

# 基于复合优化和非线性回归分析最小化时间 残差平方和的火箭残骸定位方法

May 2024

## 摘要

本文基于若干震动检测设备返回的无差别音爆信号的时间及设备空间坐标，在四维空间  $(x, y, z, t)$  中使用类比相对论中闵可夫斯基距离的“类闵距离”建立数学模型，选取震动波理论计算抵达时刻与实际观察时刻的代数差（即时间残差）的平方和作为目标函数进行优化，实现音爆点精确定位。在单源定位问题上，基于寻找该目标函数的合理最小值，本文采用了粒子群 (PSO) 和有限内存梯度优化 (L-BFGS) 两种优化方式的复合使用，同时引入类库克距离对优化结果进行评判，对于可能存在的异常点进行恰当处理。在多源定位问题上，充分考虑数据点与音爆点对应关系的复杂性，本文中设计了基于贪心思想的浅迭代——回溯——深度迭代求解的完善算法流程求解对应关系，并给出模拟退火算法作为补充，将复杂问题转化为单源定位问题。在进一步的误差分析和精确定位问题中，考虑对可能的真实时间计算残差并加权，计算该残差加权平方和以表征音爆点坐标对真实时间的拟合。此外，同构共线设置探测器解决精准定位。在数据可视化过程中，考虑到音爆点和观测点距离和时间上满足的理论关系，本文给出了四维空间中的公共圆锥面、双曲面交点等可视化模型，从中容易看出，本模型在假设框架下对火箭残骸定位问题具有优秀的求解能力。

## 1 问题描述

### 1.1 背景简介

多级火箭发射是一种常见的做法，其中不同阶段的助推器在完成其任务后会分离并坠落回地球。这些坠落的部件不仅代表了潜在的重用价值，还

可能对地面设施和安全构成威胁。近年来，随着火箭技术的不断发展，火箭残骸的回收和处理成为了一个亟待解决的问题。因此，研究一种通过音爆确认火箭残骸的方法具有重要的现实意义和应用价值。

本文使用单次与多次音爆的时间数据，通过数据处理和算法模型搭建，对解进行优化，给出对既定情景下火箭爆炸位置的预测。通过类闵距离、类库克距离的拓展定义，对求出的解进行评估和修正。

## 1.2 基本模型假设

为方便模型的建立和确定模型可行性，这里先对模型提出一些假设，使得模型更加完备，预测结果更加可靠。

1. 假设给出的数据均为真实数据、真实有效
2. 震动波的传播速度为  $340 \text{ m/s}$
3. 计算两点之间的距离时可以忽略地面曲率
4. 纬度间每度距离近似为  $111.263 \text{ km}$ ，经度间每度距离近似为  $97.304 \text{ km}$ 。

## 1.3 符号说明

为方便模型的建立与求解过程，这里对使用到的关键符号进行以下说明：

符号	符号说明
$c$	表示声速
$t_i$	表示 (涉及单个音爆残骸问题中) 第 $i$ 个探测器接受到震动的时间
$x_i$	表示第 $i$ 个探测器的经度或以米为单位的经度坐标
$y_i$	表示第 $i$ 个探测器的纬度或以米为单位的纬度坐标
$z_i$	表示第 $i$ 个探测器的高度或以米为单位的纬度坐标
$x_0$	表示 (涉及单个音爆残骸问题中) 音爆点的纬度或以米为单位的纬度坐标, 对 $y, z, t$ 有类似的讨论
$x_0(k)$	表示 (涉及多个音爆残骸问题中) 第 $k$ 个音爆点的纬度或以米为单位的纬度坐标, 对 $y, z, t$ 有类似的讨论
$\phi_{ij}$	表示第 $i$ 个监测器和其接受到的第 $j$ 个震动信号组合成的数据点
$t_{ij}$	表示 (涉及多音爆残骸问题) 第 $i$ 个探测器接收到第 $j$ 次震动信号的数据
	表示第 $i$ 个预测的探测器接受到震动的时间
$\delta t_i$	表示预测的时间残差, 即 $t_{ij} - \hat{t}_i$
$cd_i$	表示第 $i$ 个点的类库克距离

(注: 这里只列出了论文各部分通用符号, 个别单独使用的符号在首次引用时会进行说明。)

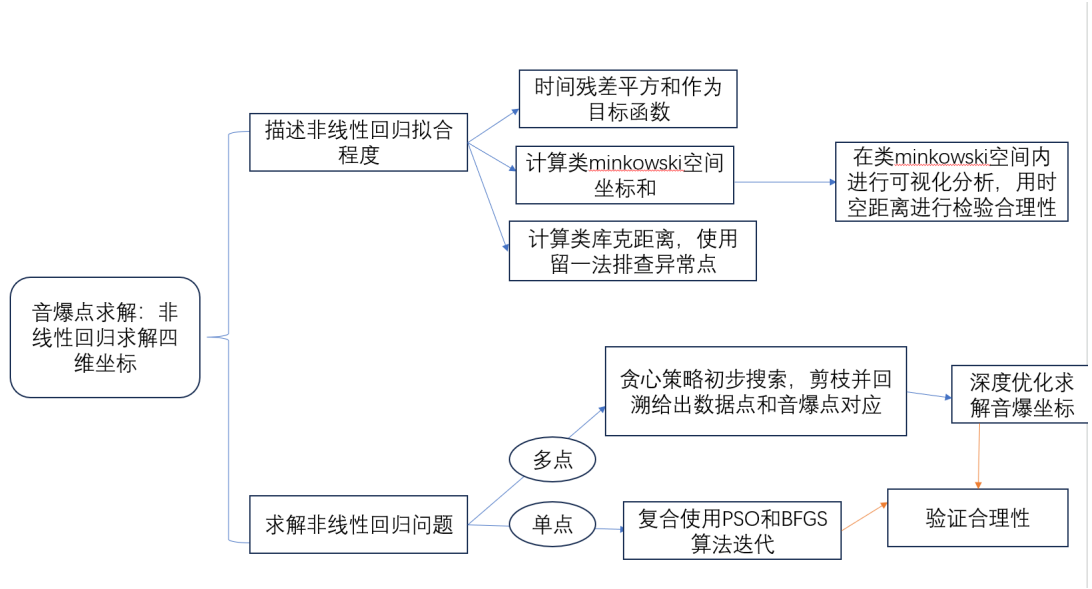


图 1: 全文解题思路

## 2 解题思路

### 2.1 总体思路

总体思维导图如下 在火箭残骸定位模型中，对于一个音爆源的一组可能的时空坐标  $x_0$ 、 $y_0$ 、 $z_0$ 、 $t_0$ ，以及一个监测器的一组实际空间位置  $x_i$ 、 $y_i$ 、 $z_i$ ，可以基于到达时间差计算给出探测器接受震动时刻的预测值（或估计值）为

$$\hat{t}_i = t_0 + \frac{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}}{c} \quad (1)$$

以该预测值  $\hat{t}_i$  与探测器接受震动的实际时刻（测量值）之差作为本模型中的时间残差  $\delta t_i$ 。对于一个音爆源可能的一组时空坐标，本模型提出以对于所有监测器的时间残差平方和

$$f_t = \sum (\delta t_i)^2 \quad (2)$$

作为目标函数衡量对音爆源定位的精确度，通过优化算法求解使得时间残差平方和最小的时空坐标作为可信的音爆源时空坐标，将音爆源定位问题转化为非线性回归问题的求解。

实际上,在四维空间  $(x, y, z, t)$  中,到达时间残差表现为监测器的时空坐标与以可能音爆源为顶点展开的公共圆锥面的竖直距离,因此能够较为直观合理地衡量音爆源定位的准确程度。关于此目标函数设置更进一步的合理性验证将在“讨论”部分展开。

## 2.2 针对单个残骸音爆定位分析

### 2.2.1 模型建立

在单个残骸定位模型中,首先需要将经度、纬度信息转化到易于计算的笛卡尔坐标系中。单个残骸时间空间坐标具有四个自由度  $(x, y, z, t)$ ,理论上可以通过多边定位技术建立非线性方程组进行求解。

$$(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2 - c^2(t_0 - t_i)^2 = 0 \quad (3)$$

其中  $i = 1, 2, 3, \dots$  此非线性方程组由现实情境保证有解,同时,由于本身残骸发生音爆的时空坐标具有四个自由度,在不考虑对称点(如在空间中关于监测器群的平面对称)的情况下,理论上可以通过一组四个非线性方程求解音爆点的时空坐标,也即理想情况下至少需要四个监测器对单音爆源进行定位。

在实际情况下,由于数据观测的偏差,上述方程很可能是无解的。而对于由七台监测器设备观测值建立的一组超定方程,本模型以时间残差平方和的目标函数(2)最小的优化目标求解数值解,作为可信的音爆源时空坐标定位,这实际上是一个求解待定参数  $x_0, y_0, z_0, t_0$  的非线性回归问题。

### 2.2.2 求解思路

在具体的求解过程中,考虑到非线性问题本身的复杂性和局部最优解的存在性,并使用多种优化方法进行实验后,本模型选择使用 PSO 和 L-BFGS 的复合优化方法,综合利用了 PSO 的全局优化性能和 L-BFGS 的超快收敛速度。首先基于 PSO 方法进行初步求解,寻找全局最优解存在的区域,然后在该局部区域上进行 L-BFGS 优化,以较快的速度迭代得到稳定的全局最优解。通过这样的复合优化方法,本模型利用全局优化性能更好的 PSO 方法避免了梯度优化方法容易陷入局部最优的缺点,在保持较快的迭代求

解速度的同时，提高了 L-BFGS 得到最优解的可信度。

进一步地，本模型提出了利用类库克距离 (cook distance) 等指标进行单源火箭残骸定位模型中异常数据点分析的思路。库克距离这一概念本身在线性回归模型中被广泛使用，通常用于评估一个样本点对于模型拟合结果的影响程度；在非线性回归模型中，由于模型本身的复杂性，库克距离本身的一般计算公式、经验阈值用于分析的有效性有待商榷，但其评估数据点对模型拟合结果的影响程度这一思想依然有较大的参考意义。在本模型中，参考线性回归模型中的库克距离计算公式，提出了类库克距离

$$cd_i = \sum \frac{(\hat{t}_j - t_{j(i)})^2}{(p+1) * MSE} \quad (4)$$

其中， $t_{j(i)}$  表示去除序号为  $i$  的点，对剩余点进行优化求解得到的音爆点时间。 $p$  是去除  $i$  前参与优化的数据点的总个数。基于这一指标，本模型给出了分析异常点的思路，通过对异常点进行恰当处理，提高模型的定位精度。

### 2.2.3 基于类闵氏距离的可视化思路

此问题中涉及四个维度的信息，使得直观表现音爆源与监测器的时空关系较为困难，也为可视化模型定位效果带来了障碍。而音爆点时空坐标  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  和观测点  $\phi_{ij}$  满足

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0 \quad (5)$$

受物理学方法启发，类比闵可夫斯基空间中的时空距离概念，引入类闵距离

$$d = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \quad (6)$$

理论上认为音爆点与对应观测点  $\phi_{ij}$  之间的时空距离为 0。求解最接近的音爆点时间和位置也可看为求解四维坐标  $x_0, y_0, z_0, t_0$  使得和  $\phi_{ij}$  时空距离尽可能接近于 0，此即  $\phi_{ij}$  在四维空间中尽可能落在  $x_0, y_0, z_0, t_0$  确定的一个“光锥”上。

为了在三维图像上将四维空间的时空“光锥”和坐标分布情况可视化。考虑压缩维度：将标准差最小的维度  $z$  和  $x$  合并为  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ，以  $ct$  作为竖坐标，则分布在时空光锥上的点满足（如图 2）

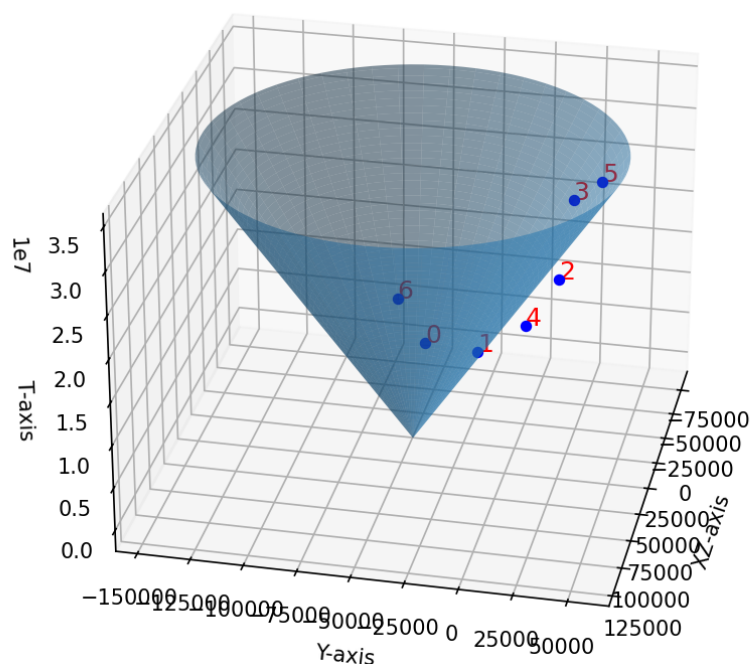


图 2: 类闵空间内的光锥

$(\Delta r)^2 + (\Delta y)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0$  (7) 能够作出图像。对音爆点的优化过程将使得观测点  $\phi_{ij}$  平均且尽可能靠近地分布在以  $x_0, y_0, z_0, t_0$  为顶点的圆锥上，模型优化的好坏也可由此可视化。

## 2.3 针对多残骸音爆的定位和求解

### 2.3.1 模型建立

当空中有多个火箭残骸（如一级残骸和数个助推器）先后发生音爆时，每个监测设备可能会接收到几组不同的震动波数据。因此，多个残骸音爆点和每个监测器不同监测数据会形成复杂的对应关系，求解这一对应关系成

为解决这一问题的关键障碍。

基于问题二中分析“精确定位多个残骸所需的最小监测器数量”的需要，我们建立了基于到达时间差（TDOA）的多源定位模型。对于多个监测器中的任意一对监测器，两者对于同一音爆源具有固定的到达时间差，更进一步地，在三维空间中可以构建音爆源分布的几何模型，音爆源应该分布在以两监测器位置为焦点的双曲面上；而在理想情况下，所有音爆源的位置应该分布在监测器群两两作为焦点构造的一系列双曲面的有限多个交点上。

在这一过程中，模型中需要先求解监测数据与多个音爆点之间的对应关系，然后针对每个音爆源建立非线性方程组，与单源定位中类似地转化为非线性回归问题，通过数值算法进行求解。在单源定位问题中，要定位单个残骸音爆点至少需要四台监测器；而在多源定位问题中，由于需要求解对应关系，问题复杂度增加，因此至少需要五台监测器对多残骸音爆点进行精确定位。

同时，在模型中我们需要考虑一些特殊的限制条件。首先限制不同音爆源的发生时间之差应该小于一定的阈值，即对于任意两个音爆源  $i, j$  都有

$$|t_i - t_j| \leq \Delta t_{max} \quad (8)$$

其次考虑到火箭的速度范围，则可以设定一个速度约束。设火箭的最大可能速度为  $v_{max}$ ，则对于每个残骸  $k$ ，其瞬时位置变化率应该满足

$$\sqrt{\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2} \leq v_{max} \quad (9)$$

如果可以预测残骸的预期下落轨迹，则可以设定一个残骸的高程约束，即音爆点的高程应该处在一定范围内

$$z_{min} \leq z_j \leq z_{max} \quad (10)$$

在以上约束的条件下，以最小化总时间残差平方和为目标求解优化问题：



$$\min f(v) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left[ t_i + \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}{c} - t_{ij} \right]^2 \quad (11)$$

其中  $p$  音爆点的数量（音爆发生次数）， $q$  为探测器总台数

### 2.3.2 求解思路

在问题三中，题目给出 7 个监测器，每个监测器接受到 4 个震动信号，如果直接枚举所有可能的对应关系，枚举量将高达  $(A_4^4)^7$ ，这显然是不可行的。因此，本模型将对应关系求解和音爆点的时空坐标求解融合，建立了一套基于贪心思想的浅迭代——回溯——深度迭代求解的完善算法流程。

首先将监测器的空间坐标和接受到的每一个震动时间信号组合为一个震动数据点（下文简称数据点），即

$$\phi_{ij} = \{x_i, y_i, z_i, t_{ij}\} \quad (12)$$

对于每个监测器  $i$ ，每次分别仅挑选一个震动数据点  $\phi_{ij}$ ，组合为供一次迭代求解使用的非线性方程组，考虑到运算量限制，使用较少的迭代优化次数给出音爆源时空坐标的粗略解（浅迭代），并计算每次组合得到的解对应的时间残差平方和，记为  $f_m$ ，其中  $m$  为第  $m$  次组合。

根据贪心算法思想，时间残差平方和过大的点将被认为不是可能的潜在音爆点（以下简称潜在点），通过设立经验阈值，筛选出潜在点供后续求解使用，减少运算量。随后使用潜在点进行对应关系分析，要求从潜在点中给出一组四个符合要求的音爆源时空坐标，考虑到题目给出限制音爆发生的时间差在 5s 以内、同时前一步贪心算法给出的潜在点对应的同一监测器  $i$  的信号索引值  $J_1, J_2, J_3 \dots$  必须互异（同一个震动信号不可能同时对应两个音爆源），在两个约束条件下使用剪枝优化的回溯搜索算法，求解满足约束的总时间残差平方和最小的一组四个潜在点，并认为这一组点给出了满足条件的最可能的对应关系。

至此，对应关系求解完毕。最后应用求解问题一使用的优化过程分别精确求解四个音爆点的最优时空坐标（深度迭代）。同时，根据潜在点的数量、

浅迭代过程的迭代次数、回溯算法的运算量等指标综合调整用于筛选潜在点的经验阈值。算法的细节分析详见“解题过程”部分。

同时，考虑到更多不同数据情景下的模型求解需求（比如面临更大的探测器数量，或由于更大的数据测量误差而不得不增大浅迭代的次数），本文也设计了在运行效率上更加优秀的模拟退火算法作为补充，但考虑到模拟退火中一些参数的选取会对优化效果产生较大影响，计算结果的可靠程度可能不如前文中的回溯搜索算法。（详见“讨论部分”）

## 2.4 误差修正和精准定位

考虑到设备记录时间可能存在 0.5 秒的随机误差，此时认为时间误差不超过 0.5s。此时每个探测器每次接收到的真实时间实际上将符合：以问题三每个探测器给出的时间为期望均值，标准差为 0.5 的正态分布（见 3. 模型解释）。此时考虑求解每个数据点处于正态分布下可能位置时间残差平方的期望的和（见 3. 模型）作为衡量求解的音爆点“加权平均”相对于数据点可能坐标的准确程度，优化此目标函数，取收敛时的音爆点时空坐标作为预测值。

对于最大可能误差的估计，则通过“离散化的数据点可能坐标模拟”中取出残差最大的组合，认为其是误差较大的可能实际情况，计算该情况下音爆定位，求取与音爆点的空间距离和时间差作为大误差估计。

对于考虑误差下的精准定位，则考虑在预估的音爆位置和现有探测器连线方向的远处放置两台探测器，通过共线的特殊位置消除误差，用共九个探测器的坐标保证空间误差在 600m 内，并生成实例进行运算验证。

# 3 解题过程

## 3.1 单个残骸音爆模型求解

### 3.1.1 数据预处理

问题一给出的数据为：

表 1: 问题一数据

设备	经度 (°)	纬度 (°)	高程 (m)	音爆抵达时间 (s)
A	110.241	27.204	824	100.767
B	110.780	27.456	727	112.220
C	110.712	27.785	742	188.020
D	110.251	27.825	850	258.985
E	110.524	27.617	786	118.443
F	110.467	27.921	678	266.871
G	110.047	27.121	575	163.024

为分析问题的方便，首先将问题一给出的监测器经纬度坐标变换为笛卡尔坐标（单位为 m），变换尺度详见“模型假设”部分：

表 2: 处理后的检测器笛卡尔坐标

设备	近似转换后的 x 坐标 (10 <sup>7</sup> )	近似转换后的 y 坐标 (10 <sup>6</sup> )	音爆抵达时间 (s)
A	1.07268903	3.02679865	100.767
B	1.07793371	3.05483693	112.220
C	1.07727204	3.09144246	188.020
D	1.07278633	3.09589298	258.985
E	1.07544273	3.07275027	118.443
F	1.07488810	3.10657422	266.871
G	1.07080133	3.01756382	163.024

对变换后的数据进行简单分析后发现，监测器的  $x$  坐标均值为  $1.074544752 \times 10^7$ 、标准差为  $2.402272 \times 10^4$ ， $y$  坐标均值为  $3.06655133 \times 10^6$ 、标准差为  $3.215595 \times 10^4$ ， $z$  坐标均值为 740.28571、标准差为 86.61361。考虑到  $x$ 、 $y$  坐标本身数据尺度较大，在梯度优化反复对目标函数 (2) 计算的过程中容易引发较大误差，对空间坐标分别减去均值进行标准化处理：

表 3: 标准化后的检测器数据

设备	标准化后的 x 坐标 ( $10^3$ )	标准化后的 y 坐标 ( $10^4$ )	标准化后的高 程 (m)	音爆抵达时 间 (s)
A	-18.557	-3.975	83.714	100.767
B	33.889	-1.171	-13.285	112.220
C	27.272	2.489	1.714	188.020
D	-17.584	2.934	109.714	258.985
E	8.9797	0.619	45.714	118.443
F	3.433	4.002	-62.285	266.871
G	-37.434	-4.898	-165.285	163.024

### 3.1.2 模型求解

根据解决问题的思路, 考虑式 (2) 的目标函数式, 对问题一的 7 个监测器计算所得的时间残差平方进行求和计算。粒子群算法具有较好的全局优化性能, 因此首先考虑使用粒子群算法 (PSO) 进行优化, 设置粒子数  $n = 50$ , 迭代次数为 15 (考虑到 PSO 算法本身计算速度较慢, 基于运算效率考量, 不宜使用过大的迭代次数), 得到四维坐标 *initial\_guess* 后作为后续 L-BFGS 算法的初始解。

```

1 def 参数设置 ():
2     个体加速系数: 0.25,
3     群体加速系数: 0.2,
4     惯性权重: 1,
5     粒子数量 = 50,
6     问题的维度 =4,
7 def 粒子群算法 :
8     particles = 初始化
9     for k in range (总迭代次数):
10         更新个体最优和全局最优(particles)
11         更新粒子的位置和速度(particles)
12     best_particle = 适应度最佳的粒子
13     return best_particle 作为L-BFGS算法的输入

```

Listing 1: PSO Algorithm

将 PSO 算法的输出 *initial\_guess* 作为 L-BFGS 算法的输入, 调用 python 中 scipy 库中的 minimize 函数, 通过 L-BFGS 算法快速求解出时间残差平方和最小的音爆源时空坐标。

```
1 options = {'disp': False, 'maxiter': 100, 'gtol': 1e-6}
2 result = minimize(目标函数 (时间残差平方和), initial_guess,
    method='L-BFGS-B', options=options)
```

Listing 2: L-BFGS

最终得到目标函数时间残差平方和约为 1968.18, 各数据点的详细时间残差值以及四维空间中的可视化结果为:

表 4: 各监测器残差数据

设备	A	B	C	D	E	F	G
残差	-5.603	10.518	-13.921	19.819	-30.311	17.347	2.149

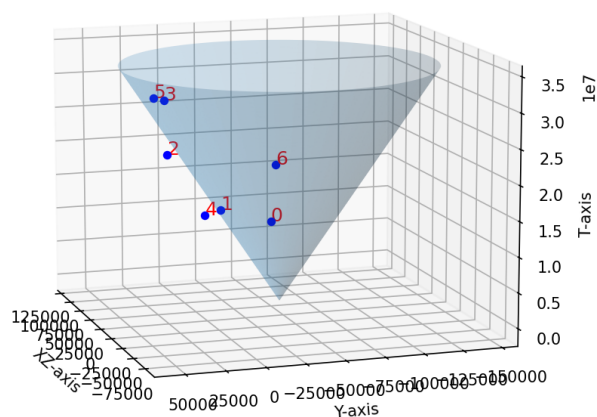


图 3: 第一问时空圆锥

经过去标准化，模型对音爆源的定位结果为：

(110.631°, 27.151°, 1312m)

振动源时间为（相对于计时 0 点）：

-6.679 秒

### 3.1.3 可能的异常点分析

观察上一步中的残差平方和数据和各监测器的时间残差计算结果，我们认为部分监测器的残差过大，考虑可能有测量误差过大的异常数据点存在（即误差较大的监测器），从而影响了整个模型的拟合结果。因此，本模型采取与线性回归问题中类似的类库克距离（cook distance）来衡量每个监测器数据点对模型拟合结果的影响程度，类库克距离的计算

$$cd_i = \sum \frac{(\hat{t}_j - t_{j(i)})^2}{(p+1) * MSE} \quad (13)$$

其中， $t_{j(i)}$  表示去除序号为  $i$  的点后，对剩余点进行优化求解后基于公式（1）计算得到的第  $j$  个监测器接受震动信号时刻的预测值。 $p$  是去除  $i$  前参与优化的数据点的总个数，在本题中为 7； $MSE$  为平均平方误差，即

```

1 for 要删除的监测器序号 in range (7)
2     consume_delete(要删除的监测器序号) #假设去除一个监测器
3     for 待计算监测器序号 in range (7) :
4         cooks_d[待计算监测器序号] = errors_difference [待计算监测器序号]**2/ ((p + 1) * MSE)
5 print("cook : ",cooks_d) #输出库克距离

```

Listing 3: cook distance calulation

在此计算过程中，数据量较为庞大，限于篇幅不具体列举。最终七个监测器数据点的类库克距离计算结果如下：

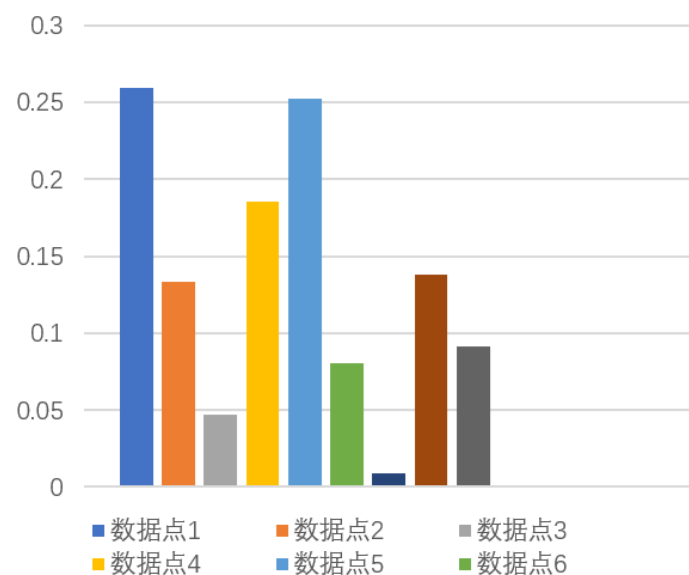


图 4: 类库克距离计算结果

分析上述数据可知，七个数据点的类库克距离中，第 1 个、第 5 个监测器的类库克距离远超其他监测器，考虑这两个点可能是模型拟合中的强影响点（杠杆点）或异常点。进一步参考先前的时间残差统计分析，发现第 1 个监测器的残差较小（仅为-5.603），第 5 个监测器的残差很大（高达-30.311），也即第 5 个监测器与模型的拟合结果偏移较远。综合类库克距离和时间残差两个数据的计算结果，我们认为第 5 个监测器是可能的异常数据点。

尝试去除第 5 个监测器，重新对模型进行拟合，计算得到最终的时间残差平方和约为 695.75，对比之前的 1968.18 大幅降低，可见结合类库克距离和时间残差数据将第 5 个监测器识别为异常数据点有一定的合理性。但值得说明的是，考虑到非线性问题本身的复杂性，以及本身监测器数量较少（样本数较少），对异常点的识别和处理需要更加慎重；在实际应用中，可以通过本模型给出的类库克距离等数据作为参考，对可疑的监测器进行检测分析（如是否存在监测器位置定位误差、监测器是否受到干扰、监测器是否发生故障等），从而实现了对异常监测器的快速准确识别。

### 3.2 多个残骸音爆模型建立与求解

数据预处理过程与问题一（单源定位）中基本相同，此处不再赘述，问题三给出的数据标准化后的结果为

表 5: 问题三标准化后的检测器数据

设备	标准化后的 x 坐标 ( $10^3$ )	标准化后的 y 坐标 ( $10^4$ )	标准化后的高 程 (m)
A	-19.293	-5.183	83.714
B	33.444	-2.379	-13.285
C	31.401	1.281	1.714
D	-18.320	3.951	109.714
E	8.243	-0.588	45.714
F	2.696	4.574	-62.285
G	-38.170	-1.656	-165.285

根据前文中给出的求解思路，我们将求解算法分为三个部分：浅迭代与潜在点筛选，回溯搜索求解对应关系，深度迭代精确定位。现阐述如下：

#### 3.2.1 浅迭代与潜在点筛选

首先我们通过循环分层依次遍历每一个监测器的四个震动时间数据，每次将取出七个震动数据点进行组合，作为浅层迭代的基础

```

1 def 震动数据点组合生成（监测器序号）：
2     for 监测器序号 in range(4)：
3         数据点的索引集合[0,递归层数] = 监测器序号
4         if 组合中数据数量 < 7：
5             将下一个监测器的数据加入组合中
6         else：
7             进入浅层迭代求解

```

Listing 4: combination creation



此后，对每个震动数据点组合使用 L-BFGS 算法进行浅层迭代求解（设置迭代次数为 20 次，以监测器坐标的平均值为迭代初值），求解结果记录在 `result_combination` 中，每个组合对应的监测器时间数据的索引记录在 `index_combination` 中，每个组合求解后计算的时间残差平方和记录在 `error_combination` 中

随后，根据预先设置的时间残差平方和阈值 `error_limit`（此处设置为 500，根据具体数据动态调整），将时间残差平方和不超过阈值的数据点组合标记为潜在点，其求解结果为一个潜在的音爆源，最终得到潜在点 247 个。

```

1 for 组合序号 in range (总组合数):
2     if(该组合的时间残差平方和 <= 阈值):
3         该组合给出的音爆源 = 潜在点
4         潜在点数量 += 1

```

Listing 5: combination creation

### 3.2.2 回溯搜索求解对应关系

在约束条件下：（1）音爆源发生时间差不超过 5s；（2）每个潜在点的同一索引的值互异。考虑剪枝优化的回溯搜索算法，搜索总时间残差平方和最小的一组音爆源（四个音爆源），并使用哈希表对数据进行处理，优化算法运行效率。

```

1 哈希表 = np.hstack(各潜在点的音爆发生时间，各潜在点的时间残差平方和，各潜在点的索引序列)
2 def 回溯 :
3     if 当前解中潜在点数目 == 4 and 满足约束条件:
4         return 当前最优解
5     for i in range(候选点集合):
6         当前候选点 = 候选点集合[i]
7         if 当前候选点加入后不满足约束条件:
8             continue
9         新的最优解 = 进入下一层递归的返回值
10        更新当前最优解
11    return 当前最优解

```

Listing 6: searching algorithm

最终得到的一组潜在点，四个音爆源带来的总时间残差平方和约为 269.12，对应的相关数据为：

表 6: 问题三的解

音爆源	音爆时间	时间残差平方和	解对应的时间索引序列
1	18.623	7.291	(A1,B2,C4,D4,E3,F4,G2)
2	19.648	11.116	(A4,B4,C2,D1,E4,F1,G4)
3	19.724	53.953	(A2,B3,C3,D2,E2,F3,G1)
4	22.594	193.497	(A3,B1,C1,D3,E1,F2,G3)

3.2.3 深度迭代精确定位

通过每个音爆源对应的震动信号索引值确定音爆源与监测器接收的时间信号的对应关系，随后利用问题一中的优化方法求解四个音爆源的时空坐标如下：

表 7: 音爆源求解结果

音爆源	x 坐标 ( $10^7$ )	y 坐标 ( $10^6$ )	z 坐标	音爆时间
1	1.07516617	3.03970104	716.805	18.623
2	1.07520307	3.10871350	714.048	19.648
3	1.07327722	3.07569538	715.728	19.724
4	1.07698315	3.07718504	746.180	22.594

表 8: 经纬度坐标表示

音爆源	经度	纬度	高程	音爆时间
1	110.496	27.320	716.805	18.623
2	110.499	27.940	714.048	19.648
3	110.301	27.643	715.728	19.724
4	110.682	27.657	746.180	22.594

同时也给出直观的可视化结果：

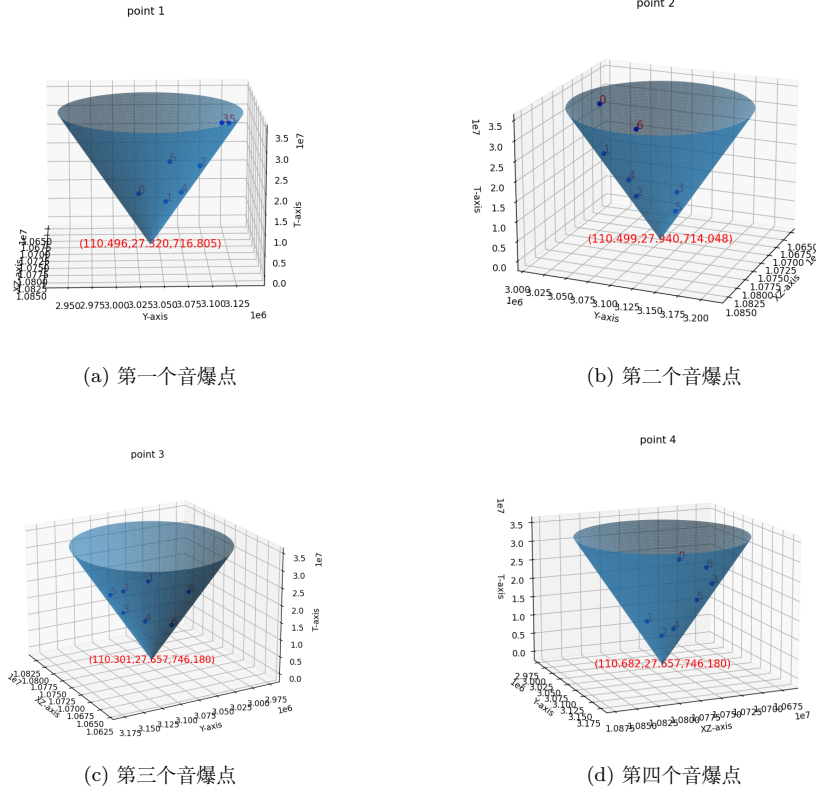


图 5: 四个音爆点的时空圆锥和解对应的时空点

### 3.2.4 算法时间复杂度分析

由于在本问题中，算法处理的数据量较为庞大，因此进行时间复杂度分析是必要的。在浅层迭代中，使用贪心思想进行处理，每次组合仅给出一个潜在音爆点而非一个由四个潜在点构成的组合，迭代过程的时间复杂度固定为  $O(4^7)$ 。虽然 L-BFGS 算法的时间复杂度难以简单估计，但在浅度迭代的迭代次数较少 (20 次左右) 的情况下，时间复杂度在可接受范围内。

在回溯搜索中，设共有  $N$  个候选点。考虑到每个潜在点有 7 个索引，每个索引的取值范围为 0 到 3，而我们要选择的潜在点数量固定为 4 个，也即

递归深度固定为 4。但由于哈希表按索引值将数据点分类，在搜索中符合预期索引值需求的实际候选点数量将远小于  $N$ ，这里估计为  $N/4$ 。对于每步计算，判断集合是否满足约束条件的时间复杂度为  $O(28)$ 。因此，此步骤的综合时间复杂度约为  $O(28 * (N/4)^4)$ 。

深度迭代过程的时间复杂度相对前两步而言较小，可以忽略不计。

考虑到回溯搜索需要计算的潜在点的数量为 247 个，且回溯搜索中应用的剪枝方法应该可以显著缩小搜索树，整个算法流程的时间复杂度在可接受范围内，具有较好的运行效率。

### 3.3 针对时间误差建立的模型和精准定位

为体现误差数量级关系，本节中长度量均以米为单位呈现并已进行中心化（标准化）处理。

#### 3.3.1 问题四模型建立

认为问题三求解的数据点和音爆点间的对应关系正确的基础上，假设：

$$\begin{cases} \epsilon \sim N(0, 0.5) \\ -0.5 < \epsilon < 0.5 \end{cases} \quad (14)$$

首先离散化模拟时间随机误差，对每个数据点的  $t_i$  叠加上一个满足  $N(0, 0.5)$  的误差  $\epsilon$ ， $\epsilon$  由 python 生成。真实时间满足

$$t_{ij} = t_i + \epsilon_j \quad (15)$$

$t_{it}$  满足  $N(t_i, 0.5)$ ，此时设定第  $n$  个音爆点 ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 的目标函数为

$$f = \sum \int_{-0.5}^{0.5} p(a)(\delta t_i(a))^2 da \quad (16)$$

其中

$$\delta t_i(a) = t_i + a - \hat{t}_i \quad (17)$$

$$p(a) = A \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2 \times 0.5^2}} \quad (18)$$

$A$  为归一化系数，使得  $p(a)$  作为概率密度在  $[-0.5, 0.5]$  上积分为 1。

(5) 中的求和针对每个音爆点对应的 7 个数据点。本文认为使得 (5) 有最小值的四维坐标  $x_n, y_n, z_n, t_n$ ，是考虑误差下最可能符合实际情况的点。

### 3.3.2 离散化的数据点可能坐标模拟

实际运算中，(5) 所示积分过于复杂，无法使用 python 优化得到数值解。考虑计算时简化模型：对第  $n$  个音爆点，对于每个属于音爆点  $n$  的数据点  $i$ ，用  $j$  个满足 4.3.1 假设的  $\epsilon_j$  生成  $j$  个可能的真实时间，用离散近似的阶梯函数  $q(a)$  代替  $p(a)$ ，用针对指标  $j$  的求和替代 (5) 中对  $a$  的积分，那么目标函数离散化为

$$f = \sum \sum (q(a)(\delta t_{ij}(a))^2) \quad (19)$$

其中  $q(a)$  取

$$q(a) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2 \times 0.5^2}} \quad (20)$$

内层求和对  $j$  进行，外层对  $i$  进行，分别表示对一个数据点的残差平方和估计和对七个数据点的拟合估计。

### 3.3.3 求解过程及结果

针对式 (8)，取  $j = 50$ ，随机生成  $j$  个  $\epsilon_j$

采用问题 3 中的第一个音爆点的数据进行残差叠加和处理，得到  $70 \times 7 = 490$  个可能的真实时间点  $t_{ij}$  19，5478.641 - 38933.42 - 80.78 叠加在  $t_i$  上生成模拟的可能真实时间数据。并用 BFGS 对 (8) 进行优化

### 3.3.4 误差估计

考虑在 3.3.2 模型生成随机可能真实时间  $t_{ij}$  并在每个  $i$  下找出对目标函数拟合结果偏差最大的  $t_{ij-max}$  (即具有最大时间残差平方的模拟真实时间顺序)。对取出的一共  $i = 7$  个可能的真实时间，其组成的数据可能是探测器真实接受到的时间，但该组合将是对 3.3.1 给出数值解  $x_n, y_n, z_n, t_n$ ，时间残差平方和最大的一组。本文认为这是具有代表性的较大误差一组真实数据点，再对该组可能的真实数据

$$x_i, y_i, z_i, t_{ij-max} \quad (21)$$

$i = 0, 1 \dots 7$ ，进行单残骸音爆点位置求解，新的位置将与 3.3.1 所给出的解存在空间位置和时间上的差距，这是离散模拟上出现的最大偏差。当  $j$  趋近无穷时，(11) 的最大偏差接近于理论最大偏差。当  $j=50$  时，正态分布的置信检验表明认为有高于 99% 的把握这是最大偏差。这里以问题三第四组

解为例进行误差计算。将式中 python 生成的单个残差平方和最大的  $\delta t_{ij}(a)$  取出，以这组数据求解得音爆点坐标

表 9: 模拟生成偏移较大的组合

$t_j$	$\epsilon_j$	$t_{jmax}$
100.767	-0.49	100.277
112.220	-0.19	112.030
188.020	-0.40	187.620
258.985	-0.30	258.685
118.443	0.02	118.445
266.871	0.49	267.370
163.024	-0.50	162.524

计算得其去标准化前坐标为

(5440.218, -39263.575, 1992.111)

时间坐标为 15.362 s

而 3.3.3 节给出解为

(5528.742, -39039.149, 91.9896)

时间坐标为 9.250s

计算得其空间偏差为 1992m, 约 2km。时间偏差为 6s 并在多次随机模拟中呈现出均值较大且稳定的情况。由此认为时间误差是较难以降低的量。

### 3.4 针对时间误差进行优化和有效策略验证

(为体现误差数量级关系, 本节中长度量均以米呈现并已进行中心化处理)

#### 3.4.1 精确定位解决方案

问题四中, 时间存在的随机误差影响可以通过对  $\left| \frac{\partial \sum (\sigma t_i)^2}{\partial t_{ij}} \right|$  分析得到。理想情况下在已有探测器  $A_i$  和音爆点  $O$  的连线远处部分重合, 两个探测器时间差的随机误差近似满足  $N(0,1)$ , 由共线条件能够基本消除误差。

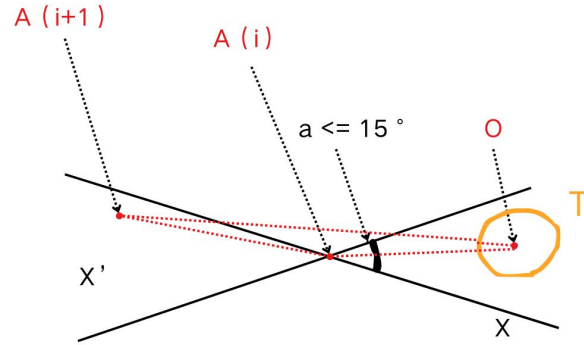


图 6: 精准定位方案示意图

放置探测器  $A_{i+1}$  将能够通过声音传播路程到达探测器  $A_i$  与  $A_{i+1}$  路线实际发射中火箭有规划轨道，其飞行方向大致可确定，残骸脱离时间受控制，其所在区域  $T$  大致可确定，本节基于这一事实，认为可以大致确定残骸音爆方向，再放宽探测器共线条件为探测器能确定音爆点在一定视场角度（正负十五度）内

时间内实际求解中不可能确定音爆点坐标，但空间误差有上界，三维空间中由一个较远观测点  $A_i$  看向音爆点  $O$  的可能区域  $T$ ， $T$  近似为一个球体，从  $O$  出发的视野圆锥  $X$  具有半顶角  $a=15$  度（角度制），可以容纳音爆区域  $T$ 。如图（补充）所示，在视野圆锥  $X$  反向区域  $X'$  内设置新探测器  $A_{i+1}$ ，此时  $A_i$ 、 $A_{i+1}$ 、 $O$  在半顶角  $a$  下近似共线，角  $A_{i+1}A_iO > 150^\circ$ ， $s_3 \approx 2s_2$  实际算例中能在时间误差下修正  $O$  的空间坐标。

### 3.4.2 实际算例

本节考虑在第三问探测器和已有数据的基础上添加四个探测器，分别与四个问题三已给的探测器和初步算出的音爆坐标区域满足在半顶角  $a=15$

度下的近似共线，给定其坐标，自行计算给出新探测器加入随机误差后的数据点  $\phi_{ij}$   $i = 8, 9, j = 1, 2, 3, 4$  通过使用添加后共计九个探测器的带随机误差数据点求解坐标，与问题三中的求解结果对比，说明将空间误差降低到 1km 以下：添加坐标点为  $(-70000, 739, 200)$ 、 $(-8000, 745.9, 500)$ （考虑探测器实际不可能排布于高空，将新探测  $z$  坐标限制在 2000m 内）

下面对音爆源 1 进行模拟时间误差和求解，选取的误差组合与 3.3.4 表 9 中一致。通过新添加两个探测器，在理论坐标上加以空间偏移（但满足十五度视场条件），计算收到音爆源 1 的理论时间  $t_i$  并叠加误差，数据如下：

表 10: 探测器理论较优位置和理论时间

	$x_{i0}$	$y_{i0}$	$z_{i0}$	$t_{i0}$
探测器 9	-70000	739	200	270.42
探测器 10	-8000	745.9	500	144

表 11: 引入空间偏移和叠加时间残差后的两组数据点

	探测器 9	探测器 10
$x'$	-70000-1000	-8000+200
$y'$	739-200	745.9+500
$z'$	200	500-50
$t'$	270.42-0.12	144+0.3
$x''$	-70000+1840	-8000+200
$y''$	739-345	745+214.9
$z''$	200+120	500+32
$t''$	42-0.12	144+0.3

原先七个探测器在该组误差下优化得音爆坐标为

$(5440.218, -39263.575, 1992.111)$

添加新探测器数据点后计算得数据（两组，分别由  $x'$  组和  $x''$ ）

$(5905.979, -39364.716, -64.973)$



(5444.774, -39184.591, -58.425)

而 3.3.3 节给出解为

(5528.742, -39039.149, 91.9896)

模拟求解得到的偏差不大于 600m, 解决了定位问题

## 4 讨论

### 4.1 使用时间残差平方和作为目标函数的合理性分析

虽然在本模型中使用时间残差平方和作为目标函数来进行优化在类闵氏空间中看来是直观的（时间残差实际上是与圆锥面相差的竖直距离），但考虑到非线性问题的复杂性，深入讨论此目标函数评价定位精度的有效性依然是有必要的。我们使用留一法交叉验证 (LOOCV)，分别使用 MSE(平方平均误差) 和 MAE（绝对平均误差）作为目标函数来进行优化，使用问题一中的数据来评估两种优化路径的优劣。值得说明的是，由于本问题中的样本数量（监测器数量）不变，我们将忽略数据尺度的影响，使用更直接的时间残差平方和与时间残差绝对值之和作为目标函数来进行比较。

留一法交叉验证是一种评估模型拟合效果的统计方法，特别适合于样本量较小的情况。对于  $N$  个独立的监测器，进行  $N$  次迭代，在每次迭代中将某个监测器作为验证机，其余监测器作为训练机，使用训练机计算出的音爆源时空坐标计算与验证机的时间残差。最终根据所有时间残差计算均方误差，作为衡量模型拟合性能（在这里指我们的目标函数选择的可靠度）的标准。

经过计算可以得出，MSE 作为目标函数得到的均方误差为 681.42，MAE 作为目标函数得到的均方误差为 990.34。根据留一法交叉验证的基本原理，可以认为 MSE 作为目标函数的可靠度优于 MAE。在此基础上，结合类闵氏空间中得到的直观结果，我们可以认为使用时间残差平方和作为目标函数来进行优化具有很高的可靠度。

表 12: 留一法交叉验证

	验证序 号/验 证方法	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	第 5 组	第 6 组	第 7 组
时间	MSE	-9.544	30.518	-18.497	33.003	-41.591	23.614	5.972
残差	MAE	-15.344	33.239	28.414	13.685	47.787	43.694	19.943

## 4.2 问题三求解的模拟退火算法设计

在该模型的求解过程中，为了适应更加广泛的数据情景（比如更多的监测器数量或更高的数据误差），我们给出了一种模拟退火算法作为回溯搜索算法的代替和补充，其时间复杂度为  $O(kN)$ ， $k$  为迭代次数， $N$  为可疑点数量。但正如“解题思路”部分所说的，该算法在此多源定位模型中的表现高度依赖于几个重要参数的选取，需要根据具体数据进行适当调整。

模拟退火算法的关键步骤及实现：

状态定义：状态定义为四个潜在点的集合，这些点满足时间范围约束和索引值约束。

成本函数：成本函数是所选潜在点的总时间残差平方和，若时间范围约束不满足则增加一个很大的惩罚值。

初始化状态：随机选择四个潜在点作为初始解，确保它们在每个索引上覆盖 0, 1, 2, 3。

邻域函数：随机交换当前解中的两个潜在点的一对索引值，以生成一个新解，容易保证新解满足索引覆盖的条件。

接受准则 (Metropolis 准则)：如果新解的成本低于当前解的成本，总是接受新解；如果新解成本更高，以一定概率接受，概率为  $e^{-(cost_{new}-cost_{current})/T}$

冷却计划：初始温度设定为 1000，每次迭代后温度按冷却进度 0.8 降低，直至达到一个较低的阈值为止。

```

1 def 模拟退火（潜在点数据）：
2     当前解 = 初始化
3     当前成本 = 时间残差平方和（当前解）
4     初始温度 = 1000

```

```
5      冷却进度 = 0.8
6      while 当前温度 > 温度阈值:
7          更新新解
8          新成本 = 时间残差平方和 (新解)
9          if 满足接受准则:
10             当前解 = 新解
11             当前成本 = 新成本
12             当前温度 *= 冷却进度
13      return 最终解
```

### 4.3 模型优缺点分析

#### 4.3.1 优点

1. 定位精度高，通过最小化时间残差平方和，实现高精度定位。
2. 鲁棒性，模型考虑了异常点识别和随机测量误差，并给予恰当的修正和处理，提高了模型对测量不确定性的适应性。
3. 创新的可视化方案，通过引入类闵氏距离，在类闵空间中清晰直观展示了模型的定位效果，便于问题分析。
4. 框架通用性，提供了一个求解类似问题的通用性框架，可以被应用于其他单源、多源定位问题中。

#### 4.3.2 缺点

1. 算法依赖性，模型的性能很大程度上依赖于算法的选择及相关参数的设置。
2. 计算成本较高，尽管在问题求解中使用了各种各样的优化思路和方法，但是本身各种数值优化方法的使用依然可能导致计算成本增大。

3. 实地验证的可行性, 模型虽然在理论上有效, 但在实地验证中依然可能面临挑战。

4. 过拟合风险, 由于监测器数量限制, 模型在某些情况下可能发生拟合导致泛化能力不足。

## 5 参考文献

[1] Clément Gaultier, Grégory Pallone Orange Labs Cesson-Sévigné, France: A Comparative Study of Multilateration Methods for Single-Source Localization in Distributed Audio

[2] XUdong DANG,HongyanZhu,School of Electronics and Information Engineering,Xi'an jiaotong University:Multiple Sound Source Localization Based on a Multi-dimensional Assignment Model

[3]Gabrielle Flood,Centre for Mathematical SciencesLund University.Lund.Sweden, Filip Elvander, Dept.of Information and Communications EngineeringAalto University, Espoo, Finland: Multi-Source Localization and Data Association forTime-Difference of Arrival Measurements