第三章 习题

3-2 设随机过程ξ(t)可表示成 $\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$，式中θ是离散随机变量，且$P(\theta=0)=1/2$ $P(\theta=\pi/2)=1/2$，试求$E_{\xi}[\xi(1)]$及$R_{\xi}(0,1)$

解：已知 $\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$

θ是离散型随机变量，$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

（1）$E[\xi(t)]=E[2\cos(2\pi t+\theta)]$

当$t=1$时，$E[\xi(1)]=E[2\cos(\theta+2\pi)]$

$$=2E[\cos\theta]$$

$$= 2\left[P_1 \cdot \cos\theta|_{\theta=0} + P_2 \cdot \cos\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0\right) = 1$$

（2）$R_\xi(t_1, t_2) = E[\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)]$

$$= E[2\cos(2\pi t_1 + \theta) \cdot 2\cos(2\pi t_2 + \theta)]$$

当$t_1 = 0, t_2 = 1$时

$$R_\xi(0,1) = 4E[\cos\theta \cdot \cos(\theta + 2\pi)]$$

$$= 4E[cos^2\theta]$$

$$= 4\left[P_1 \cdot cos^2\theta|_{\theta=0} + P_2 \cdot cos^2\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0\right) = 2$$

3-3

设随机过程$Y(t)=X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t$,若X1与X2是彼此独立且均值为0，方差为$\sigma^2$的高斯随机变量，试求：

（1）$E[Y(t)]$、$E[Y^2(t)]$

（2）$Y(t)$的一维分布密度函数$f(y)$

（3）$Y(t)$的相关函数$R(t_1，t_2)$和协方差函数$B(t_1,t_2)$

3-3 解:已知 $Y(t)=X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t$

$$E[X_1]=E[X_2]=0$$

$$D(X_1)=E[X_1^2]=\sigma^2,\ D(X_2)=E[X_2^2]=\sigma^2$$

$\because$ X_1,X_1相互独立 $\therefore E(X_1\cdot X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)$

（1）$E[Y(t)]=E[X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t]$

$$=\cos\omega_0 t\cdot E[X_1]-\sin\omega_0 t\cdot E[X_2]=0$$

$$E[Y^2(t)]=E[(X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t)^2]=$$

$$cos^2\omega_0 t\cdot E[X_1^2]+sin^2\omega_0 t\cdot E[X_2^2]-sin2\omega_0 t\cdot E[X_1\cdot X_2]$$

$$=\sigma^2\cdot cos^2\omega_0 t+\sigma^2\cdot sin^2\omega_0 t=\sigma^2$$

（2）$\because$ X_1,X_2是高斯分布

$Y(t)=X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t$是$X_1$和$X_2$的线性组合

$\therefore Y(t)$也服从高斯分布

均值 $E[Y(t)] = 0$，方差 $D[Y(t)] = \sigma^2$

一维分布 $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$

X_1和X_2相互独立，
则：$E[X_1X_2] = 0$

（3）自相关 $R(t_1, t_2) = E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)] =$

$E[(X_1\cos\omega_0 t_1 - X_2\sin\omega_0 t_1)\cdot(X_1\cos\omega_0 t_2 - X_2\sin\omega_0 t_2)]$

$= \cos\omega_0 t_1\cdot\cos\omega_0 t_2\cdot E[X_1^2] + \sin\omega_0 t_1\cdot\sin\omega_0 t_2\cdot E[X_2^2]$

$= \sigma^2[\cos(\omega_0 t_1 - \omega_0 t_2)]$

$= \sigma^2\cos\omega_0\tau$

自协方差 $B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - E[Y(t_1)]\cdot E[Y(t_2)]$

$= \sigma^2\cos\omega_0\tau$

其中，$\tau = t_1 - t_2$

3-5　设s(t)是一个平稳随机脉冲序列，其功率谱密度为$P_s(f)$,求已调信号$e(t)=s(t)\cos\omega_c t$的功率谱密度$P_e(f)$

解：方法一，利用随机过程通过乘法器，功率谱搬移。

$$P_e(f) = \frac{1}{4}[P_s(f - f_c) + P_s(f + f_c)]$$

方法二，求出$e(t) = s(t)\cos\omega_c t$的自相关$R_e(\tau)$，再利用$R_e(\tau) \Leftrightarrow P_e(f)$ 求出$P_e(f)$，此方法需先证明$e(t)$是平稳过程。

$$\because E[e(t)] = E[s(t)\cos\omega_c t] = E[s(t)] \cdot E[\cos\omega_c t] = 0$$

通常假设信号$s(t)$和载波$\cos\omega_c t$相互独立

$$R_e(\tau) = E[s(t)\cos\omega_c t \cdot s(t+\tau)\cos\omega_c(t+\tau)\ ]$$

$$= \frac{1}{2}E[s(t)s(t+\tau)] \cdot E[\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau) + \cos\omega_c\tau]$$

$$= \frac{1}{2}R_s(\tau)\{E[\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau)] + E[\cos\omega_c\tau]\}$$

$$= \frac{1}{2}R_s(\tau) \cdot \cos\omega_c\tau$$

$\because\ s(t)$是平稳过程

$\therefore\ e(t)$也是平稳过程

$R_e(\tau) = \frac{1}{2}R_s(\tau) \cdot \cos\omega_c\tau \Leftrightarrow P_e(f)$，由频移特性：

$$P_e(f) = \frac{1}{4}[P_s(f - f_c) + P_s(f + f_c)]$$

3-7 设X(t)是一个均值为a， 自相关函数为 $R_x(\tau)$的平稳随机过程，它通过某线性系统的输出为

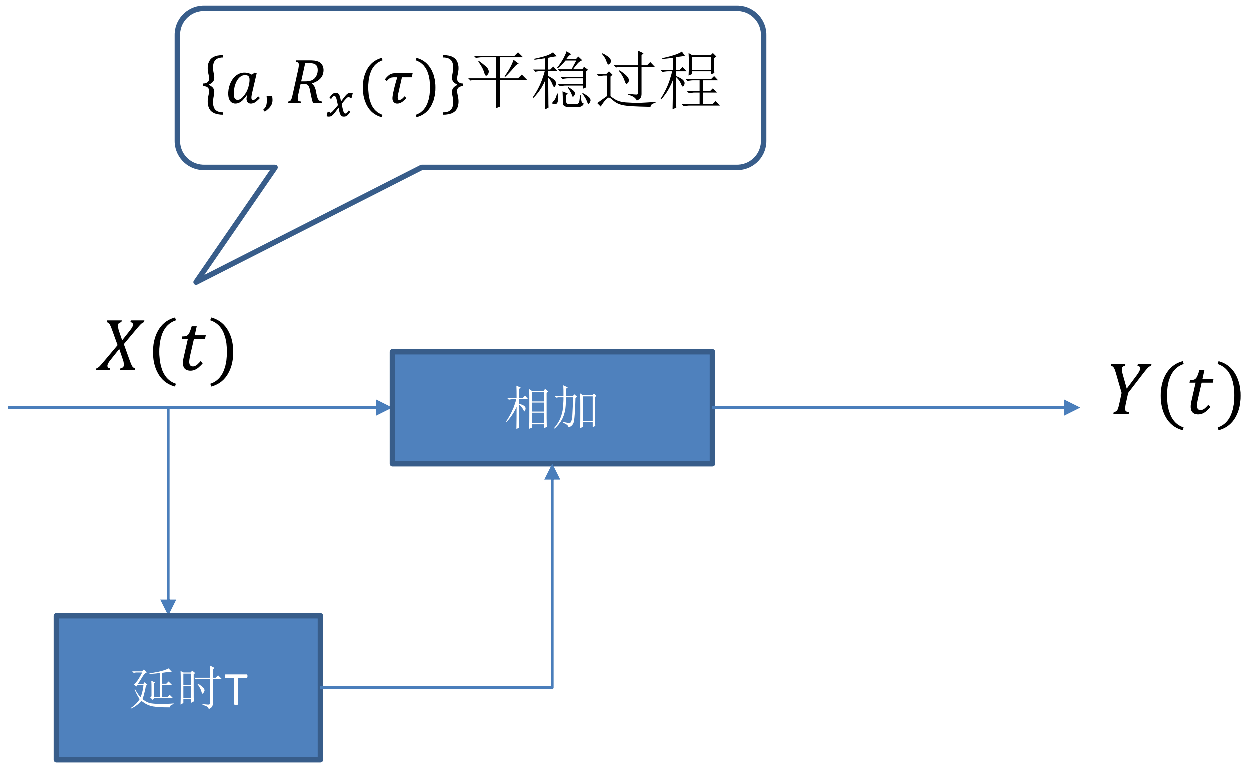
Y(t)=X(t)+X(t-T)（T为延迟时间）

(1)画出该线性系统框图

(2)求Y(t)的自相关函数和功率谱密度

(3)求Y(t)的平均功率

3-7 解：（1）该线性系统框图如下：



（1）方法一：平稳过程$X(t)$ 通过线性系统后的输出 $Y(t)$ 也是平稳的，再用维纳-辛钦定理。

$\because R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\ \tau)]$

$\therefore R_{Y(\tau)} = E[Y(t)Y(t+\ \tau)]$

$= E\{[X(t) + X(t-T)][X(t+\ \tau) + X(t+\ \tau - T)]\}$

$= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)X(t+\tau-T)$

$\quad +X(t-T)X(t+\tau) + X(t-T)X(t+\tau-T)]$

$= R_X(\tau) + R_X(\tau-T) + R_X(\tau+T) + R_X(\tau)$

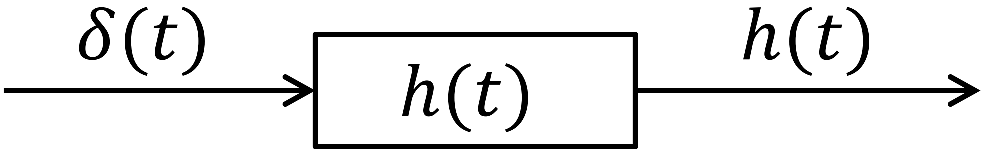
$= 2R_X(\tau) + R_X(\tau-T) + R_X(\tau+T)$

$\because R_X(\tau) \Leftrightarrow P_X(\omega)$，则$R_Y(\tau) \Leftrightarrow P_Y(\omega)$

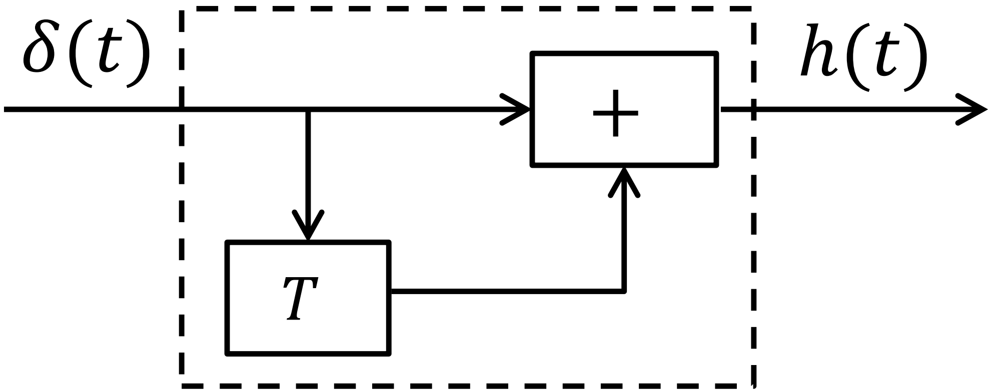
$\therefore P_Y(\omega) = 2P_X(\omega) + P_X(\omega)e^{-j\omega T} + P_X(\omega)e^{j\omega T}$

$\quad = 2(1+\cos\omega T)P_X(\omega)$

方法二：利用线性系统的单位冲激响应。



$$h(t) = \delta(t) * h(t)$$



$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - T)$$

$$\Updownarrow$$

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega T}$$

$\because h(t)$是线性系统 $\quad \therefore P_Y(\omega) = P_X(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$

$$\begin{aligned} &= \left|1 + e^{-j\omega T}\right|^2 \cdot P_X(\omega) \\ &= 2(1 + \cos\omega T) P_X(\omega) \\ &= 2P_X(\omega) + 2\cos\omega T \cdot P_X(\omega) \end{aligned}$$

由$R_Y(\tau) \Leftrightarrow P_Y(\omega)$

$\because P_Y(\omega) = 2P_X(\omega) + 2\cos\omega T \cdot P_X(\omega)$

$\therefore R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) + R_X(\tau - T) + R_X(\tau + T)$

（3）Y(t)的平均功率

$R_Y(0) = 2R_X(0) + R_X(-T) + R_X(T)$

$\because$自相关是偶函数

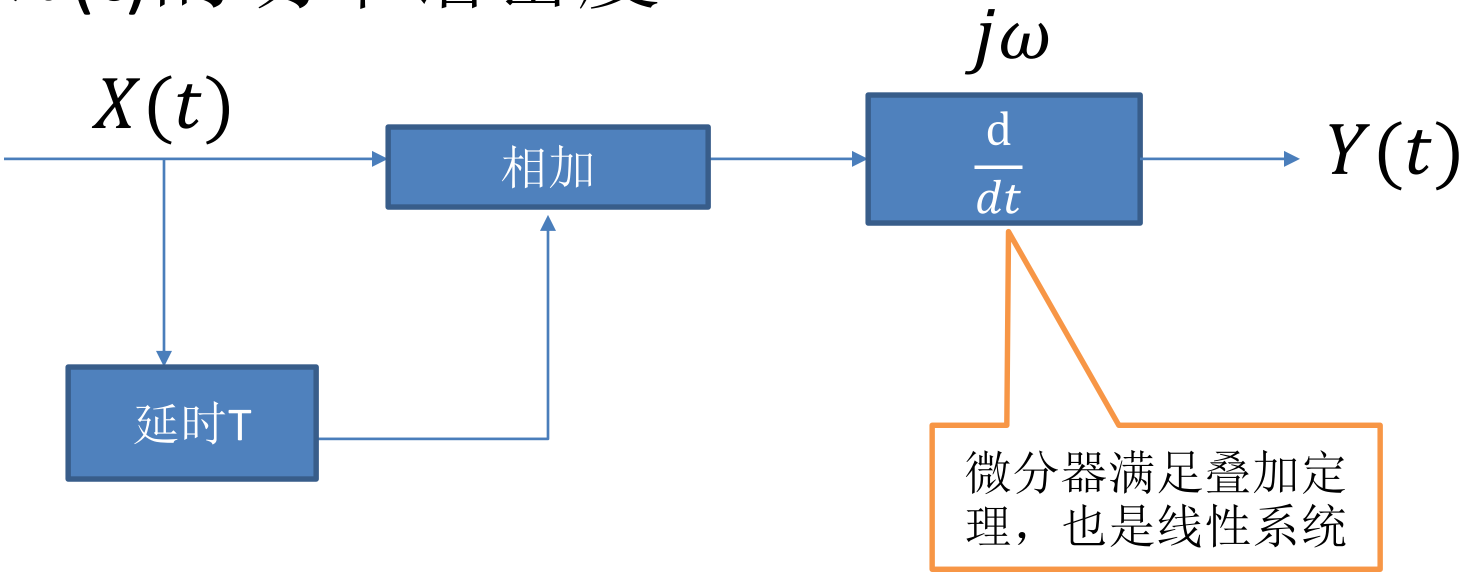
$\therefore R_Y(0) = 2R_X(0) + 2R_X(T)$

3-12 $X(t)$是功率谱密度为$P_x(\omega)$的平稳随机过程，该过程通过图所示的系统,试确定：

(1)输出过程Y(t)是否平稳

(2)求Y(t)的功率谱密度

解：



$$Y(t)=\frac{d[X(t)+X(t-T)]}{dt}$$

（1）输入$X(t)$为平稳随机过程，且整个系统为线性系统，则输出$Y(t)$也是平稳过程

（2）由图可知，传输函数$H(\omega)=\left(1+e^{-j\omega T}\right)\cdot j\omega$

$$\because\ 1+e^{-j\omega T}=1+\cos\omega T-j\sin\omega T$$

$$=2\cos\frac{\omega T}{2}\left(\cos\frac{\omega T}{2}-j\sin\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$\therefore\ \left|1+e^{-j\omega T}\right|=2\left|\cos\frac{\omega T}{2}\right|$$

$$\therefore |H(\omega)|^2=4cos^2\frac{\omega T}{2}\cdot\omega^2=2(1+\cos\omega T)\cdot\omega^2$$

$$\therefore P_Y(\omega)=P_X(\omega)\cdot|H(\omega)|^2$$

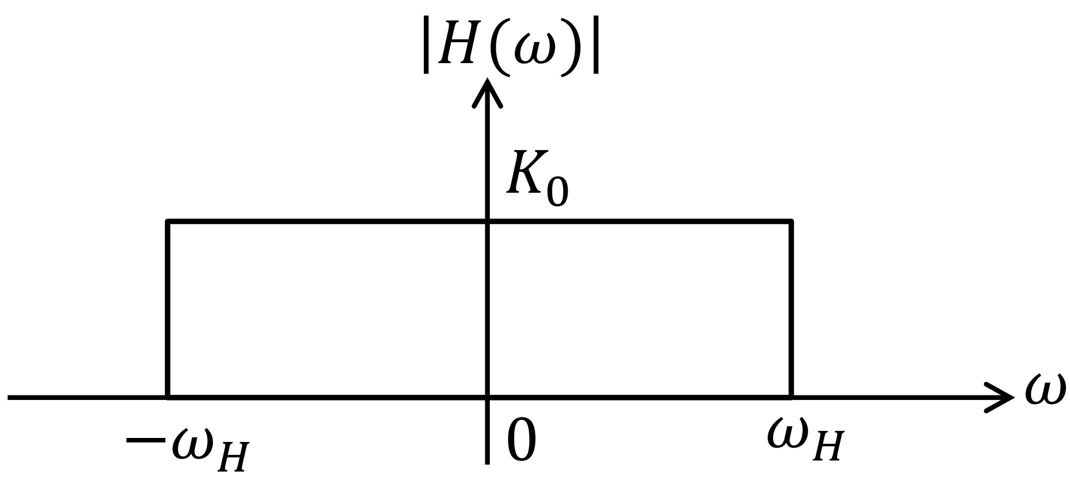
$$=2\omega^2(1+\cos\omega T)\cdot P_X(\omega)$$

补充题：

功率谱密度为 $n_0/2$的高斯白噪声通过理想低通滤波器，求输出噪声的功率谱密度、自相关函数及平均功率。已知理想低通的传输特性：

$$H(\omega)=\begin{cases} K_0\cdot e^{-j\omega t_d} & |\omega|\le\omega_H \\ 0 & else \end{cases}$$

解：



输出功率谱：

$\because P_i(\omega) = \frac{n_0}{2}$，又理想低通为线性系统，$|H(\omega)|^2 = K_0^2$

$$\therefore P_o(\omega) = K_0^2 \frac{n_0}{2} \quad |\omega| \le \omega_H$$

自相关函数：

$$R_o(\tau) = \frac{K_0^2 n_0 \omega_H}{2\pi} \cdot Sa(\omega_H \tau) = K_0^2 n_0 f_H \cdot Sa(2\pi f_H \tau)$$

平均功率：

$$P_o = R_o(0) = K_0^2 n_0 f_H$$