MM2029 Ecuaciones Diferenciales 1 - Clase 6

Ecuación de Bernoulli

Una ED de la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n,\ n \in \mathbb{R}$$

se llama **ecuación de Bernoulli**. Esta ED se puede transformar en una ED lineal, al hacer el cambio de variables:

$$u = y^{1-n}$$

en donde $u = u(x)$.
Nota: La demostración de esto puede leerse al final de este documento.

Ejemplo. Encuentre la solución general de la ED:

$$y' - 2xy = x^3y^5 \tag{1}$$

La ED ya está escrita en forma estándar, por lo que identificamos que se trata de una ecuación de Bernoulli con $n = 5$. Entonces usaremos la sustitución:

$$u = y^{1-5} = y^{-4} \Leftrightarrow y = u^{-1/4} \text{ y } y' = -\tfrac{1}{4}u^{-5/4}u'$$

Ahora, reemplazamos cada ocurrencia de y e y' en la ED (1) con lo anterior:

$$\begin{aligned} y' - 2xy = x^3y^5 &\Leftrightarrow -\tfrac{1}{4}u^{-5/4}u' - 2xu^{-1/4} = x^3(u^{-1/4})^5 \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{1}{4}u^{-5/4}u' - 2xu^{-1/4} = x^3u^{-5/4} \end{aligned}$$

Multiplicamos toda la ecuación por término $-4u^{5/4}$ para reescribirla en *forma estándar*:

$$u' + 8xu = -4x^3 \quad \text{¡una ED lineal!}$$

Como ya está escrita en forma estándar, reconocemos que $P(x) = 8x$, por lo que el factor integrante es:

$$u(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int 8x\,dx} = e^{4x^2}$$

Multiplicamos toda la ED por $u(x)$:

$$\begin{aligned} e^{4x^2}u' + 8xe^{4x^2}u &= -4x^3e^{4x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(e^{4x^2}u\right) &= -4x^3e^{4x^2} \\ e^{4x^2}u &= -\int 4x^3e^{4x^2}\,dx \end{aligned}$$

La integral se resuelve así:

$$-\int 4x^3e^{4x^2}\,dx = \underbrace{-\int 4x^2e^{4x^2}x\,dx}_{u=4x^2,\ du=8x\,dx} = -\frac{1}{8}\int ue^u\,du - \frac{1}{8}e^u(u-1) + c = -\frac{1}{8}e^{4x^2}(4x^2-1) + c$$

Entonces,

$$e^{4x^2}u = -\frac{1}{8}e^{4x^2}(4x^2-1) + c \Leftrightarrow u(x) = -\frac{1}{8}(4x^2-1) + ce^{-4x^2}$$

Finalmente, sustituimos de vuelta $u = y^{-4}$:

$$y^{-4} = -\frac{1}{8}(4x^2-1) + ce^{-4x^2}$$

y escribimos la solución general de la ED:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{-\frac{1}{8}(4x^2-1) + ce^{-4x^2}}}$$

Reducción a separación de variables

Una ED de la forma normal:

$$y' = f(ax+by) \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \tag{2}$$

puede resolverse mediante el cambio de variables:

$$u = ax + by \text{ y } u' = a + by'$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (2) tenemos:

$$\begin{aligned} y' = f(ax+by) &\Leftrightarrow \frac{1}{b}(u'-a) = f(u) \\ &\Leftrightarrow u' - a = bf(u) \\ &\Leftrightarrow u' = a + bf(u) \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{a+bf(u)} = dx, \text{ ¡una ED separable!} \end{aligned}$$

Ejemplo. Resuelva el PVI $y' - (4x - y + 1)^2 = 0$, sujeta a $y(0) = 2$.

Primero, reescribimos la ED en forma normal:

$$y' = (4x - y + 1)^2$$

e identificamos que esta tiene la forma descrita en (2). Entonces, procedemos al cambio de variables:

$$u = 4x - y + 1 \text{ y } u' = 4 - y' \to y' = 4 - u'$$

¡Importante! En este caso, se incluye el "+1" en la sustitución. A veces el incluirlo o no puede cambiar la dificultad del proceso de solución. Como regla general, no se incluyen términos constantes.

Luego:

$$\begin{aligned} y' = (4x-y+1)^2 &\Leftrightarrow 4 - u' = u^2 \\ &\Leftrightarrow u' = 4 - u^2 \text{ ¡ED separable!} \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{4-u^2} = dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{du}{4-u^2} = \int dx \end{aligned}$$

La integral de la izquierda se resuelve por fracciones parciales:

$$\int \frac{du}{4-u^2} = \int \frac{du}{(2-u)(2+u)} = \int \left(\frac{1/4}{2-u} + \frac{1/4}{2+u} \right) du = \frac{1}{4} \left(\ln|2+u| - \ln|2-u| \right) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+u}{2-u} \right|$$

Entonces:

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+u}{2-u} \right| = x + c \Leftrightarrow \ln \left| \frac{2+u}{2-u} \right| = 4x + c$$

Ahora despejamos para la u:

$$\frac{2+u}{2-u} = ce^{4x} \Leftrightarrow 2+u = (2-u)ce^{4x} \Leftrightarrow u(1+ce^{4x}) = 2ce^{4x} - 2 \Leftrightarrow u = \frac{2ce^{4x}-2}{1+ce^{4x}}$$

Sustituimos $u = 4x - y + 1$:

$$4x - y + 1 = \frac{2ce^{4x}-2}{1+ce^{4x}} \Leftrightarrow y(x) = 4x - \frac{2ce^{4x}-2}{1+ce^{4x}} + 1 = 4x - \frac{2ce^{4x}-2-1-ce^{4x}}{1+ce^{4x}} = 4x - \frac{ce^{4x}-3}{1+ce^{4x}}$$

Finalmente, evaluamos la condición inicial $y(0) = 2$:

$$y(0) = 2 = 4(0) - \frac{ce^0 - 3}{1+ce^0} = -\frac{c-3}{1+c}$$

Despejamos para c:

$$2(1+c) = 3 - c \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Una solución particular para el PVI es:

$$y(x) = 4x - \frac{\frac{1}{3}e^{4x} - 3}{1 + \frac{1}{3}e^{4x}} = 4x - \frac{e^{4x}-9}{3+e^{4x}}$$

¿Cómo es que la sustitución $u = y^{1-n}$ convierte una ecuación de Bernoulli en una ED lineal?

Sea $u = y^{1-n} \Leftrightarrow y = u^{\frac{1}{1-n}}$ un cambio de variables. Entonces, por la regla de la cadena tenemos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-n} \left(u^{\frac{1}{1-n}} \right)^n \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-n} y^n \cdot \frac{du}{dx}$$

Sustituyendo en la ED tenemos:

$$y' + P(x)y = f(x)y^n \Leftrightarrow \frac{1}{1-n} y^n \cdot \frac{du}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Dividimos toda la ED por y^n para obtener:

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{du}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)f(x)$$

La última ED es una ED lineal de la variable $u(x)$, la cual se resuelve como ya se dicutió en clases anteriores.