线性规划模型

北京邮电大学 理学院

- 1939年苏联数学家康托洛维奇发表《生产组织与计划中的数学问题》
- 1947年美国数学家乔治.丹契克、冯.诺伊曼提出线性规划的一般模型及理论。
- 线性规划是运筹学的重要分支，也是运筹学的基本部分。线性规划的数学理论是成熟的、丰富的，其解法统一而简单，求出的解是精确的全局最优解。

§1 线性规划模型基础

建立线性规划模型有三个步骤：

1．**找出待定的未知变量（决策变量），并用代数符号表示它们。**

2．**找出问题中所有的限制或约束，写出未知变量的线性方程或线性不等式。**

3．**找到模型的目标或者判据，写成决策变量的线性函数，以便求出其最大值或者最小值。**

- 线性规划问题的一些应用
  - 生产计划问题
  - 运输问题
  - 合理下料问题
  - 投资证券组合问题
  - 分派问题
  - 生产工艺优化问题

如何合理使用有限的人力，物力和资金，使得收到最好

将物资从供应点运送到需求点，如何调配运输，使得运

按照进一步的工艺要求，确定下料方案，使用料最省，

如何确定投资资金的分配，

如何确定不同任务的人员或资源分派，使得总收益最大，或总成本最小。

如何确定工艺的最优流程或设计模式，使得损失最小，或净利润最大。

❖ 线性规划模型的一般形式

目标函数和所有的约束条件都是设计变量的线性函数。

目标函数

$$\min(\,or\ \max)\ z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

约束条件

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (or \ge\ =) b_i ,\ i = 1,2,\ldots,m.$$

决策变量： $x_1, x_2, \ldots, x_n$

a_{ij}, b_j, c_i (i =1,2⋯m; j =1,2…n)**均为常数 .**

§2 线性规划的几何特征

- 设 $\hat{X}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)^T$ 满足线性规划问题全部约束条件，则称之为此线性规划问题的一个**可行解**；
- 称由所有可行解组成的集合为该线性规划问题的**可行域**，用D表示；
- 使目标函数值达到最优的可行解

$$X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$$

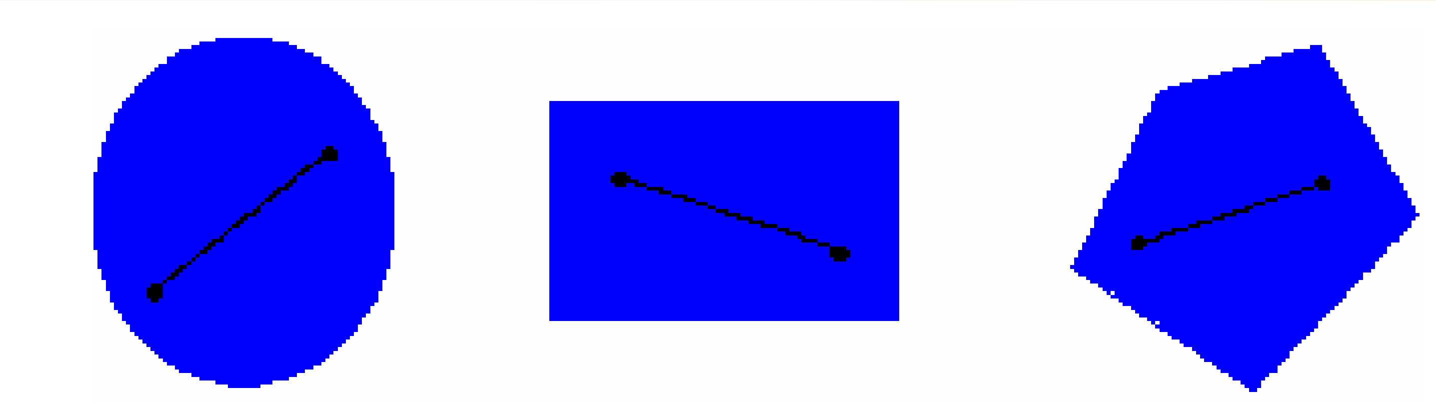
称为此线性规划问题的一个**最优解**；

称最优解 X^* 的目标函数值

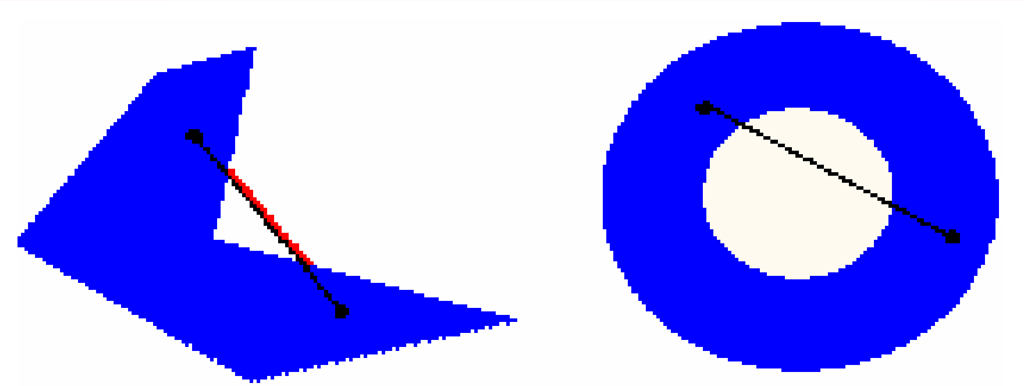
$$f^*=C^TX^*$$

为该线性规划问题的**最优值**。

- 可行域为凸集：



几个典型的凸集（区域）



几个典型的非凸集（区域）

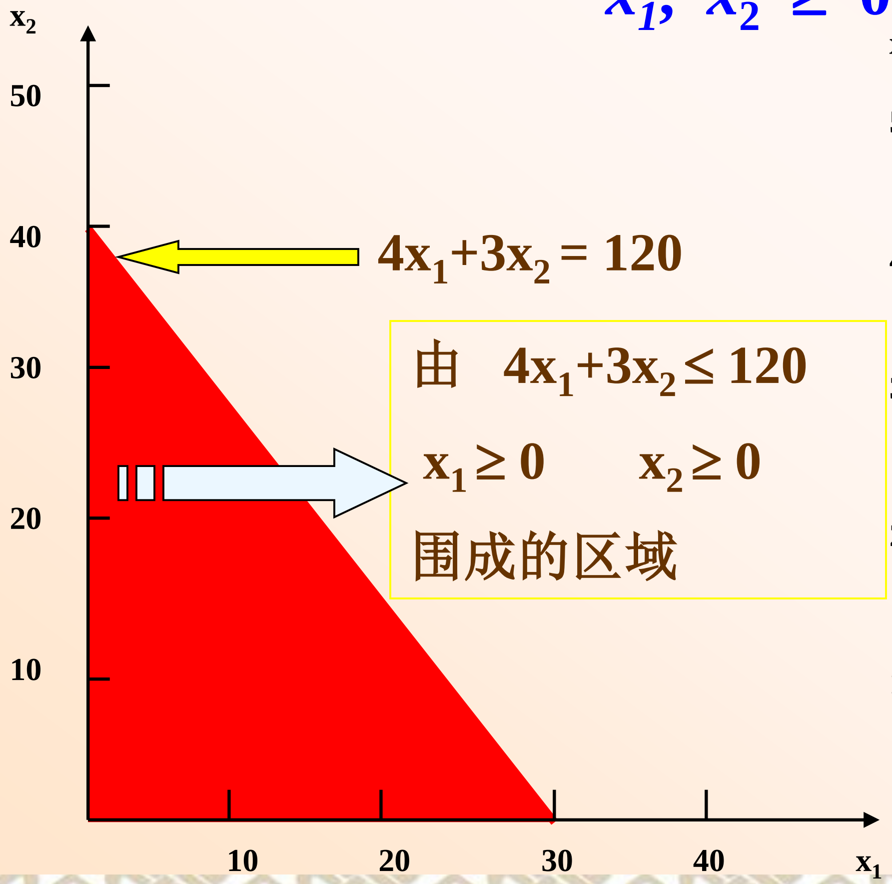
图解法：（解两个变量的线性规划问题）

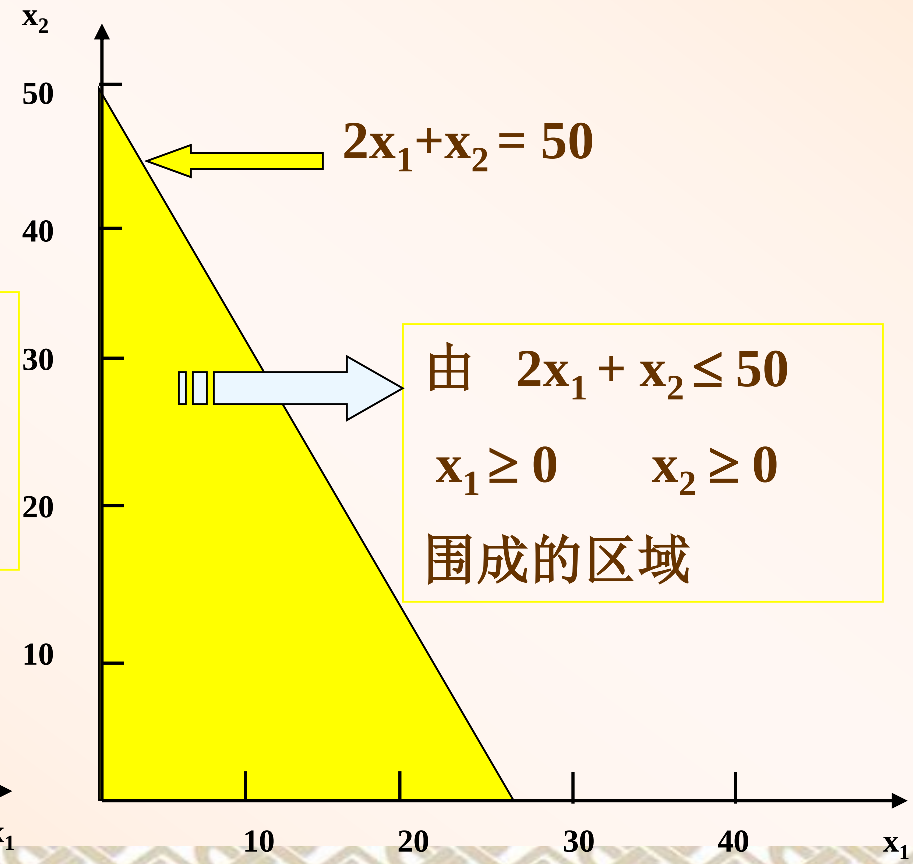
- **在平面上画出可行域（凸多边形），**
- **计算目标函数在各极点(多边形顶点)处的值。**
- **比较后，取最值点为最优解。**

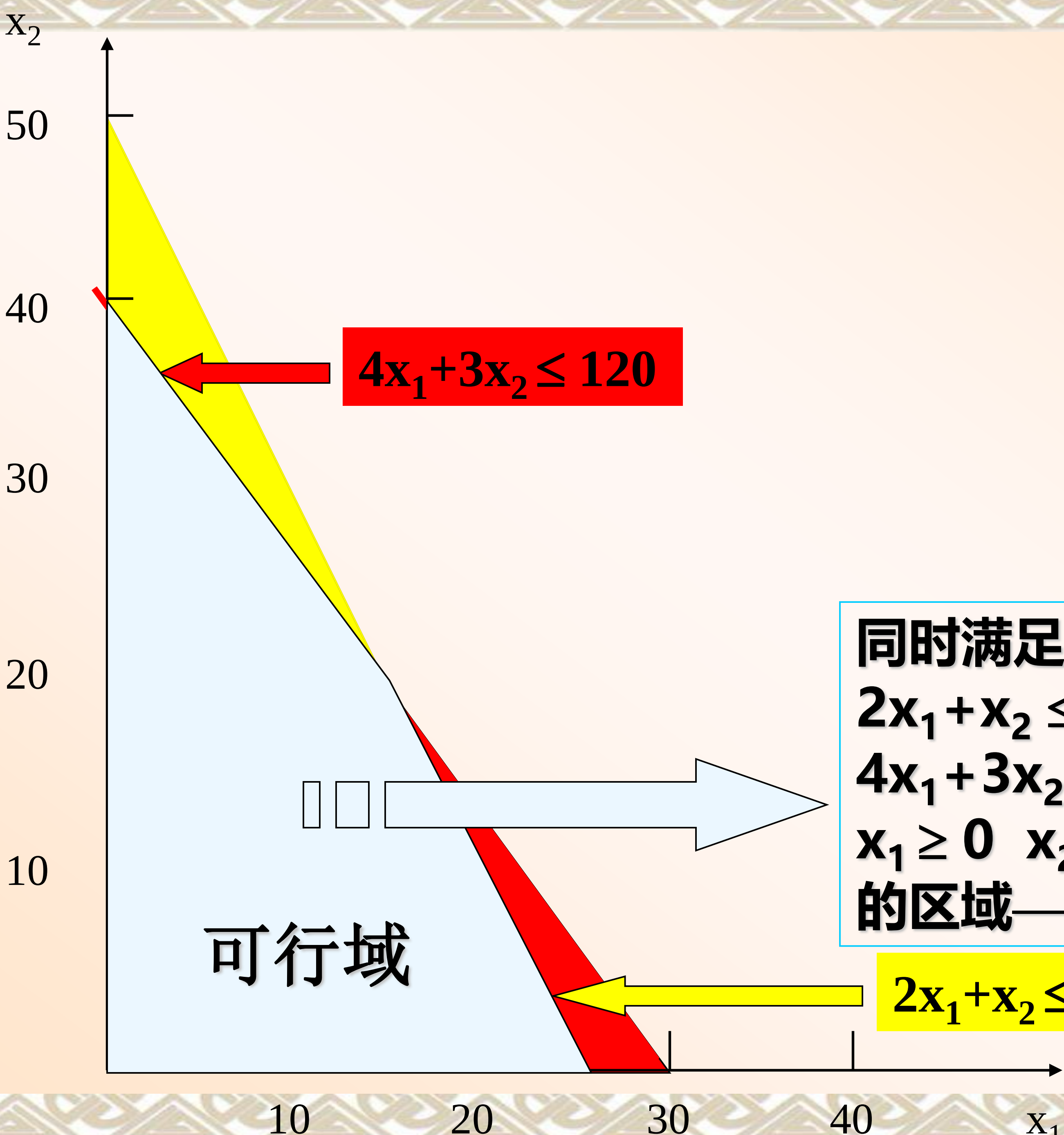
例 用图解法求解下线性规划问题

$$\max\ Z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$







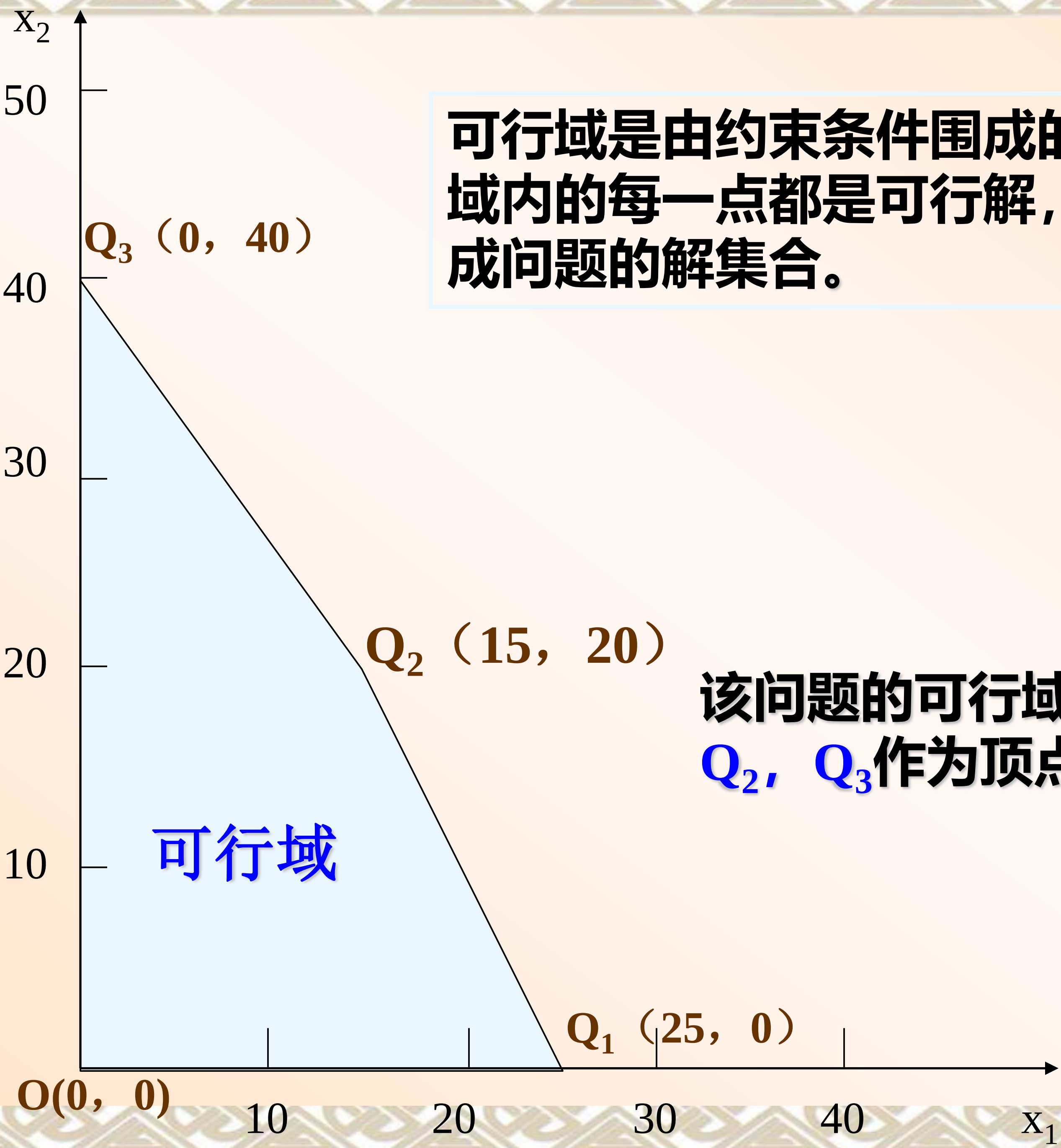
同时满足:

$2x_1+x_2 \le 50$

$4x_1+3x_2 \le 120$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

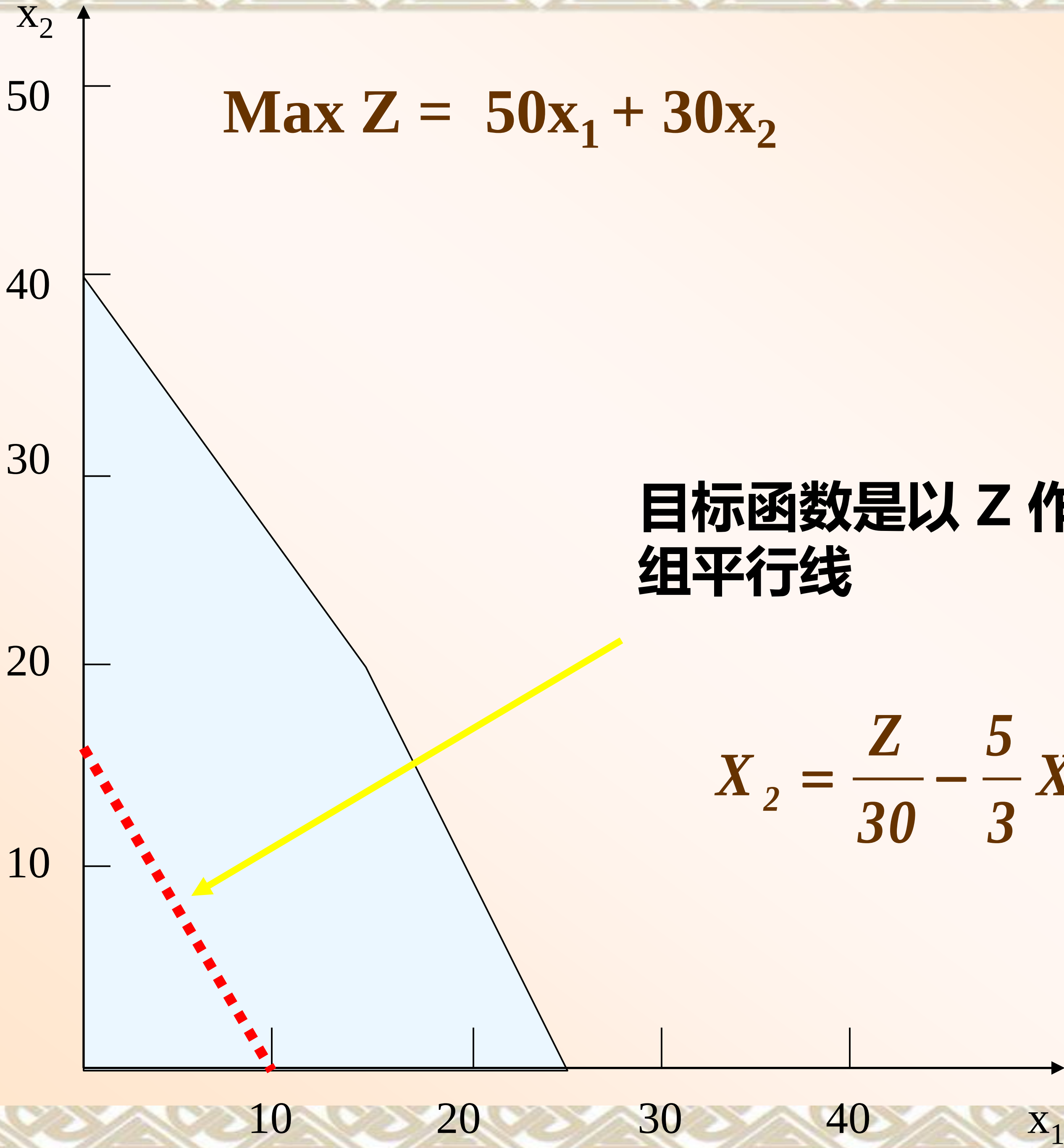
的区域——可行域



可行域是由约束条件围成的区域，该区域内的每一点都是可行解，它的全体组成问题的解集合。

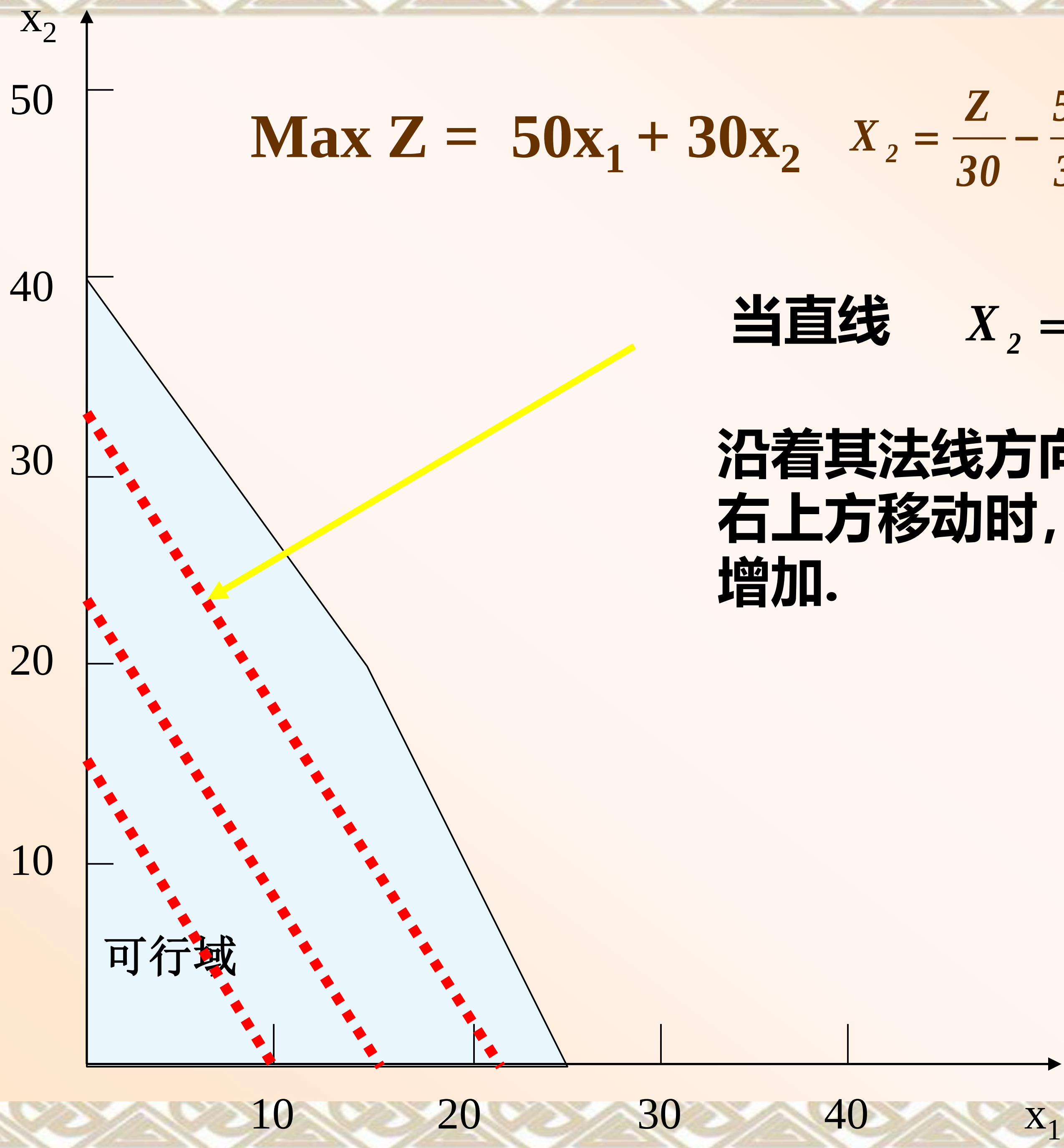
该问题的可行域是由O，Q_1，Q_2，Q_3作为顶点的凸多边形

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 30x_2$$



目标函数是以 Z 作为参数的一组平行线

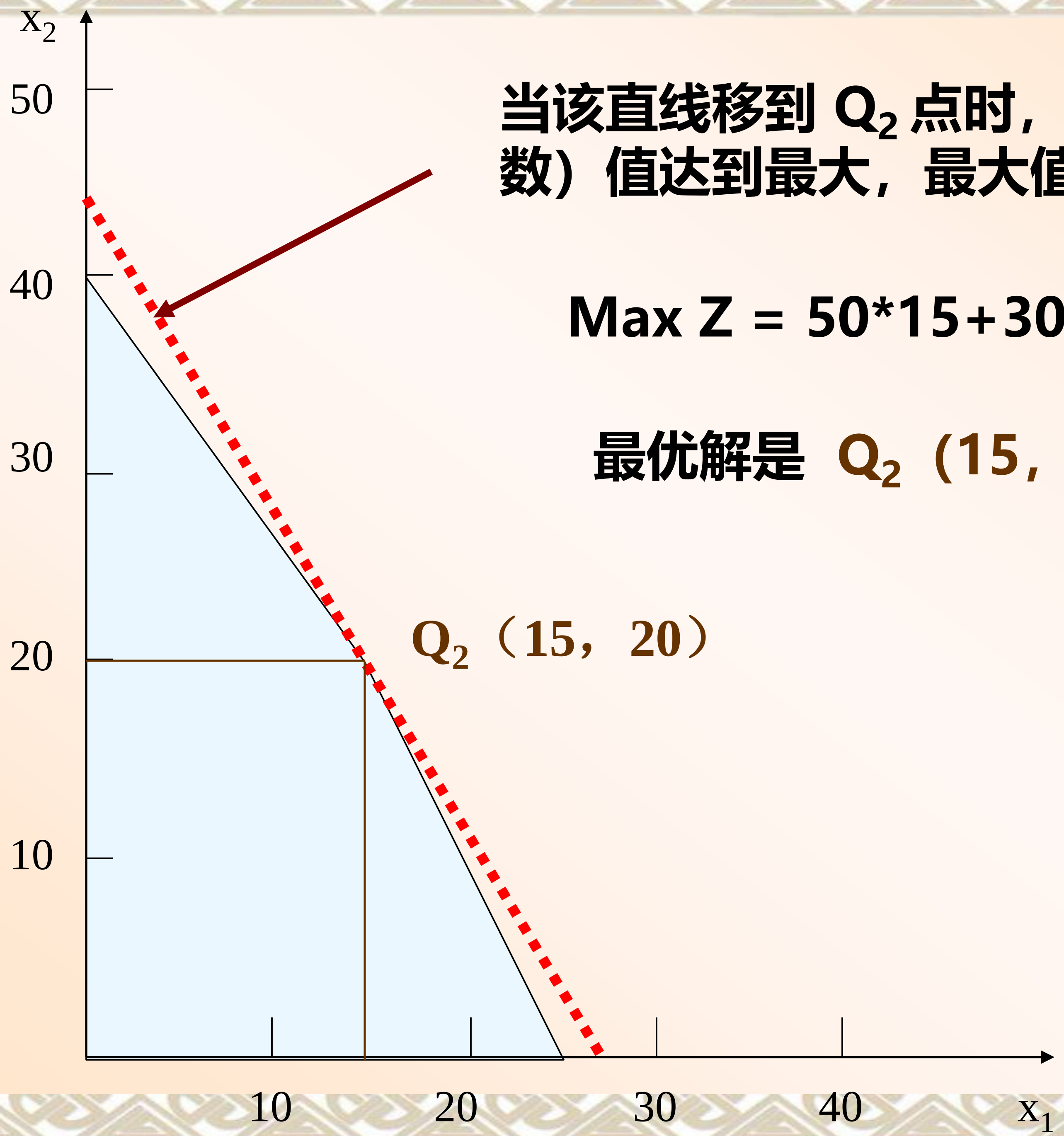
$$X_2 = \frac{Z}{30} - \frac{5}{3} X_1$$



Max Z = $50x_1 + 30x_2$　$X_2 = \frac{Z}{30} - \frac{5}{3}X_1$

当直线　$X_2 = \frac{Z}{30} - \frac{5}{3}X_1$

沿着其法线方向(50,30)向右上方移动时， Z值不断增加.



当该直线移到 Q_2 点时，Z（目标函数）值达到最大，最大值是：

Max Z = 50*15+30*20=1350

最优解是 Q_2（15，20）

- **命题1** 若线性规划有最优解，则必在可行域**边界**达到；若可行域为有界闭集，则最优解必在的某一**顶点**达到。
- **命题2** 线性规划问题的目标函数关于不同的目标值是一族平行直线,目标值的大小描述了直线离原点的远近。
- **命题3** 线性规划问题的最优解一定在可行解集的某个**极点**上达到**(极点：不能表示为两个可行点的凸组合)**.

用Matlab求解线性规划

- 一般线性规划的数学模型

$$\min f = c^T x$$
$$\text{s.t.}\quad Ax \le b$$
$$Aeq\, x = beq$$
$$LB \le x \le UB$$

- Matlab求解程序

[x,f]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB,UB)

❖ 具体命令

X = linprog(c,A,b)

$$\min\ z = c^T X \quad s.t.\ AX \le b$$

X = linprog(c,A,b,Aeq,beq)

$$\min\ z = c^T X \quad s.t.\ AX \le b,\ Aeq \cdot X = beq$$

X = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

$$\min\ z = c^T X \quad s.t.\ AX \le b,\ Aeq \cdot X = beq,\ lb \le X \le ub$$

X = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,X_0)

X_0为初始值点

[X, fval] = linprog(…)

返回最优解X以及X处的目标函数值fval

例 min $z = 6x_1+3x_2+4x_3$

s.t. $x_1+x_2+x_3=120$

$x_1 \geq 30$

$0 \leq x_2 \leq 50$

$x_3 \geq 20$

解：改写为 $\min\ z = C\cdot[x_1\ x_2\ x_3]^T$

$s.t.\ A\cdot[x_1\ x_2\ x_3]^T \leq b$

$Aeq\cdot[x_1\ x_2\ x_3]^T = beq$

$LB \leq [x_1\ x_2\ x_3]^T$

$C=[6\ 3\ 4]$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad b = 50$

$LB= [30\ \ 0\ \ 20]^T$ $\qquad Aeq =[1\ 1\ 1]$ $\qquad beq = 120$

用命令X = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lB,UB)编写M文件xxgh1.m：

- C= [6 3 4];
- A= [0 1 0];
- b= [50];
- Aeq= [1 1 1];
- beq= [120];
- LB= [30; 0; 20];
- UB= [];
- [x,fval]= linprog(C,A,b,Aeq,beq,LB,UB);

运行程序xxgh1.m

结果为

x = 30.0000 40.0000 50.0000

fval = 490.0000

§3 建模实例1：奶制品的加工

企业生产计划问题

空间层次

- 工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以**最大利润为目标**制订产品生产计划.
- 车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以**最小成本为目标**制订生产批量计划。

时间层次

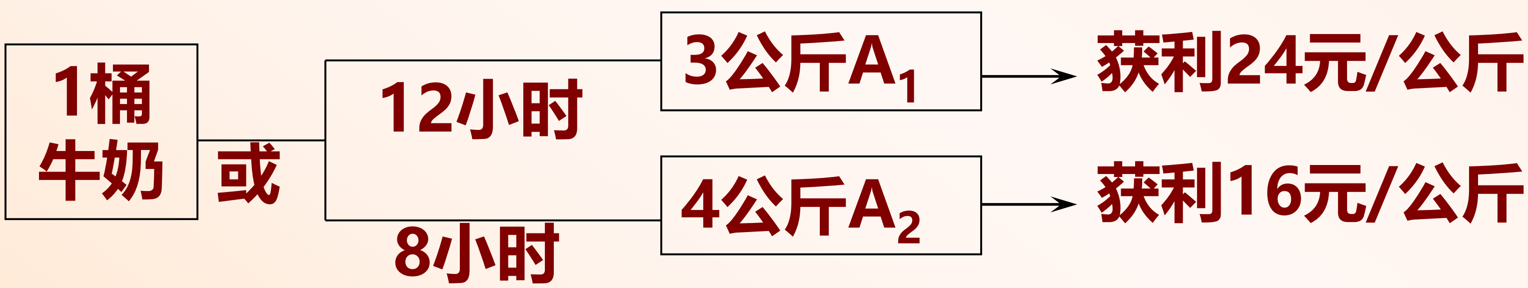
若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订**单阶段生产计划**，否则应制订多阶段生产计划。

单阶段生产计划

⇧

本节课题

❖ **问题** 一奶制品加工厂用牛奶生产A_1, A_2两种奶制品，1桶牛奶可以在设备甲上用12小时加工成 3 公斤A_1 ，或在设备乙上用8小时加工成4公斤A_2.根据市场需求，生产的A_1, A_2全部能够售出，且每公斤 A_1 获利24元，每公斤A_2获利16元. 现在加工厂每天能得到50桶牛奶的供应，每天正式工人总的劳动时间为480小时，并且设备甲每天最多能够加工100公斤的A_1, 设备乙的加工能力没有限制。请为该厂制定一个生产计划，使每天获利最大。



每天： 50桶牛奶 时间480小时 至多加工100公斤A_1

制订生产计划，使每天获利最大

问题分析 求什么？ 优化什么？ 限制条件有哪些？

决策变量 x_1桶牛奶生产A_1 x_2桶牛奶生产A_2

目标函数 A_1:获利 $24\times 3x_1$ A_2:获利 $16\times 4x_2$

每天获利 $$Max \quad z = 72x_1 + 64x_2$$

约束条件

原料供应	$x_1 + x_2 \le 50$	线性规划模型(LP)
劳动时间	$12x_1 + 8x_2 \le 480$	
加工能力	$3x_1 \le 100$	
非负约束	$x_1, x_2 \ge 0$	

线性规划模型

$$
\begin{aligned}
Max \quad & z = 72x_1 + 64x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 50 \\
& 12x_1 + 8x_2 \le 480 \\
& 3x_1 \le 100 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

模型分析与假设

线性规划模型

比例性

x_i对目标函数的“贡献”与x_i取值成正比

A_1,A_2每公斤的获利是与各自产量无关的常数

x_i对约束条件的“贡献”与x_i取值成正比

每桶牛奶加工出A_1,A_2的数量和时间是与各自产量无关的常数

可加性

x_i对目标函数的“贡献”与x_j取值无关

A_1,A_2每公斤的获利是与相互产量无关的常数

x_i对约束条件的“贡献”与x_j取值无关

每桶牛奶加工出A_1,A_2的数量和时间是与相互产量无关的常数

连续性

x_i取值连续

加工A_1,A_2的牛奶桶数是实数

模型求解

图解法

约束条件

$$x_1 + x_2 \le 50 \quad \Rightarrow \quad l_1 : x_1 + x_2 = 50$$

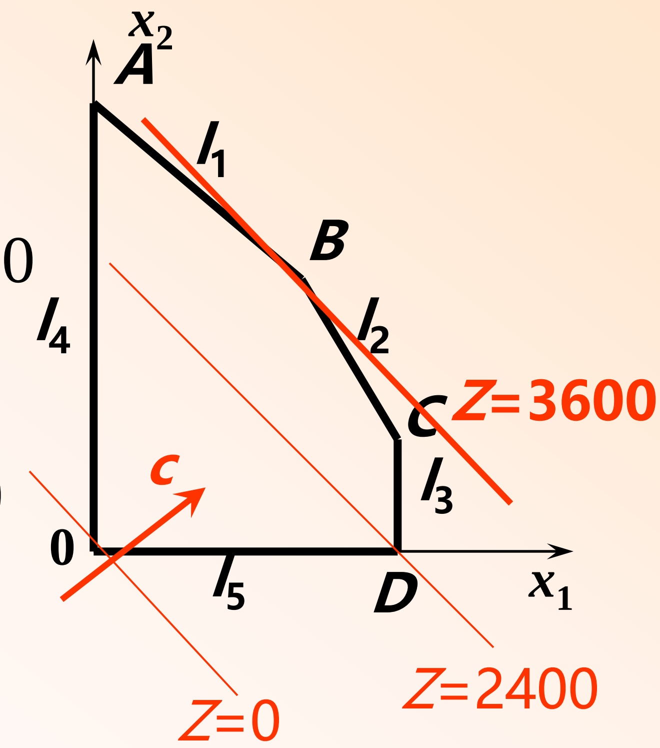
$$12x_1 + 8x_2 \le 480 \quad \Rightarrow \quad l_2 : 12x_1 + 8x_2 = 480$$

$$3x_1 \le 100 \quad \Rightarrow \quad l_3 : 3x_1 = 100$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l_4 : x_1 = 0,\ l_5 : x_2 = 0$$

目标函数

$$Max \quad z = 72x_1 + 64x_2$$



***z*=*c* (常数) ~等值线**

在*B*(20,30)点得到最优解

目标函数和约束条件是线性函数

可行域为直线段围成的凸多边形

目标函数的等值线为直线

最优解一定在凸多边形的某个顶点取得。

软件实现

$$\text{Max } z = 72x_1+64x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2\le 50$$
$$12x_1+8x_2\le 480$$
$$3x_1\le 100$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

$$\text{Min } z = -72x_1-64x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2\le 50$$
$$12x_1+8x_2\le 480$$
$$3x_1\le 100$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

求解得： $x =$ 20.0000 30.0000

$fval =$ -3.3600e+003

20桶牛奶生产A_1, 30桶生产A_2，利润3360元。

$$\text{Min } z = -72x_1 - 64x_2$$

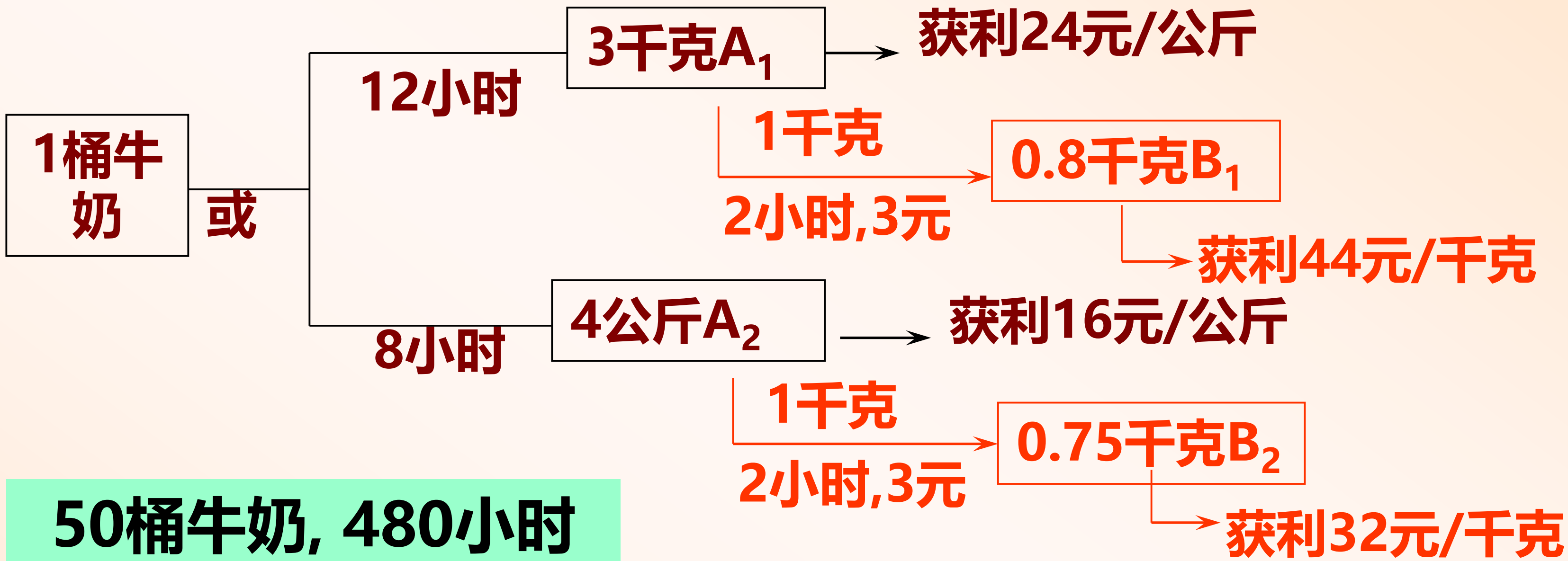
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 50 \\ 12x_1 + 8x_2 &\le 480 \\ 3x_1 &\le 100 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

xxgh2.m

```
c = [-72 -64];
A = [1 1; 12 8; 3 0];
b = [50; 480;100];
Aeq = [];
beq = [];
vlb =[0 0];
ulb=[];
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,ulb);
```

§4 建模实例2：奶制品的生产销售计划

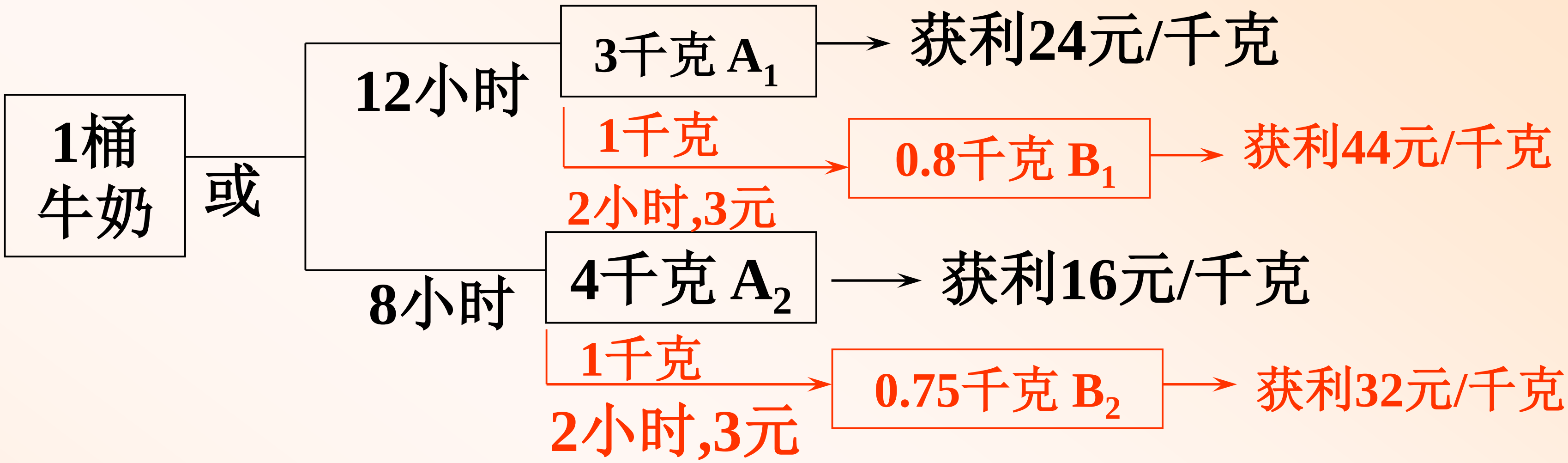
问题 例1中给出的A_1, A_2两种奶制品的生产条件、利润，以及工厂的“资源”限制都不变。为增加工厂的获利，开发了奶产品的深加工技术：用2小时和3元加工费，可将1公斤A_1加工成0.8公斤高级奶制品B_1，也可将1公斤A_2加工成0.75公斤高级奶制品B_2，每公斤B_1能获利44元，每公斤B_2能获利32元。请为该厂制订一个生产销售计划，使每天的净利润最大。



50桶牛奶, 480小时

至多100公斤A_1

制订生产计划，使每天净利润最大



决策变量

售出 x_1 **千克** A$_1$, x_2 **千克** A$_2$, x_3 **千克** B$_1$, x_4 **千克** B$_2$

x_5 **千克** A$_1$**加工**B$_1$, x_6 **千克** A$_2$**加工**B$_2$

目标函数

$$Max \quad z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

约束条件

原料供应

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

劳动时间

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

加工能力

$$x_1 + x_5 \le 100$$

附加约束

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

非负约束

$$x_1, \cdots x_6 \ge 0$$

线性规划模型

$$Max \quad z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

s.t

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6)$$

$$+ 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

$$x_1 + x_5 \le 100$$

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

$$x_1, \cdots x_6 \ge 0$$

模型求解

- 将线性规划模型标准化
- 用软件求解
- 求解结果

$$x = 0 \quad 168 \quad 19.2 \quad 0 \quad 24 \quad 0$$

$$fval = -3460.8000$$

结果解释

每天销售168 千克A_2和19.2千克B_1，利润3460.8（元）

8桶牛奶加工成A_1，42桶牛奶加工成A_2，将得到的24千克A_1全部加工成B_1

§5 建模实例3：自来水的输送

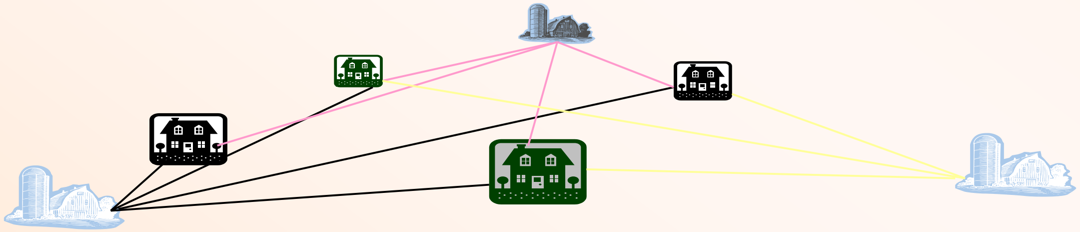
❖ 问题背景

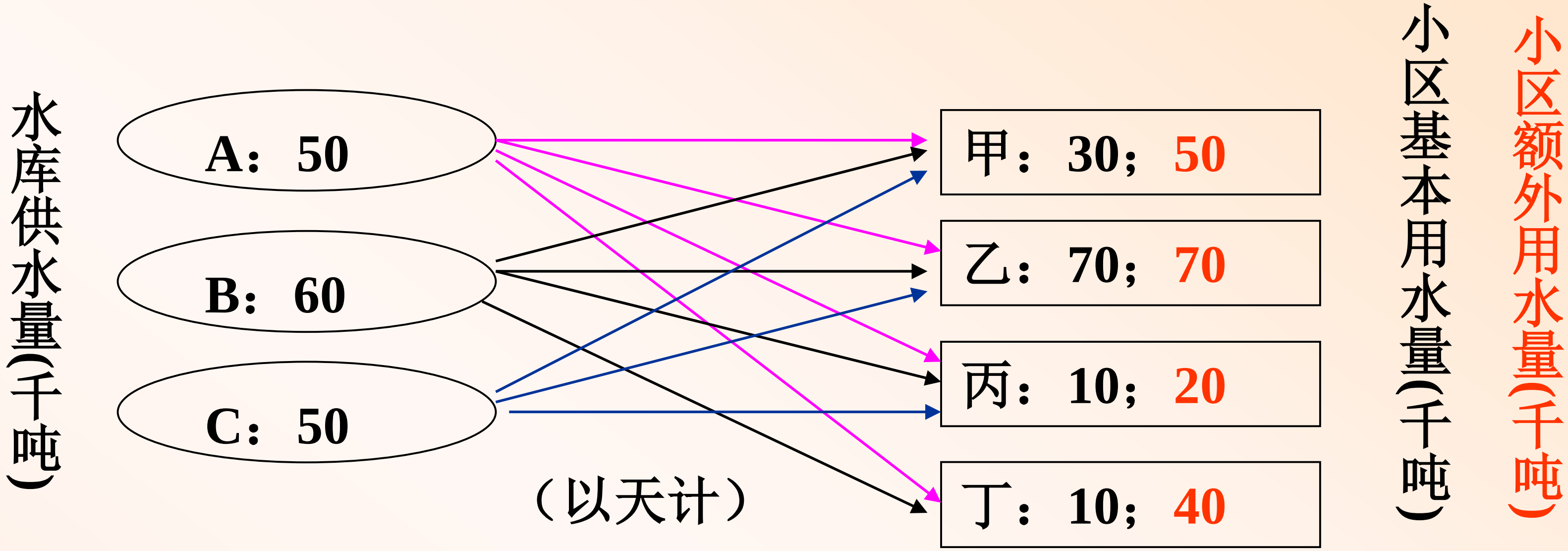
煤炭、钢铁、水电等生活、生产物资从若干供应点运送到一些需求点。希望节约成本，创造更大的利润。

怎样安排运送方案才能使得运费最小，或者利润最大?

问题

现有甲、乙、丙，丁四个居民区，自来水由A、B、C三个水库供应。四个区每天必须得到的基本生活水量分别为30，70，10，10千吨，但由于水源紧张，三个水库每天最多只能分别供应50，60，50千吨自来水。由于地理环境的不同，各水库向不同生活区送水所需的**引水管理费**不同（见下页表格），而**其他管理费**都为450元/千吨。根据公司规定，各区用户按照同一标准水费为900元/千吨。此外每个区都向公司申请了额外用水量，分别为50，70，20，40千吨。
请为自来水公司设计供水量分配方案，使其获利最多。





收费：900元/千吨

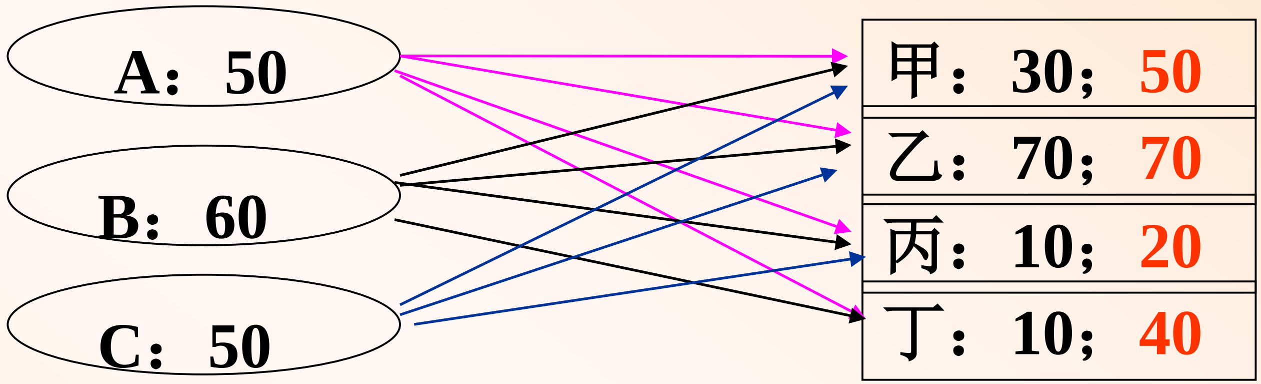
引水管理费

元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

其他费用:450元/千吨

问题　为自来水公司设计供水分配方案，使其获利最多。

建模分析



总供水量：160 < 总需求量：120+180=300

收入

水费：**900元/千吨**　　总收入**900×160=144,000(元)**

支出

引水管理费

其他费用:**450元/千吨**　其他支出450×160=72,000(元)

确定送水方案使利润最大 ⇔ 使引水管理费最小

模型建立

决策变量

确定3个水库向4个小区的供水量

水库i 向j 区的日供水量为 x_{ij}（x_{34}=0）

目标函数

$$Min \quad Z = 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14}$$
$$+140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}$$

约束条件

供应限制

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

需求限制

$$30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80$$
$$70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140$$
$$10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30$$
$$10 \le x_{14} + x_{24} \le 50$$

线性规划模型(LP)

模型

$$Min \quad Z = 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14}$$
$$+140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}$$

S. t.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\ 30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80 \\ 70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140 \\ 10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30 \\ 10 \le x_{14} + x_{24} \le 50 \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \cdots 3, j = 1, \cdots 4. \end{cases}$$

软件求解

模型求解

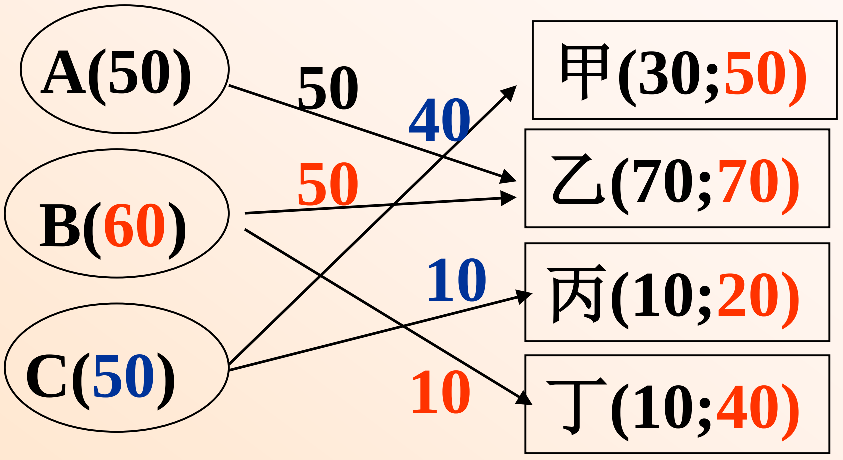
```
clear
C= [160 130 220 170 140 130 190 150 190 200 230];
A= [1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 ;
    0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 ;
    0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 ;
    0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;
    -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0;
    0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 ;
    0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1;
    0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0];
b= [80;140;30;50;-30;-70;-10;-10];
Aeq= [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
beq= [50;60;50];
LB= zeros(11,1);
UB= [];
[x,fval]= linprog(C,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
```

模型求解

用软件求解得

x = [0 50 0 0 0 50 0 10 40 0 10]

fval = 24400.00



利润=总收入−其它费用−引水管理费
=144000-72000-24400
= 47600（元）

问题讨论

每个水库最大供水量都提高一倍，各小区的用水需求量不变。试建立模型确定此时公司的供水方案。

总供水量(320) > 总需求量(300)

确定送水方案使利润最大

利润 = 收入(900) –其它费用(450) –引水管理费

利润(元/千吨)	甲	乙	丙	丁
A	290	320	230	280
B	310	320	260	300
C	260	250	220	/

决策变量

确定3个水库向4个小区的供水量

水库i 向j 区的日供水量为 x_{ij}（x_{34}=0）

目标函数

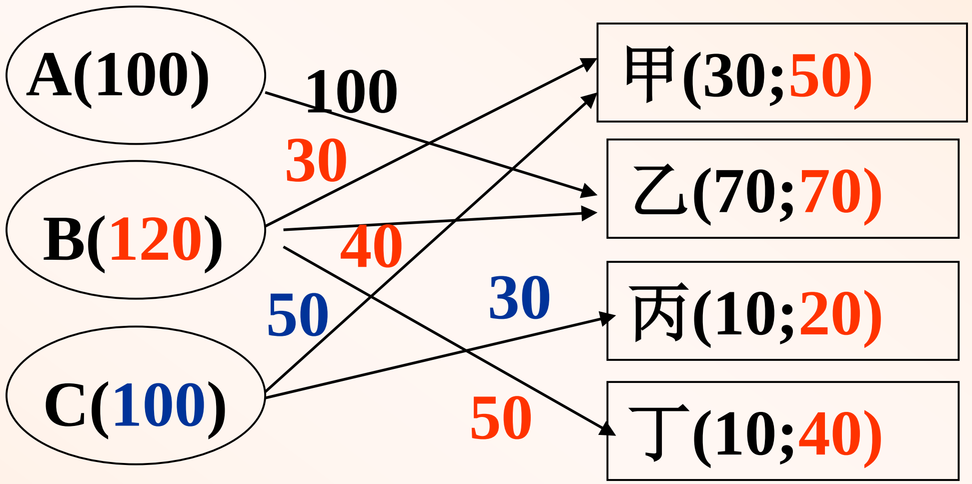
$$Max \quad Z = 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14}$$
$$+ 310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}$$

供应限制

$$A: \ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \quad \Rightarrow \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 100$$

B, C 类似处理　　　　需求约束可以不变

分配结果



总利润 88700（元）

这类问题一般称为“运输问题”

(Transportation Problem)

§6 建模实例4：货机装运问题

问题背景

空地一体化物流公司中，航空货运业务极其重要。现在，我国的航空货运正处于飞速发展的阶段，例如，在建设亚太国际航空枢纽港的进程中，上海航空物流吞吐量每年以20%的速度增长。航空货运有着高效便捷的特点，为航空货物提供全方位配送服务是现代物流公司打造安全、畅通、便捷的现代化物流系统中非常重要的组成部分。

问题

某驾货机有三个货舱：前仓、中仓、后仓。三个货舱所能装载的货物的**最大重量和体积**都有限制，而且为了保持飞机的平衡，三个货舱中的实际装载货物重量必须与其最大容许重量**成比例**。现有四类货物需要装运，试建立模型安排装运，使得该货机本次飞行**获利最大**。

三个货舱最大载重(吨)，最大容积(米^3)

前仓：	中仓：	后仓：
10； 6800	16； 8700	8； 5300

飞机平衡

三个货舱中实际载重必须与其最大载重成比例

装运货物信息

	重量（吨）	空间(米^3/吨）	利润（元/吨）
货物1	18	480	3100
货物2	15	650	3800
货物3	23	580	3500
货物4	12	390	2850

如何装运，使本次飞行获利最大？

建模假设

- 每种货物可以分割到任意小；
- 每种货物可以在一个或多个货舱中任意分布；
- 多种货物可以混装，并保证不留空隙；

模型建立

决策变量

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量(吨）

i=1,2,3,4, j=1,2,3 (分别代表前、中、后仓)

目标函数(利润)

$$Max \quad Z = 3100(x_{11}+x_{12}+x_{13})+3800(x_{21}+x_{22}+x_{23})$$
$$+3500(x_{31}+x_{32}+x_{33})+2850(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

10; 6800	16; 8700	8; 5300

约束条件

货舱重量

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\le 10$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}\le 16$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\le 8$$

货物供应

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 18$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 15$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 23$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}\le 12$$

货舱容积

$$480x_{11}+650x_{21}+580x_{31}+390x_{41}\le 6800$$
$$480x_{12}+650x_{22}+580x_{32}+390x_{42}\le 8700$$
$$480x_{13}+650x_{23}+580x_{33}+390x_{43}\le 5300$$

平衡要求

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{10}=\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{16}$$
$$=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}}{8}$$

模型求解

x =[0 0 0 10 0 5 0 13 3 0 3 0]

fval = -121516

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量(吨)
i=1,2,3,4, j=1,2,3 (分别代表前、中、后仓)

货物2：前仓10, 后仓5；

货物3：中仓13, 后仓3；

货物4：中仓3。

最大利润约121516元

货物~供应点
货舱~需求点

平衡要求 ⇨ 运输问题的扩展