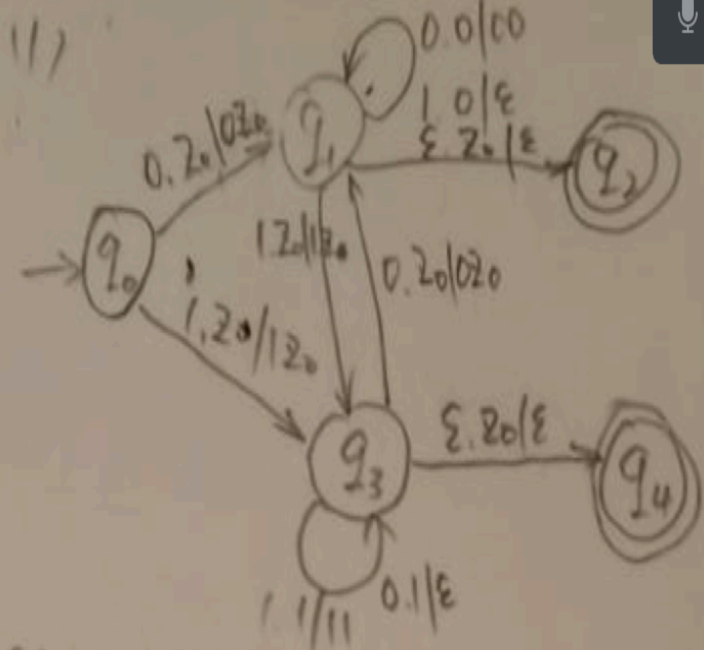
PDA $M=(Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

$\delta : Q \times T \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma^*$

$(q, a, Z) \vdash (p, \alpha)$

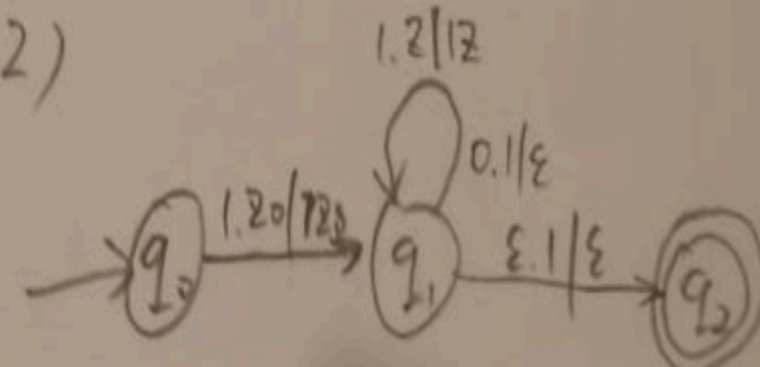
$\delta(q, a, Z) = (p, \alpha)$

(1)



$(q_0, 0110, Z_0) \vdash (q_1, 110, 0Z_0) \vdash (q_1, 10, Z_0)$
$\vdash (q_3, 0, 1Z_0) \vdash (q_3, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_4, \varepsilon, \varepsilon)$

(2)

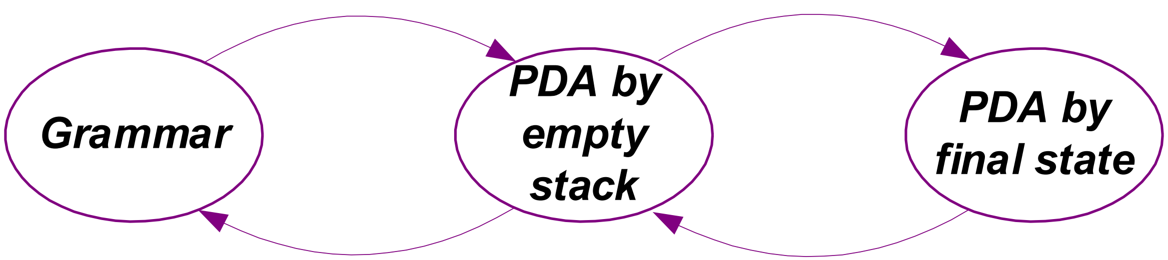


§4.5 上下文无关文法与下推自动机

上下文无关文法与下推自动机的等价性：

PDA与上下文无关文法之间存在着对应关系。即：

- **PDA(M) ═> CFG**
- **CFG => PDA(M)**



从上下文无关文法构造等价的下推自动机

- **定理4.5.1（由CFG可导出PDA）：**

设上下文无关文法G＝（N，T，P，S），产生语言L（G），则存在PDA M，以空栈接受语言$L_{\phi}(M)$，使$L_{\phi}(M)=L(G)$。

- **证明：**构造下推自动机M，使M按文法G的最左推导方式工作。

从上下文无关文法构造等价的下推自动机

✧ 构造方法 设 CFG $G = (N, T, P, S)$，

构造一个空栈接受方式的 PDA

$M=（Q，T，\Gamma，\delta，q_0，z_0，F）$

其中 $Q=\{q\}$，$\Gamma=N\cup T$，$q_0=q$，$z_0=S$，$F=\varphi$（∵以空栈接受）

即 $M = (\{q\}, T, N\cup T, \delta, q, S, F)$，

转移函数 δ 定义如下：

(1) 对每一 $A\in N$，$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q,\beta) \mid "A\to\beta"\in P\}$;

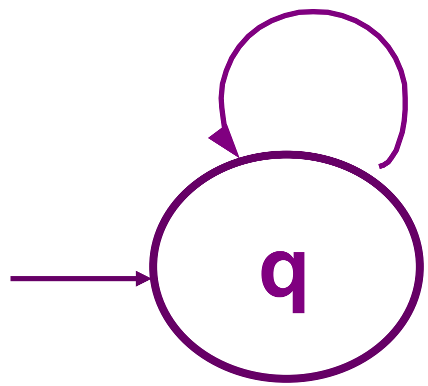
（即将栈顶的A换为β）

(2) 对每一 $a\in T$，$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$.

（即若栈顶为终结符，则退栈）

从上下文无关文法构造等价的下推自动机

用图形表示：



$E \to EOE \mid (E) \mid v \mid d$
$O \to + \mid *$

✧ 例1 对右边产生式所代表 CFG，依上述方法构造的 PDA 为

({q} , {v,d,+, ∗,(,) }, {E,O,v,d,+, ∗,(,)}, δ, q, E, φ)， 其中δ定义为

$\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q,EOE), (q,(E)), (q,v),(q,d)\}$,

$\delta(q, \varepsilon, O) = \{(q, +), (q, *)\}$, $\delta(q, v, v) = \delta(q, d, d) = \{ (q, \varepsilon) \}$,

$\delta(q, +, +) = \delta(q, *, *) = \delta(q,(,() = \delta(q,),)) = \{ (q, \varepsilon) \}$

自顶向下的分析过程

✧定理的物理意义：利用下推自动机进行自顶向下的分析，检查一个句子的最左推导过程。

步骤如下：

(1) 初始时，将文法开始符号压入空栈.

(2) 如果栈为空，则分析完成.

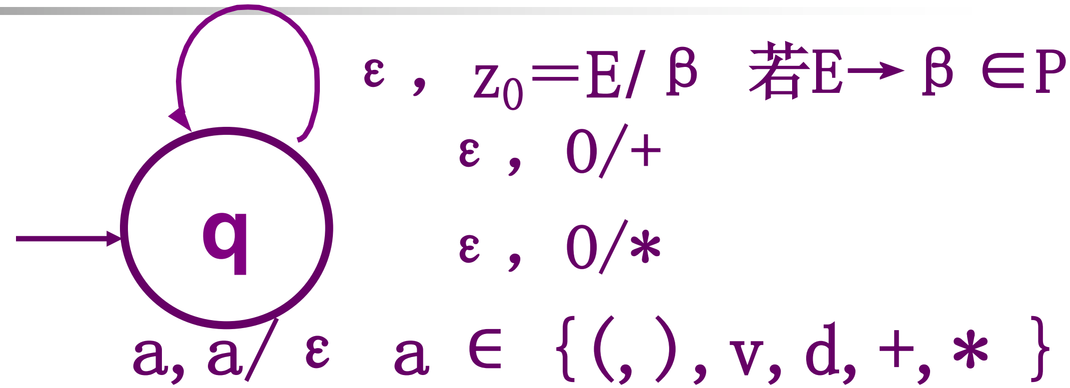
(3) 如果栈顶为一非终结符，先将其从栈中弹出. 选择下一个相应于该非终结符的产生式，并将其右部符号从右至左地一一入栈. 如果没有可选的产生式，则转出错处理.

(4) 如果栈顶为一终结符，那么这个符号必须与当前输入符号相同，将其弹出栈，读下一符号，转第(2)步；否则，回溯到第(3)步.

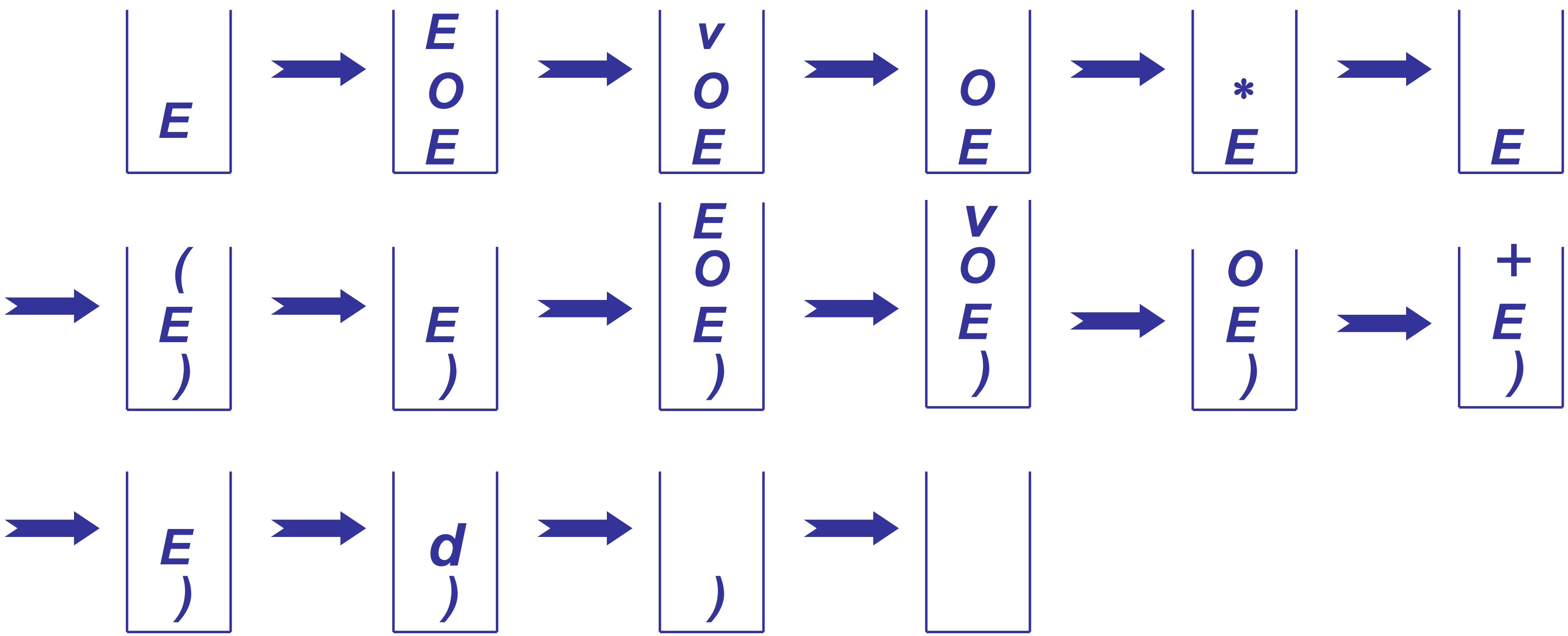
例2：利用下推自动机进行自顶向下的分析过程

$E \rightarrow EOE \mid (E) \mid v \mid d$

$O \rightarrow + \mid *$



$v * (v + d)$



定理的证明

✧ **证明思路** 欲证，对任何 $w \in T^*$, $w \in L(G) \Leftrightarrow w \in L(M)$.

$\Rightarrow$ 先证明如下结论, *if* $A \overset{*}{\Rightarrow} w$, *then* $(q,w,A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

归纳于 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$ 的步数 n.

基础 $n=1$，$A \rightarrow w$ 必为产生式，$(q,w,A) \vdash (q,w,w) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

归纳 设第一步使用产生式 $A \rightarrow X_1X_2 \ldots X_m$，必有 $w=w_1w_2 \ldots w_m$，

$(q,w,A) \vdash (q,w, X_1X_2 \ldots X_m) \vdash^* (q, w_2 \ldots w_m, X_2 \ldots X_m)$

$\vdash^* (q, w_3 \ldots w_m, X_3 \ldots X_m) \vdash^* \ldots \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

所以： *if* $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, *then* $(q,w,S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

即, $w \in L(G) \Rightarrow w \in L(M)$.

定理的证明

$\Leftarrow$ 先证明如下结论，*if* $(q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, *then* $A \overset{*}{\Rightarrow} w$.

归纳于 $(q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ 的步数 n.

基础 $n=1$，必有 $w = \varepsilon$，且 $A \to \varepsilon$ 为 G 的产生式，所以 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$.

归纳 $n>1$，设第一步使用产生式 $A \to X_1X_2\ldots X_m$，

可以将 w 分为 $w = w_1 w_2 \ldots w_m$，满足 $(q, w_i, X_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$，

无论 X_i 为终结符，还是非终结符，都有 $X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$.

因此，$A \Rightarrow X_1X_2\ldots X_m$，

$\overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2 \ldots w_m = w$

所以：对任何 $w \in T^*$,

if $(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, *then* $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

即，$w \in L(M) \Rightarrow w \in L(G)$.

例3：从文法构造等价的下推自动机

例：构造一个PDA M，使$L_\phi(M) = L(G)$。其中G是我们常用来生成算术表达式的文法：以及 a+a*a的识别过程。

G＝（N，T，P，E）

N＝{ E, T, F }，T ={ +, *, (,), a }，S = { E }

P：E→E+T | T ；T→T*F | F； F→(E) | a

解：构造M＝（{q}，T，Γ，δ，q，E，φ）

δ定义为：

① δ(q,ε,E)＝{ (q, E+T), (q, T) }

② δ(q,ε,T)＝{ (q, T*F), (q, F) }

③ δ(q,ε,F)＝{ (q, (E)), (q, a) }

④ δ(q, b,b)＝{ (q, ε) } 对所有 b∈{ a,+,*,(,) }

用格局说明句子分析过程

例如 以a+a*a作为输入，则M在所有可能移动中可作下列移动（用到文法G中从E出发的最左派生的一系列规则）

(q，a＋a*a，E) ├ (q，a＋a*a，E+T)

├ (q，a＋a*a，T+T)

├ (q，a＋a*a，F+T)

├ (q，a＋a*a，a+T)

├ (q，＋a*a，+T)

├ (q，a*a，T)

├ (q，a*a，T*F)

├ (q，a*a，F*F)

├ ……

从下推自动机构造等价的上下文无关文法

- 定理4.5.1是由G导出PDA，其逆定理也成立。
- *定理4.5.2（由PDA导出文法G）：*

设下推自动机M，以空栈形式接受语言 $L_\phi(M)$，则存在一个上下文无关文法G，产生语言L(G)，使 $L(G)= L_\phi(M)$ 。

证明：设M=（Q，T，Γ，δ，q_0，z_0，Φ）

思路：构造文法G，使ω串在G中的一个最左推导直接对应于PDA M 在处理ω时所做的一系列移动 。

从下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧采用形如[q，z，γ]的非终结符，q，γ∈Q，z∈Γ

[q，z，γ]的物理意义：

在q状态，栈顶为z时，接受某个字符串(可为ε)后PDA将变换到γ状态，并保证

$[q, z, \gamma] \Rightarrow \omega$ 当且仅当 $(q, \omega, z) \vdash^* (\gamma, \varepsilon, \varepsilon)$.

从下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧ **构造方法** 设 PDA $M=(Q, T, \Gamma, \delta, q_0, z_0, \Phi)$，

构造CFG $G=(N, T, P, S)$

其中 $N=\{[q, z, \gamma] \mid q, \gamma \in Q, z \in \Gamma\} \cup \{S\}$

产生式集合 P 定义如下：

1) 对于每个 $q \in Q$，将 $S \rightarrow [q_0, z_0, q]$ 加入到产生式中。

2) 若 $\delta(q, a, z)$ 含有 (γ, ε)，则将 $[q, z, \gamma] \rightarrow a$ 加入到产生式中。

3) 若 $\delta(q, a, z)$ 含有 $(\gamma, B_1, B_2, \ldots, B_k)$ $k \geq 1$，$B_i \in \Gamma$，则对Q中的每一个状态序列 $q_1, q_2, \ldots, q_k$, $(q_i \in Q)$, 把形如
$[q, z, q_k] \rightarrow a[\gamma, B_1, q_1][q_1, B_2, q_2] \ldots [q_{k-1}, B_k, q_k]$
的产生式加入到P中。其中，$a \in T$ 或 $a = \varepsilon$

例1：从下推自动机构造等价的上下文无关文法

（书P124 例3）由PDA M构造文法G

设PDA M＝（{q0, q1}, {a, b}, {A, z0}, δ ,q0, z0, Φ）

δ定义为：$\delta(q_0, a, z_0) = \{(q_0, Az_0)\}$ ①

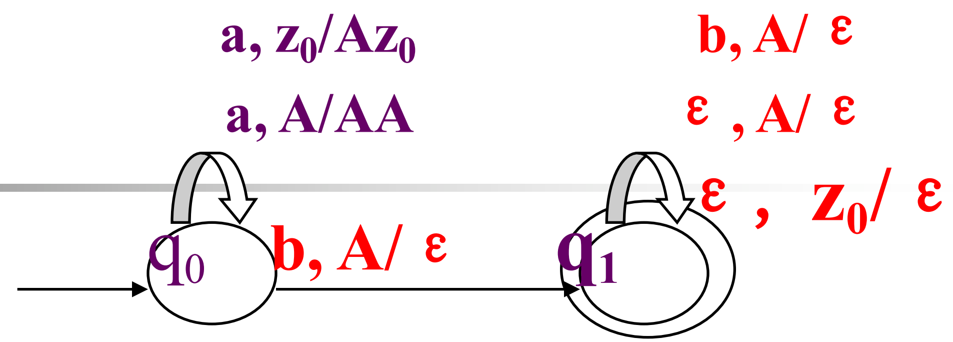
$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$ ②

$\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ ③

$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ ④

$\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ ⑤

$\delta(q_1, \varepsilon, z0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ ⑥



解：（1）∵ $q_0, q_1 \in Q$,

∴ 构造 $S \to [q_0, z_0, q_0]$; $S \to [q_0, z_0, q_1]$

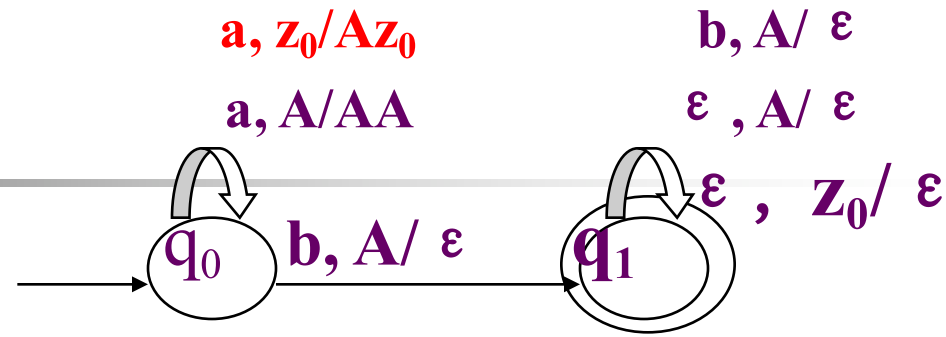
（2）对③④⑤⑥式，可构造

由 δ（q0, b, A）={(q1, ε)} 得 [q0, A, q1]→b

由 δ（q1, b, A）={(q1, ε)} 得 [q1, A, q1]→b

由 δ（q1, ε, A）={(q1, ε)} 得 [q1, A, q1]→ ε

由 δ（q1, ε, z0）={(q1, ε)} 得 [q1, z0, q1]→ ε



（3） 对①式 δ（q_0, a, z_0）={(q_0, A z_0)}，

∵所有可能的状态序列为：q_0q_0，q_1q_0，q_0q_1，q_1q_1

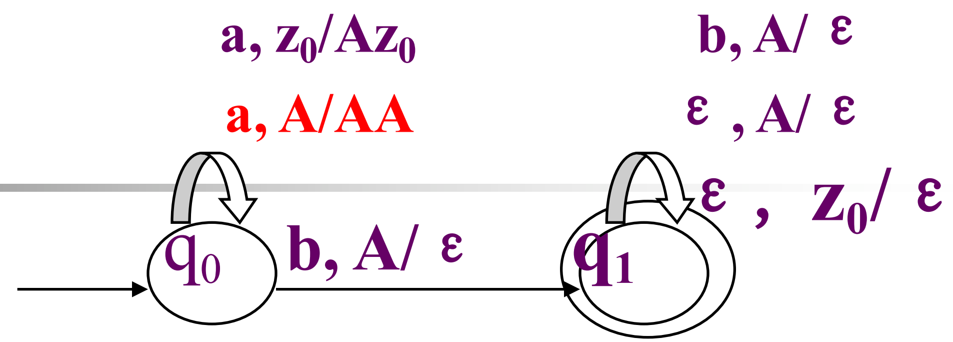
∴可构造出产生式：

$[q_0, z_0, q_0] \rightarrow a\ [q_0, A, q_0][q_0, z_0, q_0]$

$[q_0, z_0, q_0] \rightarrow a\ [q_0, A, q_1][q_1, z_0, q_0]$

[q0, z0, q1]→ a [q0, A, q0][q0, z0, q1]

[q0, z0, q1]→ a [q0, A, q1][q1, z0, q1]



对②式 $\delta(q_0, a, A)=\{(q_0, AA)\}$，

∵所有可能的状态序列为：q_0q_0，q_1q_0，q_0q_1，q_1q_1

∴可构造出产生式：

$[q_0, A, q_0] \rightarrow a\,[q_0, A, q_0][q_0, A, q_0]$

$[q_0, A, q_0] \rightarrow a\,[q_0, A, q_1][q_1, A, q_0]$

$[q_0, A, q1] \rightarrow a\,[q_0, A, q_0][q_0, A, q_1]$

$[q_0, A, q1] \rightarrow a\,[q_0, A, q_1][q_1, A, q_1]$

(4)删除无用符号[q_0, A, q_1] 和 [q_1, z_0, q_0]及相应产生式

重命名[q0, z0, q1]为A

[q1, A, q1]为B

[q0, A, q1]为C　　得

[q1, z0, q1]为D

$$
\begin{cases}
S \rightarrow A \\
A \rightarrow aCD \\
B \rightarrow b \mid \varepsilon \\
C \rightarrow aCB \mid b \\
D \rightarrow \varepsilon
\end{cases}
$$

注： 构造生成式时，可从S生成式出发，以避免生成无用产生式。

定理的关键：

当存在$\delta(q，a，z)$含有（$\gamma，B_1B_2\ldots B_k$）则对Q中的每个可能的状态序列$q_1\ q_2\ \ldots\ q_k$排成一条产生式

$[q, z, q_k] \rightarrow a[\gamma, B_1, q_1][q_1, B_2, q_2]\ldots[q_{k-1}, B_k, q_k]$

这是一个猜测过程，实质是写出从q出发，栈顶为Z，经过一系列推导走到q_k的所有可能的状态序列，其中必有一条路径是正确的。

练习：针对算术表达式的PDA反向构造其等价文法

$M=(\{q\}, T, \Gamma, \delta, q, E, \phi)$

δ 定义为:

① $\delta(q, \varepsilon, E)=\{(q, E+T), (q, T)\}$

② $\delta(q, \varepsilon, T)=\{(q, T*F), (q, F)\}$

③ $\delta(q, \varepsilon, F)=\{(q, (E)), (q, a)\}$

④ $\delta(q, b, b)=\{(q, \varepsilon)\}$ 对所有 $b\in\{a, +, *, (,)\}$

算术表达式的文法 $G=(N, T, P, E)$

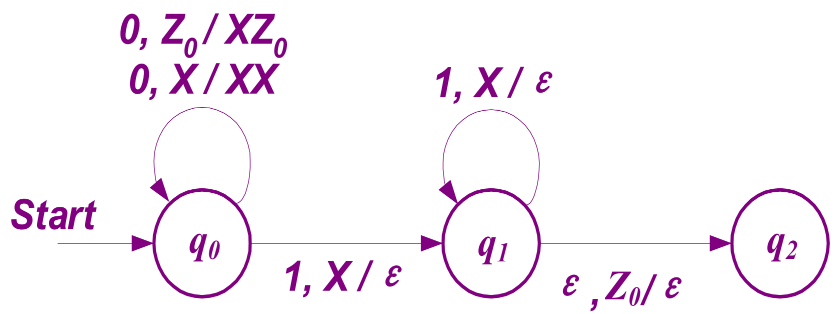
$N=\{E, T, F\}$， $T=\{+, *, (,), a\}$， $S=\{E\}$

P: $E\rightarrow E+T \mid T$; $T\rightarrow T*F \mid F$; $F\rightarrow (E) \mid a$

练习：从PDA构造等价的上下文无关文法

✧对于右下图的 PDA，构造CFG $G = (N,\{0,1\},P,S)$，其中 $N = \{S\} \cup \{\, [p,Y,q] \mid p,q \in \{q_0,q_1,q_2\} \wedge Y \in \{Z_0,X\} \,\}$

产生式集合 P 定义如下：



(1) $S \to [q_0, Z_0, q_0]$;
$S \to [q_0, Z_0, q_1]$;
$S \to [q_0, Z_0, q_2]$;

(2) 由 $(q_1,\varepsilon) \in \delta(q_0, 1, X)$ 得 $[q_0, X, q_1] \to 1$;

(3) 由$(q_1,\varepsilon) \in \delta(q_1, 1, X)$ 得 $[q_1, X, q_1] \to 1$;

(4) 由$(q_2,\varepsilon) \in \delta(q_1, \varepsilon, Z_0)$ 得 $[q_1, Z_0, q_2] \to \varepsilon$;

(5) 由$(q_0,XZ_0) \in \delta(q_0, 0, Z_0)$ 得 $[q_0, Z_0, q_j] \to 0[q_0, X, q_i]\,[q_i, Z_0, q_j]$， $i, j = 0,1,2$;

(6) 由$(q_0,XX) \in \delta(q_0, 0, X)$ 得 $[q_0, X, q_j] \to 0[q_0, X, q_i]\,[q_i, X, q_j]$， $i, j = 0,1,2$;

练习：从PDA构造等价的上下文无关文法

✧（续前页）

消去所有非生成符号，得到的新文法包含如下产生式

$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_2]$;

$[q_0, Z_0, q_2] \rightarrow 0[q_0, X, q_1]\,[q_1, Z_0, q_2]$

$[q_0, X, q_1] \rightarrow 0[q_0, X, q_1]\,[q_1, X, q_1]$

$[q_0, X, q_1] \rightarrow 1$;　$[q_1, X, q_1] \rightarrow 1$;　$[q_1, Z_0, q_2] \rightarrow \varepsilon$;

为简洁，记 $[q_0, Z_0, q_2]$ 为A，$[q_0, X, q_1]$ 为B，$[q_1, X, q_1]$ 为C，$[q_1, Z_0, q_2]$ 为D，上述文法的产生式改写如下：

$S \rightarrow A$;　$A \rightarrow 0BD$;　$B \rightarrow 0BC$;

$B \rightarrow 1$; $C \rightarrow 1$; $D \rightarrow \varepsilon$;

作业：

构造PDA M，接受语言

$L(M)=\{ a^m c^k b^m \mid m, k \geq 1\}$

Ch4 习题 22，20（1）