

# 生物种群模型

## ——人口增长模型

北京邮电大学

- # 人类文明发展到今天，人们越来越意识到地球资源的有限性，我们感受到“地球在变小”，人口与资源之间的矛盾日渐突出，人口问题已成为当前世界上被最普遍关注的问题之一。
- # 人口增长规律的发现以及人口增长的预测对一个国家制定比较长远的发展规划有着非常重要的意义。
- # 介绍几个经典的人口模型，认识人口数量的变化规律。



介绍的人口模型都利用下表给出的近两百年的美国人口统计数据对模型进行检验，并且用其预报**2000年**的美国人口。

年（公元） 人口（百万）	1790 3.9	1800 5.3	1810 7.2	1820 9.6	1830 12.9	1840 17.1
年（公元） 人口（百万）	1850 23.2	1860 31.4	1870 38.6	1880 50.2	1890 62.9	1900 76.0
年（公元） 人口（百万）	1910 92.0	1920 106.5	1930 123.2	1940 131.7	1950 150.7	1960 179.3
年（公元） 人口（百万）	1970 204.0	1980 226.5	1990 251.4			

# 人口指数增长模型

## (马尔萨斯Malthus, 1766--1834)

以 $P(t)$ 表示时刻 $t$ 某地区（或国家）的人口数。

### 模型假设

⊕ 时刻  $t$  人口增长的速率（即单位时间人口的增长量）与当时人口数成正比，即人口的相对增长率为常数，记之为  $r$ 。

⊕ 设人口数  $P(t)$  足够大，可以连续变量处理，且  $P(t)$  关于  $t$  连续可微。

## 模型建立和求解

若记初始时刻( $t=0$ )的人口为 $P_0$ 。据模型假设, 时刻  $t$  人口增长的速率 (即单位时间人口的增长量) 与当时人口数成正比. 不难得到如下初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r \cdot P \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

解之得

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

## 模型参数的估计

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

参数 $r$ ,  $P_0$ 是何值?

若将1790年视为初始时刻 $t = 0$ , 则参数 $P_0 = 3.9$ , 只有 $r$ 为未知。而不将1790年视为初始时刻, 则 $r$ ,  $P_0$ 都为未知。

用美国人口统计数据对上式的参数 $r$ ,  $P_0$ 进行估计。为了利用简单的线性最小二乘法, 将上式取对数, 有

$$Q = \ln P, \quad a = \ln P_0, \quad Q = rt + a$$

用部分已知数据来拟合上式求得 $r$  和 $a$ , 就得到 $r$ ,  $P_0$ 。

- 在指数增长模型中，分别用**1790—1900**、**1790—1950**、**1790—2000**的数据来拟合下式：

$$Q(t)=rt+a$$



```
1 - clear;
2 - Time=[0:10:200];
3 - Number=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76.0 92.0 106.5 123.2 131.7 150.7 179.3 204.0 226.5 251.4];
4 - st=[1900 1950 1990];
5 - np=(st-1790)./10+1;
6 - Matrix=zeros(length(np),2);
7 - sNum=zeros(length(np),length(Time));
8 - for k=1:size(np,2)
9 -     x=Time(1:np(k));
10 -    y=log(Number(1:np(k)));
11 -    A=polyfit(x,y,1);
12 -    Matrix(k,:)=[A(1) exp(A(2))];
13 -    sNum(k,:)=exp(polyval(A,Time));
14 - end
15
```



Workspace

Name	Size	Bytes	Class
A	1x2	16	double
Matrix	3x2	48	double
Number	1x21	168	double
Time	1x21	168	double
k	1x1	8	double
np	1x3	24	double
sNum	3x21	504	double
st	1x3	24	double
x	1x21	168	double
y	1x21	168	double

Workspace Current Directory

Command History

```

Matrix
%-- 10/09/05 4:57 PM --%
ex42
Matrix
sNum
clear
ex42
    
```

Command Window

```

>> ex42
>> Matrix

Matrix =

    0.0274    4.1884
    0.0234    4.9908
    0.0208    5.8160

>> sNum

sNum =

1.0e+003 *

Columns 1 through 7

    0.0042    0.0055    0.0072    0.0095    0.0125    0.0165    0.0217
    0.0050    0.0063    0.0080    0.0101    0.0127    0.0161    0.0204
    0.0058    0.0072    0.0088    0.0109    0.0134    0.0165    0.0203

Columns 8 through 14

    0.0286    0.0376    0.0495    0.0651    0.0856    0.1126    0.1482
    0.0257    0.0325    0.0411    0.0520    0.0657    0.0830    0.1049
    0.0249    0.0307    0.0378    0.0465    0.0573    0.0706    0.0869

Columns 15 through 21

    0.1950    0.2565    0.3375    0.4440    0.5842    0.7685    1.0111
    0.1326    0.1677    0.2119    0.2679    0.3386    0.4280    0.5410
    0.1070    0.1317    0.1621    0.1996    0.2458    0.3026    0.3725
    
```

## 对于指数增长模型

- 1) 利用1790-1900的数据拟合得:  $r=0.02743$ ,  
 $P_0=\exp(1.4323294) = 4.1884$ .
- 2) 利用1790-1950的数据拟合得:  $r=0.02343$ ,  $P_0=4.9908$ .
- 3) 利用1790-1990的数据拟合得:  $r=0.02080$ ,  $P_0=5.8160$ .

# 模型检验

✚ 由拟合得到的 $P_0 = 4.1884$ ,  $r = 0.02743$ 代入模型方程中, 可求出用该模型求出的数学模型预测的1790-1940的人口数。

年	实际人口 (百万)	预测人口	年	实际人口 (百万)	预测人口
1790	3.9	4.1884	1870	38.6	37.5969
1800	5.3	5.5105	1880	50.2	49.4640
1810	7.2	7.2498	1890	62.9	65.0769
1820	9.6	9.5382	1900	76.0	85.6179
1830	12.9	12.5488	1910	92.0	112.6424
1840	17.1	16.5097	1920	106.5	148.1969
1850	23.2	21.7209	1930	123.2	194.9740
1860	31.4	28.5769	1940	131.7	256.5158

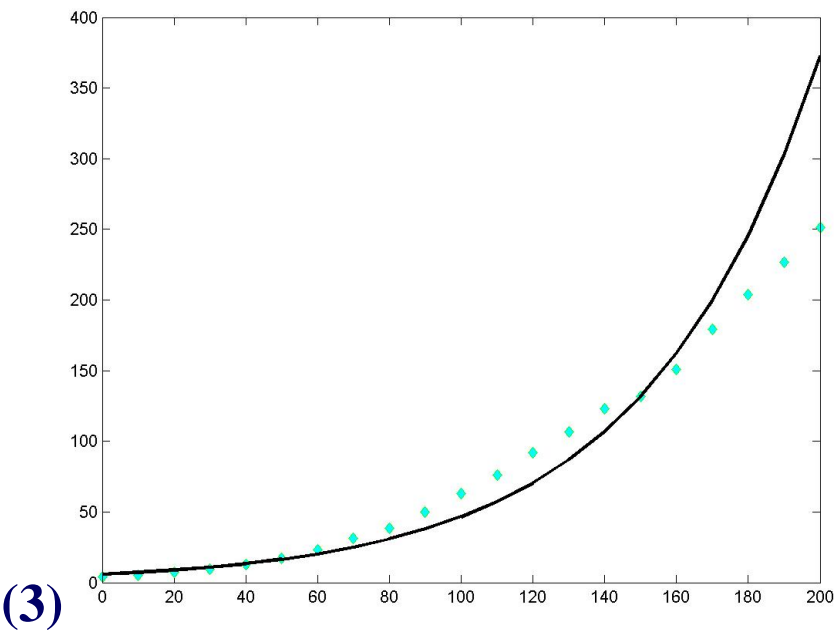
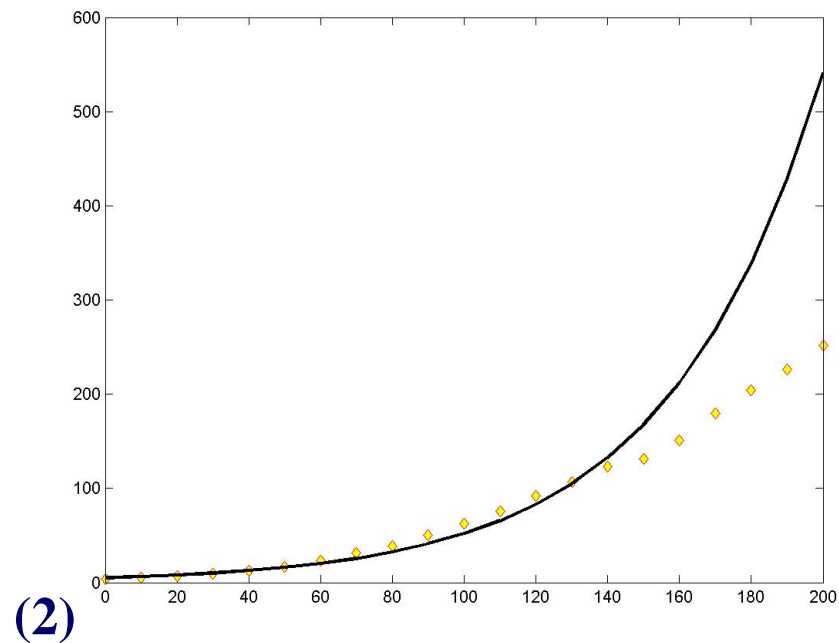
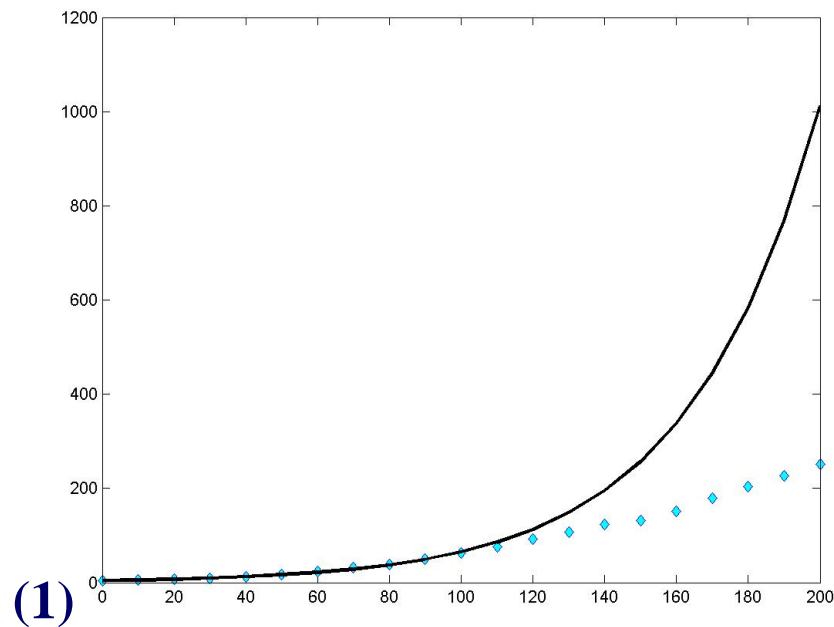


图1 - 3给出了指数增长模型拟合图形（分别对应拟合情形1） - 3））。图形中曲线是计算结果，菱形是实际数据。

- 历史上，指数增长模型对19世纪以前欧洲一些地区的人口统计数据可以很好的吻合。另外，用它作短期的人口预测可以得到较好的结果。对于19世纪以后许多国家的人口模拟，指数增长模型遇到了很大的挑战。

- $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = +\infty$  ,有限地球，不合常理。

## 模型分析

该模型的结果说明人口将以指数规律无限增长。而事实上，随着人口的增加，自然资源、环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著。



一个模型的缺陷，通常可以在模型假设当中找到其症结所在——或者说，模型假设在数学建模过程中起着至关重要的作用，它决定了一个模型究竟可以适用多久。在指数增长模型中，我们只考虑了人口数本身一个因素影响人口的增长速率，事实上影响人口增长的另外一个因素是资源。定性的分析中，人口数与资源量对人口增长的贡献均应当是正向的。

应该对指数增长模型关于人口净增长率是常数的假设进行修改。

# 阻滞增长模型（Logistic模型）

## 模型假设

1. 地球上的资源有限，不妨设为1；而一个人的正常生存需要占用  $1/P^*$ （这里事实上也内在地假定了地球的极限承载人口为  $P^*$ ）；
2. 在时刻  $t$ ，人口增长的速率与当时人口数成正比，为简单起见也假设它与当时的剩余资源量  $S=1-P/P^*$  成正比；比例系数  $r^*$  表示人口的固有增长率；
3. 设人口数  $P(t)$  足够大，可以连续变量处理，且  $P(t)$  关于  $t$  连续可微。

# 模型建立和求解

## 阻滞增长数学模型

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r^* \cdot P \cdot s \\ s = 1 - P / P^* \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

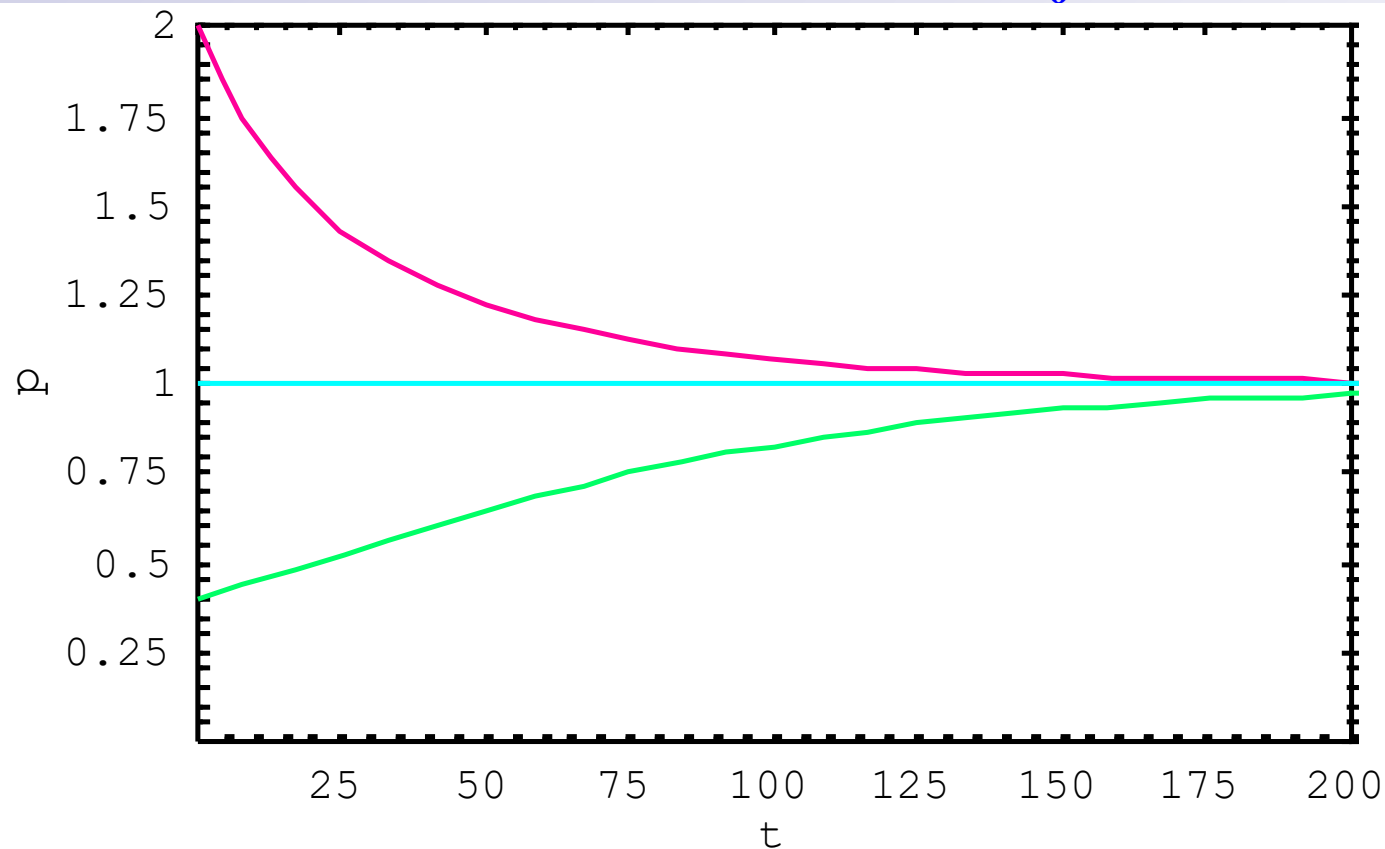
化简得如下初值问题

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r^* \cdot P \cdot (1 - P / P^*) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

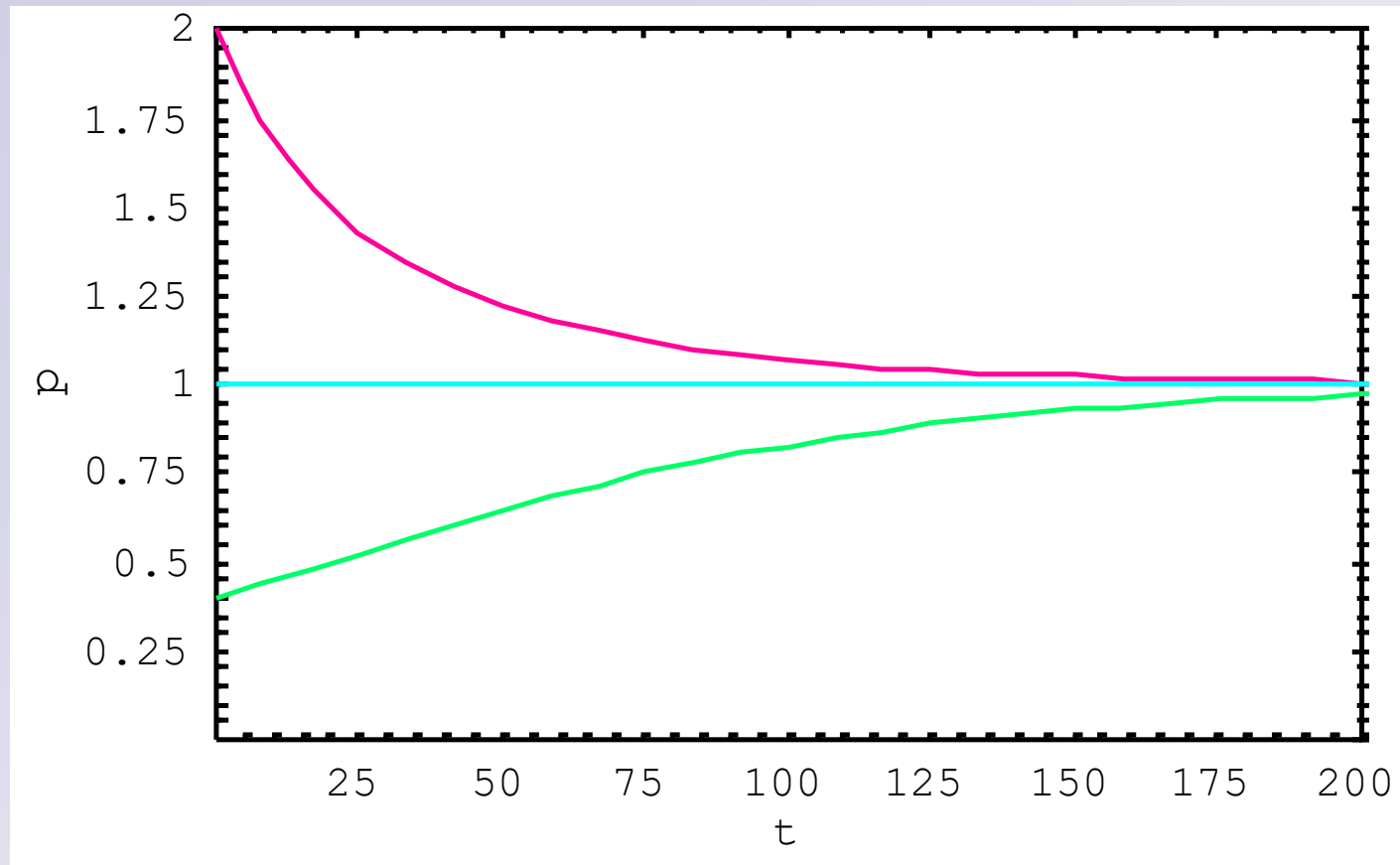
若令  $r(P) = r^* (1 - P / P^*)$  ,  $r(P)$  是人口净增长率。说明增长率  $r(P)$  与人口尚未实现部分的比例  $(1 - P / P^*)$  成正比, 比例系数为固有增长率  $r^*$ 。



解上述初值问题得 
$$P(t) = \frac{P^*}{1 + \left(\frac{P^*}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-r^* \cdot t}}$$



将 $P^*$ 视为1



从上图可以看出，当人口数的初始值  $P_0 > P^*$  时，人口曲线（粉色）单调递减，而当人口数的初始值  $P_0 < P^*$  时，人口曲线（绿色）单调递增，但当  $t \rightarrow \infty$  它们皆趋于  $P^*$ 。

# 由Logistic模型得到的结论

- ✦ 不管开始时人口处于什么状态，随着时间的增长，人口总数最终将趋于其环境的**最大容量**。
- ✦ 当人口总数超过环境容量时，人口数量将减少；  
当人口总数小于环境容量时，人口数量将增加。

## 模型参数的估计

为了利用简单的线性最小二乘估计，不用

$$P(t) = \frac{P^*}{1 + \left(\frac{P^*}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-r^* \cdot t}} \quad \text{进行拟合,}$$

而将微分方程表为： $\frac{dP}{dt} = r^* + aP, \quad a = -\frac{r^*}{P^*}$

上式左端记为 $Y$ ，则 $Y$ 在每一时刻的数据可用数值微分的方法得到，例如可用：

$$Y(t_i) = \frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_i} = \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{P(t_i)(t_{i+1} - t_i)}$$

可用最小二乘拟合  $y=r^*+ax$  求得参数 $r^*, P^*$

## ex.m (用1790 - 1990的数据, 用MATLAB软件拟合)

```
» Time=0:20;
» Number=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2
62.9 76.0 92.0 106.5 123.2 131.7 150.7 179.3 204.0
226.5 251.4];
» Rate=[(Number(2)-Number(1))/Number(1)
0.5*(Number(3:21)-Number(1:19))./Number(2:20)
(Number(21)-Number(20))/Number(21)];
» np=[11 12 13 14 17 18 19 21]; %选择插值点
» x=Number(np) ;           %数据P
» y=Rate(np)/10;           %构造数据Y
» A=polyfit(x,y,1);         %拟合求得A(1)为a, A(2)为r*.
» r=A(2)                    %求r*
» PP=-r/A(1)                %求P*=-r/a
```

运行程序 >> ex

计算结果:

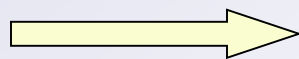
$r = 0.02847204591340$

$PP = 3.179581568192454e+002$

利用参数

$r^*=0.02847$

$P^*=317.5815$

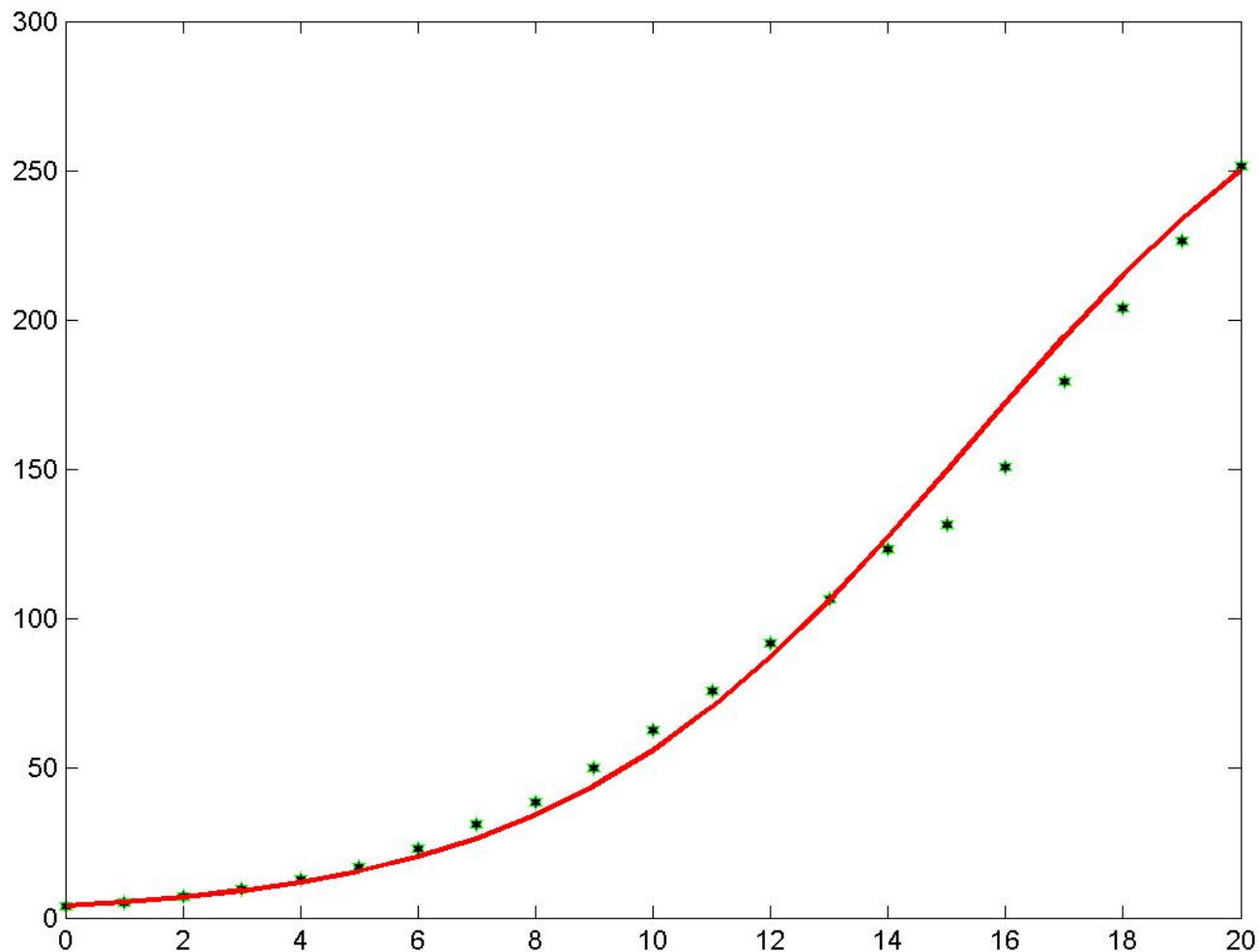


$P_0=3.9$

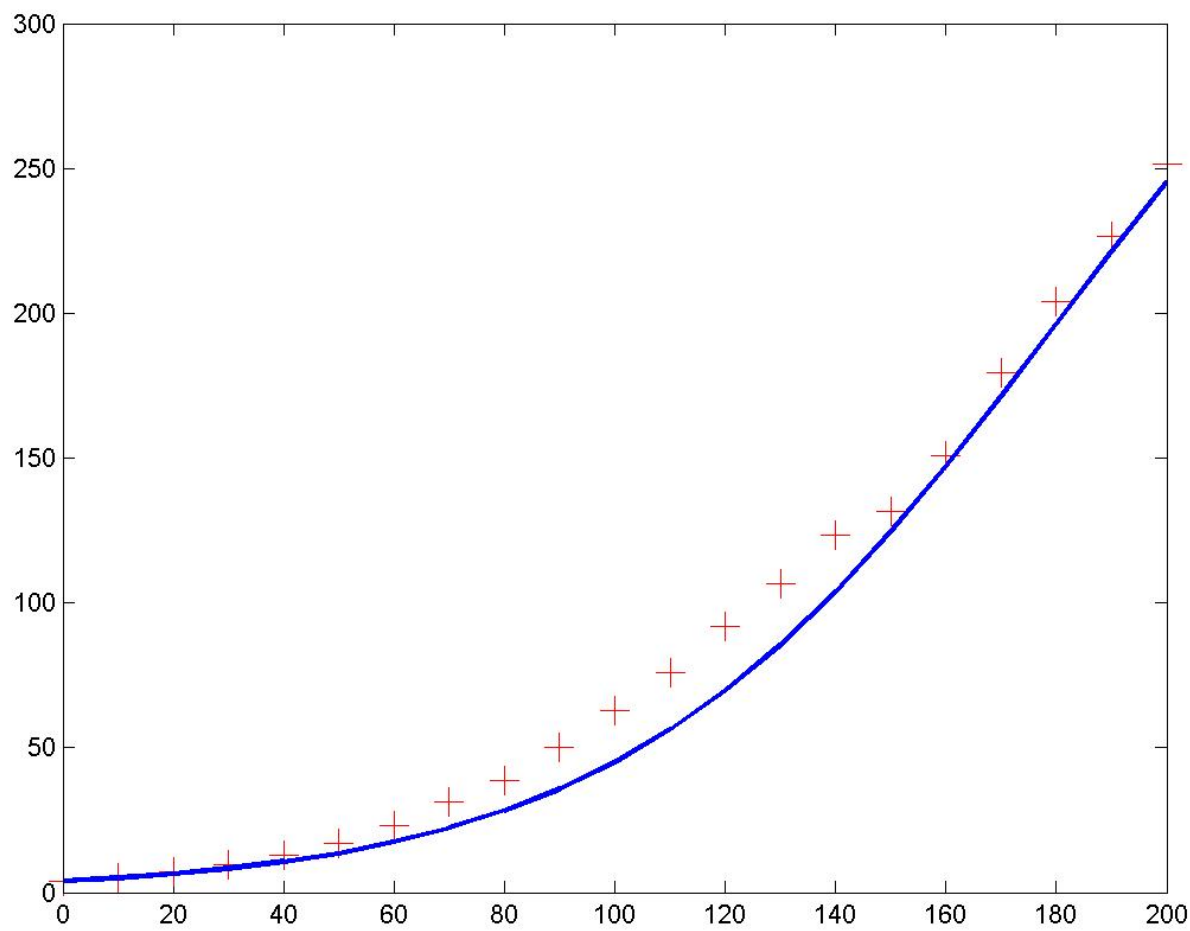
$$P(t) = \frac{P^*}{1 + \left(\frac{P^*}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-r^* \cdot t}}$$

# 结果分析

✚ 将 $r^* = 0.02847$ ， $P^* = 317.5815$ 求得的结果和实际结果比较



课本求得参数 $r^*=0.02557$ ， $P^*=392.0886$ 将该结果和实际结果比较(用1860-1990年的数据拟合)，见下图。





## 模型检验

- ✦ 已知在2000年美国的实际人口约为281.4（百万）。
- ✦ 用我们的模型（ $r^*=0.02847$ ， $P^*=317.5815$ ， $P_0=3.9$ ）得到：  
 $P(2000)=275.6902$ （百万）。
- ✦ 计算结果与实际数据的相对误差约为2.03%。

- ✦ 阻滞增长模型从一定程度上克服了指数增长模型的不足，可以被用来做**相对较长时期**的人口预测，而指数增长模型在做人口的**短期预测**因为其形式的相对简单性也常被采用。
- ✦ 不论是指数增长模型曲线，还是阻滞增长模型曲线，它们有一个共同的特点，即均为单调曲线。
- ✦ 还有比指数增长模型、阻滞增长模型更好的人口预测方法吗？



**人口的预测是一个相当复杂的问题，影响人口增长的因素除了人口基数与可利用资源量外，还和医药卫生条件的改善、人们生育观念的变化等因素有关，特别在做中短期预测时，我们希望得到满足一定预测精度的结果，比如在刚刚经历过战争或是由于在特定的历史条件下采纳了特殊的人口政策等，这些因素本身以及由此而引起的人口年龄结构的变动就会变的相当重要，进而需要必须予以考虑。**

# 曲线拟合和插值

试图通过解析的函数描述数据的方法

## 曲线拟合

### 面临的问题

- (1) 最佳拟合的定义（寻找一条光滑的曲线，使之最佳拟合给定的数据）
- (2) 采用什么样的曲线拟合（线性与非线性）

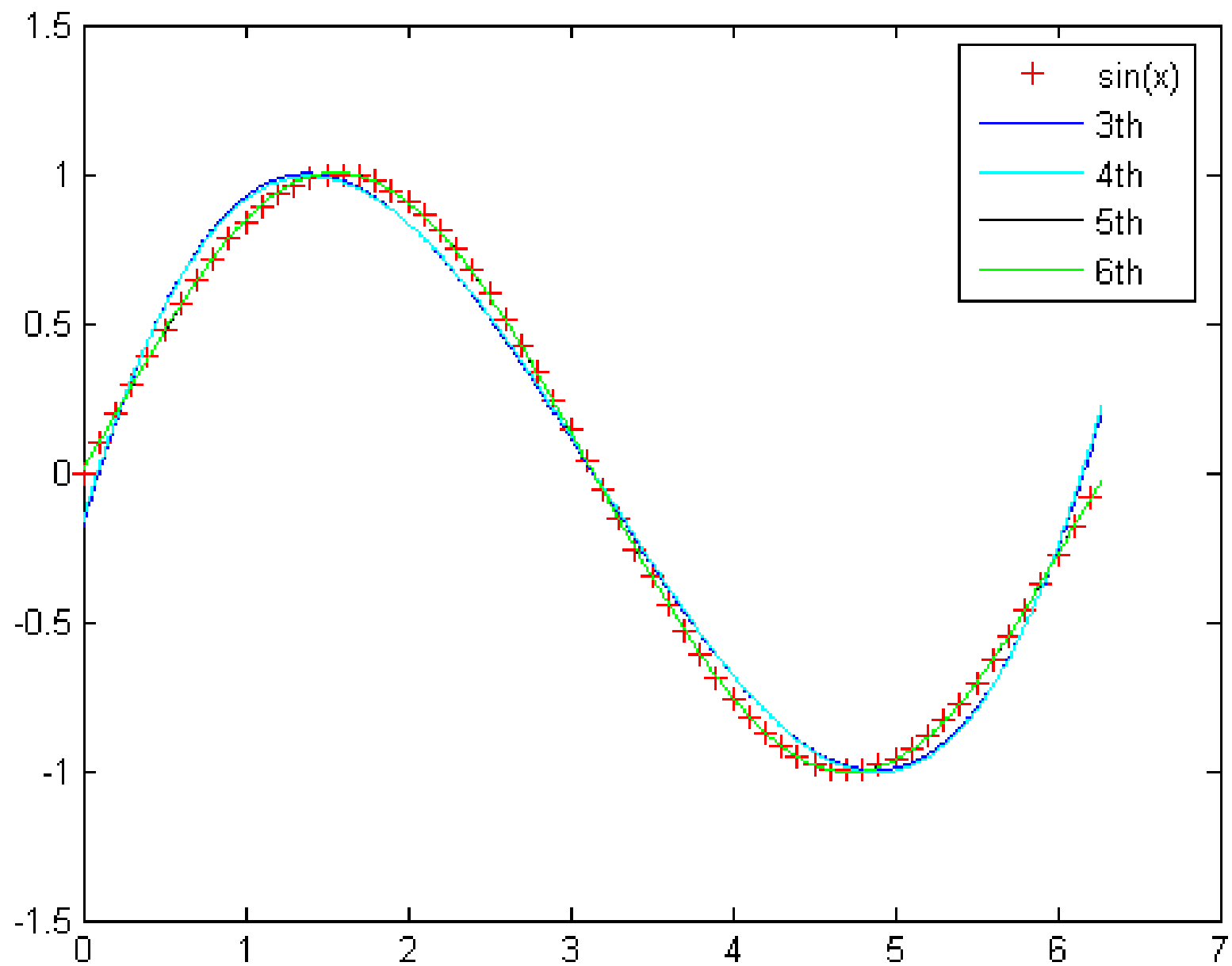
## 多项式拟合 (Polynomial fit)

$P = \text{Polyfit}(x, y, n)$ .... $n$ 为多项式次数

$yy = \text{Polyval}(P, xx)$ ....计算多项式 $P$ 在 $xx$ 处的值

例1：给定一组数据 $x=0:0.1:2*\pi$ ;  $y=\sin(x)$   
现用多项式拟合该组数据 $(x, y)$ 。

```
x=0:0.1:2*pi;  
y=sin(x);  
plot(x,y,'r+');  
color =['b'; 'c'; 'k'; 'g'];  
  
for i=3:6  
    p=polyfit(x,y,i);  
    xx=0:0.01:2*pi;  
    yy=polyval(p,xx);  
    hold on  
    plot(xx,yy,color(i-2))  
end  
legend('sin(x) ','3th','4th', '5th', '6th');
```



## 非线性拟合

$$f(x) = Ae^x + Bxe^{Cx}$$

$$g(x) = \frac{Ax + B}{1 + e^{Cx}}$$

可根据MATLAB中的函数求出待定的参数A,B,C等

如: Curvefit LSQCURVEFIT and etc.

nlinfit	非线性最小二乘拟合
nlintool	非线性拟合预测图
nlparci	参数置信区间
nlpredci	预测置信区间
nnls	非负最小二乘拟合



# 插值函数

## 一维插值函数

$YI = \text{interp1}(X, Y, XI)$

$YI = \text{interp1}(X, Y, XI, \text{'method'})$

其中X,Y为原始数据点， **method**为

'nearest' - nearest neighbor interpolation

'linear' - linear interpolation

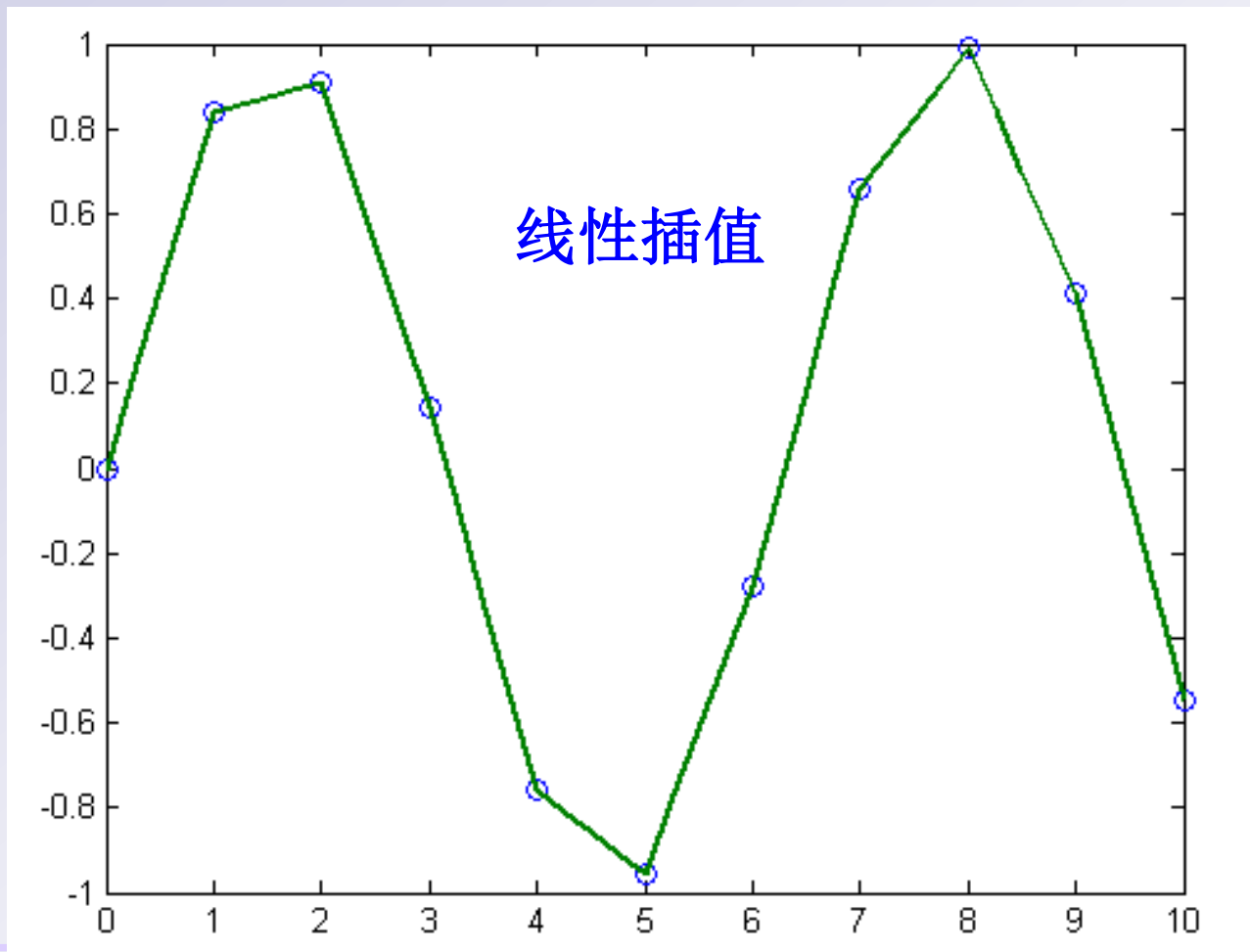
'spline' - piecewise cubic spline interpolation (SPLINE)

'pchip' - piecewise cubic Hermite interpolation (PCHIP)

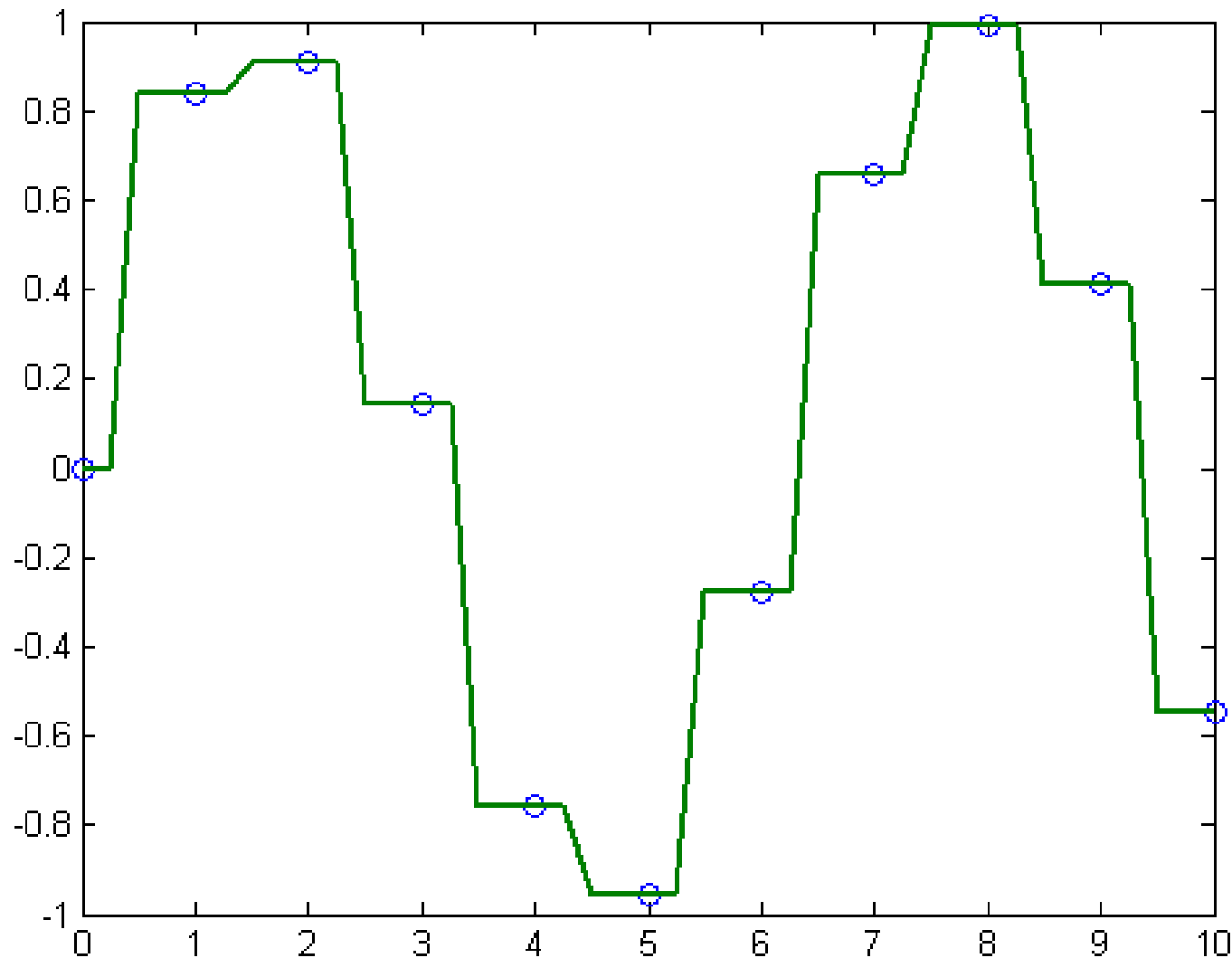
'cubic' - same as 'pchip'

'v5cubic' - the cubic interpolation from MATLAB 5, which does not extrapolate and uses 'spline' if X is not equally spaced.

```
x = 0:10; y = sin(x); xi = 0:.25:10;  
yi = interp1(x,y,xi,'linear');  
plot(x,y,'o',xi,yi)
```

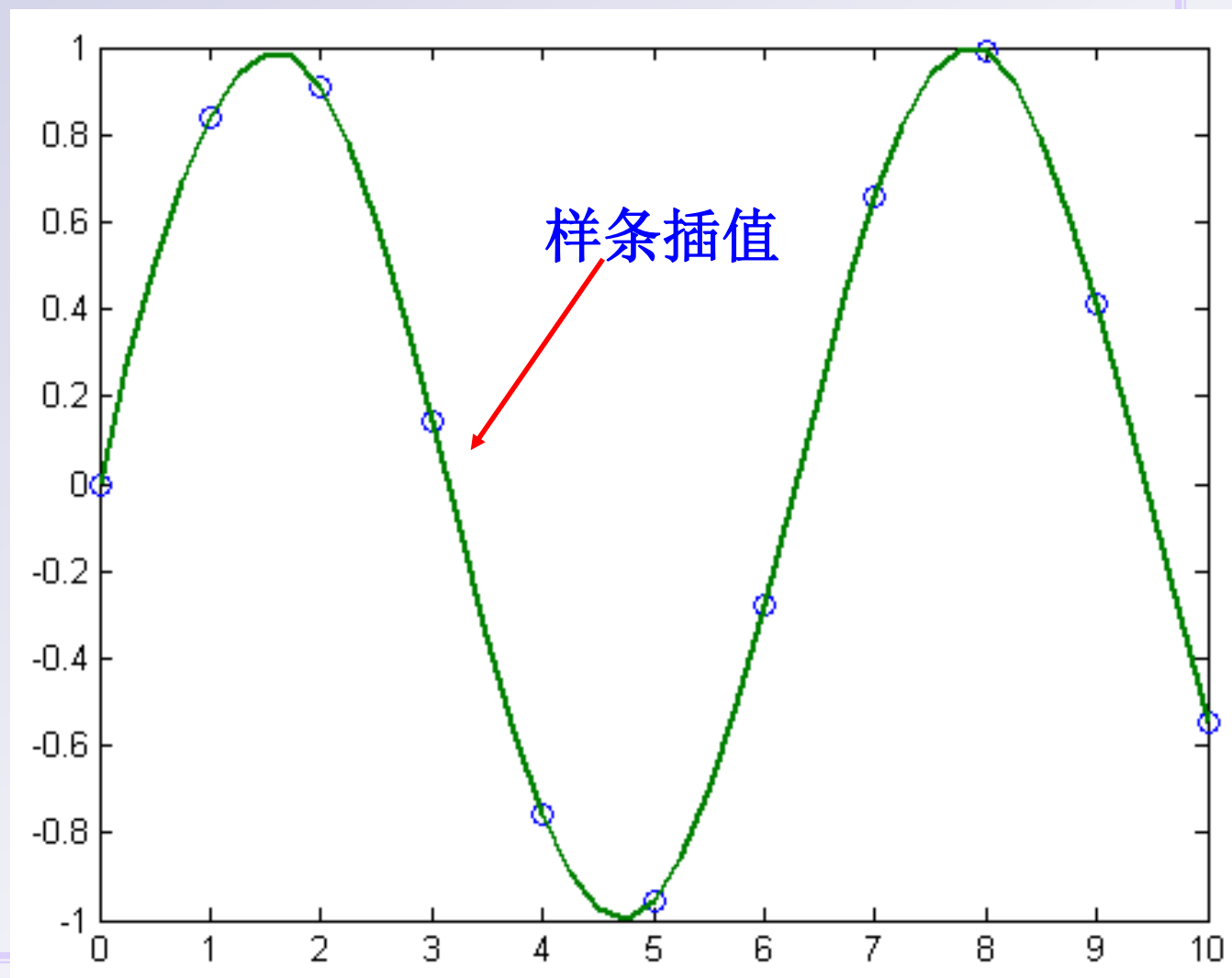


```
x = 0:10; y = sin(x); xi = 0:.25:10;  
yi = interp1(x,y,xi,'nearest'); plot(x,y,'o',xi,yi)
```



```
x = 0:10; y = sin(x); xi = 0:.25:10;  
yi = interp1(x,y,xi,'spline');plot(x,y,'o',xi,yi)
```

高次插值函数的计算量大,有剧烈振荡,数值稳定性差;而分段线性插值在分段点上仅连续而不光滑(导数不连续)。样条函数可以同时解决这两个问题,使插值函数既是低阶分段函数,又是光滑的函数。



## 二维插值函数

$ZI = \text{INTERP2}(X, Y, Z, XI, YI, \text{'method'})$

其中X,Y,Z为原始数据点， **method**为

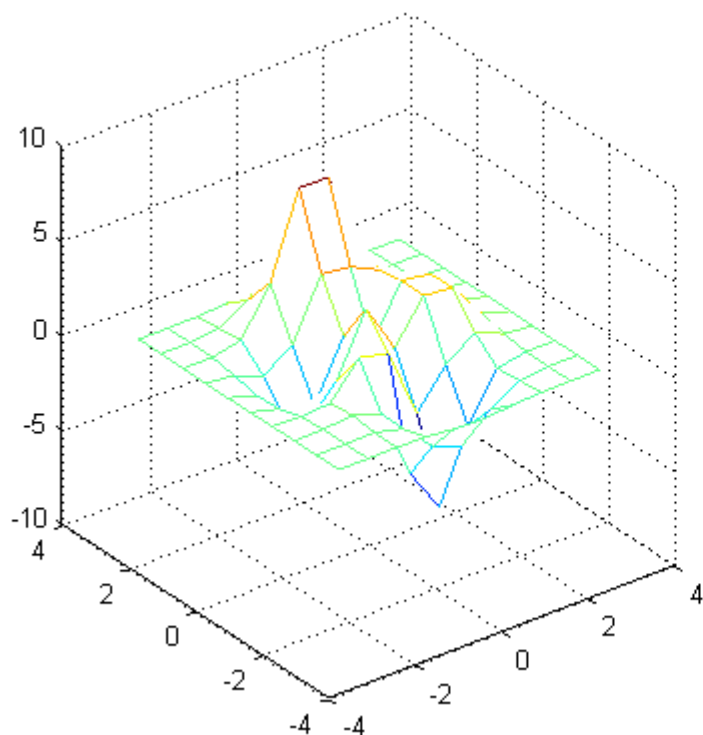
'nearest' - nearest neighbor interpolation

'linear' - bilinear interpolation

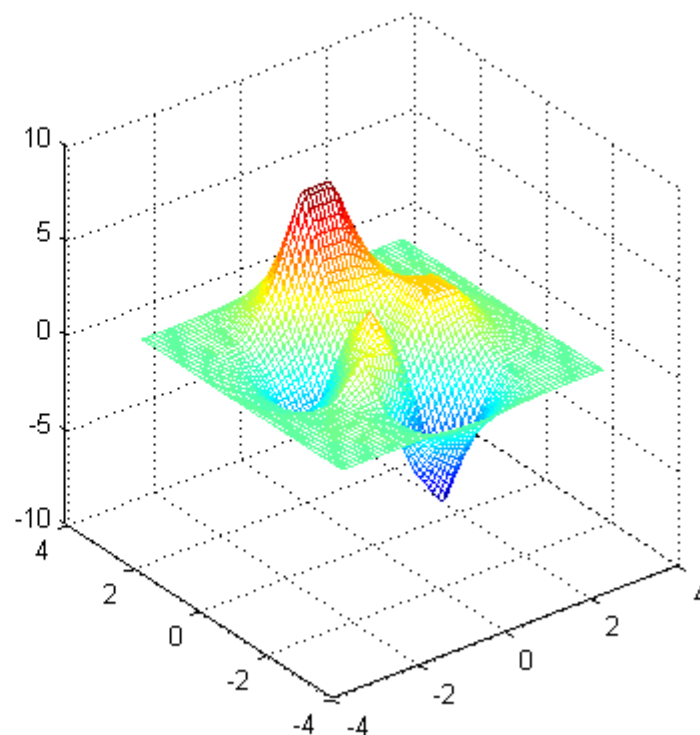
'cubic' - bicubic interpolation

'spline' - spline interpolation

```
[x,y,z] = peaks(10); subplot(1,2,1);  
mesh(x,y,z);  
[xi,yi] = meshgrid(-3:.1:3,-3:.1:3); subplot(1,2,2);  
zi = interp2(x,y,z,xi,yi); mesh(xi,yi,zi)
```



插值前

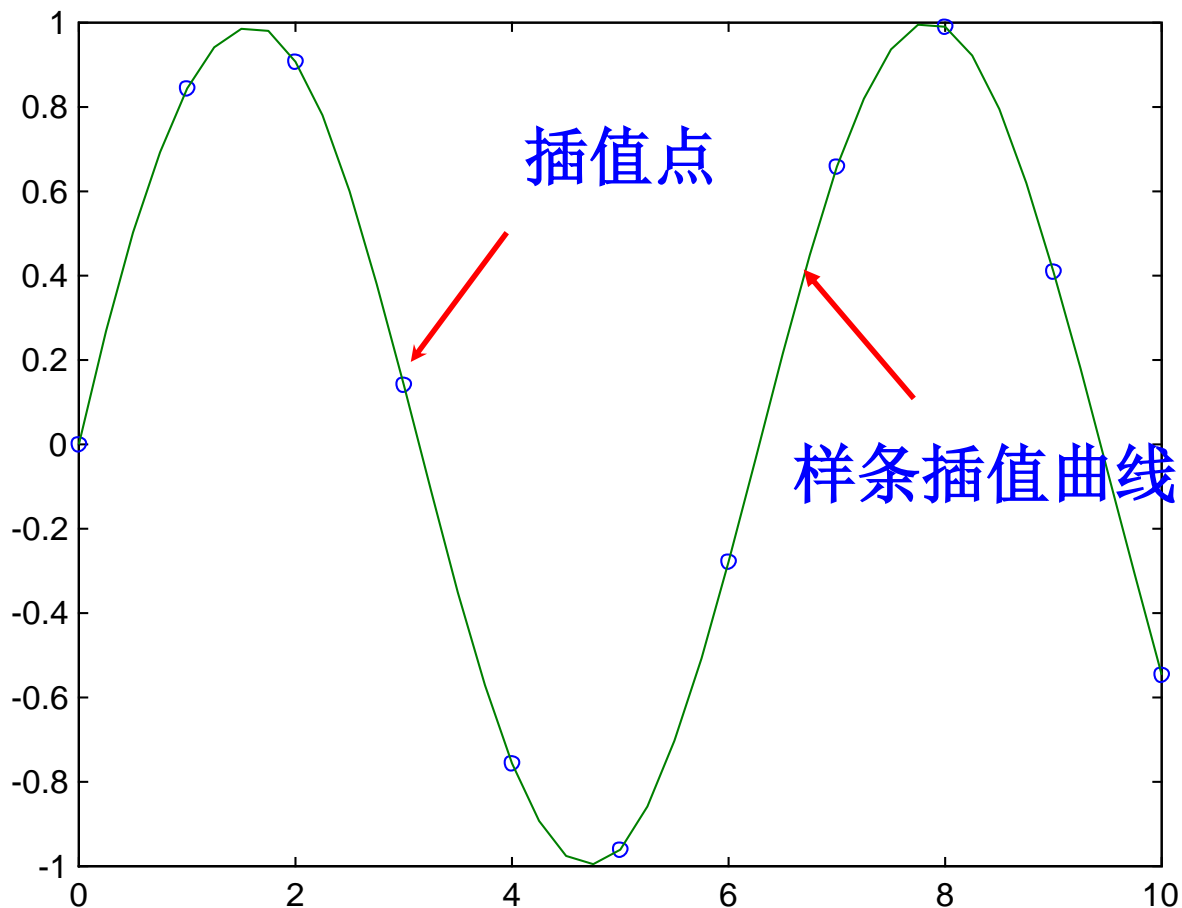


插值后

# 三次样条插值

$Y_i = \text{spline}(x, y, x_i)$

```
x = 0:10; y = sin(x);  
xx = 0:.25:10;  
yy = spline(x,y,xx);  
plot(x,y,'o',xx,yy)
```



`pp=spline (x,y)` ....返回分段多项式的表示

`yi=ppval(pp,xi)` 或 `yi=spline(x,y,xi)`

`plot(xi,yi)`

`[break, coefs,pieces,order]=unmkpp(pp)`

.....分解分段多项式表示

`pp=mkpp(break,coefs)...`形成分段多项式表示

**Break**是断点/节点

**Coefs**是矩阵，其第*i*行是第*i*个三次多项式

**pieces**是分段多项式的数目

**order** 是每个多项式系数的数目（阶数+1）



$pp = \text{spline}(x, y)$  ....返回分段多项式的表示

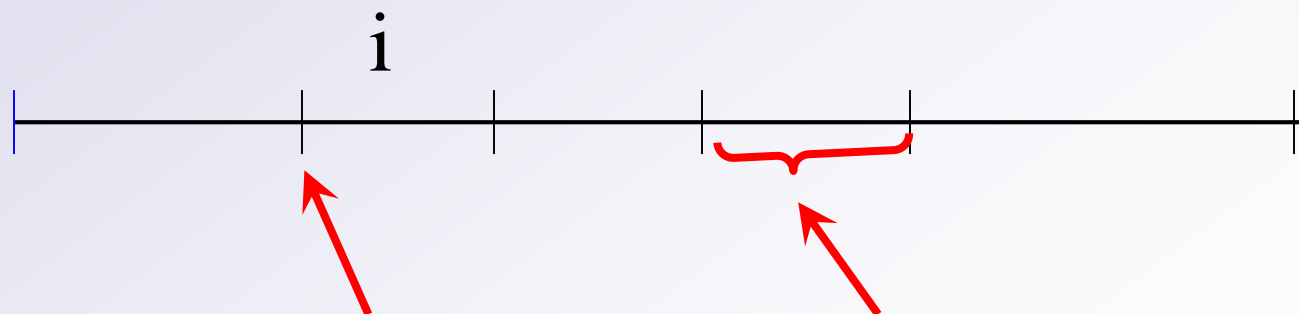
$y_i = \text{ppval}(pp, x_i)$  或  $y_i = \text{spline}(x, y, x_i)$

$\text{plot}(x_i, y_i)$

$[\text{break}, \text{coefs}, \text{pieces}, \text{order}] = \text{unmkpp}(pp)$

.....分解分段多项式表示

$pp = \text{mkpp}(\text{break}, \text{coefs})$  ...形成分段多项式表示



断点

在每一个区间为多项式

# pp形式及其分解

pp =

form: 'pp'

breaks: [0 1 2 3 4]

coefs: [4x4 double]

pieces: 4

order: 4

dim: 1

**ppbrk(pp)**

breaks(1:l+1)

0 1 2 3 4

coefficients(d\*l,k)

-0.0179 0.0179 1.0000 -2.0000

0.0536 -0.0357 0.9821 -1.0000

-0.1964 0.1250 1.0714 0

0.7321 -0.4643 0.7321 1.0000

pieces number l

4

order k

4

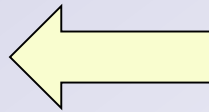
dimension d of target

1

```
x=0:0.1:3*pi;  
y=sin(x);  
pp=spline(x,y)
```

pp =

```
form: 'pp'  
breaks: [1x95 double]  
coefs: [94x4 double]  
pieces: 94  
order: 4  
dim: 1
```



例

```
x = 0:10; y = sin(x);  
xx = 0:.25:10;  
yy = spline(x,y,xx);  
plot(x,y,'o',xx,yy)
```

## 构造具有各种不同边界条件的三次插值样条函数Csape (Cubic spline interpolation)

**PP = CSAPE(X,Y,CONDS,VALCONDS)**

**CONDS:**

- 'complete' or 'clamped'...给定端点斜率
- 'not-a-knot', 第一和最后一个内点3阶导数连续
- 'periodic'...给定端点周期条件
- 'second'...给定端点2阶导数条件
- 'variational'...要求给定端点2阶导数为零

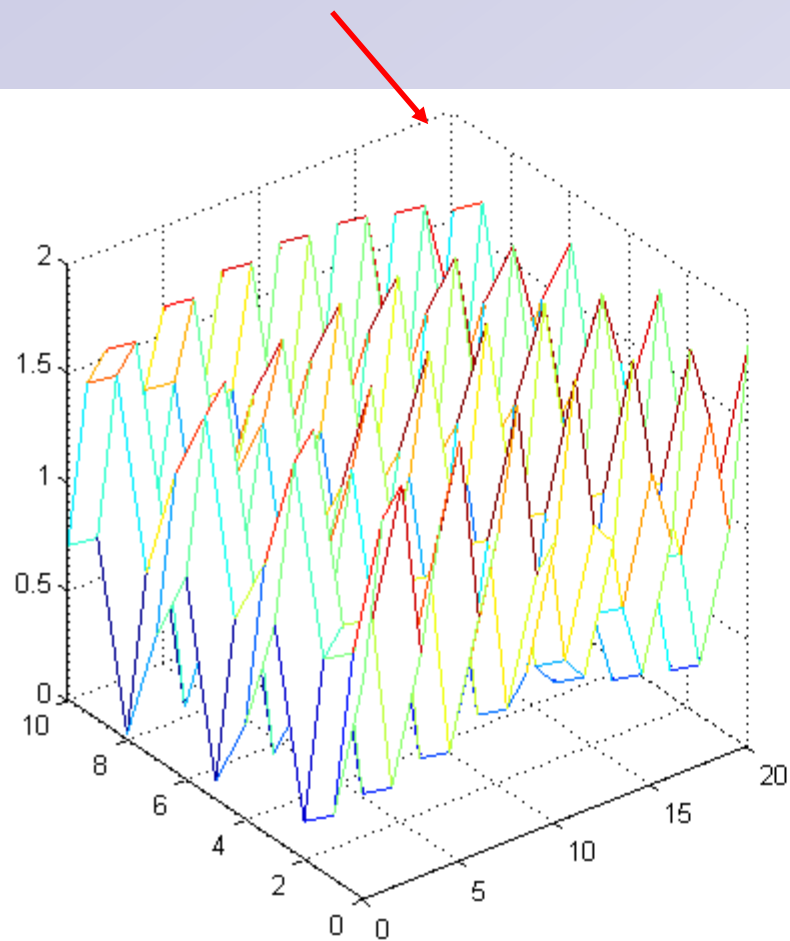
缺省情况： 使用各个端点附近的四个数据计算斜率

当conds为1\*2阶的矩阵时，可使两个边界点具有不同的边界条件：如 $\text{conds}(i)=j$ ,则给定端点 $i$ 处的 $j$ 阶导数 ( $j=0,1,2$ ).

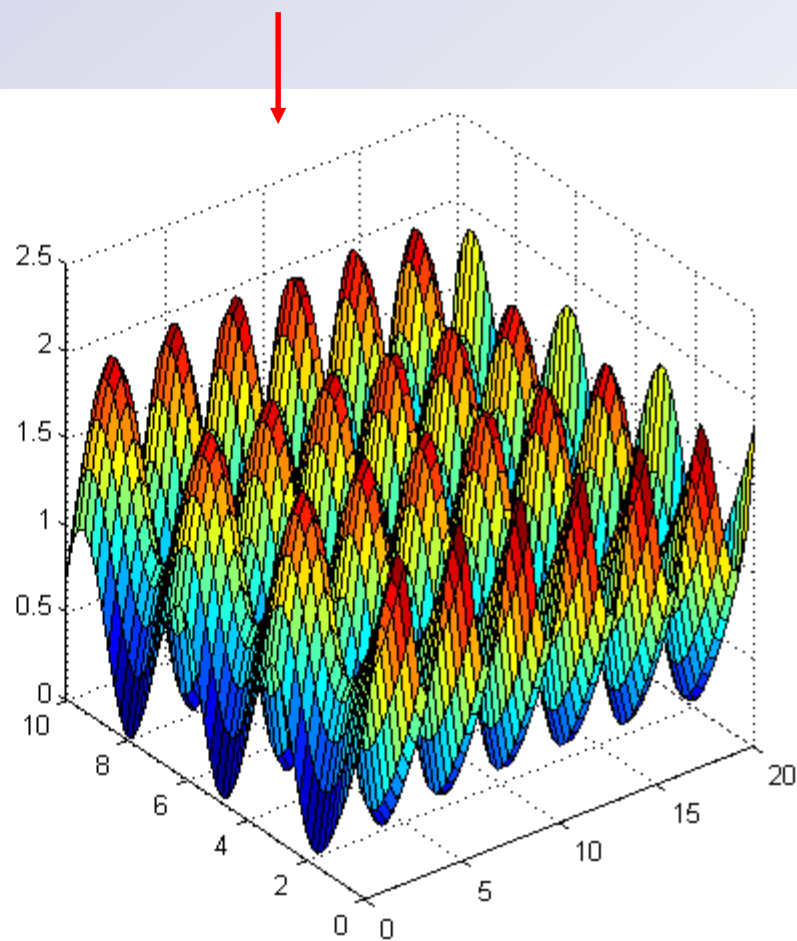
**PP = CSAPE({X,Y}, Z, CONDS,VALCONDS)**

```
x=0:20;  
y=0:10;  
[xx,yy]=meshgrid(x,y);  
zz=(sin(xx)).^2+(cos(yy)).^2;  
subplot(1,2,1)  
mesh(xx,yy,zz);  
pp=csape({x,y},zz');  
subplot(1,2,2)  
fnplt(pp)
```

插值前



插值后



## Csapi 构造not-a-knot边界条件下的三次样条函数

VALUES = CSAPI(X,Y,XX)

PP = CSAPI(X,Y)

## Csaps 构造具有不同光滑性的三次样条函数

VALUES = CSAPs(X,Y,p,XX)

PP = CSAPS(X,Y,p)

$p \in [0,1]$       P=0,光滑程度最低  
P=1光滑程度最高



## Getcurve 交互式构造三次样条曲线

`[xx,pp]=getcurve`

其中xx为数据

pp为样条pp形式

## Fval样条函数的求值

$Y = \text{fval}(\text{pp}, X)$

**pp**: 样条函数的描述; **x**: 待求值的点

## Fnder样条函数的导数

$\text{fprime} = \text{fnder}(\text{pp})$

$\text{fprime} = \text{fnder}(\text{pp}, \text{dorder})$

其中 **pp**: 为样条函数的描述 **dorder**: 求导的阶数

**fprime**: 求导后的分段表达形式

## Fnint样条函数的积分

`intgrf = fnint(pp)`

`intgrf = fnint(f,value)`

其中 **pp**: 为样条函数的描述

## fnplt样条函数的绘图

`fnplt(pp)`

`FNPLT(F,SYMBOL,INTERV,LINETHICKNESS)`

其中 **f**: 样条函数的描述

例

**subplot(221)**

**fnplt(pp)**

**subplot(222)**

**fnplt(fnder(pp,[0,1]))**

**subplot(223)**

**fnplt(fnder(pp,[2,1]))**

**subplot(224)**

**fnplt(fnder(pp,[-2,-1]))**

