Лабораторная работа 2.
Задание 3 - приведение поверхности второго порядка к каноническому виду.

Задание

1. Для заданной уравнением фигуры: упростить, привести к каноническому виду.
2. Построить исходную фигуру и упрощенную.
3. Собственные вектора и числа получать вручную, сравнить с результатом встроенных функций.

Вариант 1
$$f = 7 * x^2 + 8 * x * y + 3 * y^2 + 8 * x * z + 6 * y * z + 3 * z^2 + 6 * x + y + 7$$

Построение исходной поверхности

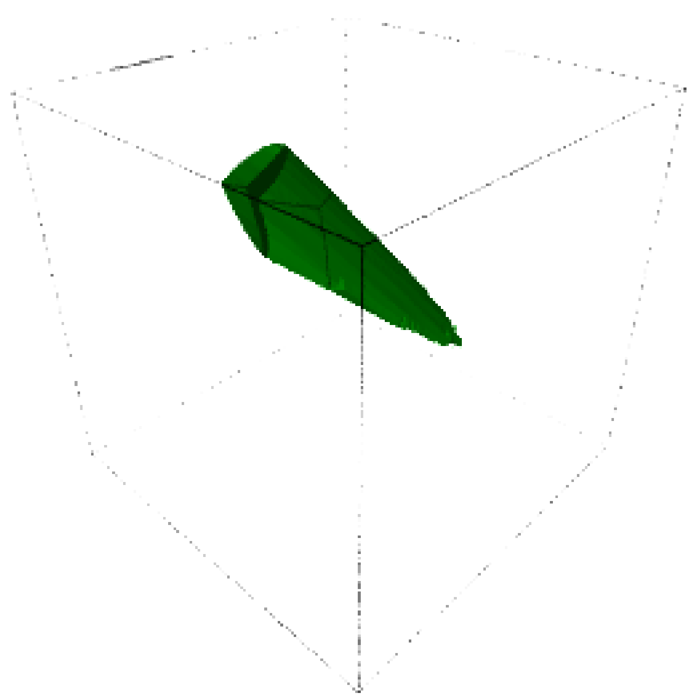
Функция:

```
f(x, y, z) = 7*x**2 + 8*x*y + 3*y**2 + 8*x*z + 6*y*z + 3*z**2 + 6*x + y + 7
```

Выведем ее:

$$7\,x^2 + 8\,xy + 3\,y^2 + 8\,xz + 6\,yz + 3\,z^2 + 6\,x + y + 7$$

Построим ее график:



Приведем поверхность к каноническому виду

Для приведения поверхности к каноническому виду надо сначала вычислить ортогональные инварианты.

Пусть общее уравнение поверхности второго порядка будет выгялдеть так:

$$a_{11} * x^2 + a_{22} * y^2 + a_{33} * z^2 + 2 * a_{12} * xy + 2 * a_{13} * xz + 2 * a23 * yz + 2 * a_1 * x + 2 * a_2 * y + 2 * a_3 * z + a_0 = 0$$

Тогда:

$$\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{delta} = det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{Delta} = det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}$$

Составим матрицу A для квадратичной формы и матрицу B, состоящую из коэффициентов квадратичной формы, линейной формы и свободного члена a_0:

```
A = matrix([
    [7, 4, 4],
    [4, 3, 3],
    [4, 3, 3]
])
B = matrix([
    [7, 4, 4, 3],
    [4, 3, 3, 0.5],
    [4, 3, 3, 0],
    [3, 0.5, 0, 7]
])
```

Найдем инварианты:

```
tau1 = A.trace()
tau2 = A[0:2, 0:2].det() + A[[0, 2], [0, 2]].det() + A[1:3, 1:3].det()
delta = A.det()
Delta = B.det()
```

Получили следующие результаты:

$$tau1 = 13$$

$$tau2 = 10$$

$$delta = 0$$

$$Delta = -1.25000000000000$$

По вычисленным ортогональным инвариантам определяем **тип поверхности - эллиптический параболоид**.

У элептического параболоида каноническое уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 * z$$

```
lam(l) = A.charpoly(var='l')
roots = []
for i in solve(lam(l)==0, l):
    roots.append(i.rhs())
```

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{129} + \frac{13}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{129} + \frac{13}{2}$$

$$\lambda_3 = 0$$

В численном виде:

$$\lambda_1 = 0.821091654199726$$

$$\lambda_2 = 12.1789083458003$$

$$\lambda_3 = 0.000000000000000$$

Теперь найдем собственные значения через встроенную функцию.

```
A.eigenvalues()
```

Получили:

$$0$$

$$0.821091654199727?$$

$$12.17890834580028?$$

Результаты вычисления собственных значений совпали.
Теперь вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

```
a = n(sqrt(-Delta/(roots[0]**2 * tau2)))
b = n(sqrt(-Delta/(roots[1]**2 * tau2)))

canonical(x1, y1, z1) = x1**2/a + y1**2/b - 2*z1
```

$$2.32239790664123\, x_1^2 + 34.4471547150592\, y_1^2 - 2\, z_1$$

Построим график упрощённой функции: