



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

LITERATURE READING

Lyapunov-stable neural-network control

Hongkai Dai, Benoit Landry, Lujie Yang, Marco Pavone, and Russ Tedrake

Robotics: Science and Systems (RSS) 2021

Jinjie LI

School of Automation Science and Electrical Engineering
Beihang University

October 16, 2021





目录

- 背景
- 挑战
- 方法
- 结果
- 总结
- 推荐

背景



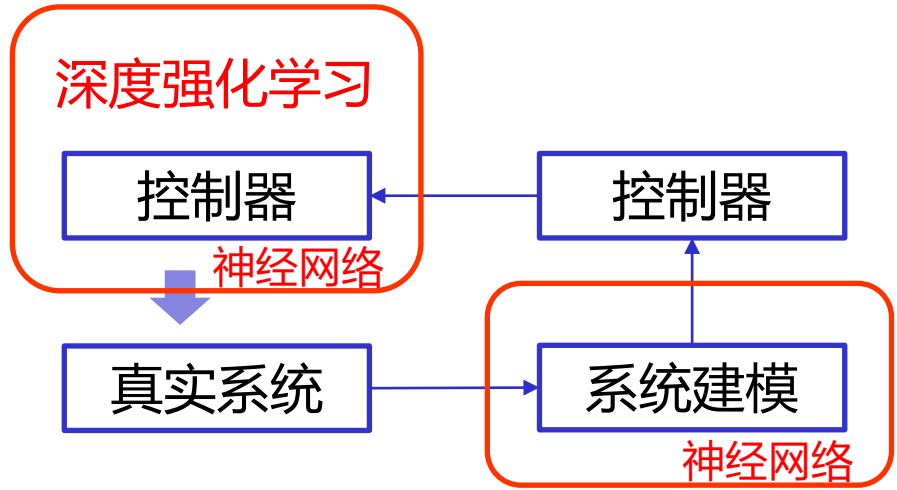
Hwangbo et al., 2017



Lee et al., 2020



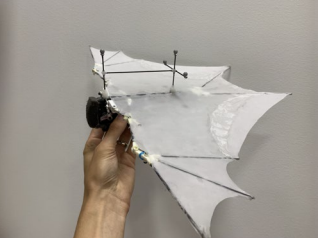
Finn et al., 2016



Kabzan et al., 2021



Torrente et al., 2021



Hoff et al., 2021



□ Q: 神经网络可否被应用于航空航天领域?

安全性

□ Q: 神经网络可否被应用于航空航天领域?

系统的安全性 = 工程意义下的稳定

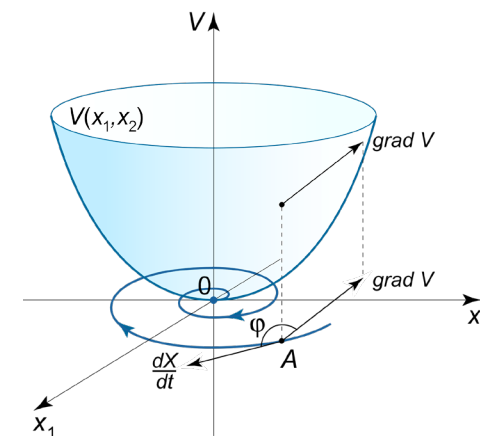
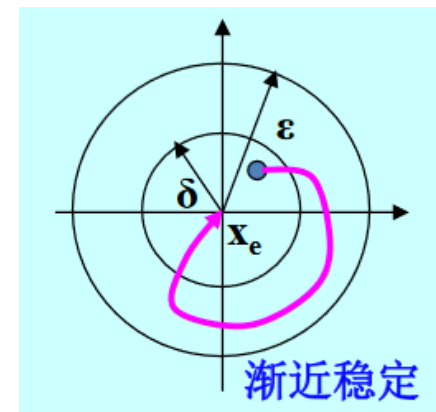
闭环系统 → 李雅普诺夫意义下渐近稳定

常用工具: 李雅普诺夫第二定理

结论 5.13 [小范围渐近稳定性定理] 对连续时间非线性时变自治系统(5.46), 若可构造对 x 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(x, t)$, $V(0, t) = 0$, 以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω , 使对所有非零状态 $x \in \Omega$ 和所有 $t \in [t_0, \infty)$ 满足如下条件:

- (i) $V(x, t)$ 为正定且有界;
- (ii) $\dot{V}(x, t) \triangleq dV(x, t)/dt$ 为负定且有界;

则系统原点平衡状态 $x=0$ 在 Ω 域内为一致渐近稳定。



□ Challenge: 是否存在神经网络控制器, 满足李雅普诺夫第二定理?

挑战

□ Challenge: 是否能找到神经网络控制器, 满足李雅普诺夫第二定理?

难点: 李雅普诺夫函数的选取

结论 5.13 [小范围渐近稳定性定理] 对连续时间非线性时变自治系统(5.46), 若可构造对 x 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(x, t)$, $V(0, t) = 0$, 以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω , 使对所有非零状态 $x \in \Omega$ 和所有 $t \in [t_0, \infty)$ 满足如下条件:

(i) $V(x, t)$ 为正定且有界;

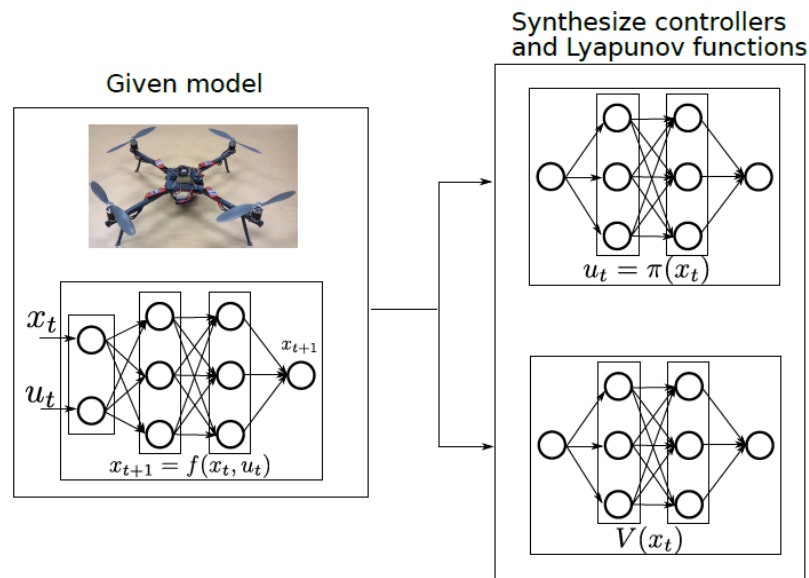
(ii) $\dot{V}(x, t) \triangleq dV(x, t)/dt$ 为负定且有界;

则系统原点平衡状态 $x=0$ 在 Ω 域内为一致渐近稳定。

“Lyapunov-stable neural-network control”

只有魔法才能打败魔法

- 同时优化神经网络Lyapunov函数和神经网络控制器
- 计算闭环系统的吸引域 (region of attraction, ROA)
- 在倒立摆、2D、3D无人机上进行仿真验证





方法

结论 5.13 [小范围渐近稳定性定理] 对连续时间非线性时变自治系统(5.46),若可构造对 x 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(x, t), V(0, t) = 0$, 以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω , 使对**所有**非零状态 $x \in \Omega$ 和所有 $t \in [t_0, \infty)$ 满足如下条件:

- (i) $V(x, t)$ 为正定且有界;
- (ii) $\dot{V}(x, t) \triangleq dV(x, t)/dt$ 为负定且有界;

则系统原点平衡状态 $x=0$ 在 Ω 域内为一致渐近稳定。

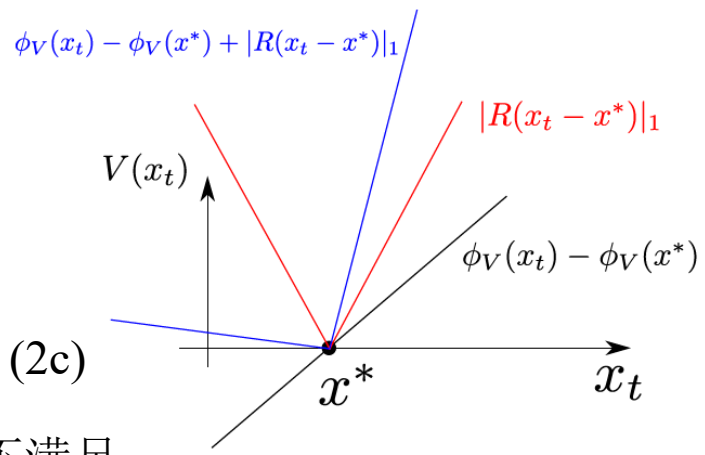
离散系统:

$$V(x_t) > 0 \quad \forall x_t \in \mathcal{S}, x_t \neq x^* \quad (2a)$$

$$V(x_{t+1}) - V(x_t) \leq -\epsilon_2 V(x_t) \quad \forall x_t \in \mathcal{S}, x_t \neq x^* \quad (2b)$$

$$V(x^*) = 0 \quad (2c)$$

神经网络形式V函数: $V(x_t) = \phi_V(x_t) - \phi_V(x^*) + |R(x_t - x^*)|_1$, 满足(2a), (2c)



满足**所有**: 给定x的定义域, 求值域的**最小值**, 如果最小值大于0, 则满足; 否则不满足

因此, 条件(2a) $\longrightarrow V(x_t) \geq \epsilon_1 |R(x_t - x^*)|_1 \quad \forall x \in \mathcal{S}, 0 < \epsilon_1 < 1 \longrightarrow$

条件(2b) \longrightarrow

$$\max_{x_t \in \mathcal{B}} \epsilon_1 |R(x_t - x^*)|_1 - V(x_t)$$
$$\max_{x_t \in \mathcal{B}} V(x_{t+1}) - V(x_t) + \epsilon_2 V(x_t),$$

类似的, $u_t = \pi(x_t) = \text{clamp}(\phi_\pi(x_t) - \phi_\pi(x^*) + u^*, u_{\min}, u_{\max})$

注意: $x_{t+1} = f(x_t, \pi(x_t))$,



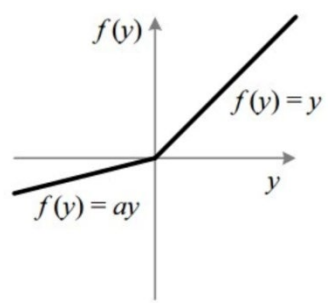
$$\max_{x_t \in \mathcal{B}} \epsilon_1 |R(x_t - x^*)|_1 - V(x_t)$$
$$\max_{x_t \in \mathcal{B}} V(x_{t+1}) - V(x_t) + \epsilon_2 V(x_t),$$

求解这个优化问题的

方法

❑ Leaky ReLU函数

一种分段线性函数，
NN中最常用的函数



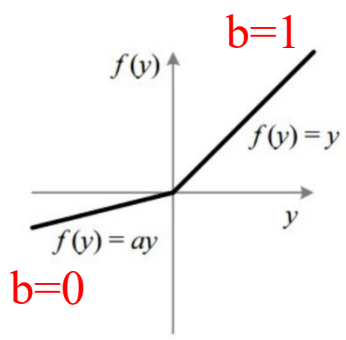
❑ Mixed-Integer Programs (MIP)

问题定义:

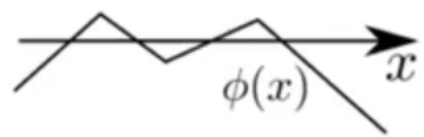
$$\begin{aligned} &\max_{x,b} c^T x + d^T b \\ &s.t. Ax + Fb \leq g \\ &\quad b \in \{0,1\} \end{aligned}$$

❑ 对于一个确定的采用ReLU函数的神经网络，求解输出的最值问题就是一个MIP问题

$$\begin{aligned} z_i &= \sigma(W_i z_{i-1} + b_i), i = 1, \dots, n-1 \\ z_n &= W_n z_{n-1} + b_n, z_0 = x, \end{aligned}$$



分段线性函数



对 $\forall x$,
求 $\max \phi(x)$
 $\max \phi(x) < 0$?

$$\begin{aligned} &\max_{x,b} c^T x + d^T b \\ &s.t. Ax + Fb \leq g \\ &\quad b \in \{0,1\} \end{aligned}$$

MIP求解器

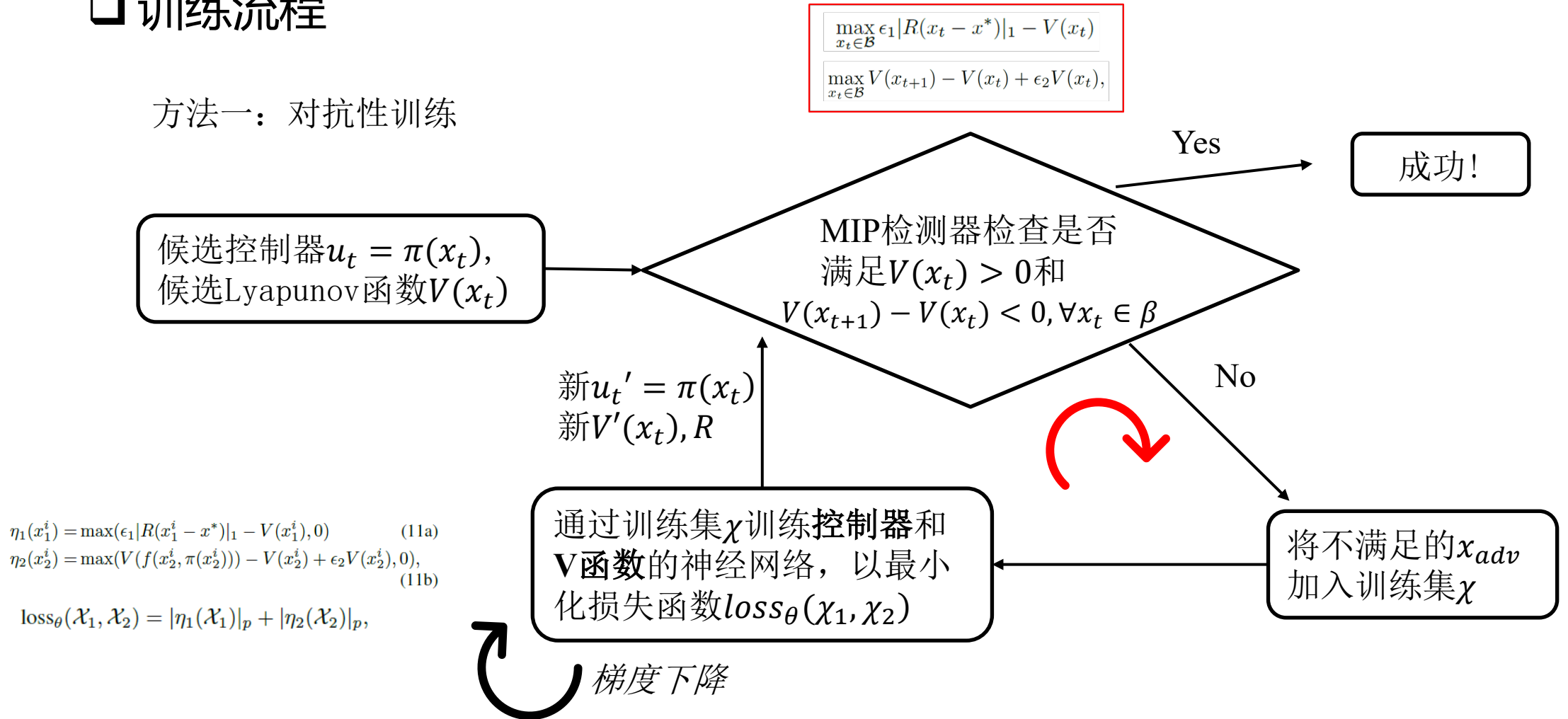
Tjeng, V., Xiao, K., & Tedrake, R. (2017). Evaluating robustness of neural networks with mixed integer programming. *arXiv preprint arXiv:1711.07356*.



方法

□ 训练流程

方法一：对抗性训练



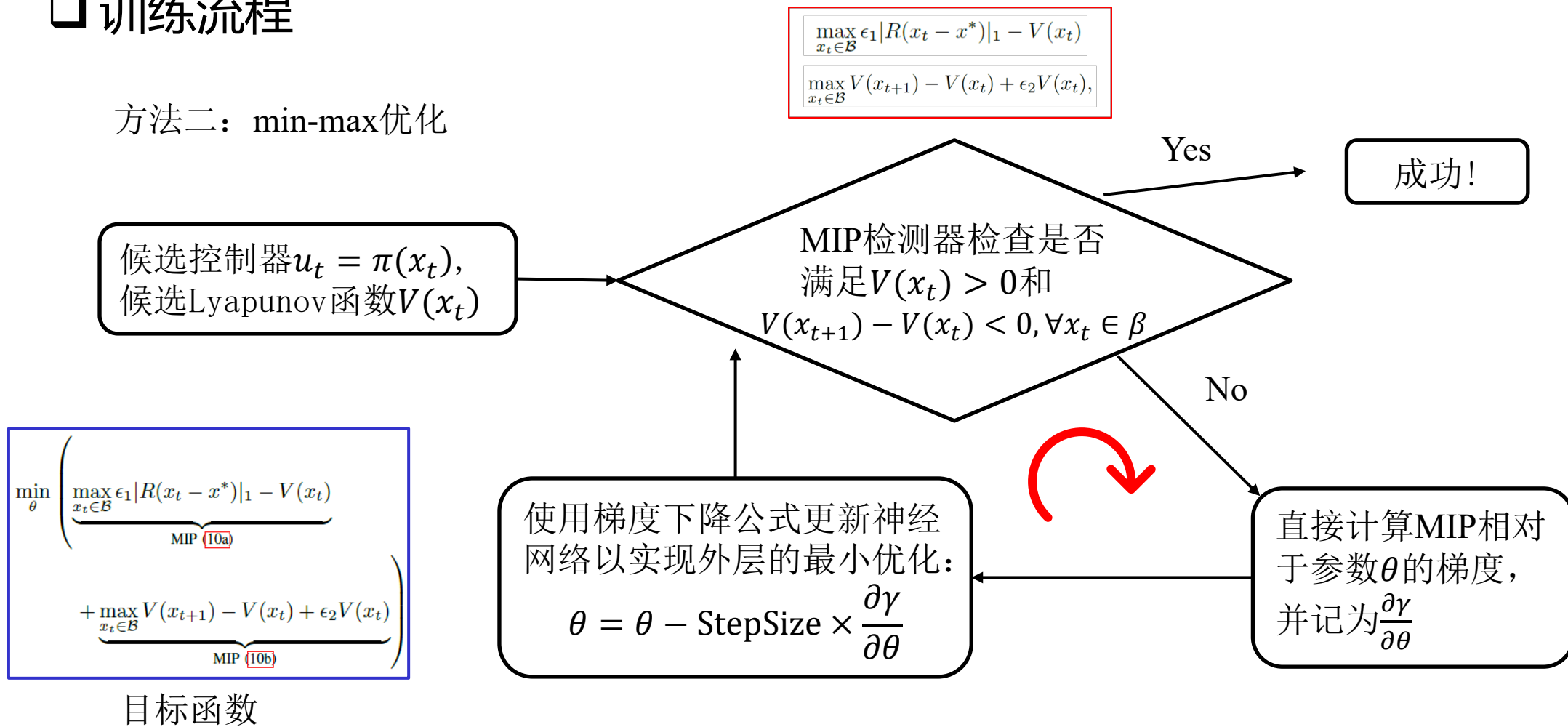
特点：训练速度快，但容易过拟合



方法

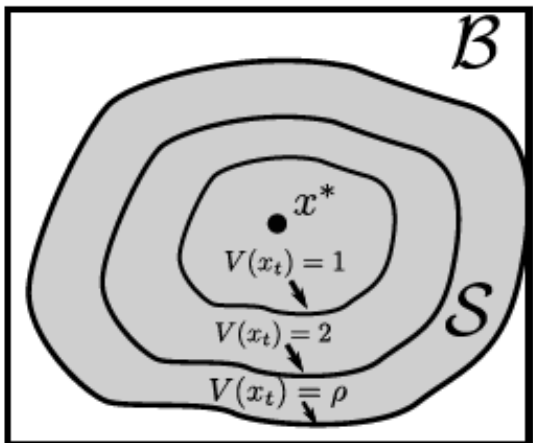
□ 训练流程

方法二：min-max优化



特点：训练速度慢，但更易收敛

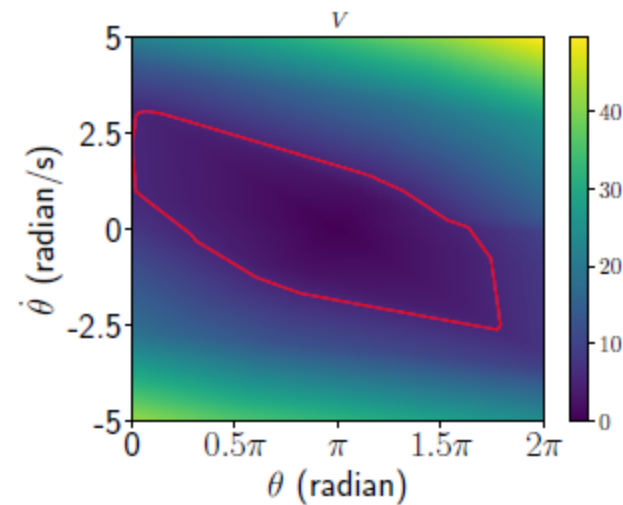
□ 求解吸引域



已经获得V函数了

步骤1: $\rho = \min_{x_t \in \partial B} V(x_t)$, 同样是MIP问题

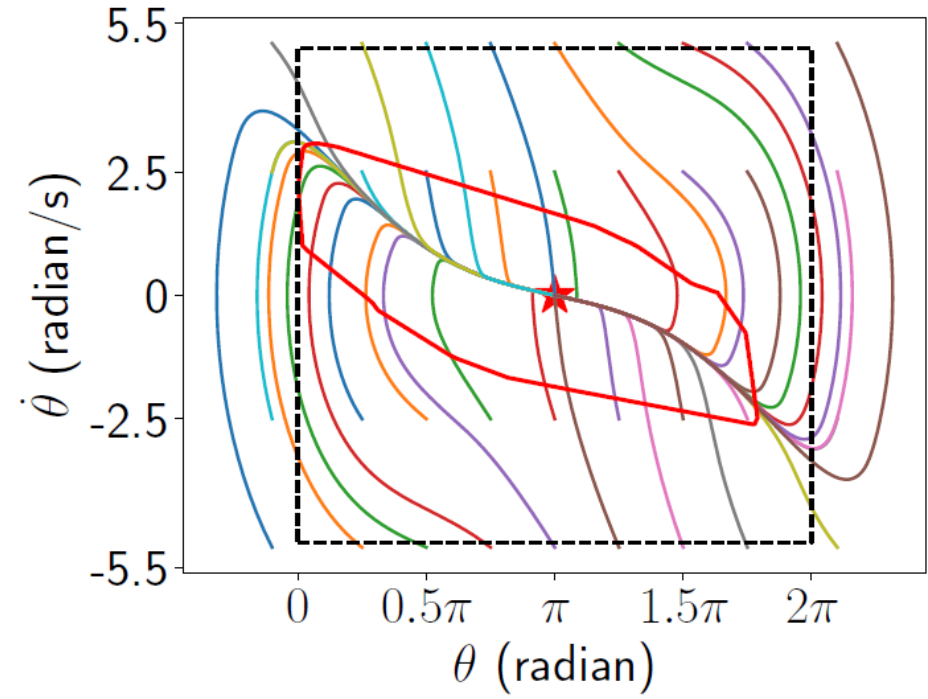
步骤2: 在B集中搜索 $V(x_t) = \rho$



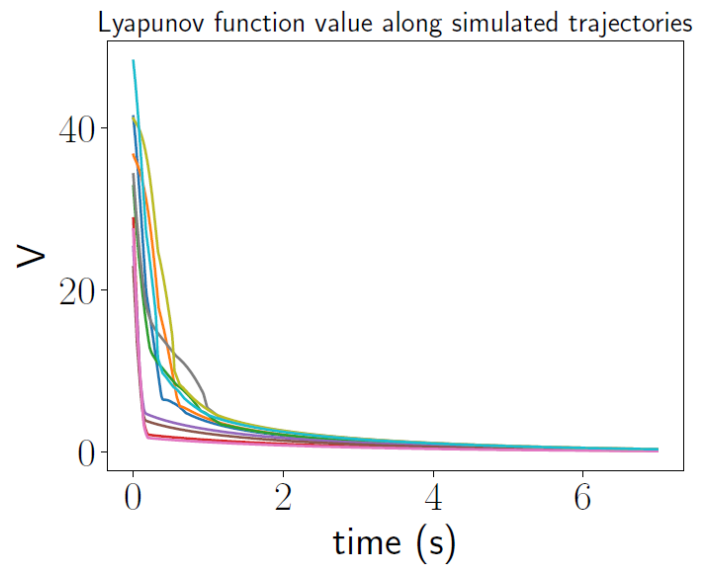
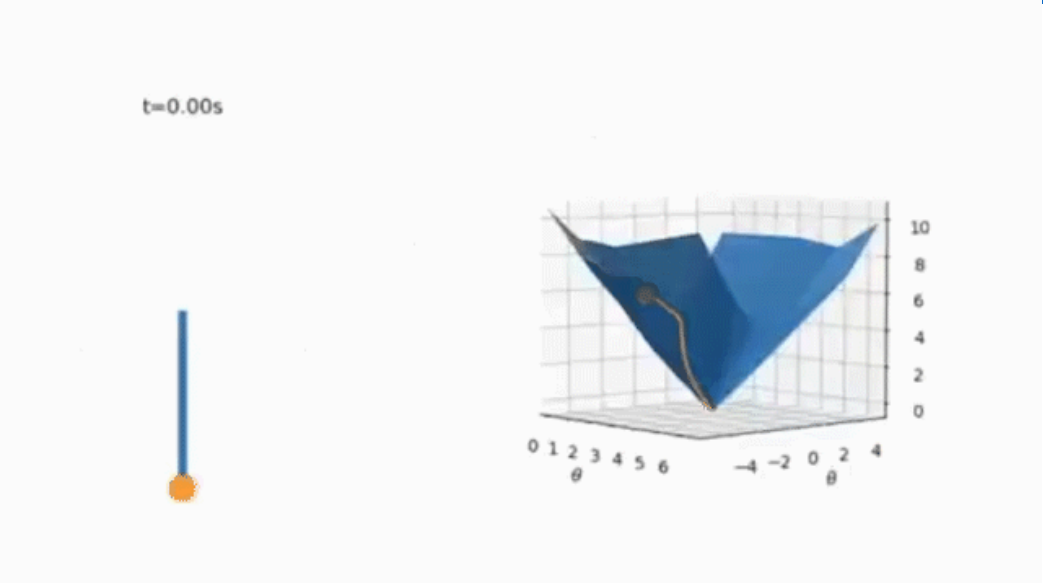
倒立摆问题的吸引域

□ 倒立摆

相轨迹图



红心：平衡点
红线：吸引域
黑色虚线：设定的搜索域



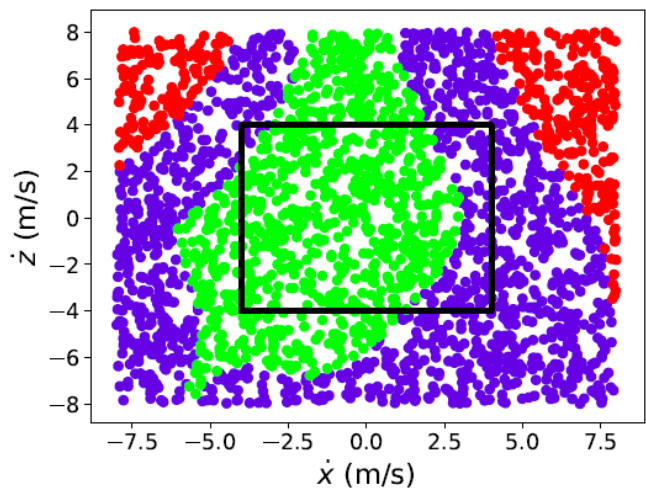


结果

□ 2D无人机

	LQR成功	LQR失败
NN成功	8078	1918
NN失败	0	4

使用拉格朗日动力学，选取10000个随机初始化位置，在LQR控制和NN控制后的结果。**NN效果更好。**

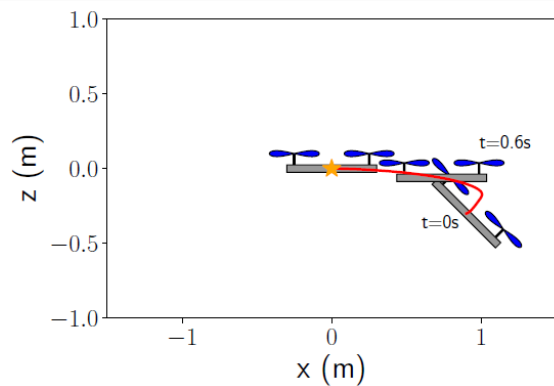
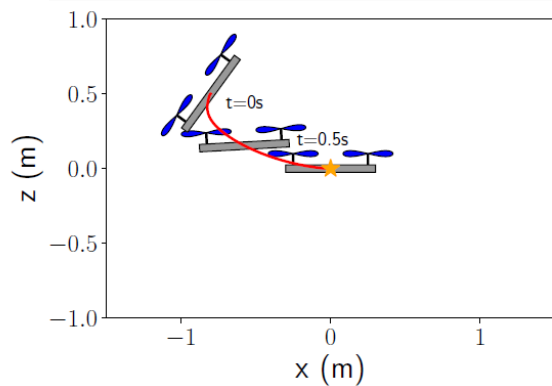
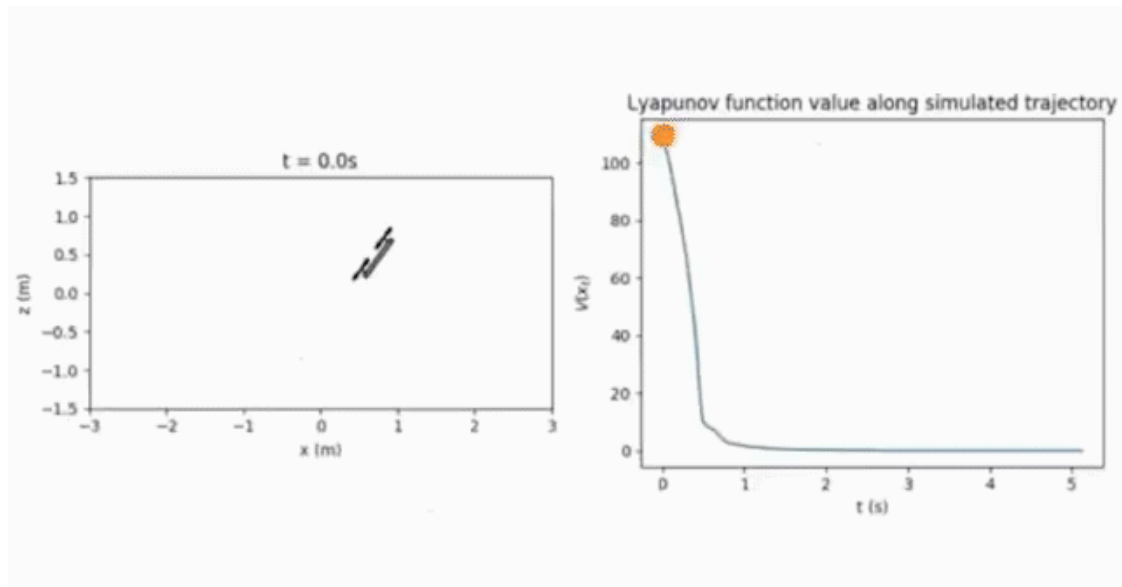


紫色：NN成功但LQR失败

绿色：NN和LQR都成功

红色：NN和LQR都失败

通过采样进一步验证稳定性。



2D无人机飞行轨迹



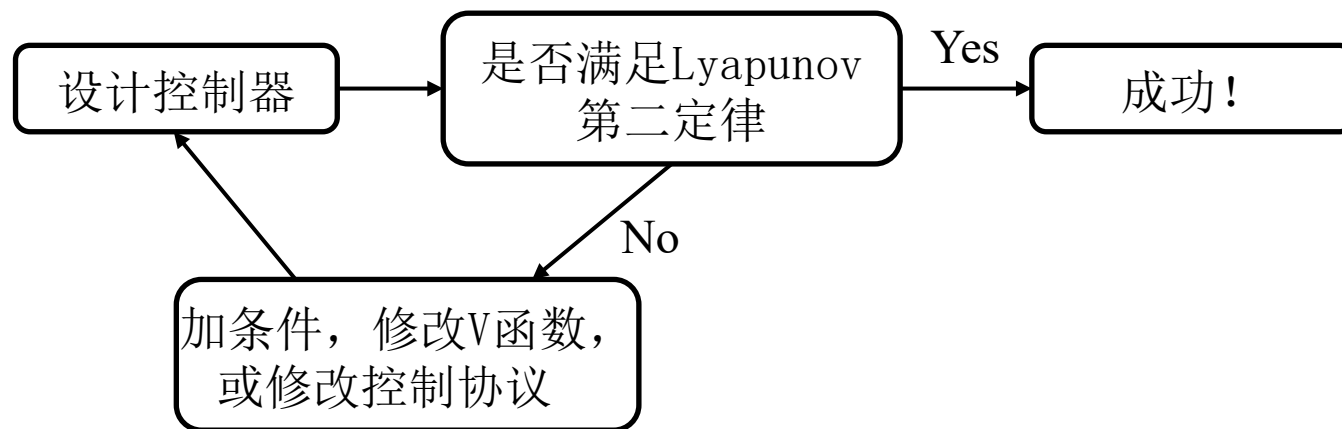
总结

□ 总结

- 本文将神经网络控制器和Lyapunov稳定性约束进行组合，通过将神经网络求极值问题转化为求解MIP问题，以迭代的方式同时训练出神经网络Lyapunov函数和神经网络控制器，实现了神经网络的稳定控制。

□ 思考

- 与深度强化学习对比，提供了另外一种训练神经网络控制器的思路——满足Lyapunov条件。
- 与控制论文的推导过程类似
手工业时代→自动化时代？





总结

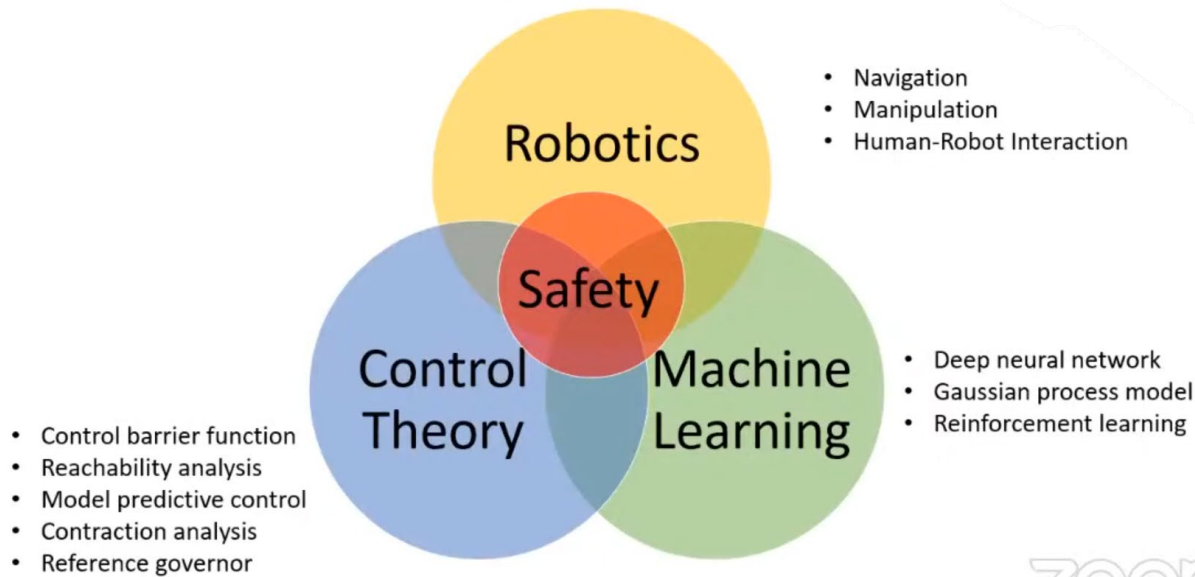
□ 存在问题与未来工作

- 如果网络规模较大，则MIP求解较慢。加速训练。
- 现有理论针对的是离散时间系统，希望拓展到连续时间系统。
- 希望可以综合Barrier functions，在训练中设定动作不可到达的区域。

❑ ICRA 2021 Workshop on Safe Robot Control with Learned Motion and Environment Models, 2021.06.04

Goal of the Workshop

网址: <https://scl-icra2021.github.io/>



❑ Control Meets Learning Seminar

Caltech主办, 网址: <https://sites.google.com/view/control-meets-learning/>

❑ 相关论文:

Chang, Ya-Chien, Nima Roohi, and Sicun Gao. "Neural lyapunov control." *arXiv preprint arXiv:2005.00611* (2020).



谢谢聆听!

Q&A