稳定性理论

北京邮电大学

- 虽然动态过程的变化规律一般要用微分方程建立的动态模型来描述，但是对于某些实际问题，建模的主要目的并不是寻求动态过程每个瞬时的性态，而是研究某种意义下**稳定状态**的特征，特别是当时间充分长以后动态过程的**变化趋势**。
- 动态过程的变化趋势可能趋于稳定，也可能在某些情况下会不稳定。为了分析这种稳定和不稳定的规律，常常不需要求解微分方程，而可以利用微分方程的稳定性理论，直接研究**平衡状态的稳定性**即可。
- 常微分方程的定性和稳定性理论成为数学建模必备的基础理论知识。

微分方程稳定性理论简介

基本概念

- 考虑 n 维空间R^n中的向量值函数

$$X(t) = (x_1(t), \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t))^T$$

当$n=2$、$n=3$ 时我们可以将之想象为平面或空间中一质点的运动曲线，它描述质点在时刻 t 的位置。许多物理系统或社会系统均可以被一组形如 $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2 \cdots x_n), (i=1..n)$ 的微分方程描述，

简记为 $\frac{dX}{dt} = F(X)$，其中 $F(X) = (f_1(X), \quad f_2(X) \quad \ldots \quad f_n(X))^T$

，通常称之为自治的动力系统。

- 称n维空间R^n为相空间，$X(t)=(x_1(t),\quad x_2(t)\quad\cdots\quad x_n(t))^T$ 在相空间确定的曲线称为相轨线,简称轨线。

- 称点 $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\quad\tilde{x}_2\quad\cdots\quad\tilde{x}_n)^T$ 为动力系统 $\frac{dX}{dt}=F(X)$ 的一个**平衡点**，若 $f_i(\tilde{X})=0(i=1..n)$ 。

若 $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\quad\tilde{x}_2\quad\cdots\quad\tilde{x}_n)^T$ 为动力系统 $\frac{dX}{dt}=F(X)$ 的一个平衡点,则 $x_i(t)\equiv\tilde{x}_i(i=1..n)$ 为动力系统的一个**奇解**。

平衡点 $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\quad\tilde{x}_2\quad\cdots\quad\tilde{x}_n)^T$ 在对一个动力系统的定性分析中具有特殊的意义，称动力系统 $\frac{dX}{dt}=F(X)$ 的平衡点是**（渐近）稳定**的，若对该动力系统的任一解 $X(t)$，均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\tilde{X}$ 。

例：求解微分方程 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -y(x^2+y^2) \end{cases}$ **的平衡点，并讨论其稳定性。**

解：易得该微分方程组的唯一平衡点为 $O(0,0)$；

由已知微分方程组可以得到 $\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = -2(x^2+y^2)^2$，

进而 $x^2+y^2 = \frac{1}{2t+c}, (c = \frac{1}{(x(0))^2+(y(0))^2})$，对该微分方程组的任一解 $(x(t), y(t))$，$\lim_{t\to+\infty}(x^2+y^2) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2t+c} = 0$，

因此 $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$，因此平衡点 $O(0,0)$ 是稳定的。

例：求解微分方程 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$ 的平衡点，并讨论其稳定性。

解：易知该微分方程组的唯一平衡点为 O(0,0)。

该方程组的解很容易求出，为（$x(t)=e^t+C_1$，$y(t)= e^t+C_2$）显然，当 t 趋于无穷时，解并不会趋于O(0,0)。

故平衡点O(0,0)为不稳定的。

对于一个齐次的线性微分方程组

$$\frac{dX}{dt} = AX \text{（} A \in R^{n\times n} \text{ 为一 } n \text{ 阶实方阵）}$$

有如下结果：

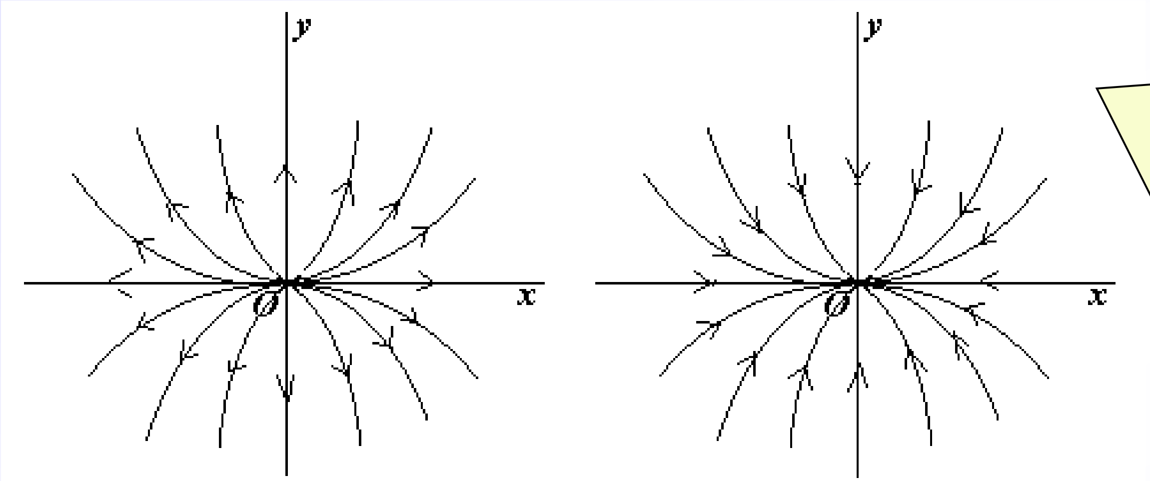
定理 若 $A \in R^{n\times n}$ 非退化，则 $O = (0,\quad 0\quad \cdots\quad 0)^T \in R^n$ 是线性动力系统 $\frac{dX}{dt} = AX$ 唯一平衡点，且平衡点O是稳定的充分必要条件为A 的所有特征值 $\lambda_i (i = 1..n)$ 的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ 均小于0。

二阶方程平衡点的拓扑分类与判别

对于二维平面中（二阶方程）的情形，根据平衡点的局部拓扑性状可将其分为结点、焦点、鞍点以及中心等四类，其中鞍点、中心这两种类型的平衡点是不稳定的，而结点、焦点类型的平衡点还可以分为稳定与不稳定的两种情形。

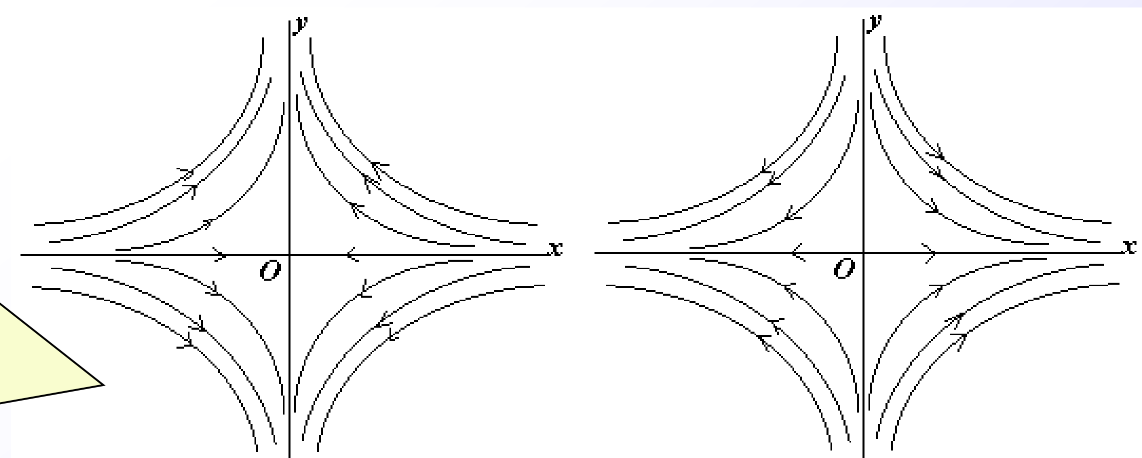
二阶方程平衡点的拓扑分类图形

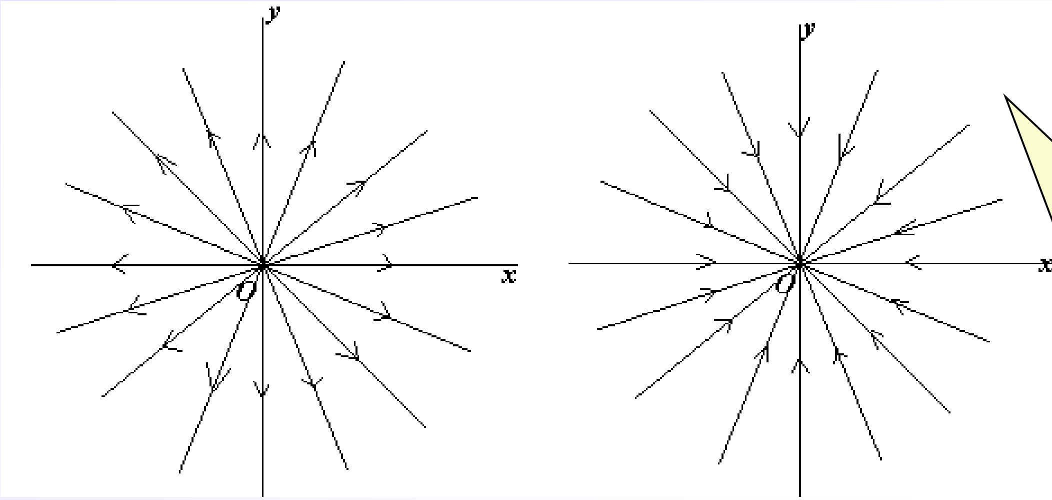
平衡点是坐标原点o(0,0)，图中箭头方向表示当t增加时的轨线方向。



1）轨线是抛物线型。如果在平衡点附近的轨线具有如左图1（图2）的分布情况，称该平衡点为不稳定（稳定）结点。

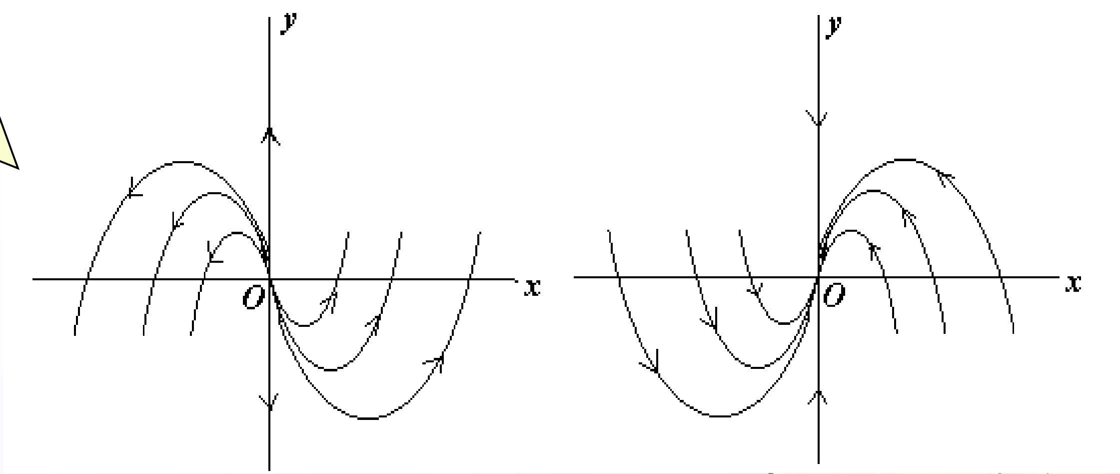
2）轨线是双曲线型。如果在平衡点附近的轨线具有如右图1（或图2）的分布情况，称该平衡点为鞍点。

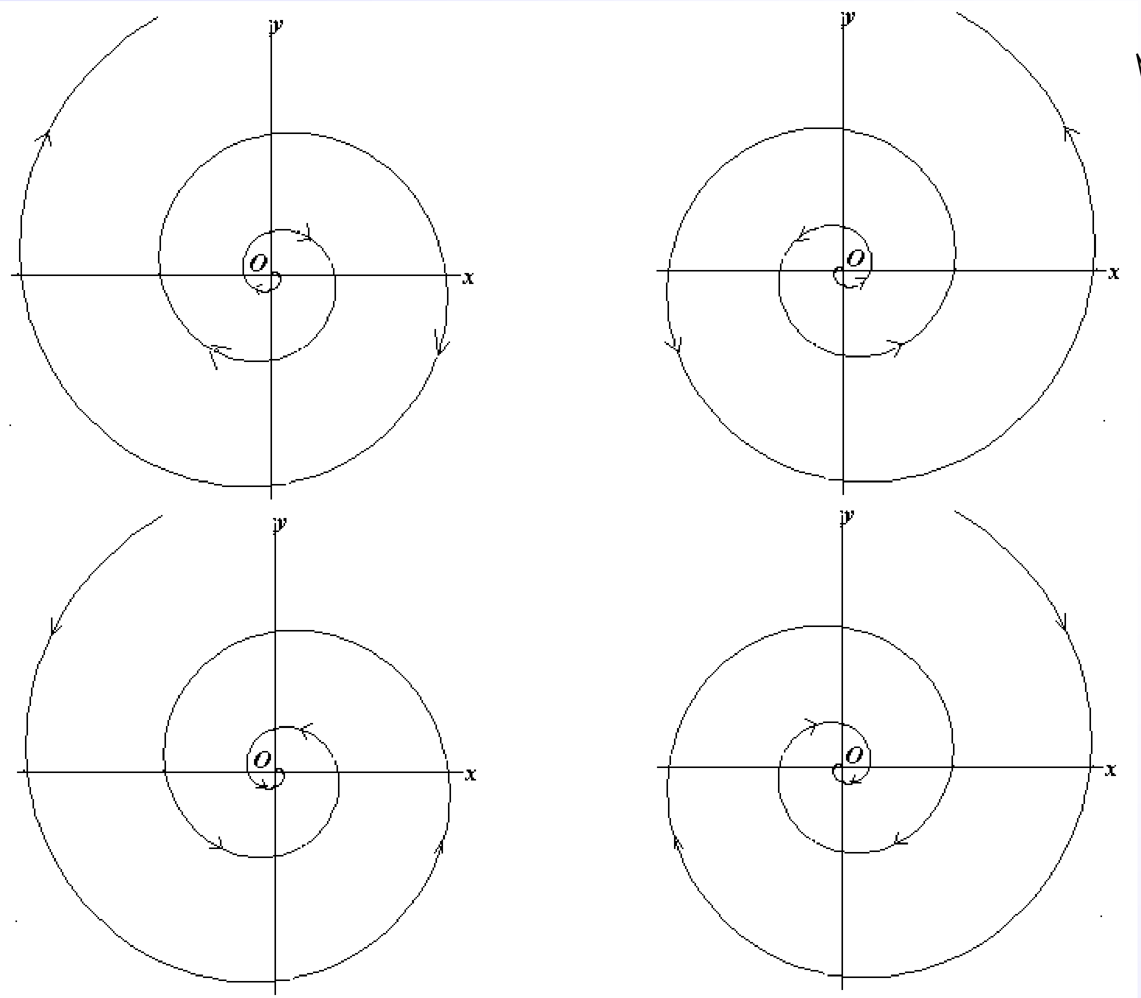




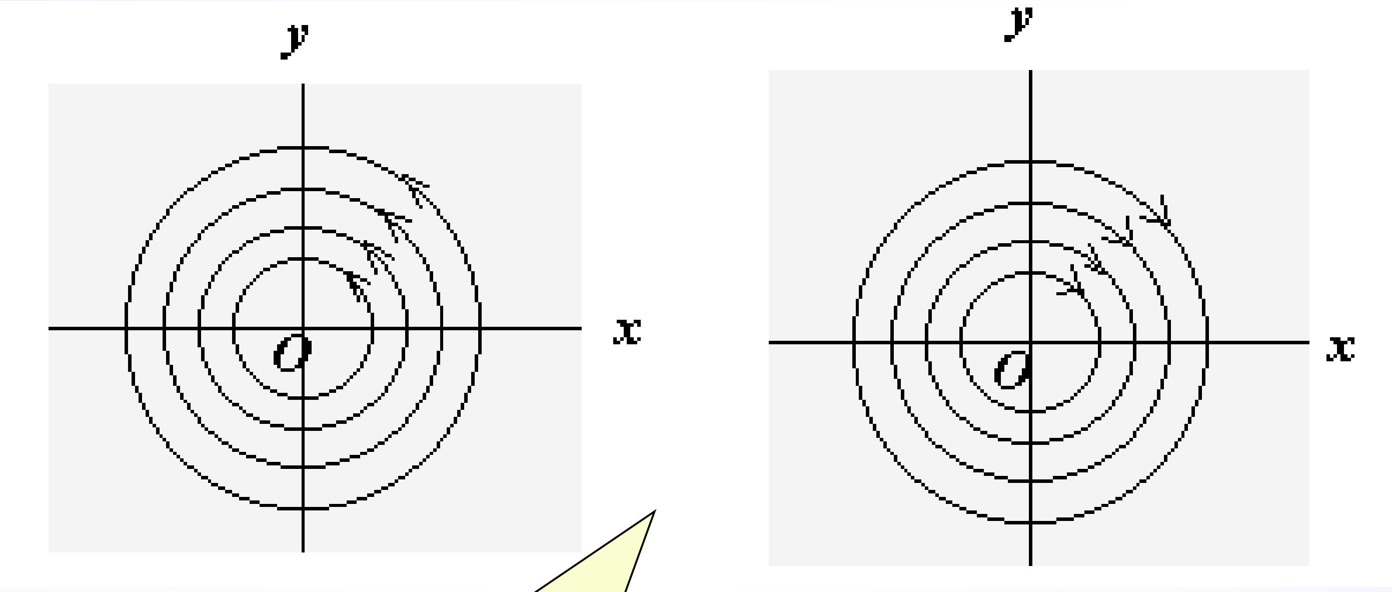
3）轨线是以原点为中心的中心直线束。如果在平衡点附近的轨线具有如左图1（图2）的分布情况，称该平衡点为不稳定（稳定）的临界结点。

4）轨线是波浪型。如果在平衡点附近的轨线具有如右图1（图2）的分布情况，称它是不稳定的（稳定的）退化结点 。





5）轨线是轨线是对数螺线族 。如果在平衡点附近的轨线具有如左图上半图（左图下半图）的分布情况，称该平衡点为不稳定（稳定）的焦点 。



6）轨线是轨线是以原点为中心的圆族。如果在平衡点附近的轨线具有如上图的分布情况，称该平衡点为中心。

二阶方程平衡点的判别

就二阶齐次线性微分方程组 $\dfrac{dX}{dt} = AX$ 其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$

下表给出其平衡点 $O(0, 0)$ 的类型和稳定性

A的二特征值$\lambda_1\ \lambda_2$	$p=-(a_{11}+a_{22})$ $q=\|A\|$	平衡点类型	稳定性
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	$p>0, q>0, p^2>4q$	稳定结点	稳定
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	$p<0, q>0, p^2>4q$	不稳定结点	不稳定
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$q<0$	鞍点	不稳定
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$p>0, q>0, p^2=4q$	稳定退化结点	稳定
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$p<0, q>0, p^2=4q$	不稳定退化结点	不稳定
$Re(\lambda_i) < 0, Im(\lambda_i) \neq 0$	$p>0, q>0, p^2<4q$	稳定焦点	稳定
$Re(\lambda_i) > 0, Im(\lambda_i) \neq 0$	$p<0, q>0, p^2>4q$	不稳定焦点	不稳定
$Re(\lambda_i) = 0, Im(\lambda_i) \neq 0$	$p=0, q>0$	中心	不稳定

例：考虑二阶线性微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=0$

解：作变换 $\frac{dx}{dt}=y$，可将它化为下列方程组

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=-5x-2y\\ \frac{dx}{dt}=y\end{cases}$$

这里 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}$，且 $detA\neq 0$. 显然原点是系统的唯一奇点。

由特征方程

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -5 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+5=0$$

得特征根 $\lambda_1=-1+2i,\quad \lambda_2=-1-2i$

故 $O(0,0)$ 点是稳定焦点。

对于一般的非线性微分方程组的讨论，由于其平衡点不存在或者存在但并不唯一，因此需引入局部稳定的概念：

若存在 σ >0，对该动力系统的任一解$X(t)$, 只要存在某t_0满足$\left\|X(t_0)-\tilde{X}\right\|<\sigma$，均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\tilde{X}$，则称动力系统$\frac{dX}{dt}=F(X)$的平衡点 $\tilde{X}$是局部（渐近）稳定的。

对平衡点 $\tilde{X}$ 局部（渐近）稳定性的判别，只须对原微分方程 $\frac{dX}{dt}=F(X)$ 的右端项取一阶**Taylor**展式，构造线性动力系统 $\frac{dX}{dt}=A(\tilde{X})\cdot(X-\tilde{X})$ 进行讨论，其中$A(\tilde{X})=(a_{ij})=\left(\partial f_i(\tilde{X})\big/\partial x_j\right)$

注：非线性平衡点的稳定性与其近似线性方程一致是在***detA≠0***时才保证成立。

一般的非线性微分方程组的全局稳定

用相轨线分析方法讨论

对动力系统 $\frac{dX}{dt} = F(X)$，其解

$$X(t) = (x_1(t), \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t))^T$$

在相空间R^n确定的曲线称为相轨线。

通过在相平面上讨论轨线的趋势，来确定局部稳定点是否为全局稳定点。