



# 第四讲

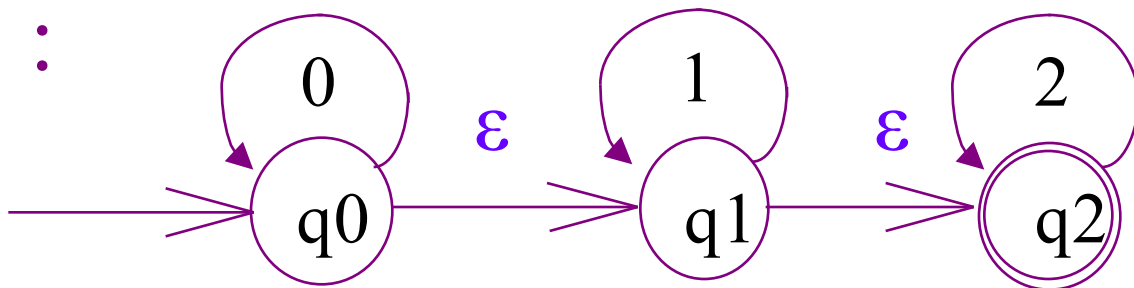
- ✧ 带  $\varepsilon$ -转移的有限自动机
- ✧ 正则表达式
- ✧ 右线性文法与正则集

## 第四节 有 $\varepsilon$ 转换的NFA

### 一、定义

概念: 当输入空串 $\varepsilon$  (无输入) 时, 也能引起状态的转移.

例:



输入“002”时的转移格局:

$$q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{2} q_2$$

# $\varepsilon$ -NFA 的形式定义

一个  $\varepsilon$ -NFA 是一个五元组  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ .

✧ 有限状态集

✧ 有限输入符号集

✧ 转移函数

✧ 一个开始状态

✧ 一个终态集合

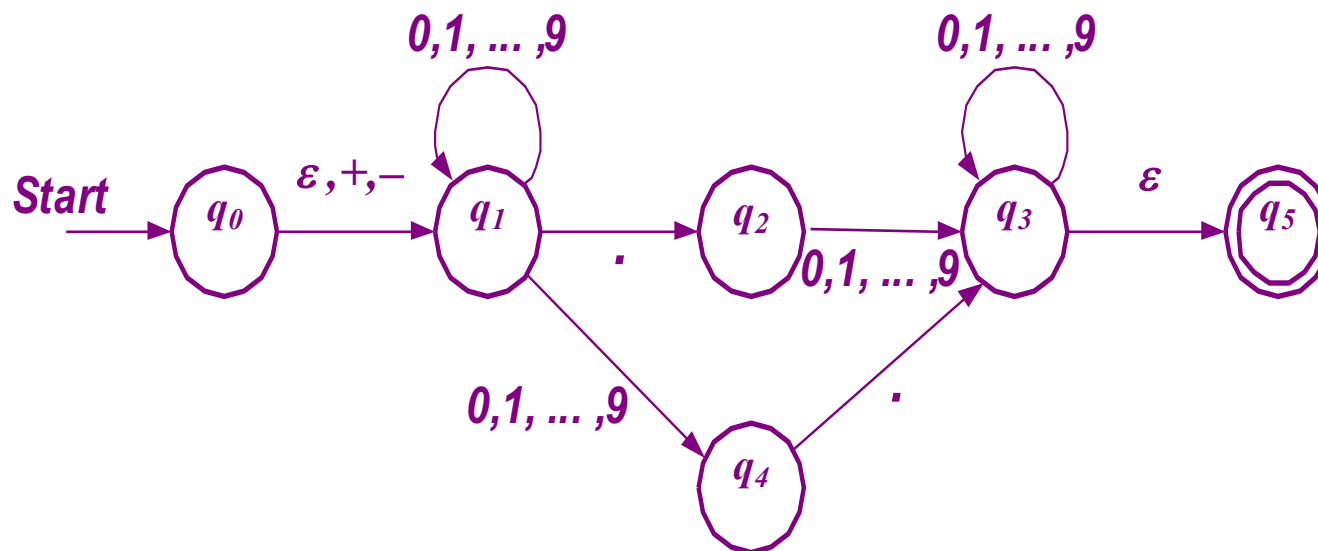
✧ 与 NFA 的不同之处

$$\delta: Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

$$q_0 \in Q$$

$$F \subseteq Q$$

# $\varepsilon$ - NFA 如何接受输入符号串

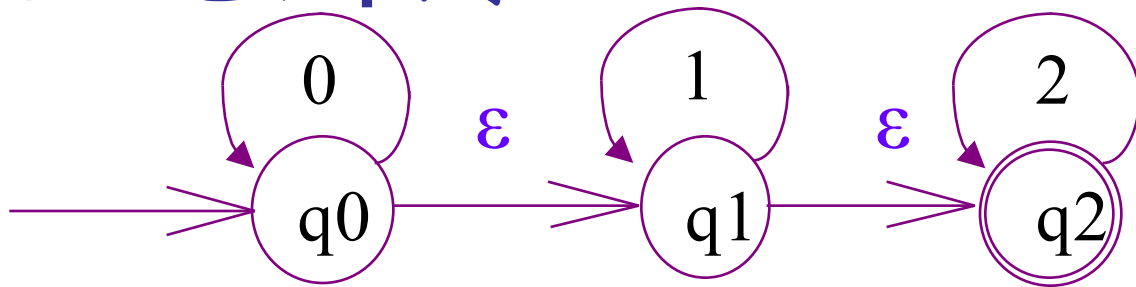


✧ 该  $\varepsilon$  - NFA 可以接受的字符串如：

- 3.14
- +.314
- - 314.

## 二、 $\varepsilon$ -闭包 (closure) 概念

✧ 状态  $q$  的  $\varepsilon$ -闭包, 记为  $\varepsilon$ -CLOSURE 或 ECLOSE, 定义为从  $q$  经所有的  $\varepsilon$  路径可以到达的状态 (包括  $q$  自身), 如:



- $\varepsilon$ -CLOSURE ( $q_0$ ) = {  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  }
- $\varepsilon$ -CLOSURE ( $q_1$ ) = {  $q_1$ ,  $q_2$  }
- $\varepsilon$ -CLOSURE ( $q_2$ ) = {  $q_2$  }

- 
- 状态子集I 的 $\epsilon$ -闭包:

$$\epsilon\text{-CLOSURE}(I) = \bigcup_{q \in I} \epsilon\text{-CLOSURE}(q)$$

例:

$$\begin{aligned}\epsilon\text{-CLOSURE}(\{q1, q2\}) \\ &= \epsilon\text{-CLOSURE}(q1) \cup \epsilon\text{-CLOSURE}(q2) \\ &= \{q1, q2\}\end{aligned}$$

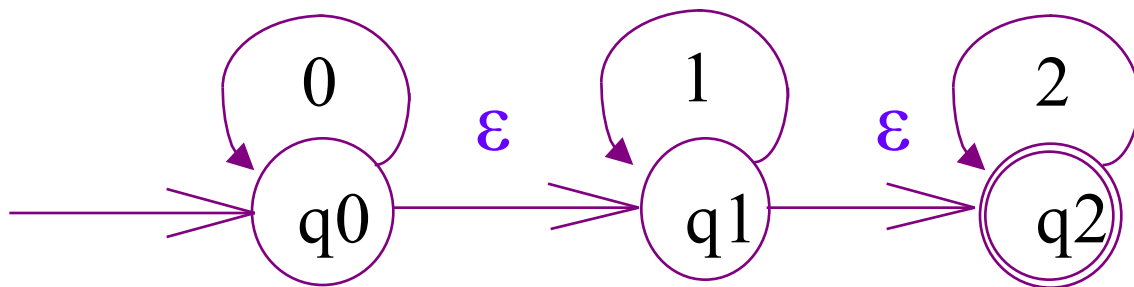
- **Ia** 概念 :

对于状态子集  $I \subseteq Q$ , 任意  $a \in T$ , 定义 **Ia** 如下:

$$Ia = \epsilon\text{-Closure}(P)$$

其中  $P = \delta(I, a)$ . 即 **P** 是从 **I** 中的状态经过一条标 **a** 的边可以到达的状态集合

例 :  $I = \{q0, q1\}$ , 求  $I_1$



$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon\text{-CLOSURE} \left( \delta \left( I, 1 \right) \right) \\ &= \varepsilon\text{-CLOSURE} \left( \delta \left( \{q0, q1\}, 1 \right) \right) \\ &= \varepsilon\text{-CLOSURE} \left( \Phi \cup \{q1\} \right) \\ &= \{q1, q2\} \end{aligned}$$

## 扩展转移函数适合于输入字符串

✧ 设一个  $\varepsilon$ -NFA,  $\delta: Q \times T \cup \{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$

✧ 扩充定义  $\delta': Q \times T^* \rightarrow 2^Q$

✧ 对任何  $q \in Q$ , 定义:

1  $\delta'(q, \varepsilon) = \varepsilon\text{-CLOSURE}(q)$

2  $\delta'(q, \omega a) = \varepsilon\text{-CLOSURE}(P)$

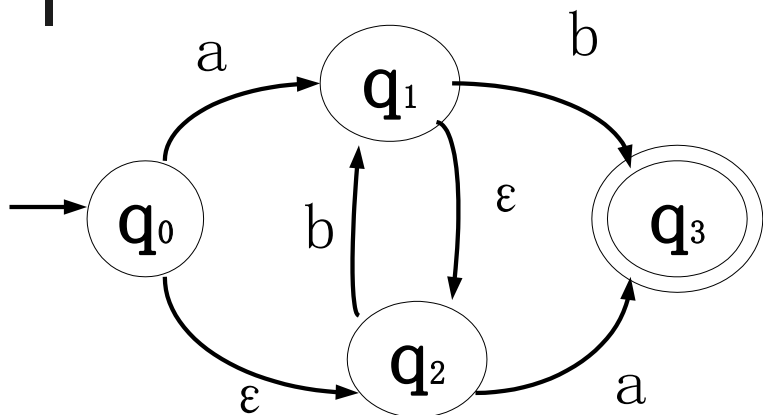
其中  $P = \{ p \mid \text{存在 } r \in \delta'(q, \omega) \wedge p \in \delta(r, a) \}$

**注意:** 此时  $\delta(q, a) \neq \delta'(q, a)$ ,

因为  $\delta(q, a)$  表示由  $q$  出发, 只沿着标  $a$  的路径所能到达的状态, 而  $\delta'(q, a)$  表示由  $q$  出发, 沿着标  $a$  (包括  $\varepsilon$  转换在内) 的路径所能到达的状态.



## $\epsilon$ -NFA中, $\delta$ 与 $\delta'$ 函数的不同



$\epsilon$ -CLOSURE( $q_0$ ) = { $q_0$ ,  $q_2$ }

$\epsilon$ -CLOSURE( $q_1$ ) = { $q_1$ ,  $q_2$ }

$\epsilon$ -CLOSURE( $q_2$ ) = { $q_2$ }

$\epsilon$ -CLOSURE( $q_3$ ) = { $q_3$ }

✧ 举例 计算  $\delta'(q_0, a)$

$$\delta'(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-CLOSURE}(q_0) = \{q_0, q_2\}$$

$$\delta'(q_0, a) = \epsilon\text{-CLOSURE}(\delta(\delta'(q_0, \epsilon), a))$$

$$= \epsilon\text{-CLOSURE}(\delta(\{q_0, q_2\}, a))$$

$$= \epsilon\text{-CLOSURE}(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a))$$

$$= \epsilon\text{-CLOSURE}(\{q_1\} \cup \{q_3\})$$

$$= \{q_1, q_2\} \cup \{q_3\}$$

$$= \{q_1, q_2, q_3\}$$

同理:  $\delta'(q_0, aa) = ?$

同理:  $\delta'(q_0, aa) = \{q_3\}$

### 三、 $\varepsilon$ -NFA 的语言

✧ 设一个  $\varepsilon$ -NFA  $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$

✧ 定义  $M$  的语言:

$$L(M) = \{ \omega \mid \delta'(q_0, \omega) \cap F \neq \phi \}$$

即 满足  $\delta'(q_0, \omega)$  含有  $F$  的一个状态



## 四、有 $\varepsilon$ 转换的NFA与无 $\varepsilon$ 转换的NFA的等价

### 1. $\varepsilon$ -NFA $\Leftrightarrow$ NFA

具有 $\varepsilon$ 转移的NFA是不具 $\varepsilon$ 转移的NFA的一般情况, 所以只要证明下面的定理即可:

定理: 如果L被一个具有  $\varepsilon$  转移的NFA接收, 那么L可被一个不具  $\varepsilon$  转移的NFA 接收.

证明思路: 构造一个不具  $\varepsilon$  转移的NFA, 证明其接收具有  $\varepsilon$  转移的NFA所接受的语言.

## 从 $\varepsilon$ - NFA 构造等价的 无 $\varepsilon$ NFA

◇ 设  $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$  是一个  $\varepsilon$  - NFA , 可构造一个无  $\varepsilon$  的 NFA  $M_1 = (Q, T, \delta_1, q_0, F_1)$ ,

■ 对任何  $a \in T$  ,  $\delta_1(q, a) = \delta'(q, a)$ .

$$F_1 = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{若 } \varepsilon\text{-CLOSURE}(q_0) \cap F \neq \phi \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

## 从 $\varepsilon$ -NFA 构造等价的无 $\varepsilon$ NFA

证明: 采用归纳法证明  $\delta_1(q_0, \omega) = \delta'(q_0, \omega)$ ,  $|\omega| \geq 1$ 。

当  $|\omega| = 0$ , 即  $\omega = \varepsilon$  时, 不一定相等。

$\because \delta_1(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$ ,


而  $\delta'(q_0, \varepsilon) = \varepsilon\text{-CLOSURE}(q_0)$

因此, 从  $|\omega| = 1$  开始证明

1. 当  $|\omega| = 1$  时, 定义相等。

由  $\delta_1$  定义

$$\delta_1(q_0, a) = \delta'(q_0, a)$$



设当 $|\omega| \leq n$ 时,  $\delta_1(q_0, \omega) = \delta'(q_0, \omega)$ , 则当 $|\omega| = n+1$ 时,  
左侧 =  $\delta_1(q_0, \omega a)$

$$= \delta_1(\delta_1(q_0, \omega), a)$$

$$= \delta_1(\delta'(q_0, \omega), a)$$

$$= \delta_1(R, a)$$

$$= \bigcup \delta_1(q, a)$$

$$= \bigcup \delta'(q, a)$$

$$= \delta'(R, a)$$

$$= \delta'(\delta'(q_0, \omega), a) \quad \because R = \delta'(q_0, \omega)$$

$$= \delta'(q_0, \omega a)$$

$$= \text{右侧}$$

由归纳假设

设  $R = \delta'(q_0, \omega)$

$q \in R$

$q \in R$ . 由  $\delta_1$  定义

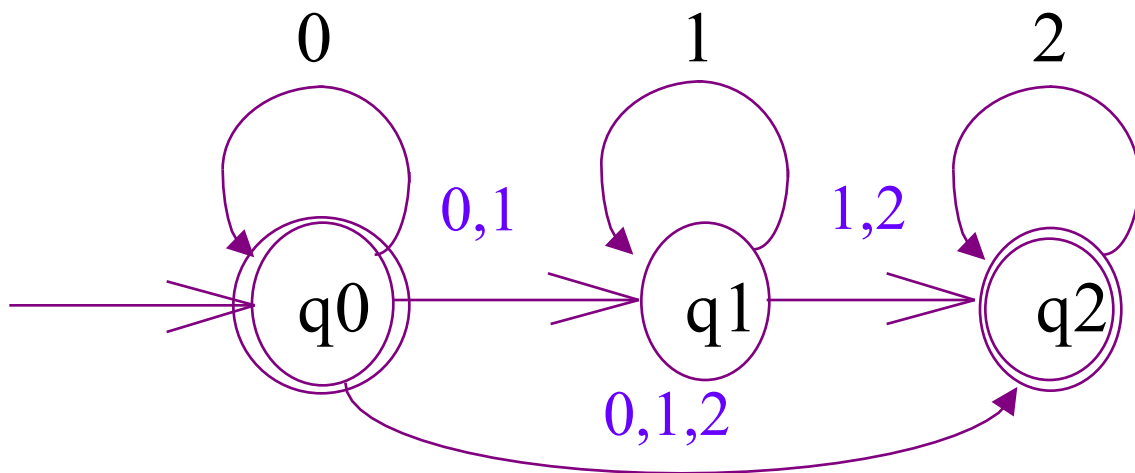
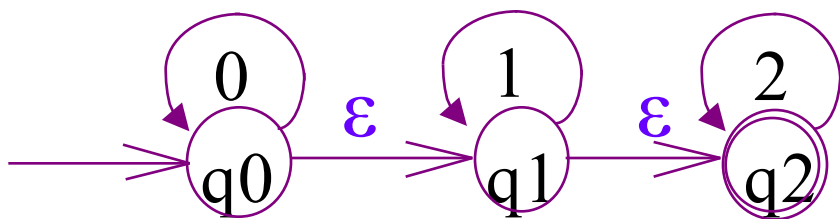
再证:  $\delta_1(q_0, \omega)$  含  $F_1$  的一个状态当且仅当  $\delta'(q_0, \omega)$  含  $F$  的一个状态  
(略)



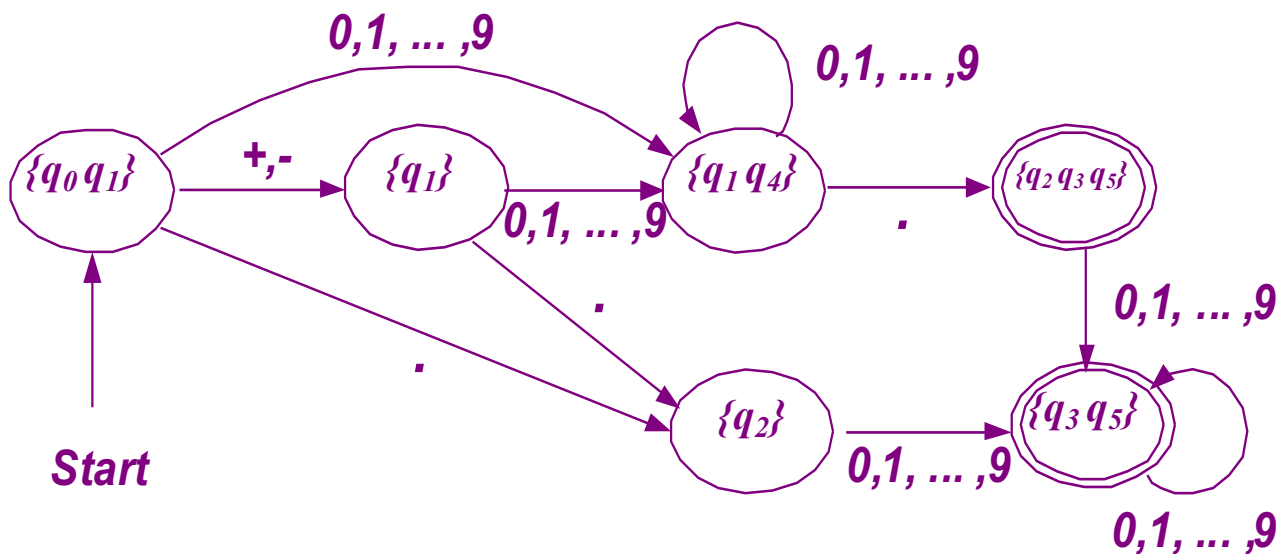
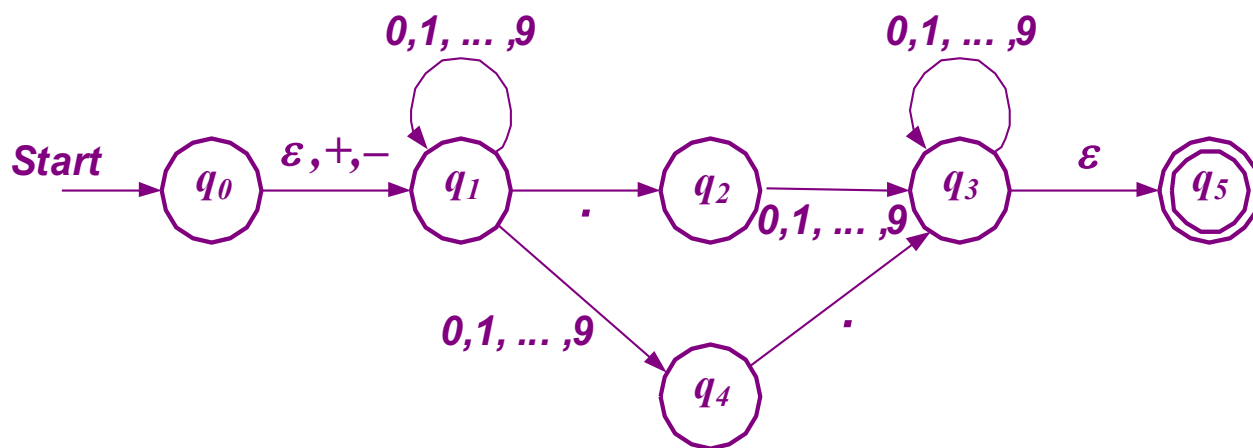
证明同时展示了一种将  $\varepsilon$ -NFA 转化为 NFA 的方法.

$\varepsilon$ -NFA  $\iff$  NFA  $\iff$  DFA

例：将  $\varepsilon$ -NFA 转换为 NFA.



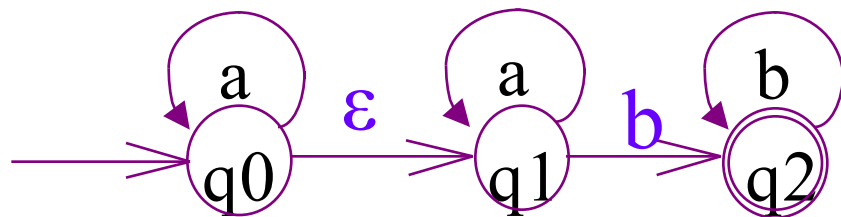
# 举例





# 课堂作业

将  $\varepsilon$ -NFA 转换为 NFA 和 DFA.





## 第五节 正则集和正则式

- ◇ **正则集**：字母表上一些特殊形式的字符串的集合，是正则式所表示的集合。
- ◇ **正则式**：用类似代数表达式的方法表示正则语言。
- ◇ **运算**：作用于语言上的三种代数运算
  - **联合** (*union*)
  - **连接** (*concatenation*)
  - **(星) 闭包** (*closure*)



# 正则表达式 (*regular expression*)

◇ 归纳定义正则表达式如下:

基础 :  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $a$  ( $a \in T$ ) 都是正则式 (原子正则式),

相应的正则集为  $\{\varepsilon\}$ ,  $\varphi$ ,  $\{a\}$

归纳: 如果 **A** 和 **B** 是正则式, 且分别代表集合  $L(A)$  和  $L(B)$ ,  
则  $(A+B)$ ,  $(A.B)$ ,  $A^*$  也是正则式, 分别表示以下正则集.

$L(A) \cup L(B)$  (语言 **A** / 语言 **B** 的串)

$L(A).L(B)$  (两个语言中的串的连接)

$L(A)^*$  (语言 **A** 中的串的多次连接)

◇ 仅通过有限次使用以上两步定义的表达式, 才是字母表  $T$  上的正则式。这些正则式所表示的字符串集合是  $T$  上的正则集。

# 正则表达式算符优先级

✧ 算符优先级 (*precedence*) 依次为

- \* ( *closure* )
- • 连接 (*concatenation*)
- + ( *union* )

定义：若两个正则式表示相同的正则集，则称这两个正则式相等。 即  $R1 = R2 \iff L(R1) = L(R2)$

注1：正则集是  $T^*$  的子集。

注2： $L^+$  包含  $\epsilon$  当且仅当  $L$  包含  $\epsilon$ 。

注3：每个正则集至少对应一个正则式（可有无穷多个正则式）

# 正则表达式举例

## ◇ 书 p55 例 1

正则集	正则式
$T$ 上所有 $a$ 和 $b$ 组成的字符串集合	(1) $(a+b)^*$
$T$ 上所有以 $a$ 为首后跟任意个 $b$ 的字符串集合	(2) $ab^*$
$T$ 上所有以 $b$ 为首后跟由 $a$ 和 $b$ 组成的字符串集合	(3) $b(a+b)^*$
$T$ 上所有含有两个连续 $a$ 或两个连续 $b$ 的字符串集合	(4) $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$

◇ 表示如下语言的正则表达式：语言中的每个字符串由交替的 0's 和 1's 构成

$$- (01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^*$$

$$- (\varepsilon + 1) (01)^* (\varepsilon + 0)$$

$$- (\varepsilon + 0) (10)^* (\varepsilon + 1)$$

# 语言的联合 (*union*) 运算

✧ 两个语言  $L$  和  $M$  的联合

$$L \cup M = \{ w \mid w \in L \vee w \in M \}$$

✧ 举例

设  $L = \{ 001, 10, 111 \}$ ,  $M = \{ \varepsilon, 001 \}$ ,  
则

$$L \cup M = \{ \varepsilon, 10, 001, 111 \}$$

# 语言的连接 (concatenation) 运算

✧ 两个语言  $L$  和  $M$  的连接

$$L \cdot M = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in M \}$$

✧ 有时记  $L \cdot M$  为  $LM$

✧ 举例

设  $L = \{ 001, 10, 111 \}$ ,  $M = \{ \varepsilon, 001 \}$ , 则

$$LM = \{ 001, 10, 111, 001001, 10001, 111001 \}$$

# 语言的闭包 (closure) 运算

## ✧ 语言 $L$ 的闭包

$L^* = \{ w^n \mid w \in L \wedge n \geq 0 \}$ , 其中  $w^n$  为  $w$  的  $n$  次连接

或  $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ , 其中

$L^0 = \{ \varepsilon \}$ ,  $L^1 = L$ ,  $L^2 = LL$ , ...

## ✧ 举例

设  $L = \{ 0, 11 \}$ , 则

$L^* = \{ \varepsilon, 0, 11, 00, 011, 110, 1111, 000, 0011, 0110, 01111, 1100, 11011, 11110, 111111, \dots \}$





## 正则式的性质

交换律 (*commutativity*) 和结合律 (*associativity*)

$$(1) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$(2) (\alpha \beta) \gamma = \alpha (\beta \gamma)$$

$$(3) \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

等幂律 (*idempotent law*)

$$(4) \alpha + \alpha = \alpha$$

分配律 (*distributive law*)

$$(5) \alpha (\beta + \gamma) = \alpha \beta + \alpha \gamma$$

$$(6) (\beta + \gamma) \alpha = \beta \alpha + \gamma \alpha$$

## 正则式的性质

么元 (*identities*) 和零元 (*annihilators*)

$$(7) \alpha + \phi = \phi + \alpha = \alpha$$

$$(8) \alpha \phi = \phi \alpha = \phi$$

$$(9) \alpha \varepsilon = \varepsilon \alpha = \alpha$$

与闭包相关的定律

$$(10) (\alpha^*)^* = \alpha^*$$

$$(11) \alpha^* = \alpha + \alpha^*$$

$$\phi^* = \varepsilon$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon$$

$$L^+ = LL^* = L^*L \quad (L^+ \text{的定义})$$

$$L^* = L^+ + \varepsilon$$

## 正则式的性质

$$(11) \quad \alpha^* = \alpha + \alpha^*$$

证明:

$$\because \alpha^* = \varepsilon + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$$

$$L(\alpha^*) = \{ \varepsilon \} \cup L(\alpha) \cup L(\alpha^2) \cup \dots \cup L(\alpha^n)$$

$$L(\alpha + \alpha^*) = L(\alpha) \cup (\{ \varepsilon \} \cup L(\alpha) \cup L(\alpha^2) \cup \dots \cup L(\alpha^n))$$

$$= L(\alpha) \cup L(\alpha^*)$$

$$\text{而 } L(\alpha) \subseteq L(\alpha^*)$$

$$\therefore \alpha + \alpha^* = \alpha^*$$



## 右线性文法与正则式

右(左)线性文法又称为正则文法，右线性文法与正则式可以用来代表同一正则语言。二者具有等效性。

例： 文法  $S \rightarrow aS, S \rightarrow a$

对应正则式：  $a^+$ ，或者  $a^*a$

## 从右线性文法导出正则式

求解规则:

设  $x \rightarrow \alpha x + \beta$ ,  $\alpha \in T^*$ ,  $\beta \in (N+T)^*$ ,  $x \in N$

则  $x$  的解为  $x = \alpha^* \beta$

证明:

$x \rightarrow \alpha x + \beta$  表示  $x$  有两个生成式:  $x \rightarrow \alpha x$  和  $x \rightarrow \beta$ ,  
生成的语言为  $(\beta, \alpha\beta, \alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\alpha\beta, \dots)$ , 显然该  
语言可用正则式  $\alpha^* \beta$  表示。

书p56, 例2

书p57, 例3

例 2 设右线性文法  $G=(\{S,A,B\},\{a,b\},P,S)$

生成式  $P$  如下:

$$S \rightarrow aA, S \rightarrow bB, S \rightarrow b$$

$$A \rightarrow bA, A \rightarrow \epsilon$$

$$B \rightarrow bS$$

以上生成式写成联立方程为

$$S = aA + bB + b$$

$$A = bA + \epsilon$$

$$B = bS$$

对式(2)利用规则  $R$  和性质  $\alpha \cdot \epsilon = \alpha$ , 得

$$A = b^*$$

将式(4)和式(3)代入式(1)中的  $A, B$ , 得

$$\begin{aligned} S &= ab^* + bbS + b = bbS + ab^* + b \\ &= (bb)^* (ab^* + b) \end{aligned}$$

所以由  $G$  产生的语言, 用正则式表示为  $(bb)^* (ab^* + b)$ 。

例 3 设右线性文法  $G=(\{A,S\},\{a\},P,S)$  生成式  $P$  如下:

$$S \rightarrow a, S \rightarrow aA, A \rightarrow aS$$

以上生成式写成联立方程为

$$S = aA + a$$

$$A = aS$$

将式(2)代入式(1)中的  $A$ , 得

$$S = aaS + a = (aa)^* a$$

表示的正则集是任意一对(包括 0 对)  $aa$  后跟一个  $a$ , 即  $\{a^{2n+1} \mid n \geq 0\}$ 。



## 第六节 正则集和右线性文法

- 正则集是由右线性文法产生的语言
- 由右线性文法产生的语言都是正则集

(一). 求证正则集是由右线性文法产生的语言

证明方法:

找出相应的右线性文法, 使之产生的语言是这些正则集。



1. 首先从最简单的正则式出发, 求证其正则集 $\Phi$ ,  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{a\}$ 是右线性语言。

证明:

对正则集 $\Phi$ ,

有右线性文法 $G = \{\{S\}, T, \Phi, S\}$ , 使 $L(G) = \Phi$

对正则集 $\{\varepsilon\}$ ,

有右线性文法 $G = \{\{S\}, T, \{S \rightarrow \varepsilon\}, S\}$ , 使 $L(G) = \{\varepsilon\}$

对正则集 $\{a\}$ ,

有右线性文法 $G = \{\{S\}, T, \{S \rightarrow a\}, S\}$ , 使 $L(G) = \{a\}$





2. 将对由并, 积, 闭包形成的正则集的证明, 改为对右线性语言的证明。

设在字母表 $T$ 上, 有语言 $L_1$ 和 $L_2$ , 则 $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1.L_2$ ,  $L_1^*$ 都是右线性语言。

**证明方法:** 分别找出相应的右线性文法。

设  $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$  产生 $L_1$

$G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$  产生 $L_2$

$N_1 \cap N_2 = \Phi$  (若不为空, 则可对 $N$ 中符号换名)

## (a). 求证 $L_1 \cup L_2$ 是右线性语言

构造  $G = (N, T, P, S)$  产生  $L$ , 使  $L = L_1 \cup L_2$

其中  $N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$ ,  $S$  为新的非终结符;

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$$

$$T = T_1 \cup T_2$$

先证  $L \subseteq L_1 \cup L_2$  :

在  $G$  中, 由  $G$  的定义, 对于任意, 意味着或者 (按  $G_1$  的产生式), 或者 (按  $G_2$  的产生式)

即文法  $G$  的每个句子或由  $G_1$  产生, 或由  $G_2$  产生。

$$\therefore L(G) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$$

再证  $L_1 \cup L_2 \subseteq L$  :

设有  $\omega \in L_1 \cup L_2$ , 则存在推导

$$S_1 \xrightarrow{G_1} \omega \text{ 或 } S_2 \xrightarrow{G_2} \omega$$

$$\therefore \text{必有 } S \xrightarrow{G} \omega. \text{ 即 } L_1 \cup L_2 \subseteq L.$$

命题得证 #

## (b). 求证 $L_1L_2$ 是右线性语言

构造 $G = (N, T, P, S)$

其中 $N = N_1 \cup N_2$ ,  $S = S_1$ ,

生成式 $P$ 为: 若 $A \rightarrow \alpha B \in P_1$ , 则它也属于 $P$

若 $A \rightarrow \alpha \in P_1$ , 则 $A \rightarrow \alpha S_2 \in P$

$P_2 \subseteq P$

先证  $L(G_1) \cdot L(G_2) \subseteq L(G)$

若有任意 $S_1 \Rightarrow^* \omega_1$  与  $S_2 \Rightarrow^* \omega_2$  分别属于 $G_1$ 和 $G_2$ 定义的语言中,

那么有  $S_1 \Rightarrow \alpha_1 A \Rightarrow \alpha_2 B \Rightarrow \alpha_3 C \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_1$  和

$S_2 \Rightarrow \beta_1 A_1 \Rightarrow \beta_2 B_2 \Rightarrow \beta_3 C_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_2$ ,

$\therefore S \Rightarrow S_1 \Rightarrow \alpha_1 A \Rightarrow \alpha_2 B \Rightarrow \alpha_3 C \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_1 \cdot S_2 \Rightarrow^* \omega_1 \cdot \omega_2$

$\therefore L(G_1) \cdot L(G_2) \subseteq L(G)$



## (b). 求证 $L_1.L_2$ 是右线性语言

再证  $L(G) \subseteq L(G_1).L(G_2)$

若有  $S \Rightarrow S_1 \Rightarrow \alpha_1 A \Rightarrow \alpha_2 B \Rightarrow \alpha_3 C \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow \omega_1.S_2 \Rightarrow^* \omega_1.\omega_2$

那么则必然在 $G_1$ 和 $G_2$ 中同时有

$S_1 \Rightarrow \alpha_1 A \Rightarrow \alpha_2 B \Rightarrow \alpha_3 C \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_1$  和

$S_2 \Rightarrow \beta_1 A_1 \Rightarrow \beta_2 B_2 \Rightarrow \beta_3 C_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_2$

$\therefore L(G) \subseteq L(G_1).L(G_2)$

命题得证 #

## (c). 求证 $L_1^*$ 是右线性语言

证明：构造 $G = (N, T, P, S)$

其中；  $N = N_1 \cup S$ ,  $S \notin N_1$ ,  $S$ 是一个新的非终结符,

生成式 $P$ 为： 如果 $A \rightarrow \alpha \in P_1$ , 则 $A \rightarrow \alpha \in P$ 。

如果 $A \rightarrow \alpha \in P_1$ , 则 $A \rightarrow \alpha S \in P$

$S \rightarrow S_1, S \rightarrow \varepsilon \in P$ 。

先证  $L(G) \subseteq L(G_1)^*$

若有 $S \Rightarrow S_1 \Rightarrow \omega_1 S \Rightarrow^* \omega_1 \omega_2 S \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow^* \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i S \Rightarrow \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i$

则在 $G_1$ 中必然有

$S_1 \Rightarrow^* \omega_1$  ;  $S_1 \Rightarrow^* \omega_2$  ;  $\dots$  ;  $S_1 \Rightarrow^* \omega_i$

$\therefore L(G) \subseteq L(G_1)^*$



## (c). 求证 $L_1^*$ 是右线性语言(续)

再证  $L(G_1)^* \subseteq L(G)$

若 $G_1$ 中有

$$S_1 \Rightarrow^* \omega_1 ; S_1 \Rightarrow^* \omega_2 ; \dots ; S_1 \Rightarrow^* \omega_i$$

则在 $G$ 中必然有

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow S_1 \Rightarrow \omega_1 S \Rightarrow^* \omega_1 \omega_2 S \Rightarrow \dots \\ &\Rightarrow^* \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i S \Rightarrow \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i \end{aligned}$$

$$\therefore L(G_1)^* \subseteq L(G)$$

因此  $L^*$  可以用右线性文法描述。

证毕 #



## (二). 证明由右线性文法产生的语言是正则集

思路：

由给定的右线性文法可找出正则式，而正则式表示的语言即为正则集。

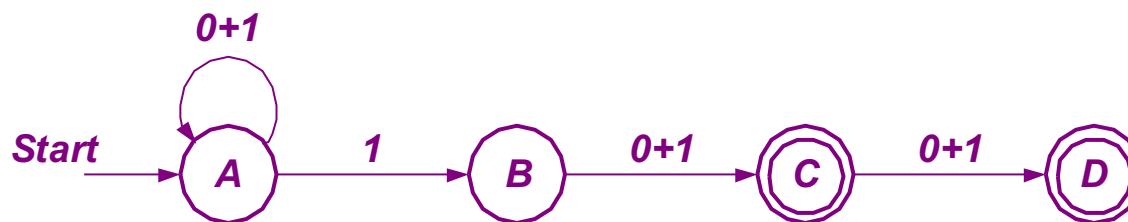
方法：

对右线性文法构造标准形式的正规表达式方程组，应用规则 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha^*\beta$ 进行消元，求解方程组，即可得出正规表达式。

由 (一) 和 (二) 即可得出下定理：

**定理：**一个语言是正则集，当且仅当该语言为右线性语言。

# 课堂练习



✧ **Exercise** 对于以上自动机，已经求出其语言的一个正规表达式如下

$$(0+1)^*1(0+1)+(0+1)^*1(0+1)(0+1)$$

使用分配律求出两种不同的更简单的与之等价的表达式。

✧ **参考结果**

$$(1) (0+1)^*1(\varepsilon+0+1)(0+1)$$

$$(2) (0+1)^*1(0+1)(\varepsilon+0+1)$$





# 课后练习

---

## chap3 习题

习题 15, 1, 4, 5