存贮模型

北京邮电大学 理学院

suncong86@bupt. edu. cn

工厂定期订购原料，存入仓库供生产之用；
车间一次加工出一批零件，供装配线每天生产之用；
商店成批购进各种商品，放在货柜里以备零售；
水库在雨季蓄水，用于旱季的灌溉和发电。

在此我们设想是在为一个工厂老板制定一个好的生产策略。

存贮量多少合适？

存贮量过大，存贮费用太高；存贮量太小，会导致一次性订购费用增加，或不能及时满足需求。

§1 不允许缺货的存贮模型

- 配件厂为装配线生产若干种部件，轮换生产不同的部件时因更换设备要付**生产准备费**（与生产数量无关），同一部件的产量大于需求时因积压资金、占用仓库要付**存贮费**。今已知某一部件的日需求量100件，生产准备费5000元，存贮费每日每件1元。如果生产能力远大于需求，并且不允许出现缺货，试安排该产品的生产计划，即**多少天生产一次**（称为生产周期），**每次产量多少**，可使**总费用最小**。

问题分析

- 若每天生产一次，每次100件，无存贮费，生产准备费5000元，每天费用5000元；
- 若10天生产一次，每次1000件，存贮费900+800+…+100=4500元，生产准备费5000元，总计9500元，平均每天费用950元；
- 若50天生产一次，每次5000件，存贮费4900+4800+…+100=122500元，生产准备费5000元，总计127500元，平均每天费用2550元。

寻找生产周期、产量、需求量、生产准备费和存贮费之间的关系，使每天的费用最少。

模型假设

- 假设工厂生产的产品单一，市场对该产品的需求量在时间上保持恒定，即在任何时刻，单位时间（每天）对产品的需求量恒为r（吨）；
- 每次生产需支付生产准备费（等一次性费用）C_1，在正常期间，还需支付货物的贮存费用，单位时间（天）单位（吨）货物需支付货物的贮存费用C_2;
- 生产能力为无限大（相对于需求量）；
- 工厂采用周期生产策略：每隔时间T（天）生产Q（吨）；且假设每次生产是在存货全部售出后即刻进行，不允许缺货，即$Q = r \cdot T$;
- 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量;
- 以$q(t)$表示在时刻t该货物的存量。

模型建立

总费用与变量的关系

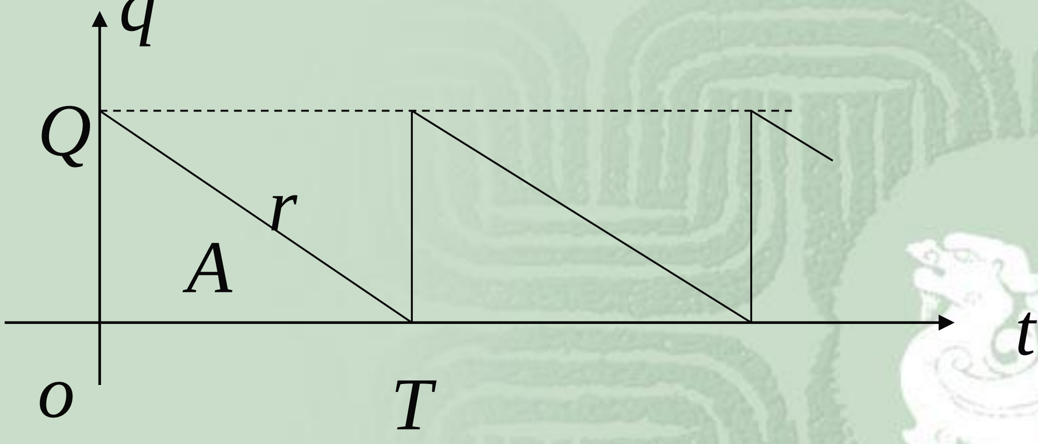
总费用=生产准备费+存贮费　存贮费=存贮单价*存贮量

存贮量=?

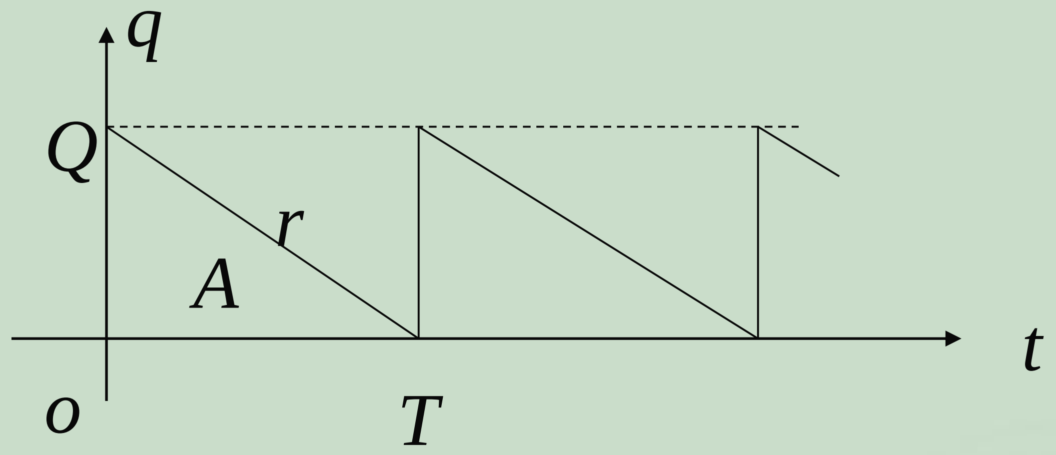
存贮量的计算

t 时刻的存贮量为 $q(t)$，$t=0$时生产 Q 件，存贮量 $q(0)=Q$，$q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T)=0$，如图。

$q(t)=Q-rt$，　$Q=rT$ 。



不允许缺货模型的存贮量$q(t)$



不允许缺货模型的存贮量*q*(*t*)

一个周期内存贮量 $\int_0^T q(t)dt = \frac{QT}{2}$ (A的面积)

一个周期内存贮费 $c_2\int_0^T q(t)dt$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\int_0^T q(t)dt = c_1 + c_2\frac{QT}{2} = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

每天平均费用 $C(T) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + c_2\frac{rT}{2}$

得到如下最优化问题：

$$Min \quad C = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 \cdot r \cdot T}{2}$$

$$T > 0$$

即本模型本质上只有一个独立的决策变量 T，其中目标函数 C 表示在进货周期为 T 时，商店在单位时间（每天）承担的平均费用。

模型求解

求T满足 $\min\ C(T)=\dfrac{c_1}{T}+c_2\dfrac{rT}{2}$

用微分法 $C'(T)=-\dfrac{c_1}{T^2}+c_2\dfrac{r}{2}=0$

$\Rightarrow\ T=\sqrt{\dfrac{2c_1}{c_2 r}}$ $\Rightarrow\ Q=rT=\sqrt{\dfrac{2c_1 r}{c_2}}$

每天平均最小费用 $C=\sqrt{2c_1c_2r}$

著名的 经济订货批量公式（EOQ公式）。

模型点评

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} \qquad C = \sqrt{2c_1 c_2 r}$$

当准备费 c_1 增加时，生产周期和产量都变大；

当存贮费 c_2 增加时，生产周期和产量都变小；

当日需求费 r 增加时，生产周期变小而产量变大。

这些定性结果符合常识，但仅凭常识是不能得到准确的依从关系，即定量关系（平方根，系数2 等）凭常识是无法得出的，只能由数学建模得到。

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \quad C=\sqrt{2c_1c_2r}$$

在本例中

当 $c_1=5000, c_2=1, r=100,$

得 $T=10,\ \ C=1000$

问题　这里得到的费用C与前面计算得950元有微小差别，你能解释吗?

§2 允许缺货的存贮模型

我们经常遇到这样的情形：当我们到一家商店中购买一件物品时，被店员告知该物品缺货——在这里我们讨论一个允许缺货的确定性贮存模型，和前面介绍的不允许缺货的确定性贮存模型相比，容易发现当一厂家由于缺货而支走消费者而失去销售机会，从而使利润减少；减少的利润可以视为因缺货而付出的费用，因此在建模时引入“缺货费”。

在允许存货的损失费不超过不允许缺货导致的准备费和存贮费的话，允许缺货应该是可以采取的策略。

模型假设

- 连续化，即设生产周期 T 和每周期初的存货量 Q 均为连续量；
- 工厂生产单一产品，市场对该产品的需求量在时间上保持恒定，即在任何时刻，产品每日的需求量为常数 r ；
- 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2；
- 生产能力为无限大（相对于需求量），允许缺货，每天每件产品缺货损失费C_3，但缺货数量需在下次生产（订货）时补足。
- 以q(t) 表示在时刻t该货物的存量，当时q(t)<0表示缺货量 。

模型建立

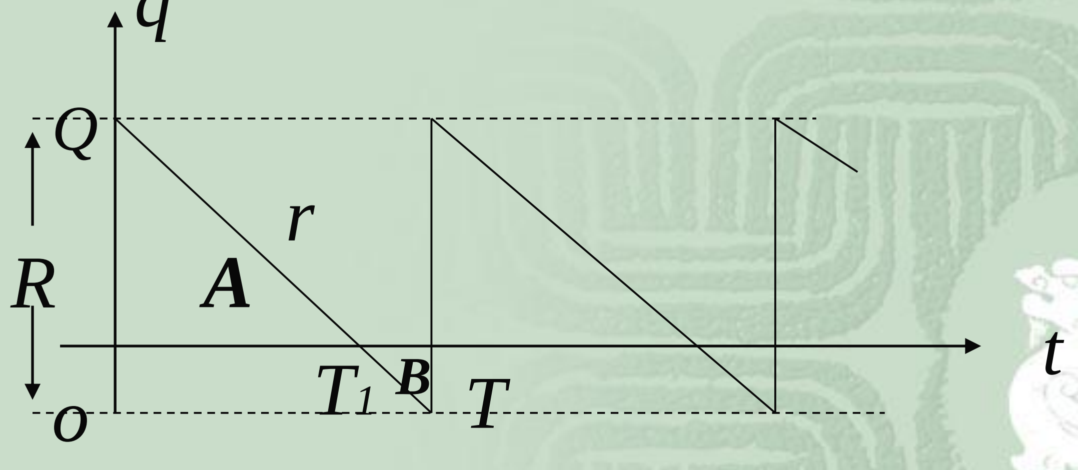
总费用与变量的关系

总费用=生产准备费+存贮费+缺货损失费

存贮费=存贮单价*存贮量　　缺货损失费=缺货单价*缺货量

存贮量=?，缺货量=?

因存贮量不足造成缺货，因此 $q(t)$ 可取负值， $q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T_1) = 0$，如图。$q(t) = Q - r\,t$， $Q = r\,T_1$ 。



允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2\dfrac{QT_1}{2} = c_2\dfrac{Q^2}{2r}$

一个周期内缺货损失费 $c_3\int_{T_1}^{T} q(t)dt = c_3\dfrac{(rT-Q)(T-T_1)}{2}$

$$= c_3\frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{Q^2}{2r} + c_3\frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

每天平均费用

$$C(T,Q) = \frac{c_1}{T} + c_2\frac{Q^2}{2rT} + c_3\frac{(rT-Q)^2}{2rT}$$

得到如下最优化问题：

$$Min \quad C = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 \cdot Q^2}{2rT} + \frac{c_3 \cdot (rT - Q)^2}{2rT}$$

$$T > 0$$

即本模型有两个独立的决策变量 T、 Q，其中目标函数 C 表示在进货周期为 T 、进货量为 Q 时，商店在单位时间（每天）承担的平均费用，为 T、Q 的一个二元函数 。

模型求解

求T,Q满足

$$\min\ C(T,Q)=\frac{c_1}{T}+c_2\frac{Q^2}{2rT}+c_3\frac{(rT-Q)^2}{2rT}$$

用微分法 令

$$\frac{\partial C(T,Q)}{\partial T}=0,\quad \frac{\partial C(T,Q)}{\partial Q}=0$$

$$\Rightarrow\quad T^*=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}\cdot\frac{c_2+c_3}{c_3}}\qquad Q^*=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\cdot\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

每天平均最小费用 $C=C(T^*,Q^*)$

每个周期的进货量 $R=rT^*$

由 $R = rT^*$ 得

$$R = r\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}\cdot\frac{c_2+c_3}{c_3}} \qquad \lambda = \frac{c_2+c_3}{c_3}$$

与不允许缺货模型相比较，有

$$T^* = \lambda T, \quad Q^* = Q/\lambda, \quad R = \lambda Q$$

模型点评

$$T^* = \lambda T, \quad Q^* = Q/\lambda, \quad R = \lambda Q \quad \lambda = \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

1) $\lambda > 1$, $T^* > T$, $Q^* < Q$, $R > Q$ ，即允许缺货时，周期和供货量增加，周期初的存贮量减少。

2) 缺货损失费愈大，λ 愈小，T^* 愈接近 T ，Q^*，R 愈接近 Q 。

3）当 $c_3 \to \infty$ 时，$\lambda \to 1$, $T^* \to T$, $Q^* \to Q$, $R \to Q$

不允许缺货模型可视为允许缺货模型的特例。

$$T^{*} = \lambda T，\ Q^{*} = Q / \lambda，\ R = \lambda Q$$

将本模型的解和前面讨论得不允许缺货的模型的解进行比较，发现进货周期变长，而一次供货量却有所减少，即确实存在一段时间，工厂是处在缺货状态下的。

如果我们关心的是一家有盈利的工厂，其盈利的源泉在于销售收入，即其盈利行为发生在有货供应的时段内，而在缺货期内只能错失销售机会，因此，定性判断，若以一次供货量取

$$Q^{*} = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \cdot \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

且工厂将生产周期缩短到 $T_1^{*} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r} \cdot \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$

其盈利会增加。即对生产单一商品的以盈利为目的的厂家不应当允许缺货。这与本模型及其解答存在矛盾，问题发生在什么地方？

在追求利润最大化与成本最小化之间是有差别的，前者是一种积极的经济行为目标，后者相对消极，只有假定总的销售收入（产值）相同时，二者才是等价的；

- 如果在假定二者一致的前提下，若

$$q(t)=\begin{cases} Q-rt & \text{IF } 0\le t\le Q/r \\ r & \text{IF } Q/r<t\le T \end{cases}$$

即可得要么不允许缺货，要么永不进货（即放弃经营该产品）的结论——在自由市场的条件下，这样的结论更为实用，而本节模型及其解答只有当商家在对一种商品的经营具有垄断地位时才有实用意义。

在自由市场的条件下，人们在日常生活中遇到某些商品在某家商店缺货的现象，本节模型是不能给出回答的。

原因在于通常的厂家（商店）生产（经营）的商品并非单一，产品需求不会稳定不变，消费是有很大随机性的。可以试着考虑在假定产品需求量确定的前提下，同时生产两种以上产品的最优生产策略问题（或经营两种以上商品的最优进货策略问题）。

§3. 优化模型的一般意义

1.1 优化模型的数学描述

最优化（optimization）一般是指在某种状况下作出最好的决策，或者是从几个候选者中选出最好的，这种问题常用下面的数学模型描述：

“在给定的约束条件（constraint）下，找出一个决策变量（decision variable）的值，使得被称为目标函数（objective function）的表达愿望尺度的函数达到最小或最大值。”

将一个优化问题用数学式子来描述，即求函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$$

在约束条件 $h_i(\boldsymbol{x})=0, i=1,2,\ldots,m.$

和 $g_i(\boldsymbol{x})\le 0(g_i(\boldsymbol{x})\ge 0), i=1,2,\ldots,p.$

下的最大值或最小值，其中

$\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 设计变量（决策变量）

$f(\boldsymbol{x}) \longrightarrow$ 目标函数

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega} \longrightarrow$ 可行域

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega}(or \quad \max_{\mathbf{x}\in\Omega})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$s.\ t.\quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1,2,\ldots,m.$$

$$g_i(\boldsymbol{x}) \le 0(g_i(\boldsymbol{x}) \ge 0), i = 1,2,\ldots,p.$$

$s.\ t.\quad (subject\ \ to)$ “受约束于”之意

1.2 优化模型的分类

优化方法涉及的应用领域很广，问题种类与性质繁多，根据不同的原则可以给出不同的分类。从数学建模的角度，对最优化问题的一些典型分类及相关概念的了解是有益的。

1.根据是否存在约束条件

有约束问题和无约束问题。

2.根据问题的凸性

凸问题和非凸问题。

3.根据目标函数和约束条件表达式的性质

线性规划，非线性规划，二次规划，多目标规划等。

（1）线性规划（Liner Programing）

目标函数和所有的约束条件都是设计变量的线性函数。

$$\min u = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, i = 1,2,\ldots,n. \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

（2）二次规划问题

目标函数为二次函数，约束条件为线性约束。

$$\min\ u = f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,\ldots,n. \\ x_i \ge 0. i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

（3）一般非线性规划

目标函数和约束条件中，至少有一个非线性函数。

$$\min\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$$

$$s.\ t.\quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1,2,\dots,m.$$

$$g_i(\boldsymbol{x}) \le 0(g_i(\boldsymbol{x}) \ge 0), i = 1,2,\dots,p.$$

4. 根据设计变量的取值范围

连续优化问题和离散优化问题。

5. 根据变量具有确定值还是随机值

确定规划和随机规划。