第二章

确知信号

主要内容

- 信号的分类
- 傅立叶变换及基本性质
- 常用信号及其频谱
- 自相关函数及能量谱/功率谱
- 信号带宽
- 信号通过线性系统

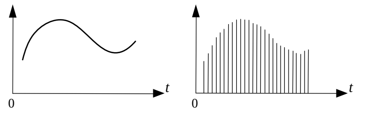
2.1 信号类型

- 信号通常表示为电压/电流随时间变化的函数 $f(t)$

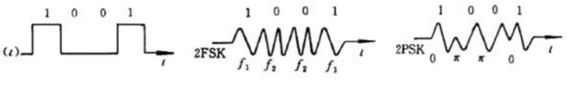
- 模拟信号和数字信号
- 周期信号和非周期信号
- 确知信号和随机信号
- 能量信号和功率信号

模拟信号和数字信号

- **模拟信号**：在一定取值范围内，携带信息的信号参量取值**连续无限**



- **数字信号**：在一定取值范围内，携带信息的信号参量取值**离散有限**



- 周期信号和非周期信号
  - 周期信号：$f(t) = f(t+nT), n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$
    - 如：$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$
  - 非周期信号：不具有周期性，如一个脉冲
- 确知信号和随机信号
  - 确知信号：可用明确的数学表达式表示
  - 随机信号：具有统计规律性，符合概率分布

$f(t)$ 是实信号

- 能量信号和功率信号
  - 在通信系统中，将信号功率定义为电压/电流在 1Ω 电阻上消耗的功率，称作**归一化功率**
  - 信号能量 $\quad E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt$
  - 信号的平均功率 $\quad P = \lim_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\, dt$
  - $\begin{cases} \text{能量有限的信号为能量信号：} 0 < E < \infty, P = 0 \\ \text{功率有限的信号为功率信号：} 0 < P < \infty, E = \infty \end{cases}$

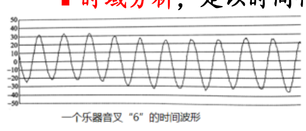
- 说明
  - 实际通信系统中的信号，能量和持续时间都是有限的，严格都属于能量信号
  - 使用功率信号是便于**数学上定量分析**，对时间持续很长的信号，如直流信号 、周期信号、随机信号，可近似认为是**功率信号**

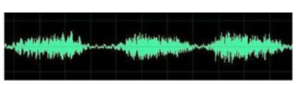
2.2 确知信号分析

- 任一信号有两种表示方法
  - **时域表示法** $f(t)$：信号的电压/电流大小随时间的变化，是信号的外在表现形式
  - **频域表示法** $F(\omega)$或$F(f)$：表示信号各频率成份的大小和组成，反映信号的本质结构
  - 频域分析将时域看似复杂的问题简化，如通信过程中常用的滤波、频分复用等
  - 傅立叶变换实现了时域和频域的转换

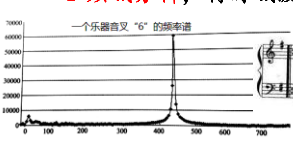
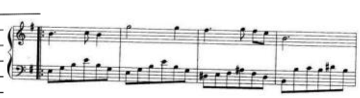
时域和频域

- **时域分析**，是以时间作为轴线观察事物的方法



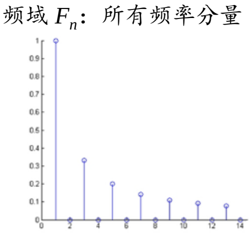


- **频域分析**，将时域波形的频率成分总结出来

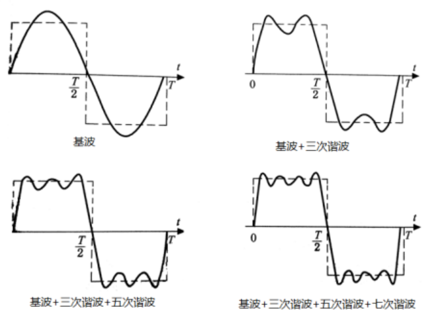


- 任何复杂的时域波形，都可以看作是由不同幅度、不同频率和不同相位组成的正弦波的线性叠加

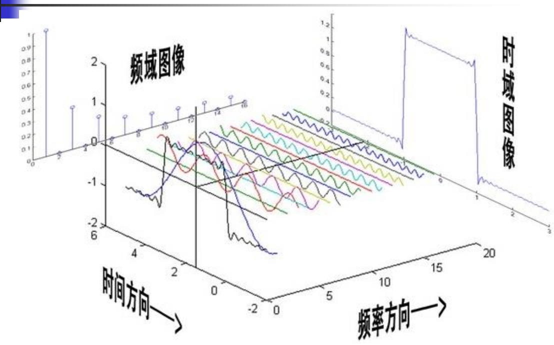
时域 $f(t)$：周期矩形波　　频域 F_n：所有频率分量



- 周期矩形波的合成



- 波形的时域和频域



一. 周期信号傅立叶分析

- 三角形式的傅立叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)\quad,\quad \boxed{\omega_0=\frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)}$$

其中：$c_0=a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt,\quad \varphi_0=0$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0\,dt\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0\,dt$$

c_n振幅：$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，　φ_n相位：$\varphi_n=arctg(-\frac{b_n}{a_n})$

指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

其中：$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\qquad n=0,\pm1,\pm2\cdots$

$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}$，　$|F_n|=\frac{c_n}{2}$：振幅，　φ_n：相位

$|F_n|\sim\omega$：幅度谱，　$\varphi_n\sim\omega$：相位谱

周期信号的频谱：$F_n=F(n\omega_0)$

- 欧拉公式将三角式变换为指数式

$$\begin{cases}e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t\\ e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)\\ \sin\omega t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)\end{cases}$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

$$c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)=\frac{c_n}{2}e^{j\varphi_n}\cdot e^{jn\omega_0 t}+\frac{c_n}{2}e^{-j\varphi_n}\cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

令：$F_n=\frac{c_n}{2}e^{j\varphi_n}$，$F_{-n}=\frac{c_n}{2}e^{-j\varphi_n}$，$\varphi_{-n}=-\varphi_n$

则：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$

$F_n=F(n\omega_0)$

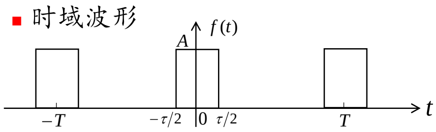
说明

- 周期信号可展开为不同幅度、频率和相位的正弦信号之和
- 信号 $f(t)$ 包含：直流分量C_0，基波($n=1$)，各次谐波（$n=2$，$3\ldots$）
- 信号 $f(t)$ 的各次谐波的振幅等于C_n
- 信号 $f(t)$ 的各次谐波的相位等于φ_n
- **复振幅 $F_n\sim\omega$称为周期信号的频谱**（双边谱）

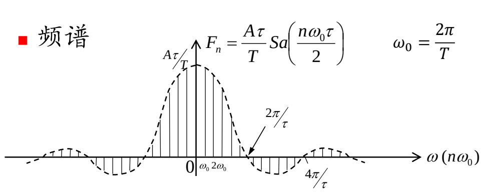
抽样函数：$Sa(x)=\frac{\sin(x)}{x}$，当$x\to0,Sa(0)=1$

例：周期矩形脉冲信号

- 时域波形

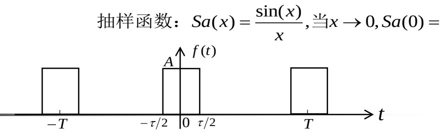


- 频谱



抽样函数：$Sa(x)=\frac{\sin(x)}{x}$，当$x\to0,Sa(0)=1$

解：



$$f(t)=\begin{cases}A & -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}\\ 0 & else\end{cases}$$

- 傅立叶级数展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ae^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$\boldsymbol{F_n=\frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}$$

$$F_n=\frac{c_n}{2}e^{j\varphi_n}\qquad F_{-n}=\frac{c_n}{2}e^{-j\varphi_n}\qquad \varphi_{-n}=-\varphi_n$$

- **关于相位**

若 $f(t)$ 实偶，则 F_n 实偶

$\therefore F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}=\pm|F_n|$， $\therefore e^{j\varphi_n}=\pm1$

$\therefore e^{j\varphi_n}=\cos\varphi_n+j\sin\varphi_n=\pm1$

$$\begin{cases} e^{j\varphi_n}=1\Rightarrow\varphi_n=0,\pm2\pi\cdots\Rightarrow F_n=|F_n|>0 \\ e^{j\varphi_n}=-1\Rightarrow\varphi_n=\pm\pi\cdots\Rightarrow F_n=-|F_n|<0 \end{cases}$$

$$F_n=\frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\qquad \frac{n\omega_0\tau}{2}=k\pi(k=\pm1,\pm2\cdots)$$

$$\omega=n\omega_0=\frac{2k\pi}{\tau}$$

周期矩形信号频谱特点

- **离散性**：周期信号包含无穷多谱线，谱线间隔为 ω_0
谱线强度与脉冲幅度 A 成正比，与脉宽 τ 成正比，谱线间隔与周期 T 成反比（$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$），谱线幅度的包络按抽样函数变化
- **谐波性**：可分解成无穷多频率分量，各次谐波分量的频率都是基波频率的整数倍 $\omega=n\omega_0$
- **收敛性**：谱线幅度随谐波频率的增大而衰减，主要能量集中在第一个过零点内 $\omega=\frac{2\pi}{\tau}$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0t+\varphi_n)\qquad f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega_0t}$$

例:

周期信号 $f(t)=3\cos t+\sin\left(5t+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(8t-\frac{2\pi}{3}\right)$

1. 画出单边幅度谱和相位谱；
2. 画出双边幅度谱和相位谱。

解：

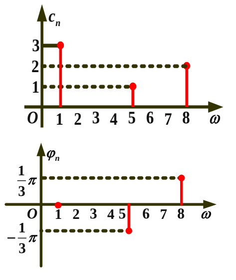
$$f(t)=3\cos t+\cos\left(5t+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(8t-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)$$

$$=3\cos t+\cos\left(5t-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(8t+\frac{\pi}{3}\right)$$

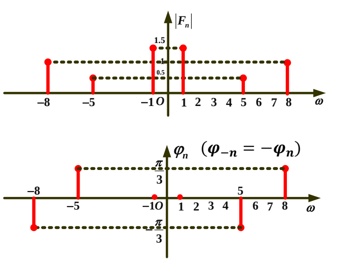
$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}=\frac{c_n}{2}e^{j\varphi_n},\ F_{-n}=\frac{c_n}{2}e^{-j\varphi_n},\ \varphi_{-n}=-\varphi_n$$

$$=3\cos t+\cos\left(5t-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(8t+\frac{\pi}{3}\right)$$

单边幅度谱和相位谱



双边幅度谱和相位谱



非周期信号傅立叶分析

- 当 $T\to\infty$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}\to0$
- 离散谱→连续谱，频谱→频谱密度（单位频带的频谱值）

$$F(\omega)=\lim_{\Delta f\to0}\frac{F_n}{\Delta f}=\lim_{\Delta\omega\to0}\frac{2\pi}{\Delta\omega}F_n=\lim_{\omega_0\to0}\frac{2\pi}{\omega_0}F(n\omega_0)$$

$$=\lim_{\omega_0\to0}\frac{2\pi}{\omega_0}\cdot\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

二. 非周期信号的傅立叶变换

- **$F(\omega)$称为 $f(t)$的频谱密度，也可称频谱**

$$\boxed{f(t)\Leftrightarrow F(\omega)}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=|F(\omega)|e^{-j\theta(\omega)}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$|F(\omega)|$ 为模，表示幅度谱；

$\theta(\omega)$ 为幅角，表示相位谱。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(2\pi f)e^{j2\pi f}d2\pi f=\int_{-\infty}^{\infty}F(f)e^{j2\pi f}df$$

- **傅立叶变换对**

$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$ $\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

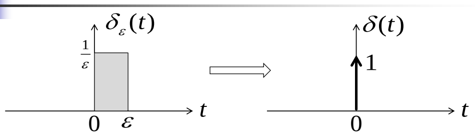
$f(t)\Leftrightarrow F(f)$ $\qquad F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi ft}dt$

$\boxed{\omega=2\pi f}$ $\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(f)e^{j2\pi ft}df$

三. 几种重要信号及其频谱

- 单位冲激信号
- 直流信号
- 正弦信号
- 矩形脉冲信号（门函数）
- 周期性冲激信号
- 周期矩形脉冲信号

单位冲激信号（δ函数）



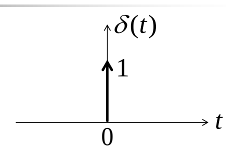
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(t)dt=\int_0^\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

当$\varepsilon>0$，且$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)=\delta(t)$

- **物理意义**：一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲，即某一个时间点产生的信号。

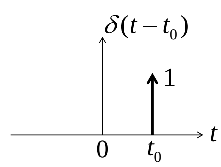
δ函数定义

$$\boxed{\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\end{cases}}$$



且下式也成立：

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1\\ \delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}\end{cases}$$



- δ函数筛选性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

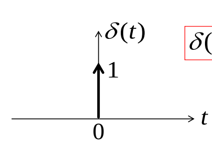
- 此定义表示，用δ函数作用于$f(t)$，结果是将$f(t)$这 $t=0$ 时刻的值筛选出来
- 同理：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

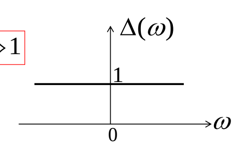
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

δ函数频谱

$$\Delta(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=1$$



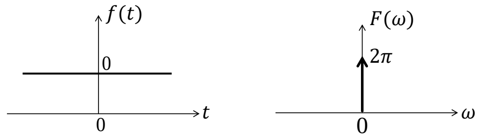
$\boxed{\delta(t)\Leftrightarrow 1}$



- **物理意义**：$\delta(t)$ 在整个频域范围内频谱均匀分布
- δ函数是一个抽象函数，物理不可实现，在数学分析中有意义

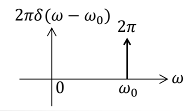
直流信号

- $1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

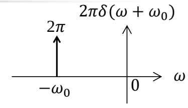


- 证：$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega t}\big|_{\omega=0} = 1$
- **物理意义：**直流信号在频域表示零频率处的一个冲激，面积（强度）为2π

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$



虚指数函数



- $\begin{cases} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\ e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0) \end{cases}$
- 证：

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega t}\Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 t}$$

- **欧拉公式**

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

  - 单频正弦波在数学上可分解出两个更小的分量

正弦信号

- $\begin{cases} \cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] \\ \sin\omega_0 t \Leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] \end{cases}$
- 证：

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)\right]$$

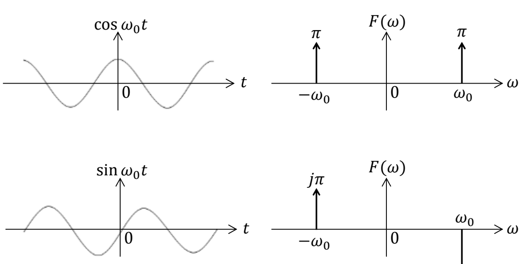
$$= \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)] = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= -\frac{j}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] \\ \sin\omega_0 t \Leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \end{array}}$$



$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$，$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

矩形脉冲信号（门函数）

- $g_\tau(t) \Leftrightarrow A\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
- 证：　$g_\tau(t) = \begin{cases} A & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$

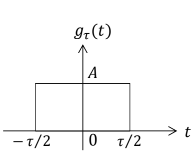
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} Ae^{-j\omega t}dt$$

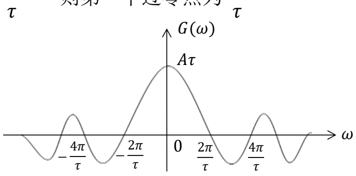
$$= \frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{A\tau\cdot\sin\omega\frac{\tau}{2}}{\omega\frac{\tau}{2}} = A\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

- $g_\tau(t) \Leftrightarrow A\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

过零点：$\frac{\omega\tau}{2} = k\pi \quad (k = \pm1, \pm2\cdots)$

$\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$　　则第一个过零点为$\frac{2\pi}{\tau}$





- 物理意义
  - 能量集中在第一个过零点内，脉冲τ越窄，频谱能量分布越分散

信号	$f(t)$	$F(\omega)$
单位冲激信号	$\delta(t)$	1
	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
虚指数信号	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
	$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega+\omega_0)$
直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$
正弦信号	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

信号	$f(t)$	$F(\omega)$
门函数	$g_\tau(t)$	$A\tau S_a(\frac{\omega\tau}{2})$
周期性冲激函数	$\delta_T(t)$	$\omega_0\sum_n\delta(\omega-n\omega_0)$
周期矩形脉冲	$\sum_n g(t-nT)$	$A\tau\omega_0\sum_n S_a(\frac{n\omega_0\tau}{2})\delta(\omega-n\omega_0)$

注：抽样函数 $Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f_T(t)]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}]$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$$

- **周期信号可用傅立叶级数展开求出频谱，也可以用傅立叶变换分析频谱密度**

$f_T(t)$信号周期为T，傅里叶级数：

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\boxed{F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)}$$

$$F_n=F(n\omega_0)$$

例：周期冲激信号

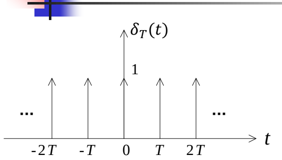
$$\boxed{\delta_T(t)\Leftrightarrow\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)}$$ 含直流和各次谐波分量

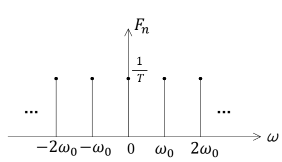
- $$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot e^{jn\omega_0 t}$$

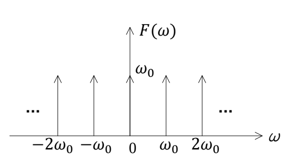
$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\quad(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

$$F(\omega)=2\pi\sum_n F_n\delta(\omega-n\omega_0)=\frac{2\pi}{T}\sum_n\delta(\omega-n\omega_0)=\omega_0\sum_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

- 周期冲激信号频谱和频谱密度

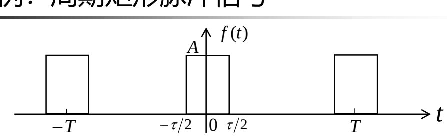






$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi F_n$$

例：周期矩形脉冲信号



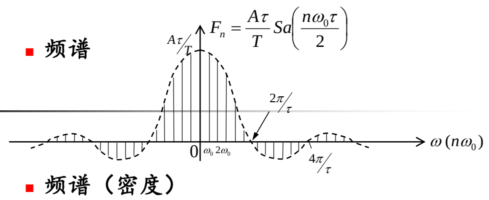
- **周期信号傅立叶级数展开求频谱**

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\qquad F_n=\frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

- **周期信号傅立叶变换求频谱密度**

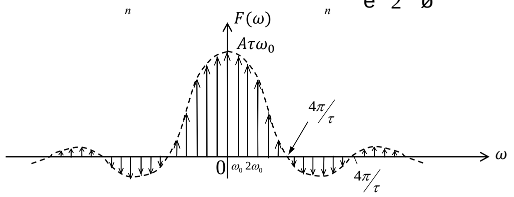
$$F(\omega)=2\pi\sum_n F_n\delta(\omega-n\omega_0)=A\tau\omega_0\sum_n Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_0)$$

- 频谱



- 频谱（密度）

$$F(\omega) = 2\pi \sum_n F_n \delta(\omega - n\omega_0) = A\tau\omega_0 \sum_n Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_0)$$



关于频谱：

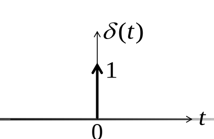
- **周期信号**
  - 傅立叶级数➞**频谱**
    - 纵坐标表示该频率正弦波的幅度
  - 傅立叶变换➞**频谱密度**
    - 密度是冲激函数，冲激的面积称作冲激强度，表示正弦波幅度
- **非周期信号**
  - 傅立叶变换➞**频谱密度**
    - 纵坐标表示某频率的密度，但研究某一点密度无意义，故研究该频率附近一小段密度的积分，则面积表示幅度

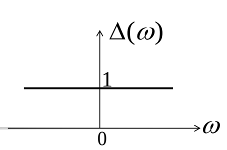
四. 傅立叶变换的性质

- 线性（叠加性）
- 对称性
- 时移特性（延迟性）
- 频移特性（调制定理）
- 比例性（尺度变换特性）
- 微分特性
- 积分特性
- 卷积性

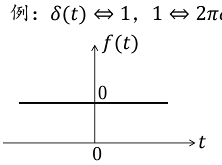
若 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

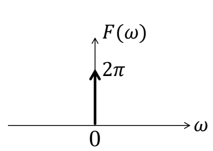
性质	时间函数	频谱函数
线性	$\sum_{i=1}^{N} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{N} a_i F_i(\omega)$
对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时移特性	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移特性	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
比例性	$f(at) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})$
微分特性	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega \cdot F(\omega)$
积分特性	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$





- **对称性**
  - 若 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$
    则 $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
  - 若 $f(t)$是偶函数，即 $f(-t) = f(t)$
    则 $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(\omega)$
  - 例：$\delta(t) \Leftrightarrow 1$，$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$





- **例：求 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的频谱**
- **解**：设门函数 $g_\tau(t)$

  已知 $g_\tau(t) \Leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

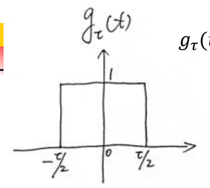
  取 $\tau = 2$，则：$g_2(t) \Leftrightarrow 2Sa(\omega)$

  利用线性：$\frac{1}{2}g_2(t) \Leftrightarrow Sa(\omega)$

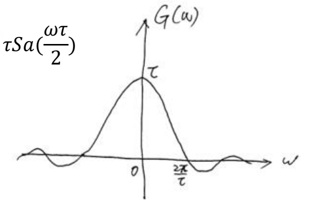
  再利用对称性：$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

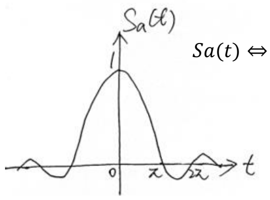
  则：$Sa(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\pi g_2(\omega)$

  即：$Sa(t) \Leftrightarrow \pi g_2(\omega)$

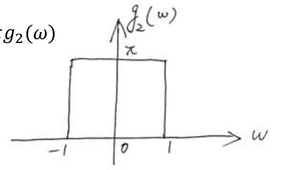


$g_\tau(t) \Leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$





$Sa(t) \Leftrightarrow \pi g_2(\omega)$



- **时移特性（延迟性）**
  - $f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
  - 例：$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$
- **证：**

$\because f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$f(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$f(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t_0}\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$\therefore \mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$

$sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

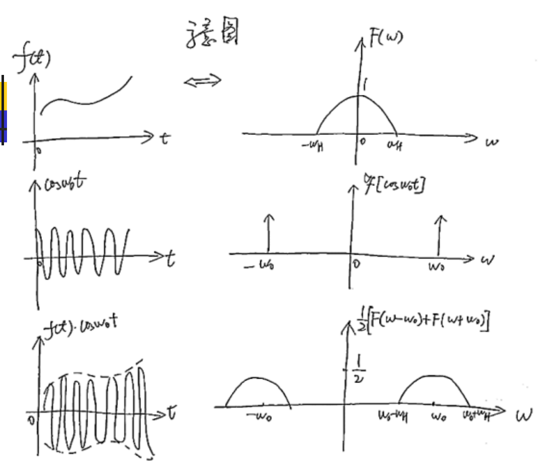
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$= F(\omega-\omega_0)$$

- **频移特性**
  - 若 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$
  - 则 $f(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$
    $f(t)e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega+\omega_0)$
  - 调制定理

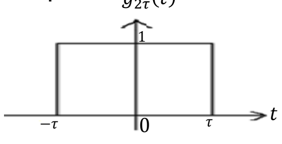
$$f(t)cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)]$$

$$f(t)sin\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0) - F(\omega-\omega_0)]$$

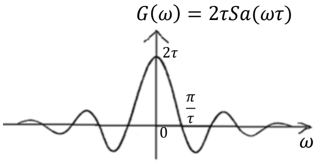


- **比例性（尺度变换特性）**
  - 若 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$
    则 $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \neq 0$

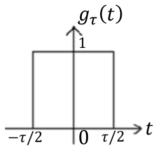
$g_{2\tau}(t)$



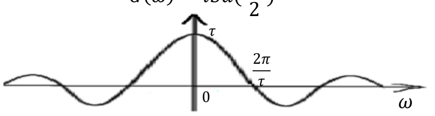
$G(\omega) = 2\tau Sa(\omega\tau)$



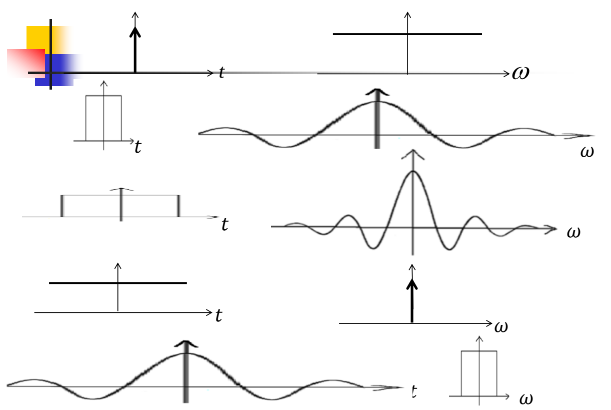
$g_\tau(t)$



$G(\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$



- 信号失真，有噪声影响，也有信道带宽受限的原因



$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) * \delta(t)$$

卷积

- **定义：** $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$
- **时域卷积定理**，应用于信号通过线性系统的计算

  $f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
- **频域卷积定理**，应用于信号抽样、调制的频谱搬移等

  $f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$
- **与δ函数卷积：** $f(t) * \delta(t) = f(t)$

  $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

  $F(\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = F(\omega - \omega_0)$

例：两个多项式相乘

$f(x) = x^2 + 5x + 6$

$g(x) = 3x + 2$

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 5x + 6)(3x + 2)$$
$$= 3x^3 + 15x^2 + 18x + 2x^2 + 10x + 12$$
$$= 3x^3 + 17x^2 + 28x + 12$$

- 翻转、平移、相乘、叠加 $\Rightarrow$ 卷积

$$\begin{array}{r} 6 + 5x + x^2 \\ 3x + 2 \\ \hline 3x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 + 5x + x^2 \\ 3x + 2 \quad \\ \hline 18x + 10x = 28x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 + 5x + x^2 \\ 3x + 2 \\ \hline 15x^2 + 2x^2 = 17x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 + 5x + x^2 \\ 3x + 2 \quad\quad \\ \hline 12 \quad\quad \end{array}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

两个周期信号相乘和频谱的关系

$f(t) = e^{j2\omega_0 t} + 5e^{j\omega_0 t} + 6 \qquad F_n: [1,5,6]$

$g(t) = 3e^{j\omega_0 t} + 2 \qquad G_n: [3,2]$

- 周期信号的频谱是傅里叶级数的系数F_n

  $f(t) \cdot g(t) = 3e^{j3\omega_0 t} + 17e^{j2\omega_0 t} + 28e^{j\omega_0 t} + 12$

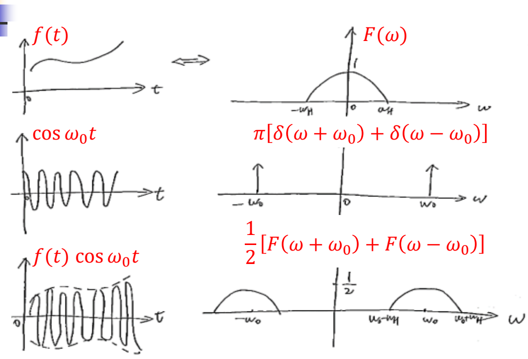
  $[3,17,28,12] = [1,5,6] * [3,2] = F_n * G_n$
- 信号时域相乘对应频域做卷积

  $f(t) \cdot g(t) \Leftrightarrow F_n * G_n$

  $f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)$

$$f(t) \cdot cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

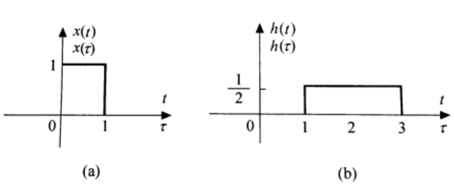
频域卷积的应用——调制



$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积的运算*

- 卷积的计算过程是将其中一个函数翻转并平移后，与另一个函数乘积的积分，是一个对平移量计算的函数
- 例：$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$



卷积运算步骤

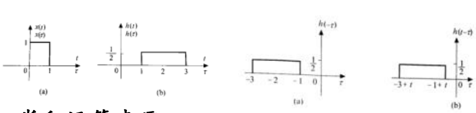
① 换元：将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 中的变量 t 更换为变量 τ；

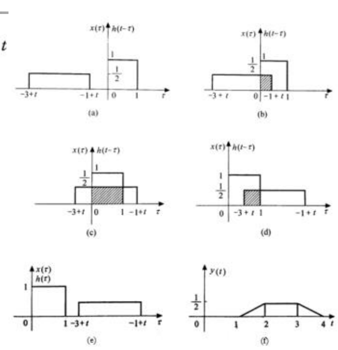
② 折叠：作出 $h(\tau)$ 相对于纵轴的镜像 $h(-\tau)$；

③ 位移：把 $h(-\tau)$ 平移一个 t 值；

④ 相乘：将位移后的函数 $h(t-\tau)$ 乘以 $x(\tau)$；

⑤ 积分：$h(t-\tau)$ 和 $x(\tau)$ 乘积曲线下的面积即为 t 时刻的卷积值。





微分和积分

微分特性	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega\cdot F(\omega)$
积分特性	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

$$\underset{F(\omega)}{f(t)} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{微分器}\\ j\omega\end{matrix}} \longrightarrow \underset{j\omega\cdot F(\omega)}{\frac{df(t)}{dt}}$$

$$\underset{F(\omega)}{f(t)} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{积分器}\\ 1/j\omega\end{matrix}} \longrightarrow \underset{\frac{1}{j\omega}\cdot F(\omega)}{\int f(t)dt}$$

练习:

- 求下列信号的频谱

$$f(t)=\begin{cases}1+\cos t & |t|\le\pi\\ 0 & |t|>\pi\end{cases}$$

- 提示：门函数$G_\tau(t)$表示幅度为1，脉宽为τ；可表示1+cos t与门函数相乘
- 解法1：利用欧拉公式，傅氏变换的频移特性
- 解法2：利用频域卷积定理，δ函数卷积运算

五. 能量谱（密度）、功率谱（密度）及自相关函数

- 确知信号→频谱、能量谱和功率谱
- 随机信号→功率谱
- 能量信号的能量谱
- 功率信号的功率谱
- 相关函数和谱密度的关系

1. 能量谱（密度）

- 实能量信号 $f(t)$ 的能量

$$\boxed{E=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega}$$

—— **Parseval定理**

定义：**能量谱密度** $E(\omega)=|F(\omega)|^2$

总能量 $E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}E(f)df$

证:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot F(-\omega)\,d\omega$$

$\because f(t)$是实信号

$\therefore F(-\omega)=F^*(\omega)$

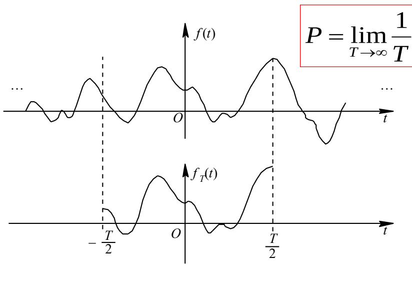
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot F^*(\omega)\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

2. 功率谱（密度）

- 实功率信号 $f(t)$ 的平均功率

$$\boxed{P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)\,dt}$$



- 设截短信号为 $f_T(t)$，能量为E_T，则Parseval等式：

$$f_T(t)=\begin{cases} f(t) & |t|\le \frac{T}{2} \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E_T=\int_{-\infty}^{\infty} f_T^{\,2}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_T(\omega)|^2\,d\omega$$

- 平均功率的频域表示：

$$\boxed{P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}d\omega}$$

$$f_T(t)=\begin{cases} f(t) & |t|\le \frac{T}{2} \\ 0 & else \end{cases}$$

- 证：

$$E_T=\int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t)dt\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_T(\omega)|^2 d\omega\right]$$

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P(\omega)d\omega$$

- 定义**功率谱密度**

$$\boxed{P(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}}$$

- 平均功率

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)df$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}d\omega$$

- 周期信号的功率谱
  - 平均功率 $\boxed{P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2}$

    —— 频域表示了各次谐波分量的功率之和
  - 功率谱密度

$$\boxed{P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\,\delta(\omega-n\omega_0)}$$

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega$$

- 证：

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\right]dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt\right]$$

$\because f(t)$是实信号

$\therefore F_{-n}=F_n^*$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\cdot F_{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2$$

$$P=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F_n|^2\delta(\omega-n\omega_0)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}|F_n|^2\delta(\omega-n\omega_0)d\omega$$

3. 自相关函数

- **定义**
  - 实能量信号 $R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \quad -\infty<\tau<\infty$
  - 实功率信号 $R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt \quad -\infty<\tau<\infty$

  周期信号 $R(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt \quad -\infty<\tau<\infty$
- **性质**
  - 自相关是偶函数：$R(\tau)=R(-\tau)$
  - 自相关在原点有最大值：$R(\tau)\le R(0)$

- 相关定理
  - **能量信号**的自相关函数与能量谱密度互为付氏变换

$$\boxed{R(\tau) \Leftrightarrow E(\omega)=|F(\omega)|^2}$$

$$\left(R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega\right)$$

当τ=0时，$R(0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)d\omega=E$，即信号能量

- 证：设$f(t)$是能量信号，且$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$，则：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega(t+\tau)}d\omega\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{j\omega t}dt\right]\cdot F(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F^*(\omega)\cdot F(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\cdot e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

- **功率信号**的自相关函数与功率谱密度互为付氏变换

$$\boxed{R(\tau)\Leftrightarrow P(\omega)}$$

$$\left(R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega\right)$$

平均功率：$P=R(0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega$

- 例：求周期信号$f(t)=A\cos\omega_0 t$ 的功率谱
- 方法1：直接利用周期信号功率谱公式

$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\delta(\omega-n\omega_0)\qquad |F_n|=\frac{A}{2}\quad(n=\pm1)$$

- 方法2：先求自相关函数，再由付氏变换求功率谱

$$R(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)f(t+\tau)dt=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$R(\tau)\Leftrightarrow P(\omega)$$

$$P(\omega)=\frac{\pi A^2}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

六. 信号带宽

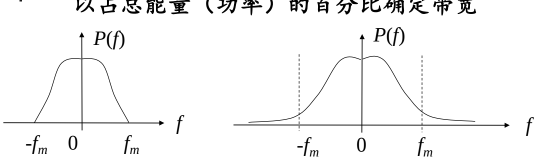
- 信号的能量或功率**主要部分集中的频率范围**，只按**正频率**计算，记作B，单位 Hz
- 常见的定义信号带宽的方法

（以基带信号为例）

  - 主要能量带宽
  - 等效矩形带宽
  - 3dB带宽
  - 主瓣带宽

1. 主要能量带宽

以占总能量（功率）的百分比确定带宽



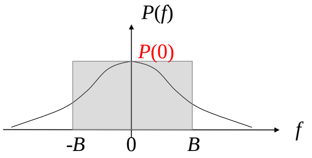
频带有限的信号，信号带宽 $B=f_m$

频带无限的信号，带内能量占总能量的x%

列出 $\dfrac{\int_{-fm}^{fm}P(f)df}{\int_{-\infty}^{\infty}P(f)df}=90\%$ ，求出f_m，信号带宽 $B=f_m$

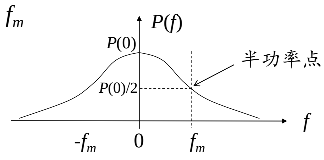
2. 等效矩形带宽

- 设能量谱（功率谱）在0频点有最大值$P(0)$
- 求满足 $\int_{-\infty}^{\infty} P(f)df = 2B \cdot P(0)$ 的B
- 信号带宽为 B



3. 3dB带宽

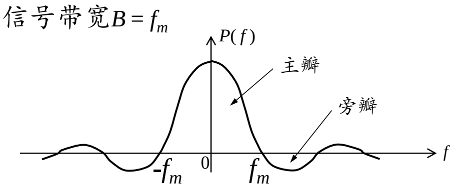
- 信号能量谱（功率谱）下降到最大处的1/2处所对应的频率区间
  - 设能量谱（功率谱）在0频率点为最大值
  - 求满足 $P(f_m) = P(0)/2$ 的f_m
  - 信号带宽 $B = f_m$



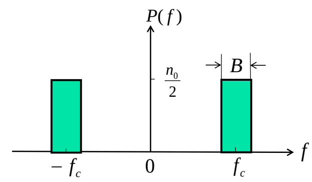
$B \propto \frac{1}{\tau}$

4. 主瓣带宽

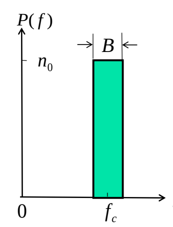
- 某些信号的能量谱（功率谱）具有主瓣和旁瓣的特点，且主要能量集中在主瓣内
- 用主瓣的宽度表示信号带宽
- 信号带宽$B = f_m$



- **例：已知信号功率谱，求信号平均功率**



双边谱



单边谱

七. 信号通过线性系统

- **线性时不变系统**
  - **线性：** 满足叠加定理

    若：$x_i(t) \to y_i(t)$，

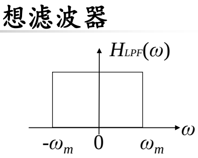
    则：$\sum_i a_i x_i(t) \to \sum_i a_i y_i(t)$
  - **时不变：** 系统特性不随时间变化

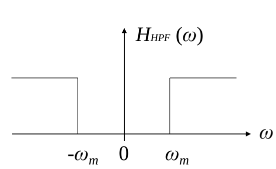
    若$x_i(t) \to y_i(t)$，

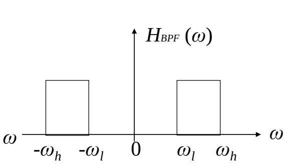
    则：$x_i(t-\tau) \to y_i(t-\tau)$

典型的线性系统——理想滤波器

- 理想低通滤波器LPF
- 理想高通滤波器HPF
- 理想带通滤波器BPF







$$h(t)$$
$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow h(t)$$

- **系统特性-传递函数**
  - 输入冲激函数$\delta(t)$称作系统的**激励**，通过系统后的输出$h(t)$叫作**响应**，即满足：

$$\boxed{h(t)=\delta(t)*h(t)}$$

  - $h(t)$称为单位冲激响应，$H(\omega)$称作传递函数，表示系统的传输特性，即：

$$\xrightarrow[F_i(\omega)]{f_i(t)} \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega) \end{matrix}} \xrightarrow[F_o(\omega)=F_i(\omega)\cdot H(\omega)]{f_o(t)=f_i(t)*h(t)}$$

- 若输入$F_i(\omega)$，输出$F_o(\omega)$，则：

$$F_o(\omega)=F_i(\omega)\cdot H(\omega)$$

- **系统传递函数**

$$H(\omega)=\frac{F_o(\omega)}{F_i(\omega)}=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(\omega)|\sim\omega$　系统幅频特性

$\varphi(\omega)\sim\omega$　系统相频特性

信号通过线性系统的运算*

- 任何信号均可看作是时延单位冲激信号的加权和，设信号为$x(t)$，则表示各个τ时刻冲激的幅度之和：

  $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$

- 单位冲激响应：$\delta(t)*h(t)=h(t)$

  各个τ时刻的单位冲激响应：$\delta(t-\tau_i)*h(t)=h(t-\tau_i)$

- 利用叠加定理：$x(t)$的响应是各个τ时刻的响应之和

  $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$

- 利用时域卷积定理：$Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$

时域卷积定理证明

- $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- $Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$

$$\begin{aligned}
Y(\omega)=\mathcal{F}[y(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega t}dt\\
&=\mathcal{F}[x(t)*h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)[H(\omega)e^{-j\omega\tau}]d\tau\\
&=H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\
&=H(\omega)\cdot X(\omega)
\end{aligned}$$

$$E_o(\omega)=|F_o(\omega)|^2=|H(\omega)\cdot F_i(\omega)|^2=|H(\omega)|^2\cdot|F_i(\omega)|^2$$

- 响应的能量谱和功率谱
  - **能量信号**

    若激励$f_i(t)$是能量信号，则响应$f_o(t)$也是能量信号，

    能量谱为：$E_o(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot E_i(\omega)$

  - **功率信号**

    若激励$f_i(t)$是功率信号，则响应$f_o(t)$也是功率信号，

    功率谱为：$P_o(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot P_i(\omega)$

$$F_o(\omega)=k\cdot e^{-j\omega t_d}F_i(\omega)$$
$$=H(\omega)F_i(\omega)$$

- 无失真传输
  - 时域条件　$f_o(t)=k\cdot f_i(t-t_d)$
  - 频域条件　$H(\omega)=k\cdot e^{-j\omega t_d}=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

    幅频特性：　$|H(\omega)|=k$

    相频特性：　$\varphi(\omega)=-t_d\omega$

    群时延$\tau=-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=t_d$

  - 理想系统的幅频特性是常数，相频特性是过原点的一条直线；非理想时可产生线性失真

- 传输衰减与增益
  - 信号经过系统后，信号变强称为**增益**
  - 信号经过系统后，信号变弱称为**衰减**
  - 增益= －衰减

$$功率增益 = 10\lg\frac{P_o}{P_i}$$

$$电压增益 = 20\lg\frac{V_o}{V_i}$$

$$电流增益 = 20\lg\frac{I_o}{I_i}$$

  - 通信系统中一般使用**功率增益**，单位*dB*

本章小结

- 傅立叶变换的性质
- 常用几种信号的时域和频域分析
- 计算信号能量/功率的方法
  - 通过能量谱/功率谱
  - 通过自相关函数
- 信号带宽的概念
- 信号通过线性系统时域频域变化
- 系统无失真传输的条件

作业

- 阅读教材第二章内容
- 习题：3、5（~~自相关函数及其波形、信号能量~~）、9
- 补充题1：已知：$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

  求：$f(6-2t)$的傅里叶变换
- 补充题2：求下列信号的频谱

$$f(t) = \begin{cases} 1+\cos t & |t| \le \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$

提示：门函数$G_\tau(t)$表示幅度为1，脉宽为τ