Entonces,

$$e^{4x^2}u = -\frac{1}{8}e^{4x^2}(4x^2-1)+c \Leftrightarrow u(x) = -\frac{1}{8}(4x^2-1)+ce^{-4x^2}$$

Finalmente, sustituimos de vuelta $u = y^{-4}$:

$$y^{-4} = -\frac{1}{8}(4x^2-1)+ce^{-4x^2}$$

y escribimos la solución general de la ED:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{-\frac{1}{8}(4x^2-1)+ce^{-4x^2}}}$$

Reducción a separación de variables

Una ED de la forma normal:

$$y' = f(ax+by) \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \tag{2}$$

puede resolverse mediante el cambio de variables:

$$u = ax+by \text{ y } u' = a+by'$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (2) tenemos:

$$\begin{aligned} y' = f(ax+by) &\Leftrightarrow \frac{1}{b}(u'-a) = f(u) \\ &\Leftrightarrow u'-a = bf(u) \\ &\Leftrightarrow u' = a+bf(u) \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{a+bf(u)} = dx, \text{ ¡una ED separable!} \end{aligned}$$

Ejemplo. Resuelva el PVI $y' - (4x-y+1)^2 = 0$, sujeta a $y(0) = 2$.

Primero, reescribimos la ED en forma normal:

$$y' = (4x-y+1)^2$$

e identificamos que esta tiene la forma descrita en (2). Entonces, procedemos al cambio de variables:

$$u = 4x-y+1 \text{ y } u' = 4-y' \to y' = 4-u'$$

¡Importante! En este caso, se incluye el "+1" en la sustitución. A veces el incluirlo o no puede cambiar la dificultad del proceso de solución. Como regla general, no se incluyen términos constantes.

Luego:

$$\begin{aligned} y' = (4x-y+1)^2 &\Leftrightarrow 4-u' = u^2 \\ &\Leftrightarrow u' = 4-u^2 \text{ ¡ED separable!} \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{4-u^2} = dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{du}{4-u^2} = \int dx \end{aligned}$$