School of Science, BUPT

数学建模与模拟

孙 聪

办公室：主楼1019

Email：suncong86@bupt.edu.cn

基本课程设计

- 参考课本：《数学模型》第三版，姜起源、谢金星、叶俊，清华大学出版社

- 课程内容：导论与初等建模方法、模拟软件介绍、优化方法模型、图论模型、微分方程模型、统计回归模型、竞赛与论文写作指导

- 考查方式：大开卷

  平时作业*40%+数学建模论文写作*60%

- **Bonus: 推荐参赛**

化繁为简

数学建模的核心是力求对实际应用问题的解决，而不在于所采用方法的深奥程度。

事实上，在对一个问题能够做到完好解决的前提下，朴素性简洁性恰好是构成一个完美的数学模型或数学建模过程的一个重要侧面。

本章的几个例子即能够用相对初等的方法得以很好地解决，这里强调选用怎样的工具通常是由问题本身内在决定的，切忌为了炫耀方法而使问题的解决变的烦琐——这正如在良医的眼里，各种药材的价值在其疗效，而不在其名贵程度。

§1 建模方法综述

- 常用的建模方法
  - 理论分析法
  - 模拟法
  - 数据分析法
  - 人工假设法
  - 类比分析法
- 建模的逻辑思维方法
  - 抽象；归纳；演绎；类比；模拟；移植。
- 主要采用的数学建模基本方法
  - 机理分析法

§2 理论分析法与万有引力定律的发现

- 十五世纪，
- 第谷·布拉赫……大行星的运动情况。
- 开普勒 归纳
- 牛顿 推导出

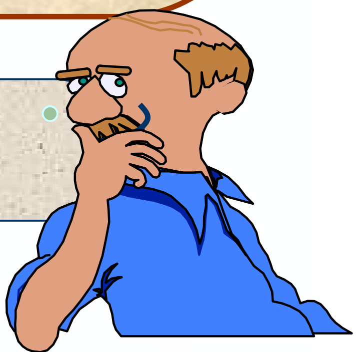
开普勒三大定律

1.行星轨道是一个椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。

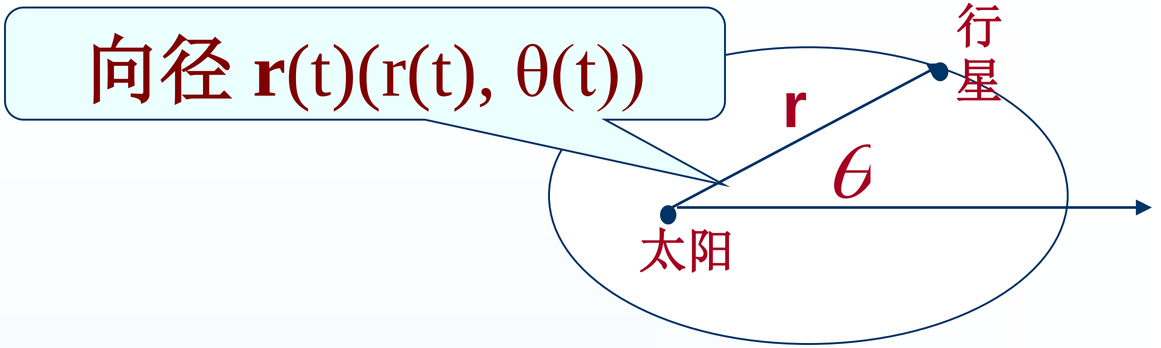
2. 在单位时间内太阳—行星向径扫过的面积不变。

3.行星运行周期的平方正比于椭圆长半轴的三次方，比例系数不随行星而改变（绝对常数）。

这其中必 定是某一力学规律 的反映，哼哼，我要找出它。。。。



模型假设



开普勒三定律

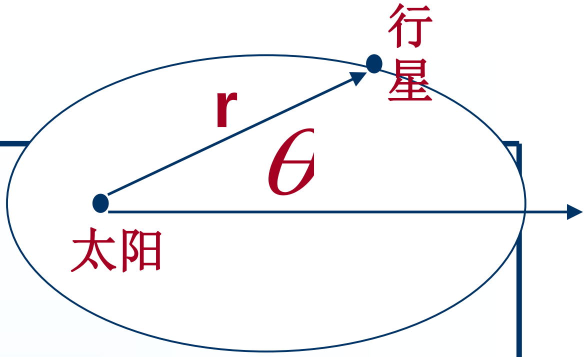
轨道方程 $r=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}$ $p=\dfrac{b^2}{a}$ $b^2=a^2(1-e^2)$

面积改变率为常数 $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2w=$ 常数, $w=\dot{\theta}$

运行周期 $a^3/T^2=$常数

牛顿第二定律 $F=m\alpha=m\ddot{r}$

简单推导如下：



如图，有椭圆方程 ： $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$

由开普勒第二定律: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 w = \text{常数}, \; w = \dot{\theta}$

立即得出: $0 = \dfrac{d}{dt}(r^2 w) = (2r\dot{r}w + r^2\dot{w})$

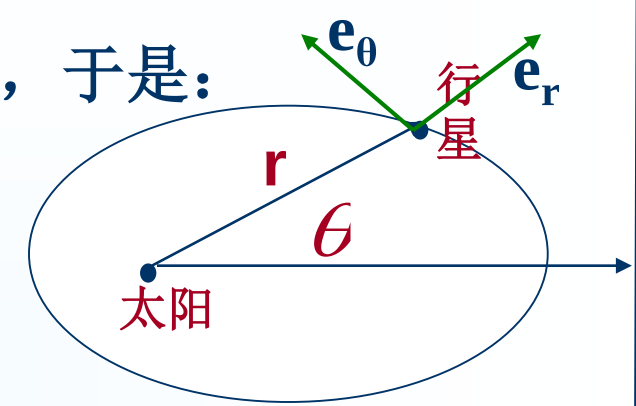
即:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \qquad (1)$$

由椭圆面积 $\pi ab = \int_0^T \dfrac{dA}{dt} dt = \dfrac{1}{2} r^2 w T$ ，得

$$r^2 w = \frac{2\pi ab}{T} = \text{常数} \qquad （2）$$

坐标一：以太阳为坐标原点，沿长轴方向的单位向量记为**i**,沿短轴方向的单位向量记为**j**，于是：



$$\mathbf{r} = r\cos\theta\ \mathbf{i} + r\sin\theta\ \mathbf{j}$$

进而有加速度

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2}{dt^2}(r\cos\theta)\,\mathbf{i} + \frac{d^2}{dt^2}(r\sin\theta)\,\mathbf{j}$$

$$= (\ddot{r} - rw^2)(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) + (2\dot{r}w + r\dot{w})(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

坐标二：以行星为坐标原点建立活动架标，其两个正交的单位向量分别是

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j}\ ,\ \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}$$

因此得出

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - rw^2)\boldsymbol{e}_r$$

$\boxed{由于\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0}$

再将椭圆方程 $p = r(1 - e\cos\theta)$

两边微分两次，得

$$(\ddot{r} - rw^2)\frac{p}{r} + \frac{1}{r^3}(r^2 w)^2 = 0 \quad (3)$$

将前面得到的结果 $r^2 w = \frac{2\pi ab}{T}$ 和焦参数 $p = \frac{b^2}{a}$

代入，即得 $\ddot{r} - rw^2 = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$

也就是说行星的加速度为

$$\mathbf{a} = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

行星的加速度为

$$\mathbf{a} = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

由开普勒第三定律知 a^3 / T^2 为常数。

若记

$$G = \frac{4\pi^2 a^3}{M T^2}$$

那么就导出著名的 万有引力定律：

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r$$

理论分析法的思想

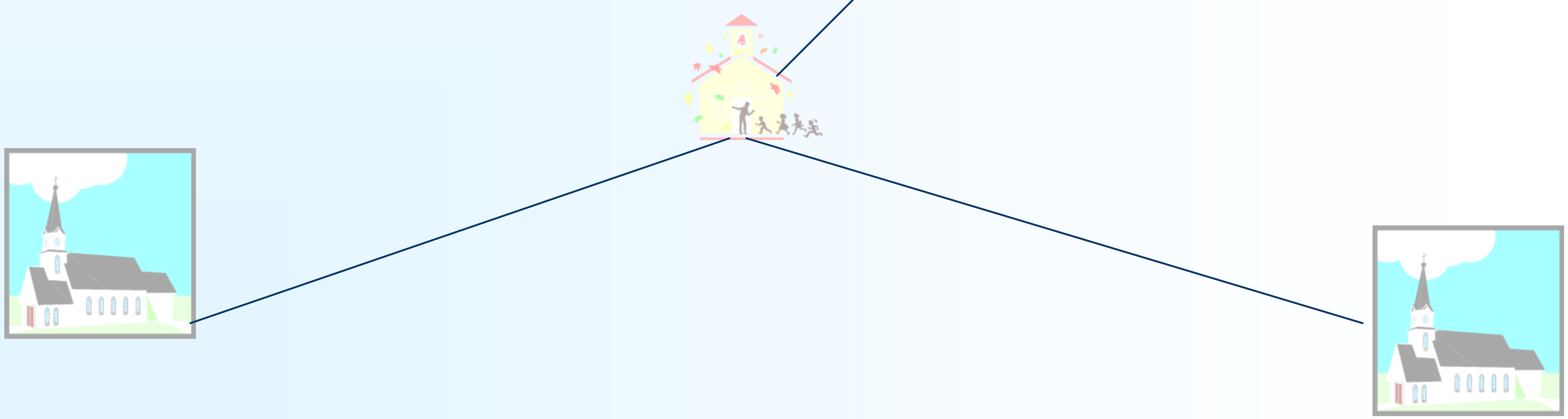
- 理论分析法主要应用自然科学（物理等）中已证明是正确的理论、原理和定律，对被研究系统的有关因素进行分析、演绎、归纳，从而建立系统的数学模型。

适用范围：
工艺比较成熟、对机理又有深入了解的系统。

§3　模拟法与三村短路问题

问题

　　有三个村庄，由于条件所限，打算合建一所小学，并且共同修筑从小学到各村的道路。请设计小学的地址，使得修筑的道路总长度最短。



模型假设

- 假设三个村庄附近足够大区域的任何地点都可以被征用为小学建校用地。
- 假设选定地址后，从每一个村庄都能够修笔直的马路达到学校。

模型构成

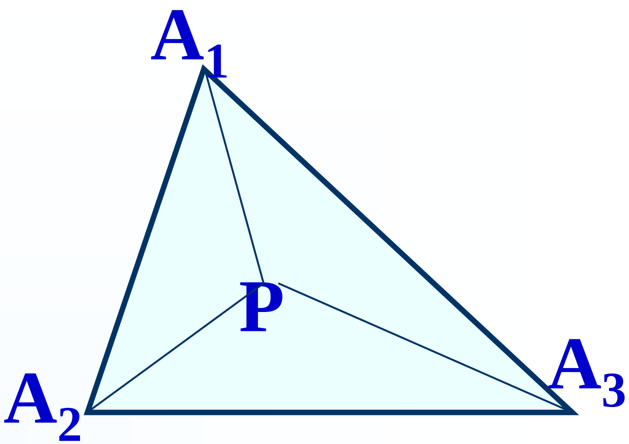
设三个村庄的位置分别为A_1、A_2、A_3，小学的位置是点P, 则三村短路问题为以下数学问题：

设A_1、A_2、A_3为平面上三个不同的点，在平面上求一点P, 使得P 点到A_1、A_2、A_3这三个已知点的距离之和最小。

模型求解

- 解法一（微分方法）

  在平面上建立直角坐标系，设已知点A_i的坐标为（x_i , y_i) (i=1, 2 ,3), 所求P点的坐标为（x, y）。



则 P 点到A_1、A_2、A_3这三个点的距离之和 S 为

$$S= [(x- x_1)^2+ (y- y_1)^2]^{1/2} + [(x- x_2)^2+ (y- y_2)^2]^{1/2} + [(x- x_3)^2+ (y- y_3)^2]^{1/2}$$

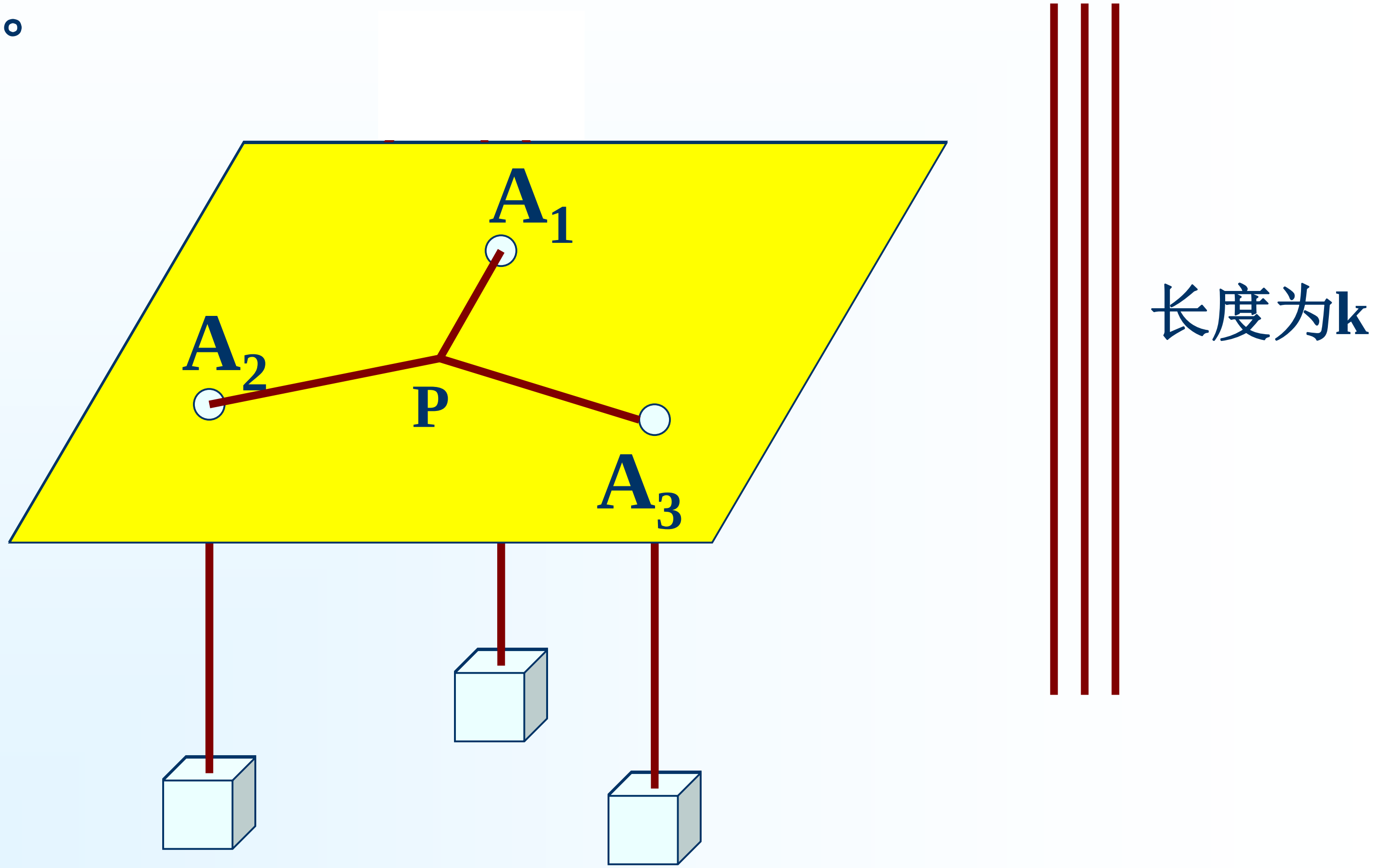
求解二元函数 S =f(x, y)的最小值点即可。

- 解法二（几何方法）

平面上到$\triangle A_1A_2A_3$三顶点的距离和为最小的点P被称之为费马（Fermat）点或者斯坦纳点。当三角形的最大内角小于120°时，可以运用几何方法求得此点；而当其中有一内角大于120°时，点P就位于$\triangle A_1A_2A_3$最大内角的顶点。

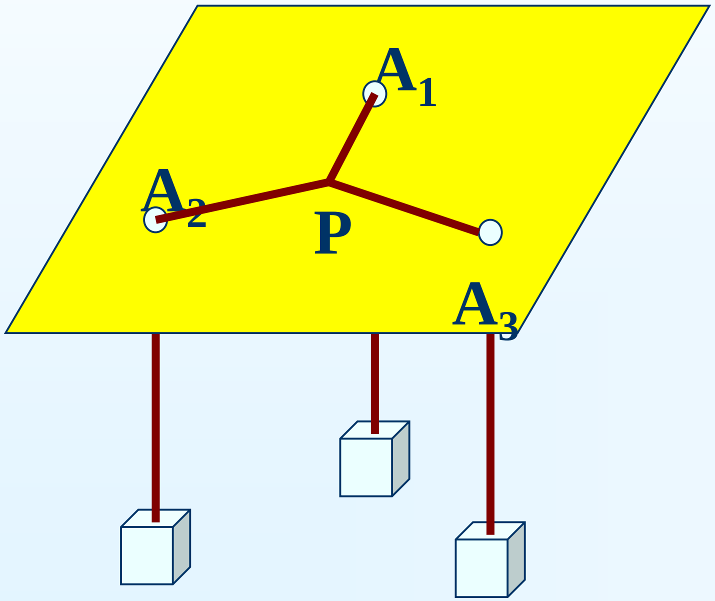
- 解法三（物理方法）

前求解方法提示，点P实际上是某系统$A_1A_2A_3$的重心。



➢ 为什么绳结会自动停在长度之和最小的位置？

设每个重物的质量为*m*。由力学原理，系统处于平衡位置时，三个重物的总势能*E*达到最小值。



设薄板所在水平高度为0，第 i 个重物的高度 $h_i = |PA_i| - k < 0$，其势能为 $E_i = mgh_i$ (i=1,2,3).

三个重物的总势能为

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$
$$= mg(|PA_1| + |PA_2| + |PA_3| - 3k)$$

$|PA_1| + |PA_2| + |PA_3|$最小时，*E*取到最小值

模拟法

- 如果甲、乙两个系统的结构和性质都相同，且构造出的模型也类似，就可以把乙看成是甲系统的模拟。采用对乙进行试验，并求得其解。
- 模拟法适用范围：虽然已经了解其结构以及性质，但是对其数量描述以及求解较麻烦。

三村短路问题中的模拟法称为物理模拟法。该法简单直观运用恰当可以得到很好的近似。

问题的推广

- 斯坦纳(Steiner)树问题

  给定平面上的n个点，要求找出联结这n个点的最短网络。

对于一般的Steiner树问题，由于计算量的原因，求解极其困难。

思考

- 如果有四个村庄或者更多的村庄要合建一所小学，那么小学的位置应如何选取？

- 如果第 i 个村庄有学生数 S_i $(i=1,2,\ldots n)$, 那么，为了让学生走的路程最少，学校又该建在何处？

§4 数据分析法

- 数理统计学是以概率论为基础，从实际观测资料出发，研究如何合理地收集资料（数据）来对随机变量的分布函数、数字特征等进行估计、分析和推断。

- 更具体地说，数理统计学是研究从一定总体中**随机抽出一部分**（称样本或子样）的某些**性质**，对此所**研究总体的性质**做出推断性的判断。

数据的统计描述和分析

- 统计的基本概念
- 参数估计
- 假设检验

简单的数据分析模型

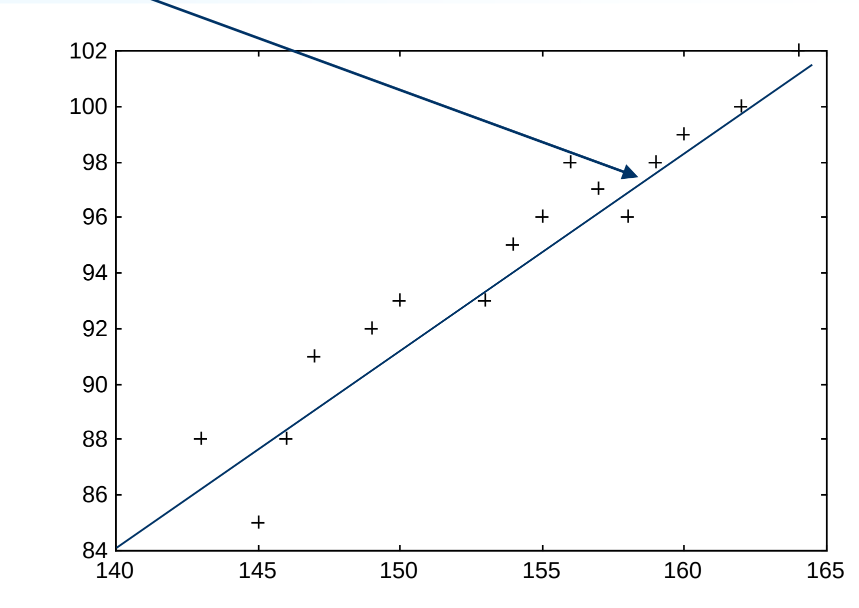
- 例：测得16名女子的身高与腿长（cm）所得数据如下表所示，请建立模型描述身高与腿长的关系。

身高	143	145	146	147	149	150	153	154	155	156	157	158	159	160	162	164
腿长	88	85	88	91	92	93	93	95	96	98	97	96	98	99	100	102

身高	143	145	146	147	149	150	153	154	155	156	157	158	159	160	162	164
腿长	88	85	88	91	92	93	93	95	96	98	97	96	98	99	100	102

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

以身高 x 为横坐标，以腿长 y 为纵坐标将这些数据点（x_i，y_i）在平面直角坐标系上标出.



一般地，称由 $y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$ 确定的模型为**一元线性回归模型**，记为

$$\begin{cases} y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon \\ E\varepsilon=0, D\varepsilon=\sigma^2 \end{cases}$$

固定的未知参数 β_0、β_1 称为回归系数，自变量 $\boldsymbol{x}$ 也称为回归变量.

$Y=\beta_0+\beta_1 x$，称为**y 对x 的回归直线方程**

模型求解

- 直接用Matlab工具箱：regress函数
  - 输入数据 x， y

```
>> x=[143 145 146 147 149 150 153 154 155 156 157 158 159 160 162 164]';
>> X=[ones(16,1)  x];
>> Y=[88 85 88 91 92 93 93 95 96 98 97 96 98 99 100 102]';
```

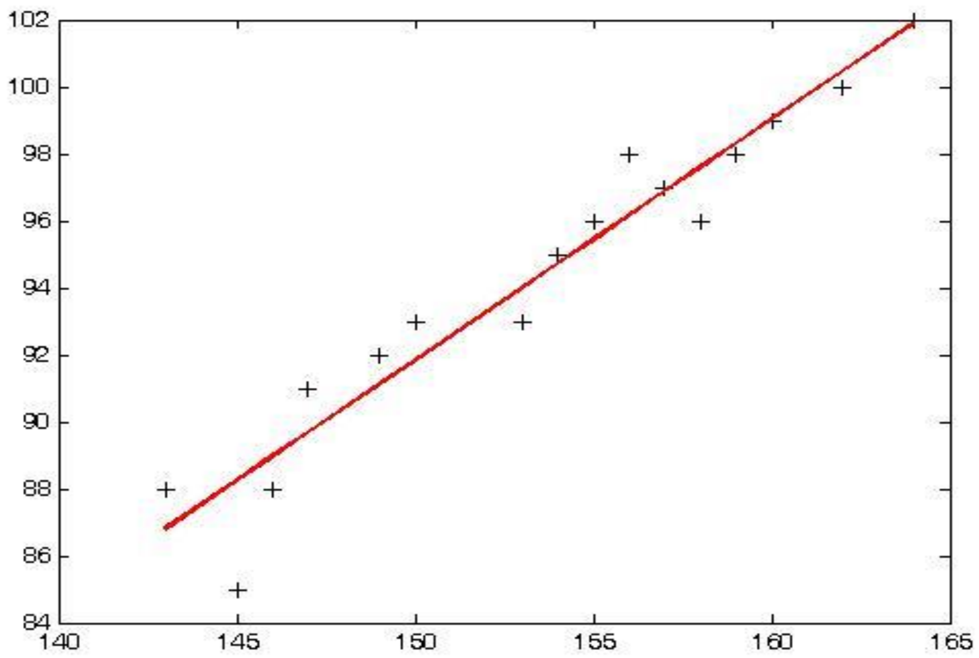
  - 调用regress函数得到拟合系数

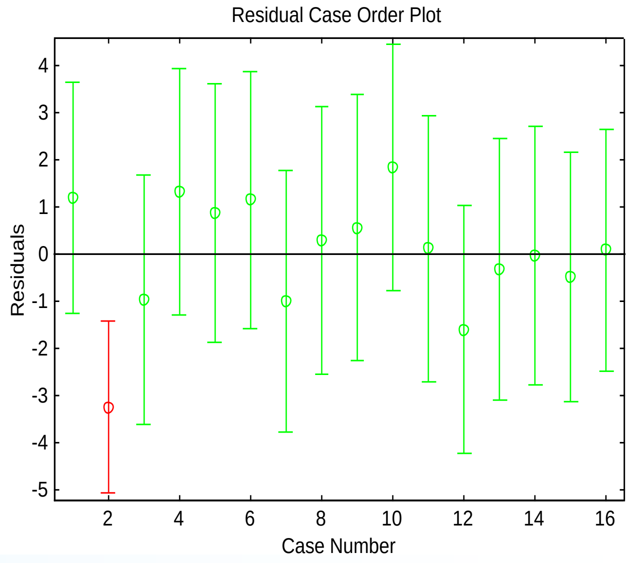
```
>> b=regress(Y,X)
   b =
        -16.0730
         0.7194
```

即得拟合方程为:

$$Y=0.7194\times x-16.0730$$

作图：　z=b(1)+b(2)*x；　plot(x,Y,'k+',x,z,'r')





曲线拟合问题

已知平面上n个点 $(x_i, y_i)_{i=1,2,\ldots,n}$，$x_i$ 互不相同，寻求函数f(x), 使得f(x)在某种标准下与所有的数据点最接近，即曲线拟合得最好。

线性最小二乘法

线性最小二乘法是解决曲线拟合的最常用的方法，其基本思路是，令

$$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+\cdots+a_mr_m(x)$$

其中$r_k(x)$是事先选定的一组函数，a_k是待定系数 ($k=1,2,\cdots,m$. $m<n$). 线性最小二乘准则就是寻求a_k ($k=1,2,\cdots,m$) 使得下式最小：

$$J(a_1,\cdots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$$

- 线性最小二乘中系数 a_k（k=1, 2, …, m）的确定可由解一个超定方程组来求得。

- 线性最小二乘中函数 $r_k(x)$（k=1, 2, …, m）的选取一般是直观的判断。常用的曲线有直线、多项式、双曲线、指数曲线等。实际操作中可以在直观判断的基础上，选几种曲线分别作拟合，然后比较，看那条曲线的最小二乘指标J最小。

- 令 $f(x)=a_1x^m+ a_2x^{m-1} + \cdots + a_mx + a_{m+1}$ 则线性最小二乘称为多项式拟合。

在Matlab的线性最小二乘拟合中，用的较多的式多项式拟合，其命令为：

A=polyfit(x,y,m)

其中，x,y表示要拟合的原始数据，m为多项式的次数。求解得到的A是多项式的系数。

拟合得到的多项式在x处的值y可以用以下的命令计算：

y=polyval(A,x)

例 对下面一组数据作二次多项式拟合

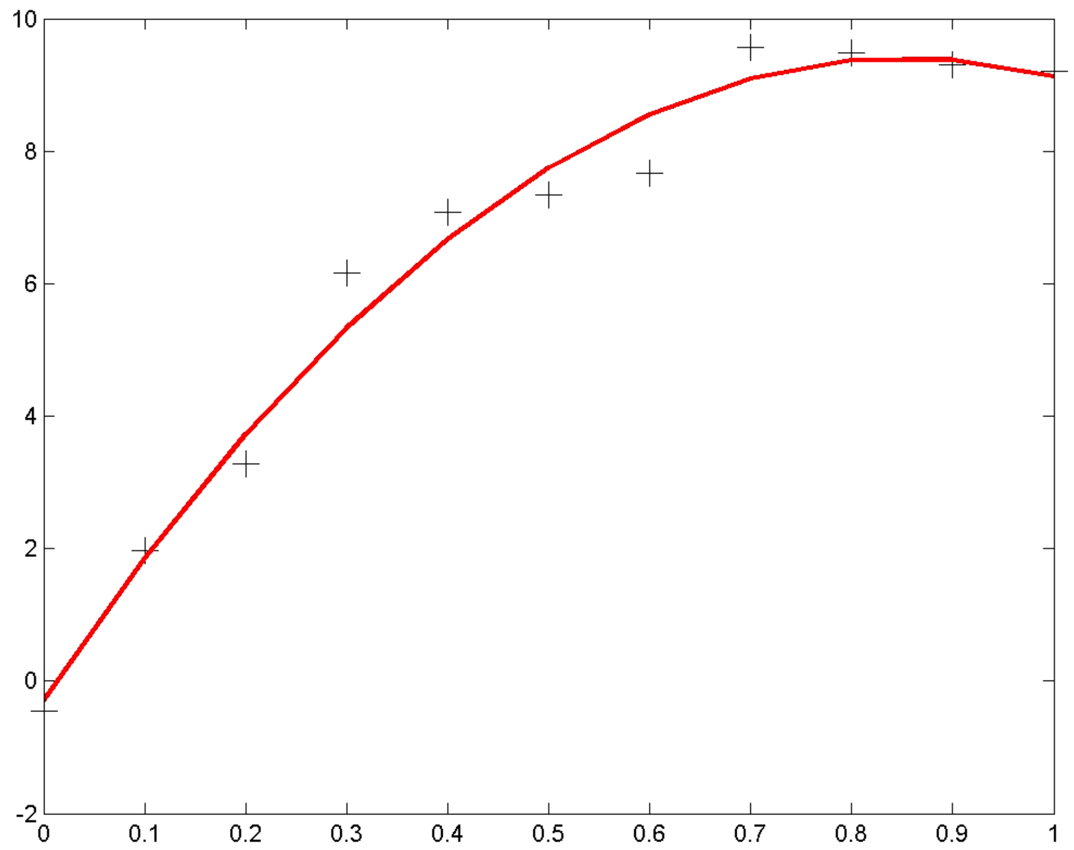
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	-0.447	1.978	3.28	6.16	7.08	7.34	7.66	9.56	9.48	9.30	9.2

输入以下命令

```
x=0:0.1:1;
y=[-0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 9.20];
A=polyfit(x,y,2);
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z,'r');
```

计算结果：

A = -13.30734265734264 22.71670629370628 -0.28341958041958



§5 图解法与核军备竞赛

问题背景

- **核军备竞赛：盟国之争**

  1945年8月，斯大林下令抓紧研制原子弹

  1949年8月，苏联成功地进行了核实验

  1952年11月1日，美国试爆第一颗氢弹

  1953年8月，苏联研制氢弹成功

  1952年10月3日，英国研制成功原子弹

  1960年2月13日，法国研制成功钚弹

  1964年10月16日，中国试爆成功原子弹

问题背景

- 美国和前苏联从60年代起就展开了激烈的核武器竞争，冷战时期美苏声称为了保卫自己的安全，实行“核威慑战略”，核军备竞赛不断升级。随着前苏联的解体和冷战的结束，双方通过了一系列的核裁军协议。
- 在60年代初期，苏联主张武器往大型化方向发展，其理由是武器的威力越大，杀伤力越强，但美国有人提出应走提高武器精度的道路。他们认为，虽然武器的威力越大，杀伤力越强，但武器的杀伤力不只取决于威力，还与精度有关，如果武器的威力大而精度低，其杀伤力未必就大。反之，虽然威力小些但精确度高，杀伤力也可能大。
- 对于武器发展方向的争论异常激烈。

问题

- 在什么情况下双方的核军备竞赛不会无限扩张，而存在暂时的平衡状态。
- 估计平衡状态下双方拥有的最少的核武器数量，这个数量受哪些因素影响。
- 当一方采取加强防御、提高武器精度、发展多弹头导弹等措施时，平衡状态会发生什么变化。

模型假设

- 以双方(战略)核导弹数量描述核军备的大小。
- 假定双方采取如下同样的**核威慑战略**：
  - 认为对方一旦发起所谓第一次核打击，即倾其全部核导弹攻击己方的核导弹基地；
  - 一方在经受第一次核打击后，应保存足够的核导弹，给对方重要目标以毁灭性的打击。
- 在任一方实施第一次核打击时，假定一枚核导弹只能攻击对方的一个核导弹基地。
- 摧毁这个基地的可能性是常数，它由一方的攻击精度和另一方的防御能力决定。

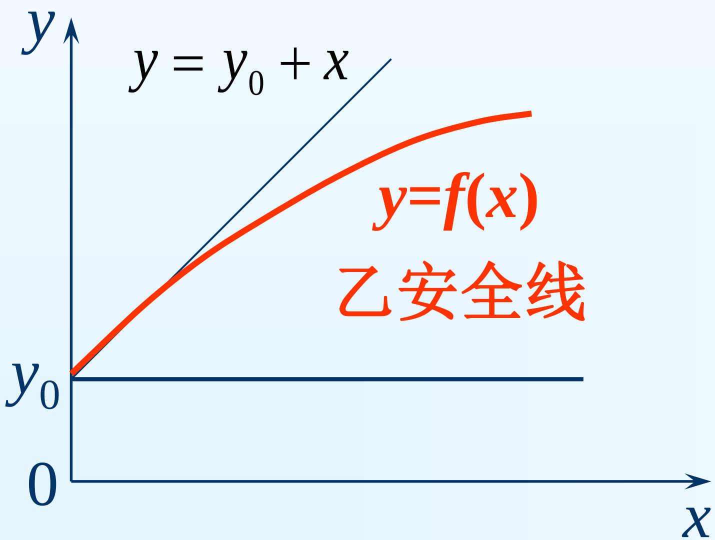
图的模型

$y=f(x)$~甲方有x枚导弹，乙方所需的最少导弹数

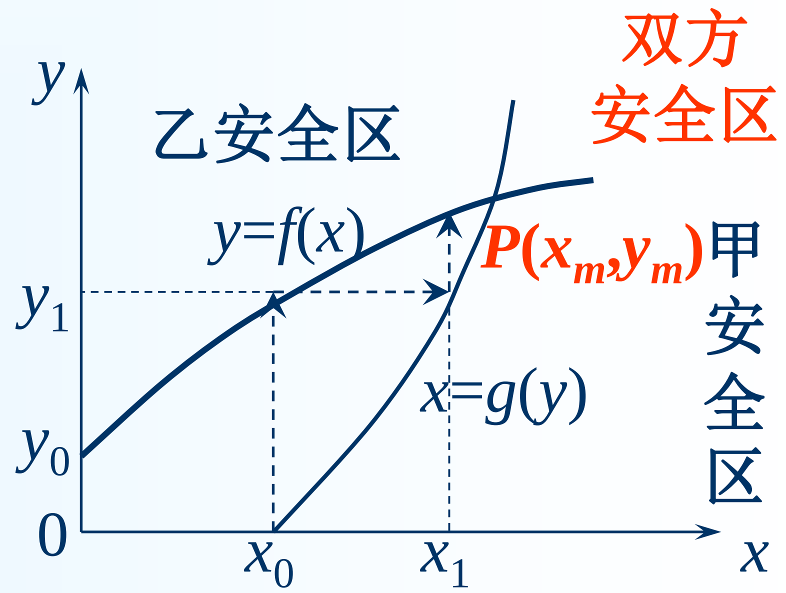
$x=g(y)$~乙方有y枚导弹，甲方所需的最少导弹数

当 $x=0$时 $y=y_0$，y_0~乙方的威慑值

y_0~甲方实行第一次打击后已经没有导弹，乙方为毁灭甲方工业、交通中心等目标所需导弹数



$y_0 < y = f(x) < y_0 + x$



P~平衡点(双方最少导弹数)

精细模型

乙方残存率 s ~甲方一枚导弹攻击乙方一个基地，基地未被摧毁的概率。

$x<y$

甲方以 x 攻击乙方 y 个基地中的 x 个，

sx 个基地未摧毁，$y-x$ 个基地未攻击。

$y_0=sx+y-x \Rightarrow y=y_0+(1-s)x$

$x=y$

$y_0=sy \Rightarrow y=y_0/s$

$y<x<2y$

乙的 $x-y$ 个被攻击2次，$s^2(x-y)$ 个未摧毁；

$y-(x-y)=2y-x$ 个被攻击1次，$s(2y-x)$ 个未摧毁

$$y_0=s^2(x-y)+s(2y-x) \Rightarrow y=\frac{y_0}{s(2-s)}+\frac{1-s}{2-s}x$$

$x=2y$

$y_0=s^2y \Rightarrow y=y_0/s^2$

精细模型

$x<y$, $y=y_0+(1-s)x$ $y<x<2y$, $y=\dfrac{y_0}{s(2-s)}+\dfrac{1-s}{2-s}x$

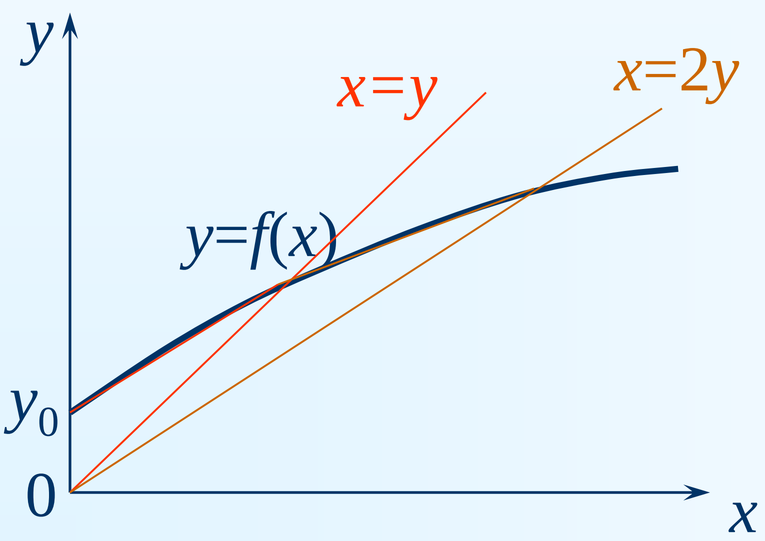
$x=y$, $y=y_0/s$ $x=2y$, $y=y_0/s^2$

$x=a\,y$, $y=\dfrac{y_0}{s^a}=\dfrac{y_0}{s^{x/y}}$

y_0~威慑值

s~残存率

a~交换比(甲乙导弹数量比)



y是一条上凸的曲线

y_0变大，曲线上移、变陡

s变大，y减小，曲线变平

a变大，y增加，曲线变陡

(s<1)

模型解释

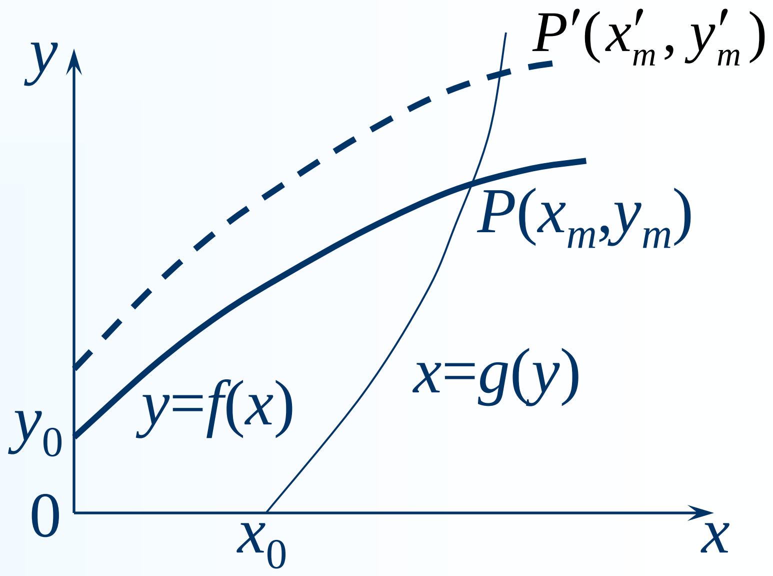
- 甲方增加经费保护及疏散工业、交通中心等目标

⇨ 乙方威慑值 y_0变大（其它因素不变）

⇨ 乙安全线 $y=f(x)$上移

⇨ 平衡点$P \to P'$

⇨ $x'_m > x_m,\ y'_m > y_m$



甲方的被动防御也会使双方军备竞赛升级。

模型解释

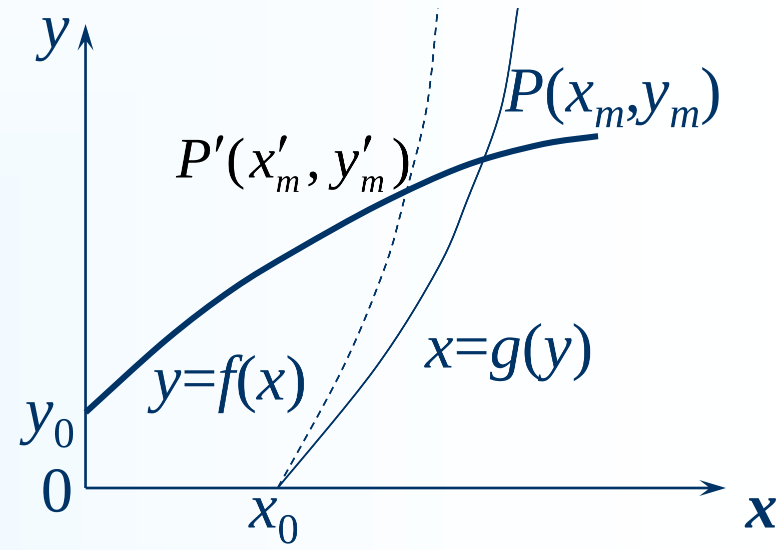
- 甲方将固定核导弹基地改进为可移动发射架

⇨ 乙安全线$y=f(x)$不变

甲方残存率变大

威慑值x_0和交换比不变

⇨ x减小，甲安全线$x=g(y)$向y轴靠近



⇨ $P \to P'$ $\quad x'_m < x_m,\ y'_m < y_m$

甲方这种单独行为，会使双方的核导弹减少

模型解释

- 双方发展多弹头导弹，每个弹头可以独立地摧毁目标

(x , y仍为双方核导弹的数量)

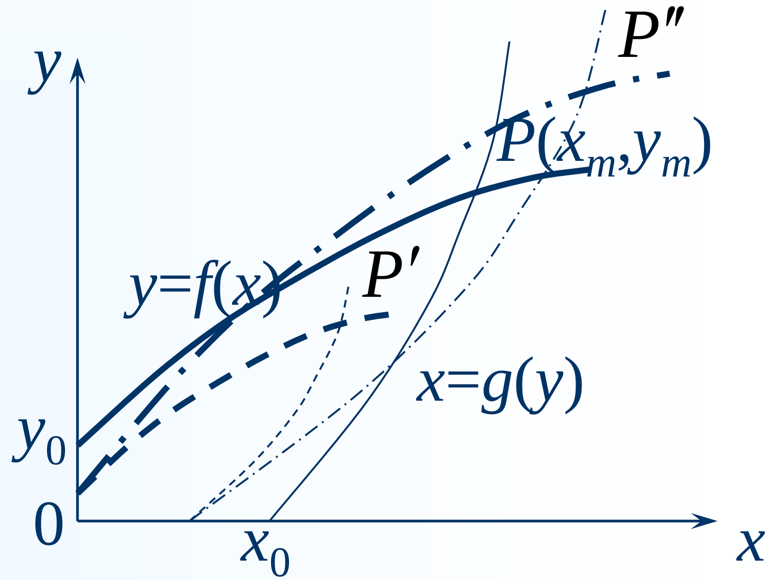
双方威慑值减小，残存率不变，交换比增加

乙安全线 $y=f(x)$

y_0减小 → y下移且变平

a 变大 → y增加且变陡

$P \to P'$?　$P \to P''$?



双方导弹增加还是减少，需要更多信息及更详细的分析

图解法的思想

- 在选取适当的参照系下，建立以数学几何图形（曲线、直线形、曲面、空间等）为主体的模型，借助于常识以及有关知识对模型做定性的讨论和粗糙的定量分析的方法。

图解法的适用范围

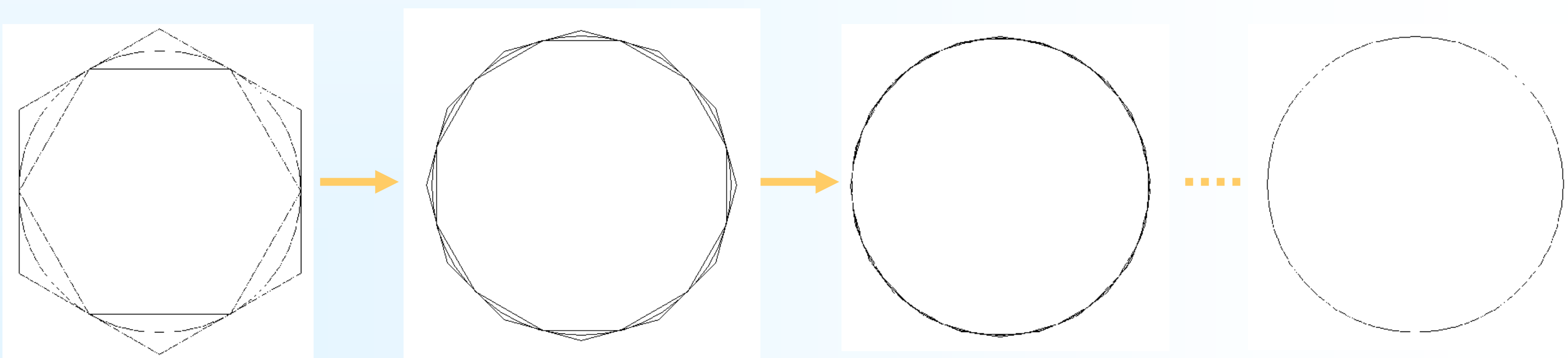
- 在传递定性关系或仅涉及变量的近似数据时，如果可用的信息不多，或者这些信息又不精确，那么图解法对这类问题可能是最有用的方法。
- 在研究稳定性问题时，局部的和大范围的稳定性理论不容易用解析方法处理时，往往用图解法处理比较简单。
- 在最优化问题中，特别当模型是不定量模型时，可采用图解法论证，如：数学规划中的一些问题。

§6 思维的移植和π的计算

➤ 圆周率是人类获得的最古老的数学概念之一，早在大约3700年前（即公元前1700年左右）的古埃及人就已经在用256/81（约3.1605）作为π的近似值了。几千年来，人们一直没有停止过求π的努力。

古典方法

用什么方法来计算 π 的近似值呢？显然，不可能仅根据圆周率的定义，用圆的周长去除以直径。起先，人们采用的都是用圆内接正多边形和圆外切正多边形来逼近的古典方法。



6边形　　12边形　　24边形　　圆

阿基米德曾用圆内接 96边形和圆外切96边形夹逼的方法证明了

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

由 $\sin\theta < \theta < \tan\theta$

和 $\theta = \pi/96$ 导出

公元5世纪，祖冲之指出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

比西方得到同样结果几乎早了1000年

十五世纪中叶，阿尔·卡西给出 π 的16位小数，打破了祖冲之的纪录。

1579年, 韦达证明

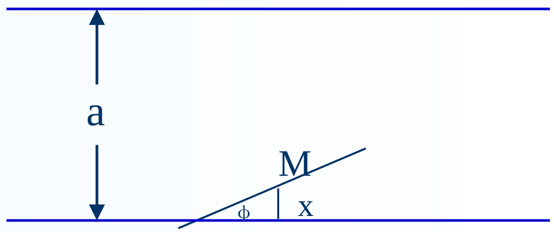
$$3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$$

1630年, 最后一位用古典方法求 π 的人 格林伯格也只求到了 π 的第39位小数.

计算π的Buffon投针模型

蒲丰的研究

- 在平面上画一些平行线，它们之间的距离为a，向此平面任投一长度为 l ($l<a$)的针，用 x 表示针的中点到最近的一条平行线的距离，φ表示针与平行线的交角。



事件分析

设p是针与平行线相交的概率，则基本事件G和相交事件g是

$$G:\begin{cases}0\le x\le \dfrac{a}{2}\\ 0\le \phi\le \pi\end{cases}\qquad g:\begin{cases}0\le x\le \dfrac{l}{2}\sin\phi\\ 0\le \phi\le \pi\end{cases}$$

故得

$$p=\frac{S_g}{S_G}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} l\sin\phi\, d\phi}{\frac{1}{2}a\pi}=\frac{2l}{a\pi}$$

所以 $\pi=\dfrac{2l}{a}\cdot\dfrac{1}{p}$

结论

由 $$\pi = \frac{2l}{a} \cdot \frac{1}{p}$$

可知，为计算π，可在投针试验中记N为试验次数，N_i为针与平行线相交的次数，由大数定理：

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \to \infty} \left\{ \left| \frac{N_i}{N} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

可得 $\frac{N_i}{N}$ 作为p得估计值，由此可得π的估计值。

此法移植到计算机中便成为计算机蒙特卡洛方法

投针试验的结果

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π的实验值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan C	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1597
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415926
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

- 在科学研究中，往往能够将一个或者几个学科领域中的理论和行之有效的研究方法、研究手段用到其他领域当中去，为解决其他学科领域中存在的疑难问题提供启发和帮助。

§7 公平的席位分配

引例：一个学校中学生代表席位在不同院系之间的公平分配问题。

“惯例”分配法

- 首先计算各系按照比例所应该分得的席位，然后取其整数部分作为各系第一阶段分到的席位。

- 在第二阶段将剩余的席位按照各系比例分配数的小数部分的大小取较大的几个系，在已分得席位的基础上各增加1席。

三系学生人数分别为103、 63、 34的分配情形

系别	学生人数	所占比例	20个席位的分配		21个席位的分配	
			比例分配的席位	参照惯例的结果	比例分配的席位	参照惯例的结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.57	3
总和	200	100	20.0	20	21.000	21

21个席位时，
分配变成
11+7+3！

矛盾性结果

“矛盾性结果”不符合我们对一个好的席位分配算法的预期：假定各系人数已确定，考虑总席位数增加时，一个席位分配算法的结果至少须保证对每一系所最终分得的席位数不减 。

问题产生的原因在于人数是一个整型量，因此在通常情况下不能严格保证各个院系（团体）最终分得的代表席位数与其人数取相同的比例。也即说对一个席位分配方案不能要求其在任何情况下均能作到绝对公平，但却可要求其分配结果的整体不公平程度尽可能降低 。

A、B两方席位的公平分配

- 记 A 方的人数为p_1，分配的人席位为n_1；B方的人数为 p_2，分配的席位为n_2。每个席位分别代表的人数应为 p_1/n_1 、p_2/n_2 。
- 若 $p_1/n_1 = p_2/n_2$，则公平 。
- 若 $p_1/n_1 \neq p_2/n_2$，则不公平 。通常情况下，p_1/n_1 和 p_2/n_2 中数值较大的一方是吃亏的一方。

建立公平度的数量指标

- 标准I：绝对不公平指标

不妨假设 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，绝对不公平指标就是

$$p_1/n_1 - p_2/n_2$$

1

$$(p_1, p_2)=(120,100)$$
$$(n_1, n_2)=(10,10)$$
$$p_1/n_1 - p_2/n_2=2$$

2

$$(p_1, p_2)=(1020,1000)$$
$$(n_1, n_2)=(10,10)$$
$$p_1/n_1 - p_2/n_2=2$$

常识：（2）的公平程度比（1）大为改善了.

标准II：相对标准

1）如果 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，A为吃亏的一方。A的相对不公平度定义为：

$$r_A(n_1, n_2) = (p_1/n_1 - p_2/n_2)/(p_2/n_2)$$

2）如果 $p_1/n_1 < p_2/n_2$，B为吃亏的一方。B的相对不公平度定义为：

$$r_B(n_1, n_2) = (p_2/n_2 - p_1/n_1)/(p_1/n_1)$$

1

$(p_1, p_2)=(120,100)$

$(n_1, n_2)=(10,10)$

$p_1/n_1 - p_2/n_2=2$

2

$(p_1, p_2)=(1020,1000)$

$(n_1, n_2)=(10,10)$

$p_1/n_1 - p_2/n_2=2$

例1：$r_A(n1, n2)=0.2$

例2：$r_A(n1, n2)=0.02$

制……案的原……

使相对不公平度尽可能小。

确定分配方案

假设(p_1, p_2)固定，(n_1, n_2)已经分配好。现总席位增加1。

不妨假设 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，即A为吃亏的一方。

- 若 $p_1/(n_1+1) > p_2/n_2$，则增加席位给A。
- 若 $p_1/(n_1+1) < p_2/n_2$，则增加席位给A将对B不公平； 显然

$p_1/n_1 > p_2/(n_2+1)$，说明增加席位给B将对A更为不公平。此时，分别计算将此席位给 A 或 B 时的相对不公平度：

席位给A： $r_B(n_1+1, n_2)=p_2(n_1+1)/(p_1 n_2) -1$

席位给B： $r_A(n_1, n_2+1)=p_1(n_2+1)/(p_2 n_1) -1$

公平分配席位的原则是使得相对不公平值尽可能地小，

则若 $r_B(n_1+1, n_2)<r_A(n_1, n_2+1)$，则增加席位给A；反之增加席位给B。

$$r_B(n_1+1,n_2)=p_2(n_1+1)/(p_1 n_2)-1$$
$$r_A(n_1,n_2+1)=p_1(n_2+1)/(p_2 n_1)-1$$

$$r_B(n_1+1,n_2) < r_A(n_1,n_2+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$p_2^2/((n_2+1)n_2) < p_1^2/((n_1+1)n_1)$$

若记

$$Q_A=\frac{p_1^2}{((n_1+1)n_1)} \qquad Q_B=\frac{p_2^2}{((n_2+1)n_2)}$$

可以将按照相对不公平指标来确定新增1席的归宿，等价于对 Q_A和Q_B的比较，则二数中大的所对应的一方的席位加1。

Q-值法与m方的席位分配

设有m个团体，$p_{i\,(i=1,2,\ldots m)}$表示第i个团体的人数，$P=\sum_{i=1}^{m} p_i$为总人数， $n_{i\,(i=1,2,\ldots m)}$表示第i个团体分得的席位数， N为总席位数。

1．令 $n_i=[N(p_i/P)]$，计算 $Q_i=\dfrac{p_i^2}{((n_i+1)\,n_i)}$，$(i=1,2,\ldots,m)$

2．令 $n:=\sum_{i=1}^{m} n_i$，若 n=N，停止。$n_{i\,(i=1,2,\ldots,m)}$ 即为第个团体最终分得的席位数；

3．选最小的 i^*，使得$Q_{i^*}=Max\{Q_i\,|\,i=1..m\}$；令席位数 $n_{i^*}:=n_{i^*}+1$ $Q_{i^*}:=\dfrac{P_{i^*}^2}{n_{i^*}(n_{i^*}+1)}$，转 2。

Q-值法的应用

- 三系学生人数分别为103、 63、 34时，21个席位的分配结果。

系别	学生人数	参照惯例的结果	Q-值法结果
甲	103	11	11
乙	63	7	6
丙	34	3	4

模型的进一步讨论

- 说 Q-值法与参照“惯例”的算法孰优孰劣是不适当的，它们遵循了两种不同的“公平”标准。

Q-值法关心一个团体的席位在增加与不增加一个席位对这个团体中个体的心理感受，而参照“惯例”的算法却从把一个团体视为一个整体来考察的。

- Q-值法的导出，是以其它团体的席位分配为参照来衡量一个团体席位分配中的相对不公平程度。

$$r_A(n_1, n_2) = (p_1/n_1 - p_2/n_2)/(p_2/n_2)$$

$$r_B(n_1, n_2) = (p_2/n_2 - p_1/n_1)/(p_1/n_1)$$

- 事实上当总人数 P 与总席位数 N 一定时，以 P/N 这一客观标准作参照应当更为合理 。

$r_A(n1, n2)=(p1/n1 - p2/n2)/(P/N)$ ⟹ $r_A(n1, n2)=(p1/n1 - p2/n2)$

$r_B(n1, n2)=(p2/n2 - p1/n1)/(P/N)$ ⟹ $r_B(n1, n2)=(p2/n2 - p1/n1)$

1

$(p_1, p_2)=(120,100)$

$(n_1, n_2)=(10,10)$

$p_1/n_1 - p_2/n_2=2$

2

$(p_1, p_2)=(1020,1000)$

$(n_1, n_2)=(10,10)$

$p_1/n_1 - p_2/n_2=2$

? 认为绝对公平指标不合理，是在考虑两个不同的实例下得到的结论。在同一问题中，我们认为其能够刻画不公平度。

H-值法

当总人数 P 与总席位数 N 一定时，以 P/N 这一客观标准作参照。讨论A、B两方公平席位的分配情况，可定义绝对不公平度分别为：

$$r_A(n1, n2)=(p1/n1 - p2/n2)$$
$$r_B(n1, n2)=(p2/n2 - p1/n1)$$

推导得到新的算法。

可发现算法恰好是按照绝对不公平指标 $H_i=p_i/n_i$ $_{(i=1,2,\ldots m)}$来决定新增加席位的归宿，将**Q**-值法中的Q_i都换为H_i，得到的算法这里称之**H**-值法。

H-值法优于Q-值法的结论

- 定理：设有m个团体， $P_i(i=1..m)$ 表示第个团体的人数， $P=\sum_{i=1}^{m}P_i$ 为总人数， N 为总席位数，$n_i^*(i=1..m)$ 表示由H-值法给出第 i 个团体分得的席位数，则

$$n_i^*(i=1..m)$$

必是 $Min\left\{Max\{\frac{P_i}{n_i}\mid n_i\text{为非负整数，且}\sum_{i=1}^{m}n_i=N\}\right\}$ 最优化问题的最优解。

H-值法的应用

- 三系学生人数分别为103、 63、 34时，21个席位的分配结果。

系别	学生人数	参照惯例的结果	Q-值法	H-值法
甲	103	11	11	11
乙	63	7	6	6
丙	34	3	4	4

建模启发

- 学习者除了在寻找适当的数学方法解决席位的公平分配这一问题本身建模方法外，还应当从“从建立了相对不公平指标、并最终导出Q-值法”这一过程得到启发—尽管Q-值能否被发现并不影响席位分配的最终方案，但用Q-值法来表述实现算法更加简洁有效，而且很容易将由两个团体席位分配的算法推广到多个团体的情形，领会“内容”与“形式”的辨证关系，认真对待自己的每一次创作。

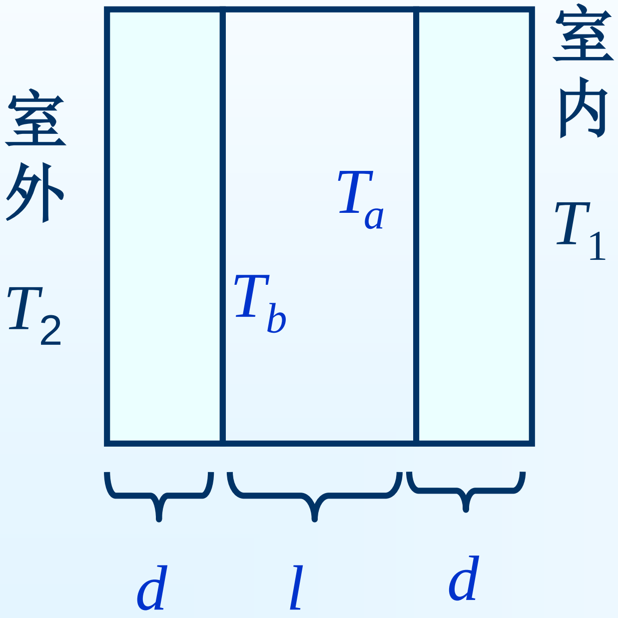
- 至于H-值法的导出及其结果优于Q-值法的结论，它也表明对一个数量大小的衡量，在有客观标准存在时，我们宁愿以客观标准作为参照；另外，在对实际应用问题分析建模的过程中，应养成自觉的否定和自我否定精神，当然这同样应当建立在严格求证的基础之上 。

§8 双层玻璃的功效

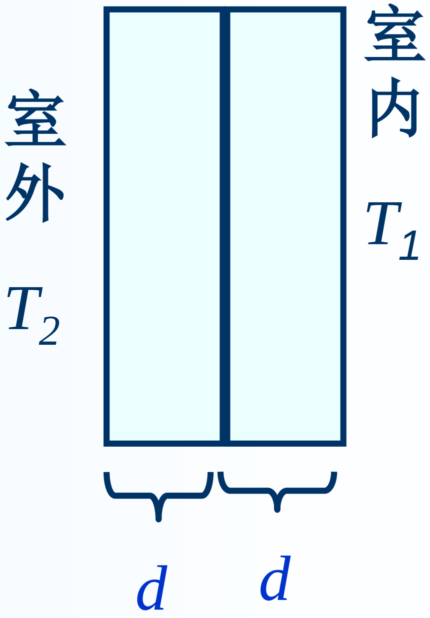
问题

在寒冷的北方， 许多住房的玻璃窗都是双层玻璃的，即在窗户上装两层玻璃且中间留有一定空隙，这样就减缓室内外热量的交换，特别在冬天，这样做的保暖效果是很有效的。能否建立一个适当的数学模型分析其有效性，并给出相应的实用设计。

比较两座其他条件完全相同的房屋，它们的差异仅仅在窗户不同。



双层玻璃



单层玻璃

模型假设

不妨可以提出以下 假设：

1、热量的传播形式只考虑传导，没有对流，即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的。

2、室内温度和室外温度保持不变，热传导过程已处于稳定状态，即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数。

3、玻璃材料均匀，热传导系数是常数，空气的热传导系数是常数。

模型的建立

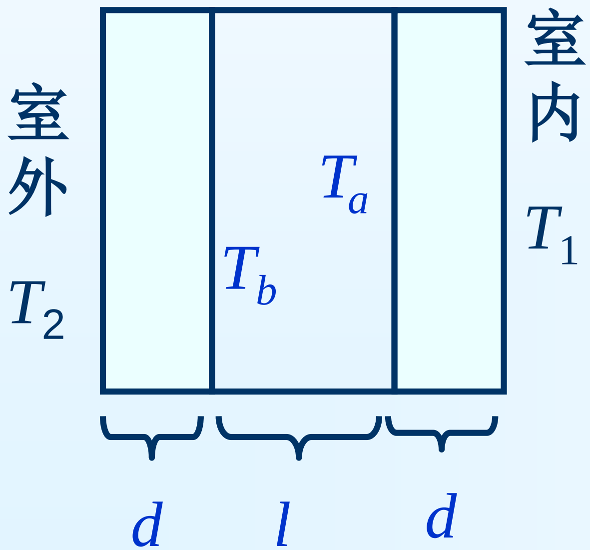
模型所需符号表

符 号	符号意义	单 位
d	玻璃厚度	cm
T_1	室内温度	°C
T_2	室外温度	°C
T_a	双层玻璃内层的玻璃外侧温度	°C
T_b	双层玻璃外层的玻璃内侧温度	°C
Q	双层玻璃热量损失	J
Q’	单层玻璃热量损失	J
l	双层玻璃的内间距	cm
k_1	玻璃的热传导系数	J/(cm·s·°C)
k_2	空气的热传导系数	J/(cm·s·°C)

物理定律　厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为Δt，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q ，与Δt成正比，与 d 成反比，即

$$Q = k \cdot \frac{\Delta t}{d}$$

考虑双层玻璃



在单位时间里通过单位面积传导的热量为

$$Q = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

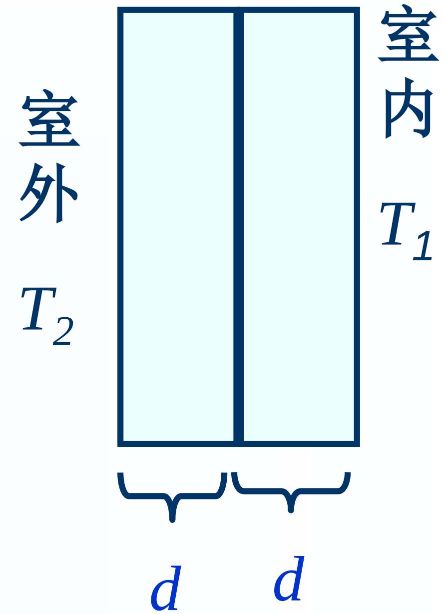
可得

$$Q = \frac{k_1 k_2 (T_1 - T_2)}{l k_1 + 2 d k_2}$$

$$Q=\frac{k_1k_2(T_1-T_2)}{lk_1+2dk_2}$$

由于玻璃的规格通常是确定的，在这里可将热量 Q 视为l 的一元函数，记为 Q(l)。不难发现Q(l)为一单调减函数，因此在建筑材料与设计美观允许的前提下尽可能加大两层玻璃的空隙且中间的空隙总在使Q(l)减小。

对于厚度为**2*d*** 的单层玻璃，可视为*l* =0 的双层玻璃。其单位时间内单位面积的传导热量为



$$Q' = Q(0) = k_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

从分析其功效的角度考虑，以厚度为2d的单层玻璃作为参照，得

$$\frac{Q}{Q'} = 2 / \left(l\, k_1/(d k_2) + 2 \right)$$

模型的求解

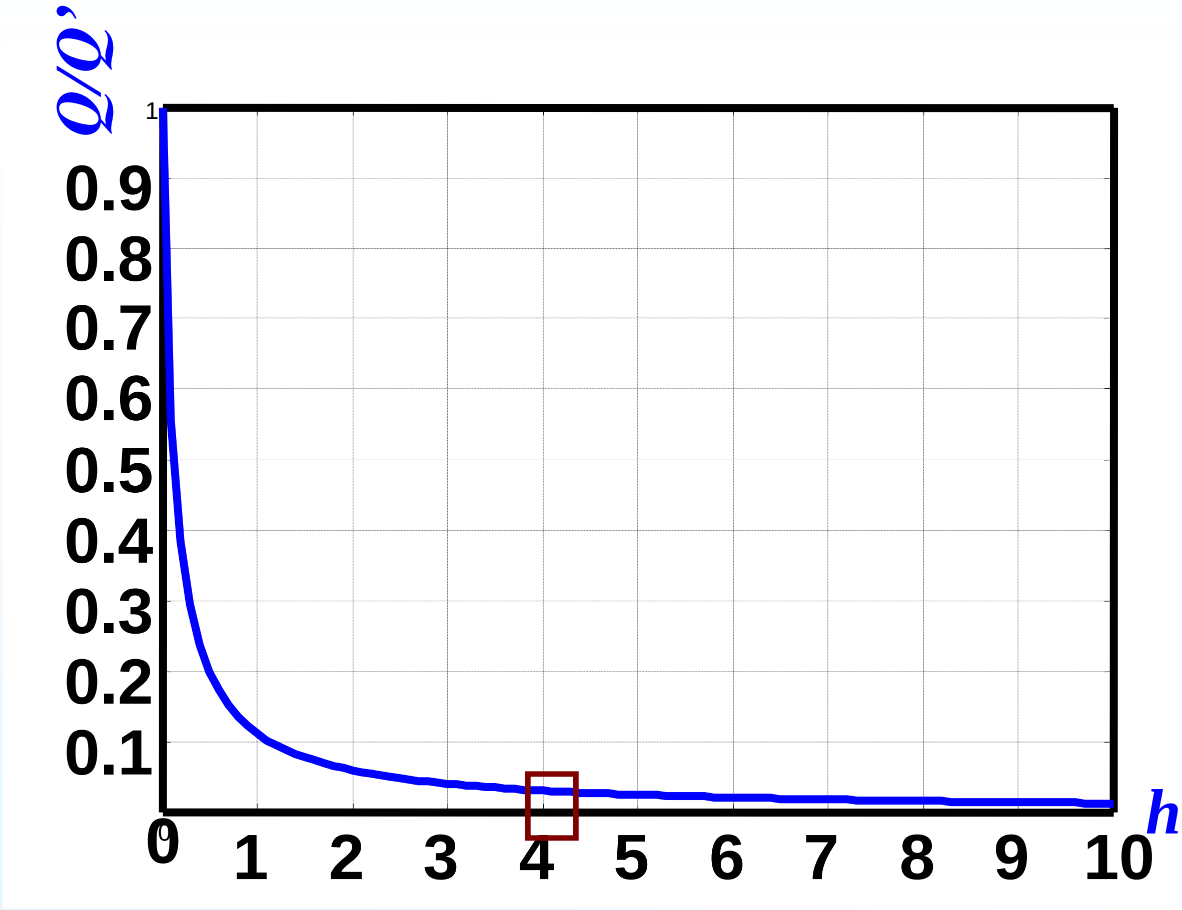
常用玻璃的热传导系数 $k_1 = 4 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3}$（焦耳/厘米·秒·度），做保守估计，取 $k_1 = 4 \times 10^{-3}$（焦耳/厘米·秒·度），干燥空气的热传导系数 $k_2 = 2.5 \times 10^{-4}$（焦耳/厘米·秒·度）。

这时

$$\frac{Q}{Q'} = 1 / (8l/d + 1)$$

上式反映出双层玻璃窗在减少热量损失上的功效只和l与d的比值有关。

令 *h=l/d*，绘出热能减少功效与*h*的关系图



从上图可看出，当l由0增加时，曲线迅速下降，特别当 $l=4d$ 时，窗户的散热速度降到了不做夹层的3%。而且，在通常的建筑规范就要求 $l/d\approx 4$ 。

思考

- 用隔热的方法来减少房屋热量的散失时，可以有很多不同的选择，如用尿素甲醛的化学物质填补墙上的空袭，使用有一定间隔的双层玻璃窗等等。现考虑用填充隔热墙、双层玻璃窗这两项措施来减少保暖的花费。根据同样费用产生的效果相比，那一措施更好？如果只有能力采取其中一项措施，从投资回收的角度考虑选用哪个措施更好？

附:几种墙和砖的综合传热系数(单位:$W/m^2/{}^{\circ}C$)

空心砖墙	实心砖墙	填充隔热墙	单层玻璃（6mm）	双层玻璃窗
1.92	0.873	0.5	6.41	1.27