第三章

随机过程

主要内容

- 随机过程及统计特性
- 平稳随机过程
- 高斯噪声
- 窄带噪声的性质

3.1 随机过程及统计特性

一. 随机变量

- 定义
- 分布函数
- 概率密度函数
  - 通信系统中常用的概率分布：均匀分布、高斯分布、瑞利分布
- 二维随机变量
- 随机变量数字特征
  - 数学期望（均值）、方差、协方差、矩

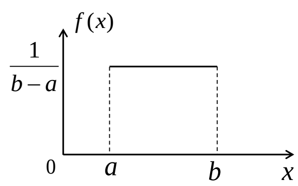
- 随机变量的概念
  - **定义：**一个随机变量是从试验的样本空间到实数集的函数，即一个随机变量对每个可能的结果指派一个实数值
  - 在随机试验E中，对于随机变量X，只关心它的取值范围和概率分布
  - 随机变量包括离散型和连续型

- 随机变量的概率分布
  - **分布函数**
    - X是随机变量，x是任意实数，定义 $F(x)=P\{X\le x\}$ 称为X的分布函数
  - **概率密度函数**
    - X是连续型随机变量，$f(x)$为X的概率密度 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- **概率分布的性质**
  - $0\le F(x)\le 1$，且单调递增
  - $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$
  - $f(x)\ge 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
  - $P\{x_1<X\le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

- 通信系统常用的概率分布
  - **均匀分布**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & else\end{cases}$$

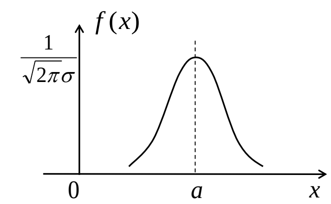


- **高斯分布（正态分布）**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

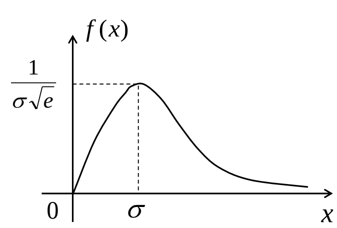
$-\infty<x<\infty$

$\sigma>0$，$-\infty<a<\infty$ 常数



- **瑞利分布**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x\ge 0，\ \sigma>0\text{常数}\\ 0 & x<0\end{cases}$$



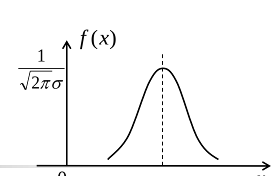
- 二维随机变量
  - 分布函数 $F(x，y)=P\{X\le x，Y\le y\}$
  - 概率密度 $f(x，y)=\dfrac{\partial^2 F(x，y)}{\partial x\,\partial y}$
  - 性质： X，Y相互独立的充要条件是

$$f(x，y)=f(x)\cdot f(y)$$

- 随机变量数字特征
  - **数学期望（均值）**
    - 设连续随机变量X具有概率密度 $f(x)$，则：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx \quad \text{称为数学期望}$$

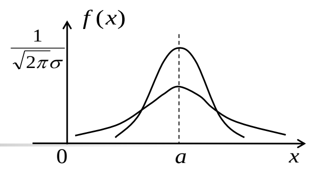
    - 离散随机变量的数学期望：$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$



- 例：高斯型随机变量的数学期望值是a

- **数学期望的性质**
  - $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
  - X，Y是相互独立的随机变量，则：

$$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$$



- **方差**
  - $\sigma_x^2 = D(X) = E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$

    $$= \int_{-\infty}^{\infty}[x-E(x)]^2 f(x)dx$$

    - 例：高斯型随机变量的方差为 σ^2
  - $\boxed{D(X)=E(X^2)-E^2(X)}$

    均方值与均值平方的差值
  - 若X，Y相互独立，则：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

- **协方差**
  - X和Y的协方差

    $Cov(X, Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$
  - X和Y的相关系数

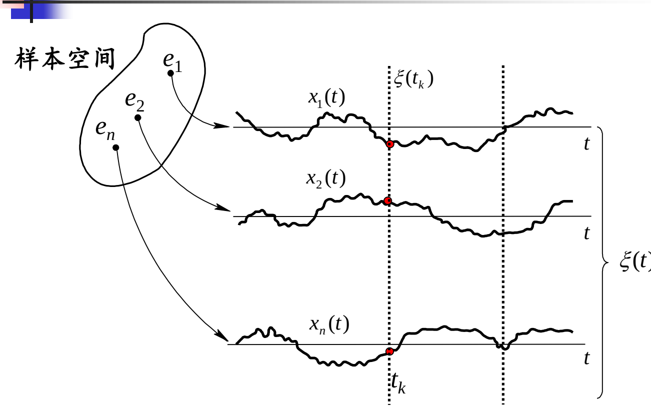
    $$\rho_{XY}=\frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$$
  - $Cov(X, Y)=0$即：$\rho_{XY}=0$，称X，Y不相关

    等效于：$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

- **矩**
  - $E(X^k)$为X的k阶矩
  - $E\left\{[X-E(X)]^k\right\}$为$X$的$k$阶中心矩
  - $E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}$

    为X和Y的$k+l$阶混合中心矩
  - X的均值是X的一阶矩
  - X的方差是X的二阶中心矩
  - X和Y的协方差是X和Y的1＋1阶混合中心矩

二. 随机过程



1. 基本概念

- 理解1
  - **对应所有可能的随机试验结果的时间函数的集合**
    - 样本函数$x_i(t)$：随机过程的一次实现，是确定的时间函数
    - 随机过程$\xi(t)=\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\ldots\}$是全部**样本函数的集合**

- 理解2
  - **随机过程是随机变量概念的延伸**
    - 随机过程在任意时刻的值是一个随机变量
    - 随机过程可以看作是在时间进程中处于不同时刻的**随机变量的集合**

- 定义

设E是随机试验，其样本空间为$S=\{e\}$，如果对于每一个$e\in S$，有一个时间t的实函数$X(e,t)$，$t\in T$与之对应，于是对于所有$e\in S$，得到时间t的函数族，称为随机过程，记作$\xi(t)$，族中每个函数称为这个随机过程的样本函数，即$\xi(t)=\{x_1(t),\ x_2(t)\cdots x_n(t)\cdots\}$

2. 统计特性

- 分布函数和概率密度
- 数字特征
  - 数学期望（均值）
  - 方差
  - 自相关函数

分布函数和概率密度

- 设$\xi(t)$表示一个随机过程，它在任意时刻t_1的值$\xi(t_1)$是一个随机变量，其统计特性可以用分布函数或概率密度函数来描述
- 随机过程$\xi(t)$的**一维分布函数**

$$F_1(x,t_1)=P\{\ \xi(t_1)\le x\ \}$$

- 随机过程$\xi(t)$的**一维概率密度函数**

$$f_1(x,t_1)=\frac{\partial F_1(x,t_1)}{\partial x}$$

- 随机过程$\xi(t)$ 的**二维分布函数**

$$F_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=P\{\xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2\}$$

- 随机过程$\xi(t)$的**二维概率密度函数**

$$f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

- 随机过程$\xi(t)$ 的**n维分布函数**

$$F_n(x_1,x_2\cdots x_n;t_1,t_2\cdots t_n)$$
$$=P\{\xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2\cdots\xi(t_n)\le x_n\}$$

- 随机过程$\xi(t)$ 的**n维概率密度函数**

$$f_n(x_1,x_2\cdots x_n;\ t_1,t_2\cdots t_n)=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2\cdots x_n;\ t_1,t_2\cdots t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

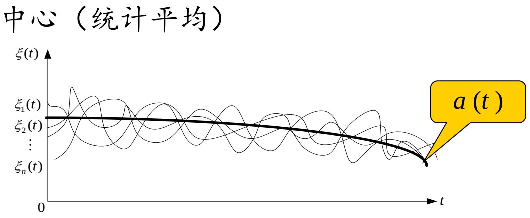
$$E[X]=E[\xi(t_1)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_1(x,t_1)dx=a_1$$

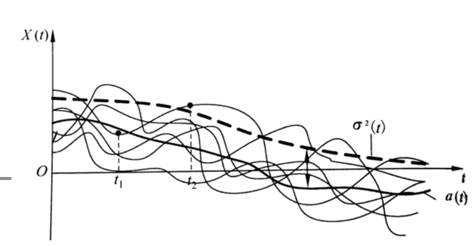
数字特征

- **数学期望（均值）**

$$E[\xi(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_1(x,t)dx=a(t)$$

- 物理意义：表示随机过程在各个时刻的摆动中心（统计平均）





- **方差**

$$\sigma^2(t)=D[\xi(t)]=E\left\{[\xi(t)-a(t)]^2\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}[x-a(t)]^2\cdot f_1(x,t)dx$$

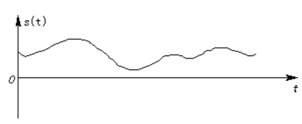
- 物理意义：表示随机过程在任意时刻的取值（随机变量）相对于该时刻均值的偏离程度
- 方差等于均方值与均值平方之差

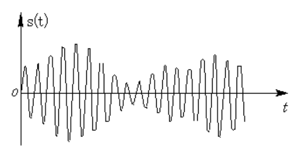
$$\sigma^2(t)=E[\xi^2(t)]-a^2(t)$$

- **自相关函数**
  - 物理意义：表示随机过程在任意两个时刻获得的随机变量间的相关性
  - 自相关函数
    - 物理意义：表示随机过程在两个时刻取值的关联程度，$\xi(t)$变化越平缓，两个时刻取值的相关性越大，R值越大

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$





3.2 平稳随机过程

- 严平稳过程
- 宽平稳过程
- 数字特征
- 各态遍历性
- 平稳过程的自相关和功率谱
- 平稳过程通过线性系统

一. 严平稳过程（狭义）

- 定义
  - 若随机过程的n维分布函数和n维概率密度函数与时间起点无关，则为严平稳随机过程
  - $F_n(x_1,x_2\cdots x_n;\ t_1,t_2\cdots t_n)=F_n(x_1,x_2\cdots x_n;\ t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots t_n+\tau)$
  - $f_n(x_1,x_2\cdots x_n;\ t_1,t_2\cdots t_n)=f_n(x_1,x_2\cdots x_n;\ t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots t_n+\tau)$
  - 对任意τ成立。

若 $t_1+\tau=0$, 则$\tau=-t_1$

则：$f_2(x_1,x_2;t_1+\tau,t_2+\tau)=f_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)$

- 性质
  - 一维分布与 t 无关： $f_1(x,t_1)=f_1(x,t_k)=f_1(x)$
  - 二维分布只与时间差有关：

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_1+\tau,t_2+\tau)=f_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)$$

- 数字特征
  - 数学期望是常数 $a(t)=a$
  - 方差是常数 $\sigma^2(t)=\sigma^2$
  - 自相关只与$\boldsymbol{\tau}$有关 $R(t,t+\tau)=R(\tau)$

$E(X^k)$为X的k阶矩

$\sigma^2(t)=E[\xi^2(t)]-a^2(t)$

二. 宽平稳过程（广义）

- **若随机过程的一维、二维分布函数和概率密度函数不受时移影响，则为宽平稳随机过程**
- 定义
  - 若随机过程$\xi(t)$的二阶矩存在，且满足：

    ① $E[\xi(t)]$是常数

    ② $E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=R(\tau)$

    则称$\xi(t)$为宽平稳过程
- **严平稳随机过程必定是宽平稳的，反之不一定成立，特例：高斯过程二者等价**

- 各态遍历性（各态历经性）
  - 设 $x(t)$ 是平稳过程 $\xi(t)$ 的任意一个样本，其时间均值和时间相关函数：

$$\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt$$

$$\overline{x(t)x(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt$$

若$\xi(t)$ 的统计平均＝ $x(t)$ 的时间平均：

$$\begin{cases} a=\overline{x(t)} \\ R(\tau)=\overline{x(t)x(t+\tau)} \end{cases}$$

则称该平稳过程具有各态遍历性

- 具有各态遍历性的随机过程一定是平稳过程，反之不一定成立
- 用一次实现的“时间平均”代替整个过程的“统计平均”，可使测量和计算问题大大简化
- 根据大量实验和经验得出，在通信系统中的随机信号和噪声，大都具有各态遍历性
- 利用遍历性表示电信号（平稳）的特性

$$\overline{f^2(t)} = E[\xi^2(t)]$$

$$\overline{f(t)}^2 = E^2[\xi(t)]$$

- 例：判断随机相位正弦波是否具有各态遍历性 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$

  A、ω_c为常数，θ在$[0,2\pi]$均匀分布。
- 解：$\because E[\xi(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_c t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta = 0$

$$R(t,t+\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$$

$$= \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_c t+\theta)\cdot A\cos[\omega_c(t+\tau)+\theta]\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$$

又 $\because \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t+\theta)dt = 0$

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t+\theta)\cdot A\cos[\omega_c(t+\tau)+\theta]dt$$

$= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$ $\quad\therefore$ 统计平均 = 时间平均

三、平稳过程自相关与功率谱

- 自相关 $R(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$
- 自相关性质

① $R(\tau) = R(-\tau)$

② $R(0) = E[\xi^2(t)] = S \geq 0$

③ $R(0) \geq |R(\tau)|$

④ $R(\infty) = E^2[\xi(t)] = a^2$

⑤ $\sigma^2 = R(0) - R(\infty)$

若：X和Y不相关

则：$E[X\cdot Y] = E(X)\cdot E(Y)$

- 证明：

② $R(0) = E[\xi^2(t)] = S \geq 0$

$\because \sigma^2(t) = E[\xi^2(t)] - a^2(t)$ $\qquad \therefore R(0) = \sigma^2(t) + a^2(t)$

$= E[\xi(t)\xi(t+0)] - a^2(t)$ $\qquad = \sigma^2 + a^2$

$= R(0) - a^2(t)$ $\qquad = S$

④ $R(\infty) = E^2[\xi(t)] = a^2$

$$R(\infty) = \lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$$

$$= E[\xi(t)]\cdot E[\xi(t+\tau)]$$

$$= E^2[\xi(t)] = a^2$$

- 自相关函数表示平稳过程的物理特性

$\xi(t)$的平均功率：$S = E[\xi^2(t)] = R(0)$

$\xi(t)$的直流功率：$a^2 = E^2[\xi(t)] = R(\infty)$

$\xi(t)$的交流功率：$\sigma^2 = R(0) - R(\infty)$

$$\sigma^2(t) = E[\xi^2(t)] - E^2[\xi(t)]$$

$$P(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

- 平稳过程自相关和功率谱
  - 平稳过程的功率谱

$$P_\xi(\omega) = E[P(\omega)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[|F_T(\omega)|^2\right]$$

  - 平稳过程的自相关函数与功率谱密度之间可构成付氏变换关系—**维纳辛钦定理**

$R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$ $\quad$ 即：$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- 由$R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$，得：
  - 平稳过程平均功率

$$P_\xi = R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)d\omega$$

  - 若平稳过程具有各态遍历性，则任一样本函数的功率谱等于整个过程的功率谱

$$\because \overline{R(\tau)} = R(\tau)$$

$$\therefore P(\omega) = P_\xi(\omega)$$

- **例：求随机相位正弦波的功率谱密度和平均功率。**

  $\xi(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$ ，其中ω_0是常数，θ是在（0,2π）均匀分布的随机变量。

  - 思路：首先判断是否为平稳过程，然后才能利用 $R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$ 求功率谱

$\xi(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$ ，其中ω_0是常数，θ是在（0,2π）均匀分布的随机变量。

- 解：
  - **求$\xi(t)$的数学期望和自相关**

$$E[\xi(t)] = E[\sin(\omega_0 t + \theta)] = E[\sin\omega_0 t \cdot \cos\theta + \cos\omega_0 t \cdot \sin\theta]$$

$$= \sin\omega_0 t \cdot E[\cos\theta] + \cos\omega_0 t \cdot E[\sin\theta] = 0$$

$$R(t, t+\tau) = E[\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)]$$

$$= E\{\sin(\omega_0 t + \theta)\cdot\sin[\omega_0(t+\tau)+\theta]\} = \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau = R(\tau)$$

$\therefore \xi(t)$是宽平稳随机过程

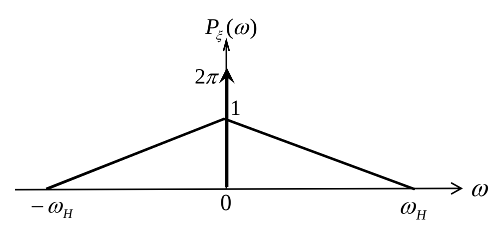
  - **求$\xi(t)$的功率谱密度：** $\because R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$

$$\therefore P_\xi(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$

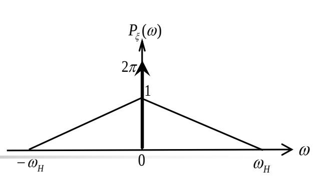
  - **求$\xi(t)$的平均功率：** $P_\xi = R(0) = \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau|_{\tau=0} = \frac{1}{2}$

$$P_\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]d\omega = \frac{1}{2}$$

- **例：已知平稳过程$\xi(t)$的功率谱，求平均功率、直流功率、交流功率。**



- 解：



  - **方法一**

$$P_\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)d\omega$$

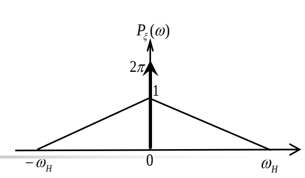
$\because \omega = 0$处的$2\pi\delta(\omega)$表示直流分量

$$\therefore P_\uparrow = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)d\omega = 1(W)$$

$$P_\Delta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\Delta(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\omega_H \cdot 1 = \frac{\omega_H}{2\pi} = f_H(W)$$

$$P_\xi = P_\uparrow + P_\Delta = 1 + f_H(W)$$

- 解：



  - **方法二**

$$\sigma_\xi^2 = R(0) - R(\infty)$$

$$\because R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

$$P_\xi(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \Delta$$

$$\therefore R(\tau) = 1 + \frac{\omega_H}{2\pi}Sa^2\left(\frac{\omega_H\tau}{2}\right)$$

$$R(0) = 1 + \frac{\omega_H}{2\pi}$$

$$R(\infty) = 1$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\omega_H}{2\pi}$$

$$f_o(t) = f_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

平稳过程通过线性系统

- 随机过程 $\xi_i(t)$ 通过线性系统 $h(t)$，其输出 $\xi_o(t)$ 也是随机过程

$$\xi_o(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau$$

- 设系统输入 $\xi_i(t)$ 是**平稳过程**，均值为 a，自相关为 $R_i(\tau)$

$$P_o(\omega) = P_i(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- **输出 $\xi_o(t)$ 也是平稳过程**
  - **数学期望：** $E[\xi_o(t)] = E[\xi_i(t)] \cdot H(0)$
    - $H(0)$ 是线性系统在 $\omega=0$ 处的频率响应，因此输出过程的均值也是一个常数
  - **自相关：** $R_0(t, t+\tau) = R_0(\tau)$
  - **功率谱密度：**

$$P_{\xi_o}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_o(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = P_{\xi_i}(\omega)|H(\omega)|^2$$

  - **若 $\xi_i(t)$ 是平稳过程，经过线性系统后的 $\xi_o(t)$ 也是平稳过程**

- **证明：**
  - $\xi_o(t)$ 的数学期望

$$E[\xi_o(t)] = E\left[\int_0^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot E[\xi_i(t-\tau)]d\tau$$

$\because$ 输入是平稳过程 $\quad \therefore E[\xi_i(t-\tau)] = E[\xi_i(t)]$

$$E[\xi_o(t)] = \int_0^{\infty} h(\tau)d\tau \cdot E[\xi_i(t)]$$

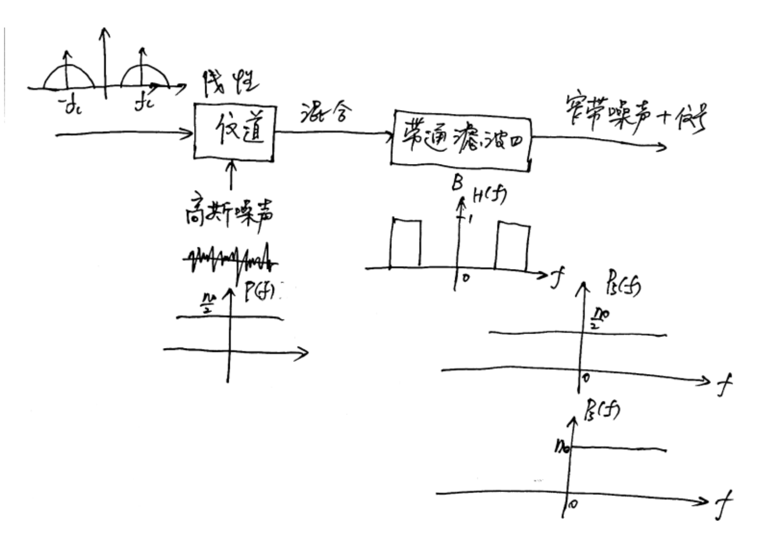
$$\because H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \therefore H(0) = \int_0^{\infty} h(t)dt$$

$$E[\xi_o(t)] = H(0)E[\xi_i(t)]$$

3.3 高斯噪声

- 高斯过程
- 窄带随机过程
- 高斯白噪声、带限白噪声
- 窄带高斯噪声
- 正弦波加窄带高斯噪声

  - 我们所研究的通信模型中，由信道加入的噪声源为高斯白噪声



高斯过程

- 定义
  - 如果随机过程 $\xi(t)$ 的任意 n 维（n =1,2,...）分布均服从正态分布，则称它为高斯过程

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n;\ t_1, t_2, ..., t_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2...\sigma_n|B|^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

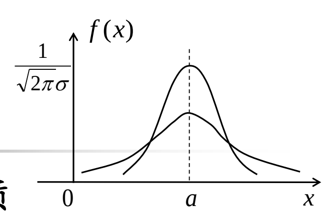
- 重要性质
  - 高斯过程的 n 维分布，可仅由它的数字特征决定
  - 严平稳和宽平稳等价，均值和方差都是常数
  - 高斯过程通过线性系统，输出仍是一个高斯过程
  - 高斯过程中，不同时刻得到的随机变量之间若互不相关，则也相互独立

$$f_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=f(x_1,t_1)\cdot f(x_2,t_2)\cdots f(x_n,t_n)$$

- **一维高斯分布**
  - 高斯过程在任一时刻上的取值是一个正态分布的随机变量，其一维概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

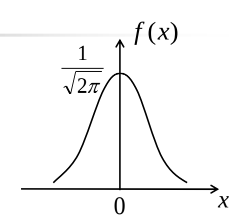
其中：**a — 均值，σ^2 — 方差**



- **一维高斯分布的性质**
  - $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称
  - $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 单调上升，在 $(a,+\infty)$ 单调下降，在 $x=a$ 处有最大值 $f(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
  - 若 σ 不变，a不同，表现为图形平移；
    若a不变，σ不同，表现为随 σ 增大，图形变平坦，偏离均值的程度越大

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

  $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\int_{a}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}$



- 归一化：$a=0$，$\sigma=1$，称为标准正态分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

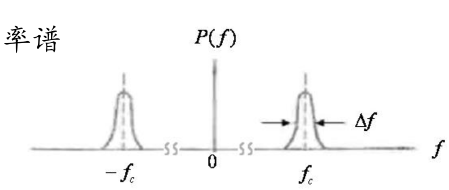
窄带随机过程

- 窄带条件：$\Delta f << f_c$，　$f_c >> 0$
- 表达式：$\boxed{\xi(t)=a_\xi(t)\cos[\,\omega_c t+\varphi_\xi(t)\,]}$
  - 式中，随机包络 $a_\xi(t)\ge 0$

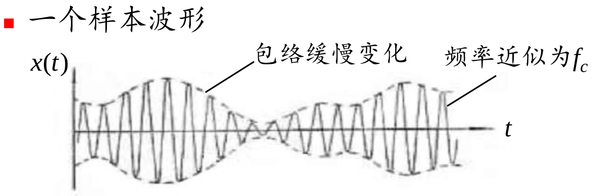
    随机相位 $\varphi_\xi(t)$在$[0,2\pi]$取值

    ω_c — 中心角频率
  - $a_\xi(t)$和$\varphi_\xi(t)$的变化相对于载波$\cos\omega_c t$ 的变化要缓慢得多

- 功率谱



- 一个样本波形



$$\begin{aligned}\xi(t) &= a_\xi(t)\cos[\omega_c t+\varphi_\xi(t)]\\ &= a_\xi(t)[\cos\omega_c t\cdot\cos\varphi_\xi(t)-\sin\omega_c t\cdot\sin\varphi_\xi(t)]\\ &= \underline{a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)}\cdot\cos\omega_c t-\underline{a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)}\cdot\sin\omega_c t\end{aligned}$$

- 窄带过程的性质
  - 窄带过程的表达式展开

$$\boxed{\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t}$$

$\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)$——$\xi(t)$的同相分量

$\xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)$——$\xi(t)$的正交分量

$$a_\xi(t)=\sqrt{\xi_c^2(t)+\xi_s^2(t)}\qquad \varphi_\xi(t)=arctg\frac{\xi_s(t)}{\xi_c(t)}$$

- **均值为0，方差为σ_ξ^2的窄带高斯过程$\xi(t)$**
  - $\xi_c(t)$和$\xi_s(t)$也是均值为0的平稳过程
  - $\xi_c(t)$、$\xi_s(t)$与$\xi(t)$具有相同的方差σ_ξ^2，具有相同的平均功率
  - $\xi_c(t)$和$\xi_s(t)$也是高斯过程
  - 同一时刻$\xi_c(t)$与$\xi_s(t)$不相关且统计独立
  - 包络$a_\xi(t)$的一维分布是瑞利分布，相位$\varphi_\xi(t)$的一维分布是均匀分布，且是统计独立的

- $\xi_c(t)$和$\xi_s(t)$的概率分布
  - 一维分布 $f(\xi_c)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\left(-\dfrac{\xi_c^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$

    $f(\xi_s)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\left(-\dfrac{\xi_s^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$
  - 二维分布 $f(\xi_c, \xi_s)=f(\xi_c)\cdot f(\xi_s)$

    $=\dfrac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left(-\dfrac{\xi_c^2+\xi_s^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$

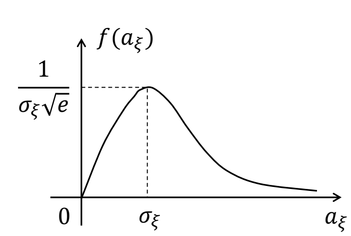
- 利用雅可比行列式，对$f(\xi_c, \xi_s)$做变换，得到：$f(a_\xi, \varphi_\xi)=a_\xi\cdot f(\xi_c, \xi_s)$
- 再利用边缘概率密度定义求出 $f(a_\xi)$和$f(\varphi_\xi)$
- 包络$a_\xi(t)$的一维分布是瑞利分布，相位$\varphi_\xi(t)$的一维分布是均匀分布；且二者统计独立

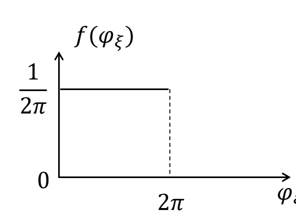
- 包络$a_\xi(t)$和相位$\varphi_\xi(t)$的概率分布
  - 一维分布 $f(a_\xi)=\dfrac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\dfrac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)\qquad a_\xi\geq 0$

    $f(\varphi_\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\qquad 0\leq\varphi_\xi\leq 2\pi$
  - 二维分布 $f(a_\xi, \varphi_\xi)=\dfrac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left(-\dfrac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$

    $=f(a_\xi)\cdot f(\varphi_\xi)$

- 包络$a_\xi(t)$的一维分布是瑞利分布，相位$\varphi_\xi(t)$的一维分布是均匀分布





通信系统中的高斯过程

- 信道加性噪声分类
  - 按噪声来源分类
    - 人为噪声 — 开关火花、电台干扰
    - 自然噪声 — 闪电、宇宙射线、太阳黑子活动
    - 内部噪声 — 热噪声、散弹噪声
  - 按噪声性质分类
    - 脉冲噪声 — 电火花
    - 窄带噪声 — 无线电台干扰
    - 起伏噪声 — 热噪声、散弹噪声、宇宙噪声

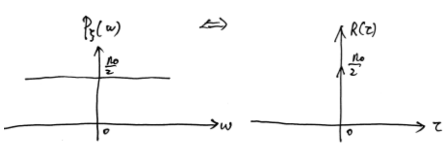
热噪声

- 讨论噪声对于通信系统的影响时，主要考虑起伏噪声，特别是热噪声的影响
  - 来源：来自一切电阻性元器件中电子的热运动
  - 频率范围：均匀分布在大约 0 ～ 10^{12} Hz
  - 性质：高斯白噪声（均值为0的高斯平稳过程）
  - 具有均匀的功率谱密度：$P(\omega)=2kTR=\dfrac{n_0}{2}$

  式中：

  $k=1.38\times10^{-23}$（J/K） — 波兹曼常数
  T — 热力学温度（K）
  R — 阻值（Ω）
  B — 电阻工作频带（Hz）

高斯白噪声



- 功率谱密度在整个频域内均匀分布，称之为白噪声，实际系统为近似白噪声

  双边谱：$P_\xi(\omega)=\dfrac{n_0}{2}\qquad -\infty<\omega<+\infty$

  单边谱：$P_\xi(\omega)=n_0\qquad 0<\omega<+\infty$

- 如果白噪声在任一时刻取值的概率分布服从高斯分布，则称之为高斯白噪声

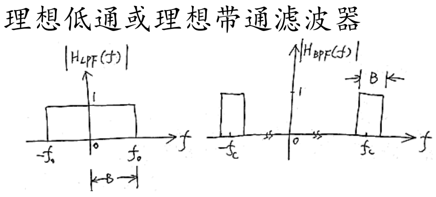
  自相关：$R(\tau)=\dfrac{n_0}{2}\delta(\tau)$ 高斯白噪声在任意两个不同时刻的取值相互独立

带限白噪声

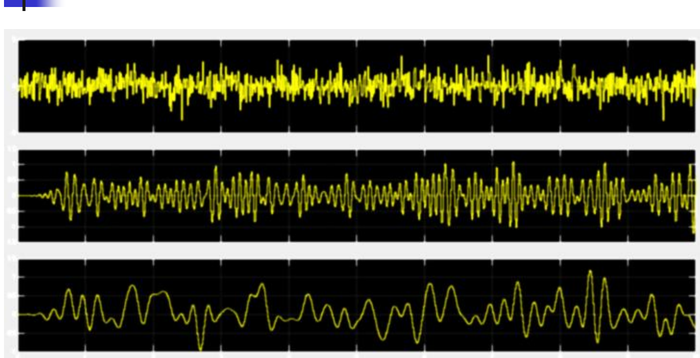
- 白噪声通过带宽有限的信道或滤波器

  带限白噪声 $\begin{cases}\text{低通白噪声}\\ \text{带通白噪声（窄带高斯白噪声）}\end{cases}$

  - 假设高斯白噪声通过$|H(f)|=1$，带宽为B的理想低通或理想带通滤波器



- 示波器仿真的高斯噪声时域波形

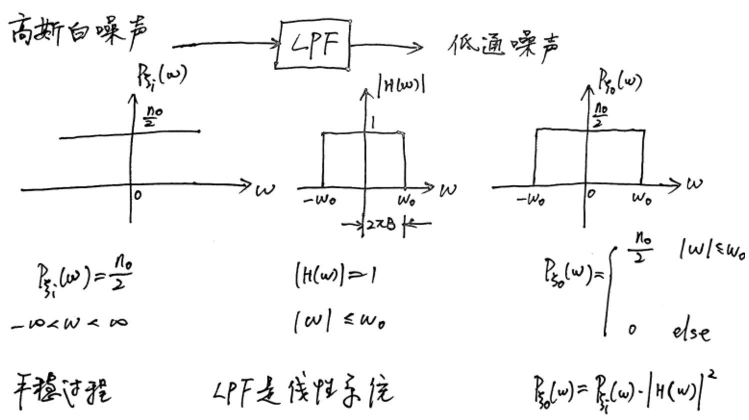


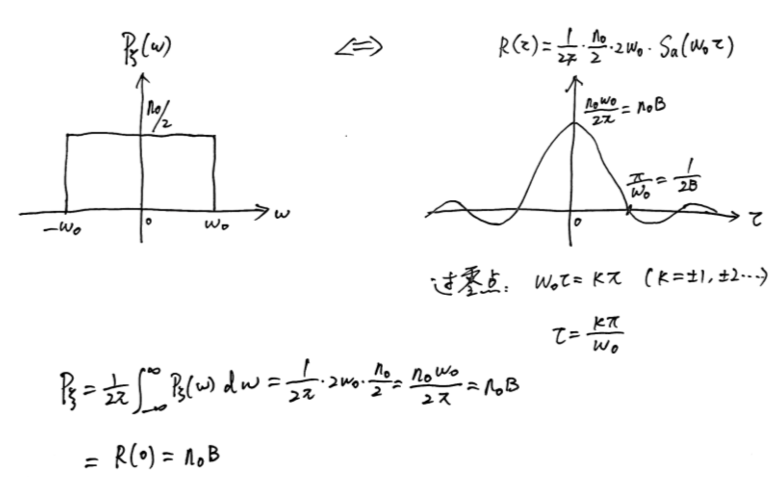
低通白噪声

- 功率谱 $P_\xi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2} & |\omega|\le\omega_0\\ 0 & else\end{cases}$

  $(\omega_0=2\pi B，B为LPF带宽)$

- 自相关 $R(\tau)=\dfrac{\omega_0}{2\pi}n_0Sa(\omega_0\tau)$
  - 低通白噪声以过零点为时间间隔，任意噪声样本互不相关且相互独立
- 平均功率 $P_\xi=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(\omega)d\omega=R(0)=n_0B$





窄带高斯白噪声：$n(t)$

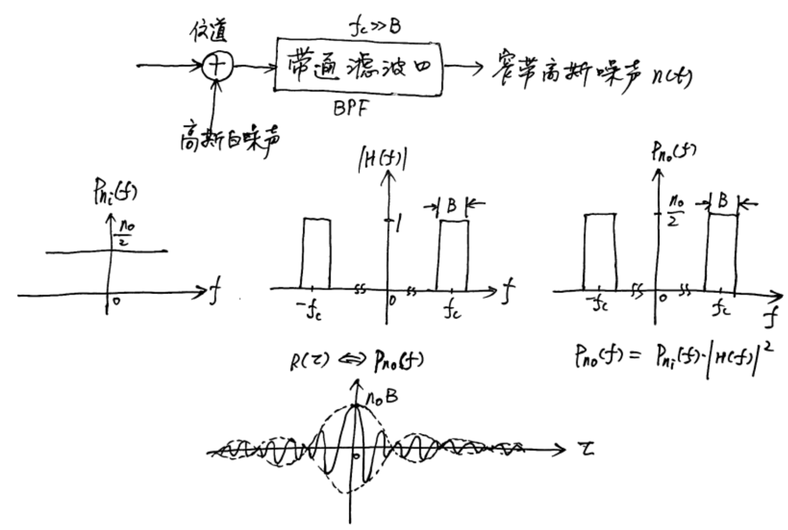
- 设理想带通BPF中心频率 f_c，带宽B，$f_c>>B$

$$P_n(f)=\begin{cases}\frac{n_0}{2} & f_c-\frac{B}{2}\le|f|\le f_c+\frac{B}{2}\\ 0 & else\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0B\cdot Sa(\pi B\tau)\cos(2\pi f_c\tau)$$

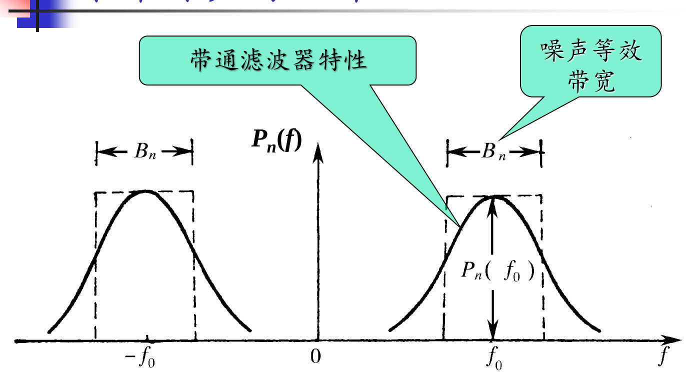
$$P_n=n_0B \quad (W)$$

- 窄带高斯噪声若均值为0，方差为 σ_n^2，则具有其窄带平稳高斯过程的全部统计特性



- 窄带噪声$n(t)$
  - $\boxed{n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t}$
  - $n_c(t)$和$n_s(t)$是平稳高斯过程
  - $n(t)$ 、$n_c(t)$、$n_s(t)$均值为0
  - $\sigma_n^2=\sigma_{n_c}^2=\sigma_{n_s}^2$，具有相同的平均功率$P=n_0B$
  - $n_c(t)$和$n_s(t)$在同一时刻统计独立
  - $n(t)$包络的一维分布是瑞利分布，相位的一维分布是均匀分布，且统计独立

窄带噪声等效带宽



窄带噪声的功率谱密度

- **窄带噪声等效带宽**
  - 窄带噪声功率谱：$P_n(f)=\frac{n_0}{2}|H(f)|^2$

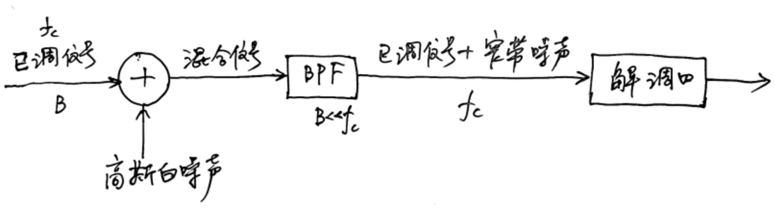
$$P=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(f)df=2B_n\cdot P_n(f_0)$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}P_n(f)df}{2P_n(f_0)}$$

- 物理意义
  - 使用等效带宽的概念，可以认为窄带噪声功率谱 $P_n(f)$在带宽 B_n内是平坦的，等于$P_n(f_0)$
  - 通过此理想特性滤波器的噪声功率等于通过实际带通滤波器的噪声功率

正弦波加窄带高斯噪声

- **随机相位正弦波** $A\cos(\omega_C t+\theta)\quad 0\le\theta\le 2\pi$
- **窄带高斯噪声** $n(t)=n_C(t)\cos\omega_C t-n_S(t)\sin\omega_C t$
  - 合成信号包络 $z(t)=\sqrt{z_c^2(t)+z_s^2(t)}\quad ,z\ge 0$
  - 合成信号相位 $\varphi(t)=tg^{-1}\frac{z_s(t)}{z_c(t)}\quad ,\quad (0\le\varphi\le 2\pi)$
    - 其中：$z_c(t)=A\cos\theta+n_c(t)$
      $z_s(t)=A\sin\theta+n_s(t)$



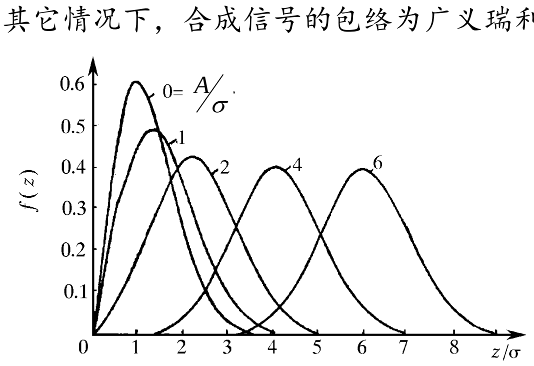
$$r(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)+n(t)$$
$$=(A\cos\theta\cos\omega_c t-A\sin\theta\sin\omega_c t)+[n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t]$$
$$=[A\cos\theta+n_c(t)]\cos\omega_c t-[A\sin\theta+n_s(t)]\sin\omega_c t$$
$$=Z_c(t)\cos\omega_c t-Z_s(t)\sin\omega_c t$$
$$=Z(t)\cos[\omega_c t+\varphi(t)]$$

- **包络 $z(t)$ 的概率密度分布服从广义瑞利分布（莱斯分布）**

$$f(z)=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}(z^2+A^2)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right)\qquad z\ge 0$$

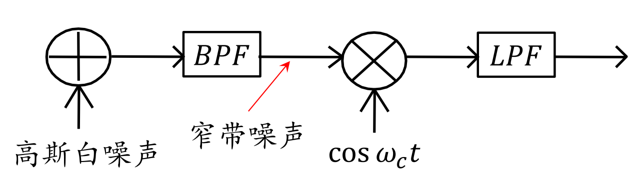
  - $I_0(x)$：零阶修正贝塞尔函数，$I_0(0)=1$
  - 当 $A=0$ 时，包络的概率分布退化成瑞利分布，即窄带高斯噪声的分布特性
- **频域特性：窄带噪声功率谱 + 线谱**

- 当小信号时，退化为窄带噪声的分布特性
- 当大信号时，包络近似为高斯分布
- 其它情况下，合成信号的包络为广义瑞利分布



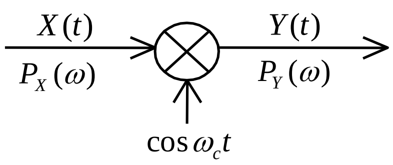
3.4 窄带噪声的性质

- 随机过程通过乘法器
- 窄带噪声通过乘法器和低通
- 窄带噪声与其同相和正交分量的性质



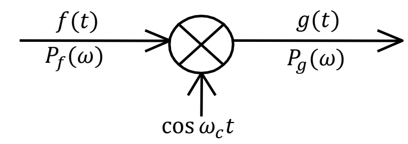
■ 随机过程通过乘法器

- 随机过程 $X(t)$ 通过乘法器，输出随机过程 $Y(t)$



- $Y(t) = X(t)\cdot\cos\omega_c t$

$$\boxed{P_Y(\omega) = \frac{1}{4}\left[P_X(\omega+\omega_c) + P_X(\omega-\omega_c)\right]}$$



■ 证明：

- 随机过程由样本组成，先考虑一个样本函数，将功率信号截断为能量信号，通过乘法器计算功率谱，再对所有样本求统计平均。

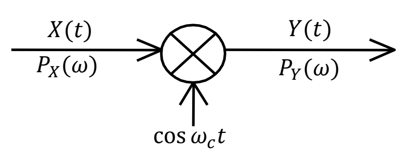
$f_T(t) \Leftrightarrow F_T(\omega) \qquad g_T(t) = f_T(t)\cos\omega_c t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[F_T(\omega+\omega_c) + F_T(\omega-\omega_c)]$

$f(t)$的功率谱：$P_f(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$

$g(t)$的功率谱：$P_g(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{2}[F_T(\omega+\omega_c) + F_T(\omega-\omega_c)]\right|^2}{T}$

$$= \frac{1}{4}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega+\omega_c)|^2}{T} + \lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega-\omega_c)|^2}{T}\right]$$

$$= \frac{1}{4}[P_f(\omega+\omega_c) + P_f(\omega-\omega_c)]$$



$\because P_X(\omega) = E[P_f(\omega)] = E\left[\lim\limits_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\right] = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{E[|F_T(\omega)|^2]}{T}$

$\because P_Y(\omega) = E[P_g(\omega)]$

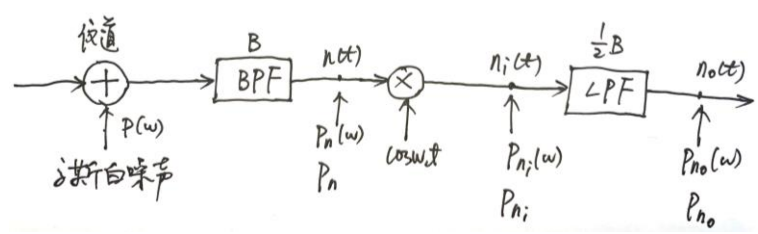
$$= \frac{1}{4}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{E[|F_T(\omega+\omega_c)|^2]}{T} + \lim_{T\to\infty}\frac{E[|F_T(\omega-\omega_c)|^2]}{T}\right]$$

$F_T(\omega+\omega_c)$与$F_T(\omega-\omega_c)$
每个样本两个频谱不交叠

$\therefore P_Y(\omega) = \frac{1}{4}[P_X(\omega+\omega_c) + P_X(\omega-\omega_c)]$

■ 窄带高斯噪声通过乘法器和低通

- **模型**



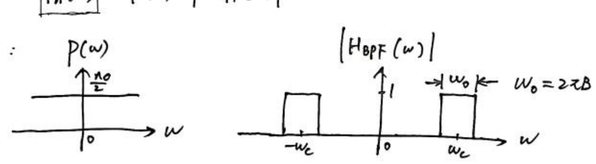
① $P_n(\omega)$，P_n，$n(t)$

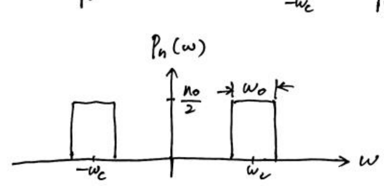
$\because$ $n(t)$ 窄带噪声，均值0，方差σ_n^2，带宽ω_0，双边谱$\frac{n_0}{2}$，中心频率ω_c

$\therefore$ $\boxed{n(t)} = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$

$\boxed{P_n(\omega)} = P(\omega)\cdot|H_{BPF}(\omega)|^2$

$\because$



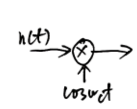


$\boxed{P_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\omega)\,d\omega$

$= \frac{1}{2\pi}\times 2\times 2\pi B\times\frac{n_0}{2}$

$= n_0 B$

②



$n_i(t)$，$P_{n_i}(\omega)$，P_{n_i}

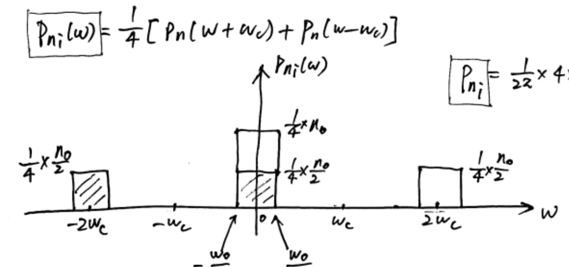
$\boxed{n_i(t)} = n(t)\cdot\cos\omega_c t$

$= n_c(t)\cos^2\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t\cos\omega_c t$

$= \frac{1}{2}n_c(t)(1+\cos 2\omega_c t) - \frac{1}{2}n_s(t)\sin 2\omega_c t$

$= \frac{1}{2}n_c(t) + \frac{1}{2}n_c(t)\cos 2\omega_c t - \frac{1}{2}n_s(t)\sin 2\omega_c t$

$\boxed{P_{n_i}(\omega)} = \frac{1}{4}[P_n(\omega+\omega_c) + P_n(\omega-\omega_c)]$



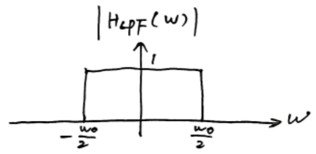
$\boxed{P_{n_i}} = \frac{1}{2\pi}\times 4\times\frac{1}{4}\times\frac{n_0}{2}\times 2\pi B$

$= \frac{1}{2}n_0 B$

③ $n_i(t) \rightarrow \boxed{LPF} \rightarrow n_o(t)$　$P_{n_o}(\omega)$，P_{n_o}

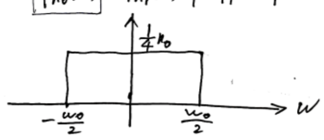
$\because n_i(t)=\frac{1}{2}n_c(t)+\frac{1}{2}n_c(t)\cos 2\omega_c t-\frac{1}{2}n_s(t)\sin 2\omega_c t$

$\therefore \boxed{n_o(t)}=\frac{1}{2}n_c(t)$ ←— 窄带噪声 n 同相分量.



$\therefore n_o(t)$ 低通型噪声

$\boxed{P_{n_o}(\omega)}=P_{n_i}(\omega)\cdot|H_{LPF}(\omega)|^2=\frac{1}{4}[P_n(\omega+\omega_c)+P_n(\omega-\omega_c)]$　$|\omega|\le\frac{\omega_0}{2}$



$\boxed{P_{n_o}}=\frac{1}{2\pi}\times 2\pi B\times\frac{1}{4}n_0$

$=\frac{1}{4}n_0B$

$=\frac{1}{4}P_n$ —— 窄带噪声功率

- 设$n(t)$为窄带高斯噪声，均值为0，带宽为B，本地载波频率 $f_c >> B$，双边谱$P_n(\omega)=n_0/2$

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t$$

$$P_n=n_0B$$

- **乘法器（$\cos\omega_c t$）输出**

$$P_{n_i}(\omega)=\frac{1}{4}[P_n(\omega+\omega_c)+P_n(\omega-\omega_c)]$$

$$P_{n_i}=\frac{1}{2}n_0B$$

- **若再通过 LPF，设传输特性：**

$$|H(\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_0/2\\ 0 & else\end{cases}$$

- **LPF输出**

$$P_{n_o}(\omega)=\frac{1}{4}[P_n(\omega+\omega_c)+P_n(\omega-\omega_c)]\qquad |\omega|\le\omega_0/2$$

$$n_o(t)=\frac{1}{2}n_c(t)\qquad P_{n_o}=\frac{1}{4}n_0B$$

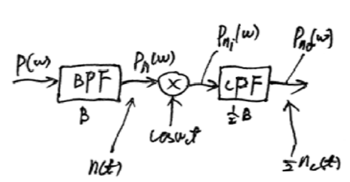
窄带噪声与其同相/正交分量的性质

- 均值为0，带宽为B，功率谱为$n_0/2$的窄带高斯噪声$n(t)$，其同相分量$n_c(t)$和正交分量$n_s(t)$为低通型高斯噪声，带宽为$B/2$，功率谱为n_0，它们具有相同的噪声功率

$$P_{n_c}(\omega)=P_{n_s}(\omega)=\begin{cases}P_n(\omega+\omega_c)+P_n(\omega-\omega_c) & |\omega|\le\omega_0/2\\ 0\end{cases}$$

$$P_n=P_{n_c}=P_{n_s}=n_0B$$

关于 $n_c(t)$，$n_s(t)$ 功率谱和功率



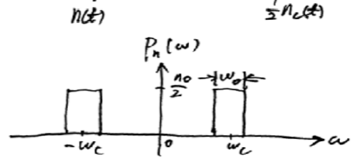
证：$\because n_o(t)=\frac{1}{2}n_c(t)$

$R_{n_o}(\tau)=E[n_o(t)\cdot n_o(t+\tau)]$

$=E[\frac{1}{2}n_c(t)\cdot\frac{1}{2}n_c(t+\tau)]$

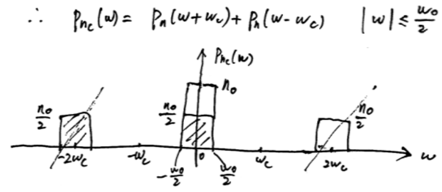
$=\frac{1}{4}E[n_c(t)\cdot n_c(t+\tau)]$

$\therefore R_{n_o}(\tau)=\frac{1}{4}R_{n_c}(\tau)$



又$\because P_{n_o}(\omega)=\frac{1}{4}[P_n(\omega+\omega_c)+P_n(\omega-\omega_c)]$　$|\omega|\le\frac{\omega_0}{2}$　　$\underline{P_n=n_0B}$

$\therefore P_{n_c}(\omega)=P_n(\omega+\omega_c)+P_n(\omega-\omega_c)$　$|\omega|\le\frac{\omega_0}{2}$



$\underline{P_{n_c}=n_0B}$

本章小结

- 平稳过程和各态遍历性条件
- 平稳过程自相关和功率谱构成付氏变换
- 求功率谱的方法
- 求平均功率的方法
- 高斯过程的性质
- 窄带过程的时域表示

$$\begin{cases}\xi(t)=a_\xi(t)\cos[\omega_c t+\varphi_\xi(t)]\\ \xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t\end{cases}$$

- 均值为0，方差为σ_ξ^2 窄带高斯过程的性质
  - 其$\xi_c(t)$和$\xi_s(t)$也是平稳高斯过程；均值为0，与$\xi(t)$具有相同的方差 σ_ξ^2，具有相同的平均功率；同一时刻ξ_c与ξ_s不相关且统计独立
  - 包络$a_\xi(t)$的一维分布是瑞利分布，相位$\varphi_\xi(t)$的一维分布是均匀分布，且统计独立

$$f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right] \qquad a_\xi \ge 0$$

$$f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi} \qquad 0\le \varphi_\xi \le 2\pi$$

$$f(a_\xi,\varphi_\xi)=f(a_\xi)\cdot f(\varphi_\xi)$$

- 信道高斯噪声
  - 白噪声、低通噪声、窄带噪声
  - 窄带高斯噪声的性质
  - 正弦波加窄带噪声的分布
  - 平稳过程通过线性系统的数字特征变化
  - 窄带噪声通过乘法器和低通，其带宽和功率谱特性
  - 窄带噪声的同相分量和正交分量特性

作业

- 阅读教材第三章内容
- 第三章习题：2、3、5、7、8、12
- 补充题：**功率谱密度为$n_0/2$的高斯白噪声通过理想低通滤波器，求输出噪声的功率谱密度、自相关函数及平均功率。**
  - 已知理想低通的传输特性

$$H(\omega)=\begin{cases} K_0\cdot e^{-j\omega t_d} & |\omega|\le\omega_H \\ 0 & else \end{cases}$$