

必读!!! 为了防伪, 目前论文中所有图片均有水印, 5月初将

公布无水印版本

使用须知 该论文完全按着比赛合适要求写作, 由于对卖售卖很多人都看到这一版本成品论文, 直接提交一定会查重不过关, 后期可以看 B 站会更新专门的降重视频。成品论文是按着之前的解题思路写出的, 如果不对外展示, 在普通建模竞赛是可以直接提交 100% 获奖的文章, 保二冲一的水平。进行展示的目的, 是为了辅助大家写论文。也让大家心里有个数大概获奖论文是个什么层次。

2024.04.23

倒卖必究

组委会要求重要格式规范如下所示, 大家可以根据要求, 以及 1 资料中提供的优秀论文资料进行修改。以下是竞赛论文要求, 请认真阅读!!

1、论文第一页需要填写基本信息, 详见“大数据挑战赛论文模板”。第一页还有论文标题、摘要和关键词(无需译成英文), 并从此页开始编写页码; 页码必须位于每页页脚中部, 用阿拉伯数字从“1”开始连续编号。

2、论文从第二页开始是论文正文(不要目录, 尽量控制在 20 页以内); 正文之后是参考文献和论文附录(页数不限)。附录需要填写一个表格, 交代程序代码名称等信息。

3、引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料) 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中均明确列出。正文引用处用方括号标示参考文献的编号, 如[1][3]等; 引用书籍还必须指出页码。参考文献按正文中的引用次序列出。

使用、借鉴、抄写该论文是否违规只要不超过查重率的 20%, 就不能算作违规。该论文属于公开发表的网上资料, 进行借鉴、参考不能算作违规, 切记不要抄的太过分, 查重率一定要低于 20% 就可以。下图为最新的数模竞赛规定

第七条 所有引用他人或公开资料(包括网上资料)的成果必须按照科技论文的规范列出参考文献, 并在正文引用处予以标注。

下面为成品论文 正文

后续问题答疑、结果解释等问题关注公众号 **BZD 数模社** 进行答疑

基于优化模型的多个火箭残骸的准确定位

在现代航天技术中，火箭是实现空间探索的关键工具。由于火箭发射过程中的高成本和复杂性，对火箭残骸的回收与重用变得越来越重要。本文将基于题目给出数据构建优化模型对火箭残骸进行准确定位。

问题一，单个残骸音爆定位分析。首先需要将设备的地理坐标（经度、纬度）转换为一个更适合计算的坐标系统，残骸发生音爆的位置 (x,y,z) 和时间 t ，使用多边测量技术建立方程组。为了提高计算精度构建一个优化模型进行求解，以预测时间和实际时间差的平方和为目标函数。应用 BFGS 方法进行最小化，找到最小化 $objective_function$ 的变量值，这些值代表了音爆源的最佳估计位置和时间。

问题二、三，多残骸音爆的监测和定位，确定每个监测设备接收到的不同音爆数据属于哪个具体的残骸。涉及到了最优值的求解，属于优化模型。建立一个数学模型来解决多源定位问题。设置一个优化问题，以确定该残骸的位置和音爆时间。目标是最小化预测的音爆抵达时间和实际记录时间之间的误差。以时间差约束、速度约束、高度约束、声速随高度变化、考虑风速和风向的影响作为约束条件，使用非线性最优化方法差分进化进行求解。通过三维可视化验证了模型的有效性，并展示了监测设备和残骸的空间分布。

问题四，误差修正和精准定位，考虑到设备记录时间可能存在高达 0.5 秒的随机误差。首先，为每个设备记录的时间添加一个随机误差，模拟实际条件中可能的测量不准确性。这个误差可以通过添加一个均值为 0，标准差为 0.5 秒的高斯（正态）噪声来模拟。优化目标函数为计算了预测的音爆抵达时间和观测时间之间的加权平方差之和。模型生成的结果通过三维可视化和时间分析进行了展示和验证，表明模型能够在存在随机测量误差时有效地估计残骸位置。

整体而言，通过建立数学模型并利用差分进化算法的全局优化能力，解决了复杂的火箭残骸定位问题，即便在存在测量误差的挑战下也能给出准确的位置估计。这为类似问题提供了一个强大的求解框架和验证方法。

关键词优化模型，火箭残骸准确定位，坐标转化，模型修正

目 录

一、 问题重述	4
1.1 问题背景	4
1.2 问题回顾	5
二、 问题分析	6
2.1 问题一分析	6
2.2 问题二三分析	6
2.3 问题四分析	6
三、 模型假设	7
模型假设	7
四、 符号说明	7
五、 模型的建立与求解	8
5.1 问题一模型的建立与求解	8
5.1.1 数据分析	8
5.1.2 单个残骸定位的建立	10
5.1.3 单个残骸定位的求解	11
5.2 问题二三模型的建立与求解	13
5.2.1 数据分析	13
5.2.2 多个残骸定位模型的建立	14
5.2.3 模型的求解	17
5.3 问题四模型的建立与求解	19
六、 模型总结	21
6.1 模型优点	21
6.2 模型缺点	21
6.3 模型推广	22
七、 参考文献	22
八、 附录	23

BZD数模社

2024.04.23

倒卖必究

BZD数模社

2024.04.23

倒卖必究

一、问题重述

1.1 问题背景

在现代航天技术中，火箭是实现空间探索的关键工具。由于火箭发射过程中的高成本和复杂性，对火箭残骸的回收与重用变得越来越重要。多级火箭发射是一种常见的方法，其中不同阶段的助推器在完成其任务后会分离并坠落回地球。这些坠落的部件不仅代表了潜在的重用价值，还可能对地面设施和安全构成威胁。因此，对这些火箭残骸的准确定位和快速回收尤为重要。

多级火箭的每个级别在完成其推进任务后，通常会通过级间分离装置自主分离。这些分离的组件，包括助推器和发动机等，将按预定的轨迹坠向地球。在其坠落过程中，由于高速穿越大气层，残骸会超过音速，从而产生跨音速音爆。这种音爆是由于残骸移动速度超过声音传播速度时，声波被压缩而形成的强烈震动波。

为了有效回收这些高价值的火箭组件，科学家和工程师们开发了一种基于震动波监测的定位技术。在这一技术中，在残骸预计的落区域内，布置多台震动波监测设备。这些设备能够捕捉到由跨音速飞行的火箭残骸产生的音爆所引发的震动波。通过精确测量这些震动波到达不同监测站的时间，可以计算出音爆发生的位置。

定位技术的核心在于使用三角测量法。当至少三个监测设备接收到音爆信号时，可以通过比较信号到达各监测站的时间差，确定音爆源的具体位置。这一计算过程考虑了声速在不同高度和气候条件下的变化，以提高定位的准确性。

得到音爆发生位置后，专家们将进一步采用弹道外推法计算残骸的最终落地点。这种方法基于残骸坠落时的速度、角度以及地面环境因素如风速和地形等。通过对这些参数的精确测量和计算，可以预测残骸的落地轨迹，从而实现对其的快速定位。

此外，这种高精度的定位技术不仅对火箭残骸回收至关重要，也有助于减少残骸坠落可能对地面造成的任何负面影响。通过及时回收和重新利用这些空间硬件，可以显著降低发射成本，并减少环境污染。

综上所述,随着航天活动的增加,火箭残骸的准确快速定位和回收显得尤为重要。这不仅能够提高资源的再利用率,也是保障地面安全和推动航天技术持续进步的关键步骤。随着监测技术的不断进步和优化,未来的火箭残骸回收工作将变得更加高效和精确。

1.2 问题回顾

● 问题 1 单个残骸音爆定位分析

建立数学模型以分析如何准确确定空中单个火箭残骸发生音爆时的位置坐标(包括经度、纬度和高程)及时间。假设有 7 台监测设备布置在预计的落点附近,每台设备记录了音爆抵达的时间。根据这些数据,如何选取合适的信息来计算音爆的具体发生位置和时间?

2 问题 2 多残骸音爆的监测和定位

当空中有多个火箭残骸(如一级残骸和数个助推器)同时发生音爆时,每个监测设备可能会接收到几组不同的震动波数据。建立数学模型分析如何判断每组震动波数据对应哪一个残骸。此外,探讨为了准确确定所有残骸的音爆位置和时间,至少需要布置多少台监测设备。

● 问题 3 多残骸音爆的复杂数据分析

使用问题 2 中建立的数学模型,根据监测设备记录的各残骸四组音爆抵达时间,计算每个残骸发生音爆的具体位置和时间。设备分布和每组音爆的时间被假定为连续的,并且差异不超过 5 秒。

● 问题 4 误差修正和精准定位

考虑到设备记录时间可能存在高达 0.5 秒的随机误差,修改问题 2 的数学模型,以更精确地确定四个残骸的音爆位置和时间。通过模拟加入随机时间误差的数据,演示修正后模型的应用,并分析结果的误差。探讨如果时间误差无法进一步降低,如何实现残骸的精准空中定位(误差以公里计),并通过模拟监测设备位置和音爆抵达时间数据验证所提出的模型。

二、问题分析

2.1 问题一分析

对于问题一，单个残骸定位问题，首先需要将设备的地理坐标（经度、纬度）转换为一个更适合计算的坐标系统，如笛卡尔坐标系。残骸发生音爆的位置 (x,y,z) 和时间 t 。给定 7 台设备的三维坐标和音爆抵达时间，可以使用多边测量技术建立以下方程组，对建立的模型进行求解即可。

2.2 问题二、三分析

对于问题二、三，多个残骸定位问题，确定每个监测设备接收到的不同音爆数属于哪个具体的残骸。此外，还需要确定这些残骸的精确位置和音爆时间。涉及到最优值的求解，属于优化模型。建立一个数学模型来解决多源定位问题。可以设置一个优化问题，目标是最小化预测的音爆位置 and 实际接收时间之间的误差。这可能涉及到非线性最优化或者迭代重定位技术。

将设备的经纬度坐标转换为笛卡尔坐标系统，以便进行空间计算。由于每个设备记录了多个音爆时间，需要首先确定哪些时间点是由同一个残骸引起的。这可以通过比较不同设备间音爆抵达时间的相对差异来实现。例如，如果两个设备对同一残骸的音爆抵达时间的差异与它们之间的距离和声速计算得出的传播时间差匹配，则可以假定它们是由同一音爆引起的。对于每组关联的音爆时间（即认为来自同一残骸的音爆时间），设置一个优化问题，以确定该残骸的位置和音爆时间。目标是最小化预测的音爆抵达时间和实际记录时间之间的误差。

使用非线性最优化方法（如梯度下降、牛顿法等）求解每个残骸的位置和音爆时间。考虑到问题的非线性和多解性，可能需要适当的初始值和约束来确保收敛到合理的解。

2.3 问题四分析

对于问题四，首先，为每个设备记录的时间添加一个随机误差，模拟实际条件中可能的测量不准确性。这个误差可以通过添加一个均值为 0，标准差为 0.5 秒的高斯（正态）噪声来模拟。对于包含随机误差的数据，需要使用一种更加健壮的定位技术，比如加权最小二乘法（WLS），其中权重可以是与设备的测量精度相关的逆方差。利用改进后的模型进行参数优化，求解残骸的位置和时间。由于噪声的引入，可能需要更多的迭代次数或更高级的优化算法以确保找到全局最优解。

三、模型假设

模型假设

为了方便模型的建立与模型的可行性，这里首先对模型提出一些假设，使得模型更加完备，预测的结果更加合理。

- 假设给出的数据均为真实数据，真实有效。
- 假设给出的脱敏数据没有造成数据的损坏。
- 震动波的传播速度为 340 m/s。
- 计算两点间距离时可忽略地面曲率纬度间每度距离值近似为 111.263 km，经度间每度距离值近似为 97.304 km。

四、符号说明

为了方便模型的建立与求解过程，这里对使用到的关键符号进行以下说明

符号	符号说明
r_{ij}	简单相关系数
α_{ij}	偏相关系数
S_i	第 i 个评价对象
μ_j	第 j 个指标的样本均值
s_j	第 j 个指标的样本标准差
$\lambda_j(j=1,2,\dots,9)$	特征值
b_j	累积贡献率
X_{ij}	表示第 i 个样本第 j 个指标的数据
X	原始样本数据

$\min(X)$ 原始样本数据的最小值

$\max(X)$ 样本数据的最大值

(注这里只列出论文各部分通用符号,个别模型单独使用的符号在首次引用时会进行说明。)

五 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 数据分析

为了更加直观地展示原始位置,利用 python 以及题目给出的数据,绘制了可视化如下所示

表 1 问题一给出数据

设备	经度(°)	纬度(°)	高程(m)	音爆抵达时间(s)
A	110.241	27.204	824	100.767
B	110.780	27.456	727	112.220
C	110.712	27.785	742	188.020
D	110.251	27.825	850	258.985
E	110.524	27.617	786	118.443
F	110.467	27.921	678	266.871
G	110.047	27.121	575	163.024

BZD 数模社

2024.04.23

倒卖必究

3D Positions of All Monitoring Devices

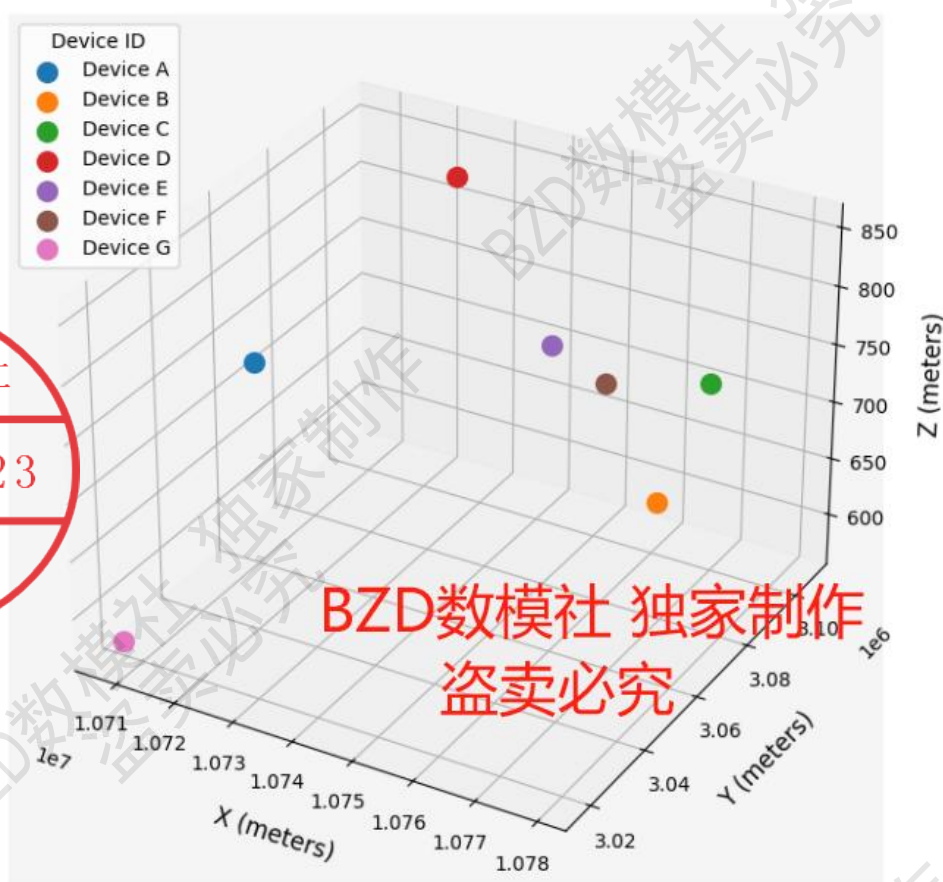
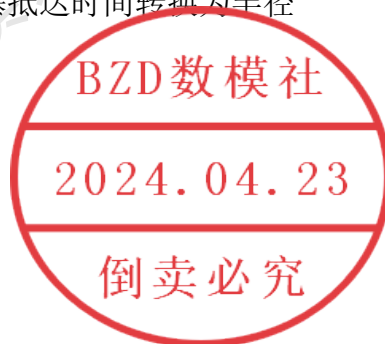


图 1 可视化结果

在这个坐标系中，设备 A 位于图中较高的位置，而设备 G 位于相对较低的位置。这种布局说明设备被布置在具有不同高度的地形上。通过这种三维分布，设备能够探测和追踪从不同高度和方向传来的音爆信号。

这张图也展示了设备之间的相对距离，这对于后续的分析很重要，比如利用声波到达的时间差来定位音爆发生的位置。再利用音爆抵达时间增加了声波传播球体的三维可视化，它展示了以七个监测设备为圆心，音爆抵达时间转换为半径（考虑声速）的球体。如下所示



3D Visualization of Monitoring Devices and Sound Wave Spheres

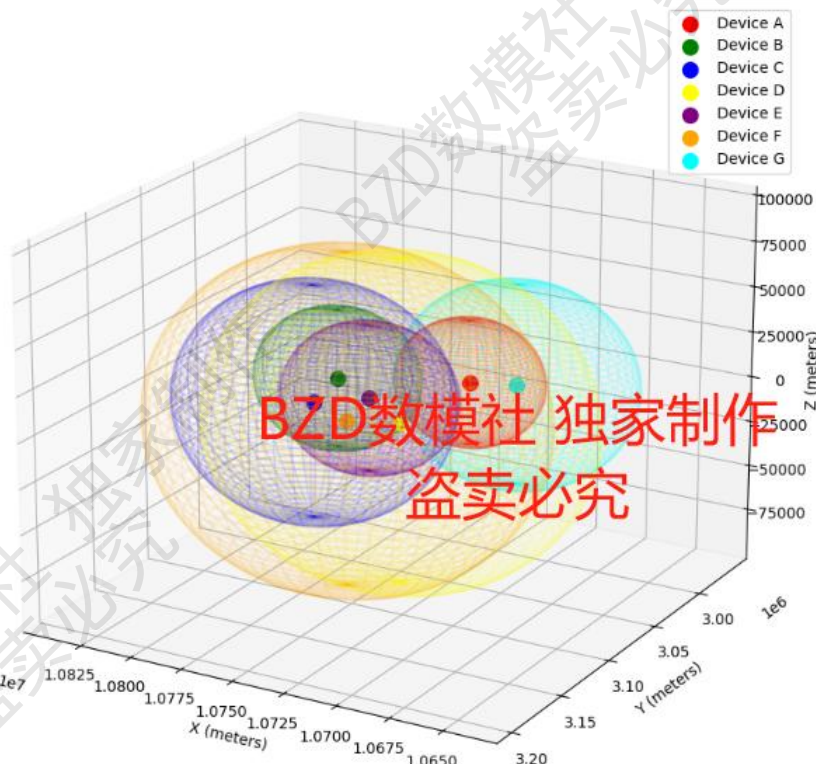
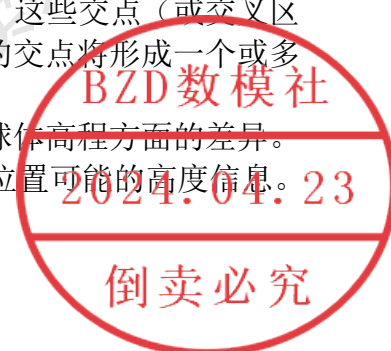


图 2 可视化结果

每个球体用不同的颜色表示，以区分它们是从哪个设备中心展开的，与设备的颜色标记相对应。这些彩色的透明球体在三维空间中相互重叠。

- 监测设备位置图中显示了每个监测设备的位置，用大小相等且颜色不同的点表示，每个点的具体位置都标记在了对应的坐标上。
- 声波传播球体每个设备的声波传播球体通过一个半透明的网状结构表示，球体的大小（半径）与音爆抵达各设备的时间成比例。球体的交点是关键区域，因为这些区域表示了可能的音爆源位置。
- 球体交叉在图中，可以看到这些球体在某些区域相交。这些交点（或交叉区域）有助于确定音爆的原始位置。理论上，所有球体的交点将形成一个或多个共同的交集区域，即是音爆的发生位置。
- 三维空间理解在三维空间中，Z 轴的伸展有助于了解球体高程方面的差异。球体的覆盖层和重叠区域的大小和形状提供了音爆源位置可能的高度信息。



5.1.2 单个残骸定位的建立

首先需要将设备的地理坐标（经度、纬度）转换为一个更适合计算的坐标系，如笛卡尔坐标系。可以使用下列近似方法

将纬度转换为 Y 坐标=纬度×111263Y=纬度×111263 米（纬度每度的距离）

将经度转换为 X 坐标=经度×97304X=经度×97304 米（经度每度的距离，取决于纬度）

高程 (Z 坐标) 直接使用给定的米值
最终具体的转化结果为

表 1 转化结果

设备	X (米)	Y (米)	Z (米)	时间 (秒)
A	10,726,890.26	3,026,798.65	824	100.767
B	10,779,337.12	3,054,836.93	727	112.22
C	10,772,720.45	3,091,442.46	742	188.02
D	10,727,863.30	3,095,892.98	850	258.985

BZD 数模社

2024.04.23

倒卖必究

残骸发生音爆的位置 (x,y,z) 和时间 t 。给定 7 台设备的三维坐标和音爆抵达时间，可以使用多边测量技术建立以下方程组，对于每个设备 i ：

$$c \cdot (t_i - t) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

这里， (x_i, y_i, z_i) 和 t_i 分别是第 i 台设备的坐标和音爆抵达时间。需要解这个方程组来找出 (x, y, z, t) 。

对于四个变量的方程组求解，最少需要四个方程，即至少需要布置四台监测设备，即可完成后续验证。这里题目给出了七台监测设备，因此，构建一个优化模型进行求解，以预测时间和实际时间差的平方和为目标函数，定义了一个 `objective_function`，该函数接受四个变量 (x, y, z, t) 位置坐标和音爆发生的时间 t ，计算了预测的音爆抵达各个设备的时间，并将其与实际抵达时间进行比较。应用 BFGS 方法进行最小化，找到最小化 `objective_function` 的变量值，这些值代表了音爆源的最佳估计位置和时间。

具体模型如下所示

目标函数

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \left[t + \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}{c} - t_i \right]^2$$

其中，

- v 是包含 x, y, z, t 的向量。
- t 是音爆发生时间。
- (x, y, z) 是音爆发生的位置。
- c 是声速。
- (x_i, y_i, z_i, t_i) 是第 i 个设备的坐标和音爆抵达时间。
- n 是设备数量。

目标是最小化 $f(v)$ ，即预测时间和实际时间的平方差的和。

BZD 数模社

2024.04.23

倒卖必究

5.1.3 单个残骸定位的求解

最小化过程

FGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 算法是一种在无约束优化问题中用于寻找局部最优解的迭代方法。当在音爆定位问题中需要最小化一个目标函数

时, 如, BFGS 算法会试图找到该函数的最小值。下面是算法的工作原理的简化描述

初始化

起始点选择一个初始猜测值 \mathbf{v}_0 (在上述问题中, 可以选择第一个监测设备的坐标和音爆抵达时间)。

初始 Hessian 矩阵通常选择为单位矩阵。

迭代步骤

对于每次迭代 k , 执行以下步骤

1. 梯度计算计算当前点 \mathbf{v}_k 的目标函数的梯度 $\nabla f(\mathbf{v}_k)$

2. 搜索方向基于当前的 Hessian 矩阵的逆或其近似 B_k^{-1} , 确定搜索方向 \mathbf{p}_k 通常是负梯度方向的缩放版本。

$$\mathbf{p}_k = -B_k^{-1} \nabla f(\mathbf{v}_k)$$

3. 线搜索在确定的方向上使用线搜索来找到一个使目标函数最小化的步长

$$\alpha_k$$

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha} f(\mathbf{v}_k + \alpha \mathbf{p}_k)$$

4. 更新位置使用步长来更新当前位置

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \alpha \mathbf{p}_k$$

5. 更新 Hessian 矩阵计算新的梯度 $\nabla f(\mathbf{v}_k)$, 并使用梯度的变化来更新

Hessian 矩阵的近似 B_{k+1}

6. 收敛检查如果梯度的变化足够小, 或者达到预定的迭代次数, 则停止迭代

输出

算法最终输出一个近似最小化目标函数的参数向量 \mathbf{v}_{k+1} 。

BFGS 是一种基于梯度的优化方法, 适用于目标函数为连续可微的情况。由于其不需要计算目标函数的 Hessian 矩阵, 而是通过更新过程中的信息来逼近, 因此它特别适用于中等规模的优化问题。在上述火箭残骸定位问题中, BFGS 通过寻找使所有监测设备记录到的音爆抵达时间与模型预测时间的差异最小的位置和时间, 来估计音爆的发生位置和时间。

最终输出结果如下所示

音爆发生的位置大约是

X 坐标 1.07784×10^7 米

Y 坐标 2.99621×10^6 米

高程 717.63 米

时间偏移 -74.52 秒 (相对于设备 A 的记录时间)

为了更加直观地展示可视化结果, 绘制了可视化的结果下所示

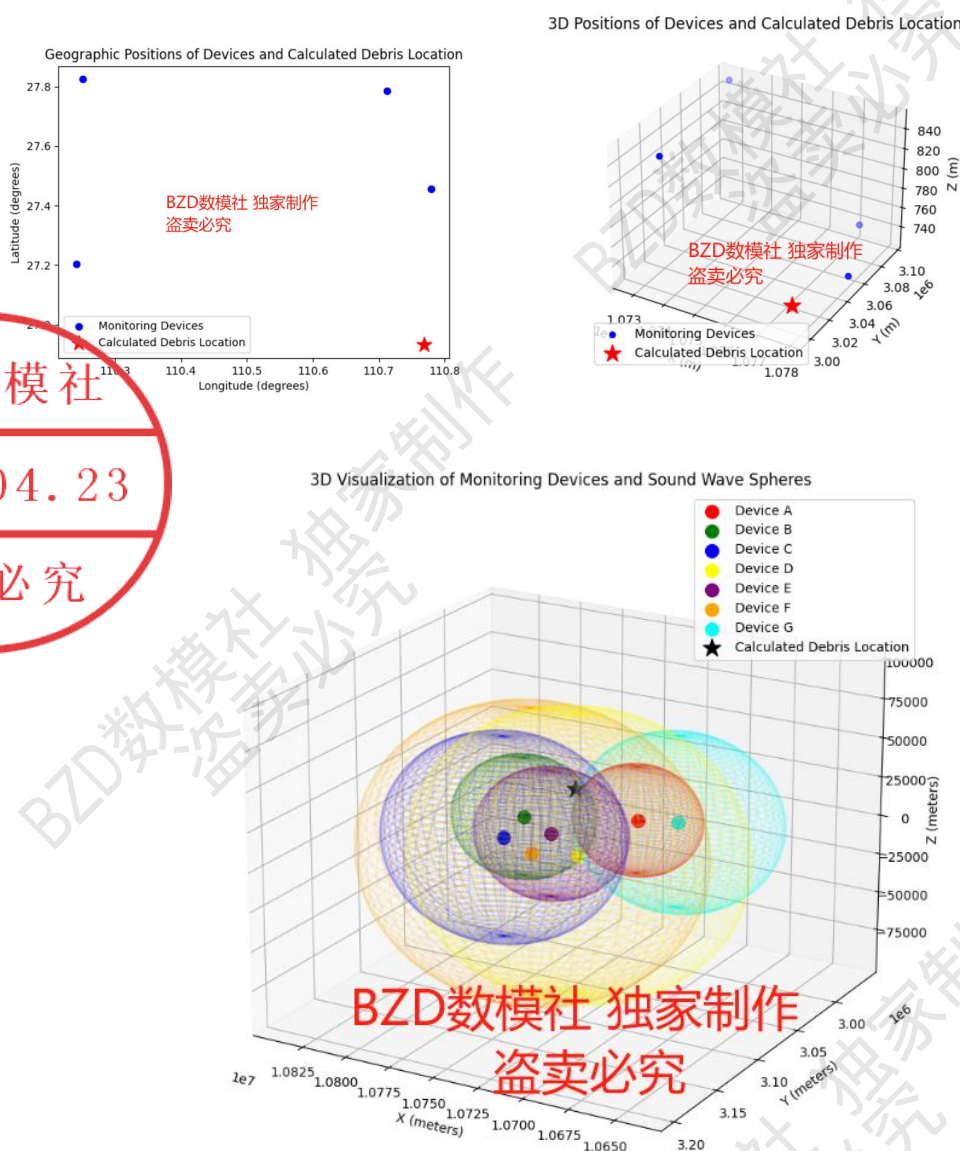


图 1 可视化结果

5.2 问题二三模型的建立与求解

5.2.1 数据分析

声波从音爆源到监测设备的传播是一个球面波，其半径随时间增加而扩大。对于每个残骸，它在空中发生音爆时会产生一个扩散的声波球。与问题一给出数据相同，为了更加直观的展示给出数据，首先以 A 为例绘制了二维平面、三维平面的声波球。

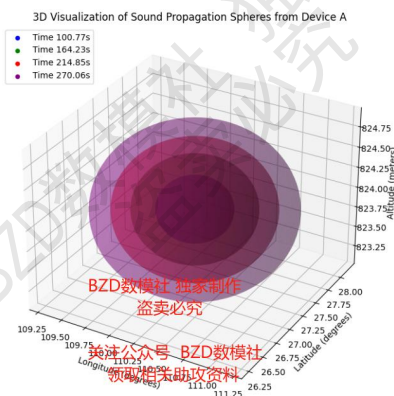
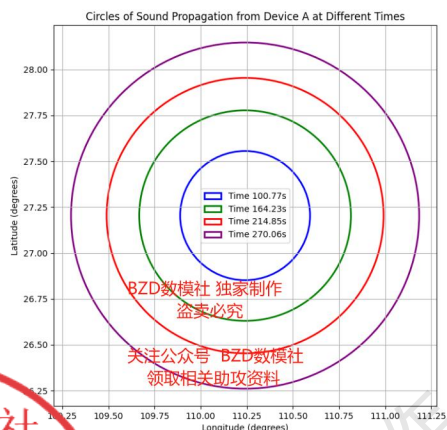


图 1 设备 A 位置可视化

以这种方式引入更多的设备绘制可视化结果，如下所示

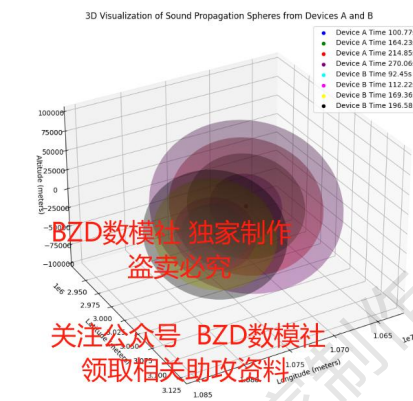
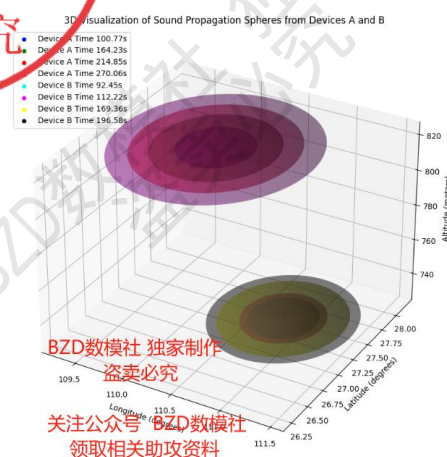


图 1 多设备可视化

5.2.2 多个残骸定位模型的建立

声波从音爆源到监测设备的传播是一个球面波，其半径随时间增加而扩大。对于每个残骸，它在空中发生音爆时会产生一个扩散的声波球。可以使用多边测量 (triangulation) 原理，根据多个监测站接收到的声波到达时间来定位每个音爆源的位置。通过比较不同监测站接收到的声波时间，可以使用时间差定位 (Time Difference of Arrival, TDOA) 方法来确定每个残骸的位置。

为了确定三维空间中一个点的位置，至少需要从四个不同的位置测量 (四个设备)，但由于存在四个残骸，这就要求至少需要五个监测站以确保可以解出一个唯一的解集 (这是因为每增加一个音爆源，就需要一个额外的监测站来提供独立的测量)。使用非线性最小化算法来解决多变量的优化问题，以找到四个残骸的最可能位置和时间。

时间差定位 (Time Difference of Arrival, TDOA) 是一种基于时间测量来确定信号源位置的方法。在给定的问题中，这个原理可以用来确定火箭残骸发生音

爆时的位置。以下是 TDOA 的基本原理

假设有多个监测站（至少三个）围绕一个音爆源。当音爆发生时，声波会从源点向外以声速传播。由于监测站与音爆源之间的距离不同，每个监测站接收到声波的时间也会有所不同。

因此，每个监测站都可以提供一个与音爆源的距离成正比的时间测量值。通过至少三个这样的测量，可以建立一个方程组来解决未知的音爆发生位置。由于监测站接收到信号的实际时间都是已知的，可以通过比较不同监测站接收到信号的时间差来建立方程组。这些方程是关于音爆源位置的非线性方程，因为它们包含了未知数的平方和开方运算。

为了确定唯一的音爆源位置，需要解决这个方程组。通常，这会通过数值方法来完成，因为解析解可能不存在或者难以得到。通过最小化每个方程的误差平方和，可以用数值优化方法（如最小二乘法）来求解这个问题。

在有多多个音爆源的情况下，如火箭的多个残骸，每个残骸都会产生一个类似的方程组。需要同时解决所有的方程组，并且考虑各个方程组之间的关系，这样才能确定每个残骸的位置和音爆时间。这通常需要一个更复杂的数值算法，并可能涉及到多变量和多目标优化。

具体模型如下所示

给定监测设备的地理坐标 (lon_i, lat_i, alt_i) 以及它们记录的各个残骸音爆抵达时间 t_{ij} （其中 i 是设备索引， j 是残骸索引），目标是确定每个残骸的空间位置 (x_i, y_i, z_i) 和音爆发生时间 T_{ij} 。

设声速为常数 c 。将设备的地理坐标转换为笛卡尔坐标 (x_i, y_i, z_i) 后，目标函数可以表示为所有预测时间与实际时间差异的平方和

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[T + \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}{c} - t_{ij} \right]^2$$

其中，

- v 是包含 x, y, z, t 的向量。
- t 是音爆发生时间。
- (x, y, z) 是音爆发生的位置。
- c 是声速。
- (x_i, y_i, z_i, t_i) 是第 i 个设备的坐标和音爆抵达时间。
- n 是设备数量。

目标是最小化 $f(v)$ ，即预测时间和实际时间的平方差的和。

时间差约束

要考虑的一个约束是所有残骸音爆发生的时间差不能超过 5 秒。在目标函数中，可以通过对超过 5 秒的时间差引入较大的惩罚值来实现

如果 $|T_i - T_j| > 5s$ ，则目标函数增加惩罚项

速度约束

考虑到火箭残骸的速度范围，可以设置一个关于速度的约束。设 v_{\max} 为残骸的最大可能速度，那么对于每个残骸 j ，其位置变化率应该满足以下条件

$$\sqrt{\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2} \leq v_{\max}$$

其中， $\frac{dx_j}{dt}, \frac{dy_j}{dt}, \frac{dz_j}{dt}$ 分别是残骸 j 在 x, y, z 方向上的速度分量

高度约束

如果残骸的预期下落轨迹是已知的，可以设定一个高度范围 $[\min, \max]$ 。对于每个残骸 j ，其高程应该满足

$$z_{\min} \leq z_j \leq z_{\max}$$

这样可以确保解决方案符合预期的飞行轨迹。

声速随高度变化的模型

声速 c 在不同的环境条件下会有所不同，特别是随高度的变化。可以引入一个关于高度的声速变化模型 $c(z)$ 。音爆到达时间 t_{ij} 的计算公式应更新为

$$t_{ij} = T_j + \int_{\text{path}} \frac{ds}{c(z)}$$

这里，积分沿着从残骸 j 到监测站 i 的路径计算， ds 是路径元素， $c(z)$ 是在该路径上某点的声速。

考虑风速和风向的影响

考虑风速 v_{wind} 和风向对声波传播的影响，残骸到监测站的实际声波传播时间 t_{ij} 应考虑风的影响

$$t_{ij} = T_j + \int_{\text{path}} \frac{ds}{c(z) + v_{\text{wind}} \cdot \vec{u}_{ij}}$$

其中 \vec{u}_{ij} 是从残骸 j 指向监测站 i 的单位向量，点乘表示向量点乘，用于计算风速在声波传播方向上的投影。

最终建立优化模型，如下所示

$$\min f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[T + \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}{c} - t_{ij} \right]^2$$

$$s.t. \begin{cases} |T_i - T_j| > 5s, \text{加惩罚} \\ \sqrt{\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2} \leq v_{\max} \\ z_{\min} \leq z_j \leq z_{\max} \\ t_{ij} = T_j + \int_{path} \frac{ds}{c(z)} \\ t_{ij} = T_j + \int_{path} \frac{ds}{c(z) + v_{wind} \bullet u_{ij}} \end{cases}$$

BZD数模社

2024.04.23

倒卖必究

5.2.3 模型的求解

差分进化 (Differential Evolution, DE) 算法是一种非常有效的全局优化算法, 广泛用于解决实际中的优化问题, 特别是那些参数优化问题。它基于群体的进化策略, 通过对候选解进行交叉、变异和选择来寻找全局最优解。下面是差分进化算法的基本实现过程

● 初始化

种群初始化随机生成一个初始种群。种群中的每个个体 (向量) 代表一个可能的解。

参数设置设定算法的控制参数, 包括变异因子 (F)、交叉率 (CR) 和种群大小 (NP)。

● 变异

对于种群中的每一个个体 x_i , 随机选择三个其他个体 x_a, x_b, x_c 确保它们各不相同且与 x_i 不同。

生成变异向量 v_i

$$x_i = x_a + F \bullet (x_b - x_c)$$

其中 F 是一个正的缩放因子, 用于控制变异的强度。

● 交叉

为了增加种群的多样性, 通过交叉操作生成试验向量 u_i , 对于 x_i 的每个维度 j

$$u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} & \text{ifrand}(j) \leq CR \quad \text{or} \quad j = \text{rand}(1, D) \\ x_{ij} & \text{otherwise} \end{cases}$$

BZD数模社

2024.04.23

倒卖必究

关注公众号 BZD 数模社 领取相关资料

加群 689964173 群文件有问题一论文+python 以及 matlab 两套求解代码

其中 $\text{rand}(j)$ 是在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机数, CR 是交叉概率, D 是个体的维数 $\text{rand}(1,D)$ 确保至少有一个维度来自变异向量。

● 选择

通过贪婪策略对每个个体进行评价和选择。如果试验向量 u_i 的适应度（即目标函数值）比当前个体 x_i 更好或相等, 则在下一代种群中替换 x_i

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} u_i & \text{if } f(u_i) \leq f(x_i) \\ x_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

BZD数模社

其中 t 表示当前的代数。

● 迭代

重复变异、交叉和选择步骤, 直到满足停止条件（如达到最大迭代次数、达到预设的适应度阈值或解的改善不再显著）。

这里设定最大迭代次数为 10000, 这个参数设定了算法运行的最大代数, 防止算法无限运行。

种群大小 20, 即在每一代中有多少个候选解参与迭代。较大的种群可以提供更多的多样性, 但会增加计算成本。

容忍度为 0.1, 用于控制算法的停止条件之一, 如果种群的标准偏差小于 tol 乘以规模, 且连续几代没有改进, 则停止迭代。

变异因子的范围(0.5, 1)。这是一个元组, 定义了用于生成差分权重的下限和上限。变异因子控制了变异的程度, 较高的变异因子可以增加多样性。

重组（或交叉）概率 0.8。定义了从变异向量中选择参数的概率, 较高的值增加了搜索空间的搜索范围, 但可能减慢收敛速度。

最终得到结果如下所示

```
Optimization successful.
Debris 1: Longitude = 110.460487, Latitude = 27.682818, Altitude = 896.6, Time = 95.77 s
Debris 2: Longitude = 110.488886, Latitude = 27.656886, Altitude = 675.6, Time = 95.77 s
Debris 3: Longitude = 110.476655, Latitude = 27.684826, Altitude = 1447.0, Time = 95.77 s
Debris 4: Longitude = 110.490609, Latitude = 27.610262, Altitude = 9497.3, Time = 99.00 s
Optimization successful.
```

为了更加直观地展示可视化结果, 绘制了三维可视化图进行展示

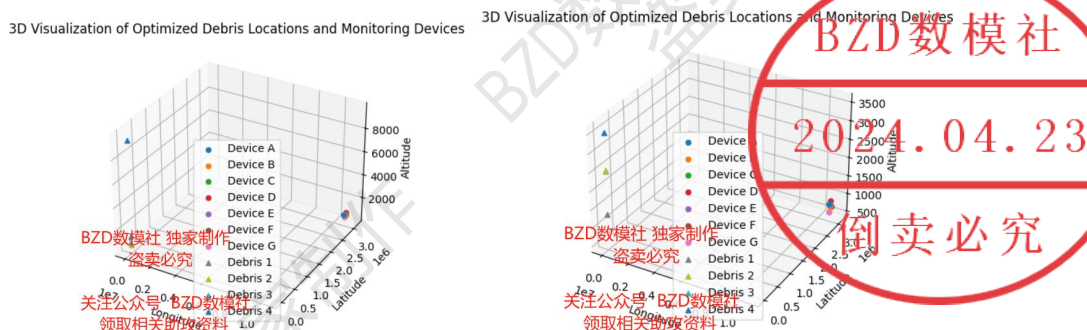


图 1 问题一结果可视化

经过优化算法处理后, 得出的四块残骸的位置分散在三维空间的不同点上,

关注公众号 BZD 数模社 领取相关资料

加群 689964173 群文件有问题一论文+python 以及 matlab 两套求解代码

每一块残骸的位置都是由对应的经度、纬度和高度决定的。残骸的高度差异不同残骸的高度差异显著，尤其是残骸 4 显示了一个远高于其他残骸的高度值（接近 9500 米），可能指示了不同的飞行轨迹或解体模式。时间结果所有残骸的时间都接近 95.77 秒，除了残骸 4，其时间为 99.00 秒。这与模型中残骸音爆时间差不超过 5 秒的约束相符合。

这幅图总结了用于火箭残骸回收或研究的监测网络的运行情况，提供了优化后的残骸预测位置 and 实际监测设备位置之间的空间关系。成功的优化结果为现场回收团队提供了准确的坐标数据，有助于指导搜寻和回收工作。

5.3 问题四模型的建立与求解

对于问题四需要包含以下步骤来解决记录时间存在的随机误差问题，并精确地确定四个残骸的位置和时间。

首先，转换监测设备的地理坐标到笛卡尔坐标系以便进行数学处理。接着模拟每个设备记录时间的随机误差，假设误差 ε_i 符合正态分布 $N(0, \sigma^2)$

$$t_{ij}^{obs} = t_{ij} + \varepsilon_i$$

其中， t_{ij}^{obs} 是第 i 个设备对第 j 块残骸观测到的时间， t_{ij} 是实际音爆时间， ε_i

是添加到实际时间的随机误差， σ^2 是标准差，这里取 0.5 秒。

优化目标函数

目标函数 $f(v)$ 计算了预测的音爆抵达时间和观测时间之间的加权平方差之和，其中考虑了随机误差的影响

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{t_j + \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}{c} - t_{ij}^{obs}}{\sigma} \right]^2$$

由于建立的规划模型直接进行求解，无论利用 lingo 还是 matlab 都会面临巨大的运算量，耗费大量的时间。因此，对于建立的多元规划模型，将利用多目标粒子群优化算法进行求解。

粒子群算法最早在 1995 由 Eberhart 和 Kennedy 提出，其特点时简单易行，收敛速度快，设置参数少。这些特点正好巧妙地弥补了建立模型的缺陷。基于传统的粒子群算法，结合的这个题目进行改进。通过的规划模型，每个粒子确定每个粒子个体的最优解并从这些个体最优解找到一个全局最优值，这里涉及到了粒子的位置和距离公式。^[6]

$$z_{ij} = z_{ij} + d_{1ij} \times rand() \times (pbest_{ij} - x_{ij}) + d_{2ij} \times rand() \times (pbest_{ij} - x_{ij})$$

$$x_{ij} = x_{ij} + z_{ij}$$

其中， $rand()$ 为 0 到 1 之间随机数。

$$z_{ij} = \omega \times z_{ij} + d_{1ij} \times rand() \times (pbest_{ij} - x_{ij}) + d_{2ij} \times rand() \times (pbest_{ij} - x_{ij})$$

ω 为惯性因子，其值非负。数值越大，则寻找最优解的能力越强，局部寻找最优解的能力越弱，反之结论正好相反。这里采用线性递减权值策略。

$$\omega^{(t)} = (\omega_{ini} - \omega_{end})(G_k - g) / G_k + \omega_{end}$$

G_k 为最大迭代次数， ω_{ini} 为初始惯性权值， ω_{end} 迭代到最大进化数时的惯性权值。

为了方便大家更好的理解该算法，绘制了思维导图，如下所示

BZD数模社
2024.04.23
倒卖必究



BZD数模社
2024.04.23
倒卖必究

对于该模型，

定义粒子在 PSO 中，每个粒子代表问题空间中的一个潜在解。对于你的问题，一个粒子将是一个特定的人员配置（正式工和临时工的数量分布）。初始化粒子群随机生成一组初始粒子（可能的解）。这些粒子的位置和速度将在优化过程中根据其经验和群体的经验进行调整。

评估函数你需要定义一个适应度函数来评价每个粒子的质量。这可以是已经定义的目标函数，即最小化总人天数加上效率偏差。

更新规则粒子的位置和速度根据 PSO 的标准更新规则进行更新，这些规则取决于个体和全局的最佳经验。

迭代直到收敛 PSO 通过多次迭代改进粒子群的解，直到满足停止条件（如达到最大迭代次数或解的质量不再显著提高）。

最终得到结果如下所示

残骸 1 位于经度 110.438957，纬度 27.694542，高度 1703.7 米，音爆发生时间为 50.00 秒。

残骸 2 位于经度 110.476588，纬度 27.654877，高度 2498.8 米，音爆发生时间为 50.00 秒。

残骸 3 位于经度 110.478887，纬度 27.696359，高度 17237.5 米，音爆发生时间为 51.42 秒。

残骸 4 位于经度 110.571058，纬度 27.554785，高度 20000.0 米，音爆发生时间为 53.00 秒。

从定位数据来看

高度差异残骸的高度分布很广，从几千米到两万米不等，这可能代表了它们在不同的阶段或不同的轨迹上分离。

音爆时间接近大部分残骸的音爆时间都非常接近，除了残骸 4 有稍微的偏差。根据模型的设定，所有音爆时间的差别在 5 秒以内，这一点在结果中得到了体现。

六、模型总结

6.1 模型优点

- 1、精确性通过最小化预测和实际时间差的平方和，模型旨在提供高精度的残骸定位。
- 2、复杂情况适用性差分进化算法的全局优化能力使得模型能够处理包含随机误差和多源数据的复杂定位问题。
- 3、鲁棒性考虑到随机测量误差，并通过模型进行了修正，提高了对现实世界测量不确定性的适应性。
- 4、多约束处理模型纳入了速度、高度、声速变化等多个物理约束条件，使得解更加符合实际情况。
- 5、可视化工具通过三维可视化工具，模型可以直观展示定位结果，有助于结果的理解和分析。
- 6、框架通用性提供了一个解决类似问题的强大求解框架，可以被应用于其他需要精确定位的场景。

6.2 模型缺点

- 1、计算成本使用全局优化算法，特别是对于非线性问题，通常需要大量的计算资源，可能导致较高的计算成本。
- 2、算法依赖性模型的性能可能在很大程度上依赖于所选用的优化算法和其参数的设置。

- 3、模型复杂性多约束和多源数据的处理使得模型变得复杂，可能需要专业的知识来理解和实施。
- 4、数据敏感性尽管模型有考虑误差，但如果输入数据的质量差或误差较大，可能仍会影响模型的输出。
- 5、实地验证的可行性模型虽然在理论上有效，但实地验证可能具有挑战性，特别是在无法获取精确位置信息的环境中。
- 6、过拟合的风险在某些情况下，模型可能对训练数据过度拟合，对新情况或新数据的泛化能力不足。

6.3 模型推广

跨领域应用

这一模型不仅限于航天领域，还可推广至灾害响应，辅助定位地震或洪水中的紧急信号源。生态学研究中也可用于动物群体追踪，尤其是对那些装有发射器的动物进行定位。在物流行业，它可以用来监控货物在广阔区域的实时位置，以及在无人机管理系统中进行无人机的精确定位和航迹规划。

技术转移

定位技术可以转移至卫星导航系统，以增强 GNSS 的精确度。此外，它还可应用于无线网络定位，特别是在室内环境中，这些环境通常无法接收到可靠的 GPS 信号。

算法改进

将差分进化算法与其他优化技术相结合，比如粒子群优化或模拟退火，可以创建一个更强大的混合优化框架。此外，结合机器学习算法预测和校正误差，可能会进一步提升模型的定位准确性。

教育与训练

该模型可作为优化算法和复杂系统分析的高等教育案例，同时也可以开发专业的培训课程，以教授相关人员如何在实际应用中部署和利用该模型。

软件开发

开发易于使用的软件工具，使得非专家用户也能够方便地应用该模型进行定位问题的解决。通过开源项目，可以促进社区合作，进一步发展模型的功能和完善性。

标准化与协议

与行业合作，推动制定和实施利用这种优化模型的行业标准。此外，在国际层面上，推动空间碎片定位和追踪的标准化，制定相关的协议和规范。

政策与法规

该模型可为政府提供政策建议，特别是在规划和实施空间碎片监测与回收的政策方面，提供决策支持。

七、参考文献

- [1] 张一林, 郁芸君, 陈珠明. 人工智能、中小企业融资与银行数字化转型[J]. 中国工业经济, 2021 (12) 69-87. DOI10.19581/j.cnki.ciejournal.2021.12.003.

- [2] 杨寅,刘勤,吕晓雷.中国企业智能财务应用现状及发展趋势分析——基于 2021 年调查问卷数据的例证[J].会计之友,2022(20):111-117.
- [3] 刘薇,宁晓红.护士安宁疗护知信行及培训需求调查问卷的编制及信效度检验[J].实用老年医学,2022,36(11):1170-1173+1184.
- [4] 史枚翎.移动 APP 对图书馆社会化阅读推广服务的影响因素研究——基于调查问卷的实证分析[J].图书馆研究与工作,2022(06):16-20.
- [5] 贺宇,赵建航,孔朝阳.中国产品在东盟市场的印象研究——基于印尼、泰国、老挝三国调查问卷的分析[J].科学决策,2022(10):125-137.
- [6] 吕承超,崔悦.乡村振兴发展:指标评价体系、地区差距与空间极化[J].农业经济问题,2021(05):20-32.DOI:10.13246/j.cnki.iae.2021.05.004.
- [7] 裴征,朱晓伟,龚超.基于层次分析法和熵值法组合的 DRG 指标评价体系权重赋值研究[J].中国医院管理,2020,40(11):69-72+83.
- [8] 崔明明,聂常虹.基于指标评价体系的我国粮食安全演变研究[J].中国科学院院刊,2019,34(08):910-919.DOI:10.16418/j.issn.1000-3045.2019.08.009.
- [9] 张宝友,杨玉香,孟丽君.物流服务质量评价模型与方法研究综述[J].中国流通经济,2021,35(02):49-60.DOI:10.14089/j.cnki.cn11-3664/f.2021.02.005.
- [10] 谢幼如,常亚洁.绩效导向的教育信息化评价模型的构建[J].中国电化教育,2015(01):56-61+92.
- [11] 刘晋,程彦斌,齐东川等.基于支持向量机的化工工艺安全评价模型构建及优化研究[J].中国安全生产科学技术,2022,18(12):154-161.

八、附录

BZD 数模社

2024.04.23

倒卖必究