

微分方程模型

微分方程数值解

简介

北京邮电大学

微分方程模型

✚ 研究函数变化规律

✚ 建立微分方程模型有三种方法

- 根据规律建模
- 用微元法建模
- 用模拟近似法建模

微分方程模型的求解

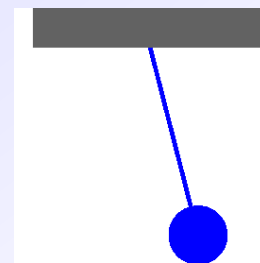
- 大多数微分方程求不出解析解。
- 研究微分方程的稳定性和数值解法十分重要。

§ 1. 微分方程模型

根据规律建模类模型

根据已有的规律和定律列常微分方程

例1 (理想单摆运动) 建立理想单摆运动满足的微分方程, 并得出理想单摆运动的周期公式。



模型构成

从图4-1中不难看出，小球所
根据牛顿第二定律可得

$$m l \theta'' = -m g \sin \theta, \quad (1)$$

从而得出二阶微分方程：

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \\ \theta'(0) = 0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (2)$$

(2) 是非线性
方程，不易求解。
 θ 很小时，

这是理想单摆应满足的运动方程

考察 (2) 的近似线性方程：

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0 \\ \theta'(0) = 0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (3)$$

模型求解

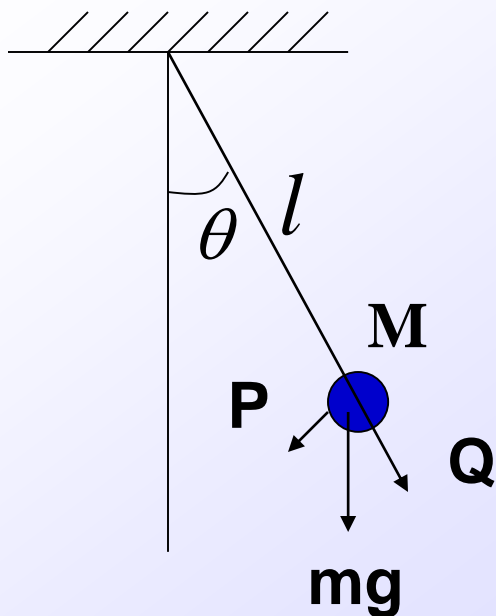


图4-1

(3) 的特征方程为: $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

(3) 的解为:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad \text{其中 } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

当 $t = \frac{T}{4}$ 时, $\theta(t) = 0$ 故有 $\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$

由此即可得出 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

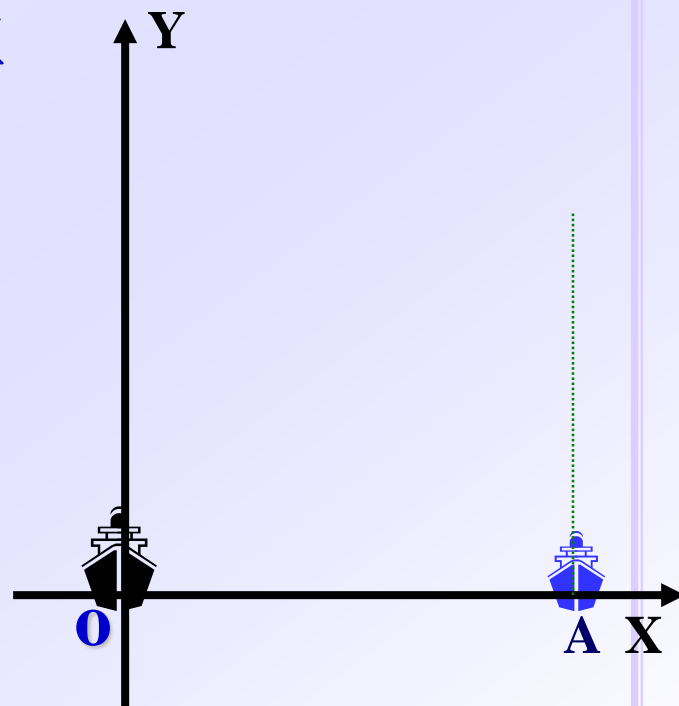
例2（目标跟踪问题）

有敌对两艘舰艇，乙舰位于甲舰的正东方。假设两舰同时发现对方，乙舰马上以最大速度往正北方的公海逃跑，而甲舰则向乙舰发射导弹。已知导弹的速度是乙舰逃离速度的5倍。要求模拟导弹的运行曲线，并求乙舰行驶多远时，导弹将其击中？

数学问题

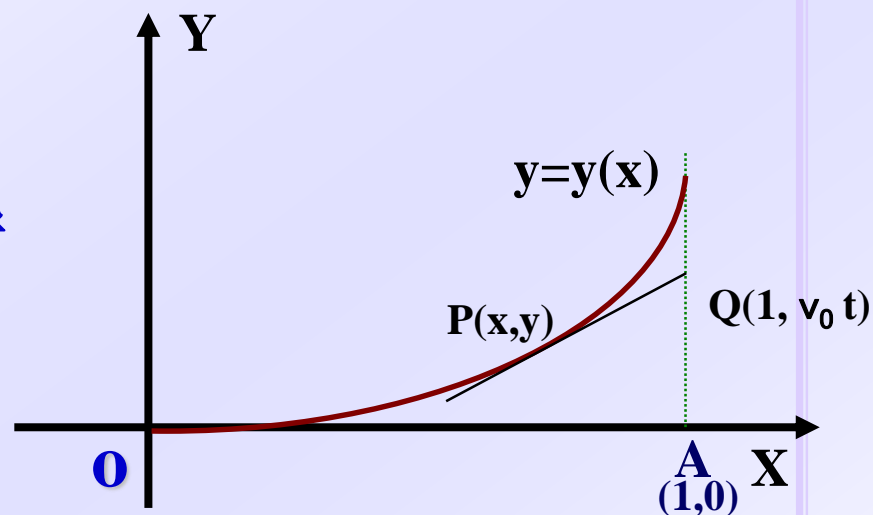
设甲舰位于坐标原点 O ，乙舰位于点 $A(1, 0)$ 处。甲舰向乙舰发射导弹，导弹始终对准乙舰。设乙舰以最大的速度 v_0 。

（ v_0 是常数）沿平行于 Y 轴的直线航行，导弹的速度 $5v_0$ ，求导弹运行的曲线，以及乙舰行驶多远时，导弹将它打中？



建立模型

设导弹的轨迹曲线为 $y=y(x)$ 。设经过时间 t ，导弹位于点 $P(x,y)$ ，乙舰位于点 $Q(1,v_0 t)$ 。

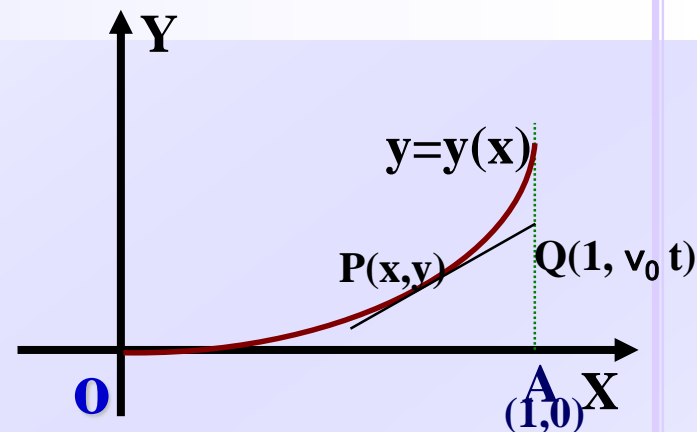


由于导弹头始终对准乙舰，故在 t 时，直线 PQ 就是导弹的轨迹曲线弧 OP 在点 P 处的切线。

$$\text{即: } y' = \frac{v_0 t - y}{1 - x}$$

得:

$$v_0 t = (1 - x) y' + y, \quad (1)$$



根据题意, 弧OP的长度为|AQ|的5倍, 即

$$\int_0^x (1 + y'^2)^{1/2} dx = 5v_0 t \quad (2)$$

由 (1) (2) 可得:

$$\begin{cases} (1-x)y'' = \frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{5} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

模型求解

解微分方程，得：

导弹运行曲线方程

$$y = -\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$$

当 $x=1$ ， $y=5/24$

乙舰航行到点 $(1, 0.2083)$ 时被导弹击中。

被击中时间为 $t=5/(24v_0)$

若 $v_0 = 1$ ，则 $t = 0.2083$ 时被击中。



微元法建模

⊕ 用微积分的微元分析的方法建立常微分方程模型。

⊕ 不是直接对未知函数及其导数应用定理和关系式，对微元应用规律。



例3 一个半径为 $R\text{cm}$ 的半球形容器内开始时盛满了水，但由于其底部一个面积为 $S\text{ cm}^2$ 的小孔在 $t=0$ 时刻被打开，水被不断放出。问：容器中的水被放完总共需要多少时间？

解：以容器的底部 O 点为原点，取坐标系如图4.3所示。其中， r 为时刻 t 的水面的半径。

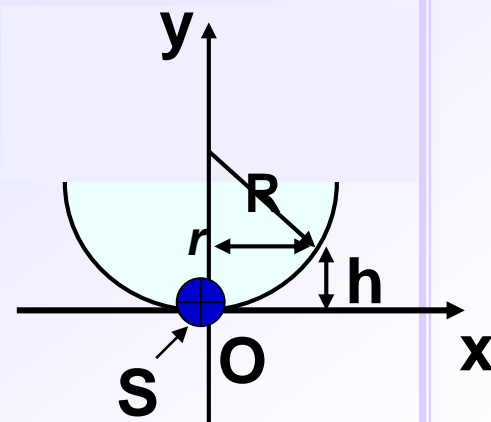
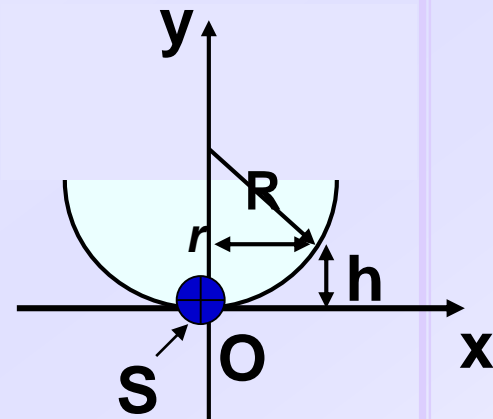


图4-3

建立模型

令 $h(t)$ 为 t 时刻容器中水的高度，现建立 $h(t)$ 满足的微分方程。



设水从小孔流出的速度为 $v(t)$ 。有

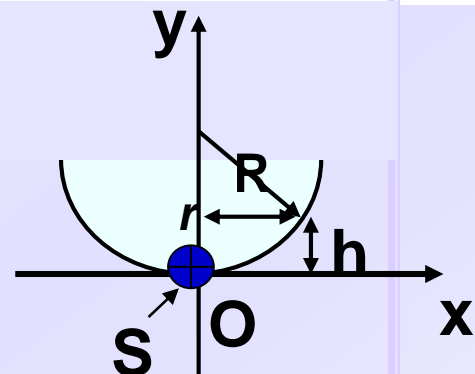
$$v(t) = 0.60S\sqrt{2gh}$$

根据力学定律，在不计水的内部摩擦力和表面张力的假定下：

设在微小时间间隔 $[t, t+dt]$ 内，水面高度由 h 降至 $h+dh$ ($dh < 0$)，由此可得：

$$dV = -\pi r^2 dh = S v dt$$

易见: $r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$



故有: $-\pi[R^2 - (R - h)^2]dh = 0.60\sqrt{2gh}dt$

即: $\frac{dh}{dt} = -\frac{0.60\sqrt{2hg}}{\pi[R^2 - (R - h)^2]}$

(1)

S=1

在初始时刻有:

$h|_{t=0} = R$ (2)

模型求解

由 (1) , (2) 得:

$$\begin{aligned} T &= \int_R^0 \frac{-\pi[R^2 - (R-h)^2]}{0.60\sqrt{2gh}} dh \\ &= \frac{-\pi}{0.60\sqrt{2g}} \int_R^0 (2R\sqrt{h} - h^{\frac{3}{2}}) dh \\ &= \frac{-\pi}{0.60\sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3}Rh^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_R^0 = \frac{14\pi R^2}{9\sqrt{2g}} \end{aligned}$$

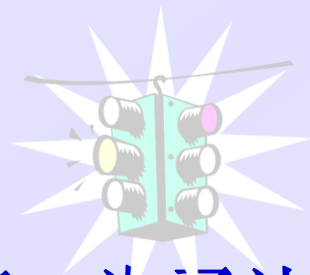
得到容器中水
被放完所需时
间。

模拟近似法建模

在社会科学、生物学、医学、经济学等学科的实践中，由于这些学科中一些现象的规律性我们还不是很清楚，即使有所了解也并不全面。因此，要用数学模型进行研究只能在不同的假设下去模拟实际的现象。

在上述问题中，常常用模拟近似法来建立微分方程模型。

例4 （交通管理问题）



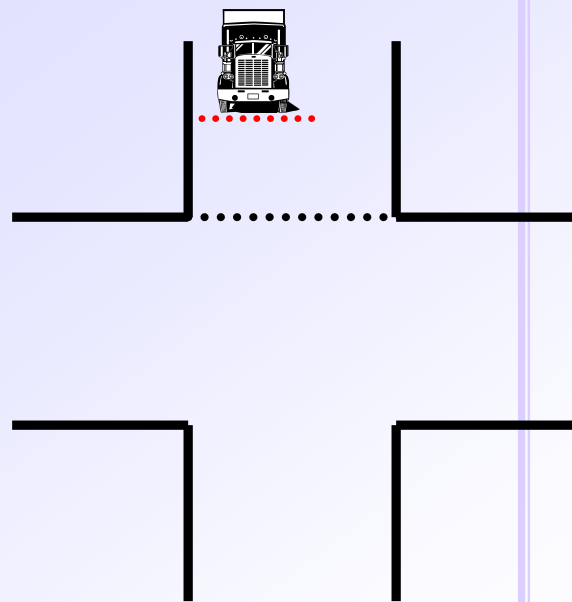
在交通的十字路口，都会设置红绿灯。为了让那些正行使在交叉路口或离交通路口太近而无法停下来的车辆通过路口，红绿灯转换中间还要亮起一段时间的黄灯。对于一位驶近交叉路口的驾驶员来说，万万不可以处于进退两难境界。那么黄灯应该亮多久才最为合理呢？



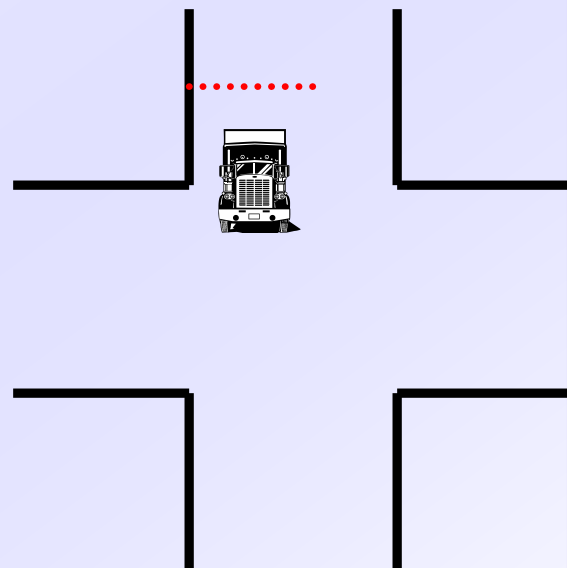
问题分析

在十字路口行驶的车辆中，交警主要考虑的是机动车辆，因为只要机动车辆能够停住，那么非机动车辆也能够停住。驶近交叉路口的驾驶员在看到黄色信号等后要立即做出决定：是停车还是通过路口。

如果驾驶员决定停车，必须要有足够的距离让他能停得住车。也就是说，在街道上存在一条无形的线，从这条线到街口的距离与法定速度有关，法定速度越大，此距离也越大。



如果驾驶员决定通过路口（过了线无法停住），必须要有足够的时间让他能够完全通过路口。

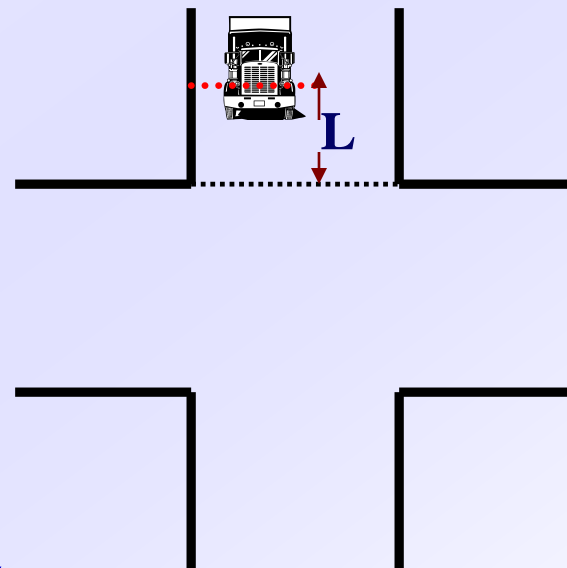


驾驶员完全通过路口需要的时间包括做出决定的时间以及到达路口所需的最短距离的驾驶时间，以及车通过交叉路口的时间。

黄灯状态持续的时间包括：驾驶员的反应时间，车通过交叉路口的时间以及通过刹车距离的时间。

问题求解的步骤

1. 根据该街道的法定速度 v_0 求出停车线的位置。
2. 根据停车线的位置以及法定速度确定黄灯持续时间。



模型假设

- ✦ 驾驶员通过十字路口时以该街道的法定速度 v_0 行驶。
- ✦ 驾驶员看到黄灯并决定停车需要一段反应时间 t_1 ，在这段时间里，驾驶员尚未刹车。
- ✦ 驾驶员刹车后，车还需要继续行驶一段距离，这段距离为刹车距离。
- ✦ 考虑典型车辆，车身长度为 l 。

停车线的确定

驾驶员的反应时间（实际为平均反应时间） t_1 易得到，可以根据经验或者统计数据得到。例如，不失一般性，可以设 $t_1 = 1\text{s}$ 。

设汽车的质量为 m 千克，刹车的摩擦系数为 f 。设 $x(t)$ 为刹车后在 t 时刻内行驶的距离。

根据刹车规律，可假设刹车制动力为 fmg (其中 g 为重力加速度)。由牛顿第二定律，刹车过程中的车辆应满足下列运动方程

$$\begin{cases} m (d^2x/dt^2) = -fmg \\ x(0) = 0 \quad (dx/dt)|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

求解上述二阶微分方程得：

$$x(t) = -1/2 fgt^2 + v_0 t$$

$$\begin{cases} m (d^2x/dt^2) = -fmg \\ x(0) = 0 \quad (dx/dt)|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

$x(t)$ 为刹车后在 t 时刻内行驶的距离, 设刹车时间为 t_2 , 当 $t = t_2$ 时, $dx/dt = 0$ 。

而

$$dx/dt = -fgt + v_0$$

求得

$$t_2 = v_0 / (fg), \quad x(t_2) = 0.5v_0^2 / (fg)$$

由此可知, 停车到路口的距离应为

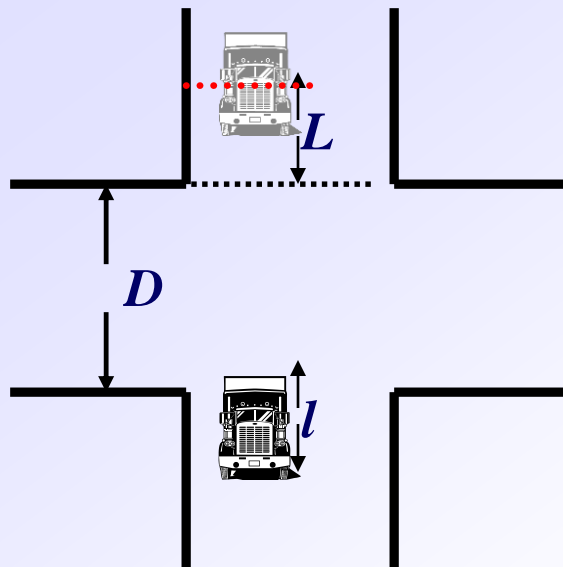
$$L = v_0 t_1 + 0.5v_0^2 / (fg)$$

黄灯时间的计算

在黄灯转为红灯的时间里，应保证所有**已经过线的车辆顺利通过街口。**

记街道的宽度为 D ，通过街口的车辆应通过的路程最长可达到 $L + D + l$ 。要保证过线的车辆全部通过，黄灯持续时间至少应当为

$$T = (L + D + l) / v_0$$



$$L = v_0 t_1 + 0.5 v_0^2 / (f g)$$

$$T = t_1 + 0.5 v_0 / (f g) + (D + l) / v_0$$

$$L = v_0 t_1 + 0.5 v_0^2 / (f g)$$

$$T = t_1 + 0.5 v_0 / (f g) + (D + l) / v_0$$

设 $D=9m$, $t_1=1s$, $l=4.5m$, $f=0.2$:

$v_0(\text{km/h})$	T	经验法
45	5.27s	3s
65	6.35s	4s
80	7.28s	5s

§ 2. 微分方程数值解

- ✦ 科学研究和工程技术问题往往归结为求解某个常微分方程的定解问题。
- ✦ 常微分方程的理论指出，很多方程的定解问题虽然存在，但是生产和科研中所处理的微分方程往往很复杂且大多求不出解析解，因此常求其能满足精度要求的**近似解**。
- ✦ 常微分方程的数值解法能够通过计算机便捷地实现。

✚ 常微分方程的数值解法的特点是：对求解区间进行剖分，然后把微分方程离散成为节点上的近似公式或者近似方程，最后结合定解条件求出近似解。

常微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

常微分方程的解是一个函数，但是，计算机没有办法对函数进行运算。因此，常微分方程的数值解并不是求函数的近似，而是求解函数在某些节点的近似值。

常微分方程数值求解的思想

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

例：我们对区间做等距分割： $x_i = h i$, $h = (b - a) / m$

用差商代替导数

设解函数在节点的近似为 $\{y_i\}$, 则：

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = f(x, y) \Big|_{x=x_i}$$

由数值微分公式，我们有

向前差商公式

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x_i, y_i) \implies y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

可以看到，给出初值，就可以用上式求出所有的 $\{y_i\}$

这种方法，称为**数值离散方法**。求的是在一系列离散点列上，未知函数 y 在这些点上的值的近似。

如果 $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 可用以下离散化方法求解微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

若步长 h 较小, 则有

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

故有公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

此即欧拉法。

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

基本步骤如下:

① 对区间作分割: $\Delta_I : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

求 $y(x)$ 在 x_i 上的近似值 y_i 。 $\{y_i\}$ 称为分割 Δ_I 上的格点函数

② 由微分方程出发, 建立求格点函数的差分方程。
这个方程应该满足:

A、解存在唯一; B、稳定, 收敛; C、相容

③ 解差分方程, 求出格点函数。

使用数值积分

对方程 $y'=f(x,y)$, 两边由 x_i 到 x_{i+1} 积分, 并利用梯形公式, 有:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

故有公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

实际应用时, 与欧拉公式结合使用:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})] \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

对于已给的精确度 ε , 当满足 $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| < \varepsilon$ 时, 取 $y_{i+1} = y_{i+1}^{(k+1)}$, 然后继续下一步 y_{i+2} 的计算。

此即改进的欧拉法。

使用泰勒公式

以此方法为基础，有龙格-库塔法、线性多步法等方法。

数值公式的精度

当一个数值公式的截断误差可表示为 $O(h^{k+1})$ 时（ k 为正整数， h 为步长），称它是一个 k 阶公式。

k 越大，则数值公式的精度越高。

常用数值解法

✚ 欧拉（Euler）法

此问题最简单而直观的数值方法，但是精度不高，在实际计算中并不常用。其实现离散化的手段是用差商来近似导数。

✚ Runge—Kutta法

较常用，精度高。

✚ 预测—校正法

利用积分关系式

- 欧拉法是一阶公式，改进的欧拉法是二阶公式。
- 龙格-库塔法有二阶公式和四阶公式。
- 线性多步法有四阶阿达姆斯外插公式和内插公式。

用Matlab解微分方程（组）

✦ 微分方程（组）的解析解

求解微分方程（组）的解析解用函数**dsolve** .

用该函数 时需要将微分方程包含在**dsolve**的表达式中。

在表达微分方程时，用字母**D**表示求微分，**D2**、**D3**等表示求高阶微分。任何**D**后所跟的字母为因变量，自变量可以指定或由symvar规则选定为缺省。

例如，微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, 应表为: D2y=0

例1 求 $du/dt=1+u^2$ 的通解

解：命令为： `dsolve('Du=1+u^2','t')`

结果为： `ans =`

`tan(t-C1)`

例2 求下列微分方程的特解

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 29 y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 15 \end{cases}$$

解 命令： `y=dsolve('D2y + 4Dy+29*y=0','y(0)=0,Dy(0)=15', 'x')`

结果： `y =`

`3*exp(-2*x)*sin(5*x)`

例3 求下列微分方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y + 3z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - 4y + 2z \end{cases}$$

解 命令为:

```
[x y z]=dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z','Dy=4*x-5*y+3*z', 'Dz=4*x-4*y+2*z');
```

```
x=simple(x)
```

%将x简化

```
y=simple(y)
```

```
z=simple(z)
```

结果: $x=$

$$-(-C1-C2*\exp(-3*t)+C2-C3+C3*\exp(-3*t))*\exp(2*t)$$

$y=$

$$-(-C1+C1*\exp(-4*t)-C2*\exp(-4*t)-C2*\exp(-3t)+C2 - C3+C3*\exp(-3*t))*\exp(2*t)$$

$z=$

$$-(-C1*\exp(-4*t)+C1-C2+C2*\exp(-4*t)+C3)*\exp(2*t)$$

在符号计算方面，**Matlab**软件的功能不如**Mathematica**软件强，在求解微分方程的解析解方面就是如此。对于某些微分方程，用**Matlab**软件求不出解析解，但用**Mathematica**软件可能求出。

✚ 微分方程（组）的数值解

Matlab中求解微分方程数值解的函数有5个：**ode45**, **ode23**, **ode113**, **ode15s**, **ode23s**.不同的函数代表不同的内部算法。

程序命令为：**[t,x]=solver('f',ts,x₀,options)**.其中**solver**取上面5个函数之一。

f 是待解函数写成的**m**-文件名。

ts=[t₀, t_f] 自变量的取值范围。

x₀为函数初值。

options用于设定误差限（可缺省）。

ode23运用一个组合2/3阶龙格 - 库塔 - 费尔贝格算法，而**ode45**运用一个组合4/5阶龙格 - 库塔 - 费尔贝格算法.一般常用函数**ode45**.

[t, x]=solver ('f',ts,x₀,options)

自变量值

函数值

ode45
ode23
ode113
ode15s
ode23s

由待解
方程写
成的m
文件名

ts = [t₀,
t_f], t₀, t_f
为自变量
的初值和
终值

函数的
初值

ode23: 组合的2/3阶龙格-库塔-芬尔格算法
ode45: 运用组合的4/5阶龙格-库塔-芬尔格算法

用于设定误差限(缺省时设定相对误差10⁻³, 绝对误差10⁻⁶),
命令为: options=odeset (' reltol',rt,'abstol',at) ,
rt, at: 分别为设定的相对误差和绝对误差.

注意

- 1、在解 n 个未知函数的方程组时， x_0 和 x 均为 n 维向量， m -文件中的待解方程组应以 x 的分量形式写成。
- 2、使用Matlab软件求数值解时，高阶微分方程必须等价地变换成一阶微分方程组。

例4 解微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 1000(1 - x^2) \frac{dx}{dt} - x = 0 \\ x(0) = 0; \quad x'(0) = 1 \end{cases}$$

解 将该二阶微分方程等价变为一阶微分方程组, 令 $y_1 = x$, $y_2 = dx/dt$, 有

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 1000(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1 \end{cases}$$

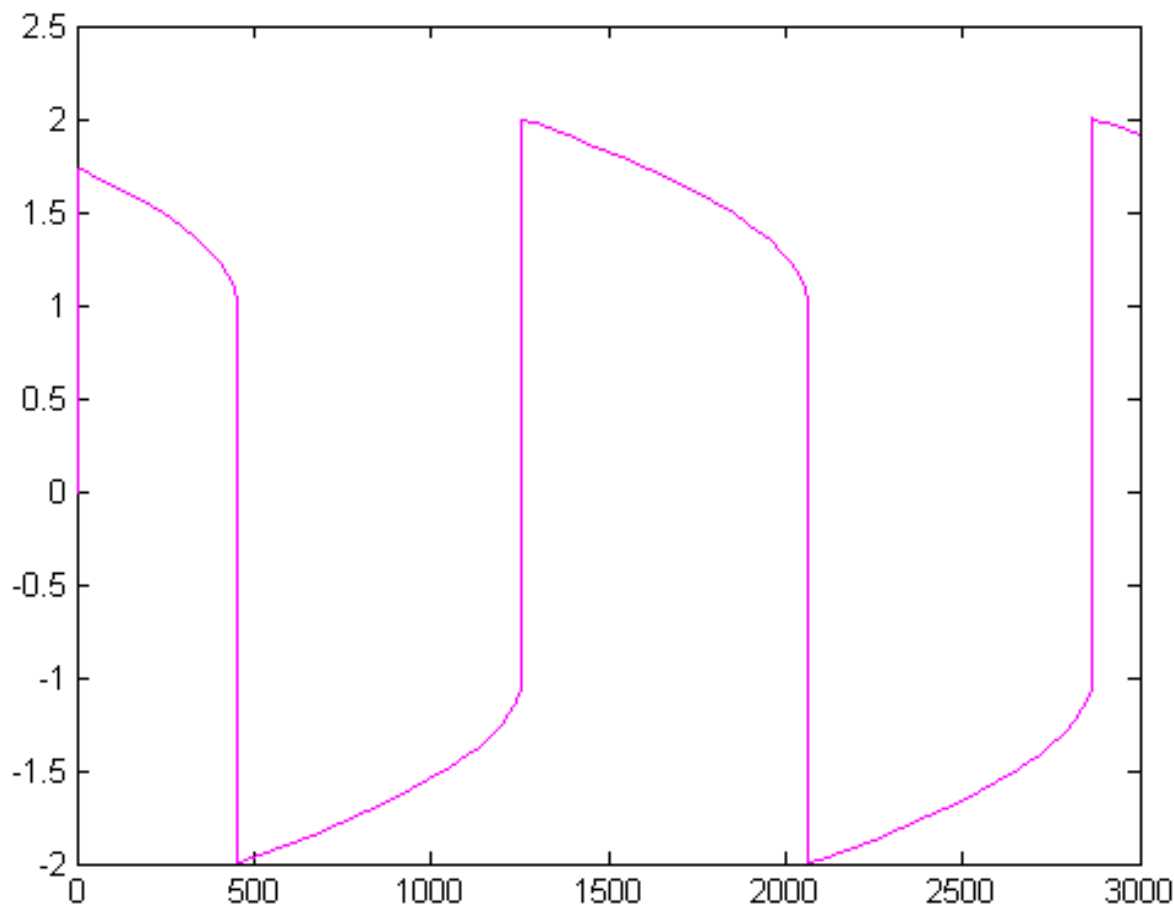
1. 建立vdp1000.m

```
function dy=vdp1000(t,y)
```

```
dy=zeros(2,1);dy(1)=y(2); dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

2. 取 $t_0=0, t_f=3000$, 输入命令

```
[T,Y] = ode15s('vdp1000',[0 3000],[0,1]); plot(T,Y(:,1),'-m');
```



例5 解微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3 \\ y_2' = -y_1 y_3 \\ y_3' = -0.5 y_1 y_2 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

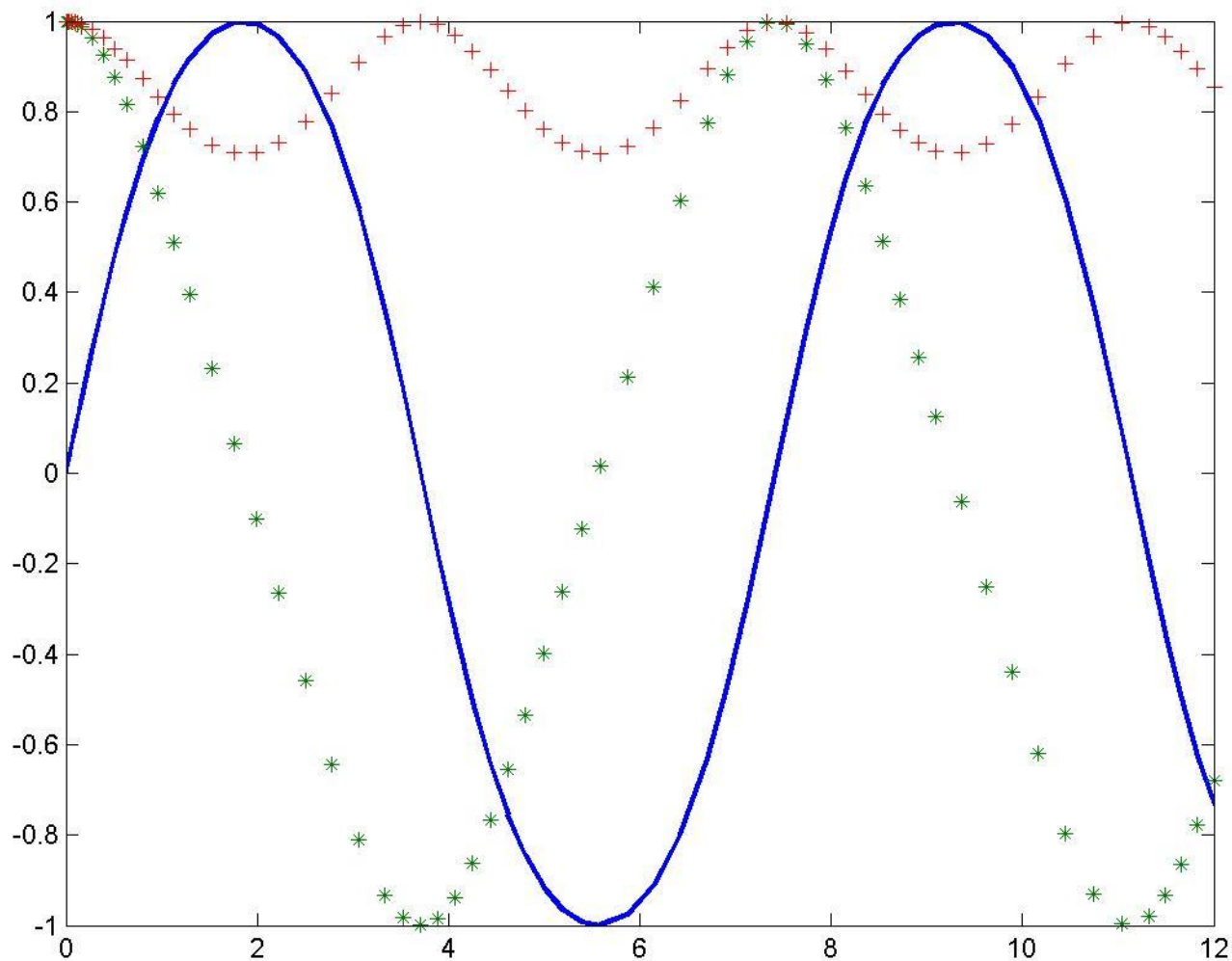
解 1. 建立m - 文件rigid.m如下:

```
function dy=rigid(t,y)
dy=zeros(3,1);
dy(1)=y(2)*y(3);
dy(2)=-y(1)*y(3);
dy(3)=-0.5*y(1)*y(2);
```

2. 取 $t_0=0, t_f=12$, 输入命令:

```
[T,Y]=ode45('rigid',[0 12],[0 1 1]);
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'*',T,Y(:,3),'+');
```

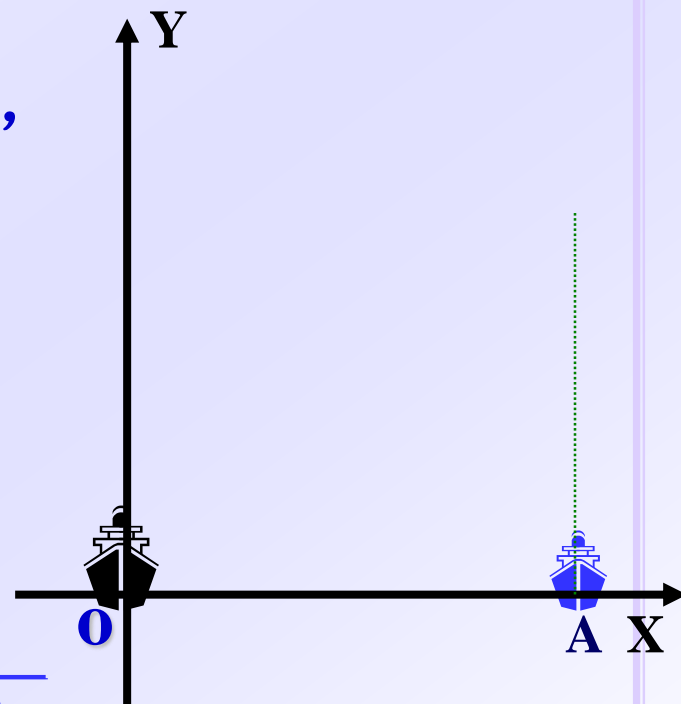
得到 y_1 、 y_2 、 y_3 与 t 的关系图如下：



y_1 : 实线
 y_2 : ' * '
 y_3 : ' + '

目标跟踪问题的其它求解方法

设甲舰位于坐标原点O，乙舰位于点A(1, 0)处。甲舰向乙舰发射导弹，导弹始终对准乙舰。设乙舰以最大的速度 v_0 (v_0 是常数) 沿平行于Y轴的直线航行，导弹的速度 $5v_0$ ，求导弹运行的曲线，以及乙舰行驶多远时，导弹将它打中？



模型

$$\begin{cases} (1-x)y'' = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{5} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

解法一（解析法）

$$y = -\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$$

乙舰航行到点（1, 0.2083）时被导弹击中。

解法二(数值解)

令 $y_1=y, y_2=y_1'$ ，将二阶微分方程化为一阶微分方程组。

$$(1-x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y_1^2}/(1-x) \end{cases}$$

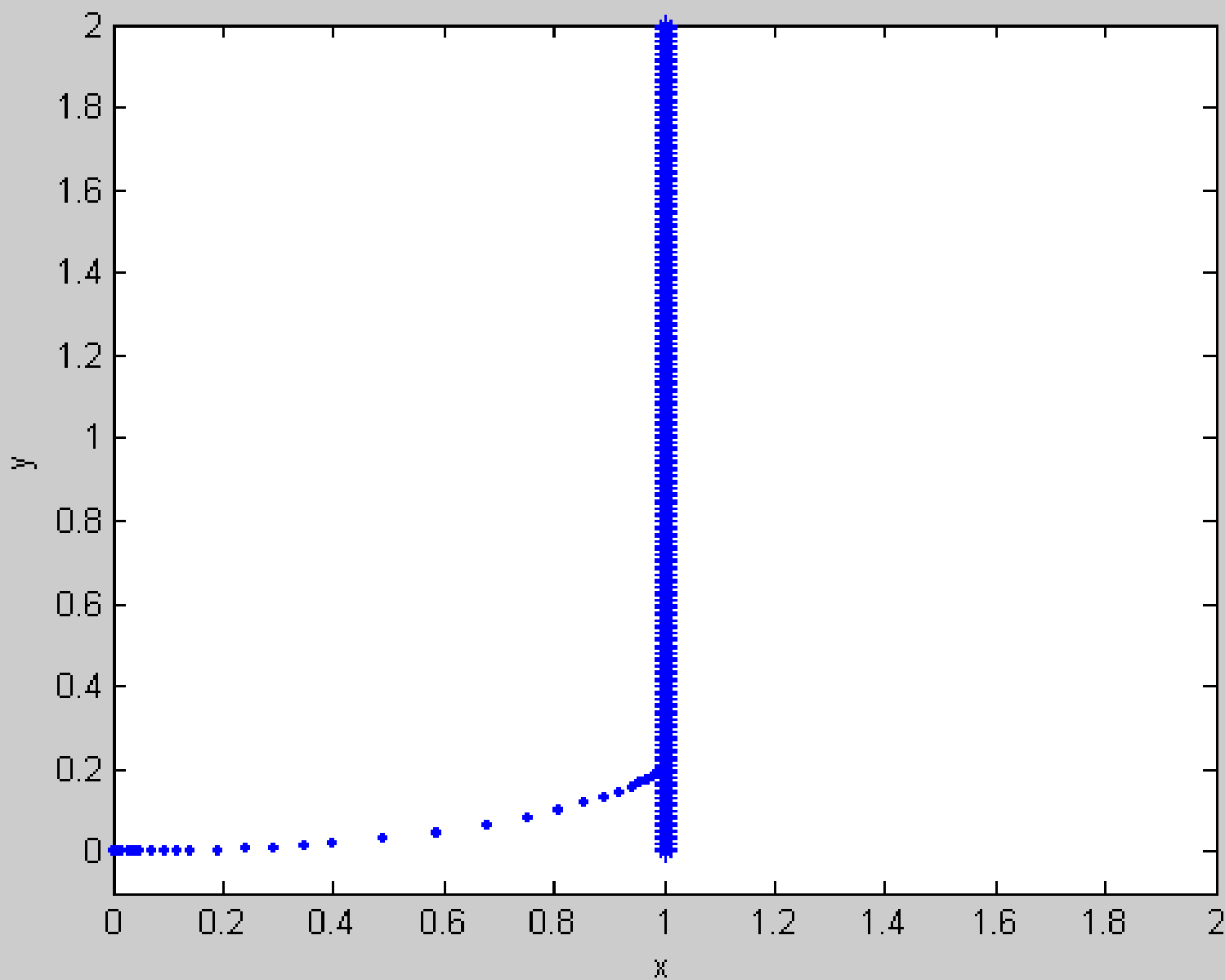
1. 建立m-文件eq1.m

```
function dy=eq1(x,y)  
dy=zeros(2,1);  
dy(1)=y(2);  
dy(2)=1/5*sqrt(1+y(1)^2)/(1-x);
```

2. 取 $x_0=0$, $x_f=0.9999$, 建立主程序chase1.m如下:

```
x0=0;xf=0.9999;  
[x,y]=ode15s('eq1',[x0 xf],[0 0]);  
plot(x,y(:,1),'b.')  
hold on  
y=0:0.01:2;  
plot(1,y,'b*')
```

结论：导弹大致在 (1, 0.2) 处击中乙舰



解法三(建立参数方程求数值解)

设时刻 t 乙舰的坐标为 $(X(t), Y(t))$, 导弹的坐标为 $(x(t), y(t))$.

1. 设导弹速度恒为 w , 则 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = w^2$ (1)

2. 由于弹头始终对准乙舰, 故导弹的速度平行于乙舰与导弹头位置的差向量,

即:
$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X - x \\ Y - y \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0$$
 (2)

消去 λ 得:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}} (X-x) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}} (Y-y) \end{cases} \quad (3)$$

3. 因乙舰以速度 v_0 沿直线 $x=1$ 运动, 设 $v_0=1$, 则 $w=5$, $X=1$, $Y=t$.

因此导弹运动轨迹的参数方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{5}{\sqrt{(1-x)^2 + (t-y)^2}} (1-x) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{5}{\sqrt{(1-x)^2 + (t-y)^2}} (t-y) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. 解导弹运动轨迹的参数方程

建立m-文件eq2.m如下：

```
function dy=eq2(t,y)  
dy=zeros(2,1);  
dy(1)=5*(1-y(1))/sqrt((1-y(1))^2+(t-y(2))^2);  
dy(2)=5*(t-y(2))/sqrt((1-y(1))^2+(t-y(2))^2);
```

取 $t_0=0$ ， $t_f=2$ ，建立主程序chase2.m如下：

```
[t,y]=ode45('eq2',[0 2],[0 0]);  
Y=0:0.01:2;  
plot(1,Y,'-'); hold on  
plot(y(:,1),y(:,2),'*')
```

5. 结果见图1

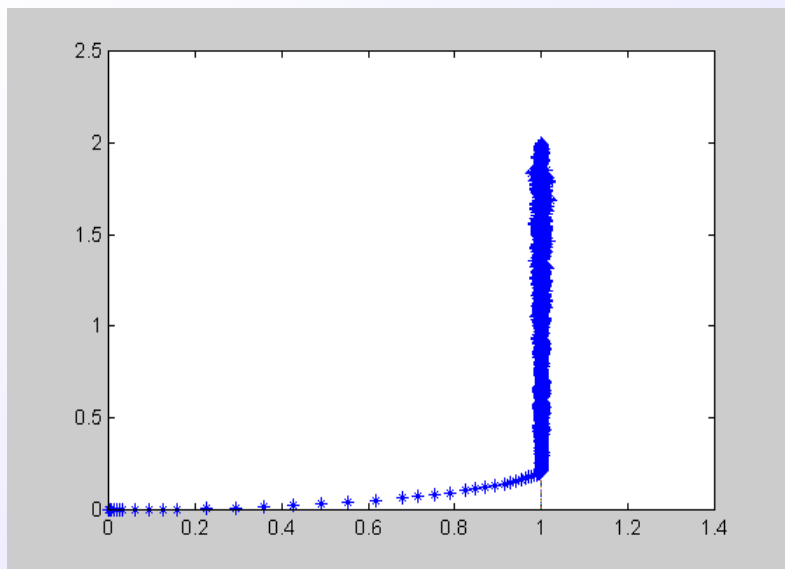


图1

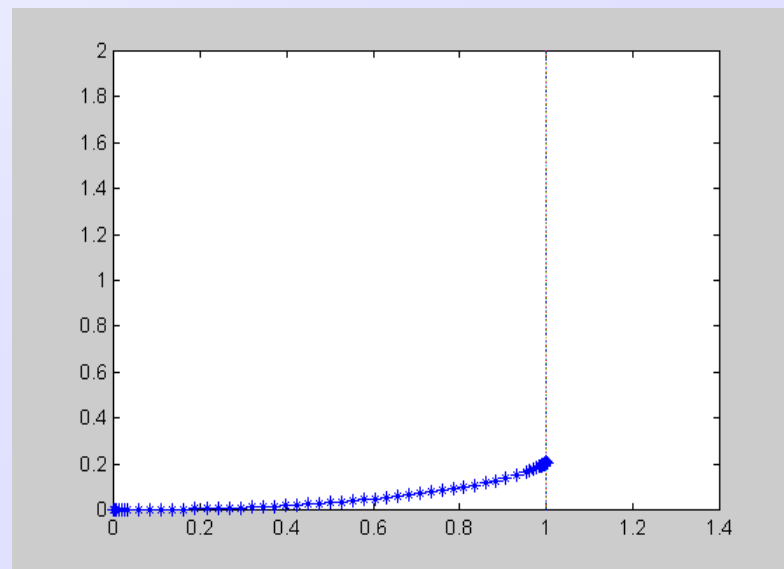


图2

导弹大致在(1,0.2)处击中乙舰，与前面的结论一致.

在chase2.m中，按二分法逐步修改 t_f ，即分别取 $t_f=1, 0.5, 0.25, \dots$,直到 $t_f=0.21$ 时，得图2.

结论：时刻 $t=0.21$ 时，导弹在(1, 0.21)处击中乙舰。