§4.6 上下文无关语言的性质

- 2型语言的泵浦引理
- 2型语言的封闭性
- 2型语言的判定问题
- 二义性问题

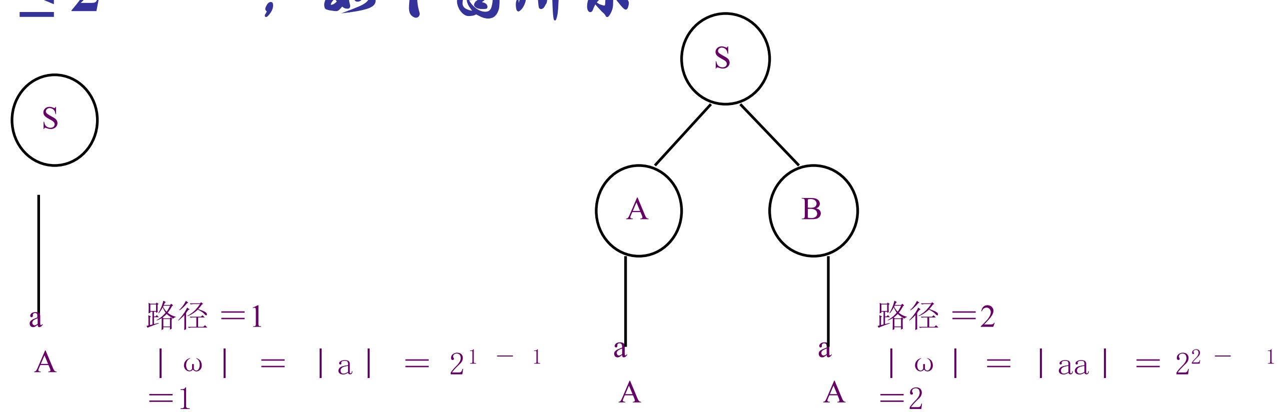
1. 2型语言的泵浦引理

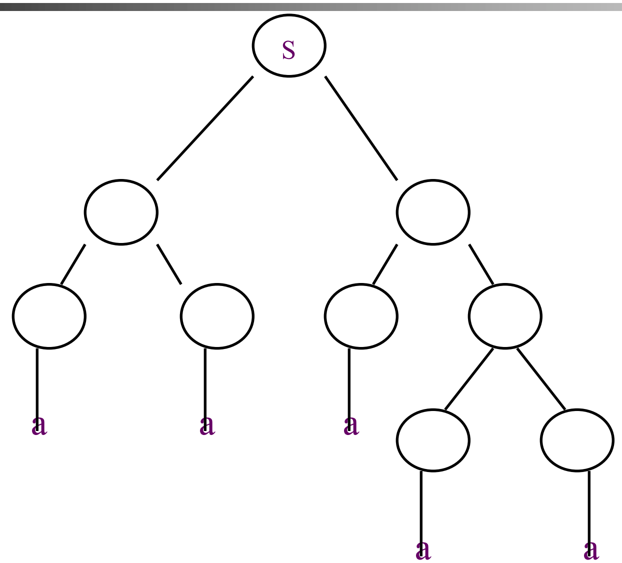
- 设L是上下文无关语言，存在常数p，如果$\omega \in L$，且$|\omega| \geq p$，则ω可以写为$\omega = \omega_1\omega_2\omega_0\omega_3\omega_4$，使$\omega_2\omega_3 \neq \varepsilon$，$|\omega_2\omega_0\omega_3| \leq p$，对于$i \geq 0$有$\omega_1\omega_2^i\omega_0\omega_3^i\omega_4 \in L$。（不含$L=\{\varepsilon\}$的情况）
- 物理意义:
- 线性语言的泵浦引理是说，在正规集合中，每个足够长的字符串都包含一个短的字串，随便将这个子串在原处重复插入多少次，所得的新字串还是在原正规集中。
- 2型语言的泵浦引理是说，有两个靠得很近的子串，它们可以重复任意多次（但二者重复的次数相同），所得的新串依然属于该2型语言。

证明：

✧设G是Chomsky文法（形如A→BC,A→a）,产生语言L－{ε},若ω∈L且ω有一定的长度，则边缘为ω的推导树有一定长度的路径。

✧ 对于Chomsky范式，设路径长度为n，则有边缘长度 $|\omega| \le 2^{n-1}$ ，如下图所示





路径＝4

| ω |≤2^{4-1}＝8

（第i层最多有2^i个非终结符。第i+1层若全为终结符，则与第i层非终结符个数相等。）

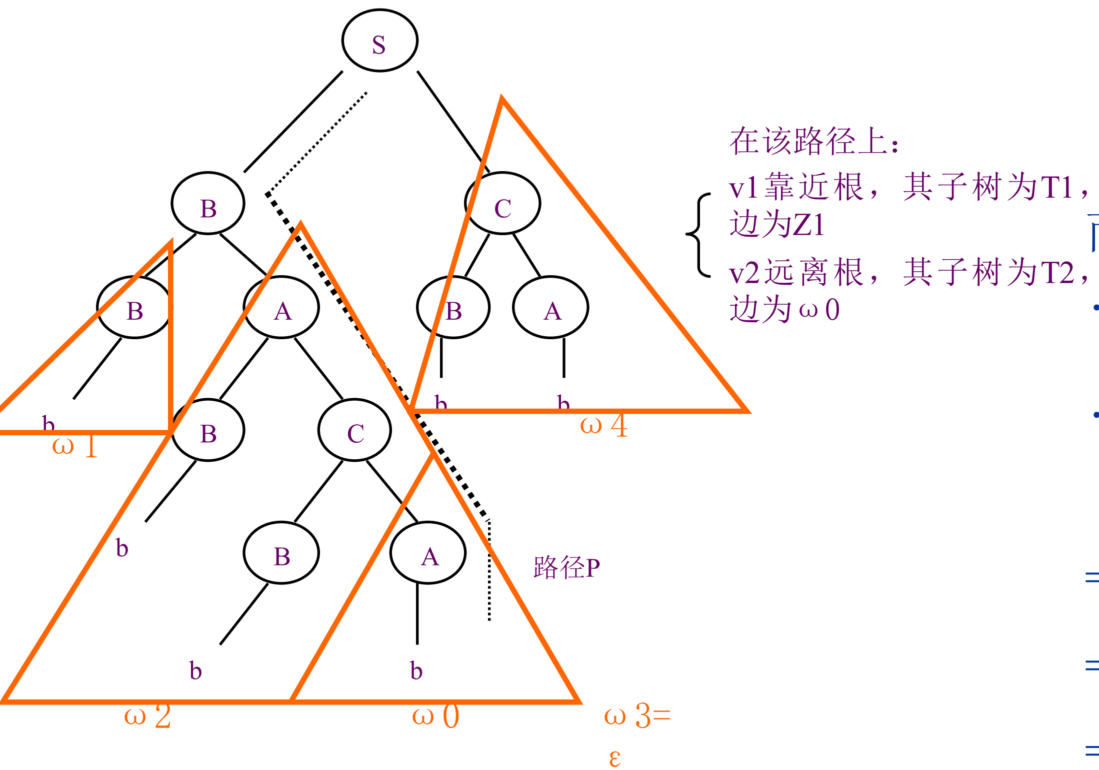
✧设文法G有n个非终结符，取p＝2^n ,若ω∈L，且 | ω | ≥p （即 | ω | ≥ 2^n ）,则必有 | ω | >2^{n-1} ，即存在一条长度 > n的路径，至少为n+1。这时,该路径上的结点数为n+2(包括最高层顶点及最底层叶子）。

✧∵G中只有n个非终结符

✧∴在这条路径上必然有某两个结点相同

✧设为v1= v2=A, v1靠近树根，v1到叶子的最长路径为n+1。

✧形如



如图：Z1＝ω2ω0ω3

｜Z1｜≤2^n ＝p

（∵v1到叶子的路径最多为n+1）

而v1 * =>ω2v2ω3， v2 * =>ω0

∵v1＝v2＝A

∴v1 * =>ω2v2ω3

=>ω2ω2v2ω3ω3

=>$\omega2^i\omega2v2\omega3\omega3^i$

=>$\omega2^i v2\omega3^i$

=>$\omega2^i\omega0\omega3^i$

∴ S =>ω1ω2ω0ω3ω4 * =>$\omega1\omega2^i\ \omega0\omega3^i\omega4$

2型文法泵浦引理的用途：判断一给定语言不是上下文无关文法。

思路：用反证法。

例：证明 $L=\{a^n b^n c^n \mid n\geq 1$ 不是2型语言$\}$

证：假设L是2型语言。 取常数p， $\omega=a^p b^p c^p$ ，$|\omega|=3p\geq p$

将ω写成 $\omega=\omega_1\omega_2\omega_0\omega_3\omega_4$， 其中 $|\omega_2\omega_3|\geq 1$ 且 $|\omega_2\omega_0\omega_3|\leq p$. 考虑 $\omega_2\omega_0\omega_3$ 在ω中所处的位置：

①如果 ω_2 含有a， ω_3 含有c，

∵ $\omega=a^p b^p c^p$ ， 则有 $|\omega_2\omega_0\omega_3|$ 最小为 $|ab^pc|=p+2>p$

∴不满足泵浦引理的条件。

②如果 ω_2、ω_3 都含有a， （b或c）

∵ $|\omega|=a^p b^p c^p$ 可写成 $\omega=a^k\underbrace{\underline{a^m}}_{\omega_2}\underbrace{\underline{a^n}}_{\omega_0}\underbrace{\underline{a^l}}_{\omega_3}a^j b^p c^p$

其中 $m+n+l\leq p$， $m+l\geq 1, k+m+n+l+j=p$.

将 ω_2、ω_3 重复 $i=2$ 次，将有 $\omega' = a^k a^{mi} a^n a^{li} a^j b^p c^p = a^{p+m+l} b^p c^p \in L$

(a的个数大于b和c的个数)

∴与2型语言的假设矛盾。

(3)若ω2、ω3分别包含a和b（b和c）

设$\omega 2=a^m$、$\omega 3=b^n$ 且$m+n\geq 1$

当取$\omega = a^k a^m a^{p-m-k} b^j b^n b^{p-j-n} c^p$ 时

将ω2、ω3重复i=2次，

有将$\omega' = a^k a^{im} a^{p-m-k} b^j b^{in} b^{p-j-n} c^p \notin L$

（∵其中a、b个数将大于c的个数）

∴与2型语言假设矛盾。

综上，L不是2型语言。

例：证明L＝{ a^{k^2} ｜k≥1}不是2型语言

证：假设L是2型语言。

由泵浦引理，取常数p，当ω∈L时，｜ω｜ ＝ $k^2 \geq p$

将ω＝a^{k^2} 写为ω＝ω1ω2ω0ω3ω4，并有

｜ω2ω0ω3｜≤ p 且 ｜ω2ω3｜≠ε即｜ω2ω3｜≥1

则应有ω1ω2^{i}ω0ω3^{i}ω4 ∈ L

∵｜ω2ω0ω3｜≤ p，｜ω2ω3｜≥1

∴1≤｜ω2ω0ω3｜≤p

又∵ω＝a^{k^2} ，特别是当取k＝p时，

有｜ω｜=p^2 ＝｜ω1ω2ω0ω3ω4｜

∴ p^2 <｜ω1ω2^{2}ω0ω3^{2}ω4｜< p^2 +p

（增加了ω2ω3，而｜ω2ω3｜≤ p）

而（p+1）^{2} ＝p^2 +2p+1> p^2 +p

即导致p^2 <｜ω1ω2^{2}ω0ω3^{2}ω4｜<（p+1）^{2}

即ω’ ∈L，与假设L是2型文法矛盾

∴L不是2型文法。

2. 2型语言的封闭性

（1）设有2型语言L1、L2, 则$L1 \cup L2$，L1L2，L1*为2型语言。

证明——自学

（2）2型语言对交不封闭

反证：取反例 $L1 = \{ a^n b^n c^m \mid m, n \geq 1\}$ —— 2型

$L2 = \{ a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$ —— 2型

$L1 \cap L2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ —— 不是2型

（3）2型语言对补运算不封闭

若对补封闭，则对交封闭。

已知对交不封闭，

∴对补不封闭

（4）2型语言对置换封闭。 （略）

※　3．2型语言的判定问题——略

4. 二义性问题

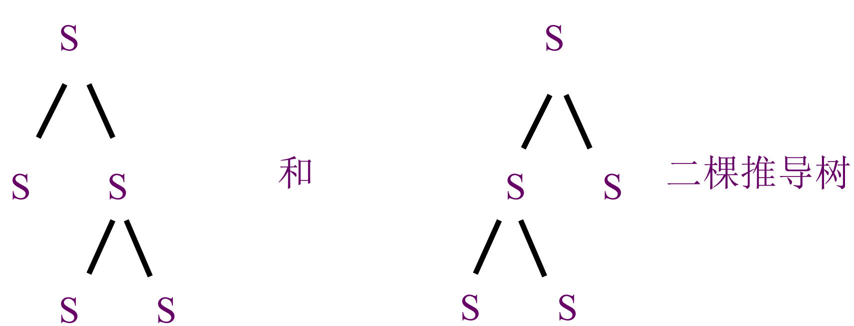
a. 二义性定义：对同一句子（句型）存在两个不同的推导树或存在两个不同的最左（右）推导。

b. 上下文无关文法的二义性是不可判定的。

c. 可能导致二义性的某些生成式形式

（1）S→SS｜β

对句型SSS，有



将S→SS｜β 变换为 S→SA｜A，可消除二义性。

A→ β

(2) S→SbS

（3）S→aS｜Sβ

§4.7 受限型上下文无关文法

对文法的生成式形式加以某些限制=>受限型文法

一、线性文法：

生成式为A→ω1Cω2 或 A→ω1 形式的2型文法，其中ω1、ω2∈ T* ，A，C∈N ，且ω1ω2≠ ε 。

- 由线性文法产生的语言称为线性语言。
- 正则文法为线性文法。反之不成立。

- 例：G1＝（{S},{a,b},P,S）

  $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

  $L(G1)=\{\omega\omega \mid \omega \in \{a,b\}^*\}$

- 例：G2＝（{S},{a,b},P,S）

  $S \to aSb \mid ab$

  $L(G2)=\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

- L(G1)和L(G2)都是线性语言，但不是正则集。

- **二、顺序文法：**

  设G＝（N,T,P,S）,若非终结符可被排序为 $A_1A_2\ldots A_n$， $N=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$， 当P中有生成式 $A_k\rightarrow\beta$， 则β内不含有 $l<k$ 的 A_l。此时称文法G为顺序文法。

- 由顺序文法产生的语言为顺序语言。
- 例：$A_1\text{->}A_2A_1$, $A_1\text{->}A_2$, $A_2\text{->}aA_2b$, $A_2\text{->}e$

第四章复习

Chapter 4

推导树

二义性

上下文无关文法变换

消去无用符 {可达, 生成}

消去 ε

消去单产式

消去左递归

C范式 / G范式

下推自动机

$M=(Q,T,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$

$\delta: Q\times(T\cup\varepsilon)\times\Gamma \rightarrow Q\times\Gamma^*$

上下文无关文法 $\xleftrightarrow[{[q,z,r]}]{}$ 下推自动机

Pumping引理

作业：ch4习题 23（1，2，3）