Föreläsning 3: Gauss lag
UP kap 22 lite 21 & 23, Gb kap 1
PH F-3.1, F-3.2

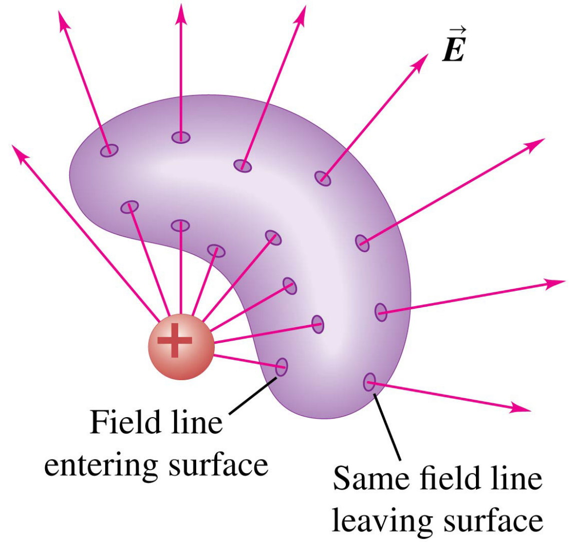
Innehåll:

3.1 Elektriskt flöde

3.2 Gauss lag

Meddelanden:

- I studium finns **sammanfattningar** av föreläsning 1 - 2
- I studium finns instruktioner till de tre mätövningarna. De skrivs ut och görs tillgängliga på Ångström före respektive mätövning
- Anmäl dig till **laborationsgrupp** för mätövning 1



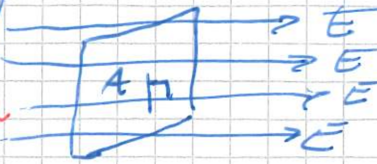
UP 22

3.1 Elektriskt flöde, Φ_E

Quiz 3.0

Är egentligen inget flöde alls
(som t ex ljus som strömmar genom fönster)

2



UP 22.6a

Homogent fält genom en vinkelrät yta med arean A

$$\Phi_E = E\cdot A \quad [V/m\cdot m^2] = [Vm]$$

Men om ytans normal har en vinkel φ mot E-fältet så kan vi i stället skriva

UP 22.6b

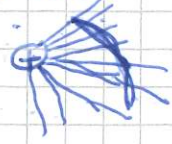
3

$$\Phi_E = \bar{E}\cdot\bar{A} = EA\cos\varphi$$ (skalär med tecken)

vektor $\bar{A}$?? $\boxed{\bar{A} = A\cdot\hat{n}}$ enhetsvektorn t. normalen

Men: Inhomogent fält och/eller oplan yta.

$$\Phi_E = \int E\cos\varphi\, dA = \int \bar{E}\cdot d\bar{A}$$



Detta är en ytintegral

Aktiveringsfrågor 3.1 - 3.5

Hur få ett netto flöde ut ur kuben?

14

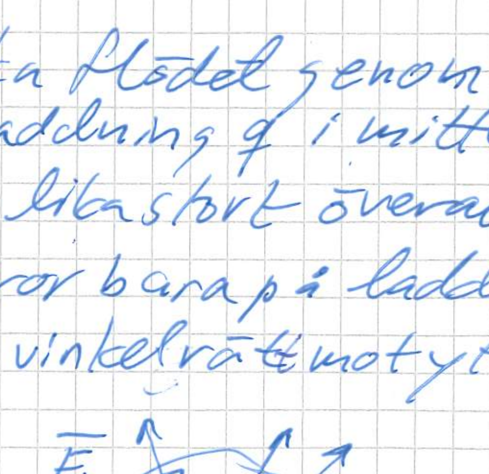
Ex 22.3 i UP

Beräkna det elektriska flödet genom en sfär med en punktladdning q i mitten

UP 22.9

Identify | E-fältet är lika stort överallt på sfärens yta och beror bara på laddningen q och radien r. $\bar{E}$ är vinkelrätt mot ytan.

Setup | skiss



vänd

Ex 22.3 (forts)

Execute |

$\Phi_E = \int \bar{E} \cdot d\bar{A}$ generellt, men här är $\bar{E}$ lika stort över hela ytan och vinkelrätt mot $\bar{A}$ som är sfärens area.

$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos 0^\circ$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$; $A = 4\pi r^2$

$\Phi_E = E \cdot A = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$q = 3{,}0 \cdot 10^{-6}\,C$; $(r = 0{,}20\,m)$

$\Phi_E = \frac{3{,}0 \cdot 10^{-6}\,C}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,C^2/Nm^2} = 3{,}388 \cdot 10^5 \left[\frac{Nm^2}{C} = \frac{VCm}{C} = Vm\right]$

Svar: Flödet är $3{,}4 \cdot 10^5\,Vm$

Evaluate | Radien spelar ingen roll $E \propto \frac{1}{r^2}$; $A \propto r^2$

---

15 3.2 Gauss lag f. 1777

$$\boxed{\Phi_E = \oint \bar{E}\,d\bar{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

"Det totala elektriska flödet genom en sluten yta är lika med nettoladdningen innanför ytan dividerad med ε_0"

Ex: Beräkna E-fältet runt en punktladdning q

Gauss: $\oint \bar{E}\,d\bar{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$; Arean på radie r: $A = 4\pi r^2$

16 UP 22.14 $\bar{E}$ vinkelrätt mot den sfäriska ytan så

17 $E A \cos 0^\circ = \frac{q}{\varepsilon_0}$; $E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ Coulombs lag

UP 22.11

vilket vi ju redan visste f. 1736

Gauss lag är ekvivalent med Coulombs lag men enklare att använda i vissa fall

"facit" 22

3.2 Gauss lag

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

- *A* är en sluten yta, Gaussyta – riktad utåt
- Integralen är över hela den slutna ytan, med areavektorn skalärmultiplicerad med E-fältet
- q_{in} är nettoladdningen som innesluts av *A*
- Gäller i vakuum (eller luft). Modifieras i andra material (med annat epsilon)

Användning av Gauss lag i enkla geometrier:

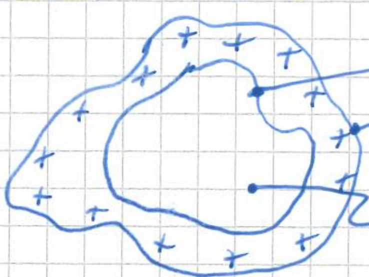
1) Laddningsfördelning + Gauss → E-fält (nyss)

2) E-fält + Gauss → Laddningsfördeln

* Vi använder oss av symmetrier

I en ledande kropp med nettoladdning kommer all laddning att vara på ytan: Alla överskottsladdningar repellerar varandra. Inuti kroppen är $\bar{E}$-fältet $=0$, annars skulle laddningar röra sig.

Homogen metallklump i genomskärning, positiv laddning



Gaussyta

Laddning enbart på ytan

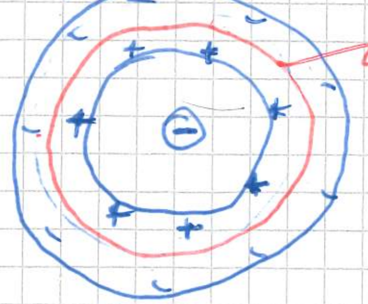
$\bar{E}=0$ inuti ledaren $\Rightarrow \Phi_E = 0$

$\Rightarrow$ laddning $=0$ inuti ledaren enligt Gauss lag

OBS: Gäller ej om ström flyter i kroppen (senare i kursen)

Laddning inuti ledande skal

skalets totala laddning $=0$

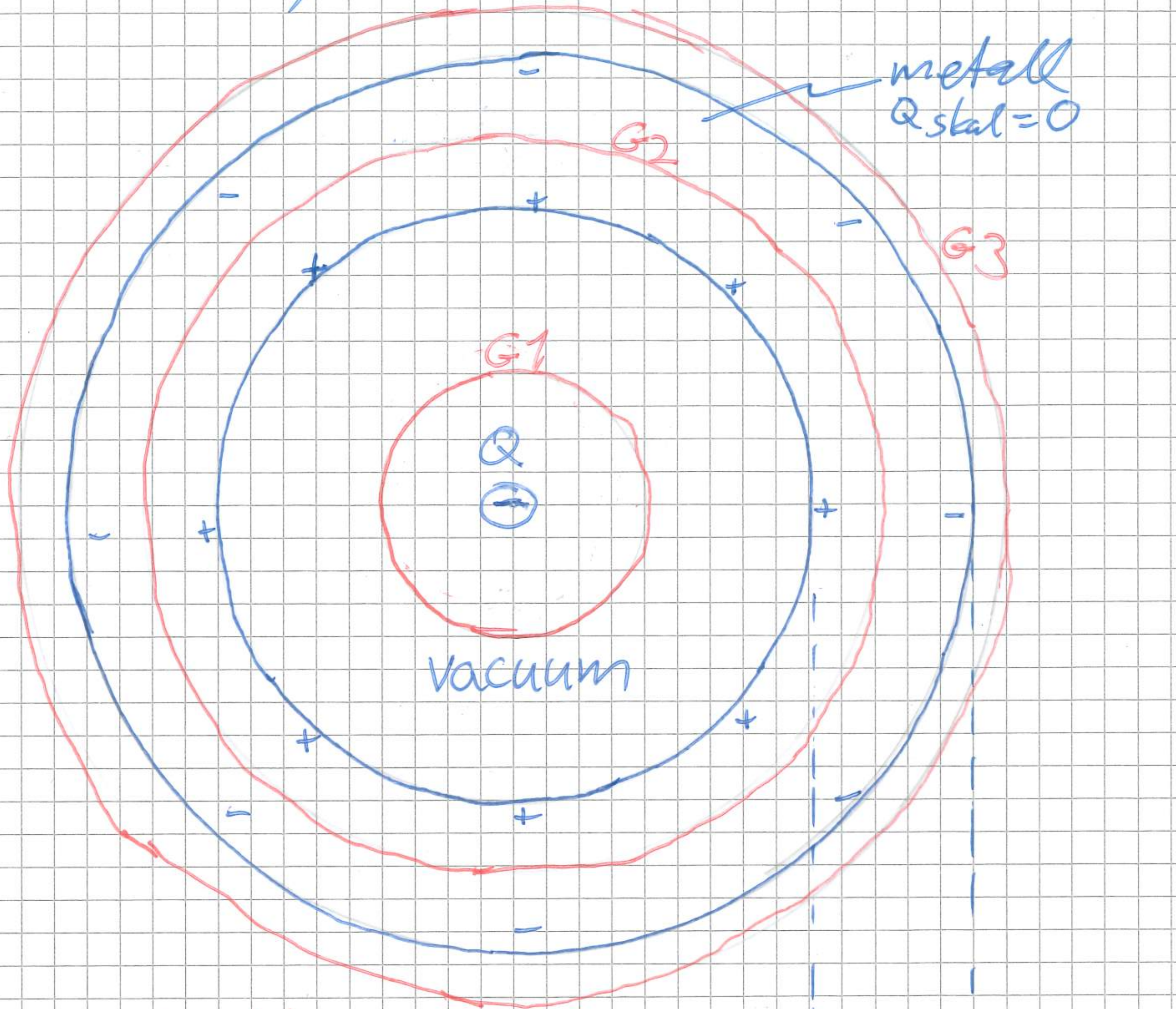


Gaussyta $Q_{in}=0$

lika mycket + som − innanför ytan

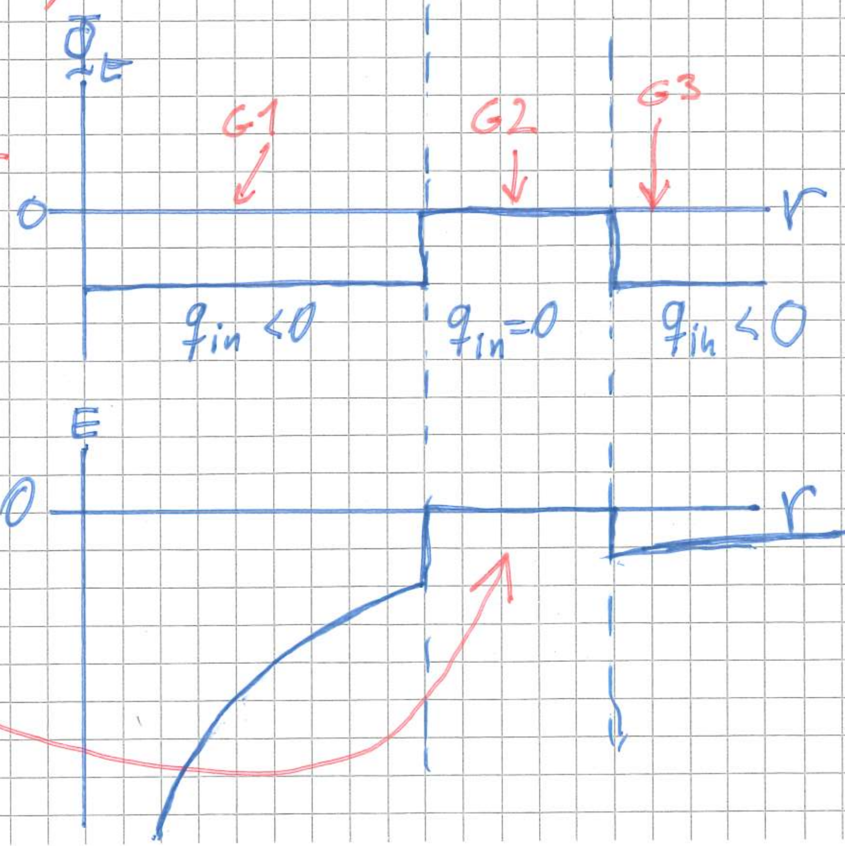
Aktiveringsfrågor 3.6 − (3.11?)

Laddning inuti <u>oladdat</u> ledande skal



G1 = tänkt Gaussyta 1 etc

Här motverkas E-fältet från Q av det inducerade fältet mellan skalets yttre och inre ytor



Ex 22.5 En solid ledande sfär har radien R och laddningen q. Finn $\bar{E}$ och V i, på och utanför sfären.

[Identify] All laddning sitter på ytan
$\bar{E} = 0$ inuti sfären

På ytan $r = R$: Lägg en Gaussyta just utanför R

Gauss lag $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$; $\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A}$

$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$; $\bar{A} = 4\pi r^2 \hat{r}$ och $\bar{E}$ är överallt vinkelrät mot ytan

$\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = EA\cos 0° = \frac{4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

precis som det ska vara

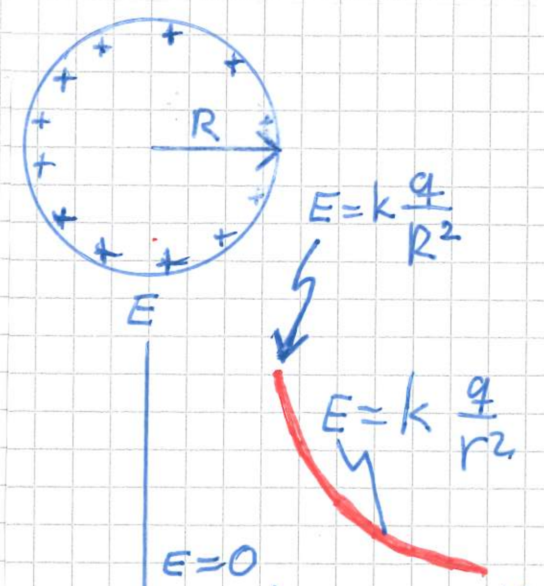
$\bar{E}(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r}$; $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$ precis som för en punktladdning

Utanför $r > R$:
$\bar{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$; $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ —"—

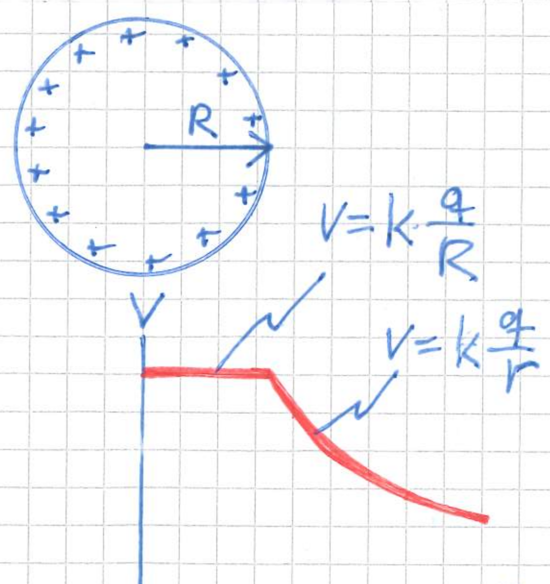
Inuti $r < R$: Gaussyta precis innanför ytan
$q = 0 \Rightarrow \bar{E} = 0 \Rightarrow$ potentialen varierar inte
$V = \text{konstant} = V(R)$

36

37



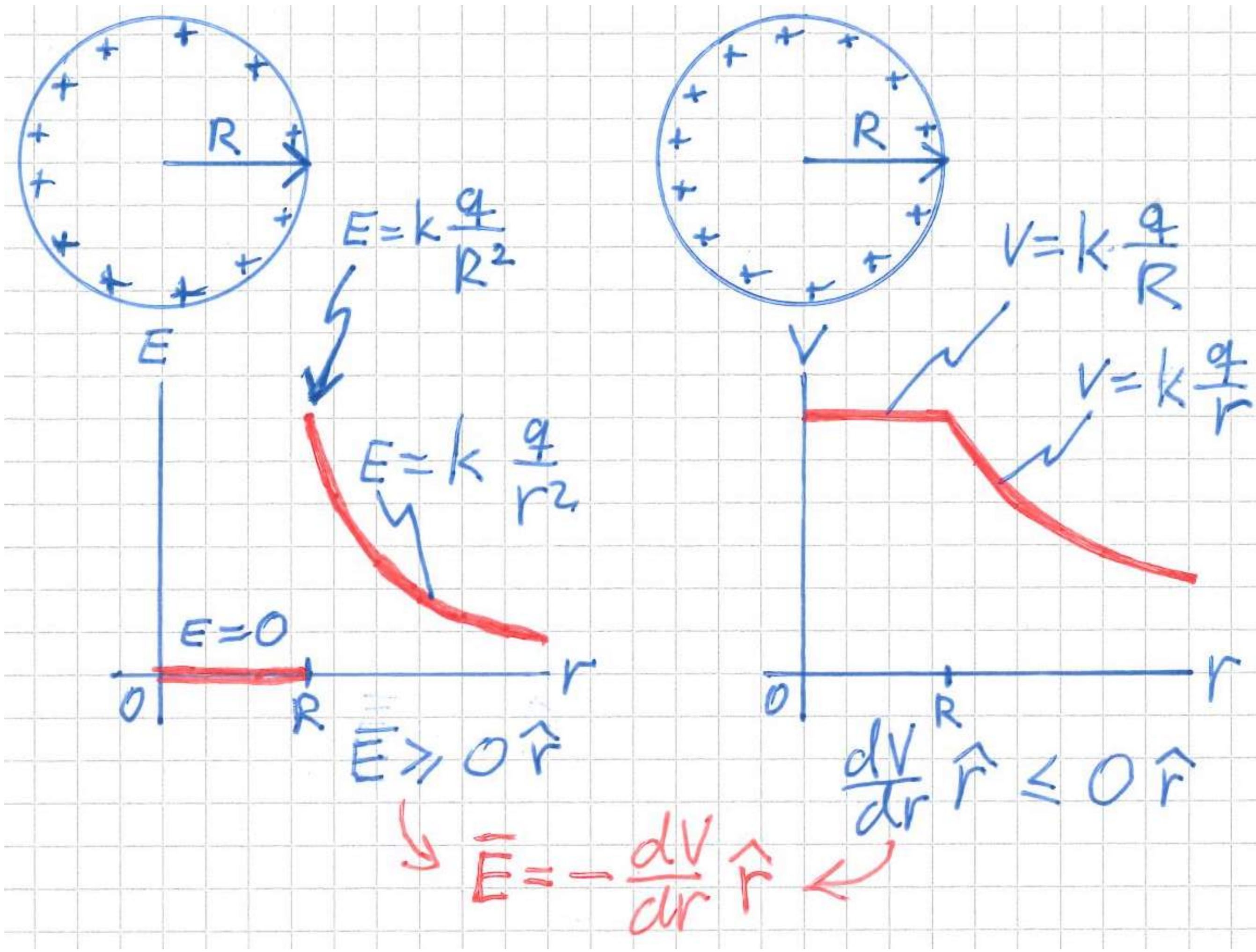
$\bar{E} \geq 0\,\hat{r}$



$\frac{dV}{dr}\hat{r} \leq 0\,\hat{r}$

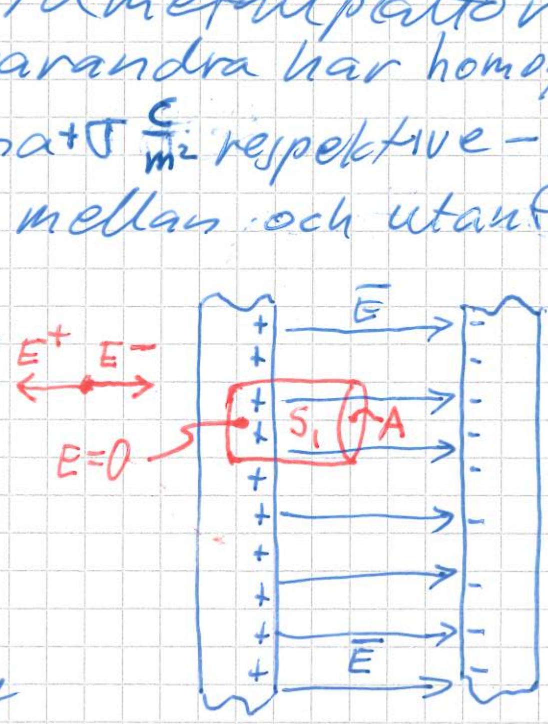
$\bar{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$

E-fältet är minus gradienten av potentialen



Ex 22.8 2 oändligt stora metallplattor på avståndet d från varandra har homogena laddningsfördelningarna $+\sigma \frac{C}{m^2}$ respektive $-\sigma \frac{C}{m^2}$

Finn $\bar{E}$-fältet mellan och utanför plattorna.



UP 22.21

Identify| Cylindriska gaussytor användbara

Set up| Skiss

Execute| E-fältet från en oändlig platta är helt vinkelrätt åt båda håll, <u>oberoende av avstånd</u>

Utanför plattorna tar därför $\bar{E}$-fälten ut varandra $\bar{E}_{utanför} = 0$

Laddningarna dras till ytornas "insidor"

Lägg en gausscylinder S_1 över innerkanten på den positiva plattan.

Flödet och E-fältet ut genom S_1:s högra ända med arean A är vinkelrätt mot ytan. Inga fältlinjer passerar cylinderns andra ytor.

Laddningen i S_1: $q_1 = \sigma A$

Gaussytan är väl vald så $\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = EA = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$

Svar: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

(Vi hade kunnat göra likadant med den negativa plattan då hade laddningen varit negativ och fältriktningen in i gaussytan. 2 minus tar ut varandra)

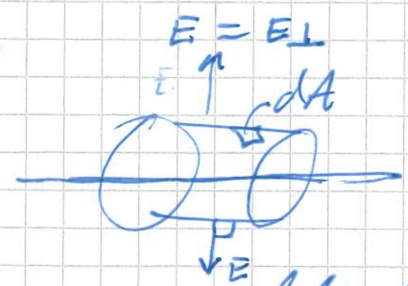
verkliga plattor 39 Fig 22.21

Gauss lag är praktisk i vissa speciella symmetrier men svår att använda generellt.

Laddad stav

UP 22.19

Ex 22.6



Finn E-fältet utanför en oändligt lång laddad stav.

Prova själv, jämför sedan med boken

Tips $\bar{E}$ helt radiellt

Tips $\bar{E}$ är inte $\propto \frac{1}{r^2}$!