复习

- **2型文法推导，归约，语法树，二义性**

  对于前缀表达式文法G1:

  E::= – EE

  E::= – E

  E::= a | b | c

  画出文法的句子 – – a – bc 的推导、归约过程，和所有可能语法树，判断该文法是否具有二义性。

§4.2 上下文无关文法的变换

- 上下文无关文法(Context-Free Grammar, CFG) 的简化
  - 消无用符号
  - 消 ε 产生式
  - 消单产生式
- 对生成式形式进行标准化

生成式的标准形式

- Chomsky范式 (CNF - Chomsky Normal Form)

生成式形式为$A \rightarrow BC$，$A \rightarrow a$，$A, B, C \in N$，$a \in T$ (后面将证明, 每个上下文无关文法都有一个CNF文法)

- Greibach范式 (GNF)

生成式形式为$A \rightarrow a\beta$，$a \in T$，$\beta \in N^*$

意义：对每个2型语言都可找到一个文法使产生式的右端都以终结符开始

中心思想:消除左递归.

变换算法 -- 消去无用符号

✧ 有用符号（useful symbol）

对于 CFG $G = (N, T, P, S)$，称符号 $X \in N \cup T$ 是有用的，当且仅当 $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta \overset{*}{\Rightarrow} w$，其中 $w \in T^*$，$\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$.

– 称符号 X 是生成符号（generating symbol），当且仅当存在 $w \in T^*$，满足 $X \overset{*}{\Rightarrow} w$.

– 称符号 X 是可达符号（reachable symbol），当且仅当存在 $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$，满足 $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta$.

✧ 无用符号（useless symbol）

– 非生成符号

– 不可达符号

消去无用符号

- 计算生成符号（generating symbol）集
- 计算可达符号（reachable symbol）集
- 消去非生成符号、不可达符号
- 消去相关产生式

计算生成符号集

✧**思路** 对于 CFG $G=(N, T, P, S)$，可通过下列归纳步骤计算生成符号集合：

基础 任何终结符 $a \in T$ 都是生成符号；

归纳 如果有产生式 $A \to \alpha$，其中 $\alpha \in (N \cup T)^*$ 的每一个符号都是生成符号，则 A 也是生成符号；

算法1: 找出有用非终结符

✧步骤:

(1) $N_0 = \Phi$ (赋为Φ) N_0为有用的非终结符集

(2) $N' = \{A \mid A \rightarrow \omega$且$\omega \in T^*\}$ N'为非终结符集合

(3) 如果$N_0 \neq N'$ 则转(4),否则转(6)

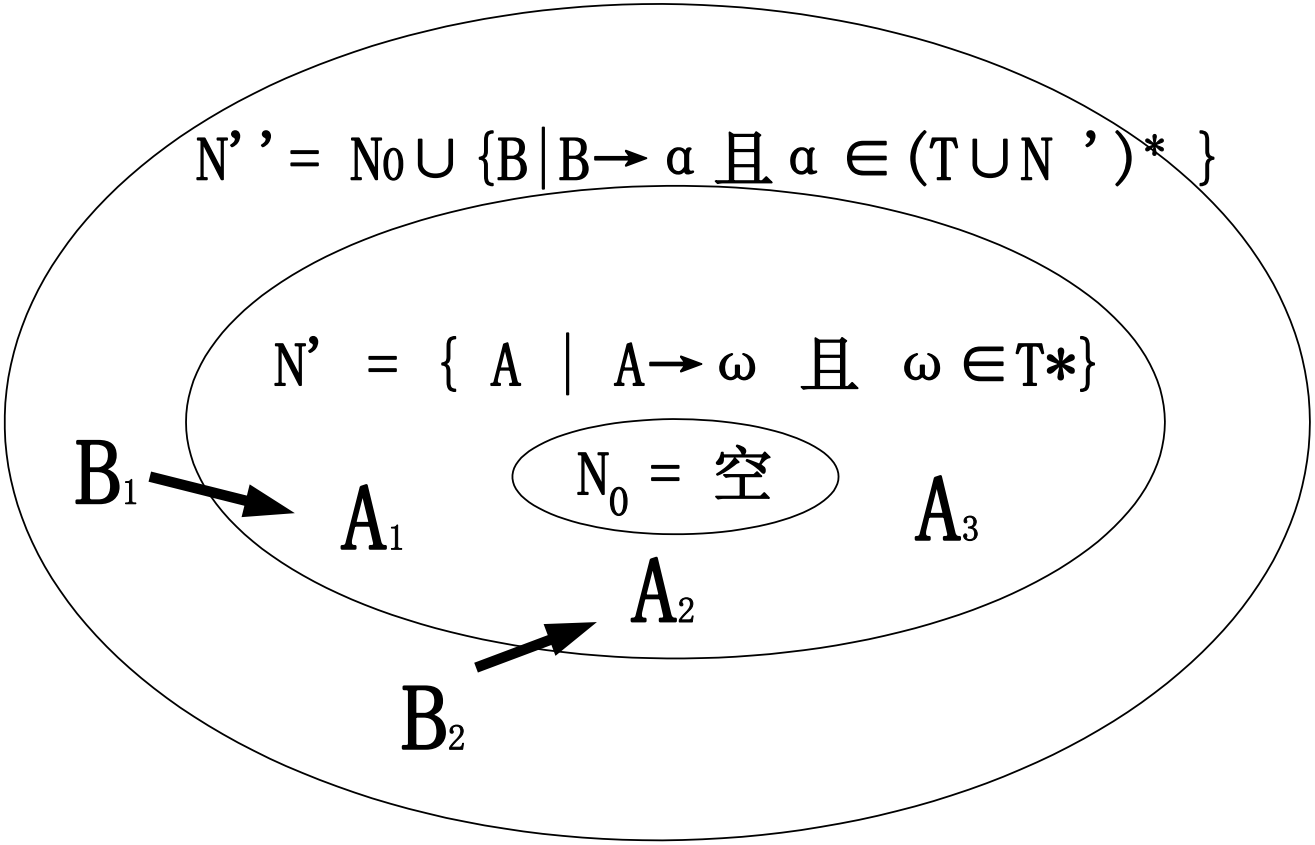
(4) $N_0 = N'$

(5) $N' = N_0 \cup \{ A \mid A \rightarrow \alpha$且$\alpha \in (T \cup N_0)^* \}$, 转(3)

(6) $N_1 = N'$

小结: 算法1找出能推出终结符串的非终结符作为有用符号.

算法1: 找出有用非终结符（图示）



一层层向外扩展，直至最外两层相等为止。所得集合即是算法1的有用符号。

计算可达符号集

✧ 思路 对于 CFG $G=(N, T, P, S)$，可通过下列归纳步骤计算可达符号集合：

基础 S 是可达符号；

归纳 如果 A 是可达符号，并且有产生式 $A \to \alpha$，其中 $\alpha \in (N \cup T)^*$，则 α 中的每一个符号都是可达符号；

算法2: 找出有用符号(从S可达的符号)

✧算法步骤:

(1) $N_0 = \{S\}$

(2) $N' = \{x \mid A \in N_0 \text{且} A \to \alpha x \beta\} \cup N_0$

(N'为有用符号集合)

(3) 如果$N_0 \neq N'$转(4), 否则转(5)

(4) $N_0 = N'$; 转(2) (继续迭代下去)

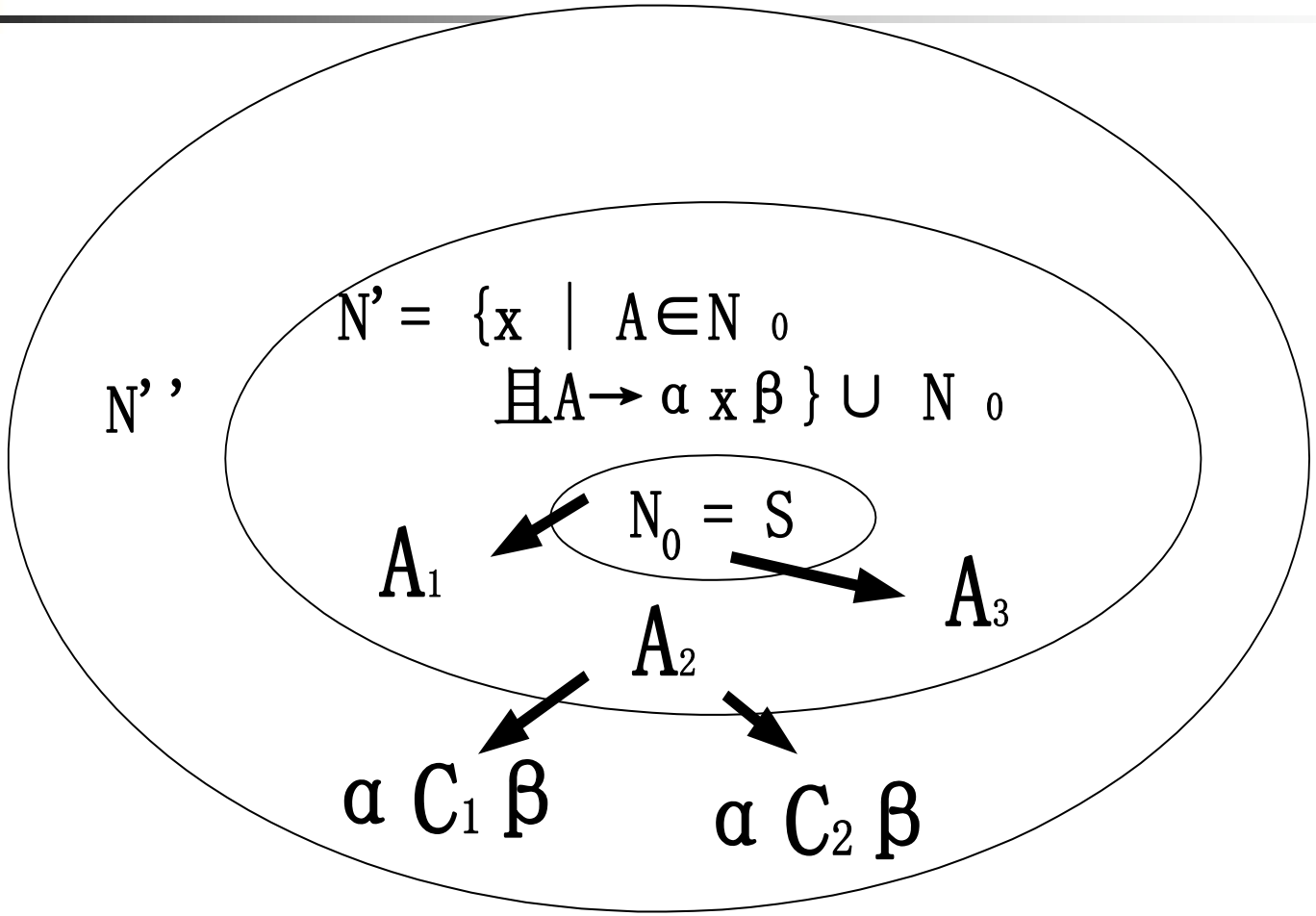
(5) $N_1 = N' \cap N$

$T_1 = N' \cap T$

P_1由P内只含N'中符号的生成式组成

(即删去了从S起不可达的符号)

算法2: 找出从S可达的符号 （图示）



一层层外扩,找出从S可达的所有符号(含非终结符和终结符)

消去非生成符号及不可达符号

例: (书P102 例1)

已知2型文法G=({S, A, B}, {a}, P, S)

P: S→AB, S→a, A→a

由算法1: B推不出终结符串, 删除之, 并删S→AB.

N_1={S, A}, P_1: S→a, A→a

由算法2: A不出现在S能推导出的句型中, 删除之.

并删A→a

∴ 结果为G1=({S}, {a}, { S→a}, S)

应用算法1和算法2,可删去文法中所有无用符号.

消去非生成符号及不可达符号

注意:

必须先执行算法1,再执行算法2,不能颠倒.

否则,可能导致无用符号不会被完全删除.

例:

上例中,若先用算法2,得

$S \to a,\ S \to AB,\ A \to a$

再用算法1, 得$S \to a,\ A \to a$。而$A \to a$是多余的.

定理:

任何非空的上下文无关语言,可由不存在无用符号的上下文无关语言产生(证明略)。

课堂作业

去除下面生成式的无用符号

G_1：

$S \rightarrow DC \mid ED$

$C \rightarrow CE \mid DC$

$D \rightarrow a$

$E \rightarrow aC \mid b$

消去ε产生式

✧ 目的 方便文法的设计，利于文法规范化.

✧ 影响 消去ε产生式，除了文法不能产生字符串ε外，不会影响到原文法相应的语言中其它字符串的产生.

✧ 可致空符号（nullable symbol）

对于 CFG $G=(N, T, P, S)$，称符号 $A \in N$ 是可致空的，当且仅当 $A \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon$.

消去ε产生式及其影响，需要计算可致空符号的集合.

算法3: 生成无ε文法

✧**定义:**

若G的生成式中无任何ε产生式,或只有一个生成式S→ε且S不出现在任何生成式的右边,则称G为无ε文法.

✧**思路** 对于 CFG G = (N, T, P, S), 可通过下列归纳步骤计算可致空符号集合:

基础 对于所有产生式 $A \to \varepsilon$，A 是一个可致空符号

归纳 如果有产生式 $B \to C_1C_2...C_k$，其中每一个 $C_i \in N$ 是可致空符号，则 B 是一个可致空符号；

算法3：生成无ε文法

算法步骤：

(1) 利用算法1，找出$N'=\{A \mid A\in N$且$A=>^{+}\varepsilon\}$

(找出能推导出ε的所有非终结符A)

(2) 用以下两步组成P_1

① 如果生成式$A\rightarrow\beta_0 C_1\beta_1 C_2\ldots C_n\beta_n\in P \quad n\geq 0$

且每个C_k $(1\leq k\leq n)$ 均在N'内

而对于$0\leq j\leq n$，没有β_j在N'内 (β_i也可能是终结符)

则P_1应加入 $A\rightarrow\beta_0 Y_1\beta_1 Y_2\beta_2\ldots Y_n\beta_n$

其中Y_k是C_k或ε (即所有的可能组合)

但是$A\rightarrow\varepsilon$不加入P_1

算法3：生成无ε文法

算法步骤（续）：

② 如果$S \in N'$,则P_1中应加入以下生成式

$S_1 \rightarrow \varepsilon | S$　　S_1是新的起始符

$N_1 = N \cup \{S_1\}$

如果$S \notin N'$, 则$N_1 = N$, $S_1 = S$

由此得出$G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$

消去ε产生式

例：(书P103 例2)

G = (N, T, P, S)　其中N={S}, T={ a, b }

P: S→aSbS | bSaS|ε

求其无ε文法 $G_1=(N_1,T, P_1, S_1)$

解： (1) ∵ S =>+ε　∴ N'={S}

(2) ① P_1的构造

由S→aSbS; 加入

S→aSbS|aεbS|aSbε|aεbε

由S→bSaS; 加入S→bSaS|bεaS|bSaε|bεaε

但S→ε不加入P_1

② 由S∈N'得出

S_1→ε|S　　$N_1=N\cup\{S_1\}=\{S,S_1\}$

消去ε产生式

✧ 练习

以下产生式表示的文法中，B, D为可致空符号：

$S \to A;\quad A \to 0BD;\quad B \to 0BC;$

$B \to 1;\ B \to \varepsilon;\ C \to 1;\ D \to \varepsilon.$

通过上述步骤，消去ε产生式，得到如下产生式集合：

$S \to A;\quad A \to 0BD;\quad A \to 0B;\ A \to 0D;\ A \to 0;\ B \to 0BC;$

$B\text{->}0C;\ B \to 1;\quad C \to 1.$

消去单产生式

✧ 单产生式 形如 $A \to B$ 的产生式，其中A、B 为非终结符.

✧ 消去单产生式的目的 可简化某些证明，减少推导步数，利于文法规范化.

✧ 单元偶对（unit pairs）

对于 CFG $G=(N, T, P, S)$，$A, B \in N$，称 (A, B) 是单元偶对，当且仅当 $A \overset{+}{\Rightarrow} B$，且该推导过程仅使用过单产生式.

消去单产生式时，需要计算所有单元偶对的集合.

消去单产生式

思路 设 CFG $G=(N, T, P, S)$，对每个单元偶对 (A, B)，在 G_1 中加入产生式 $A \to \alpha$，其中 $B \to \alpha$ 为一个非单产生式；从而消去 G 中的单产生式，得到 CFG $G_1=(N, T, P_1, S)$：

算法步骤:

(1) 对每个$A \in N$,构造非终结符集$N_A=\{B \mid A \Rightarrow^* B\}$

(N_A是可由A推出的单生成式中的非终结符集)。

构造方法分三步:

① $N_0=\{A\}$

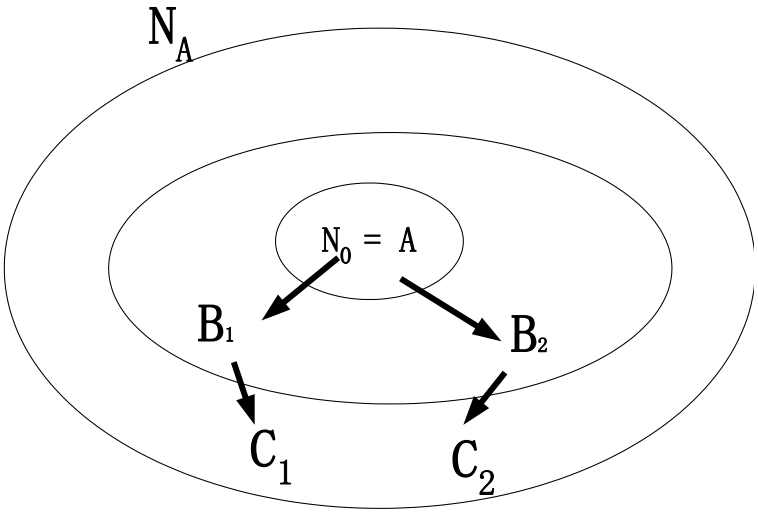
② $N'=\{C \mid$ 如果$B \to C \in P$且$B \in N_0\} \cup N_0$

③若$N' \neq N_0$,则$N_0=N'$,转向②　(继续迭代)

否则$N_A = N'$, 转向(2).　(已得到了完整的N_A)

消去单产生式

算法步骤（续）：



(2) 构造P_1:

如果$B \to \alpha \in P$且不是单生成式，则对于$B \in N_A$的所有A,把$A \to \alpha$加入到P_1中

(即对每个$B \in N_A$ (意味着$A \Rightarrow^+ B$)的非单生成式$B \to \alpha \in P$,直接将α与N_A的A连接, 构成新产生式$A \to \alpha$加入到P_1中)

(3) 得到$G_1=(N_1, T_1, P_1, S)$

CFG 的简化

- 小结

  设 CFG $G=(V, T, P, S)$，可以通过下列步骤对 G 进行简化：

  (1) 消除 G 中的 ε 产生式；

  (2) 消除 G 中的单元产生式；

  (3) 消除 G 中的 无用符号.

- 注意 以上简化步骤的次序.

- 结论 设 CFG G 的语言至少包含一个非 ε 的字符串，通过上述步骤从 G 构造 G_1，则有 $L(G_1)=L(G)-\{\varepsilon\}$.

消去单产生式 （例）

例: 设 2型文法G = ({S,A,B}, { (,) , + , * , a}, P, S)

P: S→S+A|A　A→A*B|B　B→(S)|a

构造无单生成式的文法G_1

解: (1) 构造N_S，N_A，N_B

① N_0={S}

② N' = {C | B→C∈P且B∈ N_0}∪N_0

= {A}∪{S} = {A, S}

③ ∵ N_0≠N' ∴ N_0 = N' = {A,S}

继续转② N'={B}∪{A,S}={B,A,S}

∵ N_0≠N' ∴ N_0 = N' ={B,A,S}

继续转② 有N'={B,A,S}= N_0

∴N_S= {B, A, S}

同理可得: N_A={A,B}, N_B={B}

消去单产生式 （续）

(2) 构造P_1

对N_S= {S,A,B}

∵ S→S+A∈P且不是单生成式, 且S ∈ N_S

于是， 将S→S+A加到P_1中.

又∵ A→A*B ∈ P, A ∈ N_S

∴ 将S→A*B加到P_1中.

(∵S→A, A→A*B ∴ 直接用S→A*B代替这两条产生式)

又∵ B→(S) ∈ P, B ∈ N_S ∴ 将S→（S）加到P_1中.

又∵ B→a ∈ P, B ∈ N_S ∴ 将S→a加到P_1中.

消去单产生式 （续）

同理: 对N_A= {A, B}

∵ A→A*B ∈ P且非单生成式, A ∈ N_A

∴ 将A→A*B加到P_1中.

∵ B→(S)|a∈P且非单生成式, B ∈ N_A

∴ 将A→(S)|a加到P_1中.

同理: 对N_B={B}

将B→(S)|a加到P_1中.

结果: P_1为

S→S+A|A*B|(S)|a　　A→A*B|(S)|a　　B→(S)|a

消除递归

递归的定义:

在2型文法中

若存在 $A \Rightarrow^{+} \alpha A \beta$, $A \in N$, 则称G是递归文法。

若存在 $A \Rightarrow^{+} A\beta$ G是左递归文法

若存在 $A \Rightarrow^{+} \alpha A$ G是右递归文法

若存在 $A \Rightarrow^{+} A$ G是循环文法

生成式的代换

定义: 2型文法中所有形如$A\to\alpha$的生成式称为A生成式.

引理1: 对$A\to\alpha$的A生成式可进行变换

设 G = (N,T,P,S)

$A\to\alpha B\beta$是P中的生成式, $B\in N,\alpha,\beta\in(N\cup T)^*$

$B\to r_1|\ r_2|\ldots|\ r_k$是P中的B生成式

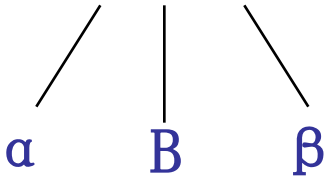
可生成$G_1 = (N_1,T,\ P_1,S)$

P_1中的生成式是将P中的$A\to\alpha B\beta$用$A\to\alpha r_1\beta|\ldots|\alpha r_k\beta$取代.

证明思路: P_1和P中生成式产生的语言相等,证明从略。

生成式的代换

例：设文法G有S→a S S |b



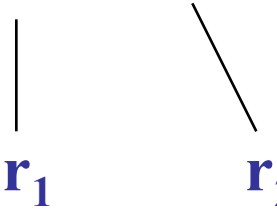
应用引理1, 设 α =a　B=S,　　β =S

B→a S S | b

即　　r_1　　r_2

替换S→aSS|b有G_1的产生式为:

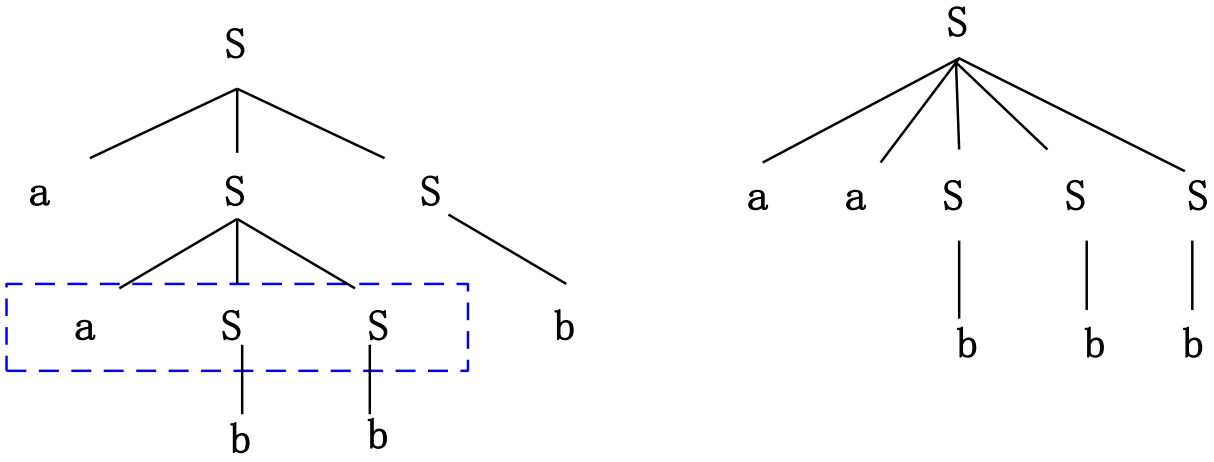
S→a aSS S|abS | b



r_1　　r_2

生成式的代换

其句子aabbb的推导树为



即将子树根S用下一层的直接后代代替了.

消除直接左递归

引理2: 消除直接左递归

设G = (N, T, P, S), P中有A生成式

$A \rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$

其中β_i的第一个字符不是非终结符A (可以是其它非终结符)

可构成$G_1 = (N \cup \{A'\}, T, P_1, S)$， A’为新引入的非终结符

G_1中的P_1为， 将P中的A生成式用以下生成式取代

$A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \ldots \mid \beta_n A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A'$

证明思路:

G和G_1二者的正则式都是$(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)(\alpha_1+\ldots+\alpha_m)^*$

消除直接左递归 （例）

例: (书P106 例4)

$S \rightarrow S\ \underline{+A} \mid \underline{A},\ A \rightarrow A\underline{*B} \mid \underline{B},\ B \rightarrow (S) \mid a$

$\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$

可变换为

$S \rightarrow A \mid AS'$

$S' \rightarrow +A \mid +A\ S'$

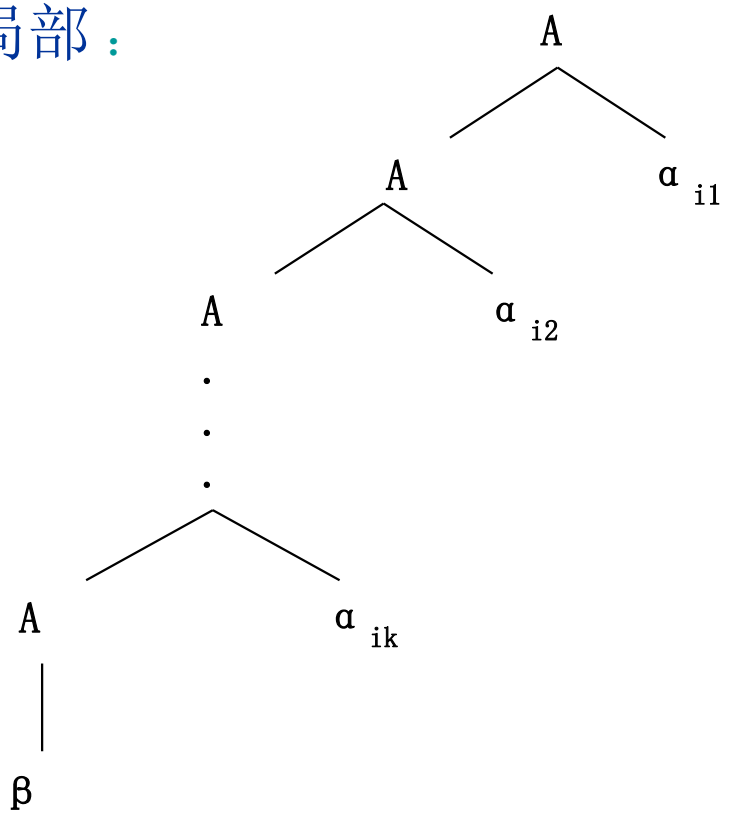
$A \rightarrow B \mid BA'$

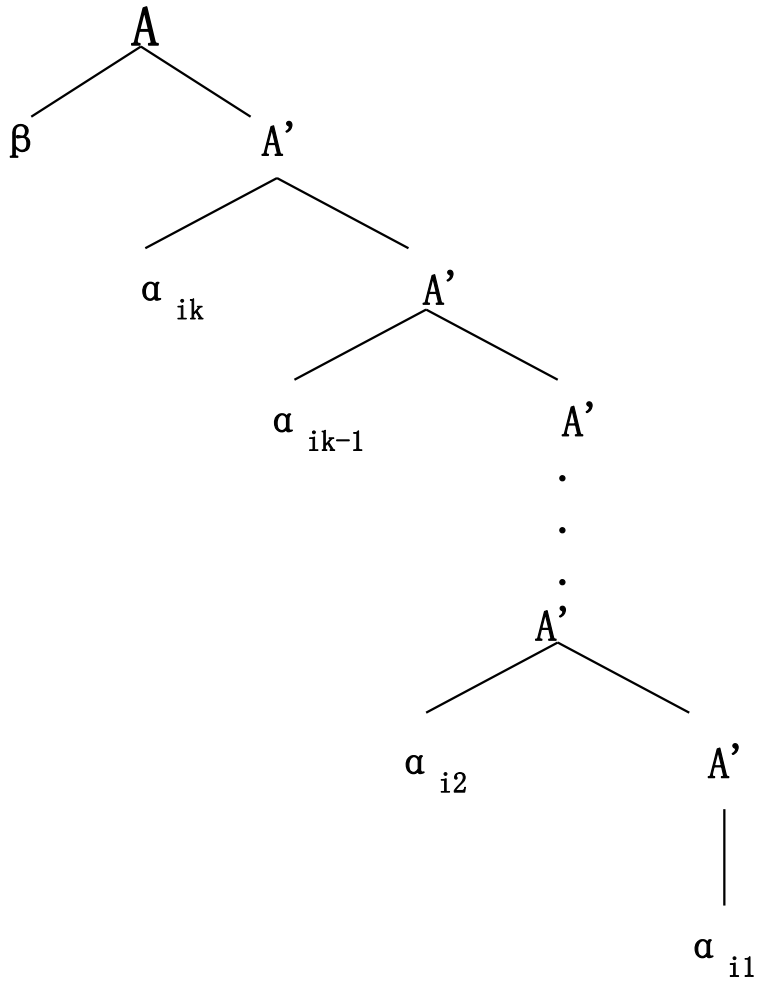
$A' \rightarrow *B \mid *B\ A'$

$B \rightarrow (S) \mid a$

消除直接左递归对推导树的影响

G中局部：





消除左递归的算法

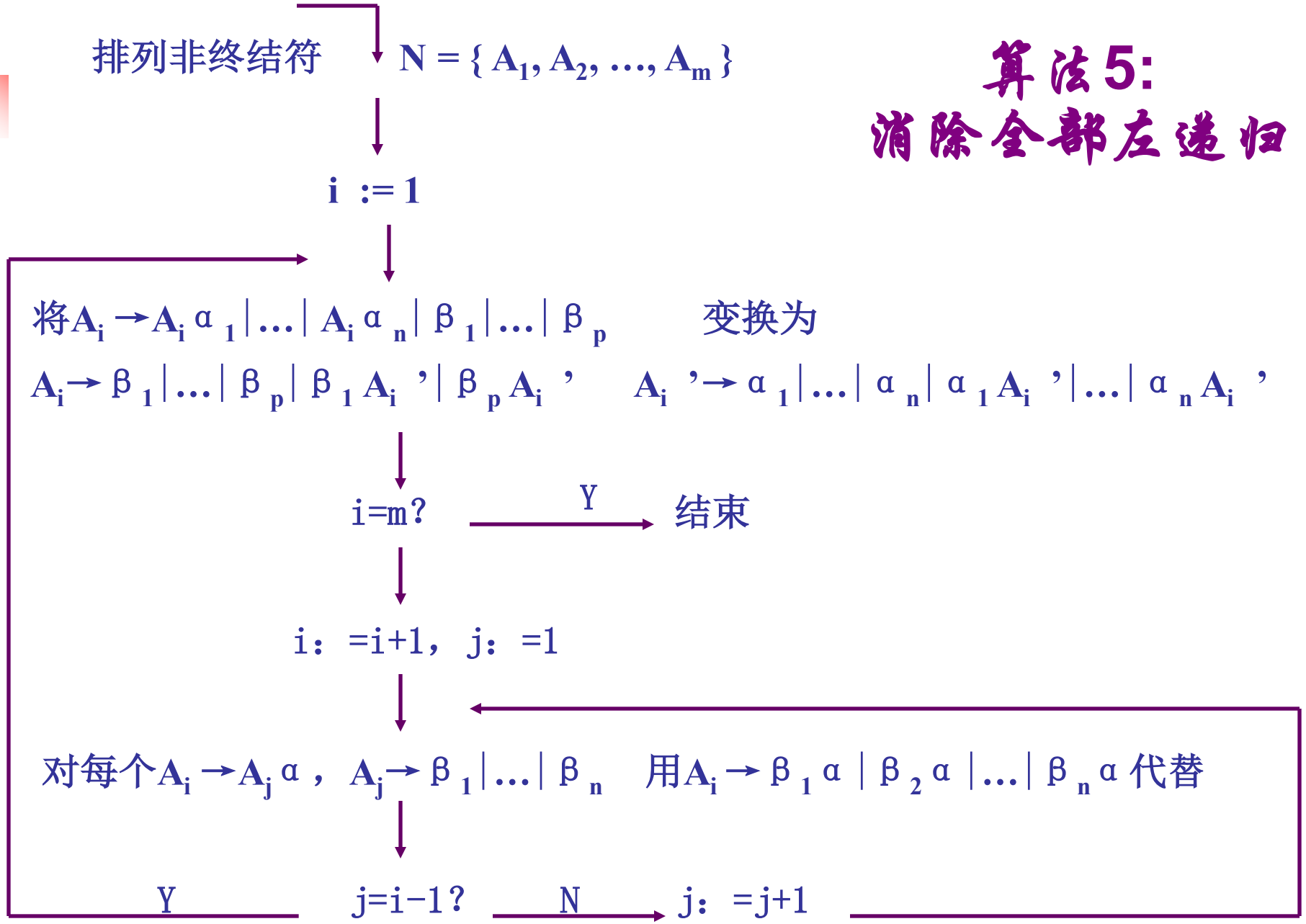
Why 消左递归?

✧ 以后的句法分析算法不适用于左递归, 会引起死循环。

✧ 对于给定的2型文法, 该文法不存在无用符号, 无循环且是无 ε 生成式的文法, 为了消除G中可能存在的左递归, 构成一个等效的无左递归的文法G_1, 可用算法5。

✧ *算法5在原理上与求解正规表达式方程组的算法类似.*

算法5:
消除全部左递归


排列非终结符 N = { A1, A2, …, Am }
i := 1
将Ai →Ai α1|…| Ai αn| β1|…| βp 变换为
Ai→ β1|…| βp| β1 Ai ’| βp Ai ’ Ai ’→ α1|…| αn| α1 Ai ’|…| αn Ai ’
i=m?
Y
结束
i：=i+1，j：=1
对每个Ai →Aj α，Aj→ β1|…| βn 用Ai → β1 α | β2 α |…| βn α 代替
j=i-1?
N
j：=j+1
Y

消除左递归(示例)

$A_1 \rightarrow A_2A_3 | a$ (1)

$A_2 \rightarrow A_3A_1 | A_1b$ (2)

$A_3 \rightarrow A_1A_2 | A_3A_3 | a$ (3)

排序：$\{A_1, A_2, A_3\}$

当 i=1 对（1）变换，不用变。 $A_1 \rightarrow A_2A_3 | a$

当 i=2 对（2）变换 $A_2 \rightarrow A_3A_1 | A_2A_3b | ab$ (4)

$\beta_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_2$

消直接左递归

$A_2 \rightarrow A_3A_1 | ab | A_3A_1A_2' | abA_2'$ (5)

$A_2' \rightarrow A_3b | A_3bA_2'$ (6)

当i=3，j=1 $A_3 \rightarrow A_1A_2 | A_3A_3 | a$

$\rightarrow A_2A_3A_2 | aA_2 | A_3A_3 | a$ (7)

消除左递归(示例)

α_1 β_1 α_2

j=2 $A_3 \rightarrow A_3A_1\ A_3A_2 \mid a\ b\ A_3\ A_2 \mid A_3\ A_1\ A_2'A_3\ A_2$

$\mid a\ b\ A_2'A_3\ A_2 \mid a\ A_2 \mid A_3A_3 \mid a$ (8)

β_2 β_3 α_3 β_4

对（8）消直接左递归

$$\begin{cases} A_3 \rightarrow \beta_1\ A_3' \mid \beta_2\ A_3' \mid \beta_3\ A_3' \mid \beta_4\ A_3' \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \beta_3 \mid \beta_4 \\ A_3' \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3 \mid \alpha_1\ A_3' \mid \alpha_2\ A_3' \mid \alpha_3\ A_3' \mid \end{cases}$$

作业

Ch4 习题： 8. 9.