第二章

- 习题：

2-3

设一个信号$s(t)$可以表示成

$$s(t) = 2\cos(2\pi t + \theta) \qquad -\infty < t < \infty$$

求：（1）信号的傅里叶级数的系数C_n

（2）信号的功率谱密度

第二章

习题：

2-3.解答：

（1）已知信号振幅$A = 2$，基频$\omega_0 = 2\pi$，相位$\varphi_n = \theta$，则此周期信号的傅里叶级数系数C_n（即复振幅$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n}$）

第二章

即：$C_n=\begin{cases} e^{j\theta} & n=1 \\ e^{-j\theta} & n=-1 \\ 0 & else \end{cases}$

其中$|C_n|=\frac{A}{2}=1 \quad n=\pm 1$

（2）周期信号$s(t)$的功率谱密度为

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2\delta(f-nf_0)=\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)$$

$$=\delta(f-1)+\delta(f+1)$$

第二章

2-5.求图P2-2所示的单个矩形脉冲（门函数）的频谱（密度）、能量谱密度、自相关函数及其波形、信号能量。

解答：对$s(t)$进行傅里叶变换，频谱密度为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}Ae^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}-e^{j\omega\frac{T}{2}}\right)=\frac{AT\cdot\sin\omega\dfrac{T}{2}}{\omega\dfrac{T}{2}}=AT\cdot Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

第二章

$s(t)$的能量谱密度为

$$E(\omega) = |S(\omega)|^2 = \left|ATSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right|^2 = ATSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot ATSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

利用时域卷积定理，$s(t)$的自相关函数$R(\tau)$应由高为A，宽为T的两个门函数卷积而成，即：

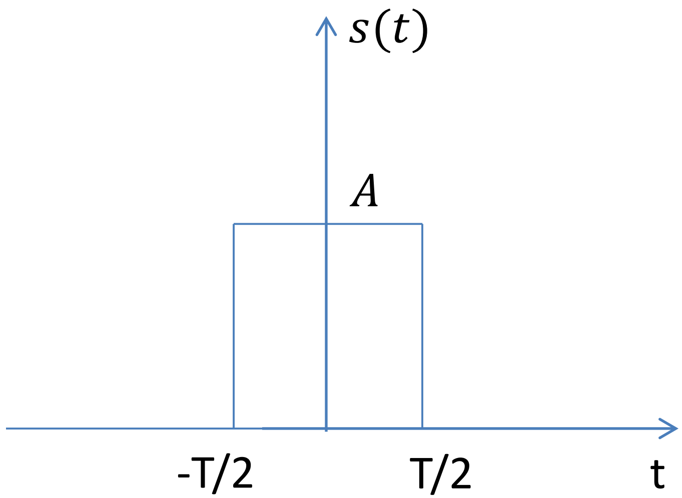
$$R(\tau)= s(t) * s(t) = \begin{cases} A^2T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right) & |\tau| \le T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

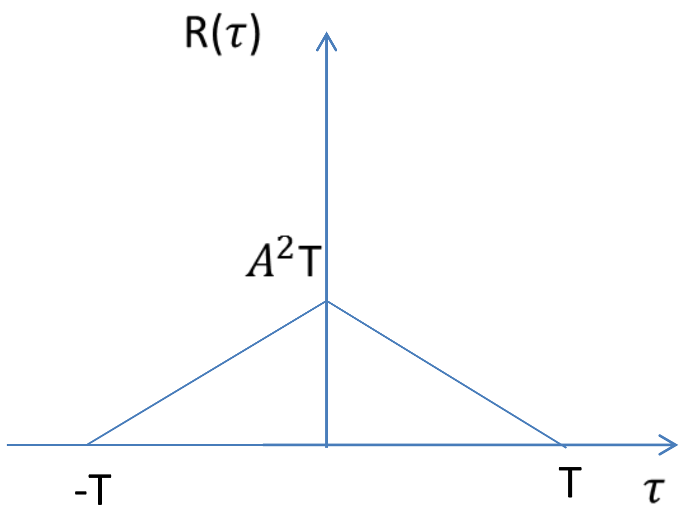
$S(t)$的能量为

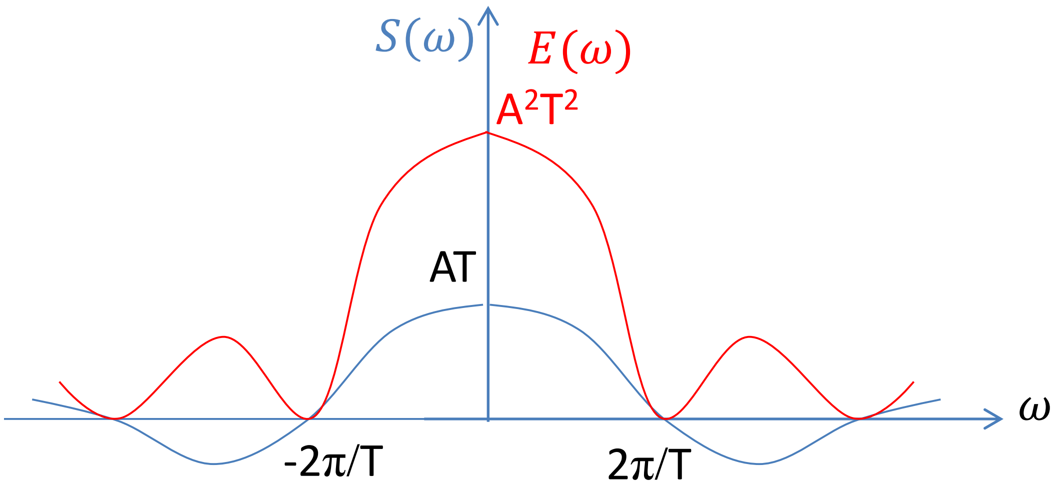
$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E\,(\omega)d\omega = R(0) = A^2T$$

第二章

函数图形如下：







第二章

2-9.（1）求正弦信号$c(t) = \sin \omega_0 t$的频谱(密度)

解答：

由欧拉公式可知：

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

利用傅里叶变换的频移特性，可得正弦信号的频谱

$$C(\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

第二章

（2）已知$s(t) \Leftrightarrow S(\omega)$，试求$x(t) = s(t)\sin\omega_0 t$的频谱

解答：利用时域相乘频域卷积，可得 $x(t)$的频谱：

$$s(t)\sin\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2j}[s(\omega-\omega_0)-s(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{j}{2}[s(\omega+\omega_0)-s(\omega-\omega_0)]$$

另一种解法：由$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)$，根据傅里叶变换的频移特性也可得到上式。

第二章

补（3）：推导$x(t) = s(t)\cos\omega_0 t$的频谱

方法一：由虚指数函数频移特性

$$x(t) = s(t)cos\omega_0 t = s(t) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}[S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)]$$

方法二：根据时域相乘频域卷积性

$$cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$s(t)cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}S(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}[S(\omega + \omega_0) + S(\omega - \omega_0)]$$

第二章 补充习题1

已知$F_1(\omega)=\mathcal{F}\left[f_1(t)\right]$,利用傅里叶变换的性质,求$F_2(\omega)=\mathcal{F}\left[f_1(6-2t)\right]$。

方法一. 按反褶—尺度—时移次序求解

已知 $F_1(\omega)=\mathcal{F}\left[f_1(t)\right]$

对t反褶 $\mathcal{F}\left[f_1(-t)\right]=F_1(-\omega)$

对t压缩2倍 $\mathcal{F}\left[f_1(-2t)\right]=\dfrac{1}{2}F_1\left(-\dfrac{\omega}{2}\right)$

对t时移$\dfrac{6}{2}$,得 $\mathcal{F}\left[f_1(6-2t)\right]=\dfrac{1}{2}F_1\left(-\dfrac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}$

在对t压缩后,进行平移时,应注意平移的量是3而不是6

方法二. 按反褶—时移—尺度次序求解

已知 $F_1(\omega) = \mathcal{F}\left[f_1(t)\right]$

对 t 反褶 $\mathcal{F}\left[f_1(-t)\right] = F_1(-\omega)$

对 t 时移 6, 得 $\mathcal{F}\left[f_1(6-t)\right] = F_1(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\omega}$

对 t 压缩 2 倍 $\mathcal{F}\left[f_1(6-2t)\right] = \dfrac{1}{2}F_1\left(-\dfrac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}$

其它方法自行练习。

第二章补充习题2

- 求下列信号的频谱：

$$f(t)=\begin{cases}1+\cos t & |t|\le \pi \\ 0 & |t|>\pi\end{cases}$$

提示：门函数$G_\tau(t)$表示幅度为1，脉宽为τ

可表示$1+\cos t$与门函数相乘

解法1：利用欧拉公式，傅氏变换的频移特性

解法2：利用频域卷积定理，δ函数卷积运算

解法一

- 利用$g(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow G(\omega-\omega_0)$， $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)$

$$f(t) = (1+\cos t)\cdot G_{2\pi}(t) = \left(1+\frac{1}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{-jt}\right)\cdot G_{2\pi}(t)$$

$$\because G_{2\pi}(t) \Leftrightarrow 2\pi Sa(\pi\omega)$$

$$\therefore \frac{1}{2}e^{jt}\cdot G_{2\pi}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\pi Sa[\pi(\omega-1)] = \pi Sa(\omega-1)$$

$$\frac{1}{2}e^{-jt}\cdot G_{2\pi}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\pi Sa[\pi(\omega+1)] = \pi Sa(\omega+1)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{-2\sin\pi\omega}{\omega(\omega^2-1)}$$

解法二

- 利用 $f_1(t)\cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

$$F(\omega) * \delta(\omega-\omega_0) = F(\omega-\omega_0)$$

已知：$f(t) = (1+\cos t)\cdot G_{2\pi}(t)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}[2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega+1) + \pi\delta(\omega-1)] * 2\pi Sa(\pi\omega)$$

$$= \left[\delta(\omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega+1) + \frac{1}{2}\delta(\omega-1)\right] * 2\pi Sa(\pi\omega)$$

$$= 2\pi Sa(\pi\omega) + \pi Sa[\pi(\omega+1)] + \pi Sa[\pi(\omega-1)]$$

$$= \frac{-2\sin\pi\omega}{\omega(\omega^2-1)}$$