.е. неявную функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ или $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Полная производная функции $F(x_1, \ldots, x_n, u)$ по переменной x_i равна

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \ , \tag{3.8}$$

$$\text{откуда} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}} \ , \quad i = \overline{1, n} \ , \qquad (3.9).$$

если $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ в соответствующей точке $(x_1, \ldots, x_n, u)$.

Частные производные функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ можно найти также путем вычисления полного дифференциала функции $F(x_1, \ldots, x_n, u)$ и приравнивая его нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial u} du = 0 \ , \tag{3.10}$$

откуда

$$du = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}. \tag{3.11}$$

С другой стороны

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \ . \tag{3.12}$$

Сравнивая (3.11) и (3.12), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}} \ , \quad i = \overline{1, n} \ , \tag{3.13}$$

если $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ в соответствующей точке $(x_1, \ldots, x_n, u)$.

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием (3.9) или (3.13).

3. Пусть система двух уравнений

$$\begin{cases} F_1\,(x, y, u, v) = 0 \ , \\ F_2\,(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad n \tag{3.14}$$

имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, причем функции F_1 и F_2 имеют в окрестности точки (x_0, y_0, u_0, v_0) непрерывные производные 1-го порядка и якобиан

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

в точке (x_0, y_0, u_0, v_0). Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, u_0, v_0) система (3.14) определяет единственную систему непрерывных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, имеющих непрерывные частные производные и удовлетворяющих условиям $u(x_0,y_0) = u_0$, $v(x_0,y_0) = v_0$. Дифференциалы этих функций du и dv $\left(\text{а значит, и частные производные} \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F_1}{\partial u}du + \dfrac{\partial F_1}{\partial v}dv = 0 \ , \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F_2}{\partial u}du + \dfrac{\partial F_2}{\partial v}dv = 0 \ . \end{cases}$$

4. Пусть $z = f(x,y)$ – функция независимых переменных x и y задана параметрическими уравнениями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ и

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности точки (u_0, v_0). Тогда дифференциал dz этой функции (а значит, и ее частные производные) в окрестности точки (u_0, v_0) можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv \ ; \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv \ ; \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv \ . \end{cases}$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x^2+2y}$, где $x = \cos t$, $y = t^2 - 1,5$.

Решение.

1-й способ: по формуле (3.1)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = e^{3x^2+2y}6x\,(-\sin t) + e^{3x^2+2y}\cdot 2\cdot 2t =$$

$$= e^{3\cos^2 t + 2t^2 - 3}\,(4t - 6\cos t \sin t) = e^{2t^2 - 3\sin^2 t}\,(4t - 3\sin 2t)\ .$$

2-й способ: выразив $z = z(t)$, т.е. $z = e^{3\cos^2 t+2t^2-3} = e^{2t^2-3\sin^2 t}$, имеем $\dfrac{dz}{dt} = e^{2t^2-3\sin^2 t}\,(4t - 6\sin t\cos t) = e^{2t^2-3\sin^2 t}\,(4t - 3\sin 2t)\ .$

Пример 3.2. Найти все частные производные функции $u = f(x, xy, xyz)$, где f – произвольная дифференцируемая функция.

Решение. Данная функция является сложной функцией аргументов x, y и z, т.е. $u = f(x_1, x_2, x_3)$, где $x_1 = x$, $x_2 = xy$, $x_3 = xyz$, тогда

$$u'_x = f'_{x_1}(x_1)'_x + f'_{x_2}(x_2)'_x + f'_{x_3}(x_3)'_x = f'_{x_1} + yf'_{x_2} + yzf'_{x_3}\ ;$$
$$u'_y = f'_{x_1}(x_1)'_y + f'_{x_2}(x_2)'_y + f'_{x_3}(x_3)'_y = xf'_{x_2} + xzf'_{x_3}\ ;$$
$$u'_z = f'_{x_1}(x_1)'_z + f'_{x_2}(x_2)'_z + f'_{x_3}(x_3)'_z = xyf'_{x_3}\ .$$

Пример 3.3. Найти z'_u и z'_v, если $z = x^2\ln y$, $x = \dfrac{u}{v}$, $y = u\cdot v$.

Решение. Используем формулу (3.3):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2x\ln y\cdot\frac{1}{v} + \frac{x^2}{y}\cdot v = \frac{u}{v^2}\,(2\ln(uv) + 1)\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 2x\ln y\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y}u = \frac{u^2}{v^3}\,(1 - 2\ln(uv))\ .$$

Пример 3.4. Показать, что функция $u = xyz + F\left(e^{\frac{x}{z}}, \cos(x+y+z)\right)$, где F – произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в области D, удовлетворяющая в точках этой области условию (уравнению)

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - (x+z)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 2xz\ .$$

Решение. Вводим обозначения $e^{\frac{x}{z}} = \xi$, $\cos(x+y+z) = \eta$ и рассматриваем $u = xyz + F(\xi,\eta)$ как сложную функцию. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz + \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = xz + \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial \eta}\,(-\sin(x+y+z))\ .$$

В данном случае $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ находить не надо, так как нам нужны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = (u'_y)'_x\ ,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (u'_y)'_y\ ,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = (u'_y)'_z\ .$$

Находим частные производные 2-го порядка этой функции

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = z - \sin(x+y+z)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{\partial F}{\partial \eta}\cos(x+y+z) = z - \sin(x+y+z)\left(F''_{\eta\xi}e^{\frac{x}{z}}\cdot\frac{1}{z} - F''_{\eta\eta}\sin(x+y+z)\right) -$$
$$-F'_{\eta}\cos(x+y+z)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x - \sin(x+y+z)\left(F''_{\eta\xi}e^{\frac{x}{z}}\left(-\frac{x}{z^2}\right) - F''_{\eta\eta}\sin(x+y+z)\right) -$$
$$-\cos(x+y+z)\,F'_{\eta}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F''_{\eta\xi}\cdot 0 + F''_{\eta\eta}\sin^2(x+y+z) - F'_{\eta}\cos(x+y+z)\ .$$

Подставив найденные производные в заданное условие (уравнение), будем иметь

$$xz - \sin(x+y+z)\,e^{\frac{x}{z}}\frac{x}{z}F''_{\xi\eta} + x\sin^2(x+y+z)\,F''_{\eta\eta} - x\cos(x+y+z)\,F'_{\eta} -$$
$$-x\sin^2(x+y+z)\,F''_{\eta\eta} + x\cos(x+y+z)\,F'_{\eta} - z\sin^2(x+y+z)\,F''_{\eta\eta} +$$
$$+z\cos(x+y+z)\,F'_{\eta} + xz + \frac{x}{z}e^{\frac{x}{z}}\sin(x+y+z)F''_{\eta\xi} + z\sin^2(x+y+z)\,F''_{\eta\eta} -$$
$$-z\cos(x+y+z)\,F'_{\eta} = 2xz\ .$$

Принимая во внимание равенство смешанных производных $F''_{\xi\eta} = F''_{\xi\eta}$, убеждаемся, что данное уравнение обращается в тождество. Следовательно, заданная функция действительно удовлетворяет данному уравнению.

Пример 3.5. Найти частные производные функции $z = z(x,y)$, заданной неявно $x^2y - y^2z + xz = 0$.

Решение.

1. Неявное задание функции легко преобразовать к явному $z = \dfrac{x^2y}{y^2-x}$, и вопрос о существовании и дифференцируемости данной функции становится ясным без проверки условий теоремы существования:

$$z'_x = \frac{2xy\left(y^2-x\right) - x^2y(-1)}{\left(y^2-x\right)^2} = \frac{xy\left(2y^2-x\right)}{\left(y^2-x\right)^2}\ ,$$

$$z'_y = \frac{x^2\left(y^2-x\right) - x^2y\cdot 2y}{\left(y^2-x\right)^2} = -\frac{x^2(y^2+x)}{(y^2-x)^2}\ .$$

2. Частные производные можно найти по формулам (3.9):

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xy+z}{x-y^2}\ , \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F''_z} = -\frac{x^2-2yz}{x-y^2}\ .$$

3. Можно найти частные производные непосредственным дифференцированием тождества $x^2y - y^2z(x,y) + xz(x,y) \equiv 0$, помня, что z функция от x и y. Дифференцируя по x, находим

$$2xy - y^2z'_x + z'_x\cdot x + z = 0\ , \quad z'_x = -\frac{2xy+z}{x-y^2}\ .$$

Дифференцируя по y, находим $x^2-2yz-y^2z'_y+xz'_y=0$, $\quad z'_y=-\dfrac{x^2-2yz}{x-y^2}$.

Пример 3.6. Показать, что функция z, определяемая уравнением $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=y^2-z^2$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $2yz\dfrac{\partial z}{\partial x}-xz\dfrac{\partial z}{\partial y}+xy=0$.

Решение.

Применим правило дифференцирования неявно заданной функции к функции z, определяемой уравнением $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-y^2+z^2=0$. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot 2x}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot 2z+2z}=-\frac{2x\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2z\left(x^2+y^2+z^2\right)+z}\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)2y-2y}{4z\left(x^2+y^2+z^2\right)+2z}=-\frac{2y\left(x^2+y^2+z^2\right)-y}{2z\left(x^2+y^2+z^2\right)+z}\ .$$

Преобразуя левую часть уравнения $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-y^2+z^2=0$ с учетом полученных выражений для $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, убеждаемся, что она обращается в нуль:

$$-2yz\frac{2x\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2z\left(x^2+y^2+z^2\right)+z}+xz\frac{2y\left(x^2+y^2+z^2\right)-y}{2z\left(x^2+y^2+z^2\right)+z}+xy=$$

$$=\frac{-4xy\left(x^2+y^2+z^2\right)+2xy\left(x^2+y^2+z^2\right)-xy+xy+2xy\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)+1}=0\ .$$

Пример 3.7. Показать, что функция $x^2+y^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$ удовлетворяет выражению $\left(y^2+z^2-x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+2xz=0$.

Решение. Найдем частные производные z'_x и z'_y по правилам дифференцирования неявно заданной функции $x^2+y^2+z^2-y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)=0$:

$$z'_x=-\frac{2x}{2z-y\varphi'\cdot\frac{1}{y}}\ ,\quad z'_y=-\frac{2y-\varphi-y\varphi'\left(-\frac{z}{y^2}\right)}{2z-y\varphi'\frac{1}{y}}\ .$$

Подставляя их в данное выражение, получим

$$\frac{-2xy^2-2xz^2+2x^3+4xy^2-2xy\varphi+2xy^2\cdot\frac{z}{y^2}\cdot\varphi'+4xz^2-2xz\varphi'}{2z-\varphi'}=$$

$$=\frac{2x\left(y^2+x^2+z^2-y\varphi\right)}{2z-\varphi'}\ ;$$

в исходном уравнении $y\varphi = x^2 + y^2 + z^2$, тогда

$$\frac{2x\left(y^2 + x^2 + z^2 - y\varphi\right)}{2z - \varphi'} = \frac{2x\left(y\varphi - y\varphi\right)}{2z - \varphi'} = 0 \ .$$

Пример 3.8. Неявные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определены системой уравнений

$$\begin{cases} xy + uv = 1 \ , \\ xv - yu = 3 \ . \end{cases}$$

Найти частные производные и полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков, если при $x = 1$, $y = -1$ функции принимают значения: $u = 1$, $v = 2$.
Решение. Дифференцируем данную систему дважды:

$$\begin{cases} ydx + xdy + udv + vdu = 0 \ , \\ xdv + vdx - ydu - udy = 0 \ . \end{cases}$$

После повторного дифференцирования преобразуем систему и получим:

$$\begin{cases} 2dxdy + 2dudv + ud^2v + vd^2u = 0 \ , \\ 2dxdv - 2dudv + xd^2v - yd^2u = 0 \ . \end{cases}$$

При $x = 1$, $y = -1$, $u = 1$ и $v = 2$ первая система принимает вид

$$\begin{cases} -dx + dy + dv + 2du = 0 \ , \\ 2dx - dy + dv + du = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} du = 3dx - 2dy \ , \\ dv = -5dx + 3dy \ . \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -5$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3$. При тех же значениях x, y, u и v, а также полученных выражениях du и dv из второй системы получим:

$$\begin{cases} d^2v + 2d^2u = -2dxdy - 2\left(3dx - 2dy\right)\left(3dy - 5dx\right) \ ; \\ d^2v + d^2u = 2dy\left(3dx - 2dy\right) - 2dx\left(3dy - 5dx\right) \ , \end{cases}$$

$$\text{откуда} \qquad \begin{cases} d^2u = 4\left(5dx^2 - 10dxdy + 4dy^2\right) \ ; \\ d^2v = 10\left(-dx^2 + 4dxdy - 2dy^2\right) \ . \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 20$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -20$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -10$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 20$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -20$.
Пример 3.9. Найти d^2u для функций: а) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $u = xyz$.
Решение.
а) Найдем частные производные 1-го порядка для $u = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \ .$$

Пользуясь определениями и правилами дифференцирования, найдем частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ .$$

Используя формулу (2.12), получим:

$$d^2u = \frac{\left(y^2-x^2\right)\left(dx^2-dy^2\right) - 4xydxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ .$$

б) Найдем дифференциал 1-го порядка: $du = yzdx + xzdy + xydz \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad d^2u = d\,(du) = d\,(yz)\,dx + d\,(xz)\,dy + d\,(xy)\,dz =$$

$$= (zdy + ydz)\,dx + (xdz + zdx)\,dy + (xdy + ydx)\,dz = 2\,(zdxdy + ydzdx + xdydz)\,.$$

Задачи для аудиторных занятий

Из сборника задач [6]: 7.117-7.121 нечетные; 7.129; 7.131; 7.141-7.147 нечетные; 7.159; 7.165.

Задачи для самостоятельной работы

Из сборника задач [6]: 7.116-7.120 четные; 7.128; 7.130; 7.142- 7.146 четные; 7.166.

Занятие четвертое

Тема: "ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ). ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА"

Основные теоретические сведения

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке (x_0, y_0, z_0) (точка касания) называют плоскость, содержащую в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называют прямую, перпендикулярную к касательной плоскости и проходящую через точку касания.

Если уравнение поверхности задано в форме

$$F(x,y,z) = 0\ , \tag{4.1}$$

где функция $F(x,y,z)$ в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) имеет непрерывные производные, а в самой точке $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$, то уравнение касательной плоскости в точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0\ . \tag{4.2}$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}\ . \tag{4.3}$$

Направляющие косинусы углов, образованных нормалью соответственно с осями Ox, Oy, Oz, вычисляются соответственно по формулам

$$\begin{gathered}
\cos\alpha=\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{F'^2_x(x_0,y_0,z_0)+F'^2_y(x_0,y_0,z_0)+F'^2_z(x_0,y_0,z_0)}}\ ,\\
\cos\beta=\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{F'^2_x(x_0,y_0,z_0)+F'^2_y(x_0,y_0,z_0)+F'^2_z(x_0,y_0,z_0)}}\ ,\\
\cos\gamma=\frac{F'_z(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{F'^2_x(x_0,y_0,z_0)+F'^2_y(x_0,y_0,z_0)+F'^2_z(x_0,y_0,z_0)}}\ .
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Если уравнение поверхности задано в явной форме

$$z=f(x,y)\ , \tag{4.5}$$

то уравнение касательной плоскости в точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\ , \tag{4.6}$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}\ . \tag{4.7}$$

Направляющие косинусы углов, образованных нормалью соответственно с осями Ox, Oy, Oz, вычисляются соответственно по формулам

$$\begin{gathered}
\cos\alpha=\frac{-f'_x(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,y_0,z_0)+f'^2_y(x_0,y_0,z_0)+1}}\ ,\\
\cos\beta=\frac{-f'_y(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,y_0,z_0)+f'^2_y(x_0,y_0,z_0)+1}}\ ,\\
\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{f'^2_x(x_0,y_0,z_0)+f'^2_y(x_0,y_0,z_0)+1}}\ .
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Если функция нескольких переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности можно представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который "мал"в определенном смысле.

Т е о р е м а 4.1. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка $m+1$ включительно ($m \geq 0$) в некоторой δ - окрестности точки (x_0, y_0). Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, существует такое $\theta = \theta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y, m)$, $0 < \theta < 1$, что справедлива формула

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2\right] + \ldots +$$

$$+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0, y_0) + R_m \ , \tag{4.9}$$

где $$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(m+1)} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \ . \tag{4.10}$$

Формулу (4.9) называют ***формулой Тейлора*** порядка m с центром в точке (x_0, y_0) для функции $f(x, y)$, а функцию R_m, определяемую формулой (4.10), - остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Формула Тейлора, записанная с помощью дифференциалов с учетом $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ имеет вид

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + R_m \ , \tag{4.11}$$

где $$R_m = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy) \ .$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в форме

$$R_m = o(\rho^m)$$

называют его записью в форме Пеано. В частном случае, при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, формулу (4.9) называют формулой Маклорена.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$ в точке $(2, 1, 3)$.
Решение. При решении используем формулы (4.5)–(4.7). Найдем коэффициенты:

$$A = z'_x\Big|_M = 2x|_M = 4 \ ; \quad B = z'_y\Big|_M = -2y\Big|_M = -2 \ ; \quad C = -1 \ ,$$

значит $4(x-2) - 2(y-1) - (z-3) = 0 \ \Rightarrow \ 4x - 2y - z - 3 = 0$ – уравнение касательной плоскости, $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$ – уравнение нормали.

Пример 4.2. К поверхности $xy + z^2 + xz = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.

Решение. Пусть точка касания имеет координаты $M(x_0, y_0, z_0)$, тогда

$$A_1 = F'_x\Big|_M = (y+z)\Big|_M = y_0 + z_0 \ ; \qquad B_1 = F'_y\Big|_M = x_0 \ ;$$

$$C_1 = F'_z\Big|_M = (2z+x)\Big|_M = 2z_0 + x_0 \ .$$

Из уравнения данной плоскости $x - y + 2z = 0$ непосредственно видно, что $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = 2$. Из условия параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{имеем} \quad \frac{y_0 + z_0}{1} = \frac{x_0}{-1} = \frac{2z_0 + x_0}{2} \ .$$

Составим систему уравнений, учитывая, что точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности

$$\begin{cases} \dfrac{y_0 + z_0}{1} = \dfrac{x_0}{-1} \\ \dfrac{x_0}{-1} = \dfrac{2z_0 + x_0}{2} \\ x_0 y_0 + z_0^2 + x_0 z_0 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y_0 - z_0 = x_0 \\ 2x_0 = -2z_0 - x_0 \\ x_0 y_0 + z_0^2 + x_0 z_0 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем: $x_0 = -\dfrac{2}{3} z_0$,

из первого : $y_0 = -x_0 - z_0 = \dfrac{2}{3} z_0 - z_0 = -\dfrac{z_0}{3}$, подставляя их в третье уравнение, находим

$$\frac{2}{9} z_0^2 + z_0^2 - \frac{2}{3} z_0^2 = 1 \quad , \quad \frac{5}{9} z_0^2 = 1 \ , \quad z_0 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} \ .$$

Итак, получаем значения координат двух точек касания

$$M_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \quad M_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \ .$$

Находим коэффициенты:

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \ , \quad B_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \ , \quad C_1 = \frac{4}{\sqrt{5}} \ ;$$

$$A_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \ , \quad B_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \ , \quad C_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}} \ .$$

В результате получаем уравнения касательных плоскостей

$$-x + y - 2z \pm \frac{\sqrt{10}}{2} = 0 \ .$$

Пример 4.3. Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $z = y \operatorname{tg} \dfrac{x}{a}$ в точке $M\left(\dfrac{\pi a}{4}, a, a\right)$, $a = \text{const}$.

Решение. Запишем уравнение касательной плоскости. Приняв во внимание

$$A = z'_x\Big|_M = y\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{a}}\Big|_M = 2\ ;\quad B = z'_y\Big|_M = \operatorname{tg}\frac{x}{a}\Big|_M = 1\ ;\quad C = -1\ ,$$

имеем $2\left(x-\dfrac{\pi a}{4}\right)+(y-a)-(z-a)=0$ или $2x+y-z-\dfrac{\pi a}{2}=0$.

Приведем полученное общее уравнение к нормальному виду: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы, p – расстояние плоскости от начала координат. Находим нормирующий множитель μ, при умножении на который общее уравнение плоскости принимает нормальный вид:

$$\mu = +\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = +\frac{1}{\sqrt{6}}\ ;\qquad \frac{2}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y-\frac{1}{\sqrt{6}}z-\frac{\pi a}{2\sqrt{6}} = 0\ ,$$

Следовательно, искомое расстояние

$$p = \frac{\pi a}{2\sqrt{6}} = \frac{\pi a\sqrt{6}}{12}\ .$$

Пример 4.4. Найти направляющие косинусы нормали к поверхности

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{1} = 1$$

в точке $M(2,-4,1)$.

Решение. Функция задана неявно, тогда

$$\cos\alpha = \frac{F'_x(M)}{\sqrt{F'^2_x(M)+F'^2_y(M)+F'^2_z(M)}}\ ;\quad \cos\beta = \frac{F'_y(M)}{\sqrt{F'^2_x(M)+F'^2_y(M)+F'^2_z(M)}}\ ;$$

$$\cos\gamma = \frac{F'_z(M)}{\sqrt{F'^2_x(M)+F'^2_y(M)+F'^2_z(M)}}\ ;$$

$$F'_x\Big|_M = \frac{2x}{4}\Big|_M = 1\ ,\quad F'_y\Big|_M = \frac{2y}{16}\Big|_M = -\frac{1}{2}\ , F'_z\Big|_M = -2z\Big|_M = -1\ .$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{3}$; $\cos\beta = -\dfrac{1}{3}$; $\cos\gamma = -\dfrac{2}{3}$.

Можно найти направляющие косинусы непосредственно из уравнения нормали: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{-1/2} = \dfrac{z-1}{-1}$, направляющий вектор $\vec{\ell} = \left\{1,-\dfrac{1}{2},-1\right\}$, его орт $\vec{e}_0 = \left\{\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right\}$, проекции орта и есть направляющие косинусы.

Пример 4.5. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt{a}$, проведенные в любой точке поверхности, отсекают на

координатных осях отрезки, сумма которых равна a.
<u>*Решение.*</u> Рассмотрим произвольную точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Находим:

$$A = F'_x\Big|_M = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_M = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}; \quad B = F'_y\Big|_M = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}; \quad C = F'_z\Big|_M = \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \ .$$

Уравнение касательной плоскости в точке M будет таким:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z - (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = 0 \ .$$

Общее уравнение плоскости может быть приведено к уравнению плоскости "в отрезках"; учитывая, что $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$, (x_0, y_0, z_0) – координаты произвольной точки, имеем

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1 \ ,$$

где $\sqrt{ax_0}$, $\sqrt{ay_0}$, $\sqrt{az_0}$ – отрезки, отсекаемые плоскостью на соответствующих осях (отрезки отсчитываются от начала координат). Сумма этих отрезков равна a. Действительно, $\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}\left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) = \sqrt{a}\sqrt{a} = a$, что и требовалось доказать.

<u>*Пример 4.6.*</u> Разложить функцию $e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M(0; 1)$ до членов 2-го порядка включительно.
<u>*Решение.*</u> Находим частные производные до 2-го порядка включительно:

$$f'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \ ; \qquad f'_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} \ ; \qquad f''_{xx} = \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} \ ;$$

$$f''_{xy} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^3}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y^2}\right) \ ; \quad f''_{yy} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3} \ .$$

В точке $M_0(0; 1)$ имеем: $f(M_0) = 1$, $f'_x(M_0) = 1$, $f'_y(M_0) = 0$, $f''_{xx}(M_0) = 1$, $f''_{xy}(M_0) = -1$, $f''_{yy}(M_0) = 0$.

Согласно формуле (4.5) при $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y - y - y_0 = y - 1$ получим: $e^{x/y} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y - 1) + R_2$, где остаточный член в форме Пеано $R_2 = o\left(x^2 + (y - 1)^2\right)$.
<u>*Пример 4.7.*</u> Функцию $f(x, y) = x^3 + 5xy^2 + 10xy + 2x - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1; -2)$.
<u>*Решение.*</u> Находим $f(M) = -1$, $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y + 2$. Далее, находим частные производные и вычисляем их значения в точке M:

$$f'_x = \left(3x^2 + 5y^2 + 10y + 2\right)\Big|_M = 5; \ \ f'_y = (10xy + 10x)\Big|_M = -10;$$

$f''_{xx} = 6x\Big|_M = 6$; $f''_{xy} = (10y+10)\Big|_M = -10$; $f''_{yy} = 10x\Big|_M = 10$; $f'''_{xxx} = 6$; $f'''_{xyy} = 10$; $f'''_{yxx} = 0$; $f'''_{yyy} = 0$. В результате получаем разложение:

$$f(x,y) = -1 + 5(x-1) - 10(y+2) + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 - 2\cdot 10(x-1)(y+2) + \right.$$

$$\left. +10(y+2)^2\right) + \frac{1}{6}\left(6(x-1)^3 + 30(x-1)(y+2)^2\right).$$

Пример 4.8. Вычислить приближенно значение $a = 1,04^{2,02}$.
Решение. Рассмотрим a как значение функции $z = x^y$ в точке $(1,04; 2,02)$. В качестве опорной точки выберем точку $(1; 2)$. Вычисляем: $\Delta x = x - x_0 = 0,4$, $\Delta y = 2,02 - 2 = 0,02$. Используем формулу (4.9) при $m = 1$:

$$x^y\Bigg|_{\substack{x=1,04\\ y=2,02}} \approx x^y\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=2}} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=2}}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=2}}\Delta y\right) =$$

$$= 1 + (yx)^{y-1}\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=2}}\cdot 0,4 + (x^y\cdot\ln x)\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=2}}\cdot 0,02 = 1,08\ .$$

Задачи для аудиторных занятий

Из сборника задач [6]: 7.179; 7.181; 7.232; 7.233(а); 7.239 (а); 7.95.

Задачи для самостоятельной работы

Из сборника задач [6]: 7.178; 7.182; 7.233 (б,в); 7.239 (б); 7.96.

Занятие пятое

Тема: "ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМА. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК СТРОГОГО ЭКСТРЕМУМА"

Основные теоретические сведения

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определена на множестве $D \subset R^n$. Точку $x^{(0)} \in D$ называют *точкой строгого максимума* (соответственно *строгого минимума*), если существует такая окрестность $V\left(x^{(0)}\right)$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in V\left(x^{(0)}\right)\bigcap D$, $x \neq x^{(0)}$, выполняется неравенство $f(x) < f(x^{(0)})$ (соответственно неравенство $f(x) > f(x^{(0)})$) (см. рис. 5.1 для функции $z = f(x,y)$).

Таким образом, точка строгого максимума (соответственно строгого минимума) характеризуется тем, что $\Delta u = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ (соответственно $\Delta u = f(x) - f(x^{(0)}) > 0$) при всех $x \in V\left(x^{(0)}\right) \bigcap D$, $x \neq x^{(0)}$.

Если же для точки $x^{(0)}$ существует такая окрестность $V\left(x^{(0)}\right)$, что при всех $x \in V\left(x^{(0)}\right) \bigcap D$ выполняется условие $f(x) \leq f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x) \geq f(x^{(0)})$), то $x^{(0)}$ называют просто *точкой максимума* (соответственно *минимума*).

Точки строгого максимума и минимума функции называют точками строгого экстремума. Значение функции $f(x)$ в точке максимума (минимума) называют максимумом (минимумом) этой функции.

Т е о р е м а 5.1. (Необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$; если она является точкой экстремума функции $f(x)$ и если в ней существует какая-либо из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$, то она равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0 \ . \tag{5.1}$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, и согласно теореме 5.1 все они равны нулю, поэтому и

$$du\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0 \ . \tag{5.2}$$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)} \in R^n$. Если $du(x^{(0)}) = 0$ или $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$ то $x^{(0)}$ называют *стационарной точкой* функции $f(x)$.

Т е о р е м а 5.2. (Достаточное условие строгого экстремума). Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Пусть $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции $f(x)$, тогда если квадратичная форма

$$A\left(dx_1, \ldots, dx_n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \ , \tag{5.3}$$

т.е. второй дифференциал функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$, положительно определена (отрицательно определена), то $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума (соответственно строгого максимума); если же квадратичная форма (5.3) знакопеременна, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.

Чтобы установить, будет ли квадратичная форма, т.е. второй дифференциал функции в точке $x^{(0)}$ положительно или отрицательно определенной, применяют критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ , \tag{5.4}$$

у которой $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} > 0 \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ , \quad \ldots \quad , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \ . \tag{5.5}$$

С л е д с т в и е. (Критерий отрицательной определенности). Для того чтобы квадратичная форма (5.4) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} < 0 \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ , \quad \ldots \quad , (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \ . \tag{5.6}$$

Случай функции двух переменных

Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные 2-го порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которая является стационарной для $f(x, y)$, т.е. в ней

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \ , \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0 \ . \tag{5.7}$$

Тогда, если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^2_{xy}(x_0, y_0) > 0 \ , \tag{5.8}$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно строгого минимума, если

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \ , \tag{5.9}$$

и строгого максимума, если

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \ . \tag{5.10}$$

Если же в точке (x_0, y_0)

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^2_{xy}(x_0, y_0) < 0 \ , \tag{5.11}$$

то экстремума в ней нет.

Наконец, когда

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-f''^2_{xy}(x_0,y_0)=0\ , \qquad (5.12)$$

возможно, как наличие в точке (x_0,y_0) экстремума, так и его отсутствие.

Часто используют также обозначения:

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0)\ ,\ B=f''_{xy}(x_0,y_0)\ ,\ C=f''_{yy}(x_0,y_0)\ ,\ \Delta=AC-B^2\ . \qquad (5.13)$$

В этих обозначениях: точка (x_0,y_0) является точкой строгого минимума функции $f(x,y)$, если

$$\Delta=AC-B^2>0\ ,\quad A>0\ ; \qquad (5.14)$$

точка (x_0,y_0) является точкой строгого максимума, если

$$\Delta=AC-B^2>0\ ,\quad A<0\ ; \qquad (5.15)$$

точка (x_0,y_0) не является точкой экстремума, если

$$\Delta=AC-B^2<0\ ; \qquad (5.16)$$

в случае, когда $\Delta=AC-B^2=0$, надо провести дополнительное исследование (может случиться, что (x_0,y_0) – точка экстремума, и может случиться, что (x_0,y_0) не является точкой экстремума).

Примеры решения задач

Пример 5.1. Исследовать на экстремум функцию $z=3+2x-x^2-y^2$.
Решение. Используем необходимое условие экстремума. Находим частные производные: $z'_x=2-2x$, $z'_y=-2y$. Решая систему

$$\begin{cases} z'_x=0;\\ z'_y=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 1-x=0;\\ y=0\ , \end{cases}$$

находим координаты стационарной точки $M(1,0)$. Чтобы выявить, реализуется ли в найденной стационарной точке экстремум данной функции, используем достаточное условие экстремума: $z''_{xx}=-2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=-2$,

$$\Delta=z''_{xx}\cdot z''_{yy}-z''^2_{xy}=(-2)\cdot(-2)-0>0\ ,$$

следовательно, в точке $M(1,0)$ существует экстремум, а так как $z''_{xx}\Big|_M<0$, то экстремум есть максимум. Итак, $z_{\max}\Big|_M=4$.
Пример 5.2. Исследовать на экстремум функцию

$$z=x^3=3xy^2-51x-12y^2.$$

Решение. Находим частные производные 1-го порядка и составляем систему уравнений: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 51$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 24y$,

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 51 = 0 \\ 6xy - 24y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ y(x-4) = 0 \ . \end{cases}$$

При $y = 0$, $x^2 = 17$, а при $x = 4$, $y^2 = 1$. Стационарные точки имеют координаты: $M_1(4, 1)$; $M_2(4, -1)$; $M_3(\sqrt{17}, 0)$; $M_4(-\sqrt{17}, 0)$.

Находим производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \ , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y \ , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x - 24 \ .$$

Для точки $M_1(4, 1)$:

$$A_1 = z''_{xx}\Big|_{M_1} = 6x\Big|_{M_1} = 24 \ , \quad B_1 = z''_{xy}\Big|_{M_1} = 6y\Big|_{M_1} = 6 \ ,$$

$$C_1 = z''_{yy}\Big|_{M_1} = (6x - 24)\Big|_{M_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = A_1 C_1 - B_1^2 = 0 - 36 < 0 \ ,$$

следовательно, экстремума в точке M_1 данная функция не имеет.

Для точки $M_2(4, -1)$:

$$A_2 = z''_{xx}\Big|_{M_2} = 6x\Big|_{M_2} = 24 \ , \quad B_2 = z''_{xy}\Big|_{M_2} = 6y\Big|_{M_2} = -6 \ ,$$

$$C_2 = z''_{yy}\Big|_{M_2} = (6x - 24)\Big|_{M_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = A_2 C_2 - B_2 < 0 \ ,$$

следовательно, экстремума в точке M_2 функция не имеет.

Для точки $M_3(\sqrt{17}, 0)$: $A_3 = 6\sqrt{17}$, $B_3 = 0$, $C_3 = 6\sqrt{17} - 24 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = A_3 C_3 - B_3^2 = 6\sqrt{17}\left(6\sqrt{17} - 24\right) - 0 > 0$, т.е. экстремум функции в точке M_3 существует и является минимумом, так как $A_3 = 6\sqrt{17} > 0$:

$$z_{\min}(\sqrt{17}, 0) = \sqrt{17}17 - 51\sqrt{17} = -34\sqrt{17} \ .$$

Для точки $M_4(-\sqrt{17}, 0)$: $A_4 = -6\sqrt{17}$, $B_4 = 0$, $C_4 = -6\sqrt{17} - 24 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = A_4 C_4 - B_4^2 = -6\sqrt{17}(-6\sqrt{17} - 24) - 0 > 0$, следовательно, экстремум функции в точке M_4 существует и является максимумом, так как $A_4 < 0$:

$$z_{\max}(-\sqrt{17}, 0) = -\sqrt{17}17 + 51\sqrt{17} = 34\sqrt{17} \ .$$

Пример 5.3. Найти экстремум функции z, заданной неявно

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0 \ .$$

Решение. Находим частные производные:

$$z'_x = -\frac{2x - 2}{2z - 8} \ , \quad z'_y = -\frac{2y + 2}{2z - 8}$$

(при $z = 4$ производные не существуют; если $z = 4$, то исходное уравнение примет вид $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$, т.е. значения функции по линии этой окружности равны 4) и решаем систему:

$$\begin{cases} x - 1 = 0\ , \\ y + 1 = 0\ , \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0\ . \end{cases}$$

При $x = 1$, $y = -1$ 3-е уравнение принимает вид

$$z^2 - 8z + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-7} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1\ , \quad z_2 = 7\ .$$

Получили две стационарные точки: $M_1(1,-1,1)$, $M_2(1,-1,7)$. Находим вторые производные:

$$z''_{xx} = -\frac{2\,(2z-8) - (2x-2)\cdot 2z'_x}{(2z-8)^2} = -\frac{(z - 4 - x\cdot z'_x + z'_x)}{(z-4)^2}\ ;$$

$$z''_{xy} = -\frac{-(x-1)z'_y}{(z-4)^2}\ ; \quad z''_{yy} = -\frac{(z-4) - (y+1)z'_y}{(z-4)^2}\ .$$

В точке $M_1(1,-1,1)$: $A_1 = z''_{xx}\Big|_{M_1} = \dfrac{1}{3}$, $B_1 = z''_{xy}\Big|_{M_1} = 0$, $C_1 = z''_{yy}\Big|_{M_1} = \dfrac{1}{3}$, $\Delta = \dfrac{1}{9} - 0 > 0$, т.е. экстремум функции в точке M_1 существует, причем является минимумом, $z_{\min}(1,-1) = 1$.

Для точки $M_2(1,-1,7)$: $A_2 = z''_{xx}\Big|_{M_2} = -\dfrac{1}{3}$, $B_2 = z''_{xy}\Big|_{M_2} = 0$, $C_2 = z''_{yy}\Big|_{M_2} = -\dfrac{1}{3}$, $\Delta > 0$, следовательно, экстремум функции в точке M_2 существует и является максимумом, так как $A_2 < 0$: $z_{\max}(1,-1) = 7$.

Отметим: исходное уравнение задает две функции

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{9 - (x-1)^2 - (y+1)^2}\ ,$$

определенные в круге $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 9$. В точках границы круга обе функции принимают значение $z = 4$, которое является наименьшим для первой функции и наибольшим для второй.

Пример 5.4. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2\ .$$

Решение. Находим частные производные:

$$u'_x = 4x - y + 2z\ , \qquad u'_y = -x - 1 + 3y^2\ , \qquad u'_z = 2x + 2z\ .$$

Приравнивая u'_x, u'_y, u'_z нулю и решая систему

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0\ , \\ -x + 3y^2 = 1\ , \\ x + z = 0\ ; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0\ , \\ -x + 3y^2 = 1\ , \\ z = -x\ , \end{cases}$$

получаем две точки возможного экстремума: $M_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Чтобы использовать достаточное условие, находим вторые производные: $u''_{xx}=4$, $u''_{xy}=-1$, $u''_{xz}=2$, $u''_{yy}=6y$, $u''_{zz}=2$, $u''_{yz}=0$, $u''_{xz}=2$.

Значения производных 2-го порядка в точке M_1 являются коэффициентами квадратичной формы $d^2u(M_1)$ от переменных dx, dy, dz.

Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры

$$a_{11}=4>0\ ,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=15>0\ ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0\ .$$

По критерию Сильвестра $d^2u(M_1)$ – положительно определенная квадратичная форма переменных dx, dy, dz, следовательно, в в точке M_1 функция имеет локальный минимум:

$$u(M_1)=u\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{19}{72}\ .$$

Выявим, реализуется ли экстремум функции в точке M_2.

Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры

$$a_{11}=4>0\ ,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-13<0\ ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-14<0\ .$$

Значит $d^2u(M_2)$ не является знакоопределенной квадратичной формой.

Следовательно, в точке M_2 функция локального экстремума не имеет.

Задачи для аудиторных занятий

Из сборника задач [6]: 7.187; 7.191–7.195 нечетные.

Задачи для самостоятельной работы

Из сборника задач [6]: 7.188–7.194 четные.

Занятие шестое

Тема: "УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА(МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА). ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК СТРОГОГО УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА. АБСОЛЮТНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ"

Основные теоретические сведения

Пусть требуется найти экстремум функции $n+m$ переменных:

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \tag{6.1}$$

при наличии m условий (уравнений) связи

$$F_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad s = \overline{1, m} \, . \tag{6.2}$$

Переменные $x_1, \ldots, x_n$, входящие в f, F_1, ..., F_m (без нарушения общности), считаются независимыми, а переменные $y_1, \ldots, y_m$ считаются функциями этих независимых переменных. Предполагается, что функции f, F_1, ..., F_m, дважды дифференцируемы в окрестности точки $M_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ и имеют непрерывные частные производные 2-го порядка в самой точке M_0, а якобиан

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0 \, .$$

Точку $M_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.2), называют *точкой локального условного минимума* (*максимума*), если в пространстве R^{n+m} существует окрестность точки M_0 такая, что $\forall M$ из этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (6.2), выполняется неравенство

$$f(M) \geq f(M_0) \quad (f(M) \leq f(M_0)) \; . \tag{6.3}$$

Если в (6.3) выполняется строгое неравенство

$$f(M) > f(M_0) \quad (f(M) < f(M_0)) \; , \quad M \neq M_0 \; , \tag{6.4}$$

то точку M_0 называют *точкой строгого локального условного минимума* (*строгого локального условного максимума*).

Точку локального условного минимума или максимума называют *точкой локального условного экстремума.*

Значение функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ в точке условного минимума (максимума) называют *условным минимумом* (*максимумом*) этой функции.

Т е о р е м а 6.1. (Необходимые условия для точек условного экстремума (метод множителей Лагранжа)). Для того чтобы точка $M_0(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\ldots,y_m^{(0)})$ была точкой локального условного экстремума, необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли условиям (уравнениям):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial x_i}=0\ ,\quad i=\overline{1,n}\ ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}=\frac{\partial f}{\partial y_j}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial y_j}=0\ ,\quad j=\overline{1,m}\ ; \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_s}=F_s(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0,\quad s=\overline{1,m}\ ,$$

где вспомогательная функция

$$L(M,\lambda)=L\left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)=f(M)+\sum_{s=1}^{m}\lambda_sF_s(M)\ ,$$

$$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\ .$$

Эту функцию называют функцией Лагранжа, а входящие в нее действительные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ – множителями Лагранжа.

Система (6.5) содержит $n+2m$ уравнений с $n+2m$ неизвестными $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, она однозначно определяет множители Лагранжа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, следовательно, и функция Лагранжа $L(M,\lambda)$ также определяется однозначно. При этом решение системы (6.5) относительно $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ дает точку $M_0(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\ldots,y_m^{(0)})$, которая будет стационарной точкой функции $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ при наличии связей (6.2). Точки локального условного экстремума находятся среди стационарных точек. Задача исследования функции на условный экстремум сводится (редуцируется) к задаче исследования на безусловный экстремум функции Лагранжа $L(M,\lambda)=f(M)+\sum\limits_{s=1}^{m}\lambda_sF_s(M)$.

Достаточные условия для точек строгого условного экстремума. Предположим, что M_0 – стационарная точка функции $f(M)$ при наличии связей (6.2). Из конструкции функции Лагранжа $L(\mu,\lambda)$ видно, что при наличии связей (6.2) экстремумы функций $f(M)$ и $L(M,\lambda)$ совпадают, поскольку при наличии связей (6.2)

$$f(M)-f(M_0)=L(M,\lambda)-L(M_0,\lambda_0)\ .$$

Но тогда, как это следует из результатов исследования функции f на безусловный экстремум, для получения достаточного условия экстремума в точке M_0 у функции $f(M)$ при наличии связей (6.2) надо согласно теореме 5.2 к условиям (6.5) присоединить требование знакоопределенности в этой точке 2-го дифференциала $d^2L(M,\lambda)$ функции Лагранжа $L(M,\lambda)$.

При этом мы можем констатировать наличие в точке M_0 минимума, если при наличии связей (6.2) $d^2L(M_0, \lambda_0) > 0$ и максимума, если $d^2L(M_0, \lambda_0) < 0$.

Для случая, когда $d^2L(M_0, \lambda_0)$ не является знакоопределенной, заметим, что поскольку нам требуется установить знакоопределенность $d^2L(M_0, \lambda_0)$ лишь при наличии связей (6.2), то при проведении вычислений следует в формулу

$$d^2L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2 L \ ,$$

в которой учтены $\dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial L}{\partial y_m} = 0$, подставить вместо $dy_1, \ldots, dy_m$ их значения, определяемые из системы

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_s}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_s}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_s}{\partial y_m}dy_m = 0 \ , s = \overline{1, m}.$$

После этого следует изучить вопрос о знакоопределенности d^2L в данной точке M_0.

Если функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке или в граничной точке области. При этом наибольшее значение функции в ограниченной замкнутой области называют также *абсолютным максимумом*, а наименьшее значение – *абсолютным минимумом.*

Чтобы найти абсолютный максимум и абсолютный минимум функции в ограниченной замкнутой области, надо найти все стационарные точки функции в области D (открытое множество), вычислить в них значения функции и выбрать точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в стационарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые принимает функция на границе D, найдя наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области D (стационарные точки в D и на границе D находятся из необходимых условий для точек соответственно безусловного и условного экстремума).

В случае, когда D – плоская область и ее граница является кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, вопрос о нахождении экстремальных значений функции $f(x, y)$ на границе D сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного $f\left(x(t), y(t)\right)$.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$ при условии $x + 3y - 1 = 0$.

Решение.
1-й способ. Составим функцию Лагранжа $L = x^2 + y^2 + \lambda(x + 3y - 1)$ и исследуем ее на экстремум: $L'_x = 2x + \lambda$, $L'_y = 2y + 3\lambda$, $L'_\lambda = x + 3y - 1$,

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \ , \\ 2y + 3\lambda = 0 \ , \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2} \ , \\ y = -\dfrac{3\lambda}{2} \ , \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \ , \\ y = \dfrac{3}{10} \ , \\ \lambda = -\dfrac{1}{5} \ . \end{cases}$$

Найдем производные 2-го порядка и запишем дифференциал $d^2L(x, y)$ при $\lambda = -\dfrac{1}{5}$: $L''_{xx} = 2$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = 2$, $d^2L = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$.

Так как $d^2L > 0$, то функция $z = x^2 + y^2$ при данном уравнении связи $x + 3y = 1$ имеет в точке $M\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{3}{10}\right)$ условный минимум, т.е. $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{1}{10}$.

2-й способ. Найдем условный экстремум методом исключения. Из уравнения связи $x = 1 - 3y$, тогда $z(1 - 3y, y) = \tilde{z}(y) = (1 - 3y)^2 + y^2$.

Найдем стационарные точки этой функции :
$\tilde{z}' = ((1 - 3y)^2 + y^2)' = (1 - 6y + 10y^2)' = -6 + 20y$, $\quad \tilde{z}' = 0$ при $y = \dfrac{3}{10}$.

Экстремум функции $\tilde{z}(y)$ может быть только в точке $y = \dfrac{3}{10}$. Чтобы выявить реализуется ли экстремум в этой точке, используем второй достаточный признак: $z'' = 20 > 0$, следовательно, при $y = \dfrac{3}{10}$ функция $\tilde{z}(y)$ имеет минимум.

Из уравнения связи $x = 1 - 3y$ найдем x при $y = \dfrac{3}{10}$. Таким образом, точка строгого локального условного экстремума имеет координаты $\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{3}{10}\right)$ при этом условный минимум функции $z(x, y) = x^2 + y^2$ при условии $x + 3y - 1 = 0$ имеет значение $z_{min} = z\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{1}{10}$.

Пример 6.2. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \ , \tag{6.6}$$

при условии

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m + 1 = 0 \ . \tag{6.7}$$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L = x_1^2 + \ldots + x_m^2 + \lambda\left(x_1 + \ldots + x_m + 1\right) \ . \tag{6.8}$$

Используя необходимые условия (6.5) существования у исследуемой функции (6.6) локального условного экстремума, найдем ее стационарные точки при наличии уравнения связи (6.7):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \ ,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = 2x_m + \lambda = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + \ldots + x_m + 1 = 0 \ .$$

Решая эту систему, находим

$$x_1 = -\frac{1}{m} \ , \quad x_2 = -\frac{1}{m} \ , \quad \ldots \ , \quad x_m = -\frac{1}{m} \ , \quad \lambda = \frac{2}{m} \ .$$

Таким образом, данная функция (6.6) при наличии связи (6.7) имеет единственную стационарную точку

$$M_0\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots, -\frac{1}{m}\right) \ ,$$

которой соответствует множитель Лагранжа $\lambda = \dfrac{2}{m}$.

Чтобы выявить, реализуется ли в найденной стационарной точке локальный условный экстремум данной функции, используем достаточное условие существования у функции локального условного экстремума.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = 2\left[(dx_1)^2 + \ldots + (dx_m)^2\right] \ .$$

Поскольку второй дифференциал функции Лагранжа всегда положительно определен $d^2L > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m}(dx_k)^2 \neq 0$, то функция (6.6) при наличии связи (6.7) имеет в точке $M_0\left(-\dfrac{1}{m}, -\dfrac{1}{m}, \ldots, -\dfrac{1}{m}\right)$ условный минимум.

Подставляя координаты точки в (6.6), получим, что минимальное значение функции (6.6) при наличии связи (6.7) равно $u_{\min} = \dfrac{1}{m}$.

Пример 6.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$ (рис. 6.1).

Решение. Частные производные функции:

$$z'_x = 2x + 4y - 6, \ z'_y = 4x - 2y - 2.$$

Найдем стационарные точки, решая систему

$$\begin{cases} z'_x = 0 \ , \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \ , \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \ , \\ y = 1 \ . \end{cases}$$

Стационарная точка $M(1,1)$ принадлежит рассматриваемой области. Найдем значение функции в этой точке: $z_M = z(1,1) = -4$.

Исследуем поведение функции на границе области. Отметим, что граница состоит из трёх отрезков OA, OB и AB.

На отрезке , принадлежащем прямой $y = 0$, $(x \in [0,3])$, исследуемая функция принимает вид $z = z(x,0) = x^2 - 6x$. Функция $z(x,0)$ непрерывна на отрезке $[0,3]$, следовательно, она принимает на нем наименьшее и наибольшее значения, внутри интервала (в точках стационарности) или на границе. Точку стационарности найдём из условия $z'_x = 2x - 6 = 0$, откуда $x = 3$. Найденная точка стационарности имеет кординаты $(3,0)$ и совпадает с одним из концов отрезка OA, а именно, с точкой A. Значение функции в точке A: $z_A = z(3,0) = -9$. Рассмотрим оставшийся конец отрезка OA. Значение функции в точке $O(0,0) : z_0 = z(0,0) = 0$.

На отрезке , принадлежащем прямой $x = 0$, $(y \in [0,2])$, исследуемая функция принимает вид $z = z(0,y) = -y^2 - 2y$. Точку стационарности найдем из условия $z'_y = -2y - 2 = 0$, откуда $y = -1$. Значение $y = -1$ лежит вне рассматриваемого отрезка , следовательно, внутри интервала стационарных точек нет. Вычислим значение функции на концах отрезка OB. В точке $O(0,0)$ значение функции уже найдено. Остается рассмотреть точку B: $z_B = z(0,2) = -8$.

Исследуем функцию z на отрезке на экстремум. Итак, $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ при $2x + 3y - 6 = 0$. Из уравнения связи $x = 3 - \frac{3}{2}y$, тогда $z = -\frac{19}{4}y^2 + 10y - 9$. Стационарная точка находится из условия $z'_y = -\frac{19}{2}y + 10 = 0$, откуда $y = \frac{20}{19}$. Подставляя найденную ординату в уравнение связи $x = 3 - \frac{3}{2}y$, находим абсциссу: $x = \frac{27}{19}$. Вычислим значение функции в полученной точке $P\left(\frac{27}{19}, \frac{20}{19}\right) \in [A,B]$: $z_P = z\left(\frac{27}{19}, \frac{20}{19}\right) = -\frac{71}{19}$.

Сравнивая значения функции в точках , , , P и , находим:

$$z_{.} = z(3,0) = -9\ ; \quad z_{.} = z(0,0) = 0\ .$$

Задачи для аудиторных занятий

Из сборника задач [6]: 7.201; 7.203; 7.205; 7.213; 7.217.

Задачи для самостоятельной работы

Из сборника задач [6]: 7.202; 7.206; 7.212; 7.214.

Занятие седьмое. Контрольная работа "Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных"

Вариант 1.

1. Показать, что функция $u = x^2\varphi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 2u$.
2. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 - 9x^2 + 2y^3 - y^2$.
3. Показать, что поверхности $xy = z^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ортогональны.
4. Найти d^2u для $u = xy + yz + xz$.

Вариант 2.

1. Доказать, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, где f - произвольная дифференцируемая функция.
2. Исследовать на экстремум функцию
$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad \text{при} \quad x > 0, \quad y > 0 \ .$$
3. Найти уравнение касательной плоскости и нормали для $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке $M(2, 2, 1)$.
4. Записать d^2z, если $z = x\ln\frac{y}{x}$.

Ответы:

2) $z_{\min}(5, 2) = 30$; 3) $x + y - 4z = 0$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$;
4) $d^2z = -\frac{1}{x}dx^2 + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y^2}dy^2$.

Решение первого варианта

1. Найдем частные производные, обозначив $\frac{z}{x} = \xi$, $\frac{y}{x} = \eta$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\varphi(\xi,\eta) + x^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 2x\varphi + x^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(-\frac{z}{x^2}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right) \ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = x^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{x} = x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) = x^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot 0\right) = x\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \ .$$

Подставив в данное уравнение найденные значения $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, получим:

$$2x^2\varphi - xz\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - xy\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + xy\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + xz\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 2x^2\varphi(\xi,\eta) = 2u \ .$$

2. Найдем частные производные исследуемой на экстремум функции: $z'_x = 6x^2 - 18x$, $z'_y = 6y^2 - 2y$. Стационарные точки найдем из системы

$$\begin{cases} x(x-3) = 0, \\ y(3y-2) = 0. \end{cases}$$

Имеем четыре стационарные точки $M_1(0,0)$, $M_2\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, $M_3(3,0)$, $M_4\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

Найдем вторые производные: $z''_{xx} = 12x - 18$, $z''_{yy} = 12y - 2$.

Для точки $M_1(0,0) : A_1 = z''_{xx}\Big|_{M_1} = -18$, $B_1 = 0$, $C_1 = z''_{yy}\Big|_{M_1} = -2$. Так как $\Delta = A_1C_1 - B_1^2 = 36 > 0$, а $A_1 < 0$, то $z_{\max}(0,0) = 0$.

Для точки $M_2\left(0, \dfrac{1}{3}\right) : A_2 = -18$, $B_2 = 0$, $C_2 = 2$, $\Delta < 0$. Экстремума в точке M_2 нет.

Для точки $M_3(3,0) : A_3 = 18$, $B_3 = 0$, $C_3 = -2$, $\Delta < 0$. Экстремума нет.

Для точки $M_4\left(3, \dfrac{1}{3}\right) : A_4 = 18$, $B_4 = 0$, $C_4 = 2$, $\Delta > 0 \Rightarrow z_{\min}\left(3, \dfrac{1}{3}\right) = = -27\dfrac{1}{27}$.

3. Покажем, что векторы нормалей поверхностей ортогональны в любой их общей точке:

$$F(x,y,z) = xy - z^2 = 0 \ ; \quad F'_x = y \ ; \quad F'_x = x \ ; \quad F'_z = -2z \ .$$

$$F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \ ; \quad F'_{1x} = 2x \ ; \quad F'_{1y} = 2y \ ; \quad F'_{1z} = 2z \ .$$

Для произвольной точки $M(x_0, y_0, z_0)$ уравнения нормалей примут вид

$$\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y - y_0}{x_0} = \frac{z - z_0}{-2z_0} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0} \ ,$$

их направляющие векторы $\vec{\ell}_1 = \{y_0, x_0, -2z_0\}$ и $\vec{\ell}_2 = \{y_0, x_0, z_0\}$.

Условие ортогональности векторов:

$\vec{l}_1 \perp \vec{\ell}_2 \iff \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = 0 \iff \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = y_0x_0 + x_0y_0 - 2z_0^2 = 2x_0y_0 - 2z_0^2 = 0$,
так как по условию $xy = z^2$.

Нормали ортогональны, значит и поверхности ортогональны.

4. Найдем частные производные 2-го порядка и запишем выражение для дифференциала 2-го порядка данной функции:

$$d^2u = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz =$$

$$= 2\,(dxdy + dxdz + dydz) \ .$$

Список литературы

1. К у д р я в ц е в Л. Д. *Курс математического анализа.* Учебник для студентов университетов и втузов. М.: Высш. шк., 1981. Т.1. 687 с.

2. К у д р я в ц е в Л. Д. *Курс математического анализа.* Учебник для студентов университетов и втузов. М.: Высш. шк., 1981. Т.2. 584 с.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* Т. 1. М.: Наука, 1965. 572 с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* Т. 2, М.: Наука, 1980, 448 с.

5. Б у г р о в Я.С., Н и к о л ь с к и й С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* М.: Наука, 1980. 432 с.

6. Б у г р о в Я.С., Н и к о л ь с к и й С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* М.: Наука, 1981. 448 с.

7. *Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных.* Учебное пособие для студентов вузов / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин.; Под ред. В.Ф. Бутузова. М.: Высш. шк., 1988. 288 с.

8. *Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа.* Учеб. пособие для втузов / Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др.; Под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П.. 2-е изд. М.: Наука, 1986. 464 с.

9. *Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа.* Учеб. пособие для втузов / Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др.; Под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П.. 2-е изд. М.: Наука, 1986. 368 с.

10. Б р о н ш т е й н И.Н., С е м е н д я е в К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* М.: Наука, 1986. 544 с.