傅里叶变换的核心思想

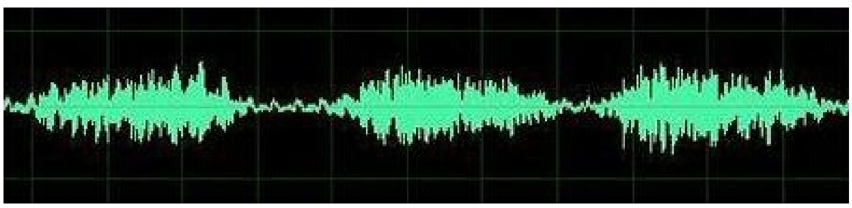
傅里叶分析不仅仅是一个数学工具,更是一种可以彻底颠覆一个人以前世界观的思维模式。

首先，什么是频域？

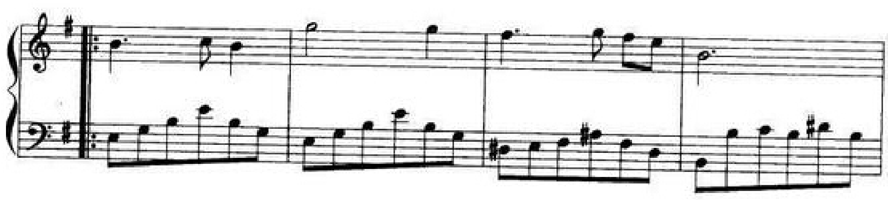
从我们出生,我们看到的世界都以时间贯穿,股票的走势、人的身高、汽车的轨迹都会随着时间发生改变。这种以时间作为参照来观察动态世界的方法我们称其为时域分析。而我们也想当然的认为,世间万物都在随着时间不停的改变,并且永远不会静止下来。但如果我告诉你,用另一种方法来观察世界的话,你会发现世界是永恒不变的,这个静止的世界就叫做频域。

先举一个公式上并非很恰当,但意义上再贴切不过的例子:

在你的理解中,一段音乐是什么呢?



这是我们对音乐最普遍的理解,一个随着时间变化的震动。但我相信对于乐器小能手们来说,音乐更直观的理解是这样的:



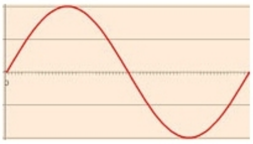
在时域,我们观察到钢琴的琴弦一会上一会下的摆动,就如同一支股票的走势;而在频域,只有那一个永恒的音符。

你眼中看似落叶纷飞变化无常的世界,实际只是躺在上帝怀中一份早已谱好的乐章。

傅里叶告诉我们,任何周期函数,都可以看作是不同振幅,不同相位正弦波的叠加。在第一个例子里我们可以理解为,利用对不同琴键不同力度,不同时间点的敲击,可以组合出任何一首乐曲。

将以上两图简化：

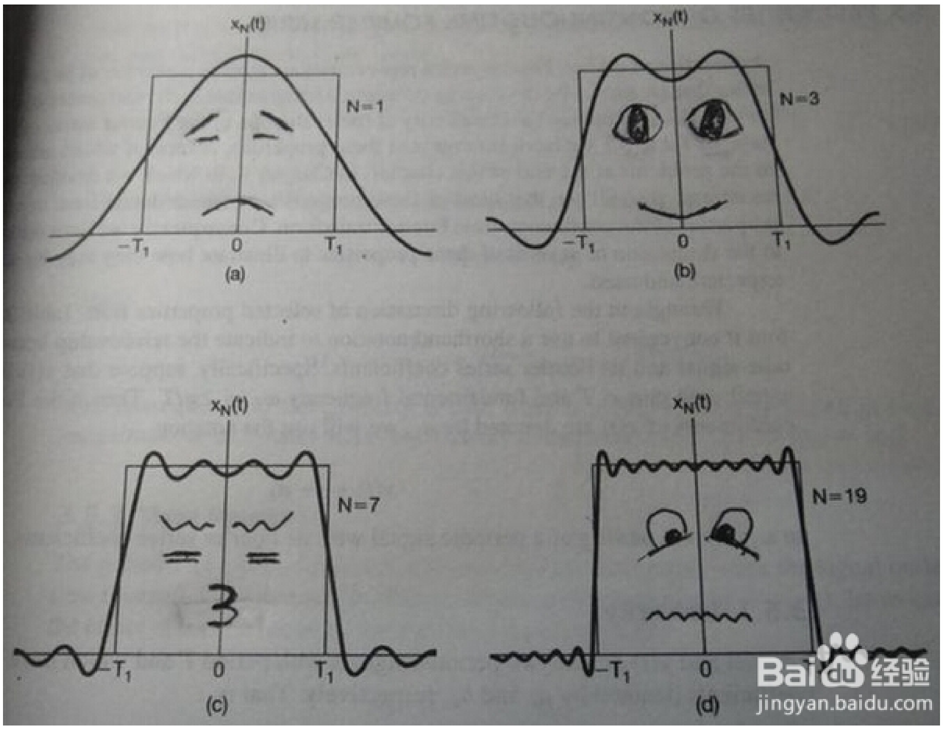
时域：



频域：

而贯穿时域与频域的方法之一,就是傅里叶分析。傅里叶分析可分为傅里叶级数(Fourier Serie)和傅里叶变换(Fourier Transformation),先从简单的傅里叶级数(Fourier Series)开始。

能否用前面说的正弦曲线波叠加出一个带 90 度角的矩形波来？



第一幅图是正弦波 cos(x)

第二幅图是 2 个正弦波的叠加 cos(x)+a.cos(3x)

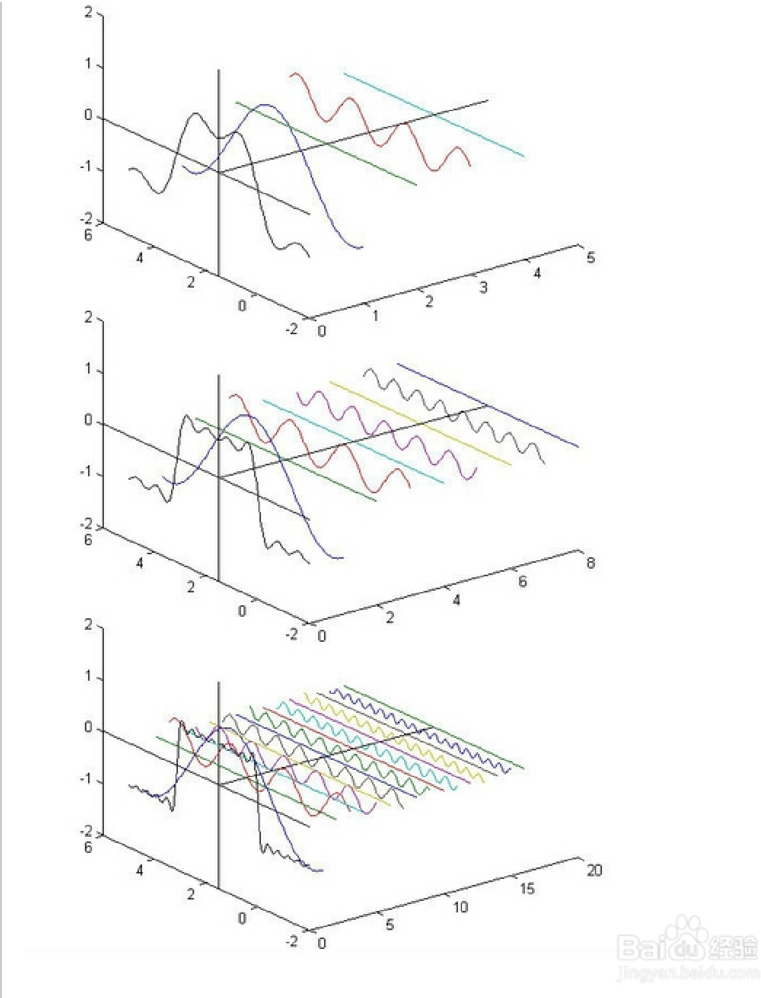
第三幅图是 4 个正弦波的叠加

第四幅图是 10 个正弦波的叠加

随着正弦波数量逐渐的增长,他们最终会叠加成一个标准的矩形。随着叠加的递增,所有正弦波中上升的部分逐渐让原本缓慢增加的曲线不断变陡,而所有正弦波中下降的部分又抵消了上升到最高处时继续上升的部分使其变为水平线。一个矩形就这么叠加而成了。但是要多少个正弦波叠加起来才能形成一个标准 90 度角的矩形波呢?答案是无穷多个。

不仅仅是矩形,你能想到的任何波形都是可以如此方法用正弦波叠加起来的。

还是上图的正弦波累加成矩形波,我们换一个角度来看看:



在这几幅图中,最前面黑色的线就是所有正弦波叠加而成的总和,也就是越来越接近矩形波的那个图形。而后面依不同颜色排列而成的正弦波就是组合为矩形波的各个分量。这些正弦波按照频率从低到高从前向后排列开来,而每一个波的振幅都是不同的。一定有细心的读者发现了,每两个正弦波之间都还有一条直线,那并不是分割线,而是振幅为 0 的正弦波!也就是说,为了组成特殊的曲线,有些正弦波成分是不需要的。这里,不同频率的正弦波我们成为频率分量。

好了,关键的地方来了!!

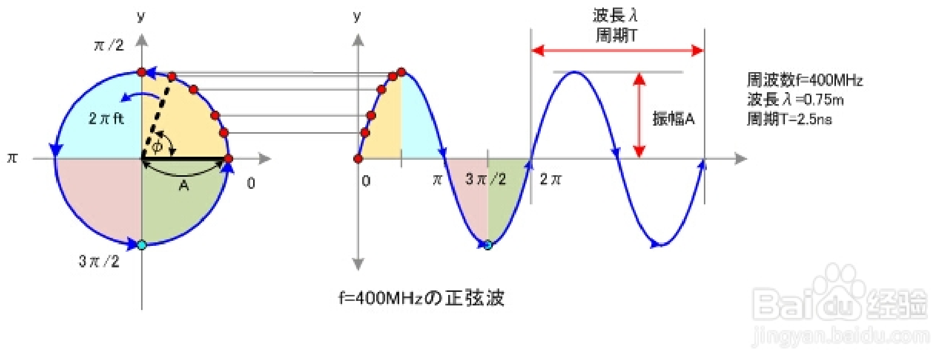
如果我们把第一个频率最低的频率分量看作“1”,我们就有了构建频域的最基本单元。

对于我们最常见的有理数轴,数字“1”就是有理数轴的基本单元。

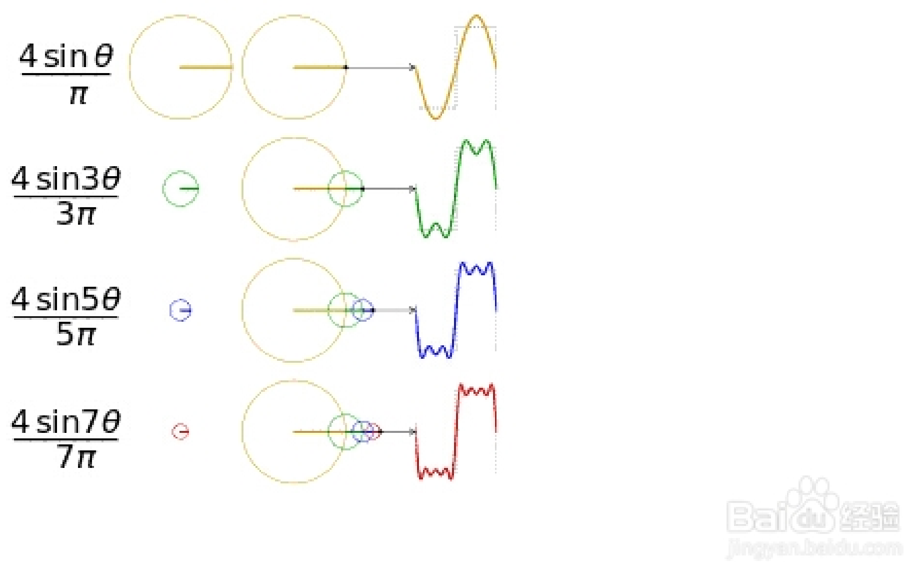
时域的基本单元就是“1 秒”,如果我们将一个角频率为的正弦波 cos(t)看作基础,那么频域的基本单元就是。

有了“1”,还要有“0”才能构成世界,那么频域的“0”是什么呢?cos(0t)就是一个周期无限长的正弦波,也就是一条直线!所以在频域,0 频率也被称为直流分量,在傅里叶级数的叠加中,它仅仅影响全部波形相对于数轴整体向上或是向下而不改变波的形状。

接下来，怎么定义正弦波呢？



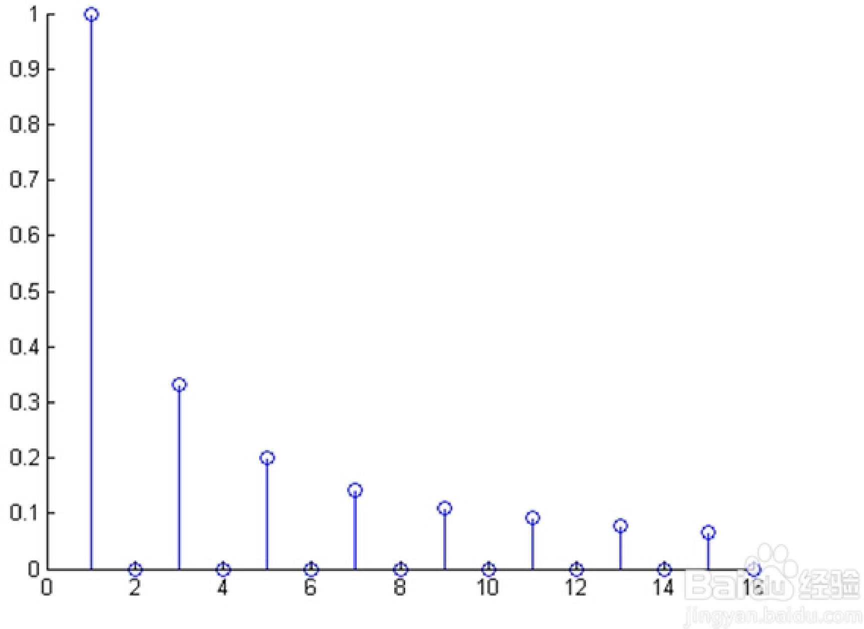
正弦波就是一个圆周运动在一条直线上的投影。所以频域的基本单元也可以理解为一个始终在旋转的圆



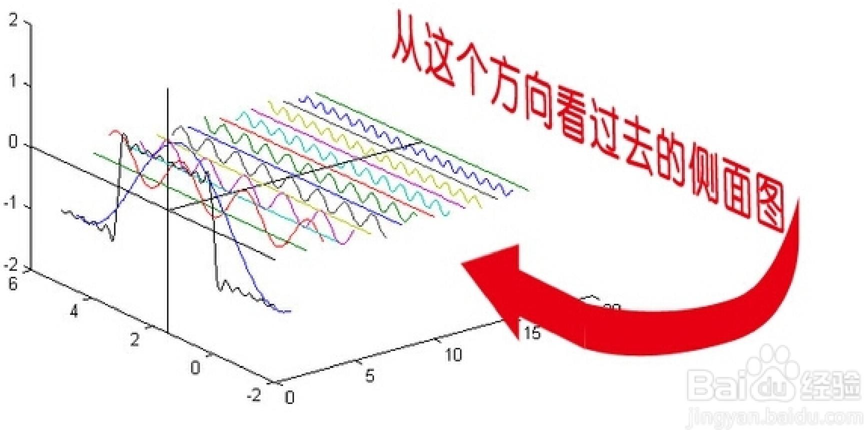
想看动图的同学请戳这里:　File:Fourier series square wave circles animation.gif

以及这里:　File:Fourier series sawtooth wave circles animation.gif

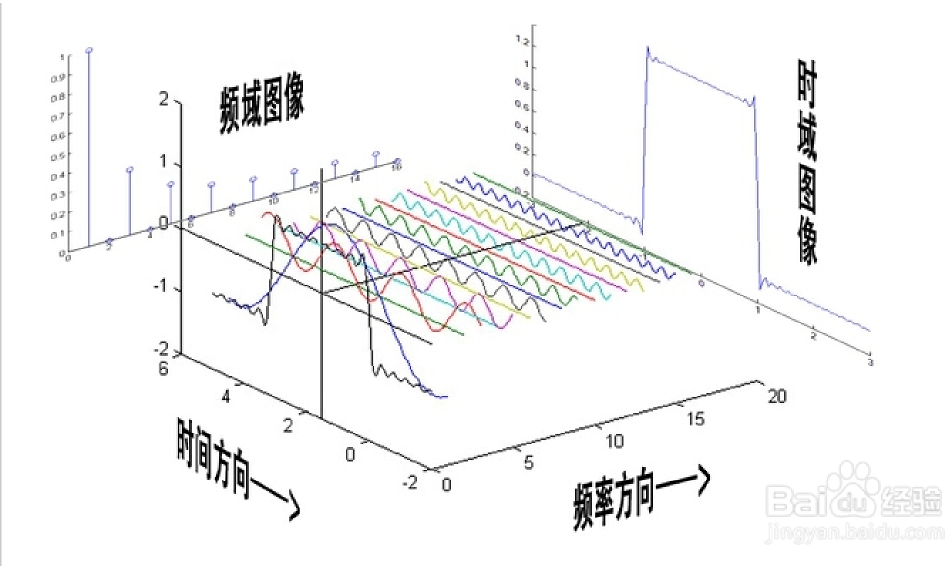
介绍完了频域的基本组成单元,我们就可以看一看一个矩形波,在频域里的另一个模样了:



这就是矩形波在频域的样子,频域图像,也就是俗称的频谱,就是——



再清楚一点:



可以发现,在频谱中,偶数项的振幅都是 0,也就对应了图中的彩色直线。振幅为 0 的正弦波。

动图请戳: File:Fourier series and transform.gif

想象一下,世界上每一个看似混乱的表象,实际都是一条时间轴上不规则的曲线,但实际这些曲线都是由这些无穷无尽的正弦波组成。我们看似不规律的事情反而是规律的正弦波在时域上的投影,而正弦波又是一个旋转的圆在直线上的投影。

上次的关键词是:从侧面看。这次的关键词是:从下面看。

在第二课最开始,我想先回答很多人的一个问题:傅里叶分析究竟是干什么用的?

先说一个最直接的用途。无论听广播还是看电视,我们一定对一个词不陌生——频道。频道,就是频率的通道,不同的频道就是将不同的频率作为一个通道来进行信息传输。下面大家尝试一件事:

先在纸上画一个 sin(x),,接下去画一个 sin(3x)+sin(5x)的图形。

别说标准不标准了,曲线什么时候上升什么时候下降你都不一定画的对吧?

好,画不出来不要紧,我把 sin(3x)+sin(5x)的曲线给你,但是前提是你不知道这个曲线的方程式,现在需要你把 sin(5x)给我从图里拿出去,看看剩下的是什么。这基本是不可能做到的。

但是在频域呢?则简单的很,无非就是几条竖线而已。

所以很多在时域看似不可能做到的数学操作,在频域相反很容易。这就是需要傅里叶变换的地方。尤其是从某条曲线中去除一些特定的频率成分,这在工程上称为滤波,是信号处理最重要的概念之一,只有在频域才能轻松的做到。

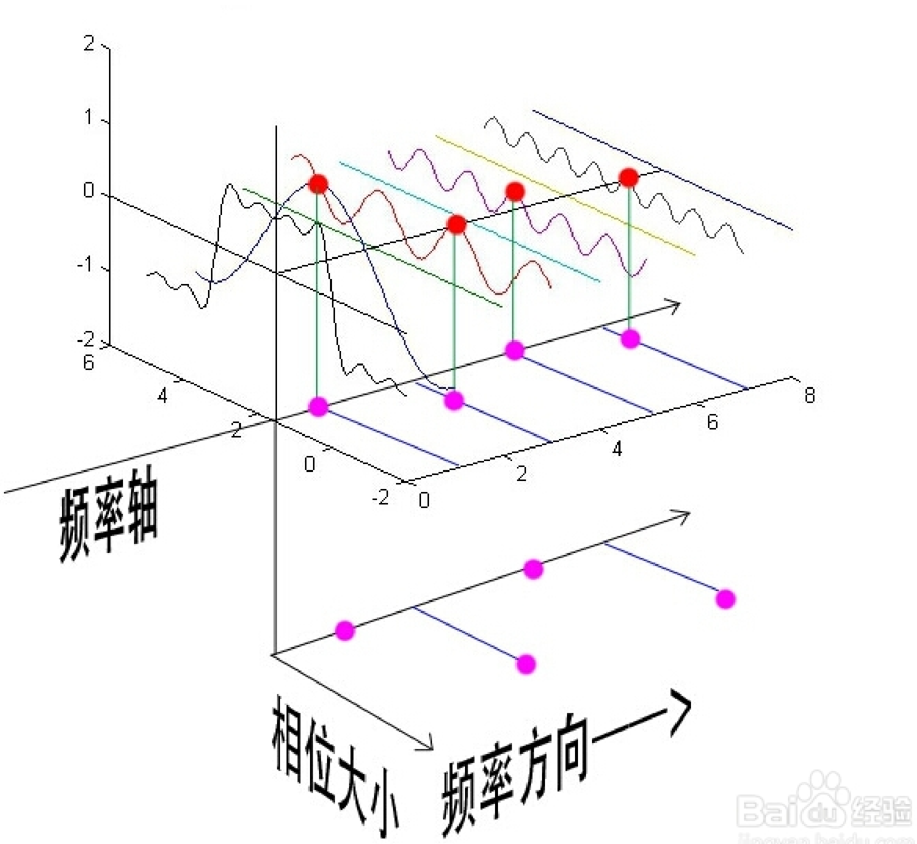
再说一个更重要,但是稍微复杂一点的用途——求解微分方程。微分方程的重要性不用我过多介绍了。各行各业都用的到。但是求解微分方程却是一件相当麻烦的事情。因为除了要计算加减乘除,还要计算微分积分。而傅里叶变换则可以让微分和积分在频域中变为乘法和除法。

傅里叶分析当然还有其他更重要的用途。。。

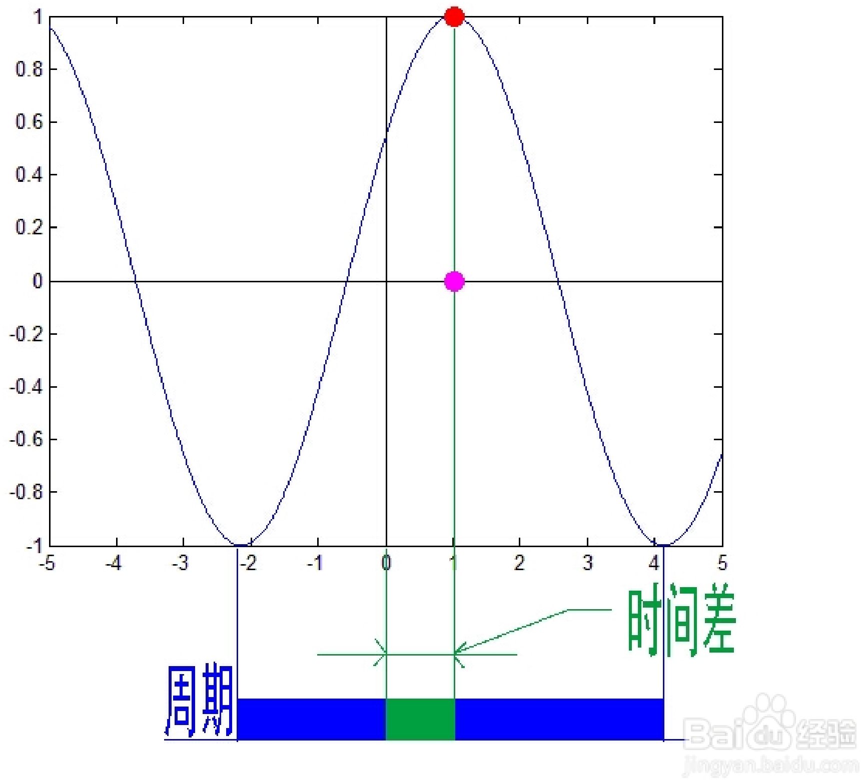
下面我们继续说相位谱:

通过时域到频域的变换,我们得到了一个从侧面看的频谱,但是这个频谱并没有包含时域中全部的信息。因为频谱只代表每一个对应的正弦波的振幅是多少,而没有提到相位。基础的正弦波 A.sin(wt+θ)中,

振幅,频率,相位缺一不可,不同相位决定了波的位置,所以对于频域分析,仅仅有频谱(振幅谱)是不够的,我们还需要一个相位谱。那么这个相位谱在哪呢?我们看下图,这次为了避免图片太混论,我们用 7 个波叠加的图。



鉴于正弦波是周期的,我们需要设定一个用来标记正弦波位置的东西。在图中就是那些小红点。小红点是距离频率轴最近的波峰,而这个波峰所处的位置离频率轴有多远呢?为了看的更清楚,我们将红色的点投影到下平面,投影点我们用粉色点来表示。当然,这些粉色的点只标注了波峰距离频率轴的距离,并不是相位。



这里需要纠正一个概念:时间差并不是相位差。如果将全部周期看作 2Pi 或者 360 度的话,相位差则是时间差在一个周期中所占的比例。我们将时间差除周期再乘 2Pi,就得到了相位差。

在完整的立体图中,我们将投影得到的时间差依次除以所在频率的周期,就得到了最下面的相位谱。所以,频谱是从侧面看,相位谱是从下面看。

注意到,相位谱中的相位除了 0,就是 Pi。因为 cos(t+Pi)=-cos(t),所以实际上相位为 Pi 的波只是上下翻转了而已。对于周期方波的傅里叶级数,这样的相位谱已经是很简单的了。另外值得注意的是,由于 cos(t+2Pi)=cos(t),所以相位差是周期的,pi 和 3pi,5pi,7pi 都是相同的相位。人为定义相位谱的值域为(-pi,pi],所以图中的相位差均为 Pi。

最后来一张大集合:

最后来一张大集合：