

# Table of Contents

序言	1.1
第一章 工具	1.2
简历	1.2.1
参考书籍	1.2.2
第二章 C++	1.3
OOP	1.3.1
模板类与模板函数	1.3.2
COM	1.3.3
常用的python数据处理函数	1.3.4
第三章 算法	1.4
矩阵计算	1.4.1
线性方程组求解方法	1.4.1.1
矩阵变换技巧	1.4.1.2
矩阵分解方法	1.4.1.3
矩阵本征值求解方法	1.4.1.4
奇异矩阵分析	1.4.1.5
大规模稀疏矩阵问题	1.4.1.6
矩阵微分	1.4.1.7
算法与数据结构	1.4.2
Kriging插值	1.4.3
第四章 最优化	1.5
无约束最优化问题	1.5.1
线性搜索方法	1.5.1.1
梯度下降法	1.5.1.1.1
牛顿法	1.5.1.1.2
拟牛顿法	1.5.1.1.3
信赖域方法	1.5.1.2
高斯-牛顿法	1.5.1.2.1
Levenberg-Marquardt算法	1.5.1.2.2
Dogleg算法	1.5.1.2.3
共轭梯度法	1.5.1.3
次梯度法	1.5.1.4
随机坐标下降法	1.5.1.5
有约束最优化问题	1.5.2
拉格朗日乘子法	1.5.2.1
Karush-Kuhn-Tucker条件	1.5.2.2
罚函数法	1.5.2.3
增广拉格朗日乘子法	1.5.2.4
ADMM	1.5.2.5
最优化的优缺点及其改进方案	1.5.3
参数调节	1.5.4
线性与非线性方程组解的稳定性分析	1.5.5
第五章 机器学习	1.6
机器学习原理	1.6.1
分类	1.6.2

SVM, KKT条件与核函数方法	1.6.2.1
SVM	1.6.2.1.1
KKT条件与对偶	1.6.2.1.2
核函数方法	1.6.2.1.3
逻辑回归与最大熵模型	1.6.2.2
K近邻	1.6.2.3
回归	1.6.3
多元回归分析	1.6.3.1
正则线性模型	1.6.3.2
L1,L2正则化	1.6.3.2.1
聚类	1.6.4
K均值	1.6.4.1
高斯混合模型	1.6.4.2
降维	1.6.5
PCA	1.6.5.1
流形学习	1.6.5.2
度量学习	1.6.5.3
集成学习	1.6.6
决策树	1.6.6.1
集成学习	1.6.6.2
Bagging	1.6.6.2.1
Boosting	1.6.6.2.2
生成算法	1.6.7
贝叶斯方法	1.6.7.1
隐马尔科夫模型	1.6.7.2
DNN-HMM混合系统	1.6.7.3
图模型	1.6.8
马尔科夫链蒙特卡洛方法	1.6.8.1
特征工程	1.6.9
特征工程	1.6.9.1
Factorization Machines(FM)	1.6.10
模型评估	1.6.11
正则化方法原理与实践	1.6.12
机器学习学习任务	1.6.13
机器学习面试问题集	1.6.14
第六章 深度学习	1.7
BP神经网络	1.7.1
CNN	1.7.2
RNN	1.7.3
第七章 推荐系统	1.8
计算广告学概论	1.8.1
协同过滤算法	1.8.2
FM(Factorization Machines),FFM	1.8.2.1
SVD在推荐系统的应用	1.8.2.2
基于内容的推荐算法	1.8.3
基于知识的推荐	1.8.4
Learning To Rank LTR	1.8.5
Problem Solver Systems	1.8.6

<a href="#">第八章 项目工作</a>	1.9
<a href="#">Residual NN</a>	1.9.1
<a href="#">Fast项目</a>	1.9.2
<a href="#">Miura项目</a>	1.9.3
<a href="#">Titanic</a>	1.9.4
<a href="#">Customer Segmentation</a>	1.9.5
<a href="#">任务</a>	1.9.6
<a href="#">深度学习的发展脉络</a>	1.9.7
<a href="#">第九章 问题求解系统</a>	1.10
<a href="#">Sklearn介绍</a>	1.10.1
<a href="#">Sklearn的代码架构</a>	1.10.2
<a href="#">Tensorflow介绍</a>	1.10.3
<a href="#">Tensorflow的代码架构</a>	1.10.4
<a href="#">常用数据处理技巧</a>	1.10.5
<a href="#">NLP常用处理技巧</a>	1.10.6
<a href="#">第十章 问题</a>	1.11
<a href="#">基本ML问题</a>	1.11.1
<a href="#">前向神经网络问题</a>	1.11.2
<a href="#">神经网络的种类适用场景与优缺点</a>	1.11.3
<a href="#">基本C++问题</a>	1.11.4
<a href="#">C++标准模板库</a>	1.11.5
<a href="#">常规算法问题</a>	1.11.6
<a href="#">结束</a>	1.12

# 序

日知录是效法顾炎武的《日知录》而作，里面会记录自己在学习与工作中学到的知识，该书的目的是为了打造一本属于自己的百科全书，形成自己的思想体系。最终里面的每一章可能代表一个方向与学科，比如C++，C#最终会成为一章，经济，中国史会成为一章。如果经济学里面记录的内容不多，就编成一章，如果内容多了，则会编成多章，比如宏观经济学，微观经济学，计量经济学。这样，最终一门大的学科，比如，经济学，就编成了一卷。

自然科学的基础是数学，数学是让一门学科严格化，并能称之为科学的基础。因此，本书的主线是以数学为基础，以编程为技术工具来高效的解决自然科学(如物理，半导体，光学，声学，分子化学)，商业与经济活动(推荐系统，计算广告，图像处理，信号处理，金融)中的问题。要践行毕达哥拉斯学派所谓的“世界的本质是数的理念”，换句话说，数学是所有学科唯一的通用语言。不同学科会分享相同的数学方法，这也就本书要总结的一个方面。不同学科的区别只是研究，处理问题的不同，而没有数学方法上的不同。就像随机偏微分方程可以用于量子力学，也可以用于金融；时间序列分析可以用于金融，也可以用于语音与数字信号处理。

本书的是自己学习的总结，更是自己思想体系不断进化的体现。因此，这本书会一直去增补，完善，没有停止的说法。在可以预见的未来，本书会经历几个阶段。第一阶段是知识的学习与记录；第二阶段是知识的运用与不同知识原理的提炼；第三阶段就是知识的创造过程，也就是为解决一类问题而创造出一个新的方法。三阶段简单来说，就是把书读厚，把书读薄，再把书读厚的阶段。就时间尺度来说，第一阶段是30周岁以前，第二阶段是30岁以后的三年，第三阶段就是33岁以后的岁月。正如“日知其所亡，月无忘其所能”，自己要做到每年一个总结，同时安排下一年的任务。

李品品 2018年

# 第一章:工具

1. 主要介绍一些Gitbook相关的工具
2. 一些库函数, 比如Eigen,OpenCV
3. 一些推荐的书籍
4. 简历

# 简历:李品品

电话:(86)158-0083-4895

E-mail:1730443424@qq.com

求职目标:算法工程师, 机器学习, 深度学习

## 教育背景

2013.9-2016.6 兰州大学理论物理 硕士  
2009.9-2013.6 兰州大学理论物理 学士

## 工作经历

2017.04-现在 KLA-Tencor半导体软件工程师  
2016.07-2017.03 KLA-Tencor半导体算法工程师

## 技能

C++, 最优化, 线性代数, 矩阵分析, 机器学习与深度学习理论, 图像处理

## 研究经历

2014.3-2016.06 任意多边形的共形变换算法, 用于求解薛定谔方程, 狄拉克方程, 亥姆霍兹方程(理论推导)  
2013.9-2016.06 相对论与非相对论的能量与波函数的量子混沌研究(数值计算)  
2012.9-2014.6 Sinai弹球Lyapunov exponent与K-S熵的半解析求解(理论推导+数值模拟)

## 获奖

2010 全国大学生数学竞赛非数学类三等奖  
2007 湖南省高中生物理竞赛省二等奖

## 工作项目1:深度学习在晶圆缺陷检测中的应用研究(2016.07-2017.04)

1. 个人搭建起来基于GPU计算的深度学习研究平台, 训练的硬件是Quardo4000, 工具是Linux下的Tensorflow。随着芯片制造中节点尺寸变小, 光学成像模型越来越复杂与困难, 因此我们研究通过训练深度神经网络来提升现有的光学成像模型的性能的方案, 相当于做用神经网络来做一个图像增强的过程。我们基于端对端的训练, 研究了不同深度的CNN, pre-trained的VGG, 以及Residual NN。发现通过Residual NN可以很大的提升现有光学成像模型的性能。
2. 光学成像建模研究: 基于傅里叶光学及其TCC matrix对光掩模成像进行理论研究

## 工作项目2:C++软件开发(2017.04-现在)

1. 半导体缺陷检测仪器的控制软件开发, 基于MFC的C++以及半导体工厂自动化协议(SECS)的软件开发, 来实现芯片的工厂自动化生产。主要用的是面向对象的C++编程, 串口以及TCP/IP通讯, 多线程与进程同步, 数据库(SQL server)操作, COM技术, 模式设计, 硬件驱动以及UI设计。主要工作就是软件的维护以及新功能的开发。

## 工作项目3:算法优化(2018.03-现在)

1. 四探针测量薄膜特性, 其核心是求解一个基于麦克斯韦方程推导出来的电流, 电压方程。通过实验数据, 求解出薄膜的参数。主要涉及到非线性方程的迭代求解与算法优化。求解主要基于牛顿法与梯度下降法的综合版--Levenberg-Marquardt算法, 此外还利用了基于Trust-Region的Dog-Leg算法。在实际的优化过程中, 我们会通过L2正则化来对一些变量进行约束, 其目的是为了让我们计算出的参数更稳定。

## 个人项目:编写最优化与机器学习技术书籍一部(2018.03-现在)

1. 矩阵分析主要包括线性方程组求解, 矩阵分解, 矩阵变换, 矩阵本征值问题以及奇异矩阵分析。
2. 最优化算法主要包含无约束优化问题(线性搜索与Trust-Region算法), 以及带约束优化问题。
3. 机器学习算法主要包含分类, 回归, 聚类, 降维, 集成学习, 生成算法与图模型

## 自我评价

理论物理硕士毕业，在数值算法，最优化，线性代数，机器学习，矩阵论，概率统计，高等代数，冗长公式推导（推导过2-D Ising model理论解）方面有较大优势。两年的算法工程师与C++软件工程师经历，让我具备了面向对象程序设计经验，通过对系统软件的开发与维护，对软件架构设计具备一定经验。对图像的滤波，去噪，增强，特征提取有一定的基础。乐于接受新事物，深厚的数量基础也使我更容易理解新技术。

## 参考书籍

1. 《凸优化》Stephen Boyd
2. 《最优化导论》Edwin K.P.Chong
3. 《线性与非线性规划》David G. Luenberger, Yinyu Ye
4. 《非线性规划》Dimitri P.Bertsekas
5. 《非线性优化计算方法》袁亚湘
6. 《Numerical Optimization》Jorge Nodedal, Stephen J. Wright
7. 《应用数值线性代数》James W. Demmel
8. 《Matrix Computations》Gene H. Golub, Charles F. Van Loan
9. 《分布式机器学习》刘铁岩
10. 《深度学习》Ian Goodfellow
11. 《语音识别实践》俞栋 邓力
12. 《The Elements of Statistical Learning》Hastie
13. 《稀疏统计学习及其应用》Trevor Hastie
14. 《热力学.统计物理》汪志诚
15. 《Introduction to Staistical Machine Learning》Masashi Sugiyama
16. 《Machine Learning A Bayesian and Optimization Perspection》Sergios Theodoridis
17. 《Machine Learning A Probabilistic Perspective》Kevin P. Murphy
18. 《统计机器学习》Vladimir N. Vapnik
19. 《统计机器学习》李航
20. 《机器学习》周志华
21. 《Hands-On Machine learning with Scikit-Learn&Tensorflow》
22. 《Pattern Recognition and Machine Learning》M.Bishop
23. 《深度学习核心技术与实践》猿辅导研究团队
24. 《剑指Offer》
25. 《计算广告》刘鹏 王超

## 第二章 C++

这一章主要涉及到C++编程,

1. 面向对象三大特征
2. 简单的模式设计(六大原则)
3. 进程间通讯
4. 线程同步异步
5. 泛型编程
6. STL
7. C++ 与Java的异同

主要是确保自己能够熟练的掌握与运用C++这道工具来实现自己的想法与算法。语言是一致的, 代码写多了才能体会到这一点, 语言只是外功, 数学, 建模思想才是内功; 外功可以在一两年内速成, 但是内功非十年八年难以达到登峰造极的境界, 而且有一点就是, 数学有点靠天赋, 数学好这是上天赐给你的礼物。

# OOP

面向对象式语言的三大特征：封装，继承，多态。

面向对象编程(OOP)的八个基本概念：类与对象，封装，抽象，数据隐藏，多态，继承，动态绑定，消息传递。

## 封装

封装是一种捆绑机制，能把函数和数据捆绑成类这种紧凑的形式。封装的目的是实现数据的隐藏。

数据和函数可以是私有的，也可以是公开的。私有的数据或函数只能在类里面访问，而公开的数据或代码则可以在类外访问。运用封装，可以把实现代码中的某些内容给隐藏起来。将函数代码与数据链接在一起，就可以生成对象，而这个对象则可以表示成某个以类为类型的变量。

## 继承

### 三种继承方式

继承方式\成员属性	public	protected	private
public继承	public	protected	子类无权访问
protect继承	protectd	protected	子类无权访问
proivate继承	private	private	子类无权访问

C++可以多继承，但Java,C#只能是单继承。

## 多态

定义：允许不同类的对象对同一消息做出响应。即同一消息可以根据发送对象的不同而采用多种不同的行为方式。(发送消息就是函数调用)

实现多态的技术称为：动态绑定，是指在执行期间判断所引用对象的实际类型，根据其实际的类型调用其相应的方法。

多态的作用：消除类型之间的耦合关系。

子类覆盖父类的函数实现，也就是子类重新实现父类的函数。不同的子类对相同的父类函数可以有不同的实现，因此多态就是“一个接口，多种实现”。

多态就是指程序中定义的引用变量所指向的具体类型和通过该引用变量发出的方法调用在编译时并不确定，而是在程序运行期间才确定，即一个引用变量到底会指向哪个类的实例对象，该引用变量发出的方法调用到底是哪个类中实现的方法，必须在由程序运行期间才能确定。

### 多态的好处

继承和多态本质的目的是为了代码重用和解耦。而重用和解耦是为了减少开发时间和减少错误。最终达到降低成本的目的。

多态体现的就是“对扩展开放，对修改封闭”。封闭就是子类不能直接修改父类的其它函数，扩展开放也就是子类可以重写父类的函数。

1. 可替换性(substitutability)。多态对已经存在代码具有可替换性。
2. 可扩充性(extensibility)。多态对代码具有可扩充性，增加新的子类不影响已经存在类的多态性，继承性，以及其他特性的运行和操作。实际上新加子类更容易获得多态功能。例如，在实现圆锥，半圆锥以及半球体的多态基础上，很容易增加球体类的多态性。
3. 接口性(interface-ability)。多态是超类通过方法签名，向子类提供了一个共同接口，由子类来完善或者覆盖它而实现的。
4. 灵活性(flexibility)。它在应用中体现了灵活多样的操作，提高了使用效率。
5. 简化性(simplicity)。多态简化对应用软件的编写和修改过程，尤其在处理大量对象和操作时，这个特点尤为突出和重要。
5. 提高了代码的维护性(继承保证)
6. 提高了代码的扩展性(由多态保证)

# 模板类与模板函数

Why can templates only be implemented in the header file?

Clarification: header files are not the \_only \_portable solution. But they are the most convenient portable solution Error LNK2019 unresolved external symbol "public: int \_\_thiscall Algo<int>::LongestIncreaseSubsequence(int \* const,int)" (?LongestIncreaseSubsequence@? \$Algo@H@@QAEHQAHH@Z) referenced in function \_main Algo C:\Data\ShareFolder\Group\Tim\Code\Algo\Algo\Main.obj

当模板声明在头文件，实现在cpp中，一般会出现上面的问题，原因是

Algo<int> Alg实例化的时候，编译器会去创建一个int型的Algo的新类，以及LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize)方法，因此编译器会去找这个方法的实现，如果没有找到，自然会报错。因此有如下两个方法

1. 在头文件中实现
2. 在头文件中声明，再在cpp中显式实例化(explicit instantiations) template class Algo<int>;并实现模板函数

方式1:实现在头文件里

```
#pragma once
#include <algorithm>
using namespace std;

template<class T>
class Algo
{
public:
    Algo() {};
    ~Algo() {};
public:
    int LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize)
    {
        int *maxLen = new int[arrSize]();
        for (int i = 0; i < arrSize; i++)
        {
            maxLen[i] = 1;
        }
        for (int j = 1; j < arrSize; j++)
        {
            int maxLenJ = 1;
            for (int i = 0; i < j; i++)
            {
                if (arr[i] < arr[j])
                {
                    maxLenJ = maxLen[i] + 1;
                    maxLen[j] = std::max({ maxLen[j] ,maxLenJ });
                }
            }
        }
        return maxLen[arrSize - 1];
    }
};
```

```
//调用函数
#include "stdafx.h"
#include "Algo.h"
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int param[6] = { 5,3,4,8,6,7 };
    int arrSize = sizeof(param) / sizeof(int);
    Algo<int> Algo;
    int maxLength = Algo.LongestIncreaseSubsequence(param, arrSize);
    cout << "Max length: " << maxLength << endl;
    return 0;
}
```

方式二:在头文件中声明，CPP中定义并对每种实例进行声明

```
Algo.h
#pragma once
#include <algorithm>
using namespace std;
```

```

template<class T>
class Algo
{
public:
    Algo() {};
    ~Algo() {};
public:
    int LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize);
}

```

```

// Algo.cpp : Defines the entry point for the console application.

#include "stdafx.h"
#include "Algo.h"
#include <algorithm>
using namespace std;

template class Algo<int>; //必须先声明, 才可以用
template class Algo<double>;
template class Algo<char>;
template<class T>
int Algo<T>::LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize)
{
    int *maxLen = new int[arrSize]();
    for (int i = 0; i < arrSize; i++)
    {
        maxLen[i] = 1;
    }
    for (int j = 1; j < arrSize; j++)
    {
        int maxLenJ = 1;
        for (int i = 0; i < j; i++)
        {
            if (arr[i] < arr[j])
            {
                maxLenJ = maxLen[i] + 1;
                maxLen[j] = std::max({ maxLen[j] ,maxLenJ });
            }
        }
    }
    return maxLen[arrSize - 1];
}

```

If all you want to know is how to fix this situation, read the next two FAQs.  
But in order to understand why things are the way they are, first accept these facts:

A template is not a class or a function. A template is a “pattern” that the compiler uses to generate a family of classes or functions. In order for the compiler to generate the code, it must see both the template definition (not just declaration) and the specific types/whatever used to “fill in” the template. For example, if you’re trying to use a `Foo<int>`, the compiler must see both the `Foo` template and the fact that you’re trying to make a specific `Foo<int>`. Your compiler probably doesn’t remember the details of one .cpp file while it is compiling another .cpp file. It could, but most do not and if you are reading this FAQ, it almost definitely does not. BTW this is called the “separate compilation model.” Now based on those facts, here’s an example that shows why things are the way they are. Suppose you have a template `Foo` defined like this:

```

template<typename T>
class Foo {
public:
    Foo();
    void someMethod(T x);
private:
    T x;
};

Along with similar definitions for the member functions:

template<typename T>
Foo<T>::Foo()
{
    // ...
}

template<typename T>
void Foo<T>::someMethod(T x)
{
    // ...
}

Now suppose you have some code in file Bar.cpp that uses Foo<int>:

// Bar.cpp
void blah_blah_blah()
{
    // ...
}

```

```

Foo<int> f;
f.someMethod(5);
// ...
}

Clearly somebody somewhere is going to have to use the "pattern" for the constructor definition and for the someMethod() definition and instantiate those when T is actually int.
But if you had put the definition of the constructor and someMethod() into file Foo.cpp, the compiler would see the template code when it compiled Foo.cpp and it would see Foo<int> when it compiled Bar.cpp,
but there would never be a time when it saw both the template code and Foo<int>. So by rule #2 above, it co

```

uld never generate the code for `Foo<int>::someMethod()`.  
A note to the experts: I have obviously made several simplifications above. This was intentional so please don't complain too loudly. If you know t he difference between a .cpp file and a compilation unit, the difference between a class template and a template class, and the fact that templates really aren't just glorified macros, then don't complain: this particular question/answer wasn't aimed at you to begin with. I simplified things s o newbies would "get it," even if doing so offends some experts.

**const**对象只能访问**const**成员函数。因为**const**对象表示其不可改变，而非**const**成员函数可能在内部改变了对象，所以不能调用。

而非**const**对象既能访问**const**成员函数，也能访问非**const**成员函数，因为非**const**对象表示其可以改变。

```

#ifndef _MATRIX_H
#define _MATRIX_H
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

template<class T>
class CMatrix
{
public:
    CMatrix();
    CMatrix(int rows, int columns);
    CMatrix(const CMatrix&);
    ~CMatrix();
public:
    void Set(int row, int column, T val);
    T Get(int row, int column) const;
    CMatrix operator +(const CMatrix &mat2);
    CMatrix operator -(const CMatrix &mat2);
    CMatrix operator *(const CMatrix &mat2);
    CMatrix operator *(const T div);
    CMatrix operator /(const T div);
    CMatrix I(int n);
    int Rows() const{ return mRows; }
    int Columns() const{ return mColumns; }
    int Length() { return mRows*mColumns; }
    friend ostream &operator<<(ostream &os, const CMatrix &mat)
    {
        int row = mat.Rows();
        int col = mat.Columns();
        //mat是const, 因此只能访问const成员函数

        for (int i = 0; i < row; i++)
        {
            for (int j = 0; j < col; j++)
            {
                os << fixed << mat.Get(i, j) << '\t';
            }
            if (i < row)
            {
                os << "\n";
            }
        }
        os << "\n";
        return os;
    };

private:
    int mRows;
    int mColumns;
    T* startElement;
};

#endif

```



# COM连接点

## COM连接点 - 最简单的例子

```
AtAdvise(spCar, sinkptr, __uuidof(IMyCarEvents), &cookies);
sinkptr指向了一个CComObject<CSink>
CComObject<CSink>* sinkptr = nullptr;
CComObject<CSink>::CreateInstance(&sinkptr);
```

换句话说，一旦将sink对象成功挂载到了COM对象，那么sink对象的生命周期就由对应的COM(spCar)对象来管理。

一旦挂载成功，sink对象就托管给对应的COM对象了，如果对应的COM对象析构了，那么所有它管理的sink对象也就释放了。

CLR是什么？

# COM Interop(互操作)

## 引言

- 平台调用
- C++ Interop(互操作)
- COM Interop(互操作)

## 一、引言

这个系列是在C#基础知识中遗留下来的一个系列的，因为在C# 4.0中的一个新特性就是对COM互操作改进，然而COM互操作性却是.NET平台下其中一种互操作技术，为了帮助大家更好的了解.NET平台下的互操作技术，所以才有了这个系列。然而有些朋友们可能会有这样的疑问——“为什么我们需要掌握互操作技术的呢？”对于这个问题的解释就是——掌握了.NET平台下的互操作性技术可以帮助我们在.NET中调用非托管的dll和COM组件。.NET是建立在操作系统的之上的一个开发框架，其中.NET类库中的类也是对Windows API的抽象封装，然而.NET类库不可能对所有Windows API进行封装，当.NET中没有实现某个功能的类，然而该功能在Windows API被实现了，此时我们完全没必要去自己在.NET中自定义个类，这时候就可以调用Windows API中的函数来实现，此时就涉及到托管代码与非托管代码的交互，此时就需要使用到互操作性的技术来实现托管代码和非托管代码更好的交互。.NET平台下提供了3种互操作性的技术：

1. Platform Invoke(P/Invoke)，即平台调用，主要用于调用C库函数和Windows API
2. C++ Interop，主要用于Managed C++(托管C++)中调用C++类库
3. COM Interop，主要用于在.NET中调用COM组件和在COM中使用.NET程序集。

下面就对这3种技术分别介绍下。

## 二、平台调用

使用平台调用的技术可以在托管代码中调用动态链接库(Dll)中实现的非托管函数，如Win32 Dll和C/C++ 创建的Dll。看到这里，有些朋友们应该会有疑问——在怎样的场合我们可以使用平台调用技术来调用动态链接库中的非托管函数呢？

这个问题就如前面引言中说讲到的一样，当在开发过程中，.NET类库中没有提供相关API然而Win32 API中提供了相关的函数实现时，此时就可以考虑使用平台调用的技术在.NET开发的应用程序中调用Win32 API中的函数；

然而还有一个使用场景就是——由于托管代码的效率不如非托管代码，为了提高效率，此时也可以考虑托管代码中调用C库函数。

### 2.1 在托管代码中通过平台调用调用非托管代码的步骤

- (1). 获得非托管函数的信息，即dll的名称，需要调用的非托管函数名等信息
- (2). 在托管代码中对非托管函数进行声明，并且附加平台调用所需要属性
- (3). 在托管代码中直接调用第二步中声明的托管函数

### 2.2 平台调用的调用过程

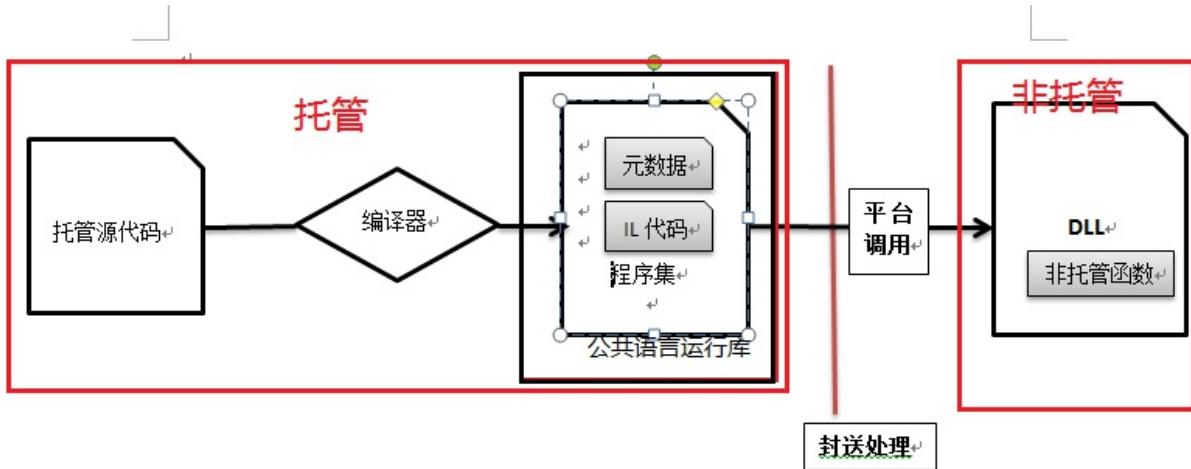
(1) 查找包含该函数的DLL，当需要调用某个函数时，当然第一步就需要知道包含该函数的DLL的位置，所以平台调用的第一步也就是查找DLL，其实在托管代码中调用非托管代码的调用过程可以想象成叫某个人做事情，首先我们要找到那个人在哪里(即查找函数的DLL过程)，找到那个人之后需要把要做的事情告诉他(相当于加载DLL到内存中和传入参数)，最后让他去完成需要完成的事情(相当于让非托管函数去执行任务)。

- (2) 将找到的DLL加载到内存中。

(3) 查找函数在内存中的地址并把其参数推入堆栈, 来封送所需的数据。CLR只会在第一次调用函数时, 才会去查找和加载DLL, 并查找函数在内存中的地址。当函数被调用过一次之后, CLR会将函数的地址缓存起来, CLR这种机制可以提高平台调用的效率。在应用程序域被卸载之前, 找到的DLL都一直存在于内存中。

(4) 执行非托管函数。

平台调用的过程可以通过下图更好地理解:



### 三、C++ Interop

第二部分主要向大家介绍了第一种互操作性技术, 然后我们也可以使用C++ Interop技术来实现与非托管代码进行交互。然而C++ Interop 方式有一个与平台调用不一样的地方, 就是C++ Interop 允许托管代码和非托管代码存在于一个程序集中, 甚至同一个文件中。C++ Interop 是在源代码上直接链接和编译非托管代码来实现与非托管代码进行互操作的, 而平台调用是加载编译后生成的非托管DLL并查找函数的入口地址来实现与非托管函数进行互操作的。C++ Interop 使用托管C++来包装非托管C++代码, 然后编译生成程序集, 然后再托管代码中引用该程序集, 从而来实现与非托管代码的互操作。关于具体的使用和与平台调用的比较, 这里就不多介绍, 我将会在后面的专题中具体介绍。

COM(Component Object Model. 组件对象模型)是微软之前推荐的一种开发技术, 由于微软过去十多年里开发了大量的COM组件,

然而不可能再使用.NET技术重写这些COM组件实现的功能, 所以为了解决在.NET中的托管代码能够调用COM组件中问题, .NET平台下提供了COM Interop, 即[COM互操作技术](#), COM interop不仅支持在托管代码中使用COM组件, 而且支持向COM组件中使用.NET程序集。

#### 1. 在.NET中使用COM组件

在.NET中使用COM对象, 主要有三种方法:

1. 使用TlbImp工具为COM组件创建一个互操作程序集来绑定早期的COM对象, 这样就可以在程序中添加互操作程序集来调用COM对象
2. 通过反射来后期绑定COM对象
3. 通过P/Invoke创建COM对象或使用C++ Interop为COM对象编写包装类

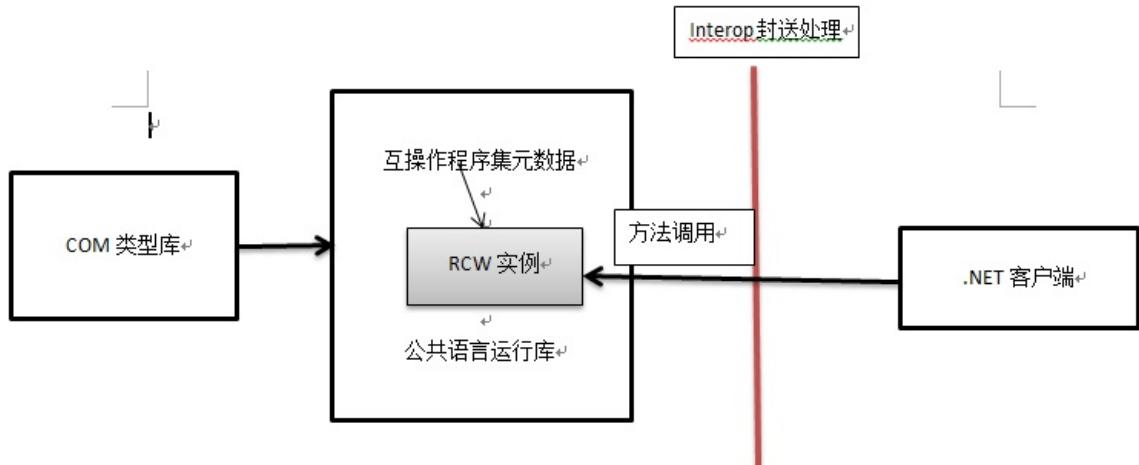
但是我们经常使用的都是方法一, 下面介绍下使用方法一在.NET 中使用COM对象的步骤:

1. 找到要使用的COM 组件并注册它。使用 regsvr32.exe 注册或注销 COM DLL。
2. 在项目中添加对 COM 组件或类型库的引用。

添加引用时, **Visual Studio** 会用到**Tlbimp.exe**(类型库导入程序), **Tlbimp.exe**程序将生成一个 **.NET Framework 互操作程序集**。该程序集又称为运行时可调用包装 (RCW), 其中包含了包装COM组件中的类和接口。**Visual Studio** 将生成组件的引用添加至项目。

1. 创建RCW中类的实例, 这样就可以使用托管对象一样来使用COM对象。

下面通过一个图更好地说明在.NET中使用COM组件的过程:

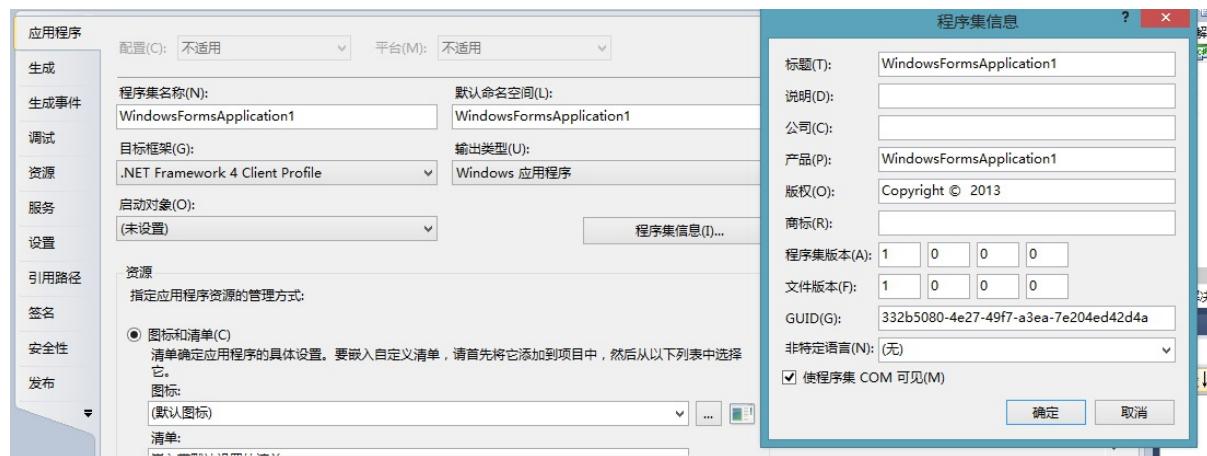


#### 在COM中使用.NET程序集

.NET 公共语言运行时通过COM可调用包装 (COM Callable Wrapper, 即CCW) 来完成与COM类型库的交互。CCW可以使COM客户端认为是在与普通的COM交互，同时使.NET组件认为它正在与托管应用程序交互。在这里CCW是非托管COM客户端与托管对象之间的一个代理。CCW既可以维护托管对象的生命周期，也负责数据类型在COM和.NET之间的相互转换。实现在COM使用.NET类型的基本步骤如：

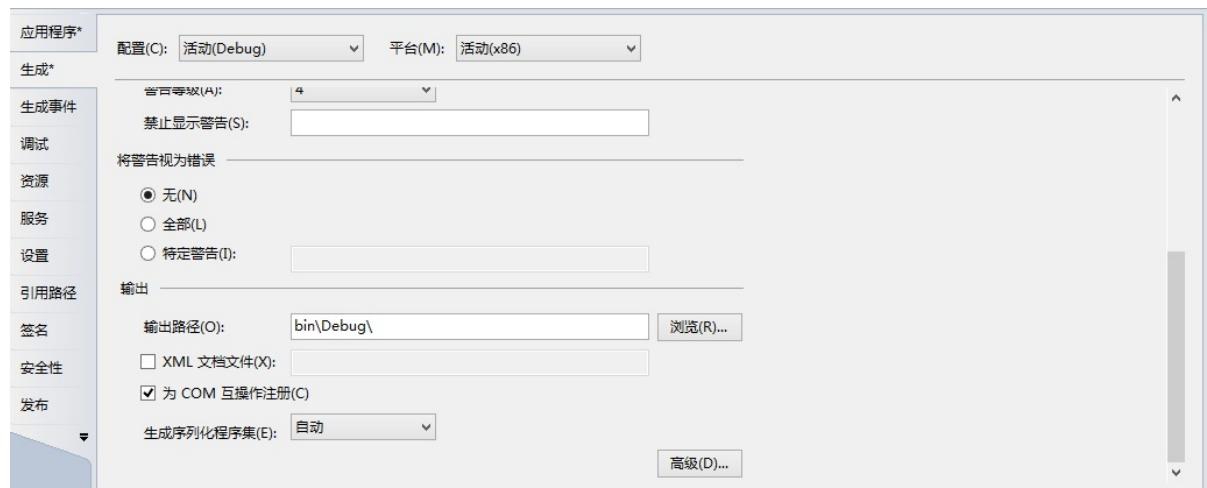
##### 1. 在C#项目中添加互操作特性

可以修改C#项目属性使程序集对COM可见。右键解决方案选择属性，在“应用程序标签”中选择“程序集信息”按钮，在弹出的对话框中选择“使程序集COM可见”选项，如下图所示：



##### 1. 生成COM类型库并对它进行注册以供COM客户端使用

在“生成”标签中，选中“为COM互操作注册”选项，如下图：



勾选“为COM互操作注册”选项后，Visual Studio会调用类型库导出工具(Tlbexp.exe)为.NET程序集生成COM类型库再使用程序集注册工具(Regasm.exe)来完成对.NET程序集和生成的COM类型库进行注册，这样COM客户端可以使用CCW服务来对.NET对象进行调用了。

总结

介绍到这里，本专题的内容就结束，本专题主要对.NET提供的互操作的技术做了一个总的概括，在后面的专题中将会对具体的技术进行详细的介绍和给出一些简单的使用例子。

# 常用的python数据处理函数

## pandas

### 处理结构化数据(Data Retrieval)DataFrame

#### List of Dictionaries to DataFrame

```
In[27]: import pandas as pd
In[28]: d = [{"city": "Delhi", "data": 1000},
...: {"city": "Bangalore", "data": 2000},
...: {"city": "Mumbai", "data": 1000}]
In[29]: pd.DataFrame(d)
Out[29]:
   city  data
0  Delhi  1000
1  Bangalore  2000
2  Mumbai  1000
In[30]: df = pd.DataFrame(d)
In[31]: df
Out[31]:
   city  data
0  Delhi  1000
1  Bangalore  2000
2  Mumbai  1000
```

#### CSV Files to DataFrame

```
import pandas as pd
In [2]: city_data = pd.read_csv(filepath_or_buffer='simplemaps-worldcities-basic.csv')
In [3]: city_data.head(n=10)
Out[3]:
   city  city_ascii  lat  lng  pop  country \
0  Qal eh-ye  Now Qal eh-ye  34.983000  63.133300  2997  Afghanistan
1  Chaghcharan  Chaghcharan  34.516701  65.250001  15000  Afghanistan
2  Lashkar Gah  Lashkar Gah  31.582998  64.360000  201546  Afghanistan
3  Zaranj  Zaranj  31.112001  61.886998  49851  Afghanistan
4  Tarin Kowt  Tarin Kowt  32.633298  65.866699  10000  Afghanistan
5  Zareh Sharah  Zareh Sharah  32.850000  68.416705  13737  Afghanistan
6  Asadabad  Asadabad  34.866000  71.150005  48400  Afghanistan
7  Taloqan  Taloqan  36.729999  69.540004  64256  Afghanistan
8  Mahmud-E Eraqi  Mahmud-E Eraqi  35.016696  69.333301  7407  Afghanistan
9  Mehtar Lam  Mehtar Lam  34.650000  70.166701  17345  Afghanistan
```

#### Database to DataFrame

可以从数据库中读取数据

```
server = 'xxxxxxxx' # Address of the database server
user = 'xxxxxx' # the username for the database server
password = 'xxxxx' # Password for the above user
database = 'xxxxx' # Database in which the table is present
conn = pymssql.connect(server=server, user=user, password=password, database=database)
query = "select * from some_table"
df = pd.read_sql(query, conn)
```

## Data Access

### Head and Tail

head提供dataframe前面几行数据, tail提供dataframe倒数几行数据。

```
In [11]: city_data.tail()
Out[11]:
   city  city_ascii  lat  lng  pop  country \
7317  Mutare  Mutare  -18.970019  32.650038  216785.0  Zimbabwe
7318  Kadoma  Kadoma  -18.330006  29.909947  56400.0  Zimbabwe
```

```
7319 Chitungwiza Chitungwiza -18.000001 31.100003 331071.0 Zimbabwe
7320 Harare Harare -17.817790 31.044709 1557406.5 Zimbabwe
7321 Bulawayo Bulawayo -20.169998 28.580002 697096.0 Zimbabwe
```

## Slicing and Dicing

数据切片，提取特定标签的数据。

```
In [12]: series_es = city_data.lat//提取lat标签的数据
In [13]: type(series_es)
Out[13]: pandas.core.series.Series
In [14]: series_es[1:10:2]
Out[14]:
1 34.516701
3 31.112001
5 32.850000
7 36.729999
9 34.650000
Name: lat, dtype: float64
In [15]: series_es[:7]
Out[15]:
0 34.983000
1 34.516701
2 31.582998
3 31.112001
4 32.633298
5 32.850000
6 34.866000
Name: lat, dtype: float64
In [23]: series_es[:-7315]
Out[23]:
0 34.983000
1 34.516701
2 31.582998
3 31.112001
4 32.633298
5 32.850000
6 34.866000
Name: lat, dtype: float64
```

### iloc

提取多少行(数据样本数目), 多少列(标签数目)。比如提取前4个标签的前5行数据。

```
In [28]: city_data.iloc[:,4]
Out[28]:
city city_ascii lat lng
0 Qal eh-ye Now Qal eh-ye 34.983000 63.133300
1 Chaghcharan Chaghcharan 34.516701 65.250001
2 Lashkar Gah Lashkar Gah 31.582998 64.360000
3 Zaranj Zaranj 31.112001 61.886998
4 Tarin Kowt Tarin Kowt 32.633298 65.866699
```

带判断的搜索

select cities that have population of more than 10 million and select columns that start with the letter l:

```
In [56]: city_data[city_data['pop'] >
10000000][city_data.columns[pd.Series(city_data.columns).str.
startswith('l')]]
Out[53]:
lat lng
360 -34.602502 -58.397531
1171 -23.558680 -46.625020
2068 31.216452 121.436505
3098 28.669993 77.230004
3110 19.016990 72.856989
3492 35.685017 139.751407
4074 19.442442 -99.130988
4513 24.869992 66.990009
5394 55.752164 37.615523
6124 41.104996 29.010002
7071 40.749979 -73.980017
```

## Data Operations

Using the values attribute of the output dataframe, we can treat it in the same way as a numpy array. 利用值属性，我们可以为dataframe填充数据，做缺失值处理。

```
In [55]: df = pd.DataFrame(np.random.randn(8, 3),
...: columns=['A', 'B', 'C'])
In [56]: df
Out[56]:
A B C
0 -0.271131 0.084627 -1.707637
1 1.895796 0.590270 -0.505681
2 -0.628760 -1.623905 1.143701
3 0.005082 1.316706 -0.792742
4 0.135748 -0.274006 1.989651
5 1.068555 0.669145 0.128079
6 -0.783522 0.167165 -0.426007
7 0.498378 -0.950698 2.342104
In [58]: nparray = df.values
In [59]: type(nparray)
Out[59]: numpy.ndarray
```

## Missing Data and the fillna Function

填补缺失值。

```
In [65]: df.iloc[4,2] = NA
In [66]: df
Out[66]:
A B C
0 -0.271131 0.084627 -1.707637
1 1.895796 0.590270 -0.505681
2 -0.628760 -1.623905 1.143701
3 0.005082 1.316706 -0.792742
4 0.135748 -0.274006 NaN
5 1.068555 0.669145 0.128079
6 -0.783522 0.167165 -0.426007
7 0.498378 -0.950698 2.342104
In [70]: df.fillna (0)
Out[70]:
A B C
0 -0.271131 0.084627 -1.707637
1 1.895796 0.590270 -0.505681
2 -0.628760 -1.623905 1.143701
3 0.005082 1.316706 -0.792742
4 0.135748 -0.274006 0.000000
5 1.068555 0.669145 0.128079
6 -0.783522 0.167165 -0.426007
7 0.498378 -0.950698 2.342104
```

## Descriptive Statistics Functions 统计属性

```
In [76]: columns_numeric = ['lat','lng','pop']
In [78]: city_data[columns_numeric].mean()
Out[78]:
lat 20.662876
lng 10.711914
pop 265463.071633
dtype: float64

In [79]: city_data[columns_numeric].sum()
Out[79]:
lat 1.512936e+05
lng 7.843263e+04
pop 1.943721e+09
dtype: float64

In [80]: city_data[columns_numeric].count()
Out[80]:
lat 7322
lng 7322
pop 7322
dtype: int64

In [81]: city_data[columns_numeric].median()
Out[81]:
lat 26.792730
lng 18.617509
pop 61322.750000
dtype: float64
```

```
In [83]: city_data[columns_numeric].quantile(0.8)
Out[83]:
lat 46.852480
lng 89.900018
pop 269210.000000
dtype: float64

In [85]: city_data[columns_numeric].sum(axis = 1)
Out[85]:
0 3.095116e+03
1 1.509977e+04
2 2.016419e+05
3 4.994400e+04
4 1.009850e+04
```

Describe用来输出数据的所有统计属性。

Pandas also provides us with another very handy function called describe. This function will calculate the most important statistics for numerical data in one go so that we don't have to use individual functions.

```
In [86]: city_data[columns_numeric].describe()
Out[86]:
lat lng pop
count 7322.000000 7322.000000 7.322000e+03
mean 28.662876 10.711914 2.654631e+05
std 29.134818 79.044615 8.287622e+05
min -89.982894 -179.589779 -9.900000e+01
25% -0.324710 -64.788472 1.734425e+04
50% 26.792730 18.617509 6.132275e+04
75% 43.575448 73.103628 2.001726e+05
max 82.483323 179.383304 2.200630e+07
```

## Concatenating Dataframes

由于我们需要处理的数据通常有多个，因此我们需要合并这些数据。pandas提供了很多函数来支持数据的合并。

### Concatenating Using the concat method

合并两组，每组随机选择3个样本。

```
In [25]: city_data1 = city_data.sample(3)
In [26]: city_data2 = city_data.sample(3)
In [29]: city_data_combine = pd.concat([city_data1,city_data2])
In [30]: city_data_combine
Out[30]:
city city_ascii lat lng pop \
4255 Groningen Groningen 53.220407 6.580001 198941.0
5171 Tambov Tambov 52.730023 41.430019 296207.5
4204 Karibib Karibib -21.939003 15.852996 6898.0
4800 Focsani Focsani 45.696551 27.186547 92636.5
1183 Pleven Pleven 43.423769 24.613371 110445.5
7005 Indianapolis Indianapolis 39.749988 -86.170048 1104641.5

country iso2 iso3 province
4255 Netherlands NL NLD Groningen
5171 Russia RU RUS Tambov
4204 Namibia NaN NAM Erongo
4800 Romania RO ROU Vrancea
1183 Bulgaria BG BGR Pleven
7005 United States of America US USA Indiana
Another
```

另外一个场景是，我们对同一个数据集的不同columns进行合并，也就是对标签进行合并。index就是样本标号。

```
In [32]: df1 = pd.DataFrame({'col1': ['col10', 'col11', 'col12', 'col13'],
...: 'col2': ['col20', 'col21', 'col22', 'col23'],
...: 'col3': ['col30', 'col31', 'col32', 'col33'],
...: 'col4': ['col40', 'col41', 'col42', 'col43']},
...: index=[0, 1, 2, 3])

In [33]: df1
Out[33]:
col1 col2 col3 col4
0 col10 col20 col30 col40
1 col11 col21 col31 col41
```

```

2 col12 col22 col32 col42
3 col13 col23 col33 col43
In [34]: df4 = pd.DataFrame({'col2': ['col22', 'col23', 'col26', 'col27'],
...: 'Col4': ['Col42', 'Col43', 'Col46', 'Col47'],
...: 'col6': ['col62', 'col63', 'col66', 'col67']},
...: index=[2, 3, 6, 7])
In [37]: pd.concat([df1,df4], axis=1)
Out[37]:
col1 col2 col3 col4 Col4 col2 col6
0 col10 col10 col10 col10 NaN NaN NaN
1 col11 col21 col31 col41 NaN NaN NaN
2 col12 col22 col32 col42 Col42 col22 col62
3 col13 col23 col33 col43 Col43 col23 col63
6 NaN NaN NaN NaN Col46 col26 col66
7 NaN NaN NaN NaN Col47 col27 col67

```

## Database Style Concatenations Using the merge Command

The most familiar way to concatenate data (for those acquainted with relational databases) is using the join operation provided by the databases. Pandas provides a database friendly set of join operations for dataframes. These operations are optimized for high performance and are often the preferred method for joining disparate dataframes.

**Joining by columns:** This is the most natural way of joining two dataframes. In this method, we have two dataframes sharing a common column and we can join the two dataframes using that column. The pandas library has a full range of join operations (inner, outer, left, right, etc.) and we will demonstrate the use of inner join in this sub-section. You can easily figure out how to do the rest of join operations by checking out the pandas documentation.

For this example, we will break our original cities data into two different dataframes, one having the city information and the other having the country information. Then, we can join them using one of the shared common columns.

Lasso输出系数

```

def train(self):
    x_train, y_train, x_test, y_test = self.load_data()
    lasso = Lasso(random_state=0)
    alphas = np.logspace(-4, -0.5, 30)
    estimator = GridSearchCV(lasso, dict(alpha=alphas))
    estimator.fit(x_train, y_train)
    lasso.fit(x_train, y_train)//必须先对lasso使用fit, 才可以使用coef_
    print "coef_ = ", lasso.coef_
    return estimator

```

## 第三章:算法

这一章主要介绍

1. 线性代数与矩阵计算中的算法, 比如:LU分解, Householder变换, 矩阵求本征值, 矩阵求逆, PCA, SVD, Krylov子空间法, Lanczos等。主要是要对对称, 非对称矩阵的线程方程求解, 以及矩阵本征值, 本征矢计算有一个清晰的轮廓, 也就是对不同的矩阵类型知道有什么最适合的方法, 以及明白各种方法的优缺点。最后, 最关键的就是大规模稀疏矩阵的低秩分解, 这是推荐系统的基础。
2. 传统的算法与数据结构, 比如排序, 动态规划, 最短路径, 插值;二叉树, 红黑树, 链表, 队列, 堆栈。
3. 未来可能会把图像与信号处理的算法加在这里, 但是不急。

# 矩阵计算

这一节主要涉及到线性代数与矩阵计算方面的东西：

## 1. 求解线性方程

- i. 满秩的使用Gauss消元法, 矩阵求逆
- ii. 超定方程使用最小二乘法(等价于求伪逆法)
- iii. 欠定方程的正则化方法

## 2. 矩阵变换

- i. Gram-Schmidt 变换
- ii. Household 变换
- iii. Givens 变换

## 3. 矩阵分解技巧

- i. Schur 分解
- ii. LU 分解
- iii. QR 分解
- iv. Krylov 子空间法

## 4. 求解矩阵本征值的方法

- i. Power 方法
- ii. QR 分解(对称,  $n < 25$  最实用)
- iii. 分而治之(对称,  $n > 25$  最实用)
- iv. Jacob 方法
- v. 瑞利商迭代
- vi. 对分法和分而治之
- vii. Lanczos 方法求本征态

## 5. 奇异矩阵分析

- i. SVD
- ii. PCA
- iii. Condition Number

## 6. 大规模稀疏矩阵(Large Sparse Matrix)问题

- i. Lanczos
- ii. SVD
- iii. Krylov
- iv. Large Sparse Matrix 在推荐系统中的应用

矩阵计算在力学, 物理学, 以及现今的推荐系统中都有着重重要的应用, 后者主要处理的是大规模的稀疏矩阵问题。重要的不是理论, 而是怎么把这些理论用来巧妙地解决实际的问题, 因此, 尽可能的寻找这些方法的应用场景。

这一章主要讨论的实际问题如下:

1. 线性方程组求解问题, 基于最小二乘法的正规方程方法(或者说伪逆法)。以及变量数目远大于方程数目的问题, 主要是基于Ridge Regression, Lasso Regression, Regularized Discriminant Analysis, Regularized multinomial logistic regression。
2. 矩阵本征值求解方法, 求解矩阵本征值的方法有幂法(只能求解最大或者最小的本征值), QR分解方法, 通过一系列的QR会得到一个与原矩阵相似的上三角矩阵。常用的实现QR分解的方法有Gram-Schmidt变换, Household变换, Givens变换(Givens变换可以并行计算, 因此每次只修改i,j两行;且最实用与大规模稀疏矩阵)。为了快速的通过QR分解求解本征值, 我们需要引入Hessenberg矩阵, 通过把矩阵变成上Hessenberg矩阵, 再通过Givens变换进行QR分解, 使得以后每次QR分解的时间复杂度是 $O(n^2)$ 。  
 $(A - \sigma I)^{-1}$ 可以用来求解 $\sigma$ 附近的本征值本征矢。

3. SVD, PCA这些分解有提及, 但是没有给出具体的应用场景。其实SVD可以用于推荐系统, PCA也可以用在机器学习中用于特征提取。
4. Krylov子空间法是很重要的一种求解大规模矩阵(无论稀疏与否)的有效方法, 对于一般矩阵(无论对称与否), 可以使用Arnoldi算法, 化为相似的上Hessenberg矩阵; 而对于对称的矩阵, 我们可以使用更方便的Lanczos方法, 化为三对角矩阵进行求解。此外, 共轭梯度法也是一种Krylov子空间法。

## 一些结论性的东西

1. 对于维数小于25的三对角矩阵, QR迭代式目前求所有本征值, 本征矢最快最实用的方法。
2. 对于维数大于25的三对角矩阵, 分而治之是目前求所有本征值, 本征矢最快最实用的方法。
3. 非对称矩阵实际使用的直接方法是隐式位移的QR迭代。(求特征值问题实际是多项式求根问题, 采用的是迭代法)
4. 矩阵的条件数或者更一般的矩阵的本征值分布是迭代法求解矩阵本征值或者求解线性方程组收敛的关键性因素。

## 这一章的终极目的

寻找超大规模稀疏矩阵低秩分解的快速实用方法, 对标的的是当前的SVD算法。推荐系统是其核心的应用场景。

## 需要做的事情

1. Lanczos方法是求解超大规模稀疏矩阵前几个特征值的有效方法, 能否把他应用到电商推荐系统中, 处理User-Item矩阵问题? 不可以。  
Lanczos适用于对称矩阵, 非对称矩阵需要用阿诺尔迪算法。
2. 把各种求解本征值问题的时间复杂度列成一张表。
3. 求解线性方程组的方法的时间复杂度列成一张表。
4. 在不理解一些算法的时候, 最好自己去实现她, 在实现的过程中, 就加深理解了。比如“隐式位移的QR迭代”, 分而治之的对称矩阵求解本征值, 本征矢。
5. 弄清楚矩阵本征值, 迭代法求本征值的收敛速度以及最优化收敛的关系。
6. 加一节有关随机矩阵的理论, 前人以及研究过GOE, GUE, GSE分布的随机矩阵, 是否正对当前的电商User-Item矩阵, 用0-1矩阵来模拟, 然后我们从理论上研究这种矩阵的本征值分布?
7. 用Krylov子空间理论, 给予PCA, SVD, FM, CG(共轭梯度法)这些算法一个统一的诠释。

# 线性方程组求解方法

1. 满秩的使用Gauss消元法, 矩阵求逆
2. 超定方程使用最小二乘法(等价于求伪逆法)
3. 欠定方程的正则化方法

## 满秩的线性方程组

$$Ax = b$$

对于变量数目N不多的线性方程组, 我可以通过矩阵求逆的方式来求得未知变量x;

$$x = A^{-1}b$$

可以利用矩阵的LU分解来求, 求解的时间复杂度就是 $O(N^3)$ .

当N很大的时候, 还是很费时间的, 这个时候可以利用共轭梯度法来求解。具体步骤如下: 见Krylov子空间法那一部分。

## 超定方程使用最小二乘法

$$Ax = b$$

若此时矩阵A是MxN维的, M>N, 则是超定问题。此时我们可以求他们的最小二乘解。即:

$$L(x) = (Ax - b)^2$$

通过 $L(x)$ 对x求导并令其梯度为0, 可以得到:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x} = A^T Ax - A^T b = 0$$

得到:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

这就是欠定方程的最小二乘解。

## 求解欠定方程的正则化方法

$$Ax = b$$

若此时矩阵A是MxN维的, M<N, 此时变量个数大于方程组个数, 因此有无穷多个解, 这就是欠定问题。在这无数多个解中, 我们要根据一些对问题系统的先验知识来对问题进行约束。使得解具有鲁棒性或者稀疏性。

使得解具有稀疏性可能是我们首先要考虑的, 因为系统并没有那么多变量, 或者系统仅仅由少数一些变量决定的。因此我们可以通过L1正则化来求解欠定问题。

$$L(x) = (Ax - b)^2 + \lambda ||x||_1$$

其中的参数 $\lambda$ 需要通过交叉验证来确定。

## other

利用LU分解, 我们可以求满秩的线性方程组的解。对于 $m \times n$ ( $m > n$ )阶矩阵, 对于超定方程(方程数目大于未知数的个数), 因为一般没有解满足 $Ax = b$ , 这就是最小二乘法发挥作用的地方。

这个问题的解就是使得:  $||Ax - b||_2^2$ 值极小的解, 通过求导(把 $x \rightarrow x + e$ , 求梯度等于0的 $x$ ), 可以得到解为:

$$x = (X^T A)^{-1} A^T b$$

### Gram-Schmidt正交化

Gram-Schmidt正交化的基本想法, 是利用投影原理在已有基的基础上构造一个新的正交基。

$((\beta))_1$

<http://elsenaju.eu/Calculator/QR-decomposition.htm>

[https://rosettacode.org/wiki/QR\\_decomposition](https://rosettacode.org/wiki/QR_decomposition)

[https://www.wikiwand.com/en/QR\\_decomposition#/Example\\_2](https://www.wikiwand.com/en/QR_decomposition#/Example_2)

[https://www.wikiwand.com/en/Householder\\_transformation](https://www.wikiwand.com/en/Householder_transformation)

C#有开源的免费的代数库mathnet.numerics,功能也比较多,推荐通过Nuget来安装这个库

# 矩阵变换方法

1. Gram-Schmidt 变换
2. Household 变换
3. Givens 变换

最好对每个算法，给出实用的代码在这儿。

Household 变换，Givens 变换是进行矩阵QR分解的基础，而这些分解是对矩阵进行本征分解的基础。

对称矩阵进行Household变换或者Givens变换之后，就变成了三对角矩阵，对于三对角矩阵，有高效的求解本征值的方法，因此对于对称矩阵，计算本征值的时间复杂度就是这两个变换的时间复杂度。

对于非对称矩阵，可以通过一系列的QR分解，来把矩阵变成对角矩阵。(问题是，怎么保证通过一系列QR分解，它最终会收敛到对角矩阵)。

LU分解可以用来求解线性方程组，也可以用来对矩阵求逆。

## Gram-Schmidt 变换

对矩阵A进行分解，首先内积 $[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = \mathbf{a}\mathbf{u}$ ，再定义投影：

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} = \frac{[\mathbf{u}, \mathbf{a}]}{[\mathbf{u}, \mathbf{u}]} \mathbf{u}$$

然后：

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_j} \mathbf{a}_k \quad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k] \mathbf{e}_j$$

注意到所有的 $\mathbf{e}_k$ 是彼此垂直的，因此：

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^k [\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k] \mathbf{e}_j$$

因此矩阵A可以分解成正交矩阵与上三角矩阵：

$$A = QR$$

其中： $R_{i,j} = [e_i, a_j]$ ,  $i \leq j$

$$Q = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$$

## Household 变换

为了实现QR分解，我们也可以采用Household变换。

假设 $\mathbf{e}_1$ 是矢量 $(1, 0, 0, \dots, 0)^T$ , I是 $m \times m$ 的单位阵。设：

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \alpha \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$Q = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T$$

对于复数矩阵：

$$Q = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$$

Q是 $m \times m$ 的Household矩阵，并且：

$$Q\mathbf{x} = (\alpha, 0, 0, \dots, 0)^T$$

因此：

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \cdots & A' & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q'_k \end{bmatrix}$$

t次迭代以后， $t = \min(m-1, n)$ :

$$R = Q_t \dots Q_2 Q_1 A$$

是一个上三角矩阵，又因为：

$$Q = Q_1^T Q_2^T \dots Q_t^T$$

因此  $A=QR$  是矩阵  $A$  的一个 QR 分解。一次 Household 变换需要  $\frac{2}{3}n^3$  次乘法操作。

## Givens 变换

Givens 变换通过每次乘以一个正交矩阵使得一个非对角元变为 0 来实现 QR 分解。相对于 Household 变换的有点是它可以并行，并且适合于非常稀疏的矩阵。因为每次操作只影响  $i, j$  两行的元素，因此可以做到并行计算。

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

其中：

$$g_{kk} = 1; \quad k \neq i, j$$

$$g_{kk} = c; \quad k \neq i, j$$

$$g_{ij} = -g_{ji} = -s;$$

通过此 Givens 变换使得矩阵  $A$  的元素  $A_{i,j} = 0$ ，其中  $i < j$

一个例子：

$$G_2 A_2 = A_3$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & -2.4327 & 3.0729 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

在这里：

$$r \approx \sqrt{(-2.4327)^2 + 4^2} \approx 4.6817$$

$$c \approx -2.4327/r \approx -0.5196$$

$$s \approx -4/r \approx -0.8544$$

$$A_3 \approx \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & 4.6817 & 0.9664 \\ 0 & 0 & -4.1843 \end{bmatrix}$$

# 矩阵分解方法

1. Schur分解
2. LU分解
3. QR分解
4. 矩阵本征值分解
5. 矩阵奇异值分解
6. Krylov子空间法
7. Cholesky 分解

## Schur分解

复 $n \times n$ 的矩阵酉相似于一个上三角阵。

$$A = Q U Q^{-1}$$

其中Q是酉矩阵(Unitary Matrix)。

## LU分解

知道存在LU分解，能用来进行线性方程组求解以及矩阵求逆就可以，具体的实现细节可以查书，比如《Matrix Computations》3.2节 THe LU Factorization。明白其思想更好。

任何非奇异方阵都可以分解成上三角阵与下三角阵之积

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

对比两边矩阵的，可以求得：

但是编程时，行列都是从0开始时，要注意转换。

第1行： $a_{1j} = u_{1j}, j = 1, 2, \dots, n.$  =>  $u_{1j} = a_{1j}$ 。

第1列： $a_{j1} = l_{j1}u_{11}, j = 1, 2, \dots, n.$  =>  $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$ 。

...

第k行： $a_{kj} = \sum_{i=1}^{i=k} l_{ki}u_{ij}, => u_{kj} = a_{kj} - \sum_{i=1}^{i=k-1} l_{ki}u_{ij}$ 。

第k列： $a_{jk} = \sum_{i=1}^{i=k} l_{ji}u_{ik}, => u_{jk} = [a_{jk} - \sum_{i=1}^{i=k-1} l_{ji}u_{ik}]/u_{kk}$ 。

因为前k-1行的 $u_{ij}$ 都已知，前k-1列的 $l_{ij}$ 都已知，因此可以求得第k行 $u_{ij}$ ，第k列的 $l_{ij}$ 。

问题：得保证 $a_{11}$ 非0，以及矩阵非奇异。

## 利用LU分解求线性方程组的解

求解线性方程组  $Ax=b$  相当于求解  $LUX=b$ ;

设  $Y = UX$ ; 因此  $LY = b$ ; 首先求解  $LY = b$ ,

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

求解上面的方程：

第1行： $y_1 = b_1$ 。

对于第k行： $b_k = \sum_{i=1}^{i=k} l_{ki}y_i => y_k = b_k - \sum_{i=1}^{i=k-1} l_{ki}y_i$ 。

求得Y之后，代入Y=UX求得X：

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

对于上三角矩阵，我们从第n行开始求解

对第n行:  $y_n = u_{nn}x_n \Rightarrow x_n = y_n/u_{nn}$

...

对第k行:  $y_k = \sum_{i=k}^{i=n} u_{ki}x_i \Rightarrow x_k = [y_k - \sum_{i=k+1}^{i=n} u_{ki}x_i]/u_{kk}$   
这样通过LU分解矩阵就求得了线性方程组的解X.

## 矩阵求逆

我们可以利用LU分解来求非奇异方阵的逆矩阵。

**AB=I**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

可以分解成求:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

右边的列, 就只是第k行值非0;

$A * b_k = e_k$ , 对所有的 $e_k$ 求出 $b_k$ 就可以得到A的逆矩阵 $A^{-1} = B$

实际求解中把A换成LU来减少计算量。总的计算开销还是 $n^3$ 。但是这样并不比直接的高斯消元法来的快。

算法实现如下。

```
//LU
template<class T>
void CMatrix<T>::LU(CMatrix &mat, int N, CMatrix* L, CMatrix* U)
{
    for (int k = 0; k < N; k++)
    {
        for (int j = k; j < N; j++)
        {
            T U_k_j = mat.Get(k, j);
            T L_j_k = mat.Get(j, k);
            for (int i = 0; i < k; i++)
            {
                U_k_j -= L->Get(k, i)*U->Get(i, j);
            }
            U->Set(k, j, U_k_j);

            for (int i = 0; i < k; i++)
            {
                L_j_k -= L->Get(j, i)*U->Get(i, k);
            }
            L_j_k = L_j_k / U->Get(k, k);
            L->Set(j, k, L_j_k);
        }
    }
}

//solve linear algebra equations
CVector Solve(CMatrix<double>& mat, CVector& vec)
{
    CVector X(vec.Size());
    CVector Y(vec.Size());
    if (mat.Columns() != mat.Rows() && mat.Rows() != vec.Size())
    {
        printf("Dimension not match!");
        return X;
    }
    CMatrix<double> L(vec.Size(), vec.Size());
    CMatrix<double> U(vec.Size(), vec.Size());
    mat.LU(mat, vec.Size(), &L, &U);
    Y = SolveLow(L, vec);
    cout << "Y\n" << Y;
    X = SolveUpper(U, Y);
    cout << "X\n" << X;
    return X;
}

CVector SolveLow(CMatrix<double>& mat, CVector& vec)
```

```

{
    CVector vecRes(vec.Size());
    if (mat.Columns() != mat.Rows() && mat.Rows() != vec.Size())
    {
        printf("Dimension not match!");
        return vecRes;
    }

    for (int k = 0; k < vec.Size(); k++)
    {
        double mRes = 0;
        mRes = vec.Get(k);
        for (int i = 0; i < k; i++)
        {
            mRes -= mat.Get(k, i)*vecRes.Get(i);
        }
        vecRes.Set(k, mRes);
    }
    return vecRes;
}

CVector SolveUpper(CMatrix<double>& mat, CVector& vec)
{
    CVector vecRes(vec.Size());
    if (mat.Columns() != mat.Rows() && mat.Rows() != vec.Size())
    {
        printf("Dimension not match!");
        return vecRes;
    }

    for (int k = vec.Size() - 1; k >= 0 ; k--)
    {
        double mRes = 0;
        mRes = vec.Get(k);
        for (int i = k+1; i < vec.Size(); i++)
        {
            mRes -= mat.Get(k, i)*vecRes.Get(i);
        }
        mRes = mRes / mat.Get(k, k);
        vecRes.Set(k, mRes);
    }
    return vecRes;
}

//inverse matrix
template<class T>
CMatrix<T> CMatrix<T>::Inv()
{
    CMatrix result = *this;
    CMatrix<double> L(mRows, mColumns);
    CMatrix<double> U(mRows, mColumns);
    CMatrix<double> InvMat(mRows, mColumns);
    LU(result, mRows, &L, &U);
    for (int col = 0; col < mColumns; col++)
    {
        CVector vec(mRows, col);
        CVector mSolution(mRows);
        mSolution = SolveLow(L, vec);
        mSolution = SolveUpper(U, mSolution);
        for (int row = 0; row < mRows; row++)
        {
            InvMat.Set(row, col, mSolution.Get(row));
        }
    }
    return InvMat;
}

```

## QR分解

定理: 设A是 $m \times n$ 阶矩阵,  $m \geq n$ , 假设A为满秩的, 则存在一个唯一的正交矩阵 $Q$  ( $Q^T Q = I$ ) 和唯一的具有正对角元  $r_{ij} > 0$  的 $n \times n$ 阶上三角阵 $R$ 使得  $A = QR$ .

QR分解算法:

$$A_0 = A = Q_1 R_1$$

然后:

$$A_1 = R_1 Q_1$$

一般形式:

$$A_k = R_k Q_k$$

$$A_k = Q_{k+1} R_{k+1}$$

因此有：

$$A_k = Q_{k+1} R_{k+1} = Q_{k+1} A_{k+1} Q_{k+1}^T$$

因此：

$$\begin{aligned} A &= Q_1 R_1 = Q_1 (A_1 Q_1^T) = Q_1 A_1 Q_1^T \\ &= (Q_1 Q_2 \dots Q_k) A_k (Q_1 Q_2 \dots Q_k)^T \end{aligned}$$

当K区域无穷时， $A_k$ 就是对称矩阵， $(Q_1 Q_2 \dots Q_k)$ 就是本征矢量。

算法的收敛性：假设：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

则矩阵元 $a_{ij}^{(k)}$ 将以如下方式收敛到0：

$$a_{ij}^{(k)} = O(|\lambda_i / \lambda_j|^k) \text{ for all } i \geq j.$$

## python QR分解实例

发现随着QR迭代次数的增加，与原矩阵A相似的矩阵 $A^k$ 越来越收敛于上三角矩阵，也就是对角元以下的元素越来越趋于0，但是对角元上面的元素并不趋于0。虽然 $A^k$ 并没有趋于一个对角阵，但是 $(Q_1 Q_2 \dots Q_k)$ 就是本征矢。这给你我们QR分解求解矩阵本征值一个直观的图像。

```
A:
[[2, 3], [1, 2]]
Eig of A:
[3.73205081 0.26794919]
EigVector of A:
[[ 0.8660254 -0.8660254]
 [ 0.5         0.5        ]]
EigVector : 0
[[-0.89442719 -0.4472136 ]
 [-0.4472136   0.89442719]]
A = RQ: 0
[[ 3.6 -2.2]
 [-0.2  0.4]]
EigVector : 1
[[ 0.86824314 -0.49613894]
 [ 0.49613894  0.86824314]]
A = RQ: 1
[[3.72307692 2.01538462]
 [0.01538462 0.27692308]]
EigVector : 2
[[-0.86618559 -0.49972245]
 [-0.49972245  0.86618559]]
A = RQ: 2
[[ 3.73140954e+00 -2.00110988e+00]
 [-1.10987791e-03  2.68590455e-01]]
```

缺点：

每步QR分解的时间复杂度是 $O(n^3)$ ，此外当有简并的本征值时，收敛会非常慢。

## 更有效的QR分解：Hessenberg矩阵

基于直接的QR分解并不是高效的方法，如果通过Household变换或者Givens变换把待分解的矩阵转换成上Hessenberg矩阵，此操作的时间复杂度是 $O(n^3)$ ，此时再利用Givens变换来进行QR分解，则QR分解的复杂度从 $O(n^3)$ 变成了 $O(n^2)$ 。

问题是为啥不直接一步用Household变换实现QR？反正时间复杂度都是 $O(n^3)$ ？

原因是，当我们把矩阵变成Hessenberg矩阵后，以后就不再需要进行 $O(n^3)$ 的操作，因为上三角乘以上Hessenberg矩阵还是上Hessenberg矩阵，也就是所有的 $A^k$ 都是上Hessenberg矩阵。因此，以后的QR分解都在Hessenberg上进行，每次的复杂度都是 $O(n^2)$ 。

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Phase 1}} \left[ \begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Phase 2}} \left[ \begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \end{array}$$

**Phase 1. (Section 2.2.1).** In the first phase we will compute a Hessenberg matrix  $H$  (and orthogonal  $U$ ) such that

$$A = UHU^*.$$

Unlike the Schur factorization ( $A = UTU^*$  where  $T$  is upper triangular) such a reduction can be done with a finite number of operations.

**Phase 2. (Section 2.2.2).** In the second phase we will apply the basic QR-method to the matrix  $H$ . It turns out that several improvements can be done when applying the basic QR-method to a Hessenberg matrix such that the complexity of one step is  $\mathcal{O}(n^2)$ , instead of  $\mathcal{O}(n^3)$  in the basic version.

## QR分解方式的比较

QR分解的实现方式有三种，第一种通过Gram-Schmidt正交化方法，第二种是Household变换方法，第三种是Givens变换方法。

QR分解方法	时间复杂度	优缺点
Gram-Schmidt正交化方法		
Household变换		
Givens变换		可以并行。适合于稀疏矩阵
Hessenberg+Givens	一次Household进行QR分解的时间	时间复杂度最小

## 矩阵本征值分解

要证明的是，可以通过矩阵QR分解来实现矩阵本征值分解。

实际上，我们在求解矩阵的本征值的时候，要分矩阵是对称矩阵还是非对称矩阵，或者说是厄密矩阵还是非厄密矩阵。算法的收敛性：假设：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

则矩阵 $A_k$ 的矩阵元 $a_{ij}^{(k)}$ 将以如下方式收敛到0：

$$a_{ij}^{(k)} = O(|\lambda_i/\lambda_j|^k) \text{ for all } i > j. \text{ 也就是对角元以下的矩阵元会以这样的方式收敛到0。}$$

## Krylov子空间法

为了求解如下线性方程组问题：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

身处大数据时代，为了更高效的处理数据，从大数据中提取我们想要的知识，我们就不得不提到Krylov子空间法，这个方法的强大之处在于我们不需要在超大的原始空间求解问题，而是在一个远小于原始空间的子空间去求解问题。适合对称矩阵的共轭梯度法，Lanczos方法，以及适合非对称矩阵的Arnoldi算法就是Krylov子空间法的实例。

对一个矩阵，最便宜的操作莫过于让他乘以一个向量。即：我们可以得到如下序列：

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{Ay}_1$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{A}\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{y}_1$$

定义:  $K = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$

$$AK = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{A}\mathbf{y}_n) = (\mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{A}^n\mathbf{y}_1)$$

假定:  $\mathbf{A}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{C}$

我们可以得到C的形式如下:

$$K^{-1}AK = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -c_1 \\ 1 & 0 & \cdots & -c_2 \\ 0 & 1 & \cdots & -c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -c_n \end{bmatrix}$$

C是一个上Hessenberg矩阵。

一个问题是, 即使A是稀疏的, K也可能是稠密的; 另一个问题, 由于执行的是矩阵的幂操作, 因此 $y_i$ 最终收敛到A的最大本征值对应的本征矢量方向。

实际上, 我们用一个正交矩阵Q来近似K, 对K做QR分解,  $K=QR$ 。因此有:

$$K^{-1}AK = (R^{-1}Q^T)AQR = C$$

$$Q^T AQ = K^{-1}AK = RCR^{-1} = H$$

因为R是上三角矩阵, C是上Hessenberg矩阵, 因此H是上Hessenberg矩阵。又因为:  $AQ=QH$ 。

$$Aq_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{i,j} q_i$$

因为 $q_i$ 是正交的, 因此我们可以在上式同时乘以 $q_m^T$ , 然后得到:

$$q_m^T Aq_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{i,j} q_m^T q_i = h_{m,j} \text{ for } 1 \leq m \leq j$$

因此:

$$h_{j+1,j} q_{j+1} = Aq_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} q_i$$

总的来说, 我们想对矩阵A做正交变换, 因为正交变换不改变矩阵的本征值。因此, 我们需要求这个正交变换矩阵Q。下面的算法告诉我们怎么求这个正交矩阵Q。附带我们把正交变换后得到的矩阵H也求出来了, H是一个上Hessenberg矩阵。因此如果我们发现H有一个下次对角元为 $h_{k,k-1}$ , 则我们就可以停止迭代, 因为此时我们可以对矩阵H进行分解, 因为我们得到的矩阵 $H_{1:k,1:k}$ 的矩阵本征值就是原始矩阵的H的本征值, 因此有如下的:

### Arnoldi算法:

```
q1 = b/||b||2
lk is the number of columns of Q and H to computer!
for j=1 to lk:
```

$$z = Aq_j$$

for i = 1 to j:

$$h_{i,j} = q_i^T z$$

$$z = z - h_{i,j} q_i$$

end for

$$h_{j+1,j} = ||z||_2$$

if  $h_{j+1,j} = 0$ , quit

$$q_{j+1} = z/h_{j+1,j}$$

end for

$q_j$ 成为Arnoldi矢量。时间复杂度是 $O(k^2n)$ , k是子空间大小。

### 对称情况的Krylov

如果A是对称的，则H是上Hessenberg矩阵，也是对称矩阵，因此是三对角矩阵。假设T=H。

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

AQ=QT，计算第j列。得到：

$$Aq_j = \beta_{j-1}q_{j-1} + \alpha_j q_j + \beta_j q_{j+1}$$

因为 $q_j$ 彼此共轭，因此上式两边同乘 $q_j$ 得到： $q_j A q_j = \alpha_j$ 。

对于对称情况，我们有如下的Lanczos算法。

## Lanczos算法

$$q_1 = b/\|b\|_2, \beta_0 = 0, q_0 = 0$$

/k is the number of columns of Q and H to computer/

for j=1 to k:

$$z = Aq_j$$

$$\alpha_j = q_j^T z$$

$$z = z - \alpha_j q_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$$

$$\beta_j = \|z\|_2$$

if  $\beta_j = 0$ , quit

$$q_{j+1} = z/\beta_j$$

end for

$q_j$ 称为Lanczos矢量。

## Krylov子空间

定义：Krylov子空间 $K_k(A, b)$ 为 $(b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b)$

## Krylov方法求解线性方程组

我们讨论Krylov方法的目的是通过k步就可以求解线性方程组 $AX=b$ 。

共轭梯度法

定理：A是对称矩阵， $T_k = Q_k^T A Q_k$ ，并且 $r_k = b - Ax_k, x_k \in K_k$ ，如果 $T_k$ 是非奇异的，并且 $x_k = Q_k T_k^{-1} e_1 \|b\|_2$ ，这里 $e_1^{k \times 1} = [1, 0, \dots, 0]^T$ ，因此 $Q_k^T r_k = 0$ 。

如果A也是正定的，则 $T_k$ 一定不是奇异的，并且 $x_k$ 也最小化 $\|r_k\|_{A^{-1}}$ ，在所有的 $x_k \in K_k$ 。此外 $r_k = \|r_k\|_2 q_{k+1}$ 。

CG迭代只需要保留三个向量 $x_k, r_k = b - Ax_k$ ，以及共轭梯度 $p_k$ 。通过如下方式迭代 $x_k = x_{k+1} + v p_k$ 。

## 共轭梯度算法

对任意初始点 $x_0 \in E^n$ ，定义 $d_0 = -g_0 = b - Qx_0$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$$

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

$$\beta_k = -\frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_{k+1}^T Q d_k} \text{ 其中 } g_k = Qx_k - b$$

<sup>1</sup> A first course in linear algebra



# 矩阵本征值求解方法

1. Power方法
2. QR分解(对称, n<25最实用)
3. 分而治之(对称, n>25最实用)
4. Jacob方法
5. 瑞利商迭代
6. 对分法和逆迭代
7. Lanczos方法求本征态

由于我们在前面已经做好了计算本征值方法的铺垫，也就是介绍了Household变换，Givens变换，QR分解等。因此我们直接可以利用这些工具来讨论矩阵的本征值，本征矢量求解。

没有介绍的有Power方法，瑞利商迭代以及比较古老但是能实现并行的Jacob方法。

## Power方法

指数方法对对称与非对称矩阵都实用。指数方法一般只能用来求解最大的本征值，利用的是矩阵的高次幂，作用在一个向量上面，只有最大本征值对应的本征向量能被保留下来。因此一个问题，初始向量需要含有最大本征矢量。算法如下：给定 $x_0$ ，进行如下迭代

```
i=0,  
repeat  
     $y_{i+1} = Ax_i$   
     $x_{i+1} = y_{i+1} / \|y_{i+1}\|_2$   
     $\lambda_{i+1} = x_{i+1}^T Ax_{i+1}$   
    i=i+1  
until收敛
```

假设A的本征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

假设初始矢量可以用矩阵的本征矢 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 展开，

$$x_0 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n$$

则：

$$A^k x_0 = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k \alpha_i = \lambda_1^k \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \alpha_i$$

因此当k很大的时候， $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k$ 趋于0，因此只会保留本征值最大的本征矢量。收敛速度取决于 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ 。

如果使得 $c_1 = 0$ ，则我们可以求第二大本征值与本征向量，因此我们可以依次求解第一大、第二大、...本征值，但是由于一些舍入误差，我们不能保证在求第N大本征值时，初始向量中没有混入前N-1大本征向量，因为存在机器精度，因此该方法一般用来求最大本征值。

## 逆迭代法(逆指数法)

该方法是指数方法的改进，可以用来求矩阵A在任意点 $\sigma$ 附近的本征值。

给定 $x_0$ ，进行如下迭代

```
i=0,  
repeat  
     $y_{i+1} = (A - \sigma I)^{-1} x_i$   
     $x_{i+1} = y_{i+1} / \|y_{i+1}\|_2$ , 近似本征矢量。  
     $\lambda_{i+1} = x_{i+1}^T Ax_{i+1}$ , 近似本征值。  
    i=i+1  
until收敛
```

## QR分解

需要 $O(\frac{4}{3}n^3)$ 用来把对称矩阵化为三对角矩阵，化为三对角矩阵之后，可以通过代数方法求本征值，每个本征值的时间复杂度就是 $O(n)$ ，因此求所有本征值的时间复杂度是 $O(n^2)$ ，QR求对称矩阵的本征值的时间复杂度是 $O(\frac{4}{3}n^3)$ ；求所有本征矢量的时间复杂度是 $O(6n^3)$ 。有必要讨论一下实用的QR分解方法，也就是先转化成上Hessenberg矩阵，再用N次Givens变换得到QR分解。以后每次QR分解的时间复杂度是 $O(n^2)$ 。

## 分而治之

### Jacobi

Jacob的思想是每次通过一个相似变换消除掉一个非对角矩阵元，且能满足非对角元的平方和的减少量就是这个被消除量的平方。它可以用来求对称矩阵以及非对称矩阵。

$$\begin{aligned} A_m &= J_{m-1}^T A_{m-1} J_{m-1} \\ &= J_{m-1}^T J_{m-2}^T \dots J_0^T A_{m-1} J_0 \dots J_{m-2} J_{m-1} \\ &= J^T AJ \end{aligned}$$

对于大的m，最终A收敛到对称矩阵。

每一次迭代m，就是调用一次Jacob旋转来消除矩阵非对角元素 $A_{ij}$ ，每一次Jacobi旋转的时间复杂度是 $O(n)$ ，它只改变i,j行与i, j列的矩阵元素。

### Jacobi-Rotation

Jacobi-Rotation (A,j,k)

if  $|a_{jk}|$  is not too small

$$\tau = (a_{jj} - a_{kk}) / (2a_{jk})$$

$$t = \text{sign}(\tau)(|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2})$$

$$c = 1 / \sqrt{1 + t^2}$$

$$s = c \cdot t$$

$$A = R^T(j, k, \theta)AR(j, k, \theta) \dots \text{where, } c = \cos(\theta), s = \sin(\theta)$$

if eigenvectors are desired

$$J = JR(j, k, \theta)$$

end if

end if

### Jacobi算法

repeat:

choose a j,k pair

call Jacobi-Rotation (A,j,k) until A is sufficiently diagonal

### 收敛性保障

$$\text{off}(A) = \sqrt{\sum_{1 \leq i < k \leq n} a_{jk}^2}$$

对j,k实行Jacobi-Rotation后有:  $\text{off}(A') = \text{off}(A) - a_{jk}^2$ 。

因此，最终非对角元会趋于0。如果每次挑选最大的非对角元进行消除，这样会加快收敛，但是寻找最大矩阵元的时间复杂度是 $O(n^2)$ ，而一次Jacobi-Rotation计算的时间复杂度是 $O(n)$ ，因此所有使劲按花在寻找最大矩阵元上面了。因此一般按行便利，一般需要对所有非对角元重复5-10次Jacobi-Rotation 操作才能使得矩阵收敛到近似对角矩阵。因此时间复杂度比QR高。

## 瑞利商迭代

收敛速度与QR一样是cubically(三次收敛)，该方法可以用来求任意点附近的本征值。

算法如下：

输入:  $x_0$ , with  $\|x_0\|_2 = 1$ , 一个容许误差tol.

定义:  $\rho_0 = \rho(x, A) = \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0}$

$i = 0$ .

repeat:

$$y_i = (A - \rho_i I)^{-1} x_{i-1}$$

$$x_i = y_i / \|y_i\|_2$$

$$\rho_i = \rho(x_i, A)$$

$i = i + 1$

until  $\|Ax_i - \rho_i x_i\|_2 < tol$

### 瑞利商迭代的三次收敛定理<sup>1</sup>

瑞利商迭代在局部是三次收敛的。也就是说。正确的浮点数是上一步的三倍，当误差足够小的时候。

## 分而治之

当前求n>25矩阵的本征值与本征矢量最快的方法，最坏的开销是 $O(n^3)$ ，平均开销是 $O(n^{2.3})$ ，对某些本征值分布，时间复杂度是 $O(n^2)$ 。详细的步骤还请参考下面的文献。

## 对分法和逆迭代

对三对角矩阵，如果求区间[a,b]中的k个本征值，时间复杂度是 $O(kn)$ ，n是矩阵的维度。当 $k \ll n$ 时，它比QR快，因为QR时间复杂度是 $O(n^2)$ 。在最坏的情况下，也就是所有本征值聚集在一起的时候，她的时间复杂度是 $O(nk^2)$ ，而且不能保证本征矢量计算的准确性。

<sup>1</sup>. 《实用数值线性代数》[←](#)

# 奇异矩阵分析

1. SVD
2. PCA
3. Condition Number

## SVD

对于任何一个DxM的矩阵X可以做如下分解：

$$X = UDV^T$$

其中 $U^TU = I_D$ ,  $VT = I_N$ , D是对角矩阵。

$$XX^T = UDV^TVDU^T = UD^2U^T$$

$$X^TX = VDU^TUDV^T = VD^2V^T$$

是矩阵的本征值分解。因此可以通过上面两式来求解U, V。主要用到的是矩阵本征值, 本征矢求解技巧。

## PCA

我们可以通过SVD来实现PCA, 具体就是只取X的SVD中的前M个其一分量。

$$X = UDV^T \approx U_M D_M V_M^T$$

其中 $U_M, D_M, V_M$ 对于矩阵X的前M个奇异值分量。

## SVD的作用

SVD 将矩阵分解成累加求和的形式, 其中每一项的系数即是原矩阵的奇异值。这些奇异值, 按之前的几何解释, 实际上就是空间超椭球各短轴的长度。现在想象二维平面中一个非常扁的椭圆(离心率非常高), 它的长轴远远长于短轴, 以至于整个椭圆看起来和一条线段没有什么区别。这时候, 如果将椭圆的短轴强行置为零, 从直观上看, 椭圆退化为线段的过程并不突兀。回到 SVD 分解当中, 较大的奇异值反映了矩阵本身的主要特征和信息; 较小的奇异值则如例中椭圆非常短的短轴, 几乎没有体现矩阵的特征和携带的信息。因此, 若我们将 SVD 分解中较小的奇异值强行置为零, 则相当于丢弃了矩阵中不重要的一部分信息。

因此, SVD 分解至少有两方面作用:

- 分析了解原矩阵的主要特征和携带的信息(取若干最大的奇异值), 这引出了主成分分析(PCA);
- 丢弃忽略原矩阵的次要特征和携带的次要信息(丢弃若干较小的奇异值), 这引出了信息有损压缩、矩阵低秩近似等话题。

## Condition Number

### 条件数的定义

Let's linear equations:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

Let us investigate first, how a small change in the  $\mathbf{b}$  vector changes the solution vector.  $\mathbf{x}$  is the solution of the original system and let  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  is the solution when  $\mathbf{b}$  changes from  $\mathbf{b}$  to  $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ .

Then we can write:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

or       $\mathbf{Ax} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$

But because  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , it follows that

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$$

So:

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{b}$$

Using the matrix norm properties:

$$\|\mathbf{A}\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\delta\mathbf{x}\|$$

We can get:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|.$$

Also, we can get:

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

Using equations 2.5 and 2.6 we can get:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Let's define condition number as:  $\mathbf{K}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$

we can rewrite equation 2.7 as:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathbf{K}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Now, let us investigate what happens if a small change is made in the coefficient matrix

A. Consider A is changed to  $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$  and the solution changes from x to  $x + \Delta x$

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(x + \Delta x) = \mathbf{b},$$

we can obtain:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \mathbf{K}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$\mathbf{K}(\mathbf{A})$  is a measure of the relative sensitivity of the solution to changes in the right-hand side vector b. When the condition number  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  becomes large, the system is regarded as being illconditioned. Matrices with condition numbers near 1 are said to be well-conditioned.

## 条件数对梯度下降法收敛的影响

### 例子

#### 线性方程组解的稳定性分析

系统解的稳定性定义成系统小的扰动对系统解的影响。

Example 1:

$$\begin{bmatrix} 400 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$x_1 = -100, x_2 = -200$$

If we give small change to matrix A, change  $A_{11}$  from 400 to 401 then:

$$\begin{bmatrix} 401 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

This time the solution is:

$$x_1 = 40000, x_2 = 79800$$

Ill-condition:

When the solution is highly sensitive to the values of the coefficient matrix A or the righthand side constant vector b, the equations are called to be ill-conditioned.

## SVD在推荐系统中的应用

假设我们现在有评分矩阵  $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , SVD实际上就是去找到两个矩阵:  $U \in \mathbb{R}^{f \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{f \times m}$ , 其中矩阵U表示 User 和 feature 之间的联系, 矩阵V表示 Item 和 feature 之间的联系。

大家这时候肯定会想, 我们的评分矩阵里面一般会有很多缺失值, 那要怎么去得到 U 和 M 呢? 实际上, 这两个矩阵是通过学习的方式得到的, 而不是直接做矩阵分解。我们定义如下的损失函数:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I_{ij} (V_{ij} - p(U_i, M_j))^2 + \frac{k_u}{2} \sum_{i=1}^n \|U_i\|^2 + \frac{k_m}{2} \sum_{j=1}^m \|M_j\|^2$$

其中  $p(U_i, M_j)$  表示我们对用户 i 对 物品 j 的评分预测:

$$p(U_i, M_j) = U_i^T M_j$$

梯度下降:

$$-\frac{\partial E}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^m I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) M_j) - k_u U_i$$

$$-\frac{\partial E}{\partial M_j} = \sum_{i=1}^n I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) U_i) - k_m M_j$$

实际上，用户的评分与用户的习惯，以及该物品的总体评分水平有关，因此可以加上用户的均值与物品的均值。

$$\hat{r}_{ui} = \mu + b_i + b_u + \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u$$

$\mu$ : 训练集中所有记录的评分的全局平均数。在不同网站中，因为网站定位和销售的物品不同，网站的整体评分分布也会显示出一些差异。比如有些网站中的用户就是喜欢打高分，而另一些网站的用户就是喜欢打低分。而全局平均数可以表示网站本身对用户评分的影响。

$b_u$ : 用户偏置(user bias)项。这一项表示了用户的评分习惯中和物品没有关系的那种因素。比如有些用户就是比较苛刻，对什么东西要求都很高，那么他的评分就会偏低，而有些用户比较宽容，对什么东西都觉得不错，那么他的评分就会偏高。

$b_i$ : 物品偏置(item bias)项。这一项表示了物品接受的评分中和用户没有什么关系的因素。比如有些物品本身质量就很高，因此获得的评分相对都比较高，而有些物品本身质量很差，因此获得的评分相对都会比较低。

这个时候我们的损失函数变为：

$$E = \sum_{(u,i) \in k} (r_{ui} - \mu - b_i - b_u - \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u) + \lambda(\|\mathbf{p}_u\|_2 + \|\mathbf{q}_i\|_2 + b_u^2 + b_i^2)$$

<sup>1</sup> [SVD在推荐系统中的应用](#)

# 大规模稀疏矩阵问题

1. Lanczos
2. SVD
3. Krylov
4. The Conjugate Gradient Method
5. Large Sparse Matrix在推荐系统中的应用

## Preconditioning

思考线性方程系统:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

假设  $M = M_1 M_2$  是非奇异的, 考虑线性系统  $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ , 其中:

$$\hat{A} = M_1^{-1} A M_2^{-1}$$

$$\hat{b} = M_1^{-1} b$$

如果  $M$  与  $A$  很接近, 因此  $\hat{A}$  接近于单位矩阵  $I$ 。因此可以通过  $M_2 \mathbf{x} = \hat{x}$ 。矩阵  $M$  被称为 Preconditioner, 为了作为我们感兴趣的问题的求解框架, 它需要满足两个条件:

1.  $M$  必须抓住  $A$  的本质, 即  $M \approx A$ , 因此  $I \approx M_1^{-1} A M_2^{-1} = \hat{A}$
  2. 涉及到  $M_1, M_2$  矩阵的线性系统必须容易求解, 因为 Krylov 过程涉及到  $M_1^{-1} A M_2^{-1}$  操作。一个好的 preconditioner 意味着更少的迭代。
- 如果  $A$  是对称正定的, 且  $A \approx I + \Delta A$ , 并且  $\text{rank}(\Delta A) = k$  远小于  $n$ .

## 矩阵微分

参考闲话矩阵求导

### 向量 $\mathbf{y}$ 对标量 $\mathbf{x}$ 求导

我们假定所有的向量都是列向量  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix}$

### 标量 $\mathbf{y}$ 对向量 $\mathbf{x}$ 求导:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

### 向量对向量求导

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

### 标量对矩阵求导,

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y}{\partial x_{12}} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_{1q}} \\ \frac{\partial y}{\partial x_{21}} & \frac{\partial y}{\partial x_{22}} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_{2q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{p1}} & \frac{\partial y}{\partial x_{p2}} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_{pq}} \end{bmatrix}$$

### 矩阵对标量求导,

注意有个类似于转置的操作, 因为  $\mathbf{Y}$  是  $m \times n$  矩阵

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \frac{\partial y_{12}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial x} & \frac{\partial y_{22}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial y_{2n}}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m1}}{\partial x} & \frac{\partial y_{m2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

### 用维度分析来解决求导的形式问题

向量对向量的微分

$$\frac{\partial(\mathbf{Ax})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{Ax})_1}{\partial x_1} & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{Ax})_1}{\partial x_2} & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{Ax})_1}{\partial x_n} & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

考虑  $\frac{\partial \mathbf{Au}}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{x}$  无关, 所以  $\mathbf{A}$  肯定可以提出来, 只是其形式不知。假如  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  我们知道最终结果肯定和  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$  有关, 注意到

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , 于是  $\mathbf{A}$  只能转置以后添在后面, 因此:

$$\frac{\partial \mathbf{Au}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T$$

$$dL = \frac{\partial L^T}{\partial \mathbf{w}} d\mathbf{w}$$

再考虑如下问题:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Ay}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

其中  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{x}$  无关, 我们知道  $\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Ay}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

因此

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = f(A, y) + g\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}^T A\right) \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n \times 1}, \mathbf{x}^T \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{1 \times n}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

因此, 为了满足  $\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ , 我们可以知道函数f,g的形式。最终有:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A}) \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{y}$$

当  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  时,

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A}) \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

最后一个例子(还没解出来):

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m \times 1} \text{ 知道 } \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$$

还需要对迹形式进行求解.

# 算法与数据结构

主要介绍数据结构，堆，栈，树；传统的一些算法，比如排序，最短路径。

1. Dijkstra算法
2. 最小生成树Prim算法
3. 霍夫曼编码
4. 排序算法

# Kriging插值

<https://xg1990.com/blog/archives/222>

空间插值问题，就是在已知空间上若干离散点  $(x_i, y_i)$  的某一属性(如气温, 海拔)的观测值  $z_i = z(x_i, y_i)$  的条件下，估计空间上任意一点  $(x, y)$  的属性值的问题。

直观来讲，根据地理学第一定律，

大意就是，地理属性有空间相关性，相近的事物会更相似。由此人们发明了反距离插值，对于空间上任意一点  $(x, y)$  的属性  $z = z(x, y)$ ，

定义反距离插值公式估计量  $\hat{z} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{d^\alpha} z_i$

其中  $\alpha$  通常取 1 或者 2。

即，用空间上所有已知点的数据加权求和来估计未知点的值，权重取决于距离的倒数(或者倒数的平方)。

那么，距离近的点，权重就大；距离远的点，权重就小。反距离插值可以有效的基于地理学第一定律估计属性值空间分布，但仍然存在很多问题：  
 $\alpha$  的值不确定 用倒数函数来描述空间关联程度不够准确

因此更加准确的克里金插值方法被提出来了

克里金插值公式  $\hat{z}_o = \sum_{i=0}^n \lambda_i z_i$

其中  $\hat{z}_o$  是点  $(x_o, y_o)$  处的估计值，即  $\hat{z}_o = z(x_o, y_o)$

假设条件：

1. 无偏约束条件  $E(\hat{z}_o - z_o) = 0$
2. 优化目标/代价函数  $J = Var((\hat{z}_o - z_o))$  取极小值
3. 半方差函数  $r_{ij}$  与空间距离  $d_{ij}$  存在关联，并且这个关联可以通过这两组数据拟合出来，因此可以用距离  $d_{ij}$  来求得  $r_{ij}$

半方差函数  $r_{ij} = \sigma^2 - C_{ij}$ ；等价于  $r_{ij} = \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2]$

其中： $C_{ij} = Cov(z_i, z_j) = Cov(R_i, R_j)$

求得  $r_{ij}$  之后，我们就可以求得  $\lambda_i$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1o} \\ r_{2o} \\ \cdots \\ r_{no} \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 第四章 最优化方法

这章主要讨论常见的非线性最优化方法，以及优化技巧与不同方法的优缺点。最优化方法的分类很多，按照不同方式主要分为如下四种。

### 无约束与有约束问题

最优化问题分为有约束优化问题与无约束优化问题。

1. 无约束优化问题

$$\min f(x)$$

2. 有约束优化问题

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s.t. } f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{s.t. } h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, p$$

一般我们把带约束问题转化为无约束优化问题进行求解。比如拉格朗日乘子法：

$$\min L(x, \lambda, v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(x)$$

### 优化搜索方式

主要有两大类方法：

1. 线性搜索：先确定方向，再确定步长，典型的就是梯度下降法与牛顿法，quasi-newton法
2. 置信域方法：先确定步长，再找步长方向。常见的有Gauss-Newton法，L-M, Dog-Leg方法

### 利用导数的阶数

从应用的泰勒展开的阶数来说，可分为一阶算法与二阶算法。

1. 一阶方法

- i. SGD
- ii. Mini-batch SGD

2. 二阶方法

- i. 牛顿法
- ii. 拟牛顿法
  - i. BFGS
  - ii. DFP
  - iii. Brody类方法

### 问题凸与否

就解决的问题而言，有凸优化算法与非凸优化算法。对凸优化问题而言，由于局部极小就是全局最小，因此通过梯度下降方法就可以很好的解决。大多数我们面对的是非凸优化问题，存在大量的局部极小值，我们也不需要得到全局最小值，只需要求得一个较好的局部极小值就可以了，因为局部极小值对应的解是稳定的，就可能是一个满足系统要求的解。

1. 全局最小算法

- i. 模拟退火
- ii. 遗传算法

### 本章写作方式

思考这一章该怎么去写？但是得先回答以下两个问题，你写这一章的目的是什么？你想把它写成什么样子？答案不能独立于问题而存在，答案与问题是一对，[Key,Value]，且一个key可以对应与多个value。

本章写作的目的是为了解决实际的问题，实际的问题一般分为无约束优化问题与带约束问题优化问题，因此本章的分类是就问题是否带约束来分

的。

带约束的优化问题也可以细分，看求解的问题线性而是非线性，非为带约束线性优化问题，比如普通的SVM，带约束的非线性优化问题(非线性优化是相对于线性规划而言的，除了线性规划以外的优化问题称为非线性优化问题)，比如核函数SVM。因此优化问题可以分为如下三类：

## 1. 线性规划

线性规划暂时不讲，因为现在主要讨论非线性优化问题，此外可以通过平方把线性优化问题转化为非线性优化问题，一个例子就是求解线性方程组问题转化为最小二乘问题。

## 2. 无约束非线性优化问题

一维搜索问题，包含二分法，弦割法，牛顿法，(黄金分割法)这些也不重用，因此主要讨论如下几种算法。

1. 梯度下降法
2. 牛顿法
3. 拟牛顿法
4. L-M(Levenberg-Marquardt)算法
5. DogLeg算法
6. 共轭梯度法

## 3. 带约束非线性优化问题

原则就是通过拉格朗日乘子法把等式约束，用KKT乘子法把不等式约束问题转化为无约束优化问题来求解，这样可以利用无约束优化问题来求解。

主要有如下几种方法

1. 拉格朗日乘子法
2. 罚函数法
3. 障碍函数法
4. 增广拉格朗日乘子法
5. ADMM

## 需要做的事情

1. 把最前沿的分布式优化算法，比如ADMM算法加进来。Done
2. 分布式机器学习中应用的优化算法要有清晰的轮廓，以及她与单机机器学习系统中的优化算法有啥区别。因此，是否有必要加一个section，关于分布式机器学习优化方法？
3. 运筹学，线性规划，非线性规划里面处理的基本东西要在你的脑海中有一个基本的印象。
4. 有必要加一节对偶。Done
5. 加一节“随机优化算法与鞅”<sup>2</sup>，并证明对数化误差是一个下鞅。随机优化方法很重要，我们需要从随机过程的角度去分析这些算法的性质，尤其是收敛行为，因此很有必要加这么一节。
6. 一些新的二阶优化方法，比如“Kronecker 系数近似曲率(K-FAC)方法”，以及非近似Hessian方法以及非Hessian方法，都要知道他们的原理与优缺点(实用场景)。
7. 思考结合Trust-Region方法与 $\delta$ -局部磨光算法来求解非凸优化问题，或者研究等级优化算法。
8. 稀疏建模理论，怎么调和稀疏建模结果与采样定理之间的矛盾。在什么情况下稀疏建模理论可以违背采样定理<sup>3</sup>？

<sup>1</sup>. 刘铁岩《分布式机器学习--算法，理论与实战》[←](#)

<sup>2</sup>. Jean Walrand《EECS应用概率论》P194 [←](#)

<sup>3</sup>. 《稀疏建模理论，算法及其应用》Irina Rish, Genady Ya. Grabarnik [←](#)

## 无约束最优化问题

无约束优化问题相对于有约束优化问题而言是简单的。在处理这些问题时，主要要考虑的是算法的收敛速度(线性收敛，二次收敛等等)，算法的时间复杂度与空间复杂度(也就是考虑内存问题)，算法的稳定性(收敛点的特性，鞍点，好的局部极小点，坏的局部极小点还是全局最小点)。Hessian矩阵的奇异性决定了算法的收敛速度。

要思考的一个问题是为啥不同的算法收敛到真正解的精度不同，这是由算法的什么特征导致的？

要思考的另外一个问题是，各算法的使用场景是什么？怎么根据不同场景选择不同的算法？有什么标准吗？怎么解决现实的非教科书的问题？需要增加次梯度法，随机坐标下降法。

按照线性搜索方法与信赖域方法分类。

# Linear Search Methods

## 线性搜索与Armijo准则

符号约定:

$g_k : \nabla f(x_k)$ ,即目标函数关于k次迭代值 $x_k$ 的导数

$G_k : G(x_k) = \nabla^2 f(x_k)$ ,即Hessian矩阵

$d_k$ :第k次迭代的步长因子,在最速下降算法中,有 $d_k = -g_k$

$\alpha_k$ :第k次迭代的步长因子,有 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

在精确线性搜索中,步长因子 $\alpha_k$ 由下面的因子确定:

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$$

而对于非精确线性搜索,选取的 $\alpha_k$ 只要使得目标函数f得到可接受的下降量,即:

$$\Delta f(x_k) = f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k)$$

Armijo 准则用于非精确线性搜索中步长因子 $\alpha$ 的确定,内容如下:

Armijo 准则:

已知当前位置 $x_k$ 和优化方向 $d_k$ ,参数 $\beta \in (0, 1)$ , $\delta \in (0, 0.5)$ .令步长因子  $\alpha_k = \beta^{m_k}$ ,其中 $m_k$ 为满足下列不等式的最小非负整数m:

$$f(x_k + \beta^m d_k) \leq f(x_k) + \delta \beta^m g_k^T d_k$$

由此确定下一个位置 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

对于梯度上升,上面的方程变成:

$$f(x_k - \beta^m d_k) \geq f(x_k) - \delta \beta^m g_k^T d_k$$

由此确定下一个位置 $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$

## 最速下降法

the steepest descent algorithm proceeds as follows: at each step, starting from the point  $x^{(k)}$ , we conduct a line search in the direction

$-\nabla f(x^{(k)})$ , until a minimizer,  $x^{(k+1)}$ , is found.

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$$

Proposition 8.1: if  $x^{(k)}$  is the steepest descent sequence for f:  $R^n \rightarrow R$ , then for each k the vector  $x^{(k+1)} - x^{(k)}$  is orthogonal to the vector  $x^{(k+2)} - x^{(k+1)}$

Proposition 8.2: if  $x^{(k)}$  is the steepest descent sequence for f:  $R^n \rightarrow R$  and if  $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$ , then

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$$

Stopping criterion:

$$\frac{|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})|}{||f(x^{(k)})||} < \epsilon$$

Example: Quadratic function of the form:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x$$

Gradient:  $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) = Qx - b$

so

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

where:

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} - \alpha g^{(k)})$$

$$= \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} \left( \frac{1}{2}(x^{(k)} - \alpha g^{(k)})^T Q(x^{(k)} - \alpha g^{(k)}) - (x^{(k)} - \alpha g^{(k)})^T b \right)$$

Hence:

$$\alpha_k = \frac{g^{(k)T} g^{(k)}}{g^{(k)T} Q g^{(k)}}$$

Covergence properties:

Define:

$$V(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^{*T}Qx^* = \frac{1}{2}(x - x^*)^TQ(x - x^*)$$

With:  $x^* = Q^{-1}b$

**Lemma 8.1** The iterative algorithm

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

with  $g^{(k)} = Qx^{(k)} - b$  satisfies

$$V(x^{(k+1)}) = (1 - \gamma_k)V(x^{(k)}),$$

where, if  $g^{(k)} = 0$  then  $\gamma_k = 1$ , and if  $g^{(k)} \neq 0$  then:

$$\gamma_k = \alpha_k \frac{g^{(k)T}Qg^{(k)}}{g^{(k)T}Q^{-1}g^{(k)}} (2\frac{g^{(k)T}Qg^{(k)}}{g^{(k)T}Q^{-1}g^{(k)}} - \alpha_k)$$

Submit  $\alpha_k$  into  $\gamma_k$ , then

$$\gamma_k = \frac{(g^{(k)T}g^{(k)})^2}{(g^{(k)T}Qg^{(k)})(g^{(k)T}Q^{-1}g^{(k)})}$$

**Theorem 8.1** Let  $x^{(k)}$  be the sequence resulting from a gradient algorithm  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$ . Let  $\gamma_k$  be as defined in Lemma 8.1, and suppose that  $\gamma_k > 0$  for all  $k$ , then  $x^{(k)}$  converges to  $x^*$  for any initial condition  $x^{(0)}$  if and only if:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

**Theorem 8.2** In the steepest descent algorithm, we have

$$x^{(k)} \rightarrow x^* \text{ for any } x^{(0)}$$

**Theorem 8.3** For the fixed step size gradient algorithm,  $x^{(k)} \rightarrow x^*$  for any  $x^{(0)}$

if and only if  $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{max}(Q)}$

Convergence Rate:

**Theorem 8.4** In the method of steepest descent applied to the quadratic function, at every step  $k$ , we have :

$$V(x^{(k+1)}) \leq (\frac{\lambda_{max}(Q) - \lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(Q)}) V(x^{(k)}).$$

Let:

$$r = \frac{\lambda_{max}(Q)}{\lambda_{min}(Q)} = ||Q|| |Q^{-1}| \text{ the so-called condition number of Q.}$$

Then, it follows from Theorem 8.4 that  $V(x^{(k+1)}) \leq (1 - \frac{1}{r})V(x^{(k)})$ . We refer to  $1 - \frac{1}{r}$  as the convergence ratio. If  $r = 1$ , then

$\lambda_{max}(Q) = \lambda_{min}(Q)$ , corresponding to circular contours of  $f$ . You can use the convergence ratio  $r$  to judge the speed of convergence.

**Definition 8.1** Given a sequence  $x^{(k)}$  that converges to  $x^*$ , that is,  $\lim_{k \rightarrow \infty} ||x^{(k)} - x^*|| = 0$ , we say that the order of convergence is 0, where

$p \in R$ , if  $0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - x^*}{||x^{(k)} - x^*||^p} < \infty$ ,

if for all  $p > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - x^*}{||x^{(k)} - x^*||^p} = 0$ ,

then we say that the order of convergence is  $\infty$ .

**Lemma 8.3.** In the steepest descent algorithm, if  $g^{(k)} \neq 0$  for all  $k$ , then  $\gamma_k = 1$  if and only if  $g^{(k)}$  is an eigenvector of  $Q$ .

**Theorem 8.6** Let  $x^{(k)}$  be the sequence resulting from a gradient algorithm applied to a function  $f$ . Then, the order of convergence of  $x^{(k)}$  is 1 in the worst case, that is, there exist a function  $f$  and an initial  $x^{(0)}$  such that the order of convergence of  $x^{(k)}$  is equal 1.

## Newton's Method

$$f(x) = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})^T g^{(k)} + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T F(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

**Theorem 9.1** Suppose that  $f \in C^3$ , and  $x^* \in R^n$  is a point such that  $\nabla f(x^*) = 0$  and  $F(x^*)$  is invertible. Then, for all  $x^{(0)}$  sufficiently close to  $x^*$ , Newton's method is well defined for all  $k$ , and converges to  $x^*$  with order of convergence at least 2.

As stated in the above theorem, Newton's methods has superlinear convergence properties if the starting point is near the solution. However, the method is not guaranteed to converge to the solution if we start away from it (in fact, it may not even be well defined because the Hessian may be singular). In particular, the method may not be a descent method; that is, it is possible that  $f(x^{(k+1)}) > f(x^{(k)})$ . Fortunately, it is

possible to modify the algorithm such that descent property holds. To see this, we need the following result.

Theorem 9.2 Let  $x^{(k)}$  be the sequence generated by Newton's method for minimizing a given objective function  $f(x)$ . If the Hessian  $F(x^{(k)}) > 0$  and  $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) \neq 0$ , then the direction

$d^{(k)} = -F(x^{(k)})^{-1}g^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$  from  $x^{(k)}$  to  $x^{(k+1)}$  is a descent direction for  $f$  in the sense that there exists an  $\alpha > 0$  such that for all  $a \in (a, \alpha)$ ,

$$f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) < f(x^{(k)}).$$

The above theorem motivates the following modification of Newton's method:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \alpha_k F(x^{(k)})^{-1} g^{(k)} \text{ where} \\ \alpha_k &= \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} f(x^{(k)} - \alpha_k F(x^{(k)})^{-1} g^{(k)}) \end{aligned}$$

A drawback of Newton's method is that evaluation of  $F(x^{(k)})$  for large  $n$  can be computationally expensive. Furthermore, we have to solve the set of  $n$  linear equations  $F(x^{(k)})d^{(k)} = -g^{(k)}$ . In the Chapters 10 and 11, we discuss methods that alleviate this difficulty.

Levenberg-Marquardt Modification:

If the Hessian matrix  $F(x^{(k)})$  is not positive definite, then the search direction  $d^{(k)} = -F(x^{(k)})^{-1}g^{(k)}$  may not point in a descent direction. A simple technique to ensure that the search direction is a descent direction is to introduce the so-called Levenberg-Marquardt Modification to Newton's algorithm:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k F(x^{(k)} + u_k I)^{-1} g^{(k)}$$

where  $u_k \geq 0$

## Newton's methods for nonlinear least-squares

Consider the following problem:

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^m (r_i(x))^2$$

where  $r_i : R^n \rightarrow R$ ,  $i = 1, \dots, m$ , are given functions. This particular problem is called a nonlinear least-squares problem

$$F_{jk} = 2 \sum_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

$$\text{Let } s(x) = r_i(x) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

So the Hessian matrix as

$$F(x) = 2(J(x)^T J(x) + S(x)).$$

Therefore, Newton's method applied to the nonlinear least-squares problems is given by

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J(x)^T J(x) + S(x))^{-1} J(x)^T r(x).$$

In some case,  $S(x)$  can be ignored because its components are negligibly small. In this case, the above Newton's algorithm reduces to what is commonly called the Gauss-Newton's method:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J(x)^T J(x))^{-1} J(x)^T r(x).$$

A potential problem with the Gauss-Newton method is that the matrix  $J(x)^T J(x)$  may not be positive definite. As described before, this problem can be overcome using a Levenberg-Marquardt modification:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J(x)^T J(x) + u_k I)^{-1} J(x)^T r(x).$$

## Conjugate Direction Methods

The conjugate direction methods typically perform better than the method of steepest descent, but not as well as Newton's method. As we saw from the method of steepest descent and Newton's method, the crucial factor in the efficiency of an iterative search method is the direction of the search at each iteration.

Definition 10.1 Let  $Q$  be a real symmetric  $n \times n$  matrix. The directions  $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)}$  are  $Q$ -conjugate if, for all  $i \neq j$ , we have

$$d(i)^T Q d(j) = 0.$$

Lemma 10.1 Let  $Q$  be a symmetric positive definite  $n \times n$  matrix. If the directions  $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)} \in R^n$ ,  $k \leq n - 1$ , are nonzero and  $Q$ -conjugate, then they are linearly independent.

Basic conjugate Direction Algorithm. Given a start  $x^{(0)}$ , and Q-conjugate direction  $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)}$ , for  $k \geq 0$ ,

$$g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) = Qx^{(k)} - b,$$

$$\alpha_k = -\frac{g^{(k)T}d^{(k)}}{d^{(k)T}Qd^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

Theorem 10.1 For any starting point  $x^{(0)}$ , the basic conjugate direction algorithm converges to the unique  $x^*$  (that solves  $Qx = b$ ) in n steps; that is,  $x^{(n)} = x^*$

Lemma 10.2 In the conjugate direction algorithm,

$g^{(k+1)T}d^{(i)} = 0$ . For all  $k$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ , and  $0 \leq i \leq k$ .

The conjugate gradient algorithm is summarized below.

1. Set  $k := 0$ ; select the initial point  $x^{(0)}$
2.  $g^{(0)} = \nabla f(x^{(0)})$ . If  $g^{(0)} = 0$ , stop, else set  $d^{(0)} = -g^{(0)}$ .
3.  $\alpha_k = -\frac{g^{(k)T}d^{(k)}}{d^{(k)T}Qd^{(k)}}$
4.  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$
5.  $g^{(k+1)} = \nabla f(x^{k+1})$ . If  $g^{(k+1)} = 0$ , stop.
6.  $\beta_k = -\frac{g^{(k+1)T}Qd^{(k)}}{d^{(k)T}Qd^{(k)}}$
7.  $d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}$
8. Set  $k := k+1$ ; go to step 3.

Proposition 10.1 In the conjugate gradient algorithm, the directions  $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n-1)}$  are Q-conjugate.

## 梯度下降法

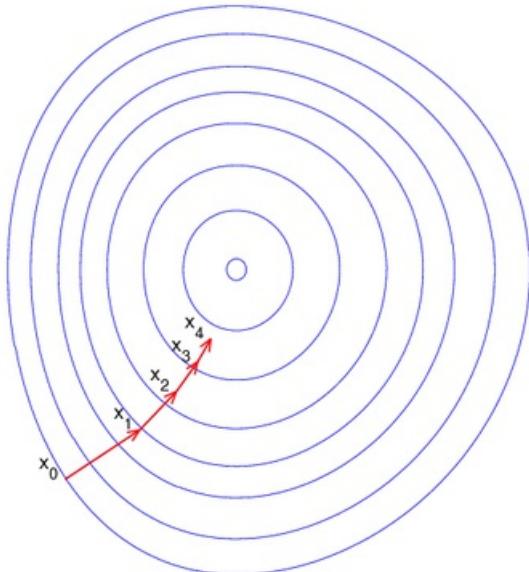
最速下降法, 牛顿法, LBFGS

梯度下降法是最早最简单，也是最为常用的最优化方法。梯度下降法实现简单，当目标函数是凸函数时，梯度下降法的解是全局解。一般情况下，其解不保证是全局最优解，梯度下降法的速度也未必是最快的。梯度下降法的优化思想是用当前位置负梯度方向作为搜索方向，因为该方向为当前位置的最快下降方向，所以也被称为是“最速下降法”。最速下降法越接近目标值，梯度趋于0，所以步长越小，前进越慢。把损失函数展开到一阶。

$$f(x + \alpha \mathbf{d}) = f(x_0) + \alpha f'(x_0) \mathbf{d} + O(\alpha^2)$$

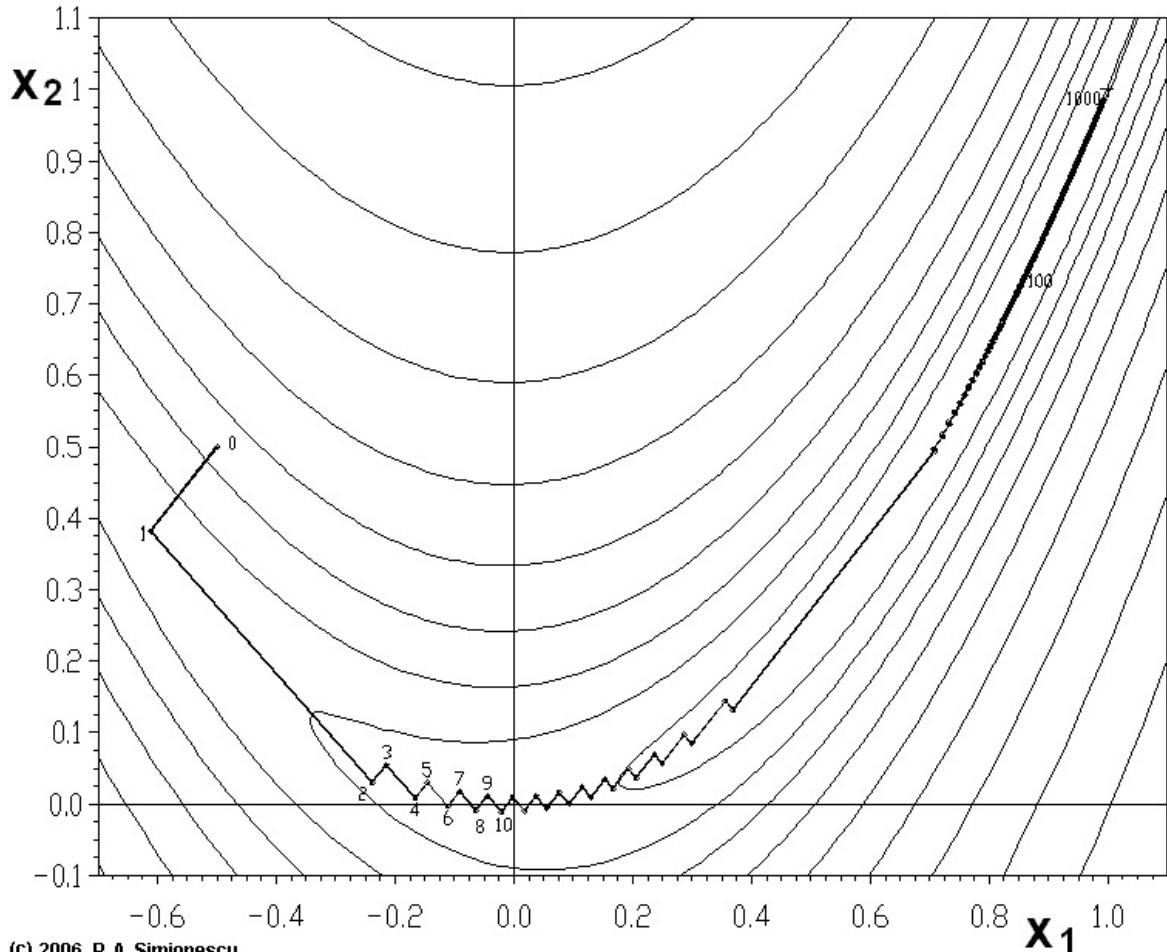
$$x_{t+1} = x_t - \alpha f'(x_t),$$

梯度下降法的搜索迭代示意图如下图所示：



梯度下降法的缺点：

(1) 越靠近极小值的地方收敛速度越慢，如下图所示



(c) 2006 P. A. Simionescu

从上图可以看出，梯度下降法在接近最优解的区域收敛速度明显变慢，利用梯度下降法求解需要很多次的迭代。

在机器学习中，基于基本的梯度下降法发展了两种梯度下降方法，分别为随机梯度下降法和批量梯度下降法。

比如对一个线性回归(Linear Logistics)模型，假设下面的 $h(x)$ 是要拟合的函数， $J(\theta)$ 为损失函数， $\theta$ 是参数，要迭代求解的值， $\theta$ 求解出来了那最终要拟合的函数 $h(\theta)$ 就出来了。其中 $m$ 是训练集的样本个数， $n$ 是特征的个数。

$$h(\theta) = \sum_{j=0}^n \theta_k x_j$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y^i - h_\theta(x^i))^2$$

//n是特征的个数, m是训练样本的数目

## 1) 批量梯度下降法 (Batch Gradient Descent, BDG)

(1) 将 $J(\theta)$ 对 $\theta$ 求偏导，得到每个 $\theta$ 对应的梯度：

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y^i - h_\theta(x^i)) x_j^i$$

(2) 由于要最小化风险函数，所以按照每个参数 $\theta$ 的负梯度方向来更新 $\theta$

$$\theta'_j = \theta_j - \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j} \theta_j + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y^i - h_\theta(x^i)) x_j^i$$

(3) 从上面公式可以注意到，它得到的是一个全局最优解，但是每迭代一步，都要用到训练集所有的数据，如果 $m$ 很大，那么可想而知这种方法的迭代速度会相当的慢。所以，这就引入了另外一种方法——随机梯度下降。

一个实验结果，说明随机梯度下降法能收敛到最终结果：

对于批量梯度下降法，样本个数 $m$ ， $x$ 为 $n$ 维向量，一次迭代需要把 $m$ 个样本全部带入计算，迭代一次计算量为 $m \times n^2$ 。

## 2) 随机梯度下降 (Stochastic Gradient Descent, SGD)

(1) 上面的风险函数可以写成如下这种形式，损失函数对应的是训练集中每个样本的粒度，而上面批量梯度下降对应的是所有的训练样本

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^m (y^i - h_\theta(x^i))^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m cost(\theta, (x^i, y^i))$$

$$L(\theta, (x^i, y^i)) = \frac{1}{2} (y^i - h_\theta(x^i))^2$$

(2) 每个样本的损失函数, 对 $\theta$ 求偏导得到对应的梯度, 来更新 $\theta$

$$\theta'_j = \theta_j + (y^i - h_\theta(x^i))x_j^i$$

(3) 随机梯度下降是通过每个样本来迭代更新一次, 如果样本量很大的情况(例如几十万), 那么可能只用其中几万条或者几千条的样本, 就已经将 $\theta$ 迭代到最优解了, 对比上面的批量梯度下降, 迭代一次需要用到十几万训练样本, 一次迭代不可能最优, 如果迭代10次的话就需要遍历训练样本10次。但是, SGD伴随的一个问题是噪音较BGD要多, 使得SGD并不是每次迭代都向着整体最优化方向。

随机梯度下降每次迭代只使用一个样本, 迭代一次计算量为n2, 当样本个数m很大的时候, 随机梯度下降迭代一次的速度要远高于批量梯度下降方法。两者的关系可以这样理解: 随机梯度下降方法以损失很小的一部分精确度和增加一定数量的迭代次数为代价, 换取了总体的优化效率的提升。增加的迭代次数远远小于样本的数量。

## 比较批量梯度下降法与随机梯度下降法:

用 $y = 2 * x1 + x2 - 1 + rand(0, 1)$ 产生1000组数, 用这一组数据来反求产生函数中的系数 $(2, 1, -1)^T$ .

迭代停止条件就是, 训练得到的相邻两次参数的差的范数小于0.000001(严格来说, 停止条件是损失函数一介导数等于0, 也就是

$$L'(\theta) = -\frac{1}{m} X^T (X\theta - Y) = 0.$$

1) 批量梯度下降法: 1000个样本, 设置的learn rate = 0.0001, 一次迭代所有1000个样本, 最终经过38000次迭代收敛到可以接受的标准。如果设置learn rate 是较大的值, 比如为1, 则发现结果马上发散了, 因此批量梯度下降法对learn rate比较敏感, 而下面的随机梯度下降法就不会出现这个问题, 因为每次只对一个样本进行处理, 即使这个样本对参数的梯度很大, 但是下一个样本又可以马上把参数拉回来。

```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Grad: 4.34235e-05 1.78119e-05 -0.00100021
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993389 para diff norm: 1.00131e-06 iter num: 37888
Grad: 4.3417e-05 1.78092e-05 -0.00100005
Paras: 1.99971 0.999882 -0.99339 para diff norm: 1.00115e-06 iter num: 37889
Grad: 4.34104e-05 1.78065e-05 -0.000999903
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993391 para diff norm: 1.001e-06 iter num: 37890
Grad: 4.34038e-05 1.78038e-05 -0.000999751
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993392 para diff norm: 1.00085e-06 iter num: 37891
Grad: 4.33973e-05 1.78011e-05 -0.0009996
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993393 para diff norm: 1.0007e-06 iter num: 37892
Grad: 4.33907e-05 1.77984e-05 -0.000999449
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993394 para diff norm: 1.00055e-06 iter num: 37893
Grad: 4.33841e-05 1.77957e-05 -0.000999298
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993395 para diff norm: 1.0004e-06 iter num: 37894
Grad: 4.33776e-05 1.7793e-05 -0.000999147
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993396 para diff norm: 1.00025e-06 iter num: 37895
Grad: 4.3371e-05 1.77903e-05 -0.000998996
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993397 para diff norm: 1.00009e-06 iter num: 37896
Grad: 4.33644e-05 1.77876e-05 -0.000998844
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993398 para diff norm: 9.99944e-07 iter num: 37897
pass
solution:
1.99971
0.999882
-0.993398
Golden Solution:
2
1
-1
Press any key to continue . . .
```

2) 随机梯度下降法:

1000个样本, 设置的learn rate = 1, 一次迭代处理一个样本, 最终经过25000次迭代收敛到可以接受的标准。

```

cmd C:\Windows\system32\cmd.exe
Paras: 1.99795 0.9998981 -0.951616 para diff norm: 0.000446962 iter num: 24714
Paras: 1.99818 0.999232 -0.951604 para diff norm: 0.000338804 iter num: 24715
Paras: 1.99816 0.99922 -0.951605 para diff norm: 1.82845e-05 iter num: 24716
Paras: 1.99805 0.998911 -0.951617 para diff norm: 0.000328846 iter num: 24717
Paras: 1.99804 0.998721 -0.951623 para diff norm: 0.000190122 iter num: 24718
Paras: 1.9981 0.999161 -0.951611 para diff norm: 0.000444339 iter num: 24719
Paras: 1.99816 0.999501 -0.951604 para diff norm: 0.000344163 iter num: 24720
Paras: 1.99813 0.998416 -0.951627 para diff norm: 0.00108582 iter num: 24721
Paras: 1.99815 0.998517 -0.951624 para diff norm: 0.000102945 iter num: 24722
Paras: 1.99834 0.999645 -0.951597 para diff norm: 0.00114423 iter num: 24723
Paras: 1.99829 0.999464 -0.951642 para diff norm: 0.000192287 iter num: 24724
Paras: 1.99833 0.99955 -0.95164 para diff norm: 9.18398e-05 iter num: 24725
Paras: 1.99831 0.99951 -0.951641 para diff norm: 4.20315e-05 iter num: 24726
Paras: 1.99805 0.999223 -0.951665 para diff norm: 0.000389985 iter num: 24727
Paras: 1.99804 0.999007 -0.951669 para diff norm: 0.000216928 iter num: 24728
Paras: 1.99784 0.998829 -0.951689 para diff norm: 0.000266407 iter num: 24729
Paras: 1.99765 0.998724 -0.951707 para diff norm: 0.000220029 iter num: 24730
Paras: 1.99779 0.998928 -0.951696 para diff norm: 0.000248953 iter num: 24731
Paras: 1.99774 0.998884 -0.9517 para diff norm: 6.50401e-05 iter num: 24732
Paras: 1.99774 0.998884 -0.9517 para diff norm: 5.54896e-07 iter num: 24733
pass
solution:
1.99774
0.998884
-0.9517
Golden Solution:
2
1
-1
Press any key to continue . . .
3)

```

牛顿法

```

cmd C:\Windows\system32\cmd.exe
Paras: 1.99954      1 -0.99909 para diff norm: 1.0188e-06 iter num: 7691
Paras: 1.99955      1 -0.999091 para diff norm: 1.01778e-06 iter num: 7692
Paras: 1.99955      1 -0.999091 para diff norm: 1.01676e-06 iter num: 7693
Paras: 1.99955      1 -0.999092 para diff norm: 1.01575e-06 iter num: 7694
Paras: 1.99955      1 -0.999093 para diff norm: 1.01473e-06 iter num: 7695
Paras: 1.99955      1 -0.999094 para diff norm: 1.01372e-06 iter num: 7696
Paras: 1.99955      1 -0.999095 para diff norm: 1.0127e-06 iter num: 7697
Paras: 1.99955      1 -0.999096 para diff norm: 1.01169e-06 iter num: 7698
Paras: 1.99955      1 -0.999097 para diff norm: 1.01068e-06 iter num: 7699
Paras: 1.99955      1 -0.999098 para diff norm: 1.00967e-06 iter num: 7700
Paras: 1.99955      1 -0.999099 para diff norm: 1.00866e-06 iter num: 7701
Paras: 1.99955      1 -0.999101 para diff norm: 1.00765e-06 iter num: 7702
Paras: 1.99955      1 -0.999101 para diff norm: 1.00664e-06 iter num: 7703
Paras: 1.99955      1 -0.999101 para diff norm: 1.00564e-06 iter num: 7704
Paras: 1.99955      1 -0.999102 para diff norm: 1.00463e-06 iter num: 7705
Paras: 1.99955      1 -0.999103 para diff norm: 1.00363e-06 iter num: 7706
Paras: 1.99955      1 -0.999104 para diff norm: 1.00262e-06 iter num: 7707
Paras: 1.99955      1 -0.999105 para diff norm: 1.00162e-06 iter num: 7708
Paras: 1.99955      1 -0.999106 para diff norm: 1.00062e-06 iter num: 7709
Paras: 1.99955      1 -0.999107 para diff norm: 9.99617e-07 iter num: 7710
pass
solution:
1.99955
1
-0.999107
Golden Solution:
2
1
-1
Press any key to continue . . .

```

对批量梯度下降法和随机梯度下降法的总结：

批量梯度下降---最小化所有训练样本的损失函数，使得最终求解的是全局的最优解，即求解的参数是使得风险函数最小，但是对于大规模样本问题效率低下。

随机梯度下降---最小化每条样本的损失函数，虽然不是每次迭代得到的损失函数都向着全局最优方向，但是大的整体的方向是向全局最优解的，最终的结果往往是在全局最优解附近，适用于大规模训练样本情况。

从实验数据来看，批量梯度下降法收敛到的是全局最优值，而随机梯度下降法收敛到最优值附件的地方。随机梯度下降法的好处是收敛远快于批量梯度下降法。

线性方程组求解转为成一个最小二乘问题

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} * \lambda$$

问题可以转化成寻找一组 $\lambda$ 使得:

$$L(\lambda) = (\mathbf{X} * \lambda - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} * \lambda - \mathbf{Y}) \text{极小}$$

利用 $L(\lambda)$ 对向量  $\lambda$  求导<sup>1</sup> 可以得到<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} = 2\mathbf{X}^T (\mathbf{X}\lambda - \mathbf{Y}) = 0$$

我们也可以得到:

$$\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{X}(n) - \mathbf{f}'(\mathbf{X}(n)) / \mathbf{f}''(\mathbf{X}(n))$$

```
MatrixXd Iteration::BathGradDescent(MatrixXd paras, int iterator_num)
{
    int rows = m_input_data.rows();
    int cols = m_input_data.cols();
    MatrixXd init_paras = paras;
    if (m_input_data.cols() == paras.rows())
    {

        MatrixXd grad = (1.0 / rows)*m_input_data.transpose()*(m_output_data - m_input_data*init_paras);
        paras += m_learn_rate*grad;
    }
    else
    {
        //error
    }
    return paras;
}

MatrixXd Iteration::StocGradDescent(MatrixXd paras, int index)
{
    int rows = m_input_data.rows();
    int cols = m_input_data.cols();
    MatrixXd input_data_i(1,cols);
    MatrixXd output_data_i(1, 1);
    output_data_i(0, 0) = m_output_data(index,0);

    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        input_data_i(0, i) = m_input_data(index, i);
    }

    if (m_input_data.cols() == paras.rows())
    {
        MatrixXd grad = (1.0 / rows) *input_data_i.transpose()*(input_data_i*paras - output_data_i);
        paras = paras - grad;
    }
    else
    {
        //error
    }
    return paras;
}
```

# 牛顿法

## 牛顿法求零点

牛顿法是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数  $f(x)$  的泰勒级数的前面几项来寻找方程  $f(x) = 0$  的根。牛顿法最大的特点就在于它的收敛速度很快。<sup>1</sup>

由于牛顿法是基于当前位置的切线来确定下一次的位置，所以牛顿法又被很形象地称为是“切线法”。

步骤：

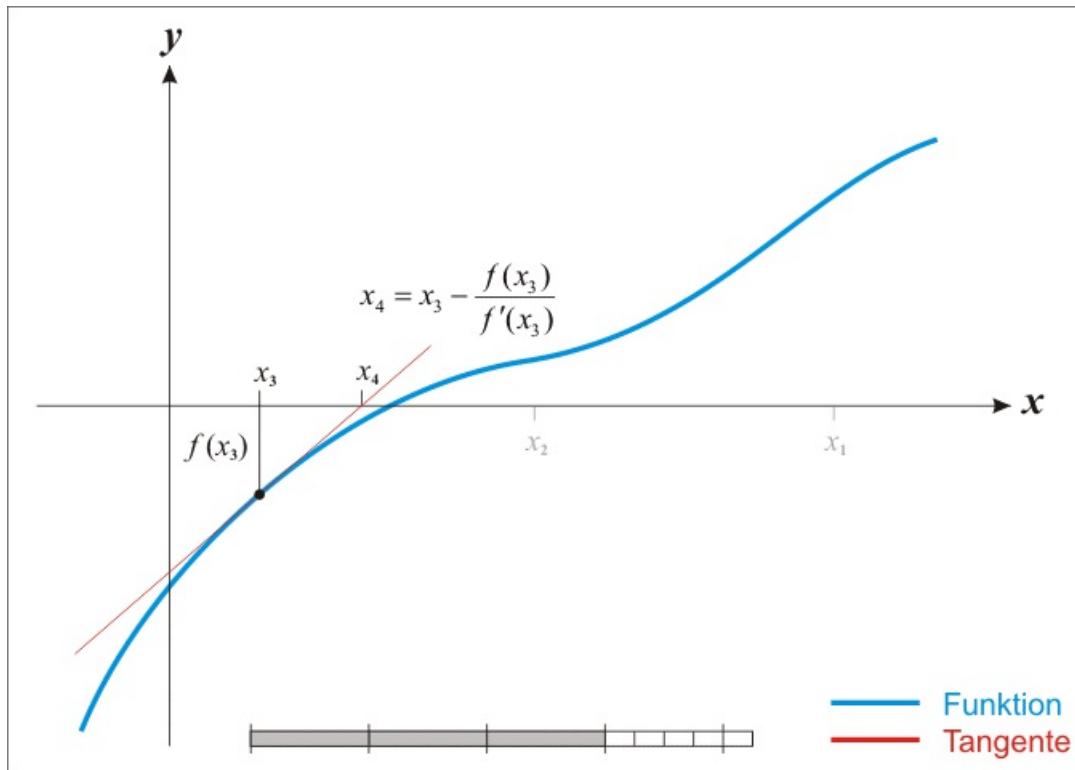
首先，选择一个接近函数  $f(x)$  零点的  $x_0$ ，计算相应的  $f(x_0)$  和切线斜率  $f'(x_0)$ 。然后计算穿过点  $(x_0, f(x_0))$  并且斜率为  $f'(x_0)$  的直线和  $x$  轴的交点的  $x$  轴坐标，也就是如下方程：

$$x * f'(x_0) + f(x_0) - x_0 * f'(x_0) = 0$$

我们将新求得的点的  $x$  坐标命名为  $x_1$ ，通常  $x_1$  会比  $x_0$  更接近方程  $f(x) = 0$  的解。因此我们现在可以利用  $x_1$  开始下一轮迭代。迭代公式可化简为如下所示：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

已经证明，如果  $f'(x)$  是连续的，并且待求的零点  $x$  是孤立的，那么在零点  $x$  周围存在一个区域，只要初始值  $x_0$  位于这个邻近区域内，那么牛顿法必定收敛。并且，如果  $f'(x)$  不为 0，那么牛顿法将具有平方收敛的性能。粗略的说，这意味着每迭代一次，牛顿法结果的有效数字将增加一倍。下图为一个牛顿法执行过程的例子。下图为一个牛顿法执行过程的例子。



## 牛顿法求极值

对一个函数进行泰勒展开，保留到二阶。

$$f(x_n + \Delta x) \approx f(x_n) + f'(x_n)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_n)\Delta x^2$$

为得到最佳的  $\Delta x$ ，我们需要对上式求导，并令其为 0。

因此可以得到：

$$\Delta x = \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

因此：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

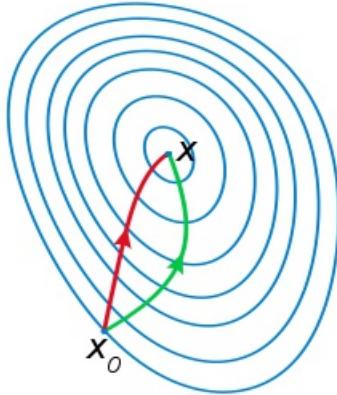
如果X是向量，则可以写成向量形式H是Hessian矩阵：

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \frac{\nabla f(\mathbf{x}_n)}{Hf(\mathbf{x}_n)}$$

关于牛顿法和梯度下降法的效率对比：

从本质上来看，牛顿法是二阶收敛，梯度下降是一阶收敛，所以牛顿法就更快。如果更通俗地说的话，比如你想找一条最短的路径走到一个盆地的最底部，梯度下降法每次只从你当前所处位置选一个坡度最大的方向走一步，牛顿法在选择方向时，不仅会考虑坡度是否够大，还会考虑你走了一步之后，坡度是否会变得更大。所以，可以说牛顿法比梯度下降法看得更远一点，能更快地走到最底部。（牛顿法目光更加长远，所以少走弯路；相对而言，梯度下降法只考虑了局部的最优，没有全局思想。）

根据wiki上的解释，从几何上说，牛顿法就是用一个二次曲面去拟合你当前所处位置的局部曲面，而梯度下降法是用一个平面去拟合当前的局部曲面，通常情况下，二次曲面的拟合会比平面更好，所以牛顿法选择的下降路径会更符合真实的最优下降路径。



注：红色的牛顿法的迭代路径，绿色的是梯度下降法的迭代路径。

牛顿法的优缺点总结：

优点：二阶收敛，收敛速度快；

缺点：牛顿法是一种迭代算法，每一步都要求解目标函数的Hessian矩阵的逆矩阵，计算比较复杂。

## 2) 拟牛顿法 (Quasi-Newton Methods)

拟牛顿法是求解非线性优化问题最有效的方法之一，于20世纪50年代由美国Argonne国家实验室的物理学家W.C.Davidon所提出来。Davidon设计的这种算法在当时看来是非线性优化领域最具创造性的发明之一。不久R. Fletcher和M. J. D. Powell证实了这种新的算法远比其他方法快速和可靠，使得非线性优化这门学科在一夜之间突飞猛进。

拟牛顿法的本质思想是改善牛顿法每次都要求解复杂的Hessian矩阵的逆矩阵的缺陷，它使用正定矩阵来近似Hessian矩阵的逆，从而简化了运算的复杂度。拟牛顿法和最速下降法一样只要求每一步迭代时知道目标函数的梯度。通过测量梯度的变化，构造一个目标函数的模型使之足以产生超线性收敛性。这类方法大大优于最速下降法，尤其对于困难的问题。另外，因为拟牛顿法不需要二阶导数的信息，所以有时比牛顿法更为有效。如今，优化软件中包含了大量的拟牛顿算法用来解决无约束、约束、和大规模的优化问题。

具体步骤：

拟牛顿法的基本思想如下。首先构造目标函数在当前迭代 $x_k$ 的二次模型：

$$m_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{p^T B_k p}{2}$$

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

这里 $B_k$ 是一个对称正定矩阵，于是我们取这个二次模型的最优解作为搜索方向，并且得到新的迭代点：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

其中我们要求步长 $\alpha_k$ 满足Wolfe条件。这样的迭代与牛顿法类似，区别就在于用近似的Hesse矩阵 $B_k$ 代替真实的Hesse矩阵。所以拟牛顿法最关键的地方就是每一步迭代中矩阵 $B_k$ 的更新。现在假设得到一个新的迭代 $x_{k+1}$ ，并得到一个新的二次模型：

这个公式被称为割线方程。常用的拟牛顿法有DFP算法和BFGS算法。

**最优化方法：牛顿迭代法和拟牛顿迭代法**



# 拟牛顿法

## 拟牛顿法的历史

拟牛顿法是求解非线性优化问题最有效的方法之一，于20世纪50年代由美国Argonne国家实验室的物理学家W.C.Davidon所提出。Davidon设计的这种算法在当时看来是非线性优化领域最具创造性的发明之一。不久R. Fletcher和M. J. D. Powell证实了这种新的算法远比其他方法快速和可靠，使得非线性优化这门学科在一夜间突飞猛进。

拟牛顿法的本质思想是改善牛顿法每次需要求解复杂的Hessian矩阵的逆矩阵的缺陷，它使用正定矩阵来近似Hessian矩阵的逆，从而简化了运算的复杂度。拟牛顿法和最速下降法一样只要求每一步迭代时知道目标函数的梯度。通过测量梯度的变化，构造一个目标函数的模型使之足以产生超线性收敛性。这类方法大大优于最速下降法，尤其对于困难的问题。另外，因为拟牛顿法不需要二阶导数的信息，所以有时比牛顿法更为有效。如今，优化软件中包含了大量的拟牛顿算法用来解决无约束、约束、和大规模的优化问题。

具体步骤：

拟牛顿法的基本思想如下。首先构造目标函数在当前迭代 $x_k$ 的二次模型：

$$m_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{p^T B_k p}{2}$$

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

这里 $B_k$ 是一个对称正定矩阵，于是我们取这个二次模型的最优解作为搜索方向，并且得到新的迭代点：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

其中我们要求步长 $\alpha_k$ 满足Wolfe条件。这样的迭代与牛顿法类似，区别就在于用近似的Hesse矩阵 $B_k$ 代替真实的Hesse矩阵。所以拟牛顿法最关键的地方就是每一步迭代中矩阵 $B_k$ 的更新。现在假设得到一个新的迭代 $x_{k+1}$ ，并得到一个新的二次模型：

这个公式被称为割线方程。常用的拟牛顿法有DFP算法和BFGS算法。

**最优化方法：牛顿迭代法和拟牛顿迭代法**

## Quasi-Newton methods

### BFGS

我们知道，在牛顿法中，我们要求解二阶导数矩阵—Hessian阵，当变量很多时，求解Hessian阵势比较费时间的。Quasi-Newton法主要是在构造Hessian阵上下功夫，它是通过构造一个近似的Hessian阵，或者Hessian阵的逆，而不是解析求解或者利用差分法来求解这个Hessian阵。构造的Hessian阵通过迭代而改变。

比较出名的Quasi-Newton方法有BFGS(以Charles George Broyden, Roger Fletcher, Donald Goldfarb and David Shanno命名)

在牛顿法中， $k$ 步搜寻步长与方向是 $p_k$ ，满足下面方程

$$B_k p_k = -\nabla f(x_k)$$

$B_k$ 就是近似的Hessian阵。下面我们讨论 $B_k$ 如何变化。

我们要求 $B_k$ 的更新满足quasi-Newton条件

$$B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

这个条件就是简单的求 $f(x)$ 的二阶导数。

令：

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k), \quad s_k = x_{k+1} - x_k, \quad \text{因此} \quad B_{k+1} \text{满足 } B_{k+1} s_k = y_k$$

这就是割线方程(the secant equation)，The curvature condition  $s_k^T y_k > 0$ 需要满足。

$k$ 步的Hessian阵以如下方式更新。

$$B_{k+1} = B_k + U_k + V_k$$

为了保持 $B_{k+1}$ 的正定性以及对称性。 $B_{k+1}$ 可以取如下形式：

$$B_{k+1} = B_k + \alpha u u^T + \beta v v^T$$

选择 $u = y_k, v = B_k s_k$ ，为了满足割线方程(the secant condition)，我们得到：

$$\alpha = \frac{1}{y_k^T s_k}$$

$$\beta = \frac{1}{s_k^T B_k s_k}$$

最终我们得到Hessian阵的更新方程：

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k^T}{s_k^T B_k s_k}$$

利用 Sherman–Morrison formula,

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

其中A是可逆方阵,  $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$

可以方便的得到 $B_{k+1}$ 的逆。

$$\begin{aligned} B_{k+1}^{-1} &= (I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k}) B_k^{-1} (1 - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}) + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k} \\ B_{k+1}^{-1} &= B_k^{-1} + \frac{(s_k^T y_k + y_k^T B_k^{-1} y_k)(s_k s_k^T)}{(s_k^T y_k)^2} - \frac{B_k^{-1} y_k s_k^T + s_k y_k^T B_k^{-1}}{s_k^T y_k} \end{aligned}$$

## DFP

参考 DFP的矫正公式如下：

$$H_{k+1} = H_k + \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}$$

当采用精确线搜索时, 矩阵序列 $H_k$ 的正定新条件 $s_k^T y_k > 0$ 可以被满足。但对于Armijo搜索准则来说, 不能满足这一条件, 需要做如下修正:

$$H_{k+1} = H_k - s_k^T y_k \leq 0$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} - s_k^T y_k > 0$$

## Broyden族算法

之前BFGS和DFP矫正都是由 $y_k$ 和 $B_k s_k$ (或者 $s_k$ 和 $H_k y_k$ )组成的秩2矩阵。而Droyden族算法采用了BFGS和DFP校正公式的凸组合, 如下:

$$\begin{aligned} H_{k+1}^\phi &= \phi_k H_{k+1}^{BFGS} + (1 - \phi_k) H_{k+1}^{DFP} \\ &= H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k} + \phi_k v_k v_k^T \end{aligned}$$

其中 $\phi_k \in [0, 1]$ ,  $v_k$ 由下式定义:

$$v_k = \sqrt{\frac{s_k^T H_k y_k}{y_k^T H_k y_k}} \left( \frac{s_k}{y_k^T s_k} - \frac{H_k y_k}{y_k^T H_k y_k} \right)$$

## Trust-Region方法

Gauss-Netwon方法, L-M算法, Dog-Leg算法都是信赖域方法。下面主要讨论Trust-Region方法的原理。后面的分节讨论三种常见的Trust-Region方法。

### Gauss-Netwon方法

对于函数 $f(x)$ 的小邻域展开

$$f(x + h) \simeq l(h) \equiv f(x) + J(x)h$$

$$F(x + h) \simeq L(h) \equiv \frac{1}{2}l(h)^T l(h) = \frac{1}{2}f^T f + h^T J^T f + \frac{1}{2}h^T J^T J h$$

我们需要选择步长 $h_{gn}$ 来最小化 $L(h)$

$$h_{gn} = \operatorname{argmin}_h L(h)$$

$$(J^T J)h_{gn} = -J^T f$$

## 高斯-牛顿法

非线性回归中，损失函数可以表示成残差的形式：

$$L(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

根据牛顿法：

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g,$$

梯度表示为：

$$g_j = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

对损失函数求二阶导，我们可以得到Hessian矩阵：

$$H_{jk} = 2 \sum_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

当残差 $r_i$ 很小的时候，我们就可以去掉最后一项，因此

$$H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With } J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

这样Hessian就是半正定了。

因此参数迭代公式可以写成：

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J)^{-1} J^T r,$$

## 另外一种解释

对于函数 $f(x)$ 的小邻域展开

$$f(x+h) \simeq l(h) \equiv f(x) + J(x)h$$

$$F(x+h) \simeq L(h) \equiv \frac{1}{2}l(h)^T l(h) = \frac{1}{2}f^T f + h^T J^T f + \frac{1}{2}h^T J^T J h$$

我们需要选择步长 $h_{gn}$ 来最小化 $L(h)$

$$h_{gn} = \operatorname{argmin}_h L(h)$$

$$(J^T J)h_{gn} = -J^T f$$

## L-M算法

方法用于求解非线性最小二乘问题，结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。因此我们先简单介绍梯度下降法与Gauss-Netwon法。

### 梯度下降法

把损失函数展开到一阶。

$$f(x + \alpha \mathbf{d}) = f(x_0) + \alpha f'(x_0) \mathbf{d} + O(\alpha^2)$$

$$x_{t+1} = x_t - \alpha f'(x_t),$$

### 牛顿法

牛顿法 把cost function进行展开到二阶：

$$f(x_{t+1}) = f(x_t) + g(x_{t+1} - x_t) + \frac{1}{2}(x_{t+1} - x_t)^T H(x_{t+1} - x_t)$$

求导,  $\frac{\partial f}{\partial x_t} = g + H(x_{t+1} - x_t)$ , 让导数为0就有

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g$$

要是H是正定的，上面的就是凸函数，也就一定有了最小值。可惜H不一定是正定的，这就引导出了下面的方法

### 高斯-牛顿法

cost function可以表示成残差的形式：

$$L(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

根据牛顿法：

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g,$$

梯度表示为：

$$g_j = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

对方程(4.9)求二阶导，我们可以得到Hessian矩阵：

$$H_{jk} = 2 \sum_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

当残差 $r_i$ 很小的时候，我们就可以去掉最后一项，因此

$$H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With} \quad J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

这样Hessian就是半正定了。

因此参数迭代公式(4.10)可以写成：

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J)^{-1} J^T r,$$

### Levenberg-Marquardt

方法用于求解非线性最小二乘问题，结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。

其主要改变是在Hessian阵中加入对角线项，加这一样可以保证Hessian阵是正定的。当然，这是一种L2正则化方式。

$$x_{t+1} = x_t - (H + \lambda I_n)^{-1}g,$$

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda I_n)^{-1} J^T r$$

L-M算法的不足点。

当 $\lambda$ 很大时， $J^T J + \lambda I_n$ 根本没用，Marquardt为了让梯度小的方向移动的快一些，来防止小梯度方向的收敛，把中间的单位矩阵换成了 $\text{diag}(J^T J)$ ，因此迭代变成：

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda \text{diag}(J^T J))^{-1} J^T r$$

阻尼项(damping parameter)  $\lambda$ 的选择，Marquardt 推荐一个初始值 $\lambda_0$ 与因子 $v > 1$ ，开始时， $\lambda = \lambda_0$ ，然后计算cost functions，第二次计算 $\lambda = \lambda_0/v$ ，

如果两者cost function都比初始点高，然后我们就增大阻尼项，通过乘以v，直到我们发现当 $\lambda = \lambda_0 v^k$ 时，cost function下降。

如果使用 $\lambda = \lambda_0/v$ 使得cost function下降，然后我们就把 $\lambda_0/v$ 作为新的 $\lambda$

当 $\lambda = 0$ 时，就是高斯-牛顿法，当 $\lambda$ 趋于无穷时，就是梯度下降法。如果使用 $\lambda/v$ 没有使损失函数下降，使用 $\lambda$ 导致损失函数下降，那么我们就继续使用 $\lambda$ 做为阻尼项。

## 归一化的残差

如果我们假设数据中每一点的贡献是等权重，因此，我们有必要对每一项残差加一个权重，来归一化每一项残差。因此公式(4-9)可以变成，cost function可以表示成残差的形式：

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i(x)^2 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i^2} (y_i - f_i(x_i))^2$$

此时，Jacobia变成

$$H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With} \quad J_{ij} = y_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$$J_S = \Sigma J, \Sigma_{ij} = \frac{1}{y_i} \delta_{ij}$$

## L2正则化与Levenberg-Marquardt算法

我们在cost function加上L2正则项

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

可以表示成：

$$L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T \nabla_\beta L(\beta_0) + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H (\beta - \beta_0) + \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

求一阶导数：

$$L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T g + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H (\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

令其为0：

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = g + H(\beta - \beta_0) + \lambda \beta = 0$$

就得到：

$$\beta = (H + \lambda I_n)^{-1} H \beta_0 - (H + \lambda I_n)^{-1} g, \text{ 算法流程如下：}$$

$k := 0; x = x_0; v := 2; A := J(x)^T J(x); g := J(x)^T f(x); u := \tau * \max(a_{ii})$

found:= ( $\|g\|_\infty \leq \epsilon_1$ )

while(not found) and  $k < k_{max}$

k:=k+1,计算 $h_{lm}$ 根据 $(A + uI)h_{lm} = -g$

if  $\|h_{lm}\| \leq \epsilon(\|x\| + \epsilon_2)$

    found := true

else:

$x_{new} := x + h_{lm}$

$\rho := (F(x) - F(x + h_{lm})) / (L(0) - L(h_{lm}))$

    if  $\rho \geq 0$

$x := x_{new}; g := J(x)^T f(x)$

$A := J^T(x) J(x); g := J^T(x) f(x)$

        found:= ( $\|g\|_\infty \leq \epsilon_1$ )

$u := u * \max(1/2, 1 - (2\rho - 1)^3); v := 2$

    else:

$u := u * v; v = 2 * v$

```
def LM_Solver(self):
    init_p = 0.5 * np.ones((2, 1))
    init_p[0, 0] = 2.0
    init_p[1, 0] = 1.0
    epsilon_1 = 1e-15
    epsilon_2 = 1e-15
    epsilon_3 = 1e-15
    alpha = 1
    cost_history = np.zeros((self.training_steps, 3))
    Jaco = self.Jacobian(init_p)
    Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
    resi = self.residual(init_p)
```

```

m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)
cost_old = np.dot(resi.transpose(), resi)
epoch = -1
train_stop = -1
miu = Hessian.max()
lamda_v = 2

matrix_I = np.identity(Hessian.shape[0])
while epoch < self.training_steps - 1 and train_stop < 0:
    epoch += 1
    print "Epoch: ", epoch
    go_next_epoch = -1

    while go_next_epoch < 0:
        sigma_p = np.dot(np.linalg.inv(Hessian + miu*matrix_I), m_g)
        square_g = np.linalg.norm(sigma_p)
        if square_g <= epsilon_2*np.linalg.norm(init_p):
            train_stop = 1
            break
        else:
            new_p = init_p + sigma_p
            resi_new = self.residual(new_p)
            cost_new = np.dot(resi_new.transpose(), resi_new)
            frac = np.dot(sigma_p.transpose(), miu* sigma_p + m_g)
            rou = (cost_old - cost_new) / frac
            if rou > 0:
                go_next_epoch = 1
                init_p = new_p
                Jaco = self.Jacobian(init_p)
                Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
                resi = self.residual(init_p)
                m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)
                if (np.abs(m_g)).max < epsilon_1:
                    train_stop = 1
                    break
                miu *= max(1.0 / 3.0, 1 - pow(2 * rou - 1, 3))
                lamda_v = 2
                print init_p.transpose(), miu, cost_new
                cost_history[epoch, 0] = cost_new
                cost_history[epoch, 1] = miu
                cost_history[epoch, 2] = np.linalg.norm(m_g)
                cost_old = cost_new
            else:
                miu *= lamda_v
                # lamda_miu *= 0
                lamda_v *= 2
return cost_history, init_p

```

## Dogleg算法

Powell's Dog Leg Method是一种信赖域方法

在Gauss-Newton迭代中

$$J(x)h \simeq -f(x)$$

最陡的方向由下面公式给出：

$$h_{sd} = -g = -J(x)^T f(x)$$

但是这只是给出了方向，而没有给出步长。

考虑线性模型

$$f(x + \alpha h_{sd}) \simeq f(x) + \alpha J(x)h_{sd}$$

$$F(x + \alpha h_{sd}) \simeq \frac{1}{2} \|f(x) + \alpha J(x)h_{sd}\|^2 = F(x) + \alpha h_{sd}^T J(x)^T f(x) + \frac{1}{2} \alpha^2 \|J(x)h_{sd}\|^2$$

当 $\alpha$ 取如下值得时候，以上函数取最小值

$$\alpha = -\frac{h_{sd}^T J(x)^T f(x)}{\|J(x)h_{sd}\|^2} = \frac{\|g\|^2}{\|J(x)h_{sd}\|^2}$$

现在有两个步长的选择  $a = \alpha h_{sd}$  以及  $b = h_{gn}$ , Powell建议在信赖域半价是 $\Delta$ 的时候，步长可以如下选择

If  $\|h_{gn}\| \leq \Delta$ ,  $h_{dl} = h_{gn}$

Elseif:  $\|\alpha h_{sd}\| \geq \Delta$ ,  $h_{dl} = (\Delta / \|\alpha h_{sd}\|)h_{sd}$

else:

$$h_{dl} = \alpha h_{sd} + \beta(h_{gn} - \alpha h_{sd})$$

选择 $\beta$ 使得 $\|h_{dl}\| = \Delta$

在L-M算法中我们定义了增益因子,

$$\rho = (F(x) - F(x + h_{dl})) / (L(0) - L(h_{dl}))$$

其中L是线性模型

$$L(h) = \frac{1}{2} \|f(x) + J(x)h\|^2$$

在L-M我们通过 $\rho$ 来控制阻尼因子，在dog-leg算法中，我们通过它来控制步长

Dog Leg Method:

$k := 0; x = x_0; \Delta := \Delta_0; g := J(x)^T f(x)$

found:= ( $\|f(x)\|_\infty \leq \epsilon_3$ )or( $\|g\|_\infty \leq \epsilon_1$ )

while(not found) and  $k < k_{max}$

k:=k+1,计算 $\alpha$

$$h_{sd} := -\alpha g; \text{solve } J(x)h_{gn} \simeq -f(x)$$

计算  $h_{dl}$

if  $\|h_{dl}\| \leq \epsilon(\|x\| + \epsilon_2)$

found := true

else:

$$x_{new} := x + h_{dl}$$

$$\rho := (F(x) - F(x + h_{dl})) / (L(0) - L(h_{dl}))$$

if  $\rho \geq 0$

$$x := x_{new}; g := J(x)^T f(x)$$

found:= ( $\|f(x)\|_\infty \leq \epsilon_3$ )or( $\|g\|_\infty \leq \epsilon_1$ )

if  $\rho \geq 0.75$

$$\Delta := \max(\Delta, 3 * \|h_{dl}\|)$$

else if  $\rho \leq 0.25$

$$\Delta := \Delta / 2$$

found:=  $\Delta \leq \epsilon_2(\|x\| + \epsilon)$

```
def Dogleg_Solver(self):
    init_para = np.ones((2, 1))
    epsilon_1 = 1e-15
    epsilon_2 = 1e-15
```

```

epsilon_3 = 1e-15
alpha = 1
cost_history = np.zeros((self.training_steps, 3))
Jaco = self.Jacobian(init_para) //get Jacobian
Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
resi = self.residual(init_para)
m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)
cost_old = np.dot(resi.transpose(), resi)

epoch = -1
train_stop = -1
delta = 0.01
while epoch < self.training_steps - 1 and train_stop < 0:
    epoch += 1
    print "Epoch: ", epoch
    go_next_epoch = -1

    while go_next_epoch < 0:
        square_g = np.linalg.norm(m_g)
        square_Jg = np.linalg.norm(np.dot(Jaco, m_g))
        alpha = pow(square_g, 2) / pow(square_Jg, 2)

        h_sd = -alpha * m_g
        h_gn = np.dot(np.linalg.inv(Hessian), -m_g)
        norm_para = np.linalg.norm(init_para)

        ##calculate h_dl
        if np.linalg.norm(h_gn) <= delta:
            h_dl = h_gn
            hdl_type = 0
        elif np.linalg.norm(h_sd) >= delta:
            h_dl = (delta / np.linalg.norm(h_sd)) * h_sd
            hdl_type = 1
        else:
            beta = self._get_h_dl(h_sd, h_gn, delta)
            h_dl = h_sd + beta * (h_gn - h_sd)
            hdl_type = 2

        # #epsilon_2*norm_para:
        if np.linalg.norm(h_dl) < epsilon_2 * (norm_para + epsilon_2):
            train_stop = 1
            break
        else:
            para_0 = init_para + h_dl
            #cost_old = pow(np.linalg.norm(resi), 2)
            resi_new = self.residual(para_0)
            cost_new = np.dot(resi_new.transpose(), resi_new)
            #pow(np.linalg.norm(resi_new), 2)
            #h_sub = h_sd - 0.5 * np.dot(Hessian, h_dl)
            #frac = np.dot(h_dl.transpose(), h_sub)
            if hdl_type == 0:
                frac = cost_new
            elif hdl_type == 1:
                frac = delta/(2*alpha)*(2*np.linalg.norm(alpha*m_g) - delta)
            else:
                frac = 0.5*alpha*pow(beta, 2)*pow(np.linalg.norm(alpha*m_g), 2)
                frac += beta*(2 - beta)*cost_new
            rou = (cost_old - cost_new) /frac
            if rou > 0:
                go_next_epoch = 1
                init_para = para_0
                Jaco = self.Jacobian(init_para)
                Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
                resi = self.residual(init_para)
                m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)

                cost_history[epoch, 0] = cost_new
                cost_history[epoch, 1] = delta
                cost_history[epoch, 2] = np.linalg.norm(m_g)
                print para_0.transpose(), cost_new, delta

            if (np.abs(m_g)).max() < epsilon_1 or (np.abs(resi_new)).max() < epsilon_3:
                train_stop = 1
                break
            if rou > 0.75:
                delta = max(delta, 3 * np.linalg.norm(h_dl))
            elif rou < 0.25:
                delta /= 2.0
                if delta < epsilon_2:
                    break
            cost_old = cost_new
return cost_history, init_para

```



# 共轭梯度法

## CG方法分类

共轭梯度法可以用来处理线性方程组，尤其是大规模线性方程组，同时也可以用来处理非线性系统。处理线性系统问题的共轭梯度法在矩阵计算那节有过介绍，这里，我们再介绍一下，并把他推广到非线性情形。

### 非线性情形

由于任何非线性最优化问题，在解的附近可以做二次展开，如果省略常数项，则这个非线性函数可以用如下方程来表示。

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b,$$

因此，讨论这个二次方程的优化问题就可以推广到非线性优化问题。

## 共轭梯度法

共轭梯度法(Conjugate Gradient)是介于最速下降法与牛顿法之间的一个方法，它仅需要一阶导数信息，但克服了最速下降法收敛慢的缺点，同时又避免了牛顿法需要储存和计算Hesse矩阵并求逆的缺点，共轭梯度法不仅是解决大型线性方程组最有用的方法之一，也是解大型非线性优化问题最有效的算法之一。

向量共轭的定义：

若A是正定对称，若非0矢量u, v满足， $u^T Av = 0$ ，则称矢量u, v是A共轭的。

假设：

$P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 是一组基于A的共轭矢量，则 $Ax = b$ 的解 $x^*$ 可以表示为：

$x^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ ，因此基于基矢量展开，我们有：

$$Ax^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ap_i$$

左乘 $P_k^T$ ：

$$P_k^T Ax^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_k^T Ap_i$$

代入： $P_k^T Ax^* = b$ ,  $u^T Av = \langle u, v \rangle_A$ ，利用 $i! = k$ 有 $\langle p_k, p_i \rangle_A = 0$ 就得到：

如果我们小心的选择 $p_k$ ，为了获得解 $x^*$ 的一个好的近似，我们并不需要所有的基向量。因此，我们把共轭梯度算法当成一种迭代算法，它也允许我们近似n很大，以至于直接求解需要花费太多时间的系统。

我们给 $x^*$ 一个初始猜测值 $x_0$ ，假设 $x_0 = 0$ ，在求解的过程中，我们需要一种标准来告诉我们是否我们的解更靠近真实的解 $x^*$ ，实际上，求解 $Ax = b$ 等价于求解如下二次函数的极小值：

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b,$$

他存在唯一的最小值，因为他的二阶导是正定的：

$$D^2 f(x) = A,$$

解就是一阶导数等于0的地方

$$Df(x) = Ax - b,$$

假设第一个基矢 $p_0$ 就是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的负梯度，我们可以假设 $x_0 = 0$ 。因此：

$$p_0 = b - Ax_0.$$

令 $r_0$ 表示第k步的残差：

$$r_k = b - Ax_k,$$

$r_k$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_k$ 处的负梯度。

为了让 $p_k$ 与前面的所有 $p_i$ 相互共轭， $p_k$ 可以如下构造：

$$p_k = r_k - \sum_{i < k} \frac{p_i^T A r_k}{p_i^T A p_i} p_i$$

沿着这个方向，因此下一步的优化方向就是：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \text{满足：}$$

$$g'(\alpha_k = 0)$$

因此：

$f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha_k p_k) =: g(\alpha_k)$ ,  
 $\alpha_k = \frac{p_k^T b}{p_k^T A p_k} = \frac{p_k^T (r_k + Ax_k)}{p_k^T A p_k} = \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$

算法：

```

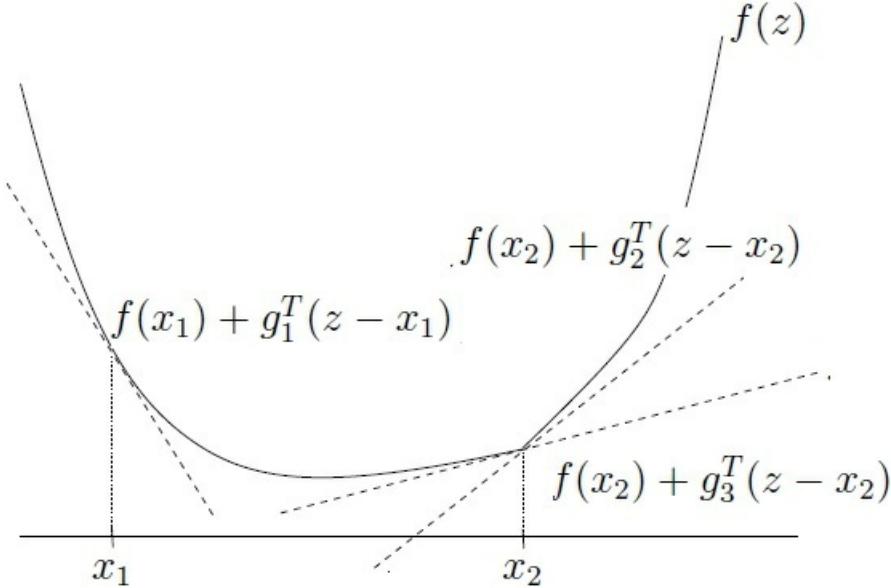
 $r_0 := b - Ax_0$ 
 $p_0 := r_0$ 
 $k := 0$ 
repeat:
   $\alpha_k := r_0$ 
   $\alpha_k := \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$ 
   $x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$ 
   $r_{k+1} := r_k + \alpha_k A p_k$ 
  if  $r_{k+1}$  is sufficiently small, then exit loop.
   $\beta_k := \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$ 
   $p_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k p_k$ 
   $k := k + 1$ 

```

## 次梯度法

对于不可导的函数，我们不能求导，因此可选方案是使用次梯度法。次梯度是一个集合，定义如下：

$$\partial f = [g | f() \geq f(x_0) + g^T(x - x_0), x \in \text{dom}f, f : R^n \rightarrow R]$$



上图中次梯度是一个区间，如  $x_2$  点的次梯度是过改点并处于曲线之下的所有直线斜率构成的集合。可以证明，在  $x_0$  点的次梯度是一个非闭空间

$$[a, b], a, b \text{ 是单侧极限。} \quad a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

他们一定存在并且满足  $a \leq b$ ，所有次导数的集合  $[a, b]$  称为函数  $f$  在  $x_0$  的次梯度。

例子： $y = |x|$  在  $x=0$  处的次梯度是  $[-1, 1]$ 。

## 次梯度法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

其中  $g^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$

然而， $-g^{(k)}$  可能不再是下降方向，所以常用的方式是一直保留最小的函数值，直到结果收敛。

$$f_{best}^{(k)} = \min((f_{best}^{(k)}, f(x^{(k)})))$$

## 随机坐标下降法

随机梯度法是对样本进行随机采样，当然我们也可以对模型的维度进行随机采样，这就是我们要介绍的随机坐标下降法。它的更新公式如下：

$$w_{t+1,j_t} = w_{t,j_t} - \eta_t \nabla_{j_t} f(w_t)$$

其中  $j_t$  表示第  $t$  次迭代中随机选取的维度标号， $\nabla_{j_t} f(w_t)$  是损失函数对于模型  $w_t$  中第  $j_t$  个维度的偏导数。

### 随机坐标下降法流程

```
Initialize:  $w_0$ 
Iterate: for  $t = 0, 1, \dots, T-1$ 
    1. 随机选取一个维度  $j_t \in [1, 2, \dots, d]$ 
    2. 计算梯度  $\nabla_{j_t} f(w_t)$ 
    3. 更新参数:
         $w_{t+1,j_t} = w_{t,j_t} - \eta_t \nabla_{j_t} f(w_t)$ 
end
```

有放回抽样

一方面，如果采样方法是有放回的，那么可以得到：

$$E_{j_t}[\nabla_{j_t} f(w_t)] = \frac{1}{d} \nabla f(w_t)$$

此处  $\nabla_{j_t} f(w_t)$  是  $d$  维向量，其中第  $j_t$  个维度是  $\nabla_{j_t} f(w_t)$ ，其它维度是 0。因此在期望方面，随机坐标梯度与梯度方面是一致的。

另一方面，对于线性模型，计算一个维度的梯度所需要的计算量只是计算整个梯度向量的  $1/d$ 。因此，随机坐标梯度可以作为原始梯度的高效替代品，尤其在维度较高时。

### 偏导数

定义：如果对任意模型  $w \in R^d$ ，对于维度  $j$  存在常数  $\beta_j$ ，使得对任意  $\delta \in R$  有下面不等式成立：

$$|\nabla_j f(w + \delta e_j) - \nabla_j f(w)| \leq \beta_j |\delta|$$

则称目标函数  $f$  对于维度  $j$  具有  $\beta_j$ -Lipschitz 连续的偏导数。

如果  $f$  对每个维度的偏导数都是 Lipschitz 连续的，我们记  $\beta_{max} = \max_{j=1,\dots,d} \beta_j$ 。

定理：假设目标函数  $f$  是  $R^d$  上的凸函数，并且具有  $\beta_j$ -Lipschitz 连续的偏导数，记：

$$w^* = \arg \min_{\|w\| \leq D} f(w),$$

当步长  $\eta = 1/\beta_{max}$  时，随机坐标下降法具有如下的次线性收敛速率：

$$Ef(w_T) - f(w^*) \leq \frac{2d\beta_{max}D^2}{T}$$

定理：假设目标函数  $f$  是  $R^D$  上的  $\alpha$ -强凸函数，并且具有  $\beta_j$ -Lipschitz 连续的偏导数，当步长  $\eta = 1/\beta_{max}$  时，随机坐标下降法具有如下的次线性收敛速率：

$$Ef(w_T) - f(w^*) \leq (1 - \frac{\alpha}{d\beta_{max}})^T (f(w_0) - f(w^*))$$

对比梯度下降法的收敛速率，我们发现随机坐标下降法的收敛速度关于迭代次数的阶数与梯度下降法是一致的。从这个意义上讲，随机坐标下降法的理论性质优于随机梯度下降法。<sup>1</sup>

### 可分离情况

这种偏导数的计算量小于梯度的计算量的情形一般称为“可分离”情形，对于线性模型，常用损失函数都是可分离的。

## 随机块坐标下降法

```
Initialize:  $w_0$ 
将  $d$  个维度均等分为  $J$  块。
Iterate: for  $t = 0, 1, \dots, T-1$ 
```

1. 随机选取一个维度  $J_t \in [1, 2, \dots, J]$

2. 计算梯度  $\nabla_{J_t} f(w_t)$

3. 更新参数:

$$w_{t+1, J_t} = w_{t, J_t} - \eta_t \nabla_{J_t} f(w_t), j \in J_t$$

end

|| 1. 《分布式机器学习--算法, 理论与实践》刘铁岩 ↵

## 有约束最优化问题

有约束问题主要通过拉格朗日乘子与KKT乘子来转化为无约束优化问题。问题是的关键是，在什么条件下可以通过乘子法来把有约束优化问题转化成无约束优化问题，因为如果我们能把转化成无约束优化问题，则求解无约束优化问题的方法都可以派上用场了。

主要有下面几种方法：

1. 对偶方法
2. 罚函数法
3. 障碍函数法

# 拉格朗日乘子法

通过引入拉格朗日乘子，定义拉格朗日函数，通过求Lagrange函数关于原始变量的极小值来求得对偶函数。再求对偶函数关于Lagrange乘子的极大值。假设原始问题的最优解是 $\mathbf{x}^*$ ，对偶问题的最优解是 $\lambda^*, \mathbf{v}^*$ ，并且对偶间隙为0，则 $\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mathbf{v}^*$ 满足如下的KKT条件。<sup>1</sup>

通过KKT条件，我们可以通过求对偶问题的解来反求原始问题的解，因为原始问题的解和对偶问题的解满足KKT条件。一个典型的例子就是SVM，在机器学习，分类问题那一节有详细介绍。

## Lagrange函数

考虑标准形式的优化问题(4.2.1)，也称为原始问题。<sup>2</sup>

$$\min f_0(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, i=1,2,\dots,m$$

$$\text{s.t. } h_i(\mathbf{x}) = 0, i=1,2,\dots,p$$

其中，自变量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 。问题的定义域 $D = \bigcap_{i=1}^m \text{dom } f_i \bigcap \bigcap_{i=1}^p \text{dom } h_i$ 是非空集合，优化问题(不需要保证是凸优化)的最优值是 $p^*$ 。

Lagrange对偶的基本思想是在目标函数中考虑问题4.2.1的约束条件，即添加约束条件的加权和，得到增广的目标函数。定义问题4.2.1的

Lagrange函数是 $L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$\min L(\mathbf{x}, \lambda, v) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(\mathbf{x})$$

其中定义域为 $\text{dom } L = D \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$ 。 $\lambda_i$ 称为第*i*个不等式约束 $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ 对应的Lagrange乘子， $v_i$ 称为第*i*个等式约束 $h_i(\mathbf{x}) = 0$ 对应的Lagrange乘子。向量 $\lambda, v$ 称为对偶变量或者问题4.2.1的Lagrange乘子向量。

## Lagrange对偶函数

定义Lagrange对偶函数 $g : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ 为Lagrange函数关于 $\mathbf{x}$ 取得的最小值：即对 $\lambda \in \mathbf{R}^m, v \in \mathbf{R}^p$ ，有：

$$g(\lambda, v) = \inf_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}, \lambda, v) = \inf_{\mathbf{x} \in D} (f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(\mathbf{x}))$$

如果Lagrange函数关于 $\mathbf{x}$ 无下界，则对偶函数取值为 $-\infty$ 。因为对偶函数是一族关于 $\lambda, v$ 的仿射函数的逐点下确界，所以即使原始问题4.2.1不是凸的，对偶函数也是凸的。

## Lagrange对偶问题

通过上面定义的Lagrange函数，我们可以定义对偶问题。<sup>3</sup>

$$\text{maximise } g(\lambda, v)$$

$$\text{s.t. } \lambda \geq 0, v \geq 0$$

对于不等式约束问题，假设原始问题的最优解是 $\mathbf{x}^*$ ，对偶问题的最优解是 $\lambda^*, \mathbf{v}^*$ 。则 $\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mathbf{v}^*$ 满足如下的KKT条件。

<sup>1</sup>. Stephen Boyd《凸优化》P235 ↪

<sup>2</sup>. Luenberger, 叶荫宇《线性与非线性规划》第十四章 ↪

<sup>3</sup>. P.Bertsekas《非线性规划》第三章 ↪

## Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

1. 先讨论一般带约束优化问题的数据描述
2. 然后引入其作用约束与不起作用约束的定义
3. 再引入正则点的定义
4. 接下来引入KKT条件 5. 针对局部极小问题，我们考虑优化函数的二阶导数问题。

一般形式的优化问题：

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中： $f: R^n \rightarrow R, \mathbf{h}: R^n \rightarrow R^m, m \leq n; \mathbf{g}: R^n \rightarrow R^p$ ;

针对这一问题，引入如下定义：

定义21.1. 对于一个不等式约束 $g_i(x) \leq 0$ , 如果在 $x^*$ 处,  $g_i(x^*) = 0$ , 那么称该不等式约束是 $x^*$ 处的起作用约束。如果 $g_i(x^*) < 0$ , 那么称该不等式约

束是 $x^*$ 处的不起作用约束。

定义21.2. 设 $\mathbf{x}^*$ 满足 $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$ , 设 $J(\mathbf{x}^*)$ 为起作用不等式约束下标集,

$$J(\mathbf{x}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

如果： $\nabla h_i(\mathbf{x}^*), \nabla g_j(\mathbf{x}^*), i \leq m, j \in J(\mathbf{x}^*)$

是线性无关的，则称 $\mathbf{x}^*$ 是一个正则点。

KKT条件：某个点是局部极小点所满足的一阶必要条件。

定理：KKT条件，设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^1$ , 设 $\mathbf{x}^*$ 是问题 $\mathbf{h} = \mathbf{0}, \mathbf{g} \leq \mathbf{0}$ 的一个正则点和局部极小点，那么必然存在 $\lambda^* \in R^m$  和 $\mathbf{u}^* \in R^p$ 使得以下条件成立：

$$\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$$

$$Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$$

$$\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

$\lambda^*$ 为拉格朗日乘子向量,  $\mathbf{u}^*$ 是KKT乘子向量, 其元素分别成为拉格朗日乘子, KKT乘子。

## 充分条件

上面讲了局部极小的必要条件，这里我们讨论局部极小的充分条件。然后我们就利用KKT条件去求不等式约束问题。

### 二阶充分必要条件；

定义如下矩阵：

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

$F(\mathbf{x})$ 是 $f$ 在 $\mathbf{x}$ 处的Hessian矩阵；

$$\lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \lambda_1 H_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m H_m(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = u_1 G_1(\mathbf{x}) + \dots + u_p G_p(\mathbf{x})$$

其中 $G_k(\mathbf{x})$ 是 $g_k$ 处的Hessian矩阵。

起作用约束所定义曲面的切线空间： $T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(\mathbf{x}^*)y = 0, Dg_j(\mathbf{x}^*)y = 0, j \in J(\mathbf{x}^*)\}$ .

### 定理：二阶必要条件：

如果 $\mathbf{x}^*$ 是上面讨论的优化问题的极小点, 那么存在 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得：

1.  $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$ ,

2.  $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$

3.  $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有 $y \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), y \neq 0$ , 都有 $y^T L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})y > 0$

### 定理：二阶充分条件：

假设  $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^2$ ,  $\mathbf{x}^* \in R^n$  是一个可行点. 存在向量  $\lambda^* \in R^m$ ,  $\mathbf{u}^* \in R^p$  使得:

1.  $\mathbf{u}^* \geq 0$ ,
2.  $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$
3.  $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$
4. 对所有  $\mathbf{y} \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ ,  $\mathbf{y} \neq 0$ , 都有  $\mathbf{y}^T L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) \mathbf{y} > 0$

那么  $\mathbf{x}^*$  是优化问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

的严格局部极小点,

$$T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}.$$

其中:

$$J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}, \mathbf{u}^* > 0$$

## 罚函数法

在用SVM处理线性不可分分类的时候，我们引入了软间隔最大化，这就是一种罚函数法来处理带约束的优化问题。下面我们形式化这个处理带约束优化问题的方法。

### 一般的约束优化问题

考虑如下问题penalty\_function\_problem:

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

其中 $f$ 是 $E^n$ 上的连续函数， $S$ 是 $E^n$ 上的约束集，在大部分应用中， $S$ 由一系列函数约束隐式的定义，但是在这部分中，可以处理如上式中更一般的情形。外点法的思想在于将上式替换成如下形式的无约束问题。

$$\min f(\mathbf{x}) + cP(\mathbf{x})$$

其中 $c$ 是正常数， $P$ 是 $E^n$ 上的函数，满足如下三个条件。

(1)  $P$ 是连续的函数。

(2)  $P(\mathbf{x}) \geq 0$  对任意的  $\mathbf{x} \in E^n$

(3)  $P(\mathbf{x}) = 0$  当且仅当  $\mathbf{x} \in S$

### 常见的不等式约束

假设 $S$ 由一些列不等式约束定义：

$$S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 0, 1, \dots, p\}$$

在这里，一个非常有用的罚函数为：

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (\max[0, g_i(\mathbf{x})])^2$$

这就是通过定义软间隔最大化时，用SVM处理不可分分类问题。

### 求解步骤

用罚函数求解原始问题的步骤如下：令 $c_k, k=1, 2, \dots$ 为区域无穷的序列，并且对任意 $k, c_{k+1} > c_k \geq 0$ 。定义函数：

$$q(c, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + cP(\mathbf{x})$$

对每个 $k$ 求线性规划问题：

$$\min q(c_k, \mathbf{x})$$

得到最优解点 $\mathbf{x}_k$ 。

### 有关解的定理

定理：令 $c_k$ 是罚函数生成的序列。那么，序列的任何极限点都是penalty\_function\_problem的解。

## 精确惩函数

事实上，可以建立精确罚函数，使得对于有限的惩罚变量，罚函数问题能生成与原问题完全相同的解。对于这些函数，不需要为了求得正确解而求无穷序列产生的罚函数问题，然而，这些罚函数会引入一个新的问题--不可微性。

考虑如下问题PFP\_3：

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

惩罚函数取绝对值惩罚函数PFP\_4：

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |h_i(\mathbf{x})| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \max[0, g_i(\mathbf{x})]$$

从而对某个正常数 $c$ ，惩函数问题为：

$$\min f(\mathbf{x}) + cP(\mathbf{x})$$

### 精确惩函数定理

假设 $x^*$ 满足约束规划问题general\_penalty\_function\_problem局部极小的二阶充分条件。 $\lambda, u$ 是相应的拉格朗日乘子。则对于

$c > \max(|\lambda_i|, u_i : i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p)$ ,  $x^*$ 也是绝对值惩罚函数问题PFP\_4的局部最小点。

# 增广拉格朗日函数法<sup>1</sup>

增广拉格朗日函数法是常用的用于求解非线性规划问题的方法，这种方法可以看作是罚函数法和局部对偶法的结合，两种方法的结合可以消除单独使用某一种方法所产生的缺陷。

## 等式约束

在等式约束问题中：

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

下，对于某个正常数c，增广拉格朗日函数为：

$$l_c(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c |\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2$$

可以从以下两种观点来看增广拉格朗日函数。

### 罚函数角度

对于固定的 $\lambda$ 向量，增广拉格朗日函数就是如下规划问题：

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

的标准二次罚函数，引入二阶惩罚可以更好地收敛。该问题与原始问题等价。

### 对偶理论

从对偶理论的角度来看，增广拉格朗日函数就是如下问题：

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c |\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

的标准拉格朗日函数。该问题与原始问题等价。

尽管原问题可能不是局部凸的，但是对于足够大的c，上面问问题是局部凸的，特别是，拉格朗日函数在解点 $\mathbf{x}^*, \lambda^*$ 处的Hessian矩阵是正定的。因此，对于足够大的c，局部对偶定理适合于上面的问题。

对上面问题应用对偶法，我们在 $\mathbf{x}^*, \lambda^*$ 附件区域定义对偶函数：

$$\phi(\lambda) = \min [f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c |\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2]$$

如果 $\mathbf{x}(\lambda)$ 为最小化上式右侧部分的向量，那么 $\mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))$ 是上面对偶函数 $\phi$ 的梯度。因此，基本增广拉格朗日法采用如下的迭代过程。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + c \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda_k))$$

被看作是最大化对偶函数 $\phi$ 的一种最速上升法迭代，使用常数步长c。

## 不等式约束

上面主要讨论了等式约束的增广拉格朗日乘子法，其实我们可以轻松的推广到不等式约束的情形。

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

我们假定问题存在良定的解 $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*$ 为约束条件的正则点，并且满足局部最小化问题的二解充分条件。这个问题也可以等价地写成等式约束问题：

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>. 《线性与非线性规划》David G. Luenberger ↪

## ADMM(乘子的交替方向法)<sup>1</sup>

在分布式计算中,为了减少通讯成本,就需要我们减少求解问题的迭代次数;要降低迭代次数,就必然要求在一个迭代内完成更复杂的计算。因此有了ADMM。

考虑具有线性约束并且目标函数是两个分开函数之和形式的图最小化模型。

$$\min f_1(\mathbf{x}^{(1)}) + f_2(\mathbf{x}^{(2)})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} \in \Omega_1, \mathbf{x}^{(2)} \in \Omega_2$$

其中 $A_i \in E^{m \times n_i}, \{i=1,2\}, b \in E^m, \Omega_i \subset E^{n_i} (i=1,2)$ 是闭凸集;且 $f_i : E^{n_i} \rightarrow E, i=1,2$ 分别是 $\Omega_i$ 上的凸函数。因此上面问题的增广拉格朗日函数是:

$$l_c(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \lambda) = f_1(\mathbf{x}^{(1)}) + f_2(\mathbf{x}^{(2)}) + \lambda^T (\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{b}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{b}\|^2$$

我们假定上面的问题至少有一个最优解。

相比于乘子方法, ADMM是以另外的规则(近似)最小化 $l_c(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \lambda)$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} := \arg \min_{x^{(1)} \in \Omega_1} l_c(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)}, \lambda_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} := \arg \min_{x^{(2)} \in \Omega_2} l_c(\mathbf{x}_{k+1}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \lambda_k)$$

$$\lambda_{k+1} := \lambda_k + c(A_1 x_{k+1}^{(1)} + A_2 x_{k+1}^{(2)} - b)$$

这种思想是每一个更小的最优化问题都能被更有效地解决或者某些情形有接近的形式。

## 例子

ADMM最典型的例子就是加L1或者L2正则化的优化问题;下面以L1正则化为例。

### 用ADMM求解Lasso问题

lasso的拉格朗日形式可以等价表示成:

$$\min_{\beta \in R^p, \theta \in R^p} [\frac{1}{2N} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \frac{1}{N} \lambda \|\theta\|_1], \beta - \theta = 0$$

相应的增广拉格朗日函数为:

$$\min_{\beta \in R^p, \theta \in R^p} [\frac{1}{2N} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \frac{1}{N} \lambda \|\theta\|_1 + \rho \|\beta - \theta\|_2^2]$$

对于lasso, ADMM的更新公式为:

$$\beta^{t+1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \rho \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{y} + \rho \theta^t - u^t)$$

$$\theta^{t+1} = S_{\lambda/\rho}(\beta^{t+1} + u^t / \rho)$$

$$u^{t+1} = u^t + \rho(\beta^{t+1} - \theta^{t+1})$$

对 $\beta$ 进行岭回归,对 $\theta$ 进行的更新是软阈值,对 $u$ 采用线性更新。

|| 1. 《线性与非线性规划》David G. Luenberger ↪

# 最优化的优缺点及其改进方案

## 常见的损失函数

### 分类问题损失函数

$y$ 是标签,  $f$ 是预测结果。

对于二分类问题 $Y = [-1, 1]$

0-1损失函数:

$$L_{0-1}(f, y) = 1_{fy \leq 0}$$

Hinge损失函数:

$$L_{hinge}(f, y) = \max(0, 1 - fy)$$

Logistic损失函数:

$$L_{logistic}(f, y) = \log_2(1 + \exp(-fy))$$

当预测值 $f \in [-1, 1]$ 时, 可以定义如下损失函数:

交叉熵(Cross Entropy):

$$L_{crossentropy} = -\log_2(\frac{1+fy}{2})$$

### 回归问题损失函数

对于回归问题,  $Y=R$ , 我们希望 $f(x_i, \theta) \approx y_i$ , 最常用的损失函数是平方损失函数:

$$L_{square}(f, y) = (f - y)^2$$

平方损失函数对异常点惩罚很大, 因此对异常点比较敏感。为了解决这个问题, 引入了绝对损失函数:

$$L_{square}(f, y) = |f - y|$$

但是绝对损失函数在0点不可以求导。

一个方法是在0点进行函数光滑化也就是在0点附件用平方函数代替。 $\delta > 0$

$$L_{square}(f, y) = \sqrt{(f - y)^2 + \delta^2}$$

或者用Huber损失函数:

Huber损失函数:

$$L_{square}(f, y) = (f - y)^2, |f - y| > \delta$$

$$L_{square}(f, y) = 2\delta|f - y| - \delta^2, |f - y| > \delta$$

还得补充与思考文本处理, 信号处理中的损失函数。

### 机器学习中哪些是凸优化问题, 哪些是非凸优化问题

凸函数条件:Hessian矩阵为半正定。

逻辑回归, 线性回归, SVM是凸优化问题。PCA, 矩阵分解以及NN是非凸优化问题。

## 梯度下降

### 问题1: 怎样验证自己代码中梯度公式的正确性?

$$\left| \frac{L(\theta + h e_i) - L(\theta - h e_i)}{2h} - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \approx M h^2$$

若 $M \leq 10^7$ , 则:

$$\left| \frac{L(\theta + h e_i) - L(\theta - h e_i)}{2h} - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \leq h$$

因此取 $h = 10^{-7}$ 看, 看上式是否成立, 不成立则 $M \geq 10^7$ , 则取 $h = 10^{-8}$ , 看上式得值是否变为原来的 $10^{-2}$ 。如果是则, 求导正确, 不是则求导错误。

### 问题2: 当数据量特别大的时候经典梯度下降法存在什么问题, 需要怎么改进?

因为经典的梯度下降是对整个训练集进行的，如果训练集特别大，每次更新要针对整个数据集，因此需要很大的计算力，计算很费时间。一般采用随机梯度下降法，每次训练一个数据。但是该方法很难收敛，会在极值点振荡，因此一般采用mini-batch Gradient Descent方法。一般batch的size m取2的整数次幂。

为了充分利用数据以及避免数据的特定顺序给算法收敛带来的印象，一般每次遍历数据前，对数据先随机排序，然后每次取m个数据，直到遍历所有数据。有必要再按新规则排序，重复以上步骤。

如何选择学习率 $\alpha$ ，为了加快学习速度与提高精度。一开始取大的学习速率，误差曲线进入平台期后，再减小学习速率做更精细的调整。

**问题3：深度学习中常用的优化方法是随机梯度下降法，但是SGD偶尔也会失效，无法给出满意的训练结果，这是为什么？**

当SGD遇到山谷的时候，由于沿山谷方向的梯度比较小，因此结果会在山谷方向来回移动，而不能像整体梯度下降一样能沿着山谷有一个确定方向的移动。其次是遇到平坦区域，有些方向的梯度接近于0，因此需要很长世间才能走出这片区域。

**问题4：为了改进SGD，研究者都做了哪些改动？提出了哪些方法？他们各有哪些特点？**

#### 动量(Momentum)方法

为了解决SGD在山谷振荡，鞍点停滞的现象。我们引入了带动量的SGD。普通SGD是：

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta g_t$$

带动量的SGD公式是：

$$v_t = \gamma v_{t-1} + \eta g_t$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - v_t$$

通过 $0 < \gamma < 1$ ，能实现梯度的累积，也就是速度的累积，因此能更好的冲出山谷与平坦(平原)区域。

#### AdaGrad方法

惯性的获得是基于历史的，除了从过去的步伐中获得一股子冲劲，我们还想知道不同参数更新的步伐，这样，对于更新频率低的参数能加快更新步伐，而更新频率高的参数减小步伐。因此就有了AdaGrad方法，他采用“历史梯度平均和”来衡量不同参数的梯度的稀疏性。取值越小表明越稀疏。更新公式如下：

$$\theta_{t+1,i} = \theta_{t,i} - \frac{\eta}{\sqrt{\sum_{k=0}^t g_{k,i}^2 + \epsilon}} g_{t,i}$$

$\theta_{t+1,i}$ 表示t+1时刻，参数向量的第i个参数， $g_{k,i}$ 表示k时刻，参数向量的第i个方向。此外，分母的求和新式实现了退火过程，意味着随着时间推移，学习速率越来越小，保证算法最终收敛。

#### Adam方法

Adam方法将惯性保持与环境感知这两个有点集合在一起。

通过记录梯度的一阶矩来保持惯性，通过记录二阶矩来实现环境感知能力。通过指数衰减平均技术来实现时间久远的梯度对当前平均值的贡献呈指数衰减。计算公式如下：

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2$$

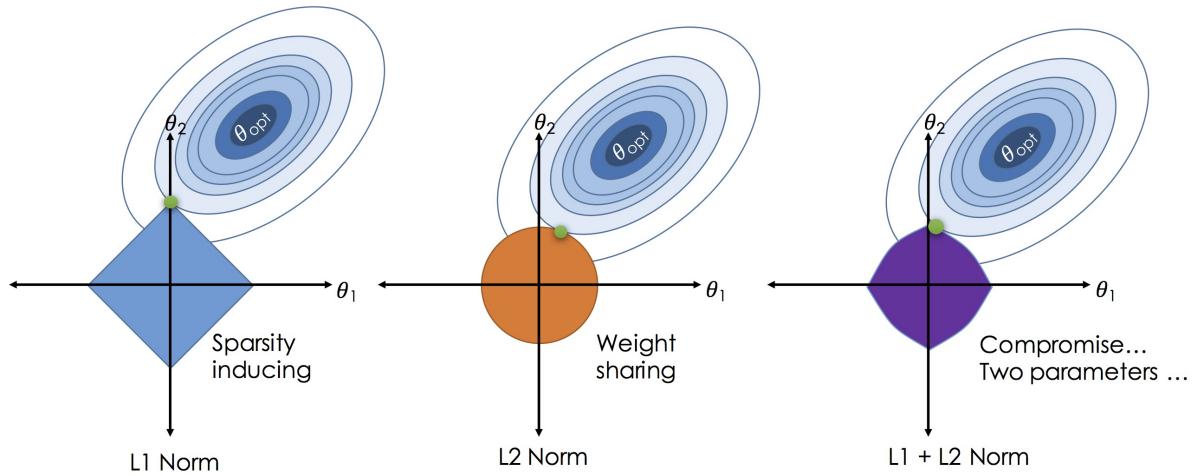
Adam更新公式：

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{\eta \hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t + \epsilon}}$$

其中： $\hat{m}_t = \frac{m_t}{1-\beta_1^t}$ ,  $\hat{v}_t = \frac{v_t}{1-\beta_2^t}$

**问题5：L1正则化使得模型参数具有稀疏性的原理是什么？**

角度1：通过做等高线图



由图可知, L1更容易在轴上与等高线相交, 而L2更容易在两轴之间相交。其实加L1,L2正则就是加一个约束, 也就是带约束的优化问题, 通过这个约束, 我们就知道了解空间的限定范围。

#### 角度2: 贝叶斯先验

L1正则化相当于对模型参数引入了拉普拉斯先验, L2正则化相当于对模型参数引入了高斯先验。因为拉普拉斯先验分布中, 参数取值为0的概率更高, 因此更容易产生稀疏性。而高斯先验分布只会让所有参数趋于0, 并且在趋于0的不同位置是等概率的, 因此不会让参数等于0。

# 优化收敛位置

参考知乎上面

对于N个参数的系统(神经网络), 对应的Hessian阵是N阶的, 我们假定其本征值的正负概率都是0.5. 因此, 要保证是局部最小值, 则Hessian正定,

意味着所有的本征值都为正。其概率是 $\frac{1}{2^N}$ 。同样, 是局部最大值, 则Hessian阵负定, 概率也为 $\frac{1}{2^N}$ 。因此, 最有可能的是本征值有正有负, 也就是鞍点的情形。但是即使是普通的鞍点, 函数不会震荡, 而是马上逃离。

实际的情形是, 函数收敛到了一个大的平坦区域, 其表现就是一阶导数很小, 以至于在训练结束的时候还没有逃离出这个平坦区域。那么, 我们得从数学上讨论这种平坦区域(平坦马鞍面)具有什么样的性质。可以看下面一个方程:

$$f(x, y) = \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}y^2$$

$f_x = \alpha x; f_y = -\beta y$ . 假设 $\alpha > 0, \beta > 0$

(0, 0)点是唯一的鞍点。在x方向, 该点是局部最小值, 但在y方向, 是局部极大值, 如果 $\beta$ 很小, 很小是它与学习率r相乘结果与1来说的。假设学习率是r一开始 $y = \Delta_0$ , 则一次迭代后

$$\Delta_1 = \Delta_0 + r * \beta * \Delta_0 = (1 + r\beta)\Delta_0$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 + r * \beta * \Delta_1 = (1 + r\beta)^2\Delta_0$$

n次迭代后:

如果训练总的次数为N,  $r\beta \leq \frac{1}{N}$ , 那N次迭代之后  $(1 + r\beta)^N\Delta_0 \leq (1 + \frac{1}{N})^N \approx e\Delta_0 = 2.71828\Delta_0$ , 这定量的给出了在训练结束的时候, 函数能多大程度的逃离(0, 0)点。

这个模型可以推广到N维情形。假设Hessian阵有N-K个本征值非负, K个小于零。

考虑通过平移后, 鞍点处于(0, 0...0)点附近的二阶展开:

$$L(X) = L(0) + \sum_{i=K+1}^{i=N} \frac{\alpha_i}{2}x_i^2 - \sum_{i=1}^{i=K} \frac{\alpha_i}{2}x_i^2$$

如果满足所有的 $\alpha_i \ll 1, i \in [1, K]$ , 这时候, 函数会在很长时间内, 局域在鞍点附件。

可以考虑的时, 怎么通过设计Cost Function来避免产生这些超级马鞍面。实际上是通过带冲量的方法来加速收敛/这些超级马鞍面的产生要考虑激活函数吗, Relu比Sigmoid不容易产生这些马鞍面?

# 线性与非线性方程组解的稳定性分析

最速下降法中, Hessian矩阵的条件数决定了系统的收敛速度。这一节, 本来是自己想通过条件数来分析L-M算法解的稳定性的。

## 线性方程组解的稳定性分析

系统解的稳定性定义成系统小的扰动对系统解的影响。.

Example 1:

$$\begin{bmatrix} 400 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$x_1 = -100, x_2 = -200$$

If we give small change to matrix A, change  $A_{11}$  from 400 to 401 then:

$$\begin{bmatrix} 401 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

This time the solution is:

$$x_1 = 40000, x_2 = 79800$$

ill-conditioned:

When the solution is highly sensitive to the values of the coefficient matrix A or the righthand side constant vector b, the equations are called to be ill-conditioned.

## Condition Number

Let's linear equations:

$$Ax = b,$$

Let us investigate first, how a small change in the b vector changes the solution vector. x is the solution of the original system and let  $x + \Delta x$  is the solution when b changes from b to  $b + \Delta b$ .

Then we can write:

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

or

$$Ax + A\Delta x = b + \Delta b$$

But because  $Ax = b$ , it follows that

$$A\Delta x = \Delta b$$

So:

$$\delta x = A^{-1} \Delta b$$

Using the matrix norm properties:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

We can get:

$$\|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|,$$

Also, we can get:

$$\|\Delta b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Using equations 2.5 and 2.6 we can get:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Let's define condition number as:  $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

we can rewrite equation 2.7 as:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Now, let us investigate what happens if a small change is made in the coefficient matrix

A. Consider A is changed to  $A + \Delta A$  and the solution changes from x to  $x + \Delta x$

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b,$$

we can obtain:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$\mathbf{K}(\mathbf{A})$  is a measure of the relative sensitivity of the solution to changes in the right-hand side vector  $\mathbf{b}$ . When the condition number  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  becomes large, the system is regarded as being illconditioned. Matrices with condition numbers near 1 are said to be well-conditioned.

## 非线性方程组解的稳定性分析

For non-linear system,

## 最小二乘法求解线性, 非线性方程组

所有的线性方程组或者非线性方程组可以转化成一个最小二乘法问题, 使得拟合的方程与观察值之间的平方和最小。

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta} S(\beta) = \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2$$

$y_i$ 是观测值,  $x_i$ 是已知变量, 一共m组观测值。

### 当 $f(\mathbf{x}, \beta)$ 是线性方程组时

即  $f(\mathbf{X}, \beta) = \mathbf{A}\beta$

cost function 可以表示如下:

$$L(\beta) = ||\mathbf{Y} - \mathbf{A}\beta||^2$$

其中  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2 \dots y_m]^T$

cost function 对 $\beta$

$$L(\beta) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T \mathbf{A}\beta + \beta^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\beta$$

求导,

$$-2\mathbf{A}^T \mathbf{Y} + 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\beta = 0$$

再让导数等于0, 就可以求得解为:  $\beta$

$$\beta = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}$$

### 我们接下来主要讨论非线性的情况:

也就是残差  $y_i - f(x_i, \beta)$  不能表示成线性形式。

当然我们有很多方法来求解方程(4.1), 比如 梯度下降法, 牛顿法, 高斯-牛顿法, 以及 Levenberg-Marquardt 梯度下降法。把损失函数展开到一阶。

$$f(x + \alpha \mathbf{d}) = f(x_0) + \alpha f'(x_0) \mathbf{d} + O(\alpha^2)$$

$$x_{t+1} = x_t - \alpha f'(x_t),$$

#### 牛顿法

把cost function进行展开到二阶:

$$f(x_{t+1}) = f(x_t) + g(x_{t+1} - x_t) + \frac{1}{2}(x_{t+1} - x_t)^T H(x_{t+1} - x_t)$$

求导,  $\frac{\partial f}{\partial x_t} = g + H(x_{t+1} - x_t)$ , 让导数为0就有

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g$$

要是H是正定的, 上面的就是凸函数, 也就一定有了最小值。可惜H不一定是正定的, 这就引导出了下面的方法

#### 高斯-牛顿法

cost function可以表示成残差的形式:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

根据牛顿法:

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g,$$

梯度表示为:

$$g_j = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

对方程(4.9)求二阶导, 我们可以得到Hessian矩阵:

$$H_{jk} = 2 \sum_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

当残差 $r_i$ 很小的时候, 我们就可以去掉最后一项, 因此

$$H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With} \quad J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

这样Hessian就是半正定了。

因此参数迭代公式(4.10)可以写成:

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J)^{-1} J^T r,$$

**Levenberg-Marquardt**

方法用于求解非线性最小二乘问题, 结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。

其主要改变是在Hessian阵中加入对角线项。当然, 这是一种L2正则化方式。

$$x_{t+1} = x_t - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda I_n)^{-1} J^T r$$

L-M算法的不足点。

当 $\lambda$ 很大时,  $J^T J + \lambda I_n$ 根本没用, Marquardt为了让梯度小的方向移动的快一些, 来防止小梯度方向的收敛, 把中间的单位矩阵换成了 $\text{diag}(J^T J)$ , 因此迭代变成:

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda \text{diag}(J^T J))^{-1} J^T r$$

阻尼项(damping parameter)  $\lambda$ 的选择, Marquardt 推荐一个初始值 $\lambda_0$ 与因子 $v > 1$ , 开始时,  $\lambda = \lambda_0$ , 然后计算cost functions, 第二次计算 $\lambda = \lambda_0/v$ ,

如果两者cost function都比初始点高, 然后我们就增大阻尼项, 通过乘以 $v$ , 直到我们发现当 $\lambda = \lambda_0 v^k$ 时, cost function下降。

如果使用 $\lambda = \lambda_0/v$ 使得cost function下降, 然后我们就把 $\lambda_0/v$ 作为新的 $\lambda$

当 $\lambda = 0$ 时, 就是高斯-牛顿法, 当 $\lambda$ 趋于无穷时, 就是梯度下降法。如果使用 $\lambda/v$ 没有使损失函数下降, 使用 $\lambda$ 导致损失函数下降, 那么我们就继续使用 $\lambda$ 做为阻尼项。

## 归一化的残差

如果我们假设数据中每一点的贡献是等权重, 因此, 我们有必要对每一项残差加一个权重, 来归一化每一项残差, 这样做的目的是未来防止某些点(离群点, 异常值点)的偏差过大, 从而对模型结果造成显著影响, 我们才假设每一点的误差贡献是一样的。因此公式(4-9)可以变成, cost function可以表示成残差的形式:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i(x)^2 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i} (y_i - f_i(x_i))^2$$

此时, Jacobian变成

$$H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With} \quad J_{ij} = y_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$$J_S = \Sigma J, \Sigma_{ij} = \frac{1}{y_i} \delta_{ij}$$

## Levenberg-Marquardt算法与L2正则化等价

我们在cost function加上L2正则项

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

可以表示成:

$$L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T \nabla_\beta L(\beta_0) + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H(\beta - \beta_0) + \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

求一阶导数:

$$L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T g + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H(\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

令其为0:

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = g + H(\beta - \beta_0) + \lambda \beta = 0$$

就得到:

$$\beta = (H + \lambda I_n)^{-1} H \beta_0 - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

当 $\lambda$ 相对于H的本征值来说较小时, 则 $(H + \lambda I_n)^{-1} H = I$ , 因此上式可以化为:

$$\beta = \beta_0 - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

也就是通常的L-M算法。



## 第五章 机器学习

这章主要讨论传统的机器学习方法，涉及到分类，回归，聚类，降维，决策树与集成学习，图模型以及模型验证。本章序言要对这章介绍的方法起介绍作用，要通过语言使读者明白算法的原理，推到步骤以及算法之间的联系。完成理论的写作之后，你需要明白在实际问题中灵活运用理论或算法是更重要的一件事情。能否灵活的运用理论，创造性的发展理论靠的就是你的实战经验与理论功底。

# 机器学习原理

机器学习可以从多种视角去分析，比如从最优化视角，概率视角，贝叶斯视角等。本书尽力以最优化的视角来考虑机器学习问题与算法，当然，本书还远不完善，还在升级迭代的过程中。当前是尽力理解这三种视角的有点与局限性，也就是这三种方法的边界，以及与机器学习的交集，而后形成自己的认知。

## 模型分析

任何有监督的学习都可以通过偏差，方差，噪声来对模型进行分析。通过减小这三个指标中任何一项(除噪声，因为这是数据本身的问题，garbage in, garbage out)，都能提高模型的准确性。最典型的就是基于Bagging类方法能降低方差，基于Boosting类方法能降低偏差。

Bagging适合于High Variance & Low Bias 的模型。

Boosting适合于High Bias& Low Variance 的模型。

## 偏差，方差，噪声

偏差-方差分解可以用来对学习算法的期望泛化错误率进行拆分。同时，偏差-方差分解为我们设计模型与分析提供了一个比较清晰的方向。

假设测试样本是 $\mathbf{x}$ ，令 $y_D$ 为 $\mathbf{x}$ 在数据集上的标记(可能存在标记错误的情况)， $y$ 为 $\mathbf{x}$ 的真实标记， $f(\mathbf{x}; D)$ 为训练集D上学得模型 $f$ 在 $\mathbf{x}$ 上的预测输出，以回归模型为例，学习算法的期望预测为：

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = E_D[f(\mathbf{x}, D)]$$

方差是：

$$var(\mathbf{x}) = E_D[f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x})]^2$$

噪声是：

$$\epsilon^2 = E_D[y_D - y]^2$$

输出期望与真实标记之间的差别成为偏差(Bias)，即：

$$bias^2(\mathbf{x}) = E_D[\hat{f}(\mathbf{x}) - y]^2$$

为方便讨论，假设噪声的期望为0；即： $E_D[y_D - y] = 0$ 。下面来对模型的期望泛化误差进行分解：

$$\begin{aligned} E(f; D) &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}) + \hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)^2] + E_D[2(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))(\hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y + y - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y)^2] + E_D[(y - y_D)^2] + E_D[2(\hat{f}(\mathbf{x}) - y)(y - y_D)] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y)^2] + E_D[(y - y_D)^2] \end{aligned}$$

因此就得到：

$$E(f; D) = bias^2(\mathbf{x}) + var(\mathbf{x}) + \epsilon^2$$

也就是泛化误差分成偏差，方差与噪声之和。我们设计模型分析时，可以从这三方面去考虑。

## 噪声

为了消除噪声的影响，我们需要对数据进行清洗，进行预处理。在很大程度上就是为了得到更干净的数据。

## Bias

偏差小，说明的是模型很准，可能有过拟合的倾向，增加模型的复杂度可以使得bias减小。但是泛化能力变差，也就是variance会大，模型对数据很敏感。如果模型bias大，可以通过对简单的模型进行boost，来提升模型的准确性，也就是Boost系列算法做的事情，如：AdaBoost, GBDT, XGBoost。

## 方差

方差小，说明模型很稳定，也就是说模型的泛化能力好，可能测试集上的数据相对于训练集来说有一些变化，但是也不影响模型的输出结果，此时，可能模型欠拟合，因此泛化能力好。如果模型variance大，可以通过训练多个模型，并让各个模型之间的关联性很小，通过求平均来减小Variance，这就是集成模型中bagging系列算法做的事情，如Bagging,Random Forest.

## 最大似然函数

输入:  $X \in R^n$

输出:  $Y \in (1, 2, \dots, K)$

条件概率:  $P(X = x|Y = C_k) = P(X^{(1)} = x^{(1)}, X^{(2)} = x^{(2)}, \dots, X^{(n)} = x^{(n)}|Y = C_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, K$

假设有N个样本点 $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, N$

条件概率:  $P(Y = y|X = x, \theta)$ , 其中 $\theta$ 是模型的参数。

似然函数定义为: 每个样本点发生概率的乘积:

$$L(\theta) = \prod_{n=1}^N P(Y = Y_n|X = X_n, \theta)$$

我们要求得一个模型，使得在所有样本点在该模型发生的几率极大，几率是联合几率，是每个样本发生几率的乘积。也就是极大化似然函数。

分类与回归问题似乎都可以转化成求解似然函数。

## 用极大似然函数求解回归问题

输入:  $X \in R^n$

输出:  $Y \in R$

我们的模型是 $f(X, \Theta)$ , 其中 $\Theta$ 是模型参数,  $X$ 是输入变量。

假设我们的损失函数是平方误差，因此我们的cost function可以表示如下:

$$L(X, \Theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (f(X_n, \Theta) - Y_n)^2$$

等价于:

$$e^{L(X, \Theta)} = e^{\sum_{n=1}^N \frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2} = \prod_{n=1}^N e^{\frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2}$$

实际上，最小化 $L(X, \Theta)$ 等价于最小化 $e^{L(X, \Theta)}$ ，等价于最大化 $e^{-L(X, \Theta)}$ ，也就是等价于最大化

$$\Gamma(\Theta) = \prod_{n=1}^N e^{-\frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2} = \prod_{n=1}^N P(X_n, \Theta)$$

其中

$$P(X_n, \Theta) = e^{-\frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2}$$

定义成回归模型中样本 $(X_n, Y_n)$ 发生的几率，这样我们就把回归问题与几率联系起来了。我们把求解损失函数最小，转化成极大化似然函数的求解。

对于不同的损失函数，我们都可以转化成对应的概率。

对于分类问题，怎么用一个统一的框架来解析？可以是基于概率的。

## 用极大似然函数求解多类分类问题

在这里我们以多项逻辑斯蒂回归为例，讨论怎么用最大化似然函数来求解这一类问题。

假设离散性随机变量Y的取值是 $(1, 2, \dots, K)$ , 输入变量 $X \in R^n$

则，模型如下：

$$P(Y = k|x) = \frac{\exp(w_k x)}{\sum_{k=1}^{K-1} \exp(w_k x)}, k = 1, 2, \dots, K-1$$

$$P(Y = K|x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K-1} \exp(w_k x)}$$

这里 $x \in R^{n+1}$ ;  $w_k \in R^{n+1}$ .

因此，总的似然函数可以表示为：

$$L(W) = \prod_{n=1}^N P(Y = Y_n|X = X_n)$$

这样，我们需要求的参数是 $W = (w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$ .

## 用极大似然与SVM来做多类分类问题

核心，定义出到超平面的距离，每一个类，一个超平面，然后定义距离，然后转化成概率，最终转化成极大似然函数求解。

## 麦克斯韦妖与信息熵

不存在一个监测系统，能区分粒子的速度而对粒子做出区分，使得原本温度相同的系统，自发的形成高温与低温子系统。因为在区分例子速度时，就是一个信息处理的过程，使得系统的信息熵减小。那么，怎么根据熵增原理，确定系统的熵减数量与检测系统需要付出的信息熵的数量，或者能量。

## 极大似然与最大熵原理的等价性

### 最大熵原理

### 奥卡姆剃刀

### Evaluation Metrics

二分类: AUC,

多分类: 交叉熵(log loss)

回归: 均方差

For any kind of machine learning problem, we must know how we are going to evaluate our results, or what the evaluation metric or objective is. For example in case of a skewed binary classification problem we generally choose area under the receiver operating characteristic curve (ROC AUC or simply AUC). In case of multi-label or multi-class classification problems, we generally choose categorical cross-entropy or multiclass log loss and mean squared error in case of regression problems.

## No FREE Lunch定理, 先验, 正则化

### NO FREE LUNCH

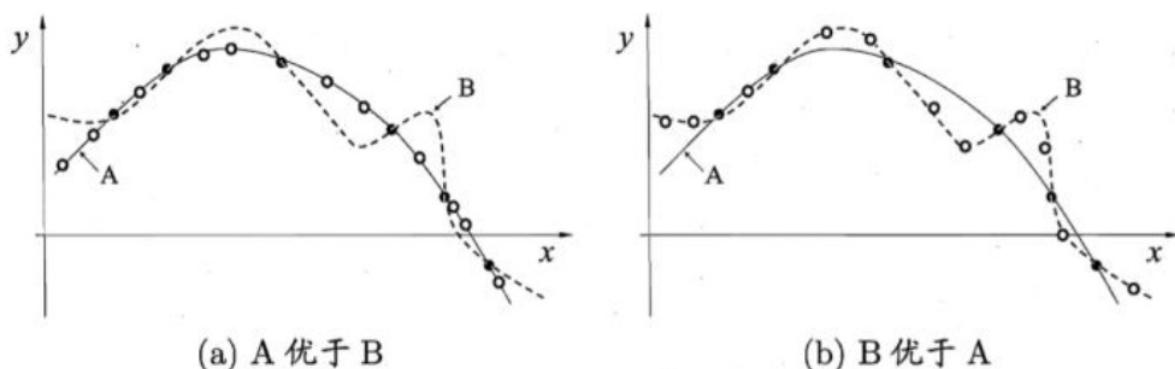


图 1.4 没有免费的午餐。(黑点: 训练样本; 白点: 测试样本)

黑点是训练样本，白点是测试样本点。根据训练样本，我们得到模型A, B。如果测试点不同，则A, B的相对表现不同。问题的关键在于，我们先验的假设了(测试)样本点在所有空间是均匀分布的，因此，在训练集上训练出的所有模型的效果是一样的，因为你总有样本集是落在你模型预测的曲线之上的。

因此，如果样本点在整个数据空间是均匀分布的前提下，则不存在一个模型或算法在所有问题上比其它算法更优越。

但是现实遇到的问题是，数据的分布是受限制的，数据存在一个先验分布，因此会存在一些模型比其它模型更有效。这里NFL不再有是因为问题的前提--数据是均匀分布的--不再成立。因此，脱离场景谈方法是无效的，我们只能针对特定的问题，寻找最佳的优化方法。

### 正则化

没有免费的午餐定理告诉我们没有一个模型是对所有的样本是最优的<sup>1</sup>，因此，对于特定的样本，我们需要把先验加进模型中(也就是损失函数中)，这个先验就是我们对这个样本的知识，比如样本数据的分布，样本的均值或者方差等(统计物理学中的系统的能量可以看成一种均值，统计物理学中有很多启发性的模型)。加到模型中的就是我们的正则项，正则项就是一个先验，是我们需要模型满足的约束。

### 先验分布与损失函数。

知道预测误差的先验分布，才能选择合适的损失函数。知其然，才能知其所以然。

交叉熵

平方损失：

0-1损失：分类问题，

Log损失：

Hinge损失：

指数损失：

平方损失：等价于误差服从高斯分布的极大似然估计。适用于回归问题。

麦哈顿距离损失等价于误差服从拉普拉斯分布的极大似然估计。

0-1损失相当于误差服从

数据的误差的先验分布(统计学派观点？)：极大似然

模型参数的先验分布(贝叶斯观点)：正则化是模型复杂度的惩罚函数，真理是美的，简洁的。你可以自己定义模型的复杂度？问题是怎麽定义模型复杂度？(正则化是要求模型参数只能在0附近，但是现实可能是，真实的模型参数不在0附件，贝叶斯观点并不能与模型参数误差的先验分布联系起来，因为正则化假定模型参数的均值皆为0，但是贝叶斯观点并不要求这样。)

损失函数	预测误差的先验分布
平方损失	高斯分布
曼哈顿距离损失	拉普拉斯分布
0-1损失	二项分布

<sup>1</sup>. Ian Goodfellow 《deep learning》 ↵

# 分类

分类的方法有

1. SVM
2. Logistic回归
3. K近邻
4. LDA(线性判别器)
5. 分类树

## SVM, KKT条件与核函数方法

SVM的本质就是利用对偶方法求解带约束的凸优化问题。KKT条件保证了可以通过求解对偶问题来求解原始问题。要理解的是怎么利用对偶方法求解优化问题，这是求解优化问题的很重要的一种方法，SVM只是这种方法的一个典型例子。

核函数的作用的通过非线性变换，使得SVM可以用来处理非线性分类问题。

# SVM

## 线性可分二分类问题

一组数据  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N, y_i \in +1, -1, x_i \in R^m$

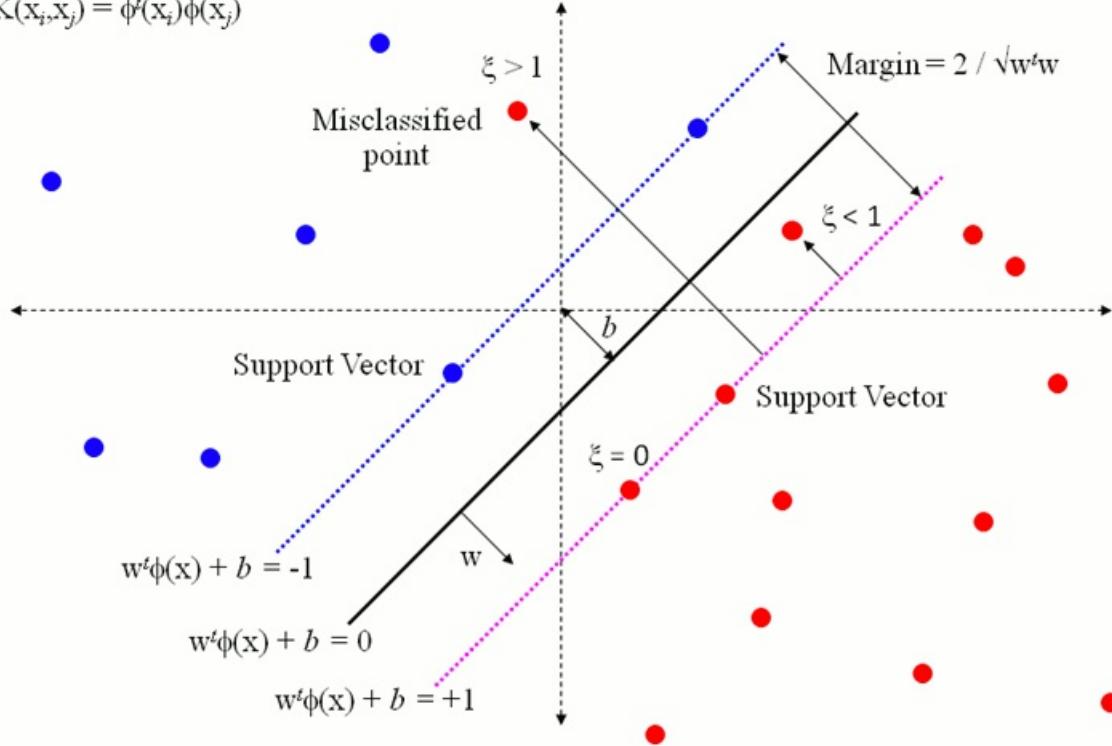
SVM 算法是为了求得一个分割超平面  $\mathbf{w}x + b = 0$  使得所有的样本点到超平面的几何距离都不小于  $\gamma$ , 且这个  $\gamma$  是最大的。

首先我们定义几何距离和函数距离:

几何距离:  $\gamma_i = y_i(\frac{\mathbf{w}x_i}{\|\mathbf{w}\|} + \frac{b}{\|\mathbf{w}\|})$

除以  $\|\mathbf{w}\|$  是因为  $x, b$  同时乘以一个因子, 超平面不变。

$$K(x_i, x_j) = \phi(x_i)\phi(x_j)$$



函数间距:  $\gamma_i = y_i(\mathbf{w}x_i + b)$

我们要使:  $\gamma_i \geq \gamma$ , 对任何的样本点  $i$  都成立, 并求得  $\gamma$  的最大值。故上面的问题可以用如下数学来刻画:

$$\max_{\mathbf{w}, b} \gamma$$

$$\text{s.t. } y_i(\frac{\mathbf{w}x_i}{\|\mathbf{w}\|} + \frac{b}{\|\mathbf{w}\|}) \geq \gamma$$

转化为函数间距:

$$\max_{\mathbf{w}, b} \gamma$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}x_i + b) \geq \|\mathbf{w}\|\gamma = \hat{\gamma}$$

为了简化计算, 我们取  $\hat{\gamma} = 1$

因此问题转化为:

$$\text{s.t. } \max_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}x_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

转化为求极小问题:

$$\min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}x_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

问题转化成带约束的优化问题(在这里是凸优化问题)。带等式的约束问题可以通过引入拉格朗日乘子求解, 带不等式约束的问题可以引入 KKT 乘子求解。下面一节我们讨论带约束的凸优化问题。

## 线性不可分与软间隔最大化

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i \\ \text{s.t. } & y_i(\mathbf{w} \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, N \\ & \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

通过构造拉格朗日函数求对偶函数。原问题的解是 $(w^*, \xi^*, b^*)$ , 对偶问题的解是 $\alpha^*$ 。

参考文献:

1. July · pluskid, 支持向量机通俗导论: <https://raw.githubusercontent.com/liuzheng712/Intro2SVM/master/Intro2SVM.pdf>

# Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

1. 先讨论一般带约束优化问题的数据描述
2. 然后引入其作用约束与不起作用约束的定义
3. 再引入正则点的定义
4. 接下来引入KKT条件 5. 针对局部极小问题，我们考虑优化函数的二阶导数问题。

一般形式的优化问题：

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中： $f: R^n \rightarrow R, \mathbf{h}: R^n \rightarrow R^m, m \leq n; \mathbf{g}: R^n \rightarrow R^p$ ;

针对这一问题，引入如下定义：

定义21.1. 对于一个不等式约束 $g_i(x) \leq 0$ , 如果在 $x^*$ 处,  $g_i(x^*) = 0$ , 那么称该不等式约束是 $x^*$ 处的起作用约束。如果:  $g_i(x^*) < 0$ , 那么称该不等式约束是 $x^*$ 处的不起作用约束。

定义21.2. 设 $\mathbf{x}^*$ 满足 $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$ , 设 $J(\mathbf{x}^*)$ 为起作用不等式约束下标集,

$$J(\mathbf{x}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

如果:  $\nabla h_i(\mathbf{x}^*), \nabla g_j(\mathbf{x}^*), i \leq m, j \in J(\mathbf{x}^*)$

是线性无关的，则称 $\mathbf{x}^*$ 是一个正则点。

KKT条件：某个点是局部极小点所满足的一阶必要条件。

定理：KKT条件，设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^1$ , 设 $\mathbf{x}^*$ 是问题 $\mathbf{h} = \mathbf{0}, \mathbf{g} \leq \mathbf{0}$ 的一个正则点和局部极小点，那么必然存在 $\lambda^* \in R^m$  和 $\mathbf{u}^* \in R^p$ 使得以下条件成立：

$$\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$$

$$Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$$

$$\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

$\lambda^*$ 为拉格朗日乘子向量,  $\mathbf{u}^*$ 是KKT乘子向量, 其元素分别成为拉格朗日乘子, KKT乘子。

## 充分条件

上面讲了局部极小的必要条件，这里我们讨论局部极小的充分条件。然后我们就利用KKT条件去求不等式约束问题。

二阶充分必要条件；

定义如下矩阵：

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

$F(\mathbf{x})$ 是 $f$ 在 $\mathbf{x}$ 处的Hessian矩阵；

$$\lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \lambda_1 H_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m H_m(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = u_1 G_1(\mathbf{x}) + \dots + u_p G_p(\mathbf{x})$$

其中 $G_k(\mathbf{x})$ 是 $g_k$ 处的Hessian矩阵。

起作用约束所定义曲面的切线空间： $T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}$ .

定理：二阶必要条件：如果 $\mathbf{x}^*$ 是上面讨论的优化问题的极小点，那么存在 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得：

1.  $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$ ,

2.  $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$

3.  $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有 $y \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), y \neq 0$ , 都有 $y^T L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})y > 0$

定理：二阶充分条件：

假设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^2, \mathbf{x}^* \in R^n$ 是一个可行点, 存在向量 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得：

1.  $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$ ,

2.  $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$

3.  $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有  $\mathbf{y} \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ ,  $\mathbf{y} \neq 0$ , 都有  $\mathbf{y}^\top L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})\mathbf{y} > 0$

那么  $\mathbf{x}^*$  是优化问题

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

的严格局部极小点,

$$T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}.$$

其中:  $J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}, \mathbf{u}^* > 0$

## 学习的对偶算法

对于求极小问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{s.t. } y_i(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

引入拉格朗日函数, 对每个不等式约束引入拉格朗日乘子  $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, N$ :

$$L(\mathbf{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b) + \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

其中  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$  为拉格朗日乘子向量。

根据拉格朗日对偶性, 原始问题的对偶问题是极大极小问题:

$$\max_{\alpha} \min_{\mathbf{w}, b} L(\mathbf{w}, b, \alpha)$$

现对  $\mathbf{w}, b$  求极小, 再对  $\alpha$  求极大。

(1) 求  $\min_{\mathbf{w}, b} L(\mathbf{w}, b, \alpha)$ 。对  $\mathbf{w}, b$  求导并令其为 0, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(w, b, \alpha)}{\partial w} &= \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i (\mathbf{x}_i) = 0 \\ \frac{\partial L(w, b, \alpha)}{\partial b} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \end{aligned}$$

把上面两个式子代入拉格朗日函数, 可以得到:

$$\min_{\mathbf{w}, b} L(\mathbf{w}, b, \alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

(2) 求  $\min_{\mathbf{w}, b} L(\mathbf{w}, b, \alpha)$  对  $\alpha$  的极大即是对偶问题。

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \\ \alpha_i \geq 0, i=1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

由于原始问题满足 KKT 条件, 所以存在  $w^*, \alpha^*$  使得  $w^*$  是原始问题的解,  $\alpha^*$  是对偶问题的解。

## 定理: 由对偶问题求原始问题

假设  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T$  是对偶问题的解, 则存在一个指标  $j$  使得  $\alpha_j > 0$ , 使得原问题的解  $w^*, b$  可由下面方程给出:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i) \\ b^* &= y_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

由此得到分离超平面:

$$\mathbf{w}^* \mathbf{x} + b^* = 0$$

分类决策函数:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sign}(\mathbf{w}^* \mathbf{x} + b^*) \\ &= \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i \mathbf{x}_i^\top \mathbf{x} + b^*\right) \end{aligned}$$

## 线性不可分与软间隔最大化

$$\min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} ||w||^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}\mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$$

通过构造拉格朗日函数求对偶函数。原问题的解是 $(w^*, \xi^*, b^*)$ , 对偶问题的解是 $\alpha$ 。

实际上与线性可分的求法是一致的, 只是对应的 $\xi$ 会多出一个拉格朗日乘子, 在求解对偶问题的最优化时, 多了一个约束。 $\mathbf{w}^*$ 是唯一的,  $b$ 不唯一。

# 核函数方法

## 引入核函数

其实在我们求解对偶问题的最优化问题时，我们只需要求 $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$ ，因此如果存在一种变换，使得：

$$\mathbf{x} \rightarrow \phi(\mathbf{x})$$

且

$$\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \rightarrow \phi(\mathbf{x}_i) \phi(\mathbf{x}_j) = K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

其实我们不需要显示的给出 $\phi(\mathbf{x})$ 的表达式，只需要知道 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 就可以了， $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 就是核函数。

引入核函数，是因为我们可以利用核函数方法来解决非线性分类问题。

## 正定核函数

### 正定核的充要条件

设 $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 上的对称函数，则 $K(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 为正定核函数的充要条件是对任意 $x_i \in X, i=1, 2, \dots, m$ ,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 对应的Gram矩阵：

$$K = [K(x_i, x_j)]_{m \times m}$$

的半正定矩阵。

### 常用的核函数

1. 线性核:  $K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$

2. 多项式核函数:  $K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + 1)^p$

分类决策函数是：

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x} + 1)^p + b^*\right)$$

1. 高斯核函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

分类决策函数是：

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}{2\sigma^2}\right) + b^*\right)$$

2. 拉普拉斯核函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}{\sigma}\right) \sigma > 0$$

3. Sigmoid核函数

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \tanh(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + \theta) \quad \beta > 0, \theta < 0$$

## 非线性分类问题

输入：训练数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N, y_i \in \{+1, -1\}, x_i \in R^m$

输出：分类决策函数

(1)选择适合的核函数 $K(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 和适当的参数 $C$ ，构造并求解优化问题：

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, i=1, 2, \dots, N.$$

求得最优解 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T$ ：

(2)选择一个指标 $b$ 使得 $0 < \alpha_j < C$ ，计算

$$b^* = y_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

(3)构造分类决策函数：

$$f(x) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b^*\right)$$



## 逻辑回归

在这里我们以多项逻辑斯蒂回归为例, 讨论怎么用最大化似然函数来求解这一类问题。

假设离散性随机变量 $Y$ 的取值是 $(1, 2, \dots, K)$ , 输入变量 $\mathbf{X} \in R^n$

则, 模型如下:

$$P(Y = k|x) = \frac{\exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{K-1} \exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}, k = 1, 2, \dots, K - 1$$

$$P(Y = K|x) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} \exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}$$

这里 $\mathbf{x} \in R^{n+1}$ ;  $\mathbf{w}_k \in R^{n+1}$ .

因此, 总的似然函数可以表示为:

$$L(\mathbf{W}) = \prod_{n=1}^N P(Y = Y_n | X = X_n) \text{ 这样, 我们需要求的参数是 } W = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n+1}).$$

最简单的就是二项逻辑斯蒂回归, 在这里 $K=2$ : 似然函数可以写成如下简单形式:

$$L(\mathbf{W}) = \prod_{n=1}^N [\pi(x_i)^{y_i}] [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i}$$

其中:  $P(Y = 1|x) = \pi(x) = \frac{\exp(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})}{1 + \exp(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})}$

$$P(Y = 0|x) = 1 - \pi(x)$$

当 $y_i = 0$ 时:

$$[\pi(x_i)^{y_i}] [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i} = 1 - \pi(x_i) \text{ 当 } y_i = 1 \text{ 时:}$$

$$[\pi(x_i)^{y_i}] [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i} = \pi(x_i)$$

实际上分别是 $y_i = 0, y_i = 1$ 发生的概率。

一般连乘形式的似然函数容易发生值溢出, 故而一般求对数似然函数:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{W}) &= \sum_{n=1}^N [y_i \log \pi(x_i) + (1 - y_i) \log [1 - \pi(x_i)]] \\ &= \sum_{n=1}^N [y_i (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + \log(1 + \exp(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i))] \end{aligned}$$

求 $L(\mathbf{W})$ 的极大值, 得到 $\mathbf{w}$ 的估计值。

问题转化为以对数似然函数为目标函数的最优化问题, 一般采用梯度下降法或者拟牛顿法求解。(为啥不使用牛顿法? 因为求Hessian矩阵比较麻烦, 而拟牛顿法只需要构造Hessian阵就可以了, 用迭代法求)

## 最大熵模型

### 最大熵原理

最大熵原理是概率模型学习的一个准则, 最大熵原理认为, 学习概率模型时, 在所有可能的概率模型(分布)中, 熵最大的模型是最好的模型。通常用约束条件来确定概率模型的集合。所以, 最大熵原理也可以表述为在满足约束条件的模型集合中, 选取熵最大的模型。

怎么建立起最大熵原理与最大似然原理之间的联系?

最大熵模型如下:

对于给定的训练数据集:  $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$

以及特征函数 $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), i = 1, 2, \dots, n$ , 最大熵模型的学习等价于约束最优化问题:

$$\max_{P \in C} H(P) = \sum_{x, y} \hat{P}(x) P(y|x) \log P(y|x)$$

$$\text{s.t. } E_P(f_i) = E_{\hat{P}}(f_i), i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_y P(y|x) = 1$$

可以转化为求极小问题:

$$\min_{P \in C} H(P) = - \sum_{x,y} \hat{P}(x) P(y|x) \log P(y|x)$$

$$\text{s.t. } E_P(f_i) - E_{\hat{P}}(f_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_y P(y|x) = 1$$

一般，带约束的优化问题可以通过引入拉格朗日乘子与KKT乘子来求解，也就是把原始问题转化为对偶问题来求解。在满足KKT条件时，对偶问题与原始问题等价：

首先引入拉格朗日乘子： $w_0, w_1, \dots, w_n$ ，定义拉格朗日函数  $L(P, \mathbf{w})$ ；

$$\begin{aligned} L(P, \mathbf{w}) &= -H(P) + w_0(1 - \sum_y P(y|x)) + \sum_{i=1}^n w_i(E_P(f_i) - E_{\hat{P}}(f_i)) \\ &= - \sum_{x,y} \hat{P}(x) P(y|x) \log P(y|x) + w_0(1 - \sum_y P(y|x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n w_i(\sum_{x,y} \hat{P}(x, y) f_i(x, y) - \sum_{x,y} \hat{P}(x) P(y|x) f_i(x, y)) \end{aligned}$$

最优化的原始问题是：

$$\min_{P \in C} \max_{\mathbf{w}} L(P, \mathbf{w})$$

最优化的对偶问题是：

$$\max_{\mathbf{w}} \min_{P \in C} L(P, \mathbf{w})$$

由于拉格朗日函数  $L(P, \mathbf{w})$  是  $P$  的凸函数，因此原始问题与对偶问题的解释等价的。（为什么？用KKT条件能解析吗？）

令： $\Psi(\mathbf{w}) = \min_{P \in C} L(P, \mathbf{w})$

$\Psi(\mathbf{w})$  称为对偶函数。同时，将其解记为：

$$P_w = \arg \min_{P \in C} L(P, \mathbf{w}).$$

具体计算就是  $L(P, \mathbf{w})$  对  $P$  求导，并让其等于 0。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(P, \mathbf{w})}{\partial P(y|x)} &= \sum_{x,y} \hat{P}(x)(\log P(y|x) + 1) - \sum_y w_0 - \sum_{x,y} (\hat{P}(x) \sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y)) \\ &= \sum_{x,y} \hat{P}(x)(\log P(y|x) + 1 - w_0 - \sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y)) \end{aligned}$$

令其偏导数等于 0，在  $\hat{P}(x) > 0$  的情况下，解得：

$$P(y|x) = \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y)) + w_0 - 1$$

由于： $\sum_y P(y|x) = 1$ ，得：

$$P_w(y|x) = \frac{1}{Z_w(x)} \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y))$$

其中：

$$Z_w(x) = \sum_y \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y))$$

其中： $Z_w(x)$  称为规范化因子， $f_i(x, y)$  称为特征函数， $w_i$  是特征函数的权重。

其实这些就可以和统计物理学中的波尔兹曼分布联系在一起了，上面的推导也适用于波尔兹曼分布的推导。这也不奇怪，因为最大熵原理的理论就是脱胎于统计物理学。

之后再求解对偶问题外部的极大化问题：

$$\max_w \Psi(\mathbf{w})$$

将其解记作  $w^*$ ，即：

$$w^* = \arg \max_w \Psi(\mathbf{w})$$

因为最大熵模型是一个带约束的优化问题，因此可任意通过定于拉格朗日函数，通过对变量求极值得到对偶函数，再通过对偶函数来求解。又因为在这里，对偶函数等价于对数似然函数，因此可以求对数似然函数的最大化。

## 模型学习的最优化算法

我们已知模型的概率分布：

$$P_w(y|x) = \frac{1}{Z_w(x)} \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y))$$

因此模型的对数似然函数是：

$$L(w) = \sum_{x,y} P(x, y) \sum_{i=1}^n w_i f_i(x, y) - \sum_x P(x) \log Z_w(x)$$

$$L(w) = \sum_{x,y} P(x,y) \sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y) - \sum_x P(x) \log \sum_y \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y))$$

求解上面函数的最大值，可以通过拟牛顿法或者改进的迭代尺度法来求解，当然最典型的求解方法是IIS(Improved Iterative Scaling)。(有时时间就加上这两个算法)

## BFGS

输入：特征函数  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ; 经验分布  $P(x,y)$ , 目标函数  $f(w)$ , 梯度  $g(w) = \nabla f(w)$ , 精度要求  $\epsilon$ 。

输出：最优化参数  $w^*$ ; 最优模型  $P_{w^*}(y|x)$ 。

(1) 选定初始点  $w^0$ , 取  $B_0$  为正定对称函数, 置  $k=0$ ;

(2) 计算  $g_k = g(w^k)$ , 若  $\|g_k\| < \epsilon$ , 则停止计算, 得到  $w^* = w^k$ ; 否则转到(3)

(3) 由  $B_k p_k = -g_k$  得出  $p_k$ ;

(4) 一维搜索, 求  $\lambda_k$  使得:

$$(w^{(k)} + \lambda_k p_k) = \min_{\lambda \geq 0} f(w^{(k)} + \lambda p_k)$$

(5) 置:  $w^{(k+1)} = w^{(k)} + \lambda_k p_k$

(6) 计算  $g_{k+1} = g(w^{(k+1)})$ , 若  $\|g_{k+1}\| < \epsilon$ , 则停止计算, 得  $w^* = w^{(k+1)}$ , 否则按下面方式求  $B_{k+1}$ 。

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^T B_k^T}{\delta_k^T B_k \delta_k}$$

其中：

$$y_k = g_{k+1} - g_k$$

$$\delta_k = w^{(k+1)} - w^{(k)}$$

(7) 置  $k=k+1$ , 转到(3)

## K近邻

K-近邻不需要训练，因此是一种懒惰学习，急切学习(在训练时就分类)。算法的关键是度量(距离)的定义，K值得选择。

如果样本很大，类别不多，每个类别样本比例比较一致，且不同类别区别比较大的时候，如果给定一个分类错误的上限 $\epsilon$ ，我们没有必要遍历所有样本点找到K个近邻。因为，我们可以找到一个需要的样本上限N，N是 $\epsilon$ 的函数，然后我们从总的样本中挑选出N个样本，进行K紧邻就可以巨大的减小判别的时间。

K近邻的实现就是遍历所有样本，找出K个最近邻中所属类别最多的类，这就是该样本所属的类。

# 回归

1. 线性回归
2. Ridge回归
3. Lasso回归
4. 回归树
5. Ordinary Least Squares Regression(OLSR)

回归问题，可以通过最小二乘法来求解，最终是一个优化问题。因此重要的是怎么转化为一个优化问题，并通过优化方法来进行求解。

线性回归中，如果是满秩问题或者超定问题，我们可以通过正则方程求解，也就是矩阵求逆或者矩阵求伪逆。如果是欠定问题，则可以把正则化应用于回归分析中，主要涉及L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化。

欠定问题在当前的一个核心，最典型的就是深度学习，一般模型的参数数目远大于数据的数目，因此需要一些正则化方法。比如L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化，Early Stopping。

## 多元回归分析

求解线性方程组，如果问题是为满秩，或者超定问题，可以通过矩阵求逆来解决。当然如果矩阵求逆太费时间，则可以通过共轭梯度法来求解。  
这一节不分析欠定问题。

### 多元回归方程

$$\hat{y} = \lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

其中 $\lambda_j$ 是 $x_j$ 的偏回归系数， $\hat{y}$ 是样本的估计值。

根据最小值原理，可以求得偏回归系数。

$$L(b) = \sum_{i=0}^{n-1} [y_i - (\lambda_0 + \lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} + \dots + \lambda_m x_{mi})]^2$$

变量数为m，样本数为n。最小二乘法的目的就是找到一组偏回归系数使得损失函数L极小，极端情况就是L=0，则所有样本估计值就是样本的观测值。这只在满秩的情况下存在。一般只是求得L的极小值点。对损失函数求偏导，可以得到：

### 正则方程

实际问题可以转化成矩阵分析

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{no} \\ y_{0o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \\ \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

即：

$$X * \lambda = Y + \epsilon$$

寻找一组 $\lambda$ 使得 $L(\lambda) = (X * \lambda - Y)^T (X * \lambda - Y)$ 极小

利用 $L(\lambda)$ 对向量 $\lambda$ 求导可以得到<sup>1</sup>：

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} = 2X^T(X\lambda - Y) = 0$$

我们也可以得到：

$$\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = 2X^T X$$

求得： $\lambda = (X^T X)^{-1} X^T Y$

$(X^T X)^{-1} X^T$ 也称为X的伪逆。

### 共轭梯度法

当矩阵X非常大的时候，时间复杂度是 $O(n^3)$ 的矩阵求逆方法太费时间，一般采用共轭梯度法来求解。这在矩阵计算那一章会讨论。

## 多项式拟合

函数的多项式表示方式：

$$y = \sum_{k=0}^m \lambda_k x^k$$

对于n组数据 $(x_i, y_i)$ 若我们想用多项式去拟合这组数据，就是寻找使下列函数值极小的一组系数 $\lambda$

$$L(\lambda) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \sum_{k=0}^m \lambda_k x_i^k)^2$$

令： $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$

s.t.  $X_i = [x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^m]$

$$Y = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}]^T$$

则上面损失函数可以表示为：

$$L(\lambda) = (X * \lambda - Y)^T (X * \lambda - Y)$$

对其求一阶导，结果为0；

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

最终方程可以化简成如下形式：

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} x_j^0 & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^1 \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^m \end{bmatrix}$$

即:  $X * \lambda = Y$  得到  $\lambda = X^{-1}Y$

若在方程上加上一个正则项,

$$L(\lambda) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \sum_{k=0}^m \lambda_k x_i^k)^2 + \sum_{k=0}^m \lambda_k^2$$

得到如下的矩阵:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} x_j^0 - 2n & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 - 2n & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{2m} - 2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^1 \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^m \end{bmatrix}$$

类似于Ridge回归:

但是对于加噪声参数的多项式数据, 发现不加正则项能给出正确的结果, 加正则项反倒不能, 因为这是满秩问题, 没必要加正则项, 对于欠定问题, 才可以加正则项来对解进行约束。

## 迭代法求解

求解上面的方程也可以使用迭代法求解, 实际上就是最优化方法。

<sup>1</sup>. 矩阵求导术(上), <https://zhuanlan.zhihu.com/p/24709748> ↵

## 正则化回归

在线性回归分析中，如果是欠定问题，则可以把正则化应用于回归分析中，主要涉及L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化。此外，Early Stopping也是一种正则化方法。

欠定问题在当前的一个核心，最典型的就是深度学习，一般模型的参数数目远大于数据的数目，因此需要一些正则化方法。比如L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化，Early Stopping。

## 线性回归问题

对于线性系统，也就是预测函数：

$$f(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$$

然后通过最小二乘求解符合数据的模型。通过加正则项来约束模型的复杂度或者参数范围。对于非线性模型，只是把模型 $f(\mathbf{x})$ 换成你想要的非线性函数即可，比如N元M次多项式，选最简单的就是N元二次方程，这是最简单的非线性模型。

## 非线性回归问题

### 光学建模

物理学中有一些很有意思的非线性回归模型，比如光的衍射成像，光通过特定结构的衍射，反射成像，求解这些模型，第一步是建model，也就是通过求解Maxwell方程，得到非线性方程组，第二步就是通过实验数据来求解模型中的参数，这些参数有两类，一类是几何参数，也就是设计到要处理问题的几何结构；第二类是物理参数，主要是描述系统材料属性的参数，比如折射率，反射率，光的波长等。

### 神经网络

一个典型的非线性回归例子就是深度学习，神经网络就是一个高度非线性的函数，非线性是由激活函数决定的，也就是激活函数是非线性函数。通过这个非线性函数，可以把输入的数据映射到输出的数据空间；高度的非线性是神经网络具有强大的非线性拟合能力的根本。神经网络的表达能力由下面的定理给出。

### 万能近似定理

万能近似定理(universal approximation theorem)(Hornik et al., 1989;Cybenko, 1989)表明，一个前馈神经网络如果具有线性输出层和至少一层具有任何一种“挤压”性质的激活函数(例如logistic sigmoid激活函数)的隐藏层，只要给予网络足够数量的隐藏单元，它可以以任意的精度来近似任何从一个有限维空间到另一个有限维空间的Borel 可测函数。

# 线性系统的Regularized Regression

这里讨论的还是线性系统，也就是预测函数：

$$f(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$$

然后通过最小二乘求解数据的模型。通过加正则项来约束模型的复杂度或者参数范围。对于非线性模型，只是把模型  $f(\mathbf{x})$  换成你想要的非线性函数即可，比如  $N$  元  $M$  次多项式，选最简单的就是  $N$  元二次方程，这是最简单的非线性模型。

物理学中有一些很有意思的非线性回归模型，比如光的衍射成像，光通过特定结构的衍射，反射成像，求解这些模型，第一步是建 model，也就是通过求解 Maxwell 方程，得到非线性方程组，第二步就是通过实验数据来求解模型中的参数，这些参数有两类，一类是几何参数，也就是设计到要处理问题的几何结构；第二类是物理参数，主要是描述系统材料属性的参数，比如折射率，反射率，光的波长等。

一个典型的非线性回归例子就是深度学习，神经网络就是一个高度非线性的函数，非线性是由激活函数决定的，也就是激活函数是非线性函数。通过这个非线性函数，可以把输入的数据映射到输出的数据空间；高度的非线性是神经网络具有强大的非线性拟合能力的根本。神经网络的表达能力由下面的定理给出。

## 万能近似定理

万能近似定理 (universal approximation theorem) (Hornik et al., 1989; Cybenko, 1989) 表明，一个前馈神经网络如果具有线性输出层和至少一层具有任何一种“挤压”性质的激活函数（例如 logistic sigmoid 激活函数）的隐藏层，只要给予网络足够数量的隐藏单元，它可以以任意的精度来近似任何从一个有限维空间到另一个有限维空间的 Borel 可测函数。

正则化的目的是减少 test 误差而不是 training 误差，这是要明白的。

## Ridge 回归，Shrink 与 SVD

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

等价于：

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{ridge} &= \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq t. \end{aligned}$$

上面的问题也等价于假定， $y_i, \beta_i$  服从如下分布：

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in N(0, \tau^2)$$

其中： $\lambda = \sigma^2 / \tau^2$

因此 RRS (Root sum square) 可以写成如下形式：

$$RRS(\lambda) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) + \lambda \beta^T \beta$$

通过对  $\beta$  求导并令其为 0，可以得到：

$$\hat{\beta}^{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

为了建立起 L2 与 SVD 之间的联系，我们对  $\mathbf{X}$  进行 SVD 分解：

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$$

我们重写没有正则化的最小二乘拟合：

$$\mathbf{X}\beta^{ls} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

对于 L2 正则化的最小二乘法：

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\beta^{ls} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{D}^2 + \lambda I)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_j \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda} \mathbf{u}_j^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

从上面的分式  $\frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda}$  可以知道，对于  $d_j \ll \lambda$ ，则相应的方向会收缩到 0。可以认为 L2 就是对数据进行了 SVD 分解后，只保留了  $d_j > \lambda$  的分量。

## Lasso(L1) 回归

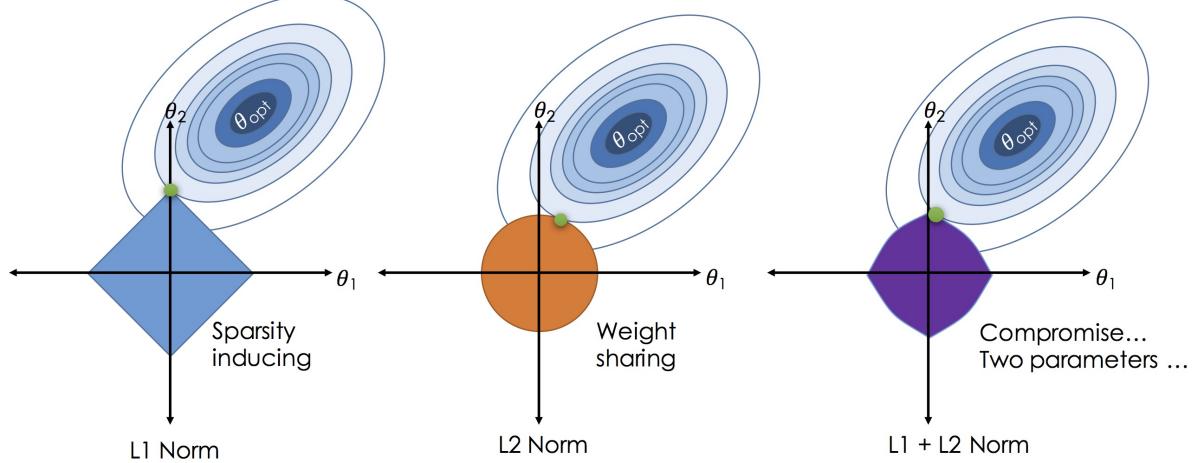
$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

等价于：

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2$$

subject to :  $\sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t$ .

L1更容易产生稀疏性,因为椭圆与菱形更易在菱形顶点相交,而与圆形不容易在坐标轴上相切。



## L1稀疏性的数学解析

一个数学上更严格的解析。。

上面的问题也等价于假定,  $y_i, \beta_i$ 服从如下分布:

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in (1/2\tau) \exp(-|\beta|/\tau)$$

其中:  $\tau = 1/\lambda$

因此  $\beta_i$  更容易分布在0的附件, 也就是能级排斥(量子混沌里面的概念, L1是可积系统, L2是GOE)

最小二乘一般通过Cholesky分解( $p^3 + Np^2/2$ )或者QR分解( $NP^2$ )来实现, 前者一般更快, 但是没有后者稳定。

# 聚类

聚类的方法有

1. K-means
2. 核K均值
3. 谱聚类
4. K中值

无监督学习中的EM算法是否属于聚类算法？

# K均值EM等聚类算法

K-means是一种无监督的学习方法，通过定义距离与分类的数目K，样本归属于哪个类，取决于该样本距离K个类中心的距离，选择距离最小的类作为归属。随机选择K个起始点，通过迭代，最终收敛。其迭代过程就是求如下函数极小的过程。

$$E = \sum_{i=1}^K \sum_{x \in C_i} \|x - u_i\|^2$$

$$u_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} x$$

## 问题

一个主要的问题就是怎么选取类的数目K。

## 改进方案

k-means对初始值的设置很敏感，所以有了k-means++、intelligent k-means、genetic k-means。

k-means对噪声和离群值非常敏感，所以有了k-medoids和k-medians。

k-means只用于numerical类型数据，不适用于categorical类型数据，所以k-modes。

k-means不能解决非凸(non-convex)数据，所以有了kernel k-means

## K-Means算法流程

输入：样本集D=( $x_1, x_2, \dots, x_m$ )，聚类数目k。

从D中随机选取k个样本点作为中心。 $(u_1, u_2, \dots, u_k)$

repeat:

    令 $C_i = 0, (1 \leq i \leq k)$

    for j=1,2,...,m,do

        样本点 $x_j$ 到各均值 $u_i$ 的距离

$d_{ij} = \|x_j - u_i\|_2$

        根据距离确定样本点j所属于的类: $\lambda_j = \arg \min d_{ji}$

        将 $x_j$ 划入所属的类 $C_{\lambda_j} = C_{\lambda_j} + u_i$

    end for

    for i=1,2,...,k,do

        计算  $u'_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} x$

        if  $u'_i \neq u_i$

$u_i = u'_i$

        else:

            not change

        end for

    until所有的均值向量都没有改变。

输出族划分 $C=(C_1, C_2, \dots, C_k)$

# 高斯混合模型

## 三硬币模型

三枚硬币A, B, C正面出现的概率是 $\pi, p, q$ . 进行如下实验: 先掷硬币A, 正面选硬币B, 反面选硬币C; 然后掷选出的硬币, 掷硬币的结果出现正面记作1, 反面记作0. 独立地重复n次实验, 得到一个观察序列如下:

1,1,0,1,0,0,1,0,1,1

三硬币模型可以写作:

$$\begin{aligned} P(y|\theta) &= \sum_z P(y, z|\theta) = \sum_z P(z|\theta)P(y|z, \theta) \\ &= \pi p^y(1-p)^{1-y} + (1-\pi)q^y(1-q)^{1-y} \end{aligned}$$

$\Theta = (\pi, p, q)$ 是模型参数, 随机变量y的数据可以观察, 随机变量z的数据不可以观察。

## 最大似然函数

寻找一组模型参数, 使得在该参数下, 观测序列出现的概率极大。

将可观察数据表示为 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ , 观测数据表示为

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T.$$

则观察数据的似然函数是:

$$\begin{aligned} P(Y|\theta) &= \sum_Z P(Z|\theta)P(Y|Z, \theta) \\ &= \prod_{j=1}^n [\pi p^y_j(1-p)^{1-y_j} + (1-\pi)q^y_j(1-q)^{1-y_j}] \end{aligned}$$

考虑求模型参数  $\Theta = (\pi, p, q)$  的极大似然估计, 即:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log(P(Y|\theta))$$

只能通过迭代来求解模型参数。EM算法就是该问题的一种方法。

## EM算法

E步: 计算模型参数 $\pi^{(i)}, p^{(i)}, q^{(i)}$ 下观测数据 $y_j$ 来自掷硬币B的概率是(无论是正面还是反面, 都可以用下面公式进行计算):

$$u^{(i+1)} = \frac{\pi^{(i)}(p^{(i)})^{y_j}(1-p^{(i)})^{1-y_j}}{\pi^{(i)}(p^{(i)})^{y_j}(1-p^{(i)})^{1-y_j} + (1-\pi^{(i)})(q^{(i)})^{y_j}(1-q^{(i)})^{1-y_j}}$$

M步: 计算模型参数的新估计值:

之所以抛硬币B是因为抛硬币A出现了正面, 因此 $\pi$ (抛A出现正面的几率)如下计算)

$$\pi^{(i+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u^{(i+1)}$$

在抛硬币B的前提下, 根据抛B得到正面的频率得到P(B正面出现的概率)

$$p^{(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n u^{(i+1)} y_j}{\sum_{j=1}^n u^{(i+1)}}$$

在抛硬币C的前提下(1-来自抛B的概率), 根据抛C得到正面的频率得到P(C正面出现的概率)

$$p^{(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n (1-u^{(i+1)}) y_j}{\sum_{j=1}^n (1-u^{(i+1)})}$$

## EM算法流程

输入: 观察变量数据Y, 隐变量数据Z, 联合分布 $P(Y, Z|\theta)$ , 条件分布 $P(Z|Y, \theta)$ ;

输出: 模型参数 $\theta$ .

(1)选择参数的初始值 $\theta^{(0)}$ , 开始迭代;

(2)E步: 记 $\theta^{(i)}$ 为第*i*次迭代参数 $\theta$ 的估计值, 在第*i*+1次迭代的E步, 计算:

$$Q(\theta, \theta^{(i)}) = E_z[\log P(Y, Z|\theta)|Y, \theta^{(i)}] = \sum_z P(Z|Y, \theta^{(i)}) \log P(Y, Z|\theta)$$

这里,  $P(Y, Z|\theta^{(i)})$ 是在给定

观测数据Y和当前的参数估计 $\theta^{(i)}$ 下隐变量数据Z的条件概率分布:

(3)M步(求导令其等于0得极大):求使 $Q(\theta, \theta^{(i)})$ 极大的 $\theta$ ,确定第i+1次迭代的参数的估计值 $\theta^{(i+1)}$ :

$$\theta^{(i+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^{(i)})$$

(4)重复第(2)(3)步,直到收敛。

#### Q函数

完全数据的对数似然函数 $\log P(Y, Z|\theta)$ 关于给定观测数据Y和当前参数 $\theta$ 下对未观察数据Z的条件概率分布 $\log P(Z|Y, \theta^{(i)})$ 的期望成为Q函数,即:

$$Q(\theta, \theta^{(i)}) = E_z[\log P(Y, Z|\theta)|Y, \theta^{(i)}]$$

## 高斯混合模型

高斯混合模型是指的具有如下形式的概率分布模型:

$$P(y|\theta) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi(y|\theta_k)$$

其中 $\alpha_k$ 是系数 $\alpha_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ ;  $\phi(y|\theta_k)$ 是高斯分布函数,  $\theta_k = (u_k, \sigma_k^2)$ ,

$$P(y|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{(y-u_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

称为第k个分模型。

## 高斯混合模型参数估计得EM算法

可以用EM算法来求解GMM的参数 $\alpha_k, u_k, \sigma_k$ .

$\gamma_{jk} = 1$ 表示第j个观测来自第k个分模型,  $\gamma_{jk} = 0$ 表示第j个观测不是来自第k个分模型。

有了观察数据 $y_j$ 以及未观测数据 $\gamma_{jk}$ ,则完全数据是:

$$(y_j, \gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jK}), j = 1, 2, \dots, K$$

似然函数为:

$$\begin{aligned} P(y, \gamma|\theta) &= \prod_{j=1}^N P(y_j, \gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jK}|\theta) \\ &= \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^N [\alpha_k \phi(y_j|\theta_k)]^{\gamma_{jk}} \\ &= \prod_{k=1}^K \alpha_k^{n_k} \prod_{j=1}^N [\phi(y_j|\theta_k)]^{\gamma_{jk}} \\ &= \prod_{k=1}^K \alpha_k^{n_k} \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{(y_j - u_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)^{\gamma_{jk}} \end{aligned}$$

式中 $\sum_{j=1}^N \gamma_{jk} = n_k$ ,  $\sum_{k=1}^K n_k = N$ 。

转化为完全数据的对数似然函数。

## GMM算法流程

## 降维

降维的方法有：

1. PCA
2. 核函数PCA
3. LDA
4. L1正则化
5. 局部保持映射
6. 拉普拉斯特征映射

## PCA

机器学习一般面对的是一个高维的问题，样本稀疏。容易面临严重的维数灾难。处理维数灾难的一个重要方法就是降维。确切的来说，有两种情形：

1. 基于距离的聚类问题。对于M个数据，定义距离后，M个数据张成一个MxM的距离矩阵，而且是对称矩阵。
2. 基于数据的低秩分解。对于M个数据，每个数据是N维，我们是对这个数据集张成的MxN维矩阵进行降维。  
这就可以用到我们在矩阵计算中的一些方法，比如主成分分析(PCA)，实际上我们是通过SVD来实现PCA的，就是取最大的K个奇异值与奇异向量来实现矩阵的低秩分解。

下面我们主要考虑第一种情况，也就是处理聚类问题。

## SVD

对于任何一个MxD的矩阵X可以做如下分解：

$$X = UDV^T$$

其中 $U^T U = I_D$ ,  $V V^T = I_N$ , D是MxD的对角矩阵。

$$XX^T = UDV^T VD^T U^T = UDD^T U^T$$

$$X^T X = VD^T U^T UDV^T = VD^T DV^T$$

是矩阵的本征值分解。因此可以通过上面两式来求解U, V。主要用到的是矩阵本征值，本征矢求解技巧。这都在矩阵计算(第五章)那一章讨论的内容。

对于我们的情况M=D, 因此

$$D^T = D$$

令 $B = X^T X$ , 对B做特征值分解，得到

$$B = V \Lambda V^T,$$

假设 $\Lambda$ 的矩阵元按如下方式排序：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$$

## PCA

我们可以通过SVD来实现PCA, 具体就是只取X的SVD中的前M个其一分量。

$$X = UDV^T \approx U_M D_M V_M^T$$

其中 $U_M, D_M, V_M$ 对于矩阵X的前M个奇异值分量。

取前d个奇异向量。选择一个比例t, 一般取t = 95%, 使得。

$$\frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} \geq t$$

## PCA的好处

1. 通过降维，使得样本的采样密度变大，这是降维的主要目的<sup>1</sup>
2. 当数据受噪声影响时，小的特征值所对应的特征向量一般受噪声影响，因此去掉这些量在一定程度上能起到去噪的作用。

<sup>1</sup>. 周志华《机器学习》[←](#)

# 流形学习<sup>1</sup>

流形学习是一类借鉴拓扑流行概念的降维方法，“流形”是在局部与欧氏空间同胚的空间。换言之，它在局部具有欧氏空间的性质，可以用欧式距离来计算距离。对于近邻，我们可以利用欧式距离来计算距离，而对于非近邻，我们可以利用测地线来计算距离，转化成计算两点之间最短路径，计算最短路径可以利用Dijkstra算法或者Floyd算法。

## 等度量映射

等度量映射(Isometric Mapping,简称IsoMap)的基本出发点是认为低维流形嵌入到高维空间后，直接在高维空间计算距离具有误导性，因为高维空间的直线距离在低维空间是不可达到。就如下图所示，低维空间的距离是“测地线geodesic”距离，是图中的红线是这两点的测地线，测地线是两点之间的本真距离。显然，直接在高维空间计算两点之间的距离是不恰当的。

我们必须通过流形在局部上与欧氏空间同胚这个性质，对每个点基于欧式距离找到近邻点，然后建立近邻连接图，再计算图中任意两点的距离，算法就是Dijkstra算法或者Floyd算法。

得到任意两点之间的距离之后，就可以利用MDS方法来获得样本点在低维空间的坐标。

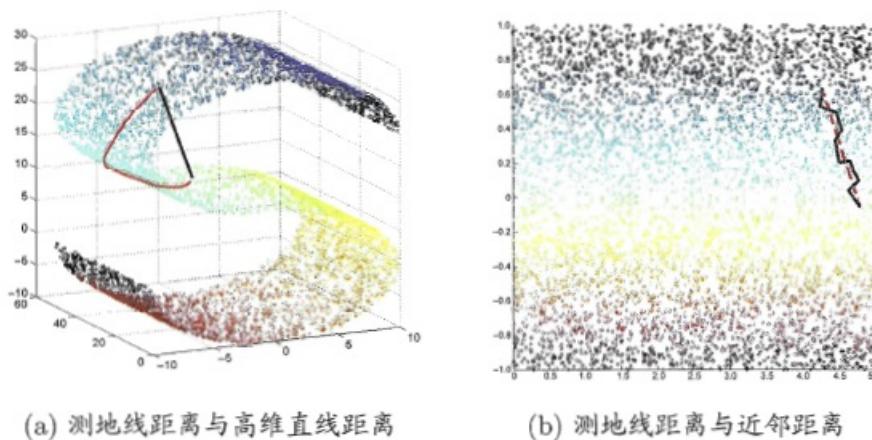


图 10.7 低维嵌入流形上的测地线距离(红色)不能用高维空间的直线距离计算，但能用近邻距离来近似

## 局部线性嵌入(LLE)

与Isomap试图保持近邻样本之间的距离不同，局部线性嵌入(Locally Linear Embedding)试图保持领域内样本之间的线性关系。如下图所示，假定样本点 $x_i$ 的坐标可以通过它的领域样本 $x_j, x_k, x_l$ 的坐标通过线性组合的方式来重构出来。即：

$$x_i = w_{ij}x_j + w_{ik}x_k + w_{il}x_l$$

LLE希望上式的关系在低维空间得以保持。

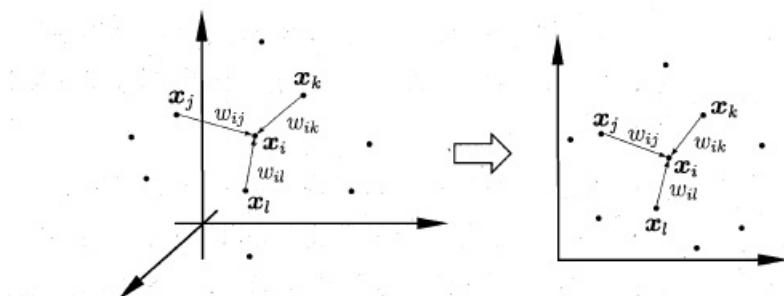


图 10.9 高维空间中的样本重构关系在低维空间中得以保持

LLE为每个样本 $\mathbf{x}_i$ 找到近邻下标集合 $Q_i$ , 然后计算出基于 $Q_i$ 中的样本点对 $\mathbf{x}_i$ 进行线性重构的系数 $\mathbf{w}_i$ .

$$\min_{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}_i - \sum_{j \in Q_i} w_{ij} \mathbf{x}_j\|_2^2$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in Q_i} w_{ij} = 1$$

其中 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 均已知, 令 $C_{jk} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$ ,  $w_{ij}$ 有闭式解:

$$w_{ij} = \frac{\sum_{k \in Q_i} C_{jk}^{-1}}{\sum_{l, s \in Q_i} C_{ls}^{-1}}$$

LLE在低维中保持 $\mathbf{w}_i$ 不变, 于是 $\mathbf{x}_i$ 对应的低维空间坐标 $\mathbf{z}_i$ 可以通过下式求解:

$$\min_{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{z}_i - \sum_{j \in Q_i} w_{ij} \mathbf{z}_j\|_2^2$$

令 $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m) \in R^{(d', m)}$ ,  $(W)_{ij} = w_{ij}$ .

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{W})^T(\mathbf{I} - \mathbf{W}),$$

则关于 $\mathbf{z}_i$ 的最优化问题可以转化为:

$$\min_{\mathbf{Z}} \text{tr}(\mathbf{Z} \mathbf{M} \mathbf{Z}^T),$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T = 1,$$

可以对上面你的 $\mathbf{M}$ 进行特征值分解,  $\mathbf{M}$ 最小的 $d'$ 个特征值对应的特征向量组成的矩阵就是 $\mathbf{Z}^T$

## 度量学习

# 决策树与集成学习

- 1. 决策树
  - i. ID3
  - ii. C4.5
  - iii. CART
  - iv. Decision Stump
- 2. 集成学习
  - i. Bagging
    - i. 随机森林
  - ii. Boost
    - i. Adaboost
    - ii. GBDT
    - iii. XGBoost
    - iv. LightGBM

## Ensemble learning(团体学习)

利用多个学习方法来获得更好的预测能力，机器学习中的系综学习的样本是有限的，但是统计力学中的系综方法其样本是无限的。机器学习中的系综方法包括Bagging,boosting

### Bagging算法(Bootstrap aggregating)

参考 是一种团体学习方法,可以看成是一种圆桌会议,或者投票选举的形式,其思想是“群众的眼光是雪亮的”,可以训练多个模型,之后将这些模型进行加权组合,一般这类方法的效果,都会好于单个模型的效果。在实践中,在特征一定的情况下,大家总是使用Bagging的思想去提升效果。

算法步骤 给定一个大小为n的训练集D, Bagging算法从中均匀、有放回地(即使用自助抽样法)选出m个大小为n'的子集 $D_i$ , 作为新的训练集。在这m个训练集上使用分类、回归等算法,则可得到m个模型,同一个训练集中的成员可以有重重复,再通过取平均值、取多数票等方法,即可得到Bagging的结果。

### Boosting

在Bagging方法中,我们假设每个训练样本的权重都是一致的;而Boosting算法则更加关注错分的样本,越是容易错分的样本,约要花更多精力去关注。对应到数据中,就是该数据对模型的权重越大,后续的模型就越要拼命将这些经常分错的样本分正确。最后训练出来的模型也有不同权重,所以boosting更像是会整,级别高,权威的医师的话语权就重些。训练:先初始化每个训练样本的权重相等为 $1/d$ , d为样本数量;之后每次使用一部分训练样本去训练弱分类器,且只保留错误率小于0.5的弱分类器,对于分对的训练样本,将其权重调整为  $\text{error}(M_i)/(1-\text{error}(M_i))$ , 其中  $\text{error}(M_i)$  为第i个弱分类器的错误率(降低正确分类的样本的权重,相当于增加分错样本的权重);

测试:每个弱分类器均给出自己的预测结果,且弱分类器的权重为 $\log(1-\text{error}(M_i))/\text{error}(M_i)$  权重最高的类别,即为最终预测结果。

在adaboost中,弱分类器的个数的设计可以有多种方式,例如最简单的就是使用一维特征的树作为弱分类器。

adaboost在一定弱分类器数量控制下,速度较快,且效果还不错。

我们在实际应用中使用adaboost对输入关键词和推荐候选关键词进行相关性判断。随着新的模型方法的出现,adaboost效果已经稍显逊色,我们在同一数据集下,实验了GBDT和adaboost,在保证召回基本不变的情况下,简单调参后的Random Forest准确率居然比adaboost高5个点以上,效果令人吃惊。。。

Bagging和Boosting都可以视为比较传统的集成学习思路。现在常用的Random Forest, GBDT, GBRank其实都是更加精细化,效果更好的方法。后续会有更加详细的内容专门介绍。

# 决策树与集成学习

决策树是一种基本的回归与分类的方法。决策树由节点与边构成，节点分类内部节点与叶子节点；内部节点表示属性或者特征，叶子节点表示一个类。

## 决策树学习

训练集  $D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$  其中  $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \dots x_i^{(n)})$  是  $n$  维变量， $n$  表示特征的数目， $y_i \in (1, 2 \dots K)$  类标签。训练的本质是基于一定标准得到一组分类规则。我们需要得到一组与训练数据矛盾较小并且泛化能力也好的分类规则，其中泛化能力说的是在测试集上其错误率也小，错误率有不同的定义方式，可以是均方误差，也可以是似然函数，一般回归问题选择均方误差，分类问题选择似然函数，想想这是为什么？。分类规则就是特征选择的过程，特征选择是基于一些可以量化的函数，一般基于信息熵增益最大或者信息熵增益率最大或者 Gini 系数下降最大的规则。因此，接下来我们要定义如下概念。

1. 信息熵
2. 条件熵
3. 信息增益
4. 信息增益率
5. Gini 系数

### 1. 信息熵

熵的概念来自于统计物理，描述微观系统的混乱程度，由 Rudolf Clausius 提出，

$$S = k_B \ln \Omega = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

其中  $k_B$  是 Boltzmann constant,  $\Omega$  表示系统的可能状态数。

它表示的就是  $\ln(p_i)$  的期望值。香农把这个概念引入信息学，定义了信息熵。

考虑一个只能取有限  $n$  个值的系统，值对应的就是状态，比如投硬币，只能取两个值，就是说只能有 2 个状态，因此  $n=2$ 。在统计物理中，状态对应的是系统的能级，也就是一个能级对应一个状态，系统处于不同能级的概率就是  $p_i$

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2..n$$

$$\text{熵的定义如下: } H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

若系统是确定的，则有一个  $p_i = 1$ ，其他的  $p_i = 0$  等于 0，因此代入熵的公式可知，熵为 0。可以证明，对于  $n$  个状态的系统，系统的熵满足如下不等式：

$$0 \leq H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \ln n.$$

### 2. 条件熵

联合概率说的是两个及两个以上系统随机变量共同发生的几率问题，条件熵  $H(Y|X)$  说的是随机变量  $X$  给定的情况下，随机变量  $Y$  的条件熵。

计算如下：

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^n p_i H(Y|X = x_i)$$

这里， $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2..n$ 。

$H(Y|X = x_i)$  计算与上面的信息熵一样，只是对于  $H(Y|X = x_i)$ ，我们只计算  $X = x_i$  的那些样本的熵，因为我们会对所有  $X$  取不同值得样本进行求和，因此会遍历整个样本。

### 3. 信息增益

信息增益是基于以上两个概念的，是针对特征而言的，特征  $A$  对训练数据集  $D$  的信息增益  $g(D, A)$  定义成经验熵  $H(D)$  与特征  $A$  给定的条件下， $D$  的经验条件熵  $H(D|A)$  之差。即：

$$\blacksquare g(D, A) = H(D) - H(D|A).$$

如果我们知道数据集  $D$  的信息熵计算，以及条件熵的计算，则信息增益的计算不难。

### 4. 信息增益率

特征A对训数据集D的信息增益率 $g_R(D, A)$ 定义成信息增益 $g(D, A)$ 与特征A的经验熵 $H(A)$ 之比：

$$g_R(D, A) = \frac{g(D, A)}{H(A)}$$

其中 $H(A) = \sum_{i=1}^{i=K} p_i \ln p_i$ , K是特征A能取不同值得数目,  $p_i$ 是取不同值得概率。

他的计算基于信息增益与信息熵。

## 5. Gini系数

基尼系数定义：对于分类问题，假设有K个类，样本点处于第k个类的概率是 $p_k$ ，则概率分布的基尼系数定义成：

$$Gini(p) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(1 - p_i) = 1 - \sum_{i=1}^{i=K} p_i^2$$

基尼系数描述的是不同类之间的不一致程度，一个类与其它类的不一致概率和，也就是不一致程度程度，说的是从样本集合D中随便挑出两个样本，他们属于不同类的概率。由下面函数刻画 $p_i(1 - p_i)$ 。对于分类问题，我们希望最终的叶子节点里面，所有的样本点尽可能使同一个类里面的，也就是基尼系数尽可能趋近于0。

假设样本D中有K个类,  $C_k$ 是第k类的集合,  $|C_k|$ 是集合 $C_k$ 的大小, 因此样本集合的基尼系数定义成：

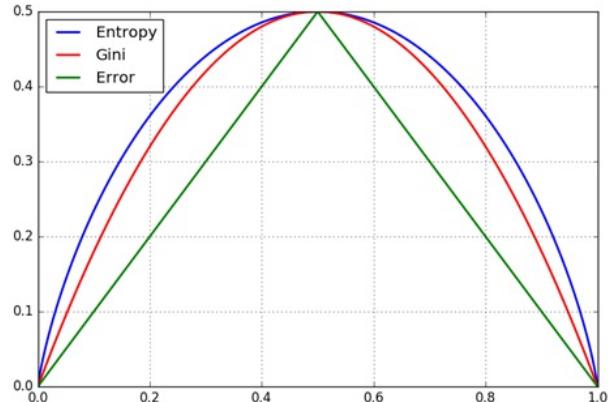
$$Gini(p) = 1 - \sum_{i=1}^{i=K} \left(\frac{|C_k|}{|D|}\right)^2$$

基于不同的指标，比如信息增益，信息增益率，基尼系数，我们会得到不同的决策树生成算法，依次是ID3, C4.5, CART。

# 关于Gini系数的讨论(一家之言)

- 考察Gini系数的图像、熵、分类误差率三者之间的关系
- 将 $f(x)=-\ln x$ 在 $x=1$ 处一阶展开，忽略高阶无穷小，得到 $f(x) \approx 1-x$

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{k=1}^K p_k \ln p_k \\ &\approx \sum_{k=1}^K p_k(1-p_k) \end{aligned}$$



信息熵与基尼系数的函数大致一致，实际上在iris数据集中，生成决策树时，两者没有差别。

## ID3算法

ID3算法基于信息增益最大，代码实现如下，它的缺点在于，它倾向于选择取值很多的特征，因为当特征能取很多值得时候，此时系统的不确定度降低，极端情况是，特征能取N个不同的值，N个训练集的数量，此时特征A条件熵为0。为了避免这种情况，而引入了C4.5算法。

假设特征A是信息增益最大的特征，当特征A取离散值时，假设特征A可以取K个不同值，我们选择A作为特征之后会生出K个节点，对于每个节点，我们要重复上面的步骤，继续寻找信息增益最大的特征，只是，这时候特征数目减小了1，减小的这个特征就是A特征本身。当一个节点，它的熵小于一定阈值的时候，我们就不再分割这个节点而是把他当成一个叶子节点。我们可以使用递归来实现ID3算法。

对于特征值取连续的情况，我们通过计算特征值大于阈值与小于阈值的两部分熵之和来计算熵。

算法实现的时候要注意的一点就是，计算熵时，不能让概率等于0，否则会出错。

```

import scipy
import numpy as np
from sklearn import tree
from sklearn.datasets import load_iris
import matplotlib.pyplot as plt

class DecisionTree(object):
    def __init__(self):
        self.training_steps = 50

    def Entropy(self, Prob):
        entropy = 0
        for n in range(Prob.shape[0]):
            entropy -= Prob[n] * (np.log2(Prob[n])) ##Entropy
            #entropy += Prob[n] * (1 - Prob[n]) ##Gini
        return entropy

    def distribution(self, feature_data, threshold_n):
        entropy = 0
        prob = 0.001*np.ones((3, 1))
        for n in range(0, threshold_n):
            for index in range(3):
                if np.abs(feature_data[n, 1] - index) < 0.01:
                    prob[index] += 1
        prob = prob/threshold_n
        p_1 = (1.0*threshold_n)/feature_data.shape[0]
        H_1 = self.Entropy(prob)
        entropy += p_1*H_1

        prob_2 = 0.001*np.ones((3, 1))
        for n in range(threshold_n, feature_data.shape[0]):
            for index in range(3):
                if round(feature_data[n, 1]) == index:
                    prob_2[index] += 1
        prob_2 = prob_2/(feature_data.shape[0] - threshold_n)
        H_2 = self.Entropy(prob_2)
        entropy += (1 - p_1) * H_2
        return entropy

    def best_feature_threshold(self, data):
        best_threshold = 0
        best_feature = 0
        best_entropy = 100000
        feature_num = data.shape[1] - 1
        for feature_index in range(feature_num):
            a_arg = np.argsort(iris_data[:, feature_index])
            sorted_data = iris_data[a_arg]
            for n in range(1, sorted_data.shape[0]):
                threshold = (sorted_data[n-1, feature_index] + sorted_data[n, feature_index])/2
                feature_result_data = np.zeros((sorted_data.shape[0], 2))
                feature_result_data[:, 0] = sorted_data[:, feature_index]
                feature_result_data[:, -1] = sorted_data[:, -1]
                condition_entropy = self.distribution(feature_result_data, n)
                if condition_entropy < best_entropy:
                    best_threshold = threshold
                    best_entropy = condition_entropy
                    best_feature = feature_index
            print best_entropy, best_feature, best_threshold
        return best_entropy, best_feature, best_threshold

if __name__ == '__main__':
    DT = DecisionTree()
    iris = load_iris()
    clf = tree.DecisionTreeClassifier()
    clf = clf.fit(iris.data, iris.target)
    data = iris.data
    target = iris.target
    iris_data = np.zeros((data.shape[0], data.shape[1] + 1))
    iris_data[:, 0:data.shape[1]] = data
    iris_data[:, -1] = target
    best_entropy, best_feature, best_threshold = DT.best_feature_threshold(iris_data)

```

## C4.5

C4.5算法弥补了ID3算法的不足，通过使用信息增益率来作为特征的选择标准。

$$g_R(D, A) = \frac{g(D, A)}{H(A)}。$$

其中  $H(A) = \sum_{i=1}^{K} p_i \ln p_i$ , K是特征A能取不同值得数目,  $p_i$ 是取不同值得概率。

## 模型的剪枝

为什么需要剪枝:提高泛化能力,

我们可以一步步的细分节点而使得系统的分类误差很小,但是这只是训练数据集上的结果,当我们把模型运用到测试集时,误差率会很高,这是因为模型过拟合你,我们通过对决策树进行剪枝来提高模型的泛化能力。

为了进行剪枝,我们得定义剪枝的标准,也就是定义损失函数,损失函数至少要包括两项,一个是模型在训练集上的误差,一个是模型的复杂程度。模型的复杂程度可以定义成与叶子节点正相关。模型在训练集上的误差率可以如下定义。

$$C(T) = \sum_{t=1}^{t=|T|} N_t H_t$$

其中 $N_t$ 是叶子节点t上的样本点数目,  $H_t$ 是叶子节点t的熵。

叶子节点的熵定义为:

$$H_t = -\sum_{k=1}^{k=K} \frac{N_{tk}}{N_t} \ln \frac{N_{tk}}{N_t},$$

其中 $k \in (1, 2, \dots, K)$ 是样本结果可以取不同值的数目,也就是标签有K类 $N_t$ 是叶子节点t的样本数目,  $N_{tk}$ 是叶子节点t中标签属于k类的数目。总体而言,  $C(T)$ 刻画的是模型在训练集上的误差。结合这两部分,我们可以定义剪枝的损失函数:

$$C_\alpha(T) = C(T) + \alpha|T|$$

其中正数 $\alpha$ 用来权衡模型的误差率与模型的复杂度。

输入:计算生成的整个树T, 参数 $\alpha$

输出:修剪后的子树 $T_\alpha$

(1)计算每个节点的经验熵

(2)递归地从树的叶节点向上回溯

设一组叶节点回溯到父节点之前与之后的整个树为 $T_B, T_A$ ,对应的损失函数值分别为 $C_\alpha(T_B)$ 和 $C_\alpha(T_A)$ ,如果:

$$C_\alpha(T_A) \leq C_\alpha(T_B)$$

则进行剪枝,将父节点变成新的叶节点。

(3)返回(2),直到不能继续为止,得到损失函数最小的子树 $T_\alpha$

## 局部加权平均

$$L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_i w_i (\hat{y}_i - y_i)^2$$

其中: $w_i = \exp\left(\frac{x_i - \bar{x}}{2\sigma^2}\right)$

## CART

决策树的生成就是递归的构建二叉决策树的过程。对回归树用平方误差最小的准则,对分类树用基尼指数最小化准则,进行特征选择,生成二叉树。

CART包含分类树与回归树,下面分别来讨论分类树与回归树

### 回归树的生成

假设X和Y分别为输入与输出变量,并且Y是连续变量,给定训练数据集

$$D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)).$$

假设已将输入空间划分为M个单元 $R_1, R_2, \dots, R_M$ ,并且每个单元 $R_m$ 上有一个固定的输出值 $c_m$ ,于是回归树模型可以表示为:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=M} c_m I(x \in R_m)$$

当输入空间的划分确定时,可以用平方误差

$$\sum_{x_i \in R_m} (y_i - f(x_i))^2$$

来表示回归树对于训练数据的预测误差,用平方误差最小的准则来求解每个单元上的最优输出值。

可以求得

$$\hat{c}_m = ave(y_i | x_i \in R_m).$$

问题是,怎么对输入的空间进行划分?

回归树可以处理离散特征与连续特征,对于连续特征,若这里按第j个特征的取值s进行划分,切分后的两个区域分别为:

$$R_1(j, s) = (x_i | x_i^j \leq s)$$

$$R_2(j, s) = (x_i | x_i^j > s)$$

若为离散特征,则找到第j个特征下的取值s:

$$R_1(j, s) = \{x_i | x_i^j = s\}$$

$$R_2(j, s) = \{x_i | x_i^j \neq s\}$$

分别计算 $R_1, R_2$ 的类别估计 $c_1, c_2$ ,然后计算按照(j,s)切分后的损失:

$$\min_{j,s} [\sum_{x_i \in R_1} (y_i - c_1)^2 + \sum_{x_i \in R_2} (y_i - c_2)^2],$$

找到是的损失最小的(j,s)对即可, 也就是说找到最优特征 $j^*$ , 并找到最优特征的分割值 $s^*$ 。递归执行(j,s)的选择过程, 知道满足停止条件为止。递归的意思是, 对分割出的两个区域 $R_1, R_2$ 分别进行如上的步骤, 再分割下去。

总结:

回归树算法:

输入:训练集  $D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$ .

输出:回归树T

1.求解选择的切分特征j与切分特征取值s, j将训练集D划分成两部分,  $R_1, R_2$ ,

$$R_1(j, s) = \{x_i | x_i^j \leq s\}$$

$$R_2(j, s) = \{x_i | x_i^j > s\}$$

其中:

$$c_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{x_i \in R_1} y_i$$

$$c_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{x_i \in R_2} y_i$$

2.遍历所有的可能解(j,s), 找到最优的( $j^*, s^*$ ), 最优解使得如下损失函数最小,

$$\min_{j,s} [\sum_{x_i \in R_1} (y_i - c_1)^2 + \sum_{x_i \in R_2} (y_i - c_2)^2]$$

按照最优特征( $j^*, s^*$ )来切分即可

3.递归调用1., 2.步骤, 直到满足停止条件

4.将输入空间划分为M个区域 $R_1, R_2, \dots, R_M$ , 返回决策树T

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=M} c_m I(x \in R_m)$$

回归树采用了分治策略, 对于无法用唯一的全局线性回归来优化的目标进行分而治之, 进而可以取得比较准确的结果, 但分段取均值并不是一明智的选择, 可以考虑将叶节点设置为一个线性函数, 这就是所谓的分段线性树模型。

## 分类树

分类树是CART中用来分类的, 不同于ID3与C4.5, 分类树采用基尼系数来选择最优的切分特征, 而且每次都是二分。

输入:训练集  $D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$ .

输出:回归树T

1)利用特征A的取值a将数据分为两部分, 计算A=a时的基尼系数

$$Gini(D, A) = \frac{|D_1|}{D} Gini(D_1) + \frac{|D_2|}{D} Gini(D_2) \text{ 其中}$$

$$D_1(A, a) = \{x_i | x_i^A = a\}$$

$$D_2(A, a) = \{x_i | x_i^A \neq a\}$$

2)对整个数据集中所有的可能特征A以及其可能取值a选取基尼系数最小的特征 $A^*$ 与特征下的取值 $a^*$ , 来将数据集切分, 将数据集 $D_1, D_2$ 分到两个子节点中去。

3.对子节点( $D_1, D_2$ )递归调用1., 2.步骤, 直到满足停止条件

4.返回CART分类树T

## CART的剪枝<sup>1</sup>

剪枝基于如下的损失函数

$$C_\alpha(T) = C(T) + \alpha|T|$$

其中T为任意子树,  $|T|$ 为子树的叶子结点个数,  $C(T)$ 为对训练数据的预测误差(如基尼系数), 正数 $\alpha$ 用来权衡模型的误差率与模型的复杂度。

对于固定的 $\alpha$ , 存在唯一的最有子树 $C_\alpha(T)$ .

Breiman等人证明, 可以用递归的方法对树进行剪枝, 将 $\alpha$ 从0开始增大,  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ , 得到一系列最优子树系列  $(T_0, T_1, T_n)$ , 序列中的子树是嵌套的(?)。

具体的，从整棵树 $T_0$ 开始剪枝，对 $T_0$ 的任意内部节点 $t$ ，以 $t$ 为单节点树的损失函数是(也就是把 $t$ 下面的所有节点减掉之后的损失函数)：

$$C_\alpha(t) = C(t) + \alpha$$

以 $t$ 为根结点的字数 $T_t$ 的损失函数是(不进行剪枝时的损失函数)：

$$C_\alpha(T_t) = C(T_t) + \alpha|T_t|$$

当 $\alpha$ 小于某个值时，不剪枝会使得整体的损失函数较小，也就是：

$$C_\alpha(T_t) < C_\alpha(t)$$

当 $\alpha$ 增大时，在某一 $\alpha$ 有：

$$C_\alpha(T_t) = C_\alpha(t)$$

当 $\alpha$ 再增大时，不等式反向，只要 $\alpha = \frac{C(t) - C(T_t)}{|T_t| - 1}$ ， $T_t$ 与 $t$ 有相同的损失函数。

为此，对 $T_0$ 中每一个内部节点 $t$ ，计算：

$$g(t) = \frac{C(t) - C(T_t)}{|T_t| - 1}$$

它表示剪枝之后整体损失函数减小的程度，在 $T_0$ 中减去 $g(t)$ 最小的 $T_t$ ，将得到的子树作为 $T_1$ ，同时将最小的 $g(t)$ 设为 $\alpha_1$ ， $T_1$ 为区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 的最优子树。

如此剪枝下去，在这一过程中，不断的增加 $\alpha$ 的取值，产生新的区间，最终会的到一组决策树 $(T_0, T_1, T_n)$ ，对应于椅子确定的权衡参数 $(a_0, a_1, a_n)$ 。

通过验证集合中每棵树的总体误差，也就得到了最终的最优决策树 $T^*$ 。

$T$ 是整颗决策树吗？

## CART剪枝算法：

输入：CART算法生成的决策树 $T_0$

输出：最优决策树 $T_\alpha$

(1) 设 $k=0, T=T_0$

(2) 设 $\alpha = +\infty$

(3) 自下而上地对各内部结点 $t$ 计算 $C(T_t), |T_t|$ 以及：

$$g(t) = \frac{C(t) - C(T_t)}{|T_t| - 1}$$
$$\alpha = \min(\alpha, g(t))$$

这里， $T_t$ 表示以 $t$ 为根结点的子树， $C(T_t)$ 是对训练数据的预测误差， $|T_t|$ 是 $T_t$ 的叶节点个数。

(4) 自上而下地访问内部结点 $t$ ，如果有 $g(t) = \alpha$ ，进行剪枝，并对叶节点 $t$ 以多数表决法决定其类，得到树 $T$ 。

(5) 设 $k=k+1, \alpha_k = \alpha, T_k = T$

(6) 如果 $T$ 不是由根结点单独生成的树，则返回步骤(4)

(7) 采用交叉验证法在子树序列 $T_0, T_1, \dots, T_n$ 中选取最优子树 $T_\alpha$ 。

## CART总结

CART(classification and regression tree)即分类回归树，意思是它既可以用来做分类又可以用来做回归。

对分类问题，我们基于基尼系数构造分类树，其做法与ID3, C4.5一致。

对于回归问题，我们基于平方误差最小，构造回归树。构造就是，基于一个特征(输入样本的一个维度)，选择最佳的切分点，把当前数据集分成两部分，分别求两部分输出值的质心(平均值)，再求两部分中的每一部分的输出值到该区域质心的平方误差，对平方误差求和，选择最佳切分点，使得这两部分的误差和最小，这就是该特征的最佳切分点，再在该数据集中的所有特征中这个误差，找到最佳的切分特征，最后得到最佳特征以及最佳特征的切分点。基于这两个值，把数据集分成两部分，再对这两部分分别进行如上的操作(求最佳特征与该特征下的最佳切分点)

<sup>1</sup> [决策树之 CART](#) ↵

# 集成学习

集成学习就是组合一系列的弱分类器生成强分类器。组合的弱分类器之间的关系有两种：

一种是彼此间相互依赖，一系列学习器之间需要串行生成，代表算法是Boosting系列算法，代表算法是AdaBoost与GBDT。

一种是学习器彼此间无关联，一些列算法可以并行的生成，代表算法是Bagging(Bootstrap Aggregating)和随机森林(Random Forest)系列。随机森林是时Bagging的进行版，随机表现在两个方面，一方面是取样本点是随机的，另一方面，选择特征也是随机的（比如总共有N个特征，随机选取小于N的K个特征）

还有一种是两者的结合物：stacking

## PAC, 弱可学习, 强可学习

PAC(Probably approximately correct)

强可学习：如果存在一个多项式的学习算法学习呀，学习的正确率很高

弱可学习：如果存在一个多项式的学习算法学习呀，学习的正确率仅比随机猜测略好

在PAC学习框架下，一个概念是强可学习的充分必要条件是这个概念是弱可学习的。

## 集成学习的理论基础

我们考虑多个不相干分类器叠加处理二分类的问题， $y \in (-1, +1)$  和真实的函数  $f$ ，假设基分类器的错误率都是  $\epsilon$ ，即对每个分类器都有

$$P(h_i(x) \neq f(x)) = \epsilon$$

假设集成通过简单的投票表决结合  $T$  个基分类器，若半数的基分类器正确，则集成分类正确。

$$H(x) = \text{sign}(\sum_{i=1}^T h_i(x))$$

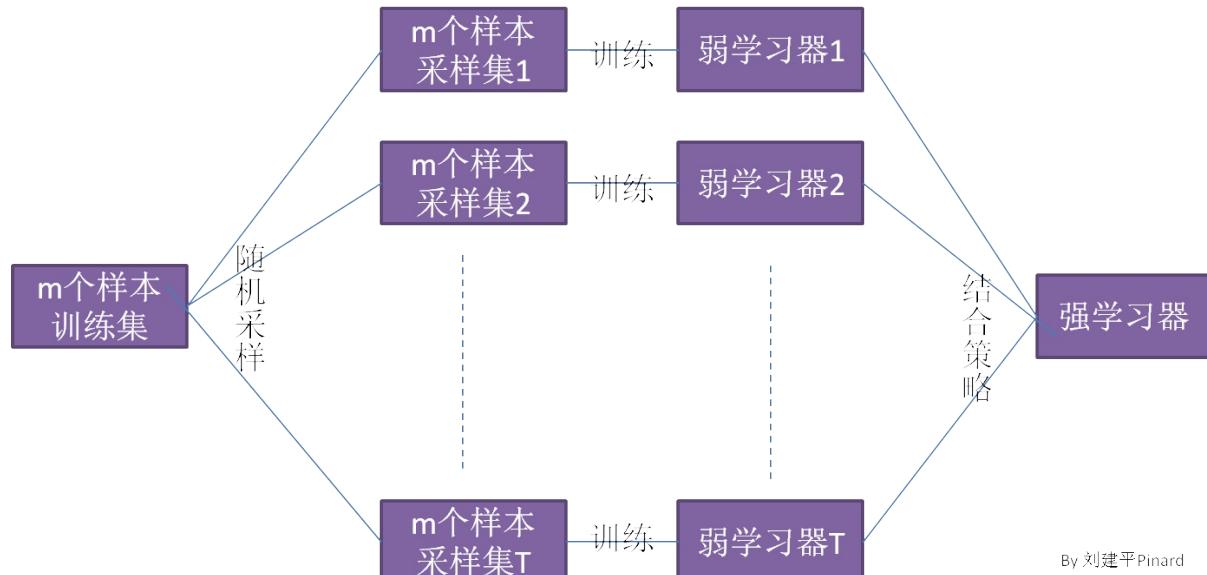
价格基分类器之间的错误率是相互独立的，则由Hoeffding不等式可知，集成的错误率为：

$$P(H(x) \neq f(x)) = \sum_{i=0}^{[T/2]} \binom{T}{k} (1 - \epsilon)^k \epsilon^{T-k} \leq \exp\left(-\frac{1}{2} T (1 - 2\epsilon)^2\right)$$

上式表明，随着集成中个体分类器数目  $T$  的增大，集成的错误率将指数下降，最终趋向于 0。

# Bagging

Bagging系列方法的原理图如下：



Bagging的本质思想是平均一个个多noisy(variance大)但是近似无偏的模型,因此可以减少variance。树是bagging理想的候选者,因为他们能抓住数据中复杂的相互作用结构。在大多数问题中,boosting相对于bagging有压倒性优势,成为更好的选择。

Boosting通过弱学习者的时间演化,成员投一个带权重的票。

$$\text{Regression: } \hat{f}_{rf}^B(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b(x)$$

因为从bagging中生成的树是id(identically distributed),B颗树的期望与单棵树的期望一样,如果输出之间是IID(independent identically distributed),每棵树的variance是 $\sigma^2$ ,则B颗树的variance是 $\frac{\sigma^2}{B}$ ,假设树之间的关联系数是c,则B颗树的variance是:

$$c\sigma^2 + \frac{1-c}{B}\sigma^2$$

如果c=1,就回到iid情况,如果c ≠ 0,则上面的第一项不会随着B增大而减小,只有第二项会随着B增大而减小,因此我们要尽量使得树之间的关联系数c趋于0.这可以通过随机化来实现,对样本和对特征这两方面随机化。

问题:怎么构造具有负关联系数的系统?  $\hat{f}_{bag}(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^*(x)$

当B趋于无穷时,上述表达式就是bagging估计的一个Monte Carlo估计。

## Random Forest

随机森林的两个随机:

1. 随机挑选一部分训练样本。
2. 随机挑选一部分特征。

这样保证每颗子树尽量是不相关的。因此误差也是不相关的,就可以通过多个模型平均来减小整个模型的误差。

参数推荐:

对于分类问题,默认m是 $\sqrt{p}$ ,最小的节点数是1.

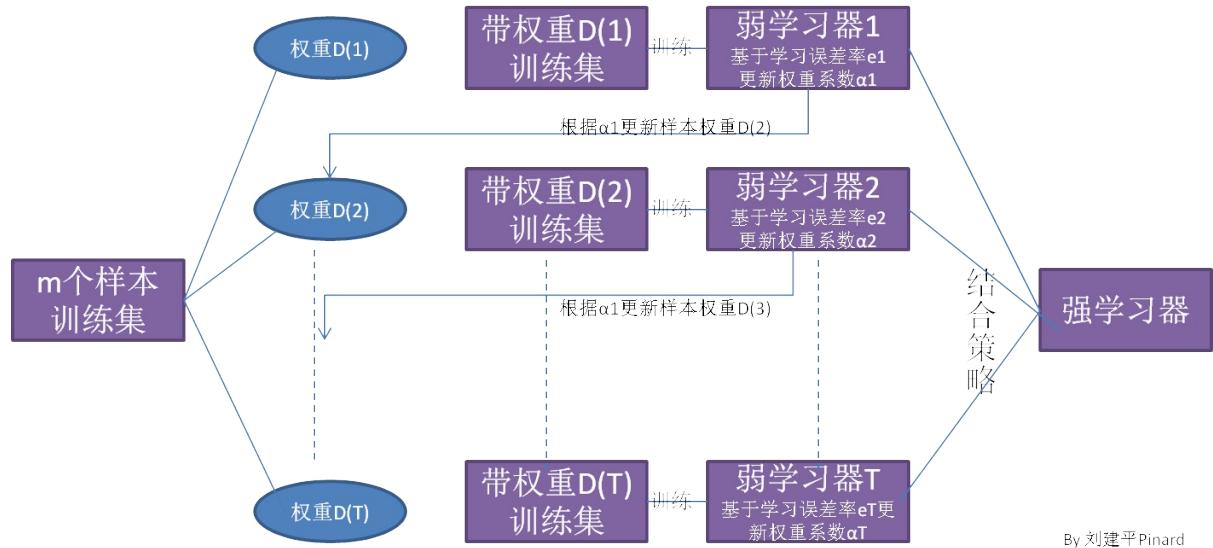
对于回归问题,默认的m是 $p/3$ ,最小的节点尺寸是5.

OOB:out of box, bagging中有 $(1 - \frac{1}{N})^N = 1/e$ 的样本没有被选中,可以用来做验证,因此不需要交叉验证。当OOB误差稳定后,训练也就可结束。

## Kernel random forest

# Boosting

Boosting系列方法的原理图如下：



By 刘建平Pinard

## AdaBoost

Boosting系列算法的代表就是AdaBoost。

算法如下：

输入：训练数据集  $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$ , 其中  $x_i \in X \subseteq R^n, y \in (-1, +1)$

输出：最终的分类器  $G(x)$

(1) 初始化训练数据集的权值分布

$$D_1 = (w_{11}, \dots, w_{1i}, \dots, w_{1N}),$$

$$w_{1i} = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \dots, N$$

(2) 对  $m=1, 2, \dots, M$

使用具有权值分布  $D_m$  的训练数据集进行训练，得到基分类器

$$G_m(x) : \chi \in (-1, +1)$$

(b) 计算  $G_m(x)G_m(x)$  在训练集上的分类误差率：

$$e_m = P(G_m(x_i) \neq y_i) = \sum_{i=1}^N w_{mi} I(G_m(x_i) \neq y_i)$$

(c) 计算  $G_m(x)$  的系数

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \log \frac{1-e_m}{e_m}$$

这里用的是自然对数。

(d) 更新训练数据集的权值分布：

$$D_1 = (w_{m+1,1}, \dots, w_{m+1,i}, \dots, w_{m+1,N}),$$

$$w_{m+1,i} = \frac{w_{mi}}{Z_m} \exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i)), i = 1, 2, \dots, N$$

这里， $Z_m$  是归一化因子：

$$Z_m = \sum_{i=1}^N w_{mi} \exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i))$$

它使  $D_{m+1}$  成为一个概率分布。

(3) 构建基本分类器的线性组合：

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_m G_m(x)$$

得到最终分类器

$$G(x) = \text{sign}(f(x)) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_m G_m(x)\right)$$

由 $\alpha_m$ 的定义可以知道, 第m个分类器的误差率越小, 则 $\alpha_m$ 的值越大, 因此第m个分类器在总的分类器中占的比重越大。因此, AdaBoost会加大那些准确率很高的分类器的权重。

同时, 在第m+1个分类器求解时, 对于上一轮被分错的样本的权值会变大。

不改变所给的训练数据, 而不断的改变训练数据权值的分布, 使得训练数据在基本分类器的学习中起不同的作用, 这是AdaBoost的一个特点。可以参考《统计机器学习》8.1节的例子来加深理解。

### AdaBoost算法的训练误差分析

**定理:(AdaBoost的训练误差界)**

AdaBoost 算法最终分类器的训练误差界为:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(G_m(x_i) \neq y_i) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-y_i f(x_i)) = \prod_m Z_m$$

**定理(二分类问题AdaBoost的训练误差界)**

$$\prod_m Z_m = \prod_{m=1}^M [2\sqrt{\frac{e_m(1-e_m)}{}}] = \prod_{m=1}^M \sqrt{1-4\gamma_m^2} \leq \exp(-2 \sum_{m=1}^M \gamma_m^2)$$

其中:  $\gamma_m = \frac{1}{2} - e_m$

## 梯度提升

提升树是以分类树或者回归树为基本分类器的提升方法, 提升树被认为是统计学习中性能最好的方法之一。

提升树实际采用加法模型(即基函数的线性组合)与前向分步算法。以决策树为基函数的提升方法称为提升树。对分类问题决策树是二叉分类树, 对回归问题决策树是二叉回归树。

决策树桩(decision stump): 可以看成是一个根节点直接连接两个叶节点的简单决策树。提升树模型可以表示为决策树的加法模型。

$$f_M(x) = \sum_{m=1}^M T(x; \Theta_m)$$

其中:  $T(x, \Theta_m)$ 表示决策树;  $\Theta_m$ 为决策树的参数; M为树的个数。

梯度提升算法:

提升树算法采用前向分步算法。首先缺点初始提升树 $f_0(x) = 0$ , 第m步的模型是:

$$f_m(x) = f_{m-1}(x) + T(x; \Theta_m)$$

其中,  $f_{m-1}(x)$ 为当前模型, 通过经验风险极小化来确定下一刻决策树的参数 $\Theta_m$

$$\hat{\Theta}_m = \operatorname{argmin}_{\Theta_m} \sum_{i=1}^N L(y_i, f_{m-1}(x_i) + T(x_i; \Theta_m)).$$

对于一个训练数据集  $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$ ,  $x_i \in \chi \in R^N$ ,  $\chi$ 为输入控件,  $y_i \in R$ , 为输出空间。如果将输入控件 $\chi$ 划分为J个互不相交的区域 $R_1, R_2, \dots, R_J$ , 并且在每个区域上确定输出的常量 $c_j$ , 那么树可以表示为:

$$T(x; \theta) = \sum_{j=1}^J c_j I(x \in R_j).$$

其中, 参数 $\Theta = ((R_1, c_1), (R_2, c_2), \dots, (R_J, c_J))$ 表示树的区域划分和各区域上的常数。J是回归树的发杂都, 即叶节点个数。

回归为题提升树使用以下前向分步算法:

$$f_0(x) = 0$$

$$f_m(x) = f_{m-1}(x) + T(x; \Theta_m), m = 1, 2, \dots, M$$

$$f_m(x) = \sum_{m=1}^M T(x; \Theta_m)$$

在前向分步算法的第m步, 给定当前模型 $f_{m-1}(x)$ , 需求解:

$$\hat{\Theta}_m = \operatorname{argmin}_{\Theta_m} \sum_{i=1}^N L(y_i, f_{m-1}(x_i) + T(x_i; \Theta_m)).$$

得到 $\hat{\Theta}_m$ , 即第m颗树的参数。

采用平方误差损失函数时:

$$L(y, f(x)) = (y - f(x))^2$$

其损失变成:

$$L(y, f_{m-1}(x) + T(x; \Theta_m)) = (y - f_{m-1}(x) - T(x; \Theta_m))^2 = [r - T(x; \Theta_m)]^2$$

这里,

$$r = y - f_{m-1}(x)$$

是当前模型拟合数据的残差。所以, 对回归问题的提升树算法来说, 只需要简单地你和当前模型的残差。

## GBDT

当损失函数是平方损失和指数损失函数时，每一步优化是很简单的，但是对于一般损失函数而言，往往每一步优化不容易。针对这一问题，Freidman提出了梯度提升(gradient boosting)算法，这是利用最速下降法的近似方法，其关键是利用损失函数的负梯度在当前模型的值。

$$-\left[\frac{\partial L(y, f(x_i))}{\partial f(x_i)}\right]_{f(x)=f_{m-1}(x)}$$

作为回归问题提升算法中的残差的近似值，拟合一个回归树。

梯度提升树算法

输入：训练数据集  $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$ ,  $x_i \in \chi \in R^N$ ,  $\chi$  为输入,  $y_i \in R$ . 损失函数为  $L(y, f(x))$ :

输出：回归树  $\hat{f}(x)$ .

(1) 初始化

$$f_0(x) = \operatorname{argmin}_c \sum_{i=1}^N L(y_i, c).$$

(2) 对  $m=1, 2, \dots, M$

(a) 对  $i=1, 2, \dots, N$ , 计算

$$r_{mi} = -\left[\frac{\partial L(y, f(x_i))}{\partial f(x_i)}\right]_{f(x)=f_{m-1}(x)}$$

(b) 对  $r_{mi}$  拟合一个回归树，得到第  $m$  课树叶节点区域  $R_{mj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$

(c) 对  $j=1, 2, \dots, J$ , 计算

$$c_{mj} = \operatorname{argmin}_c \sum_{x_i \in R_{mj}} L(y_i, f_{m-1}(x_i) + c).$$

$$(d) \text{更新 } f_m(x) = f_{m-1}(x) + \sum_{j=1}^J c_{mj} I(x \in R_{mj}), m = 1, 2, \dots, M$$

(3) 得到回归树

$$\hat{f}(x) = f_M(x) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J c_{mj} I(x \in R_{mj})$$

函数空间的数值优化：

## XGBoost<sup>1</sup>

模型复杂度惩罚是XGBoost相对于MART的提升。

$$= \sum_{m=1}^M [\gamma T_m + \frac{1}{2} \lambda ||w_m||_2^2 + \alpha ||w_m||_1]$$

MART includes row subsampling, while XGBoost includes both row and column subsampling

Newton boosting

Input: Data set D, A loss function L, A base learner  $L_\Phi$ , the number of iterations M. The learning rate  $\eta$

1. Initialize  $\hat{f}^{(0)}(x) = \hat{f}_{(0)}(x) = \hat{\theta}_0 = \operatorname{argmin}_\theta \sum_{i=1}^n L(y_i, \theta)$ ;

2. for  $m = 1, 2, \dots, M$  do

3.  $\hat{g}_m(x_i) = \left[\frac{\partial L(y, f(x_i))}{\partial f(x_i)}\right]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$

4.  $\hat{h}_m(x_i) = \left[\frac{\partial^2 L(y, f(x_i))}{\partial f(x_i)^2}\right]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$

5.  $\hat{\phi}_m = \operatorname{argmin}_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) [(-\frac{\hat{g}_m(x_i)}{\hat{h}_m(x_i)}) - \phi(x_i)]^2$

6.  $\hat{f}_m(x) = \eta \hat{\phi}_m(x)$ ;

7.  $\hat{f}^m(x) = \hat{f}^{(m-1)}(x) + \hat{f}_m(x)$ ;

8. end

Output:  $\hat{f}(x) = \hat{g}^{(M)}(x) = \sum_{m=1}^M \hat{f}_m(x)$

对于没有惩罚项的Newton tree boosting(NTB)，每一次迭代都最小化如下损失函数：

$$J_m(\phi_m) = \sum_{i=1}^n L(y_i, \hat{f}^{(m-1)}(x_i) + \phi_m(x_i))$$

对于梯度提升算法，基函数是如下的树：

$$\phi_m(x) = \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm})$$

这里的  $T$  是第  $m$  颗树叶节点的个数,  $w_{jm}$  是第  $m$  颗树中第  $j$  个树叶节点的权重。

对上式进行二阶泰勒展开，并忽略掉常数项可以得到：

$$J_m(\phi_m) = \sum_{i=1}^n [\hat{g}_m(x_i)\phi_m(x_i) + \frac{1}{2}\hat{h}_m(x_i)\phi_m(x_i)^2]$$

代入：

$$\begin{aligned}\phi_m(x) &= \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}) \\ J_m(\phi_m) &= \sum_{i=1}^n [\hat{g}_m(x_i) \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}) + \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) (\sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}))^2]\end{aligned}$$

由于每个样本点只能属于一个叶子节点，因此：

$$I(x \in R_{jm})I(x \in R_{im}) = \delta_{ij}$$

因此上面可以简化成：

$$\begin{aligned}J_m(\phi_m) &= \sum_{i=1}^n [\hat{g}_m(x_i) \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}) + \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) \sum_{j=1}^T w_{jm}^2 I(x \in R_{jm})] \\ &= \sum_{j=1}^T \sum_{i \in I_{jm}} [\hat{g}_m(x_i) w_{jm} + \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) w_{jm}^2]\end{aligned}$$

定义：

$$G_{jm} = \sum_{i \in I_{jm}} \hat{g}_m(x_i)$$

$$H_{jm} = \sum_{i \in I_{jm}} \hat{h}_m(x_i)$$

因此，可以把cost function写成：

$$\begin{aligned}J_m(\phi_m) &= \sum_{j=1}^T [G_{jm} w_{jm} + \frac{1}{2} H_{jm} w_{jm}^2] \\ &\geq - \sum_{j=1}^T \frac{1}{2} \frac{G_{jm}^2}{H_{jm}}\end{aligned}$$

成立条件是：

$$w_{jm} = -\frac{G_{jm}}{H_{jm}}, j = 1, 2, \dots, T$$

为了寻找最佳分裂点j，也就是最大化如下的Gain：

$$Gain = \frac{1}{2} \left[ \frac{G_L^2}{H_L} + \frac{G_R^2}{H_R} - \frac{G_{jm}^2}{H_{jm}} \right]$$

总结起来：Newton tree boosting算法如下：

Input: Data set D, A loss function L, A base learner  $L_\Phi$ , the number of iterations M. The learning rate  $\eta$

1. Initialize  $\hat{f}^{(0)}(x) = \hat{f}_{(0)}(x) = \hat{\theta}_0 = \operatorname{argmin}_\theta \sum_{i=1}^n L(y_i, \theta);$
2. for m = 1, 2, ..., M do
  3.  $\hat{g}_m(x_i) = [\frac{\partial L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)}]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$
  4.  $\hat{h}_m(x_i) = [\frac{\partial^2 L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)^2}]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$
  5. Determine the structure  $\hat{R}_{jm}, j = 1, \dots, T$  by selecting splits which maximize
 
$$Gain = \frac{1}{2} \left[ \frac{G_L^2}{H_L} + \frac{G_R^2}{H_R} - \frac{G_{jm}^2}{H_{jm}} \right]$$
  6. Determine the leaf weights  $w_{jm}, j = 1, \dots, T$  for the learnt structure by
 
$$\hat{w}_{jm} = -\frac{G_{jm}}{H_{jm}}, j = 1, 2, \dots, T$$
7.  $\hat{f}_m(x) = \eta \sum_{j=1}^T \hat{w}_{jm} I(x \in \hat{R}_{jm});$
8.  $\hat{f}^{(m)}(x) = \hat{f}^{(m-1)}(x) + \hat{f}_m(x);$
9. end

$$\text{Output: } \hat{f}(x) = \hat{g}^{(M)}(x) = \sum_{m=1}^M \hat{f}_m(x)$$

## 生成算法

1. 贝叶斯方法
2. HMM
3. DMM-HMM混合系统

# 贝叶斯方法

## 贝叶斯公式

首先我们讨论贝叶斯公式，以及先验分布于后验分布<sup>1</sup>。

$$p(\theta|\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{X})}$$

其中： $p(\theta)$ 是先验分布， $p(\mathbf{X}|\theta)$ 是似然值， $p(\theta|\mathbf{X})$ 是后验分布。在贝叶斯体系中，模型参数 $\theta$ 不再认为是固定不变的量，而是服从一定分布的随机变量。在没有数据支持的情况下，我们对其有一个假设性的分布 $p(\theta)$ ，这个分布称为先验分布，而在观测到数据集 $X = [x_1, \dots, x_n]$ 以后，根据数据集上表现出来的似然值 $p(\mathbf{X}|\theta)$ ，可以得到调整后的后验分布 $p(\theta|\mathbf{X})$ 。

概率统计模型有两个常见的任务：一是参数估计，二是预测，也就是在给定一组训练数据 $\mathbf{X}$ ，评估某新的观测数据 $\mathbf{o}$ 的概率。

## 若干常见模型估计方法

模型估计方法	参数估计	预测
最大似然估计	$\hat{\theta}_X^{ML} = \arg \min_{\theta} p(\mathbf{X} \theta)$	$p(o \mathbf{X}) = p(o \hat{\theta}_X^{ML})$
贝叶斯方法	$p(\theta \mathbf{X}) = p(\mathbf{X} \theta)p(\theta)$	$p(o \mathbf{X}) = \int p(o \theta)p(\theta \mathbf{X})d\theta$
最大后验概率方法	$\hat{\theta}_X^{MAP} = \arg \min_{\theta} p(\mathbf{X} \theta)$	$p(o \mathbf{X}) = p(o \hat{\theta}_X^{MAP})$

## 朴素贝叶斯

朴素贝叶斯是基于特征条件独立假设。输入变量中所有特征之间是独立的因此，联合条件概率是各个条件概率的乘积。

输入： $X \in R^n$

输出： $Y \in (1, 2, \dots, K)$

条件概率： $P(X = x|Y = C_k) = P(X^{(1)} = x^{(1)}, X^{(2)} = x^{(2)}, \dots, X^{(n)} = x^{(n)}|Y = C_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, K$

### 条件独立假设：

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= P(X = x|Y = C_k) = P(X^{(1)} = x^{(1)}, X^{(2)} = x^{(2)}, \dots, X^{(n)} = x^{(n)}|Y = C_k) \\ &= \prod_{j=1}^n P(X^{(j)} = x^{(j)}|Y = C_k) \end{aligned}$$

在上面的公式中，先验概率计算如下：

$$P(Y = C_k) = \frac{\sum_{i=1}^N I(y_i=c_k)}{N}, k = 1, 2, \dots, K$$

### 条件概率计算

假设第j个特征 $x^{(j)}$ 的可能取值集合是 $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{js_j})$ ，条件概率计算如下：

$$P(X^{(j)} = a_{jl}|Y = C_k) = \frac{\sum_{i=1}^N I(x_i^{(j)} = a_{jl}, y_i = c_k)}{\sum_{i=1}^N I(y_i = c_k)}$$

$$j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, S_j; k = 1, 2, \dots, K$$

### 后验概率计算

基于贝叶斯定理计算后验概率：

$$P(Y = C_k|X = x) = \frac{P(X=x|Y=C_k)P(Y=C_k)}{\sum_k P(X=x|Y=C_k)P(Y=C_k)}$$

把条件独立假设代入可以得到：

$$P(Y = C_k | X = x) = \frac{P(Y = C_k) \prod_{j=1}^n P(X^{(j)} = x^{(j)} | Y = C_k)}{\sum_k P(Y = C_k) \prod_{j=1}^n P(X^{(j)} = x^{(j)} | Y = C_k)}$$

因为分母对不同的类别k都是一样的，因此只需要求分子就可以了。计算不同的类别k对应的值，分类结果对应概率最大的。  
因此朴素贝叶斯可以表示为：

$$y = f(x) = \operatorname{argmax}_{c_k} P(Y = C_k) \prod_{j=1}^n P(X^{(j)} = x^{(j)} | Y = C_k)$$

## Laplace Smoothing

在实际计算条件概率的时候，或出现0的情况，这会影响后面的后验概率的计算。一般通过Laplace Smoothing来处理。

$$P(X^{(j)} = a_{jl} | Y = C_k) = \frac{\sum_{i=1}^N I(x_i^{(j)} = a_{jl}, y_i = c_k) + \lambda}{\sum_{i=1}^N I(y_i = c_k) + s_j \lambda}$$

$\lambda > 0, j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, S_j; k = 1, 2, \dots, K$

基本上到此，朴素贝叶斯的介绍也就完结了，朴素贝叶斯不需要计算任何参数，计算简单，缺点是分类性能不一定高。

## 极大似然估计

极大似然估计是试图在所有的模型参数可能取值中，找到一个能使得数据出现的可能性最大的值。

## 贝叶斯网络

|| 1. 《计算广告》刘鹏 p166 ↵

# 隐马尔科夫模型

## 定义

HMM类似于量子力学中的路径积分。马尔科夫模型是关于时序的概率模型，描述由一个隐藏的马尔科夫链生成不可观测的状态随机序列，再由各个状态生成一个观测而产生观测随机序列的过程。隐藏的马尔科夫链随机生成的状态的序列成为状态序列(state sequence);每个状态生成一个观测，而由次产生的观测的随机序列成为观测序列(observation sequence).序列的每一个位置又可以看成一个时刻。

马尔科夫模型由初始概率分布、状态转移概率分布以及观测概率分布确定。

设 $Q$ 是所有可能的状态集合， $V$ 是所有可能的观测的集合。

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_N), V = (v_1, v_2, \dots, v_M)$$

其中 $N$ 是可能的状态数， $M$ 是可能的观测数。

$I$ 是长度为 $T$ 的状态序列， $O$ 是对应的观测序列。

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_T), O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$$

$A$ 是状态转移矩阵：

$$A = [a_{ij}]_{N \times N}$$

其中：

$$a_{ij} = P(i_{t+1} = q_j | i_t = q_i), i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$$

是在 $t$ 时刻处于 $q_i$ 的条件下在时刻 $t+1$ 转移到 $q_j$ 的概率。

$B$ 是观察概率矩阵：

$$B = [b_j(k)]_{N \times M}$$

其中：

$$b_j(k) = P(o_t = v_k | i_t = q_j), k = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$$

是在时刻 $t$ 处于状态 $q_j$ 的条件下生成观测 $v_k$ 的概率。

$\pi$ 是初始状态概率向量：

$$\pi = (\pi_i)$$

其中：

$$\pi_i = P(i_1 = q_i), i = 1, 2, \dots, N$$

是在时刻 $t=1$ 处于状态 $q_i$ 的概率。

马尔科夫模型 $\lambda$ 可以用三元符号来表示：

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

$A, B, \pi$ 称为马尔科夫模型的三要素。

## 马尔科夫模型的两个假设：

(1)齐次马尔科夫假设。任一时刻只与前一时刻有关系

$$P(i_t | i_{t-1}, o_{t-1}, \dots, i_1, o_1) = P(i_t | i_{t-1}), t = 1, 2, \dots, T$$

(2)观测独立性假设：任一时刻的观测只依赖于该时刻的马尔科夫链的状态，而与其他观测以及状态没有关系。

$$P(o_t | i_T, o_T, \dots, i_{t+1}, o_{t+1}, i_t, i_{t-1}, o_{t-1}, i_1, o_1) = P(o_t | i_t)$$

## HMM的三个问题

1. 概率计算问题：给定模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ，和观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ ，计算在模型 $\lambda$ 下观测序列 $O$ 出现的概率 $P(O|\lambda)$ 。

2. 学习问题：已知观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ ，估计模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ，使得 $P(O|\lambda)$ 最大。即用极大似然法的方法估计参数。

3. 预测问题(也称为解码(decoding)问题)：已知观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ 和模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ，求给定观测序列条件概率 $P(I|O)$ 最大的序列

$I = (i_1, i_2, \dots, i_T)$ ，即给定观测序列，求最有可能的对应的状态序列。

## 概率计算问题

### 直接计算方法：

问题:给定模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ,和观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ ,计算在模型 $\lambda$ 下观测序列 $O$ 出现的概率 $P(O|\lambda)$ 。

对于状态序列 $I = (i_1, i_2, \dots, i_T)$ 的概率是:  $P(I|\lambda) = \pi_{i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{T-1} i_T}$ ,

对于上面这种状态序列,产生观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ 的概率是:

$$P(O|I, \lambda) = b_{i_1}(o_1) b_{i_2}(o_2) \dots b_{i_T}(o_T),$$

因此I和O的联合概率是:

$$P(O, I|\lambda) = P(O|I, \lambda) P(I|\lambda) = b_{i_1}(o_1) b_{i_2}(o_2) \dots b_{i_T}(o_T) \pi_{i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{T-1} i_T}$$

对所有可能的I求和,得到:

$$P(O|\lambda) = \sum_I P(O, I|\lambda)$$

直接计算,时间复杂度是 $O(TN^T)$ .为了降低计算的时间复杂度,引入了前向算法。

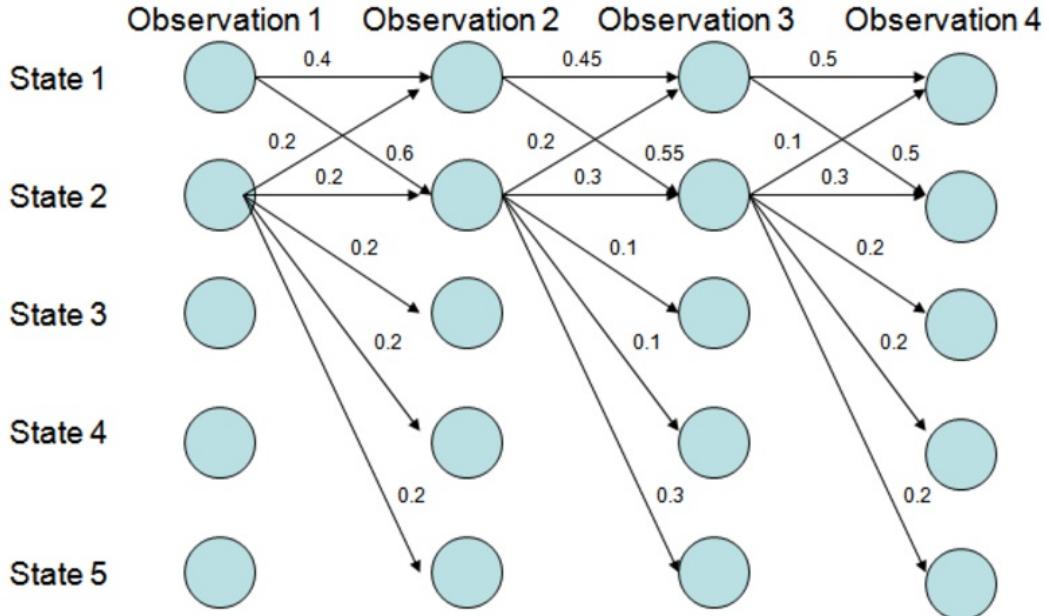
## 前向算法

给定模型 $\lambda$ ,定义到时刻t部分观测序列为 $O = o_1, o_2, \dots, o_t$ 且状态为 $q_i$ 的概率为前向概率。记作:

$$\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, \dots, o_t, i_t = q_i | \lambda)$$

有了前向概率就可以通过递归的方法来计算任何一个观测序列的概率。就如下图所示:

前向算法使用前向概率的概念,记录每个时间下的前向概率,使得在递推计算下一个前向概率时,只需要上一个时间点的所有前向概率即可。原理上也是用空间换时间。这样的时间复杂度是 $O(N^2 T)$ 。



上面就是状态数目为5,时间 $T=4$ 的图。一个问题是,前向算法是否可以转化为矩阵求解问题?

$$\alpha_t = (\alpha_t(1), \alpha_t(2), \dots, \alpha_t(N))^T$$

初始状态是 $\pi$ ,转移矩阵是 $A$ ,因此时刻t的概率分布是一个 $N \times M$ 的矩阵,也就是 $N$ 个状态,每个状态有 $M$ 个分立值,计算如下:问题是怎么降低运算复杂度? $N^T$ 的复杂度是 $O(N^{2.373} \log T)$

## 后向概率

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \dots, o_T | i_t = q_i, \lambda)$$

定义  $\beta_T(i) = 1, i = 1, 2, \dots, N$

对 $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$ 有:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\beta_t = A^{T-t} \prod_{j=t+1}^T xB[o_j], t = T-1, T-2, \dots, 1$$

$$\beta_t = (\beta_t(1), \beta_t(2), \dots, \beta_t(N))^T$$

## 一些概率与期望值

(1) 给定模型 $\lambda$ 以及观测 $O$ , 在时刻t处于状态 $q_i$ 的概率为:

$$\gamma_t(i) = P(i_t = q_i | O, \lambda) = \frac{P(i_t = q_i, O | \lambda)}{P(O | \lambda)}$$

因为  $\alpha_t(i)\beta_t(i) = P(i_t = q_i, O | \lambda)$

所以:  $\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t(i)\beta_t(i)}$

(2) 给定模型 $\lambda$ 以及观测 $O$ , 在时刻t处于状态 $q_i$ 且在t+1时刻处以 $q_j$ 的概率为:

$$\xi_t(i, j) = P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j | O, \lambda)$$

$$\xi_t(i, j) = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda)}{P(O | \lambda)} = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda)}$$

而:

$$P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda) = \alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)$$

所以:

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}$$

(3) 将 $\gamma_t(i), \xi_t(i, j)$ 对不同时刻t求和, 可以得到一些有用的期望:

(a) 在观测 $O$ 下状态i出现的期望值:

$$\sum_{i=1}^T \gamma_t(i)$$

(b) 在观测 $O$ 下由状态i转移的期望值:

$$\sum_{i=1}^{T-1} \gamma_t(i)$$

(c) 在观测 $O$ 下由状态i转移到状态j的期望值:

$$\sum_{i=1}^{T-1} \xi_t(i, j)$$

## 学习算法

### 监督学习方法

我们有观测序列和对应的状态序列 $[(O_1, I_1), (O_2, I_2), \dots, (O_S, I_S)]$

怎么可以通过统计方法来得到转移矩阵A, 观测概率B, 以及初始状态概率 $\pi$ 。

$$\hat{a}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}}, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$$

$$\hat{b}_j(k) = \frac{B_{jk}}{\sum_{k=1}^M B_{jk}}, j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, M$$

初始状态概率 $\pi_i$ 的估计值 $\hat{\pi}_i$ 为S个样本中初始状态为 $q_i$ 的频率。

人工标注的成本很高, 因此就会利用非监督学习的方法。

### Baum-Welch算法思想

假设给定训练数据只包含S个长度为T的观察序列 $(O_1, O_2, \dots, O_s)$ 而没有对应的状态序列, 目标是学习HMM模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ 的参数。我们将观测序列数据堪称观察数据O, 状态序列数据看作不可观测的隐数据I, 那么隐马尔科夫模型事实上是一个含有隐变量的概率模型:

$$P(O | \lambda) = \sum_I P(O | I, \lambda)P(I | \lambda)$$

他的参数学习可以由EM算法来实现。

#### 4. 确定完全数据的对数似然函数

所有观测数据写成  $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ , 所有隐数据写成  $I = (i_1, i_2, \dots, i_T)$ , 完成数据是  $(O, I) = (o_1, o_2, \dots, o_T, i_1, i_2, \dots, i_T)$ . 完全数据的对数似然函数是  $\log P(O, I | \lambda)$

#### 5. EM算法的E步, 求Q函数 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$

$$Q(\lambda, \hat{\lambda}) = E_I[\log P(O, I | \lambda) | O, \hat{\lambda}]$$

$$Q(\lambda, \hat{\lambda}) = \sum_I \log P(O, I | \lambda) P(O, I | \hat{\lambda})$$

其中,  $\hat{\lambda}$  是隐马尔科夫模型参数的当前估计值,  $\lambda$  是要极大化的马尔科夫模型参数。

$$P(O, I | \lambda) = \pi_{i1} b_{i1}(o_1) b_{i2}(o_2) \dots b_{iT}(o_T) \pi_{i1} a_{i1i2} a_{i2i3} \dots a_{iT-1iT}$$

于是函数  $Q(\lambda, \hat{\lambda})$  可以写成:

$$Q(\lambda, \hat{\lambda}) = \sum_I \log \pi_{i1} P(O, I | \hat{\lambda}) + \sum_I (\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{itit+1}) P(O, I | \hat{\lambda}) + \sum_I (\sum_{t=1}^{T-1} \log b_{it}(o_t)) P(O, I | \hat{\lambda})$$

式中求和都是对所有训练数据的序列总长度  $T$  进行的。

#### 6. EM算法的M步: 极大化Q函数 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 求模型参数 $A, B, \pi$ 。极大化, 满足梯度为0, 也就对 $A, B, \lambda$ 中的元素分别求导令其为0。

在  $Q(\lambda, \hat{\lambda})$  中的三项中, 分别只包含了  $\pi, a_{ij}, b_j(k)$ , 因此求解起来比较方便。此外, 我们还可以利用概率和为1的限定条件, 也就是利用拉格朗日乘子来进行计算。

对  $Q(\lambda, \hat{\lambda})$  的第一项, 我们求  $\lambda$ :

$$\sum_I \log \pi_{i1} P(O, I | \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \log \pi_i P(O, i_1 = i | \hat{\lambda})$$

因为  $\pi_i$  满足约束条件  $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ , 利用拉格朗日乘子, 写出拉格朗日函数:

$$\sum_{i=1}^N \log \pi_i P(O, i_1 = i | \hat{\lambda}) + \gamma (\sum_{i=1}^N \pi_i - 1)$$

对其进行偏导并令其为0:

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i} [\sum_{i=1}^N \log \pi_i P(O, i_1 = i | \hat{\lambda}) + \gamma (\sum_{i=1}^N \pi_i - 1)] = 0$$

得到:

$$P(O, i_1 = i | \hat{\lambda}) + \gamma \pi_i = 0$$

对  $i$  求和得到  $\gamma$ :

$$\gamma = -P(O | \hat{\lambda})$$

代入上上式, 得到:

$$\pi_i = \frac{P(O, i_1 = i | \hat{\lambda})}{P(O | \lambda)}$$

对  $Q(\lambda, \hat{\lambda})$  的第二项, 我们求  $a_{ij}$ :

$$\sum_I (\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{itit+1}) P(O, I | \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{T-N} \sum_{t=1}^{T-1} \log a_{ij} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j | \hat{\lambda})$$

利用约束条件  $\sum_{i=1}^N a_{ij} = 1$ , 利用拉格朗日乘子可以得到:

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j | \hat{\lambda})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i | \lambda)}$$

对  $Q(\lambda, \hat{\lambda})$  的第三项, 我们求  $b_j(k)$ :

$$\sum_I (\sum_{t=1}^{T-1} \log b_{it}(o_t)) P(O, I | \hat{\lambda}) = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T \log b_j(o_t) P(O, i_t = j | \hat{\lambda})$$

利用  $\sum_{k=1}^M b_j(k) = 1$ . 注意只有在  $o_t = v_k$  时,  $b_j(o_t)$  对  $b_j(k)$  的偏导数才不为0, 以  $I(o_t = v_k)$  表示, 求得:

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^T P(O, i_t = j | \hat{\lambda}) I(o_t = v_k)}{\sum_{t=1}^T P(O, i_t = j | \hat{\lambda})}$$

$\hat{\lambda}$  是当前  $(A, B, \pi)$  的估计值, 因此可以通过迭代, 得到  $(A, B, \pi)$  的收敛解。

### Baum-Welch算法

输入: 观测数据  $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ ;

输出: 隐马尔科夫模型的参数

(1) 初始化

对n=0,选取 $a_{ij}^{(0)}, b_j(k)^{(0)}, \pi_i^{(0)}$ 得到模型 $\lambda^{(0)} = (A^{(0)}, B^{(0)}, \pi^{(0)})$

(2).递推对n=1,2,..,

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i)}$$

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1, o_t=v_k}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}$$

$$\pi_i = \gamma_1(i)$$

右端的值按照观测 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ 和模型 $\lambda^{(n)} = (A^{(n)}, B^{(n)}, \pi^{(n)})$ ,以及式中 $\xi_t(i, j)$ 按照“一些概率与期望值”中定义进行计算。

(3)终止, 得到模型参数 $\lambda^{(n+1)} = (A^{(n+1)}, B^{(n+1)}, \pi^{(n+1)})$

## 预测算法

前面已经讨论了给定观测序列 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ 的概率计算问题以及通过观测序列学习模型参数问题, 还余下HMM三个问题中的给定观测下隐变量的预测问题。

前面, 我们在“一些概率与期望值”中通过前向概率和后向概率, 得到了当前模型参数以及观察序列下, 某一时刻隐变量的取值概率 $\xi_t(i)$ 。

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

计算每一时刻t最可能出现的状态i,然后得到最有可能出现的序列。这就是近似算法.

## 近似算法

$$i_t^* = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\gamma_t(i)], t = 1, 2, \dots, T$$

从而得到状态序列 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_T^*)$ 。近似算法简单, 但是会预测出一些实际上不发生的状态, 比如转移矩阵等于0的两个相邻状态。尽管如此, 近似算法还是有用的。

## 维特比算法思想

维特比算法是用动态规划解马尔科夫模型预测问题, 即用动态规划求概率最大路径(最优路径), 这时, 一条路径对应一个状态序列。

根据动态规划原理, 最优路径具有这样的特性:如果最优路径在时刻t通过节点*t*,那么这一路径从结点*t*到终点*T*的部分路径, 对于从*t*到*T*的所有可能部分路径来说, 必须是最优的。因为假如不是这样, 那么从*t*到*T*就有另外一条更好的部分路径存在, 如果他和从*t*到*T*的部分路径连接起来, 就会形成一条比原来的路径更优的路径, 这是矛盾的。

根据这一原理, 我们

首先定义两个变量 $\delta, \psi$ , 定义在时刻t状态为i的所有单个路径( $i_1, i_2, \dots, i_t$ )中概率最大值为:

$$\delta_t(i) = \max_{i_1, i_2, \dots, i_{t-1}} P(i_t = i, i_{t-1}, i_{t-2}, \dots, i_1, o_t, \dots, o_1 | \lambda), i = 1, 2, \dots, N$$

由定义可以得到变量 $\delta$ 的递推公式:

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}(i) &= \max_{i_1, i_2, \dots, i_t} P(i_{t+1} = i, i_{t-1}, i_{t-2}, \dots, i_1, o_{t+1}, \dots, o_1 | \lambda) \\ &= \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_t(j)a_{ji}]b_i(o_{t+1}), i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T-1 \end{aligned}$$

定义在时刻t状态i的所有单个路径( $i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i$ )中概率最大的路径的第t-1个节点为:

$$\psi_t(i) = \arg \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_{t-1}(j)a_{ji}], i = 1, 2, \dots, N$$

## 维特比算法步骤

输入: 模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ 和观测数据 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ ;

输出: 最优化路径 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_T^*)$ 。

(1). 初始化

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\psi_1(i) = 0, i = 1, 2, \dots, N$$

(2). 递推。对  $t=2,3,\dots,T$

$$\delta_{t+1}(i) = \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_t(j)a_{ji}]b_i(o_{t+1}), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\psi_t(i) = \arg \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_{t-1}(j)a_{ji}], i = 1, 2, \dots, N$$

(3). 终止

$$P^* = \max_{1 \leq j \leq N} \delta_T(i)$$

$$i_T^* = \arg \max_{1 \leq j \leq N} \delta_T(i)$$

(4) 最优路径回溯。对  $t=T-1, T-2, \dots, 1$

$$i_t^* = \psi_{t+1}(i_{t+1}^*)$$

求得最优路径  $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_T^*)$ .

## DNN-HMM混合系统

DNN-HMM混合系统利用DNN强大的表示学习能力以及HMM的序列化建模能力,他在大词汇连续语音识别任务中的表现远优于传统的(GMM-HMM).

## 图模型

主要涉及到隐马尔科夫模型(HMM),条件随机场(CRF),LDA(Latent Dirichlet Allocation)主题模型以及近似推断方法。

# 马尔科夫链蒙特卡洛方法

[参考这篇文章](#)

## 基本思想

对于一个给定的概率分布  $P(X)$ , 若要得到其样本, 通过上述的马尔科夫链的概念, 我们可以构造一个转移矩阵  $P$  的马尔科夫链, 使得该MC的平稳分布是  $P(X)$ , 这样, 无论初始状态是何值, 比如是  $x_0$ , 那么随着马尔科夫过程的转移, 得到了一系列的状态值, 如:  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ , 如果这个马尔科夫过程在第  $n$  步已经收敛, 那么分布  $P(X)$  的样本就是  $x_n, x_{n+1}, \dots$

## 细致平衡条件

假设一个各态便利的马尔科夫过程, 其转移矩阵是  $P$ , 分布是  $\pi(x)$ , 若满足:

$\pi(i)P_{i,j} = \pi(j)P_{j,i}$   
则  $\pi(x)$  是马尔科夫链的平稳分布, 上式称为细致平衡条件。

## Metropolis采样算法

### Metropolis采样算法的基本原理

假设需要从目标概率密度  $p(\theta)$  中进行采样, 同时,  $\theta$  满足  $-\infty < \theta < \infty$ . Metropolis采样算法根据马尔科夫链去生成一个序列:

$\theta^{(1)} \rightarrow \theta^{(2)} \rightarrow \dots \theta^{(t)} \rightarrow$

其中,  $\theta^{(t)}$  表示的是马尔科夫链在第  $t$  时刻的状态。

在 Metropolis 采样算法过程中, 首先初始化状态值  $\theta^{(1)}$ , 然后利用一个已知的分布  $q(\theta|\theta^{(t-1)})$  生成一个新的候选状态  $\theta^{(*)}$ , 随后根据一定的概率选择接受这个新值还是拒绝这个新值, 在 Metropolis 采样中, 概率为:

$$\alpha = \min\left(1, \frac{p(\theta^{(*)})}{p(\theta^{(t-1)})}\right)$$

这样的过程一直持续到采样过程的收敛, 当收敛以后, 样本  $\theta^{(t)}$  即为目标分布  $P(\theta)$  中的样本。

### Metropolis采样算法的流程

基于以上的分析, 可以总结出如下的 Metropolis 采样算法的流程

初始化时间  $t=1$

设置  $u$  的值, 并初始化初始状态  $\theta^{(t)} = u$

重复以下的过程:

令  $t=t+1$       从已知分布  $q(\theta|\theta^{(t-1)})$  中生成一个候选状态  $\theta^{(*)}$

计算接受的概率:  $\alpha = \min\left(1, \frac{p(\theta^{(*)})}{p(\theta^{(t-1)})}\right)$

从均匀分布 Uniform(0,1) 生成一个随机值  $a$ .      如果  $a < \alpha$ , 则接受新生成的值:  $\theta^{(t)} = \theta^{(*)}$ ; 否则  $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$  直到  $t=T$ .

### Metropolis采样算法的解释

要证明 Metropolis 采样算法的正确性, 最重要的是要证明构造的马尔科夫过程满足细致平衡条件, 即:

$$\pi(i)P_{i,j} = \pi(j)P_{j,i}$$

对于上面的过程, 分布为  $p(\theta)$ , 从状态  $i$  转移到状态  $j$  的转移概率为:

$$P_{i,j} = \alpha_{i,j}Q_{i,j}$$

其中,  $Q_{i,j}$  为上述已知分布, 且是对称的分布  $Q_{i,j} = Q_{j,i}$ 。即:

$q(\theta = \theta^{(t)} | \theta^{(t-1)}) = q(\theta = \theta^{(t-1)} | \theta^{(t)})$  接下来, 我们需要证明 Metropolis 采样算法中构造的马尔科夫链满足细致平衡条件:

$$\begin{aligned} p(\theta^{(t)} P_{i,j}) &= p(\theta^{(t)} \alpha_{i,j} Q_{i,j}) \\ &= p(\theta^{(t)} \min\left(1, \frac{p(\theta^{(j)})}{p(\theta^{(t)})}\right) Q_{i,j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min(p(\theta^{(i)} Q_{i,j}, p(\theta^{(j)} Q_{i,j}) \\
&= p(\theta^{(j)} \min(\frac{p(\theta^{(i)})}{p(\theta^{(j)})}, 1) Q_{j,i} \\
&= p(\theta^{(i)} \alpha_{i,j} Q_{i,j} \\
&= p(\theta^{(j)} P_{j,i}
\end{aligned}$$

因此，通过上面方法构造出来的马尔科夫链满足细致平衡条件。

## MCMC的使用场景

MCMC——Metropolis-Hastings算法

MCMC——Gibbs Sampling算法

# 特征工程

## 特征工程是什么

有这么一句话在业界广泛流传：数据和特征决定了机器学习的上限，而模型和算法只是逼近这个上限而已。那特征工程到底是什么呢？顾名思义，其本质是一项工程活动，目的是最大限度地从原始数据中提取特征以供算法和模型使用。通过总结和归纳，人们认为特征工程包括以下方面：

# 特征工程

## 特征选择方式

参考知乎上[这篇文章](#)

特征选择与特征提取是特征工程中的两大核心问题。特征选择是指选择获得相应模型和算法最好性能的特征集，工程上常用的方法如下：

1. 计算每一个特征与相应变量的相关性。一般是算皮尔逊系数和互信息系数。皮尔逊系数只能衡量线性相关性，互信息系数能够很好地度量各种相关性，但是计算相对复杂，很多toolkit里面包含了这个工具（如sklearn的MI），得到相关性之后就可以排序选择特征了。
2. 构建单个特征的模型，通过模型的准确性为特征排序，借此来选择特征。
3. 通过L1正则项来选择特征，L1正则方法具有稀疏解的特性，因此天然具备特征选择的特性。
4. 训练能够对特征打分的预选模型：RF和LR等都对模型的特征打分，通过打分获得相关性后再训练最终模型。
5. 通过特征组合后再来选择特征：如对用户ID和用户特征的组合来获得较大的特征集再来选择特征，这种做法在推荐系统和广告系统中比较常见，这也是所谓亿级甚至十亿集特征的主要来源，原因是用户数据比较稀疏，特征组合能同时兼顾全局模型和个性化模型。
6. 通过深度学习来进行特征选择/目前这种手段

总体而言，有两种方法：

基于方差的方法(PCA)，基于相关性方法。

1. 相关性：一般用皮尔逊相关系数来定义。
2. 方差法：去掉值变化不大的特征，因为可以把这些特征看成常数值，他们对分类或者回归结果影响不大。

## 特征选择

1. Filter方法：自变量与目标变量之间的关联
  - i. Pearson相关系数
  - ii. 卡方检测
  - iii. 信息增益，互信息(MIC)
2. Wrapper方法：通过目标函数来决定是否加入一个变量
  - i. 迭代：产生特征子集，评价
  - ii. 完全搜索
  - iii. 启发式搜索
  - iv. 随机搜索(GA, SA)
3. Embedded方法：学习器自身自动选择特征
  - i. 正则化L1, L2
  - ii. 决策树(熵-信息增益, 基尼系数)
  - iii. 深度学习

## Filter

### Pearson相关系数

Pearson相关系数(取值在[-1,1]之间，大于0是正相关，小于0是负相关，等于0就没有相关性。只对具有线性相关性的变量有效，不能处理具有非线性关系的两组变量)

### 互信息(MIC)

$$MIC : I(X, Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log\left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\right)$$

对于线性与非线性关系的数据都实用。

### 距离相关系数(Distance Correlation)

为了克服Pearson相关系数只对具有线性关系的变量起作用而引入。

样本： $(X_k, Y_k), k = 1, 2, \dots, n$

定义距离矩阵：

$$a_{j,k} = \|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k\|, j, k = 1, 2, \dots, n$$

$$b_{j,k} = \|\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k\|, j, k = 1, 2, \dots, n$$

$\|\cdot\|$ 是欧氏距离。取所有的双中心距离。

$$\mathbf{A}_{j,k} := a_{j,k} - \hat{a}_{j\cdot} - \hat{a}_{\cdot k} + \hat{a}_{\cdot\cdot}$$

$$\mathbf{B}_{j,k} := b_{j,k} - \hat{b}_{j..} - \hat{b}_{..k} + \hat{b}_{...}$$

$\hat{a}_{j..}$ 是j-th row的平均,  $\hat{a}_{..k}$ 是k-th column的平均,  $\hat{a}_{...}$ 是全局平均。

定义The squared sample distance covariance:

$$dCov_n^2(X, Y) := \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{jk}$$

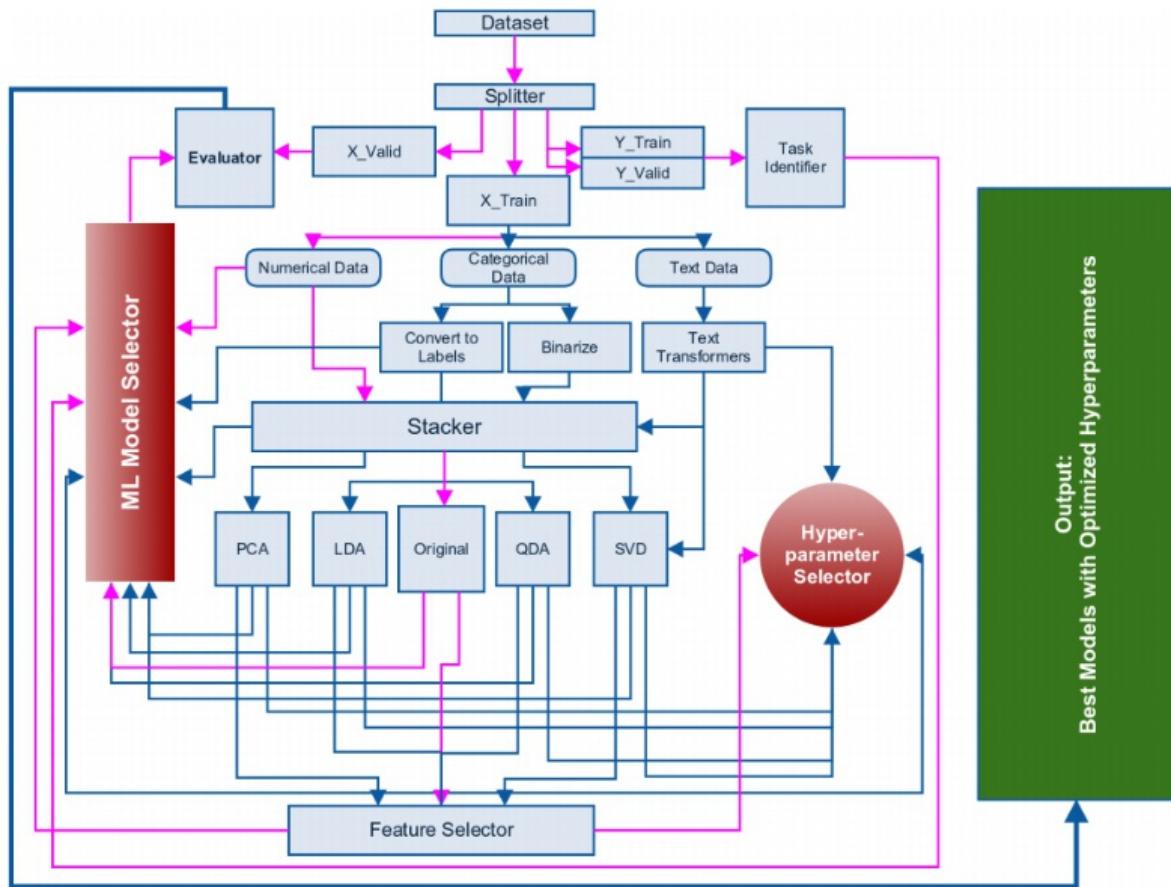
虽然MIC与距离相关系数能处理具有线性与非线性关系的变量之间的相关性,但是Pearson还是不可替代的,第一, Pearson系数计算速度快;第二,相对于其它两种取值在[0,1],Pearson取值[-1,1],正负表关系的正负,绝对值表示强度。前提就是两个变量是线性相关的。

## 特征工程小结

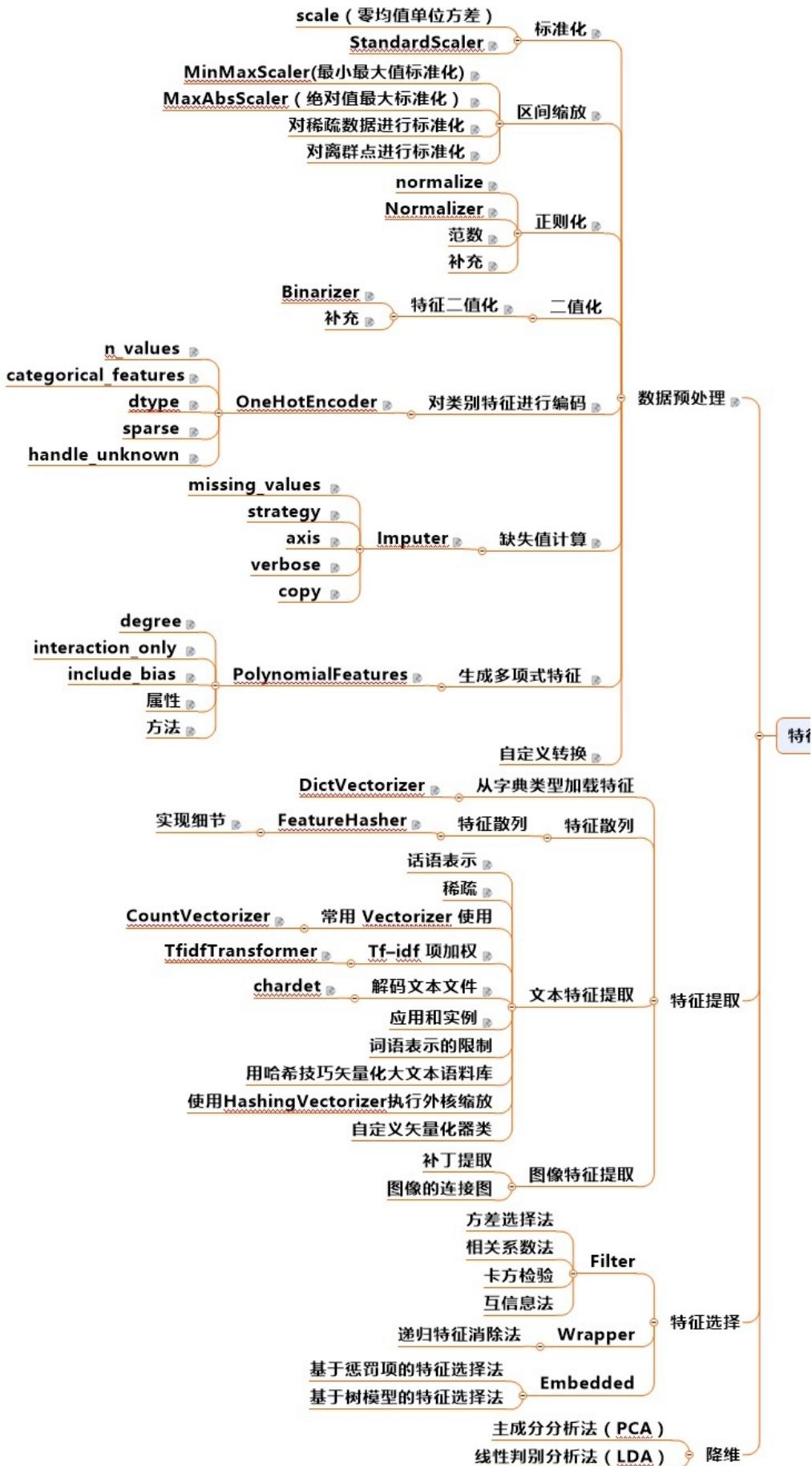
- 特征工程:利用数据领域的相关知识来创建能够使机器学习算法达到最佳性能的特征的过程。
  - 特征构建:是原始数据中人工的构建新的特征。
  - 特征提取:自动地构建新的特征,将原始特征转换为一组具有明显物理意义或者统计意义或核的特征。
  - 特征选择:从特征集合中挑选一组最具统计意义的特征子集,从而达到降维的效果。
- 重要性排名:特征构建>特征提取>特征选择

## ML框架<sup>1</sup>

参考



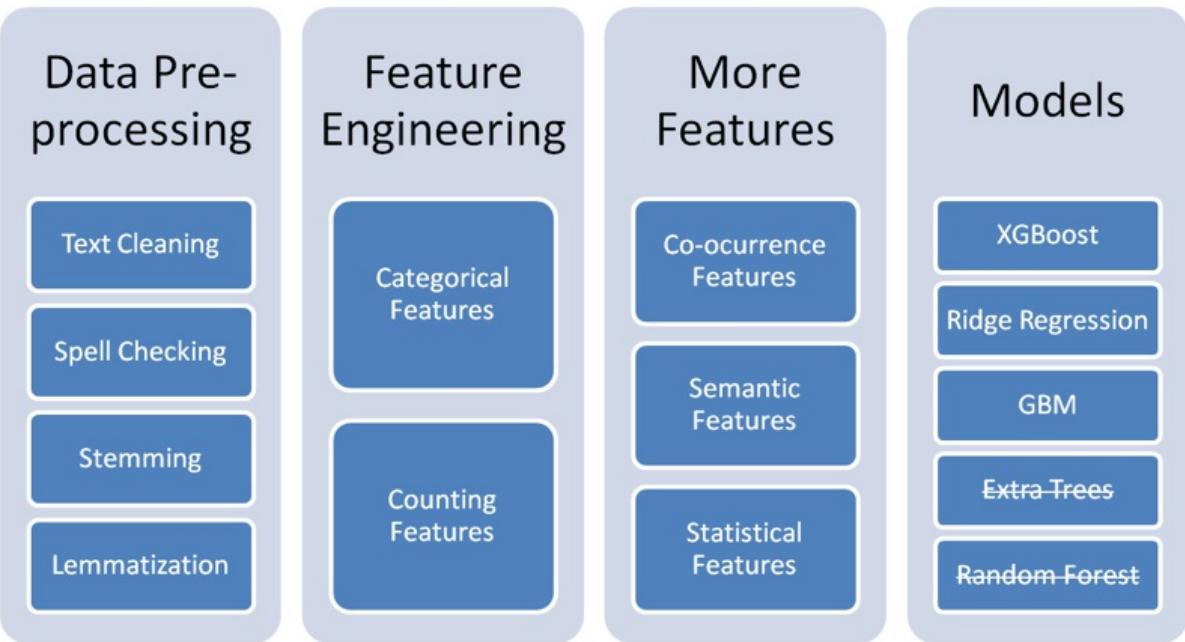
## 特征工程



## 模型的超参数调节

Model	Parameters to optimize	Good range of values
Linear Regression	<ul style="list-style-type: none"> <li>• fit_intercept</li> <li>• normalize</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• True / False</li> <li>• True / False</li> </ul>
Ridge	<ul style="list-style-type: none"> <li>• alpha</li> <li>• Fit_intercept</li> <li>• Normalize</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100</li> <li>• True/False</li> <li>• True/False</li> </ul>
k-neighbors	<ul style="list-style-type: none"> <li>• N_neighbors</li> <li>• p</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2, 4, 8, 16 ....</li> <li>• 2, 3</li> </ul>
SVM	<ul style="list-style-type: none"> <li>• C</li> <li>• Gamma</li> <li>• class_weight</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 0.001, 0.01.....10...100...1000</li> <li>• 'Auto', RS*</li> <li>• 'Balanced' , None</li> </ul>
Logistic Regression	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Penalty</li> <li>• C</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L1 or L2</li> <li>• 0.001, 0.01.....10...100</li> </ul>
Naive Bayes (all variations)	NONE	NONE
Lasso	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alpha</li> <li>• Normalize</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 0.1, 1.0, 10</li> <li>• True/False</li> </ul>
Random Forest	<ul style="list-style-type: none"> <li>• N_estimators</li> <li>• Max_depth</li> <li>• Min_samples_split</li> <li>• Min_samples_leaf</li> <li>• Max features</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 120, 300, 500, 800, 1200</li> <li>• 5, 8, 15, 25, 30, None</li> <li>• 1, 2, 5, 10, 15, 100</li> <li>• 1, 2, 5, 10</li> <li>• Log2, sqrt, None</li> </ul>
Xgboost	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Eta</li> <li>• Gamma</li> <li>• Max_depth</li> <li>• Min_child_weight</li> <li>• Subsample</li> <li>• Colsample_bytree</li> <li>• Lambda</li> <li>• alpha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 0.01, 0.015, 0.025, 0.05, 0.1</li> <li>• 0.05-0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0</li> <li>• 3, 5, 7, 9, 12, 15, 17, 25</li> <li>• 1, 3, 5, 7</li> <li>• 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0</li> <li>• 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0</li> <li>• 0.01-0.1, 1.0, RS*</li> <li>• 0, 0.1, 0.5, 1.0 RS*</li> </ul>

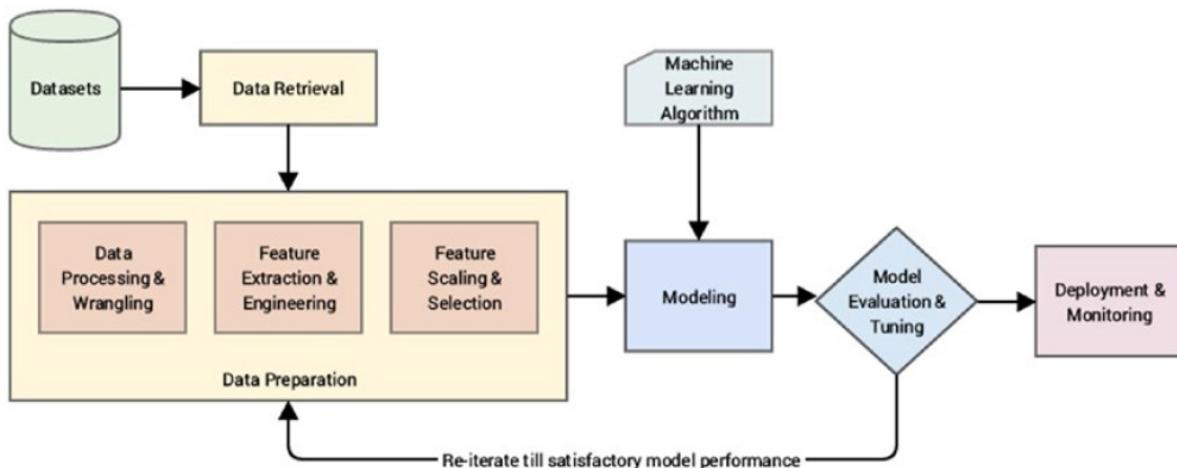
## NLP 特征工程



特征工程可以参考[这篇文章](#)

<http://blog.kaggle.com/2016/07/21/approaching-almost-any-machine-learning-problem-abhishek-thakur/>

机器学习的本质是数据加算法，算法就是数学函数，方程与优化。

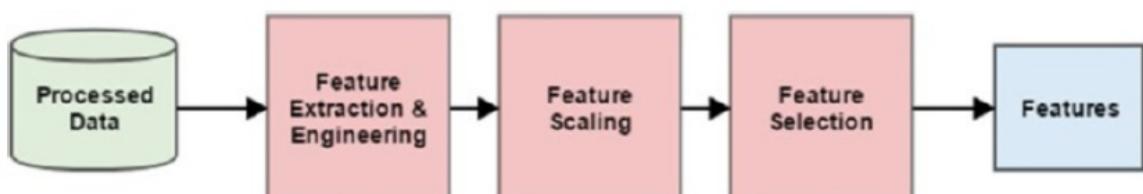


**Figure 4-1.** Revisiting our standard Machine Learning pipeline

### Feature extraction and engineering

标准的机器学习pipeline

特征提取, 标度, 选择的pipeline。



**Figure 4-2.** A standard pipeline for feature engineering, scaling, and selection

特征提取和特征工程是整个机器学习pipeline中最重要的步骤。

特征工程就是通过特殊领域的知识与特殊的技能，把数据转化成特征。数据科学家把他们时间的80%花在特征工程上。花在模型搭建与评估上的时间相对的少，但是也是重要的。深度学习(CNN,RNN,LSTM)区别于机器学习是其拥有机器学习没有的特征自动提取功能。  
One-Hot编码在类别数据中工作的非常好，但是当类别很多时会造成灾难，此时需要Bin-Counting Scheme., Feature Hashing Scheme.

## 文本数据处理

Bag of Words Model.对次进行统计

Bag of N-Grams Model, 对N个连续的词进行统计，比如两个或三个, Bi-Grams, Tri-Grams. 在NLP中, Tri-Grams就已经足够了。

词袋模型只考虑词的统计特性，但是有些词在所有文本中本身就具有高的频率，因此就有了TF-IDF model(Term Frequency-Inverse Document Frequency)

$tfidf(w, D) = tf(w, D) * idf(w, D) = f(w, D) * \log\left(\frac{C}{df(w)}\right)$   
tf-idf(w,D)是词w在文本D中TF-IDF分数。tf(w,D)表示词w在文档D中的频率, idf(w,D)是词w的逆文档频率, C是该语料库中的文本数。TF-IDF模型可以用来做为文本关键词提取。以及文本相似性计算(一般用余弦相似性)，因此可以用来做聚类，适用于无监督学习。  
LDA(Latent Dirichlet Allocation)作用在TF-IDF矩阵上，分解成document-topic matrix与topic-term matrix。

```
In [11]: from sklearn.decomposition import LatentDirichletAllocation
...
...: lda = LatentDirichletAllocation(n_topics=2, max_iter=100, random_state=42)
...: dt_matrix = lda.fit_transform(tv_matrix)
...: features = pd.DataFrame(dt_matrix, columns=['T1', 'T2'])
...: features
Out[11]:
   T1      T2
0  0.190615  0.809385
1  0.176860  0.823140
2  0.846148  0.153852
3  0.815229  0.184771
4  0.180563  0.819437
5  0.839140  0.160860
```

利用LDA把tf-idf矩阵分解成两个主题T1,T2,可以看出0, 1, 4成一类, 2, 3, 5成一类。

## 图像数据

Canny edge detection算法;from skimage.feature import canny。

Object Detection:HOG(Histogram of Oriented gradients)

from skimage.feature import hog

## Feature scaling

## Feature selection

### 准确率与召回率

True Positive(TP):实际是正例并且我们分类成正例的样本数。

False Positive(FP):实际是负例但是我们分类成正例的样本数。

True Negative(TN):实际是负例并且我们分类成也是负例的样本数。

False Negative(FN):实际是正例但是我们分类成也是负例的样本数。

## Accuracy

$$Accuracy = \frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$$

## Precision

只针对于正样本或者误分为正样本的样本，在不均衡样本中比较有用，比如人群中癌症阳性的比例很小，因此如果预测人群众没有患癌则获得的accuracy很高，但是precision是0.。

$$Precision = \frac{TP}{TP+FP}$$

## Recall

$$Recall = \frac{TP}{TP+FN}$$

## F1 Score

$$F1Score = \frac{2*Precision*Recall}{Precision+Recall}$$

## 超参数finetune

两种方法：Grid 搜索与随机搜索。

## Factorization Machines(FM)

这一节讨论点击率预测原发，常用的CTR预估算法有FM, FFM, DeepFM。

要明白FM与SVD之间的联系。

原理就是，每个特征 $x$ 可以用隐变量来表示，一般隐变量维数为30-40，也就是说，每一个特征可以在一个30-40维的低维空间来表示。因此，可以与Krylov子空间，SVD联系起来。都是需求超大特征空间的低维表示或者低秩分解。

### FM

一般的线性模型为：

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

一般模型中，各个特征是独立考虑的，没有考虑特征之间的相互关系。如果考虑特征 $x_i, x_j$ 之间的相互关系，模型修改如下：

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_{ij} x_i x_j$$

如果系统的特征比较多的话，计算复杂度会大大提升。为了降低时间复杂度，我们引入了辅助向量latent vector

$$\mathbf{V}_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}]^T$$

$$w_i = \sum_{f=1}^k v_{if}$$

$$w_{i_1, \dots, i_o} = \sum_{f=1}^{k_o} \prod_{j=1}^{o^*} v_{ij, f}$$

辅助变量是描述变量之间的相关性。模型修改如下：

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (V_i, V_j) x_i x_j$$

以上就是FM模型。 $k$ 是超参数，一般娶30或者40。时间复杂度是 $O(kn^2)$ ，可通过如下方式化简。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (V_i, V_j) x_i x_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (V_i, V_j) x_i x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V_i, V_i) x_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{f=1}^k \left( \sum_{i=1}^n v_{if} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n v_{if}^2 x_i^2 \end{aligned}$$

通过对每个特征引入latent vector $\mathbf{V}_i$ ，并对公式进行化简，可以把时间复杂度降为 $O(kn)$ 。

## Field-aware Factorization Machines(FFM)

# 模型评估

这一章主要介绍一些模型评估的方法，比如Cross-Validation, ROC, AUC  
模型的性能<sup>1</sup>：

1. 错误率/精度(accuracy)
2. 准确率(查准率, precision)/召回率(查全率, recall)
3. P-R曲线, F1度量
4. ROC曲线/AUC(最常用) 参考这篇文章：[机器学习模型性能评估方法笔记](#)

## 错误率/精度(accuracy)

假设我们拥有m个样本个体，那么该样本的错误率为：

$$e = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(f(x_i) \neq y_i)$$

或者：

$$e = \int_{x \sim D} I(f(x) \neq y) p(x) dx$$

## 准确率/召回率(查全率)

准确率=预测为真且实际也为真的个体个数 / 预测为真的个体个数

召回率 = 预测为真且实际也为真的个体个数 / 实际为真的个体个数

我们将准确率记为P, 召回率记为R, 定义, TP(true positive), FP(false positive), FN(false negative), TN(true negative)。则有：

$$P = \frac{TP}{TP+FP}$$

$$R = \frac{TP}{TP+FN}$$

## ROC曲线/AUC

ROC曲线则是以假正例率FPR为横轴, 真正例率TPR为纵轴。其中

$$FPR = \frac{FP}{FP+TN}$$

$$TPR = \frac{TP}{TP+FN}$$

我们可以看到真正例率与召回率是一样的，那么ROC曲线图如下图所示：

<sup>1</sup> [机器学习模型性能评估方法笔记](#) ↵

## 正则化方法原理

### Ridge回归, Shrink与SVD

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

等价于:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{ridge} &= \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 \\ &\text{subject to: } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq t. \end{aligned}$$

上面的问题也等价于假定,  $y_i, \beta_i$ 服从如下分布:

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in N(0, \tau^2)$$

其中:  $\lambda = \sigma^2 / \tau^2$

因此RRS(Root sum square)可以写成如下形式:

$$RRS(\lambda) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) + \lambda \beta^T \beta$$

通过对 $\beta$ 求导并令其为0, 可以得到:

$$\hat{\beta}^{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

为了建立起L2与SVD之间的联系, 我们对 $\mathbf{X}$ 进行SVD分解:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$$

我们重写没有正则化的最小二乘拟合:

$$\mathbf{X}\beta^{ls} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

对于L2正则化的最小二乘法:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\beta^{ls} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{D}^2 + \lambda I)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_j \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda} \mathbf{u}_j^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

从上面的分式  $\frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda}$  可以知道, 对于  $d_j \ll \lambda$ , 则相应的方向会收缩到0。可以认为L2就是对数据进行了SVD分解后, 只保留了  $d_j > \lambda$  的分量。

### Lasso(L1)回归

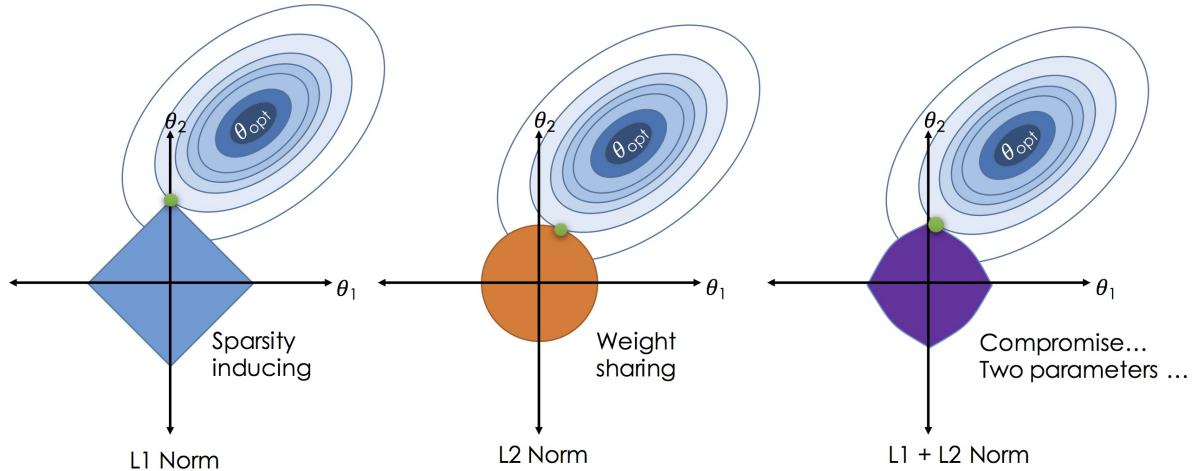
$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

等价于:

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2$$

$$\text{subject to : } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t.$$

L1更容易产生稀疏性,因为椭圆与菱形更易在菱形顶点相交,而与圆形不容易在坐标轴上相切。



## L1稀疏性的数学解析

一个数学上更严格的解析。。上面的问题也等价于假定,  $y_i, \beta_i$ 服从如下分布:

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in (1/2\tau) \exp(-|\beta|/\tau)$$

其中:  $\tau = 1/\lambda$

因此  $\beta_i$ 更容易分布在0的附件, 也就是能级排斥(量子混沌里面的概念, L1是可积系统, L2是GOE)

最小二乘一般通过Cholesky分解( $p^3 + Np^2/2$ )或者QR分解( $NP^2$ )来实现, 前者一般更快, 但是没有后者稳定。

# 机器学习任务

机器学习score函数设置：

1. 回归, 分类, 决策树, 深度神经网络, 图模型, 概率统计, 最优化方法
2. 分类, 聚类, 特征选择, 降维等数据挖掘技术
3. 机器学习, 概率统计, 最优化
4. GBDT, LR, LTR, 特征提取
5. 推荐系统基本算法: LR, GBDT, SVD/SVD++, FM/FFM具体实用场景与变形
6. 对分类, 回归, 聚类, 标注等统计机器学习问题有深入研究, 熟悉常用模型: LR, KNN, Naive bayes, rf, GBDT, SVM, PCA, SVD, kmeans, kmodes等
7. 精通主流机器学习算法, 对贝叶斯, 随机森林, SVM, 神经网络, 聚类, PCA等有深入研究
8. 熟悉数据分析思路, 熟悉经典的数据挖掘, 机器学习算法, 如: LR, 决策树, BP神经网络, SVM等浅层学习, 熟悉集成算法, 诸如bagging, boosting, 了解深度学习CNN, RNN, 熟悉使用python, 了解pandas, sklearn, xgboost
9. 熟悉常用的最优化算法设计与实现, 对于非凸优化问题有深入的理解(并行模拟退火, 蒙特卡洛等优化方法)
10. 机器学习算法: 贝叶斯, 聚类, 逻辑回归, SVM, GBDT, RF

总结:

1. 分类:
  - i. SVM,
  - ii. LR
2. 回归:
3. 集成学习:
  - i. bagging
  - ii. Boosting
4. 工具
  - i. sklearn, xgboost, tensorflow

## 分类总结:

### 机器学习

1. Regression:
  - i. Ordinary Least Squares Regression(OLSR)
  - ii. Linear Regression
  - iii. Logistic Regression
  - iv. Stepwise Regression
  - v. Multivariate Adaptive Regression Splines
  - vi. Locally Estimated Scatterplot Smoothing
2. Regularization Algorithms
  - i. Ridge Regression
  - ii. Least Absolute Shrinkage and Selection Operator(LASSO)
  - iii. Least-Angle Regression(LARS)
3. Ensemble Algorithms
  - i. Boosting
  - ii. Booststrapped Aggregation(Bagging)
  - iii. Adaboost
  - iv. Stacked Generalization(Blending)
  - v. Gradient Boosting Machines(GBM)
  - vi. Gradient Boosted Regression Trees(GBRT)
  - vii. Random Forest
4. Decision Tree Algorithms
  - i. Classification and Regression Tree(CART)
  - ii. Iterative Dichotomiser3(ID3)
  - iii. C4.5 and C5.0
  - iv. Chi-Squared Automatic Interaction Detection(CHAID)
  - v. Decision Stump
  - vi. M5

- vii. Conditional Decision Trees
- 5. Dimensionality Reduction Algorithms
  - i. Principle Component Analysis(PCA)
  - ii. Principle Component Regression(PCR)
  - iii. Sammon Mapping
  - iv. Multidimensional Scaling(MDS)
  - v. Projection Pursuit
  - vi. Linear Discriminant Analysis(LDA)
  - vii. Mixture Discriminant Analysis(MDA)
  - viii. Quadratic Discriminant Analysis(QDA)
  - ix. Flexible Discriminant Analysis(FDA)
- 6. Bayesian Algorithms
  - i. Naive Bayes
  - ii. Gaussian Naive Bayes
  - iii. Multinomial Naive Bayes
  - iv. Averaged One-Dependence Estimators(AODE)
  - v. Bayesian Belief Network(BBN)
  - vi. Bayesian Network(BN)
- 7. Clustering Algorithms
  - i. K-Means
  - ii. K-Medians
  - iii. Expectation Maximisation(EM)
  - iv. Hierarchical
- 8. Instance-Based Algorithms
  - i. K-Nearest Neighbor(KNN)
  - ii. Learning Vector Quantization(LVQ)
  - iii. Self-Organizing Map(SOM)
  - iv. Locally Weighted Learning(LWL)
- 9. Graphical Models
  - i. Bayesian Network
  - ii. Markov random field
  - iii. Chain Graphs
  - iv. Ancestral Graph
- 10. Association Rule Learning Algorithms
  - i. Apriori Algorithm
  - ii. Eclat Algorithm
  - iii. FP-growth

## 深度学习

- 1. Deep Learning
  - i. Deep Boltzmann Machine(DBM)
  - ii. Deep Belief Networks(DBN)
  - iii. Convolutional Neural Network(CNN)
  - iv. Stacked Auto-Encoders
- 2. Artificial Neural Network
  - i. Perception
  - ii. Back-Propagation
  - iii. Radial Basis Function Network(RBFN)

# 机器学习问题

1. 过拟合与欠拟合, 交差验证的目的, 超参数搜索方法, EarlyStopping
2. L1正则和L2正则的做法, 正则化背后的思想, BatchNorm, Covariance Shift, L1正则产生稀疏解的原理
3. 逻辑回归为何是线性模型, LR如何解决低维不可分, 从图模型角度看LR,
4. 和朴素贝叶斯和无监督
5. 几种参数估计方法MLE, MAP, 贝叶斯的联系与区别
6. 简单说下SVM的支持向量, KKT, 何为对偶, 核的通俗理解
7. GBDT, 随机森林能否并行, 问问bagging, boosting
8. 生成模型, 判别模型举个例子
9. 聚类方法的掌握, 问问kmeans的EM推导思路, 谱聚类和Graph-cut的理解
10. 梯度下降类方法和牛顿类方法的区别, 随便问问Adam, L-BFGS的思路
11. 半监督的思想, 问问一些特定半监督算法是如何利用无标签数据的, 从MAP角度看半监督
12. 常见的分类模型的评价指标(顺便问问交叉熵, ROC如何绘制, AUC的物理含义, 类别不均匀样本)

神经网络

1. CNN中卷积操作和卷积核作用, maxpooling作用
2. 卷积层与全连接层的联系
3. 梯度爆炸与消失的概念(顺便问问神经网络权重初始化的方法, 为何能减缓梯度爆炸与消失, CNN中有哪些解决方法, LSTM如何解决的, 如何梯度裁剪, dropout如何用在RNN系列网络中, dropout如何防止过拟合)
4. 为何卷积可以用在图像, 语音, 语句上, 顺便问问channel在不同类型数据源中的含义

自然语言处理, 推荐系统

1. CRF跟逻辑回归, 最大熵模型的关系
2. CRF的优化方法, CRF和MRF的联系, HMM与CRF的关系(顺便问问朴素贝叶斯和HMM的联系, LSTM+CRF用于序列标注的原理, CRF的点函数和边函数, CRF的经验分布)
3. wordEmbedding的几种常用方法和原理(language model, perplexity评价指标, word2vec跟Glove的异同)
4. Topic model说一说, 为何CNN能用在文本分类, syntactic 和semantic问题举例,
5. 常见的sentence embedding方法, 注意力机制(注意力机制的几种不同情形, 为何引入, seq2seq原理)
6. 序列标注的评价指标, 语义消歧的做法, 常见的跟word有关的特征
7. factorization machine, 常见矩阵分解模型
8. 如何把分类模型用于商品推荐(包括数据集划分, 模型验证等)
9. 序列学习, wide & deep model(顺便问问为何wide和deep)

## 第六章 深度学习

这一章主要讨论深度学习模型。主要包含CNN, RNN, DNN(MLP)。

CNN侧重于空间，主要用在图像分类模型，比如LeNet-5,AlexNet,VGG,GoogLeNet,Residual Net,Dense Net,Two path Net。

RNN侧重于时间序列，主要用于语音识别，自然语言处理，包含的网络有传统的RNN, LSTM以及GRU。

DNN(MLP)主要指有多个隐藏层的神经网络，也称为多层感知机(Multi-layer perceptron,MLP)。

在介绍完CNN与RNN之后，就是介绍这两种网络的实际用途了，比如RNN在语音识别方面的应用。GAN是一大块，但是不知道能用在什么地方，有空也必须添加进去。

# 自己动手写神经网络

这里需要实现NN, CNN,RNN, 区别在于是否加卷积。对于NN, 要保证层数不说限制, 每层的神经元不受限制, 只处理一维输入,输出也就一维, 也就是分类问题;CNN处理二维输入(图像), 设计卷积和卷积核, 实现的例子就是LeNet-5。RNN就是实现最简单的RNN。三者通用的东西是什么? 可以提出来, 我们需要用到哪些模块? 这个心里是要清楚的。

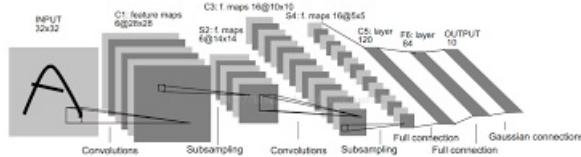
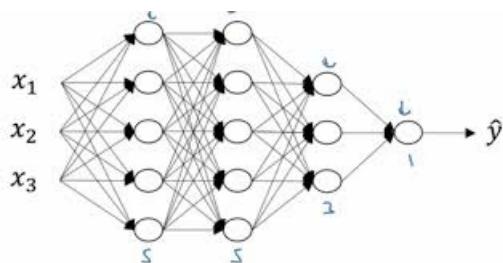
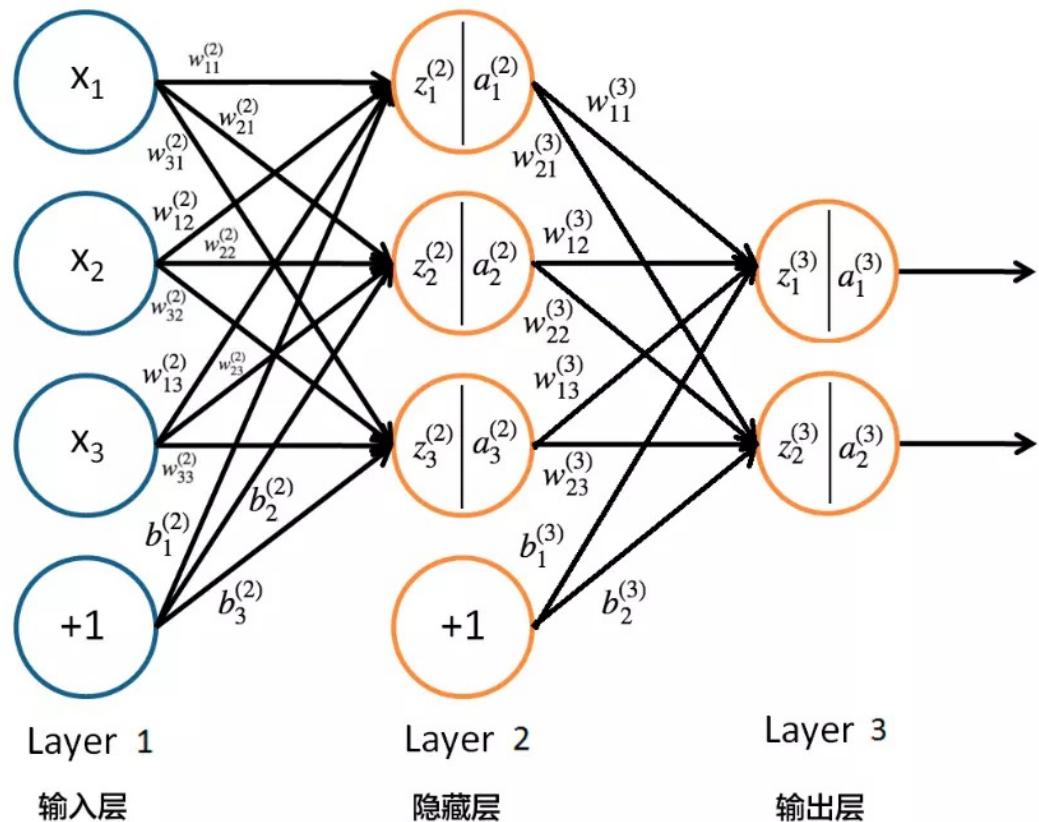


Fig. 2. Architecture of LeNet-5, a Convolutional Neural Network, here for digits recognition. Each plane is a feature map, i.e. a set of units whose weights are constrained to be identical.



## NN

## CNN



$n_l$ 是层神经元数目；

$W^{(l)} \in R^{nl \times nl-1}$  是第l-1层到第l层的权重矩阵。

$W_{ij}^{(l)}$ 表示第l-1层的j神经元到l层的i神经元之间的权重。

$f()$ 是激活函数。

$\mathbf{b}^{(l)} = [b_1^{(l)}, b_2^{(l)}, \dots, b_{n_l}^{(l)}] \in R^{nl}$  表示第l-1层到第l层的偏置。 $\mathbf{z}^{(l)} = [z_1^{(l)}, z_2^{(l)}, \dots, z_{n_l}^{(l)}] \in R^{nl}$  表示第l层神经元的状态。

$\mathbf{a}^{(l)} = [a_1^{(l)}, a_2^{(l)}, \dots, a_{n_l}^{(l)}] \in R^{n_l}$  表示第l层神经元的激活值。

## 信息前向传播

因此我们根据下面的公式计算每层的神经元状态与输出值，计算从第2层到最后一层L。

$$\mathbf{z}^{(l)} = \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{a}^{(l-1)} + \mathbf{b}^{(l)}$$

$$\mathbf{a}^{(l)} = f(\mathbf{z}^{(l)})$$

对于第L层，最终输出 $\mathbf{a}^{(L)}$ 。信息传播如下：

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^{(1)} \rightarrow \mathbf{z}^{(2)} \rightarrow \mathbf{a}^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{a}^{(L-1)} \rightarrow \mathbf{z}^{(L)} \rightarrow \mathbf{a}^{(L)} = \mathbf{y}$$

## 误差反向传播

训练数据为 $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}), \dots, (\mathbf{x}^{(N)}, \mathbf{y}^{(N)})$ ，即N个数据，假设输出是 $n_L$ 维的，也就是：

$$\mathbf{y}^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n_L}^{(i)})^T \in R^{n_L \times 1}$$

对于第i个数据，假设误差是均方误差， $\mathbf{o}^{(i)}$ 是输出。

$$E_i = \frac{1}{2}(\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{o}^{(i)})^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_L} (y_k^{(i)} - o_k^{(i)})^2 \text{ 因此对总的N个数据。总的误差表示如下：}$$

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i$$

## 对输出层权重参数更新

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^{(nL)}} = \frac{\partial E}{\partial z_i^{(nL)}} \frac{\partial z_j^{(nL)}}{\partial w_{ij}^{(nL)}} = \delta_i^{(nL)} a_j^{(nL-1)}$$

其中：

$$\delta_i^{(nL)} = \frac{\partial E}{\partial z_i^{(nL)}} = -(y_i - a_i^{(nL)}) f'(z_i^{(nL)})$$

因此：

$$\delta^{(nL)} = -(\mathbf{y} - \mathbf{a}^{(nL)}) * \mathbf{f}'(\mathbf{z}^{(nL)})$$

其中\*表示向量对应元素相乘。

## 对隐含层权重参数的更新

对于隐藏层有：

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \frac{\partial E}{\partial z_i^{(l)}} \frac{\partial z_j^{(l)}}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \delta_i^{(l)} a_j^{(l-1)}$$

$$\delta_i^{(l)} = \frac{\partial E}{\partial z_i^{(l)}} = \sum_{j=1}^{n_{l+1}} \frac{\partial E}{\partial z_j^{(l+1)}} \frac{\partial z_j^{(l+1)}}{\partial z_i^{(l)}} = \sum_{j=1}^{n_{l+1}} \delta_j^{(l+1)} \frac{\partial z_j^{(l+1)}}{\partial z_i^{(l)}}$$

$$\frac{\partial z_j^{(l+1)}}{\partial z_i^{(l)}} = \frac{\partial z_j^{(l+1)}}{\partial a_i^{(l)}} \frac{\partial a_i^{(l)}}{\partial z_i^{(l)}} = w_{ji}^{(l+1)} f'(z_i^{(l)})$$

因此有：

$$\delta_i^{(l)} = \sum_{j=1}^{n_{l+1}} \delta_j^{(l+1)} w_{ji}^{(l+1)} f'(z_i^{(l)}) = \left( \sum_{j=1}^{n_{l+1}} \delta_j^{(l+1)} w_{ji}^{(l+1)} \right) f'(z_i^{(l)})$$

因此写成矢量想成形式：

$$\delta^{(l)} = -((\mathbf{W}^{(l+1)})^T \delta^{(l+1)}) * \mathbf{f}'(\mathbf{z}^{(l)})$$

因此：

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \left( \sum_{j=1}^{n_{l+1}} \delta_j^{(l+1)} w_{ji}^{(l+1)} \right) f'(z_i^{(l)}) a_j^{(l-1)}$$

对输出层与隐含偏置求导数

$$\frac{\partial E}{\partial b_i^{(l)}} = \frac{\partial E}{\partial z_i^{(l)}} \frac{\partial z_i^{(l)}}{\partial b_i^{(l)}} = \delta_i^{(l)}$$

## BP四个核心公式

整理起来, BP算法有如下四个核心公式:

$$\begin{aligned}\delta_i^{(L)} &= -(y_i - a_i^{(L)}) f'(z_i^{(L)}) \\ \delta_i^{(l)} &= \left( \sum_{j=1}^{n_{l+1}} \delta_j^{(l+1)} w_{ji}^{(l+1)} \right) f'(z_i^{(l)}) \\ \frac{\partial E}{\partial b_i^{(l)}} &= \delta_i^{(l)} \\ \frac{\partial E}{\partial w_{ij}^{(l)}} &= \delta_i^{(l)} a_j^{(l-1)}\end{aligned}$$

## 两个辅助公式

$$\mathbf{z}^{(l)} = \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{a}^{(l-1)} + \mathbf{b}^{(l)}$$

$$\mathbf{a}^{(l)} = f(\mathbf{z}^{(l)})$$

## 参数更新

$$\begin{aligned}W^{(l)} &= W^{(l)} - \frac{u}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial E_i}{\partial W^{(l)}} \\ \mathbf{b}^{(l)} &= \mathbf{b}^{(l)} - \frac{u}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial E_i}{\partial b^{(l)}}\end{aligned}$$

# CNN

CNN主要是处理空间数据，比如图像数据。CNN主要包含LeNet-5,AlexNet,GoogLeNet,VGG,Residual Net,Dense Net。

CNN核心：局部感受野，权值共享，时间或空间采样这三种思想来保证某种程度的平移，尺度，形变不变性。

介绍每种模型的时候，要说明这种模型的优点，最好能阐述为啥会有这种优点。

## CNN基础

### 如何理解CNN中的卷积？

### CNN相对于全连接网络的好处

减少模型参数数量，减少计算时间。

### CNN的卷积核与特征提取

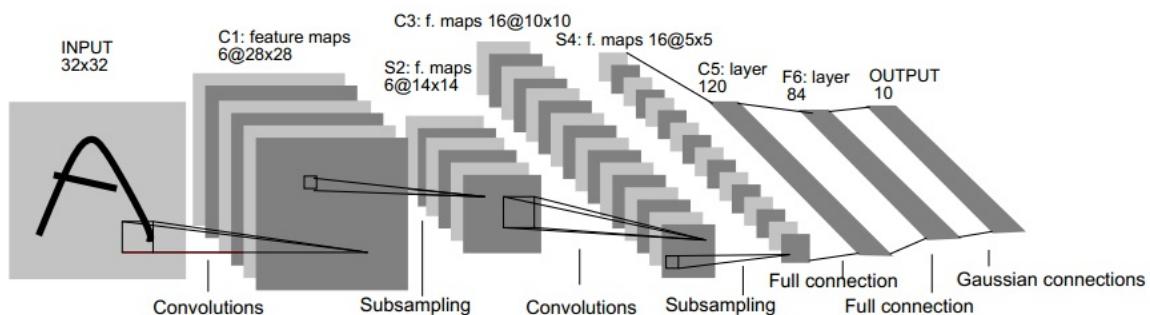
CNN中卷积核数目以及参数数据的计算。根据的是相邻两层feature maps个数，以及每个map的大小来计算出所用卷积核的数目。

### CNN的卷积核大小为啥是奇数？

不能保持对称性，比如原来图像长度宽是 $M \times M$ ，卷积核大小是 $n \times n$ ，则卷积作用后图像大小是 $(M-n+1) \times (M-n+1)$ ，如果 $n$ 是偶数，则 $n-1$ 是奇数，因此处理后的图像不再对称了。

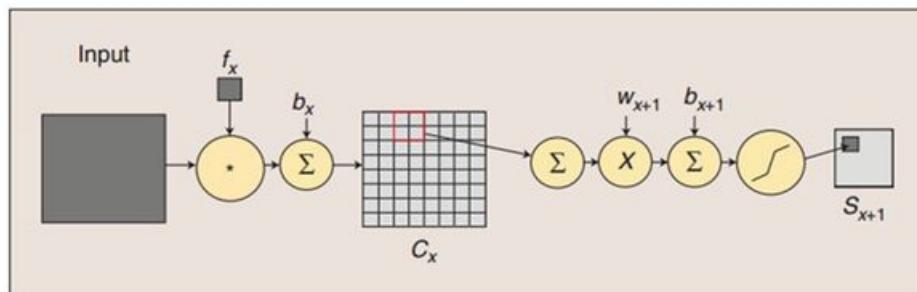
在这里，我们将要计算模型中，两层之间的参数数目。

### 如何计算CNN两层之间参数数目



C1层是卷积层，单通道下用了6个卷积核，这样就得到了6个feature map，其中每个卷积核的大小为 $5 \times 5$ ，用每个卷积核与原始的输入图像进行卷积，这样feature map的大小为 $(32-5+1) \times (32-5+1) = 28 \times 28$ ，所需要的参数的个数为 $(5 \times 5+1) \times 6 = 156$ （其中 $5 \times 5$ 为卷积模板参数，1为偏置参数），连接数为 $(5 \times 5+1) \times 28 \times 28 \times 6 = 122304$ （其中 $28 \times 28$ 为卷积后图像的大小）。

S2层为pooling层，也可以说是池化或者特征映射的过程，拥有6个feature map，每个feature map的大小为 $14 \times 14$ ，每个feature map的隐单元与上一层C1相对应的feature map的 $2 \times 2$ 单元相连接，这里没有重叠。计算过程是： $2 \times 2$ 单元里的值相加然后再乘以训练参数 $w$ ，再加上一个偏置参数 $b$ （每一个feature map共享相同 $w$ 和 $b$ ），然后取sigmoid值，作为对应的该单元的值。所以S2层中每feature map的长宽都是上一层C1的一半。S2层需要 $2 \times 6 = 12$ 个参数，连接数为 $(4+1) \times 14 \times 14 \times 6 = 5880$ 。注：这里池化的过程与ufldl教程中略有不同。下面为卷积操作与池化的示意图：



计算CNN相邻两层之间参数数目，假设上层有大小是 $N \times M \times M$ ，其中 $n$ 是通道数目， $M \times M$ 是图像大小。如果连接下一层的卷积核大小是 $n \times n$ ，我们可以对上一层的 $a$ 个通道做卷积，则每次操作需要 $a$ 个卷积核，再加上一个偏置，则需要 $a \times n \times n + 1$ 个参数。假设下一层有 $K$ 个通道，则两层之间所有的参数数目是 $K(a \times n \times n + 1)$ 。这里 $a$ 可以取不同值，也可以是不同值的组合，比如在LeNet-5中，S2到C3之间就存在不同通道的组合，C3的前6个特征

图以S2中3个相邻的特征图子集为输入。接下来6个特征图以S2中4个相邻特征图子集为输入。然后的3个以不相邻的4个特征图子集为输入。最后一个将S2中所有特征图为输入。这样C3层有 $6(3 \times 25 + 1) + 6(4 \times 25 + 1) + 3(4 \times 25 + 1) + (25 \times 6 + 1) = 1516$ 个可训练参数和 $10 \times 10 \times 1516 = 151600$ 个连接。

## CNN的pooling的作用

降维与信息提取。

### 下采样与上采样的误差怎么传递与反向？

[卷积神经网络\(CNN\)反向传播算法](#)

[CNN中一些特殊环节的反向传播](#)

CNN网络中另外一个不可导的环节就是Pooling池化操作，因为Pooling操作使得feature map的尺寸变化，假如做 $2 \times 22 \times 22 \rightarrow 2 \times 11 \times 11$ 的池化，假设那么第I+1层的feature map有16个梯度，那么第III层就会有64个梯度，这使得梯度无法对位的进行传播下去。其实解决这个问题的思想也很简单，就是把1个像素的梯度传递给4个像素，但是需要保证传递的loss（或者梯度）总和不变。根据这条原则，mean pooling和max pooling的反向传播也是不同的。

## 1、mean pooling

mean pooling的前向传播就是把一个patch中的值求取平均来做pooling，那么反向传播的过程也就是把某个元素的梯度等分为n份分配给前一层，这样就保证池化前后的梯度（残差）之和保持不变，还是比较理解的。

mean pooling比较容易让人理解错的地方就是会简单的认为直接把梯度复制N遍之后直接反向传播回去，但是这样会造成loss之和变为原来的N倍，网络是会产生梯度爆炸的。

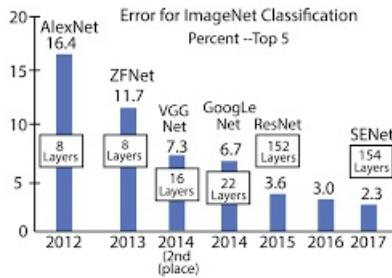
## 2、max pooling

max pooling也要满足梯度之和不变的原则，max pooling的前向传播是把patch中最大的值传递给后一层，而其他像素的值直接被舍弃掉。那么反向传播也就是把梯度直接传给前一层某一个像素，而其他像素不接受梯度，也就是为0。所以max pooling操作和mean pooling操作不同点在于需要记录下池化操作时到底哪个像素的值是最大，也就是max id，这个可以看caffe源码的pooling\_layer.cpp，下面是caffe框架max pooling部分的源码

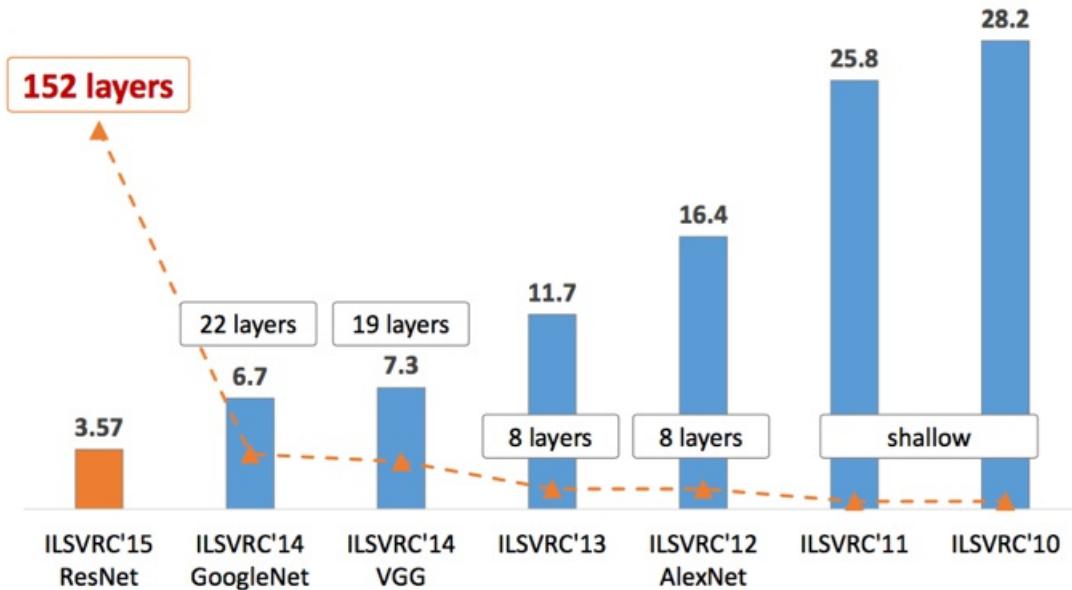
```
// If max pooling, we will initialize the vector index part.  
if (this->layer_param_.pooling_param().pool() == PoolingParameter_PoolMethod_MAX && top.size() == 1)  
{  
    max_idx_.Reshape(bottom[0]->num(), channels_, pooled_height_, pooled_width_);  
}
```

源码中有一个max\_idx\_的变量，这个变量就是记录最大值所在位置的，因为在反向传播中要用到，那么假设前向传播和反向传播的过程就如下图所示

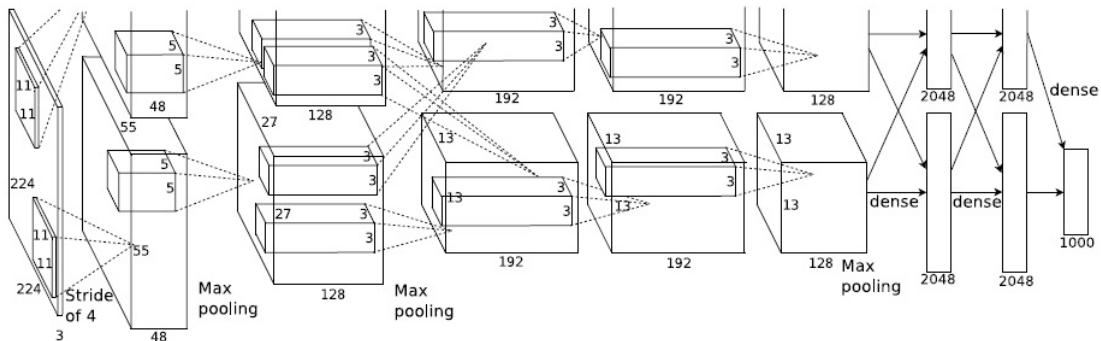
## ImageNet top5 error record history



网络层数随历史的变化。



## AlexNet



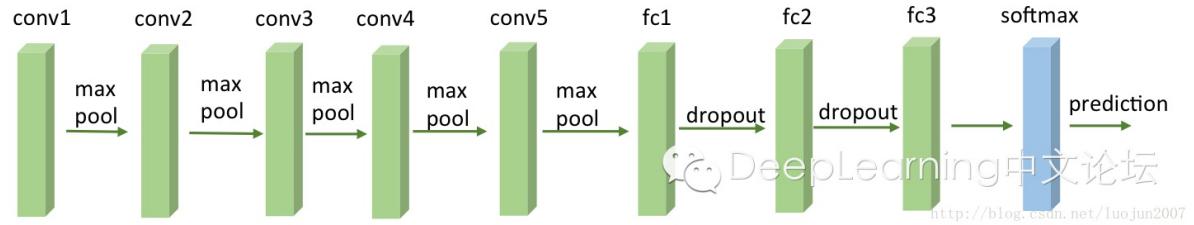
AlexNet的优点。

1. 使用ReLU作为激活函数，消除了sigmoid,tanh造成的梯度消失问题。同时也减小了激活函数的计算量。
2. 百万数据和多GPU训练减小了计算时间。
3. 局部响应归一化(LRN,Local Response Normalization)
4. 重叠池化，也就是pooling的尺寸小于步长。
5. 通过数据增强(裁剪, 平移, 尺度变换, 水平翻转, 加随机光照)与Dropout降低过拟合

## VGG

相对于以前的网络而言, VGG与GoogLeNet的网络变得更深了。VGGNet在整个网络中使用3x3的小感受野, 以步长1进行逐像素卷积, 因此两个3x3卷积相当于一个5x5, 三个3x3卷积核相当于一个7x7的卷积核, 这样大大减小了模型的参数个数。使用了小尺寸的卷积核, 增加了网络深度并不会带来明显的参数膨胀, 却能在更深的网络中获得更高的精度。

each conv includes 3 convolutional layers

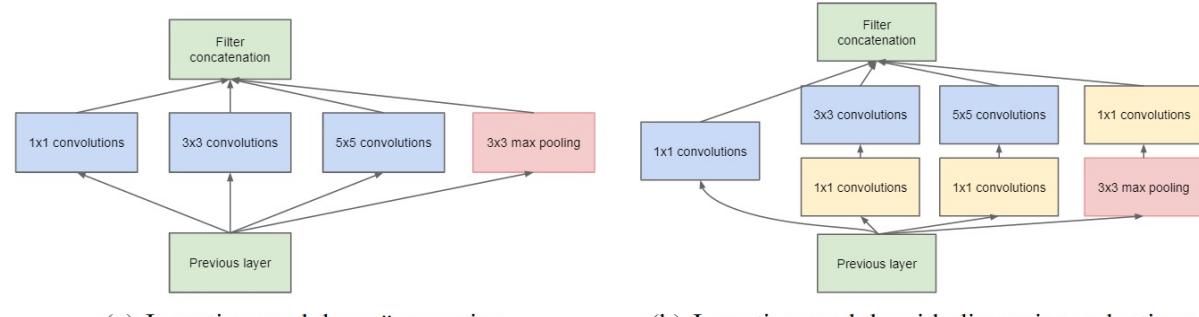


## GoogLeNet

特点:

1. 不适用全连接层, 而是用平均池化代替全连接层, 减小模型的参数数量, 这种想法来自于NIN。
2. 采用一种高效的机器视觉深度神经网络结构, 称为"Inception", 这种模块化结构方便增加与修改, 现在inception版本到了V6/V7。GoogLeNet中采用了9个inception模块。
3. 为了避免梯度小时, 网络额外增加了2个辅助的softmax用于向前传导梯度。

GoogLeNet中的Inception



(a) Inception module, naïve version

GoogLeNet的参数:可以看出里面用7x7的平均池代替了全连接。

后续改进的版本:

1. Inception-v2在之前的版本中主要加入了batch Normalization; 另外也借鉴VGGNet的思想, 用两个3x3的卷积代替5x5的卷积, 不仅降低了训练参数, 也提升了速度。
2. Inception-3在v2的基础上进一步分解大的卷积, 比如把nxn的卷积拆分成两个一维卷积: 1xn, nx1。
3. Inception-V4借鉴了ResNet可以构建更深层网络的思想, 设计了一个更深更优化的模型。

type	patch size/ stride	output size	depth	#1×1	#3×3 reduce	#3×3	#5×5 reduce	#5×5	pool proj	params	ops
convolution	7×7/2	112×112×64	1							2.7K	34M
max pool	3×3/2	56×56×64	0								
convolution	3×3/1	56×56×192	2		64	192				112K	360M
max pool	3×3/2	28×28×192	0								
inception (3a)		28×28×256	2	64	96	128	16	32	32	159K	128M
inception (3b)		28×28×480	2	128	128	192	32	96	64	380K	304M
max pool	3×3/2	14×14×480	0								
inception (4a)		14×14×512	2	192	96	208	16	48	64	364K	73M
inception (4b)		14×14×512	2	160	112	224	24	64	64	437K	88M
inception (4c)		14×14×512	2	128	128	256	24	64	64	463K	100M
inception (4d)		14×14×528	2	112	144	288	32	64	64	580K	119M
inception (4e)		14×14×832	2	256	160	320	32	128	128	840K	170M
max pool	3×3/2	7×7×832	0								
inception (5a)		7×7×832	2	256	160	320	32	128	128	1072K	54M
inception (5b)		7×7×1024	2	384	192	384	48	128	128	1388K	71M
avg pool	7×7/1	1×1×1024	0								
dropout (40%)		1×1×1024	0								
linear		1×1×1000	1							1000K	1M
softmax		1×1×1000	0								

Table 1: GoogLeNet incarnation of the Inception architecture

## Residual Net

详见第九章项目工作, Residual NN.

## Dense Net

DenseNet的示意图, 主要表现任意两层间可以有short connection。

在ResNets中, 只在相邻两层有skip connection. 在激活函数是恒等函数的前提下, 有:

$$x_l = H_l(x_{l-1}) + x_{l-1}$$

对于Dense Net, l层可以与0, 1, ..., l-1中任意多层相连。因此有:

$$x_l = H_l(x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$$

DenseNet的一个优点是网络更窄, 参数更少, 大一部分原因是得益于这种dense block的设计, 后面有提到在dense block中每个卷积层的输出feature map数量都很小(小于100), 而不像其他网络一样动不动就是几百上千的宽度。同样这种连接方式使得特征和梯度的传递更加有效, 网络也更容易训练。前面提到过梯度消失问题是网络深度越深的时候越容易出现, 原因就是输入信息和梯度信息在很多层之间传递导致的, 而现在这种dense connection相当于每一层都直接连接input和loss, 因此就可以减轻梯度消失现象, 这样更深网络不是问题。

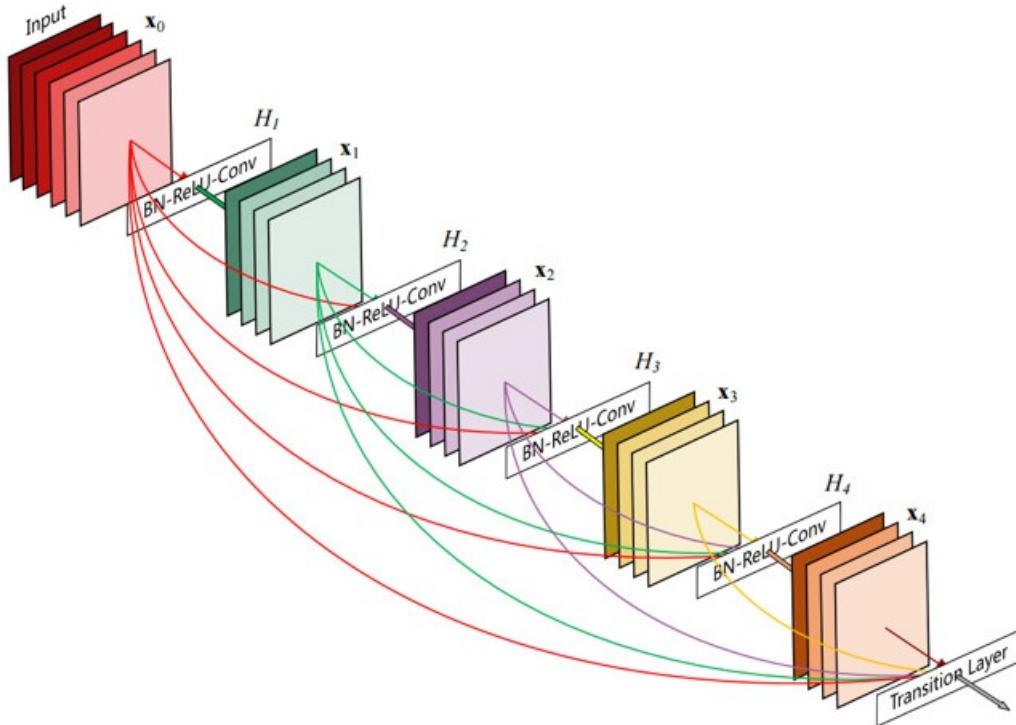
Dense net主要通过建立不同层之间的直接连续, 充分利用了feature, 进一步减轻了梯度消失问题, 加深了网络深度, 而且训练效果非常好。另外

对于Dense Net,l层可以与0, 1, ...,l-1中任意多层相连。因此有:

$$x_l = H_l(x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$$

DenseNet的一个优点是网络更窄, 参数更少, 大一部分原因是得益于这种dense block的设计, 后面有提到在dense block中每个卷积层的输出feature map数量都很小(小于100), 而不像其他网络一样动不动就是几百上千的宽度。同样这种连接方式使得特征和梯度的传递更加有效, 网络也更容易训练。前面提到过梯度消失问题是网络深度越深的时候越容易出现, 原因就是输入信息和梯度信息在很多层之间传递导致的, 而现在这种dense connection相当于每一层都直接连接input和loss, 因此就可以减轻梯度消失现象, 这样更深网络不是问题。

Dense net主要通过建立不同层之间的直接连接, 充分利用了feature, 进一步减轻了梯度消失问题, 加深了网络深度, 而且训练效果非常好。另外利用bottleneck layer,translation layer以及较小的growth rate使得网络变窄, 参数减小, 有效抑制了过拟合, 同时减小了计算量。



Dense Blocks之间通过pooling与convolution来改变图像尺寸。

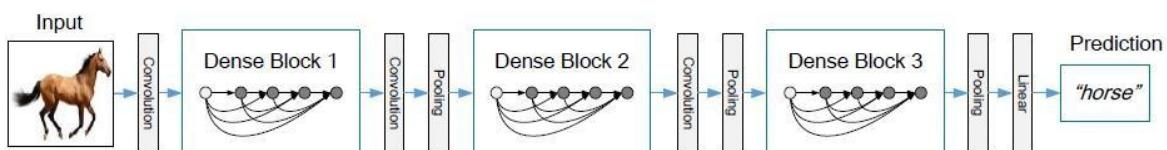


Figure 2. A deep DenseNet with three dense blocks. The layers between two adjacent blocks are referred to as transition layers and change feature map sizes via convolution and pooling.

<http://blog.csdn.net/u014380165>

## 问题集

1. 为什么1x1的卷积核可以用来降维？

- 1、降维 ( dimension reductionality )。比如, 一张500 500且厚度depth为100 的图片在20个filter上做11的卷积, 那么结果的大小为500 500 20。2、加入非线性。卷积层之后经过激励层, 1\*1的卷积在前一层的学习表示上添加了非线性激励 ( non-linear activation ), 提升网络的表达能力。

参考

# RNN

建模序列化数据的一种主流深度学习模型。

## 设计目的

捕获长距离输入之间的依赖。

背景：

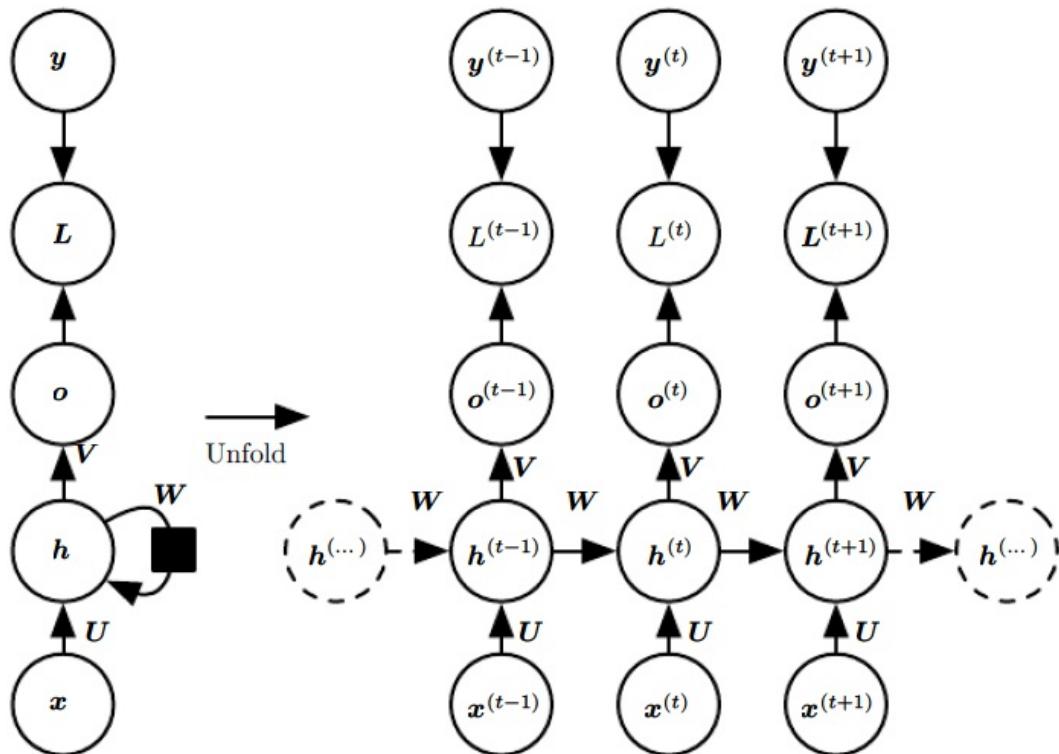
传统的前馈神经网络一般输入的都是一个定长的向量，无法处理变长的序列信息，即使通过一些方法把序列处理成定长的向量，模型也很难捕捉序列中的长距离依赖关系。RNN则通过将神经元串行起来处理序列化的数据。由于每个神经元能用它的内部变量保存之前输入的序列信息，因此整个序列被浓缩成抽象的表示，并可以据此进行分类或生成新的序列。近年来，得益于计算能力的大幅度提升和模型的改进，RNN在很多领域取得了突破性的进展——机器翻译、图像描述、推荐系统、智能聊天机器人、自动作词作曲等。

## 循环神经网络(RNN)

循环神经网络中一些重要的设计模式包含如下几种：

(1) 每个时间步都有输出，并且隐藏单元之间有循环连接的循环网络，如下图所示。

RNN的输入到隐藏的连接由权值矩阵U参数化，隐藏到隐藏的循环由权重矩阵W参数化，隐藏到输出层的连接由权重矩阵V参数化。 $L^{(t)}$ 是损失函数。



前向传播公式：假设激活函数是tanh，我们有如下的更新方程：

$$\mathbf{a}^{(t)} = \mathbf{b} + \mathbf{W}\mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(t)}$$

$$\mathbf{h}^{(t)} = \tanh(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{o}^{(t)} = \mathbf{c} + \mathbf{V}\mathbf{h}^{(t)}$$

$$\hat{\mathbf{y}}^{(t)} = \text{softmax}(\mathbf{o}^{(t)})$$

其中 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是偏置向量， $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ 是权重矩阵。

这一循环网络将一个输入序列映射到相同长度的输出序列。与 $\mathbf{x}$ 序列配对的 $\mathbf{y}$ 的总的损失就是所有时间步的损失之和。例如， $L^{(t)}$ 为给定的

$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(t)}$ 后 $\mathbf{y}^{(t)}$ 的负对数似然，则：

$$L((x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\tau)}), (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(\tau)})) = \sum_t L^{(t)}$$

$$= - \sum_t \log p_{model}(y^{(t)} | (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)})$$

其中  $p_{model}(y^{(t)} | (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)})$  需要读取模型输出向量  $\hat{y}^{(t)}$  对应于  $y^{(t)}$  的项。

应用于展开图且代价为  $O(\tau)$  的反向传播算法是通过时间反向传播(back-propagation through time, BPTT)。

(2) 每个时间步都产生一个输出，只有当前时刻的输出到下个时刻的隐藏单元之间有循环连接的循环网络。如下图所示：

该图中，RNN 被训练将特定输出值放入  $o$  中，并且  $o$  是被允许传播到未来的唯一信息。此处没有从  $h$  前向传播的直接连接。之前的  $h$  仅通过产生的预测间接地连接到当前。 $o$  通常缺乏过去的重要信息，除非它非常高维并且内容丰富。这使得该图中的 RNN 不那么强大，但是它更容易训练，因为每个时间步可以与其他时间步分离训练，允许训练期间更多的并行化。

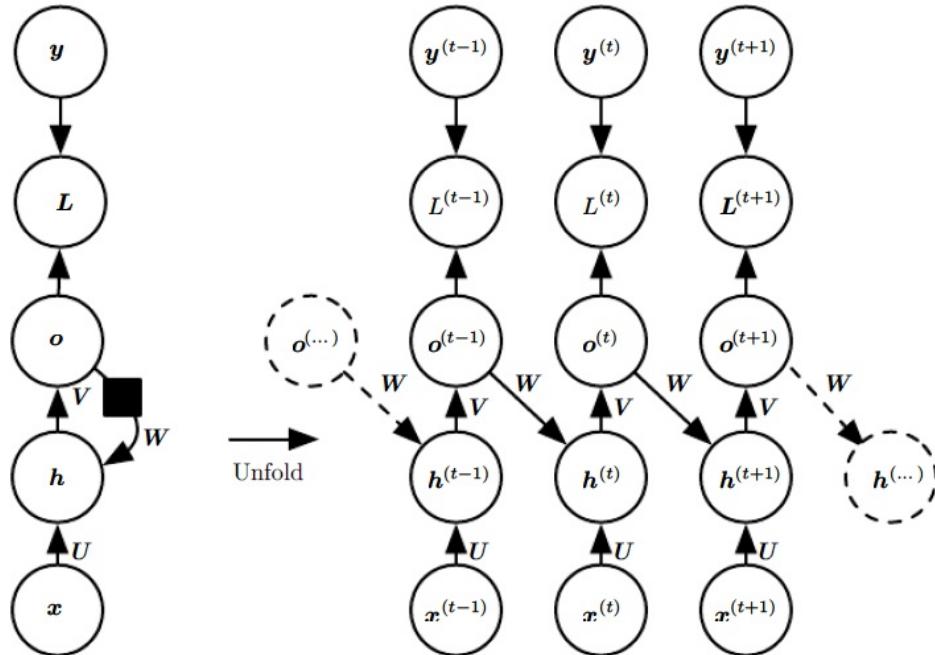


Figure 10.4: An RNN whose only recurrence is the feedback connection from the output to the hidden layer. At each time step  $t$ , the input is  $x_t$ , the hidden layer activations are  $h^{(t)}$ , the outputs are  $o^{(t)}$ , the targets are  $y^{(t)}$  and the loss is  $L^{(t)}$ . (Left) Circuit diagram.

(3) 隐藏单元之间存在循环连接，但读取整个序列后产生单个输出的循环网络，如下图所示：

这样的网络可以用于概括序列并产生用于进一步处理的固定大小的表示。在结束处可能存在目标，或者通过更下游模块的反向传播来获得输出

$o^{(t)}$  上的梯度。

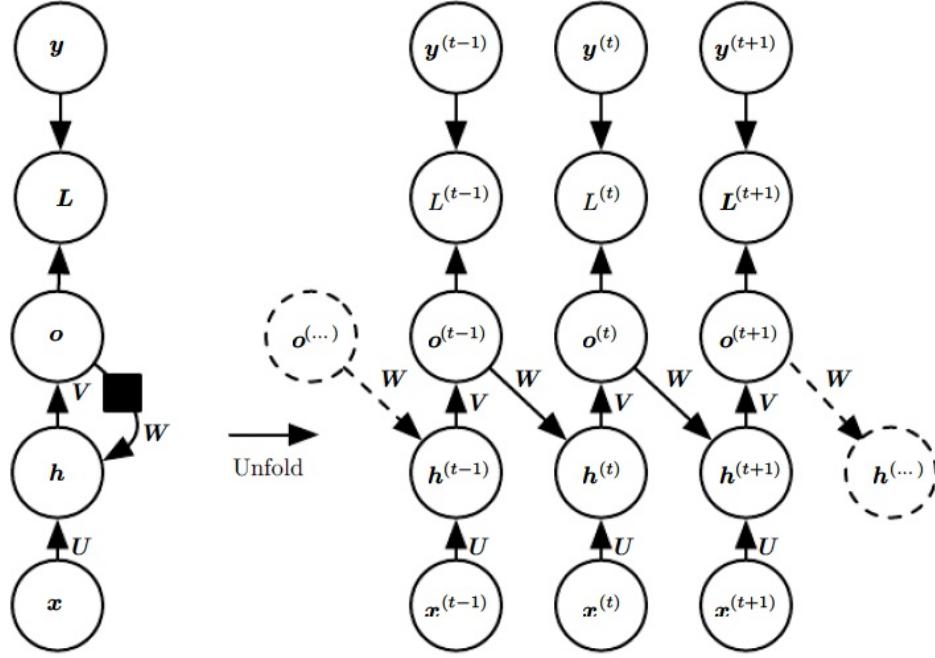


Figure 10.4: An RNN whose only recurrence is the feedback connection from the output to the hidden layer. At each time step  $t$ , the input is  $\mathbf{x}_t$ , the hidden layer activations are  $\mathbf{h}^{(t)}$ , the outputs are  $\mathbf{o}^{(t)}$ , the targets are  $\mathbf{y}^{(t)}$  and the loss is  $L^{(t)}$ . (Left) Circuit diagram.

(3)隐藏单元之间存在循环连接，但读取整个序列后产生单个输出的循环网络，如下图所示：

这样的网络可以用于概括序列并产生用于进一步处理的固定大小的表示。在结束处可能存在目标，或者通过更下游模块的反向传播来获得输出

$\mathbf{o}^{(t)}$ 上的梯度。

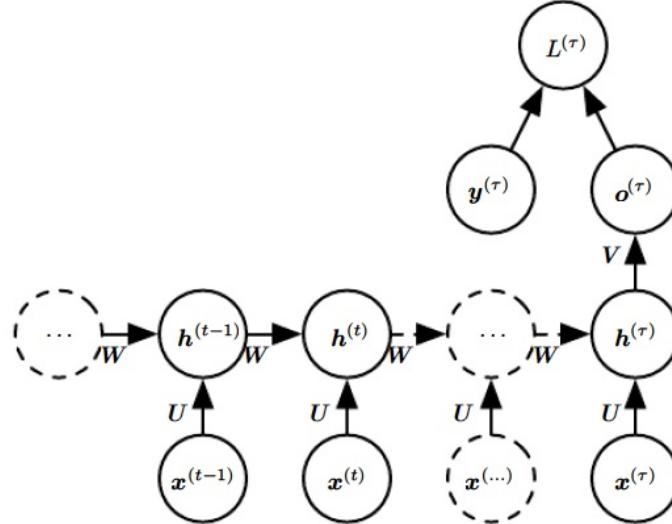


Figure 10.5: Time-unfolded recurrent neural network with a single output at the end of the sequence. Such a network can be used to summarize a sequence and produce a fixed-size representation used as input for further processing. There might be a target right at the end (as depicted here) or the gradient on the output  $\mathbf{o}^{(t)}$  can be obtained by back-propagating from further downstream modules.

## Clockwork RNNs

第一种是带遗忘门的Traditional LSTM。公式如下：

$$\begin{aligned} f_t &= \sigma_g(W_f x_t + U_f h_{t-1} + b_f) \\ i_t &= \sigma_g(W_i x_t + U_i h_{t-1} + b_i) \\ o_t &= \sigma_g(W_o x_t + U_o h_{t-1} + b_o) \\ c_t &= f_t * c_{t-1} + i_t * \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c) \\ h_t &= o_t * \sigma_h(c_t) \end{aligned}$$

前三行是三个门，分别是遗忘门f, 输入门i, 输出门o, 输入都是 $x_t, h_{t-1}$ , 只是参数不同，然后要经过一个激活函数把值缩放到[0,1]之间，第四行 $c_t$ 是cell state, 由上一时刻的 $c_{t-1}$ 和输入得到，两者相互独立。如果遗忘门 $f_t$ 取0的话，那么上一时刻的状态就会全部被清空，然后只关注此时刻的输入。输入门 $i_t$ 决定是否接收此时刻的输入，最后输出门 $o_t$ 决定是否输出cell state。

$$\hat{c} = \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c)$$

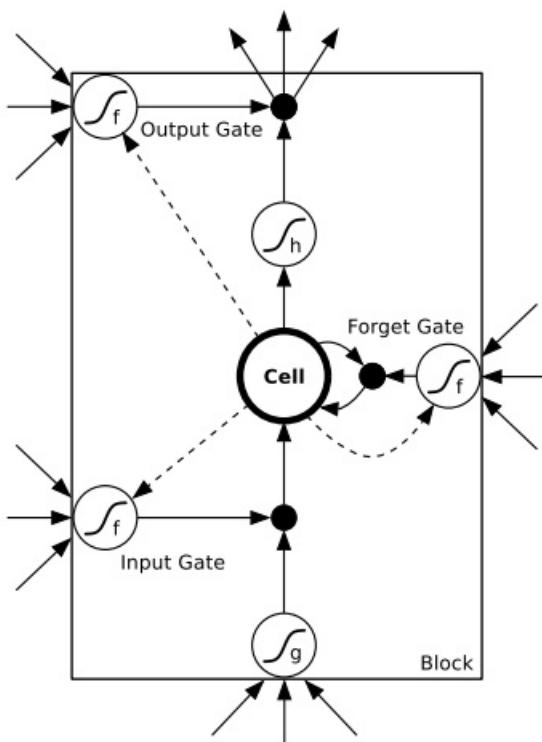
因此有 $c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \hat{c}$ 。

这样一来cell state的更新来源就明显了，一部分是上时刻的自己，一部分是new memory content，而且两个来源是相互独立地由两个门控制的。遗忘门控制是否记住以前的那些特征，输入们决定是否接受当前的输入。后面可以看到GRU其实把这两个门合二为一了。

第二种是带遗忘门的Peephole LSTM，公式如下：

$$\begin{aligned} f_t &= \sigma_g(W_f x_t + U_f c_{t-1} + b_f) \\ i_t &= \sigma_g(W_i x_t + U_i c_{t-1} + b_i) \\ o_t &= \sigma_g(W_o x_t + U_o c_{t-1} + b_o) \\ c_t &= f_t * c_{t-1} + i_t * \sigma_c(W_c x_t + b_c) \\ h_t &= o_t * \sigma_h(c_t) \end{aligned}$$

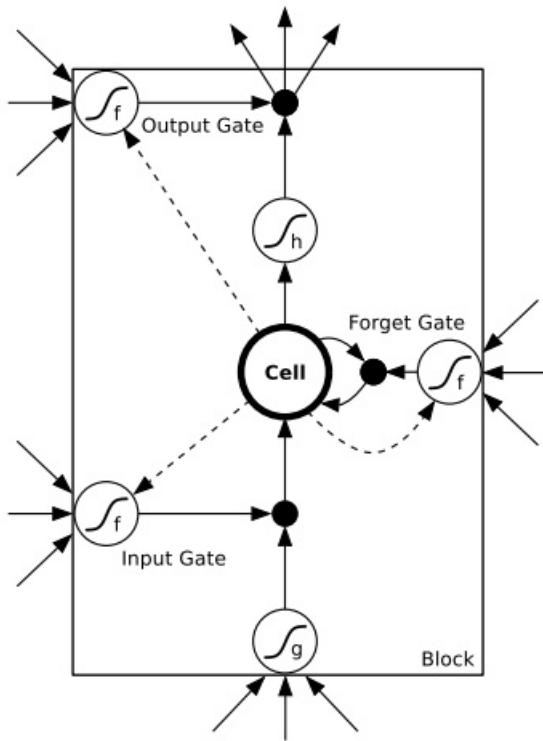
和上面的公式比较，发现只是把 $h_{t-1}$ 换成了 $c_{t-1}$ ，即三个门的输入都改成了 $[x_t, c_{t-1}]$ ，因为是从cell state里取得信息，所以叫窥视管(peephole)。把这两种结构结合起来，可以用如下图描述：



图中连着门的那些虚线都是peephole。三个输入都是 $[x_t, h_{t-1}, c_{t-1}]$

## GRU

和上面的公式比较，发现只是把 $h_{t-1}$ 换成了 $c_{t-1}$ ，即三个门的输入都改成了 $[x_t, c_{t-1}]$ ，因为是从cell state里取得信息，所以叫窥视管(peephole)。把这两种结构结合起来，可以用如下图描述：



图中连着门的那些虚线都是peephole。三个输入都是 $[x_t, h_{t-1}, c_{t-1}]$

## GRU

参考[循环神经网络\(RNN, Recurrent Neural Networks\)介绍](#)

GRU这个结构2014年才出现，结构与LSTM类似，效果一样，但是精简一些，参数更少。公式如下：

$$z_t = \sigma(W_z x_t + U_z h_{t-1})$$

$$r_t = \sigma(W_r x_t + U_r h_{t-1})$$

$$\hat{h}_t = \tanh(W x_t + U(r_t * h_{t-1}))$$

$$h_t = (1 - z_t) * h_{t-1} + z_t * \hat{h}_t$$

四行的解释如下：

$z_t$ 是update gate，更新activation时的逻辑门。

$r_t$ 是reset gate，决定candidate activation时，是否要放弃以前的activate  $h_t$

$\hat{h}_t$ 是candidate activation，接收 $[x_t, h_{t-1}]$

$h_t$ 是activation，是GRU的隐层，接收 $[h_{t-1}, \hat{h}_t]$ 。



# 第七章 推荐系统

本章的结构如下：

1. 推荐方法的分类
  - i. 协同过滤方法
  - ii. 基于内容的推荐
  - iii. 基于知识的推荐
2. 点击率预测
3. 推荐系统算法的评估

推荐系统在数学上就是一个超大规模稀疏矩阵的分解与重构问题，推荐实际上就是寻找User-Item矩阵中本该不为0而实际为0的矩阵元。对矩阵分块，实现的就是聚类功能，可以有基于Item的聚类，也可以有基于User的聚类，因此，要研究怎么有效的对矩阵进行分块。

推荐系统中的Matrix Factorization(MF)或者Dimensionality Reduction，实际上就是数学SVD，因此推荐系统中这些算法也称为SVD模型。

## 推荐算法分类<sup>1</sup>

1. 协同过滤推荐算法	基于记忆(Memory-based CF)	基于用户( User-based),相似度
CF:Collaborative Filtering		基于物品(Item-based), 相似度
	基于模型(Model-based CF)	隐因子模型(SVD,PCA), 朴素贝叶斯分类
2. 基于内容的推荐算法(CB:Content-Based)	基于信息检索	TF-IDF
		基于Rocchio的CB推荐算法
		基于决策树, 基于线性分类, 基于朴素贝叶斯, 基于KNN
3. 基于知识的推荐算法(KB:Knowledge-based)	关联知识与关联规则挖掘	Apriori
	约束知识与约束推荐算法	约束推荐算法

基于内容的推荐：基于用户的浏览记录，购买记录建立用户画像。基于物品的描述信息，提取物品特征，建立物品画像。

## 不同推荐算法的优缺点

1. 协同过滤推荐算法：CF的优点：不需要知道物品的内容描述，容易实现用户潜在兴趣的挖掘；缺点：新用户/新物品的冷启动问题，推荐的可解性差。
2. 基于内容的推荐算法：CB的优点：用户间独立性，可解性，新物品的冷启动容易解决。缺点：新用户的冷启动问题难以解决，对用户潜在的兴趣挖掘难以实现，难以提取物品的特征。
3. 基于知识的推荐算法：KB推荐方法中的应用局限。

## 不同推荐算法之间的融合

怎么通过解决一些常见的推荐系统问题，比如冷启动？

## 推荐系统算法的评估

### 矩阵分解

U-I矩阵是一个大的稀疏矩阵，我们需要寻找矩阵的一个低秩分解，实际上就是一个奇异值分解(SVD)。

$$V = UM$$

评分矩阵  $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , SVD实际上就是去找到两个矩阵： $U \in \mathbb{R}^{f \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{f \times m}$ , 其中矩阵U表示 User 和 feature 之间的联系，矩阵V表示 Item 和 feature 之间的联系。 $f \ll m, f \ll n$ 。这样就完成了矩阵的分解。实际计算中，我们并不是通过常规的求本征值本征矢的SVD来做分解，而是通过最小二乘加正则约束来实现分解。

### SVD存在的问题

会出现矩阵元为负数的非现实情况。因此有了非负矩阵分解。

## 一些需要处理的问题

1. 怎么有效的对矩阵进行低秩分解？能否针对不同场景总结出不同的分解方法？
2. 怎么设定求解的损失函数？是欧氏距离而是L1距离？这得回到我们的业务要求，如果U-I矩阵的矩阵元就是消费的金额，是否损失函数中曼哈顿距离比欧氏距离更好？
3. 正则项怎么加？
4. 隐变量个数怎么选择？
5. 怎么加显式反馈数据(explicit feedbacks)和隐式反馈(implicit feedbacks)数据？
6. 怎么设置损失函数？损失函数应该包括哪些项目？
7. 怎么有效的为矩阵分块？矩阵分块实际上实现的就是聚类。

1. 牛温佳《用户网络行为画像》[←](#)

# 计算广告学概论<sup>1</sup>

## 一些概念

CPM:Cost per Mille,千次展览付费  
RPM:Revenue per Mille千次展览收益  
CPC:Cost per Click按点击付费  
CPT:Cost Per Time按时间付费  
CPS:Cost Per Sale按销售额付费  
CPA:Cost per Action按转化付费  
ROI:Return On Investment 投入产出比  
RTB:Real Time Bidding  
ADN:ad Net-work 广告网络  
Auction-based advertising:竞价广告  
Search ad:搜索广告  
GSP:Generalized Second Price广义第二高价  
DSP:Demand Side Platform 需求方平台

## 优化目标

eCPM:excepted Cost Per Mille,千次展示期望收入  
 $ePCM = \text{点击率} \times \text{点击价值}$   
流量塑形:在有些情况下,我们可以主动地影响流量,以利于合约的达成。  
搜索广告是典型的竞价广告,是整个在线广告中份额最大的部分。

## 定价问题

常见的两种:GSP与基于纳什均衡的VCG(Vickrey-Clarke-Groves)定价策略。  
GSP(广义第二高价):对赢得每一个位置的广告主,都按照他下一位的广告位置出价来收取费用。  
基于纳什均衡。  
 $ePCM$ 等于点击率乘以出价  $r = u \cdot v$   
一般有如下变形:  $r = u^k \cdot v$  其中k是价格挤压(Squashing)因子.

## 重定向

把那些曾经对广告主服务发生明确兴趣的用户找出来,向他们投放该广告主的广告。

## 常用的相似度

### 余弦相似度

<sup>1</sup>. 刘鹏《计算广告--互联网商业变现的市场与技术》[←](#)

## 协同过滤算法

协同过滤主要利用用户群过去的行为与意见来预测当前用户最可能喜欢的东西。他的优点是，只需要知道用户-物品评分矩阵，不需要知道物品的任何信息。下面就是一个典型的例子，我们给出用户-物品矩阵，用已知的数据来预测未知的数据：<sup>1</sup>

	物品1	物品2	物品3	物品4	物品5
Alice	5	3	4	4	?
用户1	3	1	2	3	3
用户2	4	3	4	3	5
用户3	3	3	1	5	4
用户4	1	5	5	2	1

我们需要利用用户1, 2, 3, 4的数据，以及Alice的部分数据来预测Alice对物品5的评分。有不同的方法来预测Alice对物品5的评分，我们可以根据Alice已有的数据，来计算Alice与其它用户的Pearson的相关系数，寻找相似度最高的用户，再给出一个评分。

## 基于用户的最近邻推荐

### Pearson相似系数

$U = [u_1, \dots, u_n]$  代表用户集,  $P = [p_1, p_2, \dots, p_m]$  代表物品集合, 用  $R$  代表评分项  $r_{i,j}$  的  $n \times m$  评分矩阵,  $\bar{r}_a$  代表用户  $a$  的平均评分。

$sim(a, b) = \frac{\sum_{p \in P} (r_{ap} - \bar{r}_a)(r_{bp} - \bar{r}_b)}{\sqrt{\sum_{p \in P} (r_{ap} - \bar{r}_a)^2} \sqrt{\sum_{p \in P} (r_{bp} - \bar{r}_b)^2}}$   
只针对 a, b 已有的公共数据进行计算。比如 Alice 与 用户1 只计算物品 1, 2, 3, 4 上的 Pearson 相似系数。

基于待计算用户最相似的  $N$  个用户(样本)进行预测，基于以下公式预测用户  $a$  对物品  $p$  的评分：

$$pred(a, p) = \bar{r}_a + \frac{\sum_{b \in N} sim(a, b) * (r_{bp} - \bar{r}_b)}{\sum_{b \in N} sim(a, b)}$$

一般用户的近邻数目选择在 20~50 之间。

基于用户的最近邻推荐的缺点是，由于大型商城用户太多，计算最近邻太费时间，而且用户的偏好数据容易变更。因此有下面的基于物品的最近邻推荐，物品的属性数据很难变更。

## 基于物品的最近邻推荐

通常我们用余弦相似度来计算用品  $a, b$  的相似度：

$$sim(a, b) = \frac{ab}{|a||b|}$$

为了考虑到用户的评价评分，因此有了下面的改进的余弦相似度：

$$sim(a, b) = \frac{\sum_{u \in U} (r_{ua} - \bar{r}_a)(r_{ub} - \bar{r}_b)}{\sqrt{\sum_{u \in U} (r_{ua} - \bar{r}_a)^2} \sqrt{\sum_{u \in U} (r_{ub} - \bar{r}_b)^2}}$$

其中  $U$  是所有同时给物品  $a$  和  $b$  评分的用户集合。

通过物品之间的相似度来预测用户对未评分物品的评分，在上面例子中，就是通过物品 5 与 物品 1, 2, 3, 4 的相似度，以及 Alice 对 物品 1, 2, 3, 4 的评分来预测 Alice 对 物品 5 的评分：

$$pred(u, p) = \frac{\sum_{i \in ratedItems(u)} sim(i, p) * r_{ui}}{\sum_{i \in ratedItems(u)} sim(i, p)}$$

$u$  为 Alice,  $p$  是物品 5,  $ratedItems(u)$  为 物品 1, 2, 3, 4。实际中  $ratedItems(u)$  不会是所有物品，近邻的规模也是一个固定值。

## 基于模型的推荐技术

协同过滤方法主要介绍两种：

1. SVD
2. pLSA

<sup>1</sup>. 《推荐系统》Dietmar Jannach, P9

# FM(Factorization Machines),FFM

## FM

一般的线性模型为:

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$$
 一般模型中, 各个特征是独立考虑的, 没有考虑特征之间的相互关系。如果考虑特征 $x_i, x_j$ 之间的相互关系, 模型修改如下:

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_{ij} x_i x_j$$

如果系统的特征比较多的话, 计算复杂度会大大提升。为了降低时间复杂度, 我们引入了辅助向量latent vector

$$\mathbf{V}_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}]^T$$

, 辅助变量是描述变量之间的相关性。模型修改如下:

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (V_i, V_j) x_i x_j$$

以上就是FM模型。k是超参数, 一般娶30或者40。时间复杂度是 $O(kn^2)$ , 可通过如下方式化简。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (V_i, V_j) x_i x_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (V_i, V_j) x_i x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V_i, V_i) x_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{f=1}^n (\sum_{i=1}^n v_{if} x_i)^2 - \sum_{i=1}^n v_{if}^2 x_i^2 \end{aligned}$$

通过对每个特征引入latent vector $\mathbf{V}_i$ , 并对公式进行化简, 可以把时间复杂度降为 $O(kn)$ .

## 隐语义模型

LFM(Latent factor model): 通过隐含特征(Latent Factor)联系用户兴趣和物品.

LFM通过如下公式计算用户u对物品i的兴趣:

$$Preference(u, i) = r_{ui} = p_u^T q_i = \sum_{k=1}^K p_{u,k} q_{i,k}$$

公式中 $p_{u,k}$ 和 $q_{i,k}$ 是模型的参数, 其中 $p_{u,k}$ 度量了用户u的兴趣和第k个隐类的关系。而 $q_{i,k}$ 都凉了第k个隐类和物品i之间的关系。

$p_{u,k}, q_{i,k}$ 通过如下方式求解:

$$C = \sum_{(u,i) \in K} (r_{ui} - \hat{r}_{ui})^2 = \sum_{(u,i) \in K} (r_{ui} - \sum_{k=1}^K p_{u,k} q_{i,k})^2 + \lambda ||p_u||^2 + \lambda ||q_i||^2$$

SVD++

## 指标

1. 准确率
2. 召回率
3. 覆盖率
4. 多样性

## 非负矩阵分解

$N * p$ 数据矩阵 $\mathbf{X}$ 近似表示为:

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{WH}$$

其中:  $\mathbf{W} \in R^{N \times r}$ ,  $\mathbf{H} \in R^{r \times p}$ ,  $r \leq \max(N, p)$ , 我们假定  $x_{ij}, w_{ik}, h_{kj} \geq 0$ .

矩阵 $\mathbf{W}, \mathbf{H}$ 通过最大化下面似然函数确定:

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p [x_{ij} \log(\mathbf{WH})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij}]$$

这个从一个 $x_{ij}$ 满足均值为 $(\mathbf{WH})_{ij}$ 的泊松分布的模型的似然函数。

通过梯度下降法可以求解。



## SVD在推荐系统的应用

假设我们现在有评分矩阵  $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , SVD 实际上就是去找到两个矩阵:  $U \in \mathbb{R}^{f \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{f \times m}$ , 其中矩阵  $U$  表示 User 和 feature 之间的联系, 矩阵  $M$  表示 Item 和 feature 之间的联系。大家这时候肯定会想, 我们的评分矩阵里面一般会有很多缺失值, 那要怎么去得到  $U$  和  $M$  呢? 实际上, 这两个矩阵是通过学习的方式得到的, 而不是直接做矩阵分解。我们定义如下的损失函数:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I_{ij} (V_{ij} - p(U_i, M_j))^2 + \frac{k_u}{2} \sum_{i=1}^n \|U_i\|^2 + \frac{k_m}{2} \sum_{j=1}^m \|M_j\|^2$$

其中  $p(U_i, M_j)$  表示我们对用户  $i$  对 物品  $j$  的评分预测:

$$p(U_i, M_j) = U_i^T M_j$$

梯度下降:

$$-\frac{\partial E}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^m I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) M_j) - k_u U_i$$

$$-\frac{\partial E}{\partial M_j} = \sum_{i=1}^n I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) U_i) - k_m M_j$$

实际上, 用户的评分与用户的习惯, 以及该物品的总体评分水平有关, 因此可以加上用户的均值与物品的均值。

$$\hat{r}_{ui} = \mu + b_i + b_u + \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u$$

$\mu$ : 训练集中所有记录的评分的全局平均数。在不同网站中, 因为网站定位和销售的物品不同, 网站的整体评分分布也会显示出一些差异。比如有些网站中的用户就是喜欢打高分, 而另一些网站的用户就是喜欢打低分。而全局平均数可以表示网站本身对用户评分的影响。

$b_u$ : 用户偏置(user bias)项。这一项表示了用户的评分习惯中和物品没有关系的那种因素。比如有些用户就是比较苛刻, 对什么东西要求都很高, 那么他的评分就会偏低, 而有些用户比较宽容, 对什么东西都觉得不错, 那么他的评分就会偏高。 $b_i$ : 物品偏置(item bias)项。这一项表示了物品接受的评分中和用户没有什么关系的因素。比如有些物品本身质量就很高, 因此获得的评分相对都比较高, 而有些物品本身质量很差, 因此获得的评分相对都会比较低。这个时候我们的损失函数变为:

$$E = \sum_{(u,i) \in k} (r_{ui} - \mu - b_i - b_u - \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u) + \lambda (\|\mathbf{p}_u\|_2 + \|\mathbf{q}_i\|_2 + b_u^2 + b_i^2)$$

<sup>1</sup> [SVD在推荐系统中的应用](#)

## 基于内容的推荐算法

对物品特征的描述称为“内容”。协同过滤方法不需要用到物品的任何描述信息，如果我们想通过物品的特性和用户的偏好记录来进行推荐，协同过滤方法是不可以做到的，因此有了我们这节要讨论的基于内容的推荐方法。尽管这种方法必须依赖于关于物品和用户偏好的额外信息，但是它不需要巨大的用户群体或者评分记录，也就是说，只有一个用户也可以产生推荐列表。

关键

1. 建立物品画像。
2. 建立用户画像。
3. 怎么通过一组矢量来刻画物品/用户

怎么通过物品的内容描述来确定物品的相似程度，也就是文本分类问题；通过文本分类来进行物品的分类。也就是，把基于内容推荐的算法变成一个文本分类的问题，因此我们主要会利用信息检索和信息过滤领域中的技术。比如TF-IDF，代表词频和反文档频率；向量空间文档模型。

### TF-IDF

TF-IDF(Term Frequency-Inverse Document Frequency)基于这样一个假设：若一个词在目标文档中出现的频率高且在其他文档中出现的频率低，那么这个词就可以用来区分出目标文档。可以通过如下方式进行计算。IDF一般去如下的表达式。

$$TF - IDF(w, D) = TF(w, D) * IDF(w, D) = f(w, D) * \log\left(\frac{C}{DF(w)}\right)$$

TF-IDF(w,D)是词w在文本D中TF-IDF分数。

TF(w,D)表示词w在文档D中的频率，也就是词w在文档D中出现的频率除以文档D中词的总数。

IDF(w,D)是词w的逆文档频率，C是该语料库中的文本数，DF(w)是语料库中含有词w的文本数目。

TF-IDF模型可以用来做为文本关键词提取，以及文本相似性计算(一般用余弦相似性)，因此可以用来做聚类，适用于无监督学习。

以电影为例，将某电影总所有的文档，比如某电影所有的评语，通过TF-IDF进行矢量化，再与特定的系数相乘求和，得到这电影的综合评估向量，再与电影的基本属性结合，构建电影的物品画像。对所有的电影建立物品花香之后，就可以计算电影之间的相似度。再建立用户画像，就可以为用户做出推荐<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>. 《用户网络行为画像》牛温佳 P101 ↵

## 基于知识的推荐

协同过滤和基于知识的推荐系统各有优势，但是在很多情况下这些方法并不是最好的。比较典型的是，我们并不会频繁的购买房屋、汽车或者计算机。所以在这种情况下，纯粹的CF系统会由于评分数据很少而效果不好。此外，时间跨度因素的作用也很重要。比如，5年前对计算机的评分内容对基于内容推荐来说就不太合适了，对汽车等更新换代比较快的产品就是这样，因为用户偏好会随着生活方式或者家庭状况的改变而改变。最后，在一些更为复杂的产品领域，比如汽车，用户经常希望明确定义他们的需求，比如：“汽车的最高价是x，汽车颜色应该是黑色的”。这样需求的形式化处理并不是纯粹协同过滤和基于内容的推荐架构所擅长解决的。

基于知识的推荐系统可以帮助我们解决上面的问题。由于不需要评分数据就能推荐，因此不存在冷启动问题。推荐结果不依赖单个用户评分：要么是以用户需求和产品之间相似度的形式，要么是根据明确的规则。

基于知识推荐系统的两种基本类型是基于约束推荐和基于实例推荐。

## LTR

LTR or machine-learned ranking(MLR)是运用机器学习,典型的监督,半监督或者强化学习来为信息检索系统构建排序模型

排序学习可以在信息检索(IR),NLP, DM等领域被广泛应用,典型的应用有文献检索,专家检索系统,定义查询系统,协同过滤,问答系统,关键词提取,文档摘要还有机器翻译等。

互联网搜索方面的一个新趋势是使用机器学习方法去自动的建立评价模型 $f(q,d)$ 。

对于标注训练集,选定LTR方法,确定损失函数,以最小化损失函数为目标进行优化即可得到排序模型的相关参数,这就是学习过程。预测过程就是将待预测结果输入到学习到的排序模型中,即可以得到结果的相关得,利用该得分进行排序即可得到待预测结果的最终顺序。

# Building Real World Intelligent Systems

## 情感分析(Sentiment analysis)常用的模型

- Bing Liu's Lexicon,具体的可以参看[这个网站](#)
- MPQA Subjectivity Lexicon
- Pattern Lexicon
- SentiWordNet Lexicon
- VADER Lexicon
- AFINN Lexicon是最简单与最流行的lexicons.

## 文本分类系统的搭建

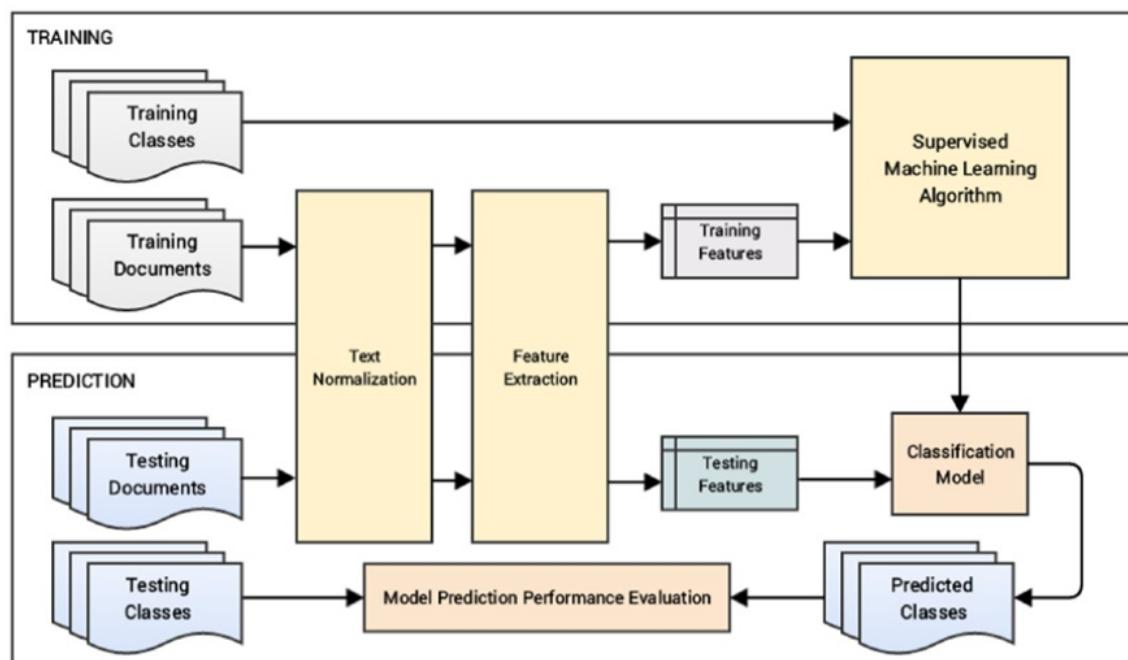


Figure 7-4. Blueprint for building an automated text classification system (Source: *Text Analytics with Python*, Apress 2016)

## Silhouette Score

K-means找到最佳clusters数目的标准。

Kernel里面有详细的教程与讨论。

## 第八章 项目工作

这章主要通过Kaggle实战来提升自己的运用的能力，最主要的是特征提取的能力。

# 深度学习在晶圆检测中的应用研究

要从这个项目中深挖出整个深度学习，也就是从这个项目中涉及到CNN, RNN,DNN.以及训练技巧以及ML。图像处理与信号处理。也就是要体现出深度与广度。三段经历代表深度学习，编程，最优化(机器学习)三大领域，要会发现亮点，也就是自己的特色。注意深度，附带是广度。

## 项目背景与目的

通过深度学习来提升光刻模型的性能。随着芯片制造中芯片节点(晶体管栅极的最小线宽(栅宽))变小，光成像过程中光的波动性越来越显著，几何光学要被波动光学所修正。光刻成像的模型也越来越复杂，但是，即使模型越来越复杂，我们通过光刻的成像模型也与显示的成像结果存在一些差距，尤其在边角处。这些由成像模型导致的错误，很大部分可以由有经验的工程师来辨别出来，这些错误区别于真实的印刷错误。我们的目的是想通过深度学习来减小我们的模型错误而保留真实的印刷错误。可以认为是把模型导致的错误当成噪声，我们需要抑制这些噪声，而把真正的印刷错误当成真实的信号来对待，我们需要保留这些信号而抑制噪声。

一个问题是：不加特殊的处理，你在抑制噪声的时候，也同时抑制了真正的信号。那你的网络要怎么处理才能保留住信号而抑制噪声？

## 问题的延伸

我们真正想要找的是印刷错误(真正的错误)，而模型导致的错误是虚假的错误。因此，我们可以当成一个二分类问题去求解。但是不能漏掉一个真实的错误。

## 背景

随着半导体工艺中，芯片中的尺寸越来越小，光学衍射效应越来越明显，单纯的几何光学(初中物理老师告诉你，光是直线传播的，这其实说的是，光是粒子，但光通过狭窄的缝隙会发生衍射效应，这时，光不是直线传播的了)以及不适用，要考虑光的衍射效应。光通过Musk就相当于一次傅里叶变化，从时域变到了频率域。再通过棱镜，又相当于一次傅里叶变换，从频率域变到时域。但棱镜的尺寸有限，因此只接收了低频波，因此，用图像处理的话来说，棱镜的作用就是一个低通滤波器。去掉了高频部分，因此投影到wafer(晶圆)上的图案不再菱角分明，而是在边界处会比较圆滑。

如果没有一些傅里叶光学的背景，你们听起来会比较费劲，但是如果你们有图像处理的背景的话，就记住把Musk上的图案刻蚀到晶圆上就是经历了两次傅里叶变换再加一个低通滤波器。

光通过单缝后，其频谱是连续的，但是经过周期性(结构)缝，其频谱就是离散的，如果为了节约棱镜的开支，就只能取很低的频谱。

光学建模是个逆问题(逆问题的例子，就是CT，通过收集到的信号来反推身体的内部结构)。(怎么把逆问题与深度学习，机器学习联系起来？)，再通俗点，它实际上和机器学习，深度学习要处理的问题是一样的，就是求解一个模型，就是train一个model。正向过程就是你已经训练好了一个模型(取啥例子？)，然后输入一张图，看它的分类是啥，这很容易，难得是，我有一堆分类好的图片，让你训练一个model。逆问题就是一个优化问题，因此就涉及到一些优化算法，这时候考点就来了？有哪些优化算法，总结下，有两种，线性搜索方法(linear search)以及 trust region。但是对于这个求逆问题而言，是很复杂的，直接离散的话，参数基本在10的15次方以上，总之，这个求逆问题是很难的，即使求出来，也不会很准。因此，我们有两个研究的方向。直接通过光学图像(也就是将要刻蚀在wafer上的电路板)来反求印刷这张图像的模板(Musk)，其实这个光刻就像拍照片，拍的物体(比如风景)就是Musk, wafer就相当于胶卷，wafer上的图像就相当于风景在胶卷上的投像。

第一个方向是，直接通过光学图像(也就是将要刻蚀在wafer上的电路板)来反求印刷这张图像的模板(Musk)，我们的模型就是卷积网络，因为多层网络可以用来近似任何一个函数(通用近似定理 (Universal approximation theorem, 一译万能逼近定理) )指的是：如果一个前馈神经网络具有线性输出层和至少一层隐藏层，只要给予网络足够数量的神经元，便可以实现以足够高精度来逼近任意一个在  $R^n$  的紧子集 (Compact subset) 上的连续函数。只要神经元足够多，再加一个激活函数)，当然可以用来近似这个求逆过程。但是这条路风险很大，因此，我们有了第二条研究的路径，就是修正原有的物理模型，使得它更powerful，也就是说，我们仍然需要建立物理model，来进行求逆过程，得到一个物理的model，只是，这个model不是足够强大，会有一些缺陷，因此，我们想通过一个CNN来修正这个model，来让我们的模型更有效。这就是大致的背景。背景讲清楚了，我们就该讲我们是怎么做的了。

搭建GPU环境，装显卡驱动(显卡驱动，蓝屏)，cuda，cudnn，但是发现不能使用apt-get install东西，重装了很多次系统，装了不同的ubuntu系统，从12.04到16.04的五个不同版本，折腾了一周。(因此因为公司的IP保护，无线网卡解决问题)

我们一开始做了些尝试，用了CNN, VGG，遇到的问题(图像预处理，亚像素的偏移)，数据集不够，因为真实数据都是机密(IP)，不可以轻易拿到。自己去切割图像，通过有经验的人工来做分类。再通过翻转这些操作来增加数据集。此外，数据集也是很讲究的，你得保证同一数据集中的物理参数，焦距，偏振方向都是一致的，焦距不同，得到的图像模糊程度不同。

很长一段时间，我们都在用记忆卷积，反卷积的深度神经网络，都没发现很好的效果。后来使用了pre-trained model，因为我们的数据量少(30000张图)，但是经过CNN处理过的图像，并不比没有处理的图像好，这就尴尬了，因此，我们一直加深网络。

## 工具

Quardo 4000; Tensorflow

## 图像预处理

主要困难还是在于图像的收集，我们可以通过降低判定real-false的阈值来增加模型错误的图像数量，我们也需要人工来判定哪些错误是真实的印刷错误，哪些是由模型导致的错误。而人工标注是一件很费时间的事情。

我们输入的是我们模型产生的图像，而我们的target是真是拍摄到的芯片图像。这些都是数字图像，我们必须确保输入与输出的图像是同一个地方的，也就是图像必须真正的对齐，不能差任何一点，半个pixel也不能(查一点就会导致两图相减在边缘地方出现巨变)，但是最后发现我们的图像差了半个pixel，我们必须通过信号处理的方法来对齐我们的输入与输出图像。这些是数据预处理过程中遇到的真实问题。

## 数据集

图像大小:48\*48。  
数据集:一共31400张图片，训练集90%，一共28260张图，测试集10%，一共3140张图  
batch size大小5。  
一个epcoh(训练完28260张图)的时间是600s,即10分钟左右。

```
#batch_size = 5
#learn_rate = 0.0001
net = tflearn.input_data(shape=[None, 48, 48, 1])
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 3, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 1, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 1, 1)
Training Step: 1000 | total loss: 6.56844 | time: 118.655s
| Adam | epoch: 001 | loss: 6.56844 - acc: 0.7033 | val_loss: 8.57394 - val_acc: 0.6723 -- iter: 05000/28260
--
Training Step: 2000 | total loss: 6.26063 | time: 234.816s
| Adam | epoch: 001 | loss: 6.26063 - acc: 0.6907 | val_loss: 8.11802 - val_acc: 0.6762 -- iter: 10000/28260
--
Training Step: 3000 | total loss: 5.61156 | time: 351.264s
| Adam | epoch: 001 | loss: 5.61156 - acc: 0.7085 | val_loss: 7.88475 - val_acc: 0.6794 -- iter: 15000/28260
--
Training Step: 4000 | total loss: 6.61628 | time: 469.786s
| Adam | epoch: 001 | loss: 6.61628 - acc: 0.7000 | val_loss: 9.18316 - val_acc: 0.6804 -- iter: 20000/28260
--
Training Step: 5000 | total loss: 5.81782 | time: 586.015s
| Adam | epoch: 001 | loss: 5.81782 - acc: 0.6987 | val_loss: 7.58499 - val_acc: 0.6852 -- iter: 25000/28260
--
Training Step: 6000 | total loss: 5.99239 | time: 50.356ss
| Adam | epoch: 002 | loss: 5.99239 - acc: 0.7008 | val_loss: 6.78956 - val_acc: 0.6852 -- iter: 01740/28260
```

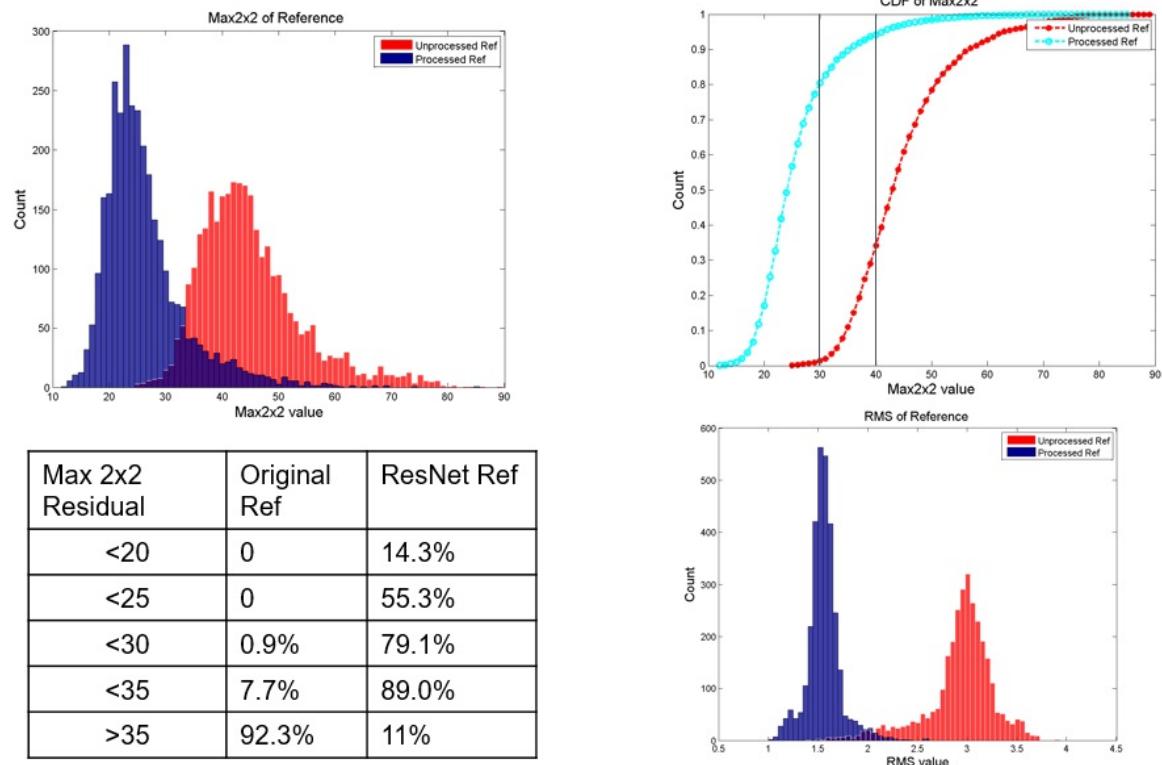
## 网络选择

从一开始的VGG到

```
#batch_size = 5
#learn_rate = 0.0001
net = tflearn.input_data(shape=[None, 48, 48, 1])
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.residual_block(net, 1, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 1, 64)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 1, 1)
Training Step: 1000 | total loss: 6.41052 | time: 88.615s
```

## 效果

通过我们的ResidualNN, 我们能很大的降低我们模型得到的图像与实际拍摄到的图像之间的差别, 也就是在Max2x2。(RMS怎么定义忘记了?)



原因是, 我们输入的图像已经很接近输出的图像, 因此, 我们只需要训练残差就可以了。

## 图像与信号处理

### Residual NN

**Residual NN**提出来的背景:

随着网络变深, 训练误差与测试误差得提高了。这是违反我们的训练的初衷的, 因为即使我们把26层后面的网络变成恒等映射, 效果也不会变差。

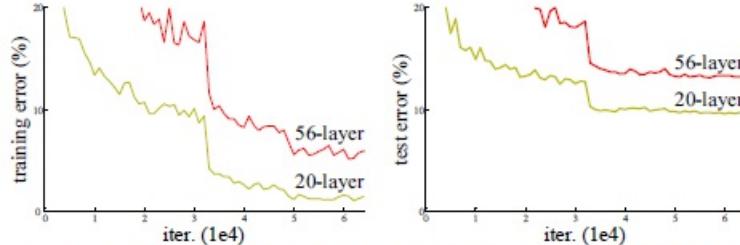


Figure 1. Training error (left) and test error (right) on CIFAR-10 with 20-layer and 56-layer “plain” networks. The deeper network has higher training error, and thus test error. Similar phenomena on ImageNet is presented in Fig. 4.

存在这种随着网络层数增加, 会出现如下两个问题:

1. 梯度消失或者爆炸, 导致训练难以收敛。这个问题可以通过normalized initialization 和intermediate normalization layers解决。
2. 随着深度增加, 模型的训练误差与测试误差会迅速下滑, 这不是overfit造成的。这种现象在CIFAR-10和ImageNet中都有提及。

**Residual-NN的实现**

参考He Kaiming的这篇文章

Residual Block的设计如下：

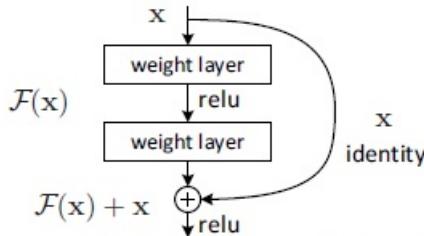


Figure 2. Residual learning: a building block.

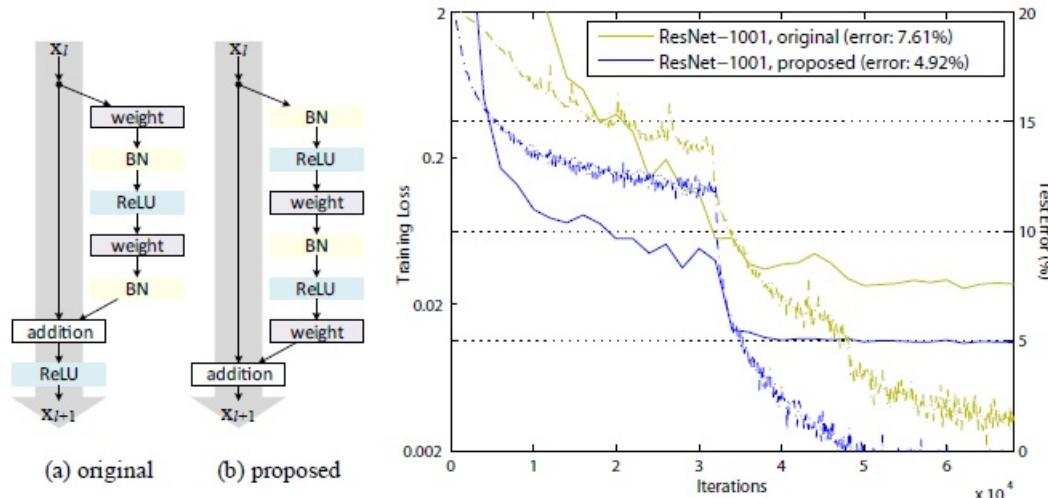
对于每一个Residual Units:

$$y_l = h(x_l) + F(x_l, W_l)$$

$$x_{l+1} = f(y_l)$$

其中函数h一般取恒等映射  $h(x_l) = x_l$ , 实验发现f取恒等映射能实现最快的误差下降与最低的训练误差;f是激活函数, 取ReLU。F的残差函数。

一个推荐的网络结构:



如果激活函数f取恒等映射  $y_l = f(y_l)$ , 则有:

$$x_{l+1} = x_l + F(x_l, W_l)$$

$$x_L = x_l + \sum_{i=l}^{L-1} F(x_i, W_i)$$

因此对于误差反向传播:

$$\frac{\partial e}{\partial x_l} = \frac{\partial e}{\partial x_L} \frac{\partial x_L}{\partial x_l} = \frac{\partial e}{\partial x_L} \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=l}^{L-1} F(x_i, W_i)\right)$$

因为  $\frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=l}^{L-1} F(x_i, W_i)$  不会常等于-1, 因此梯度不会消失, 即使当权重非常小的时候。

因此信号对于正向与反向传播, 可以直接的从一个单元传到另外一个单元。条件就是skip connection 函数h, 激活函数f是恒等映射时保证梯度不消失或者爆炸的关键。

他们使用的mini-batch是128, 用了2GPUs, 权重衰减是0.0001, 动量是0.9, 权重初始化了。详细的可以看上面给的论文链接。权重每30个epoch变成原来的十分之一。

**Residual NN模型效果:**

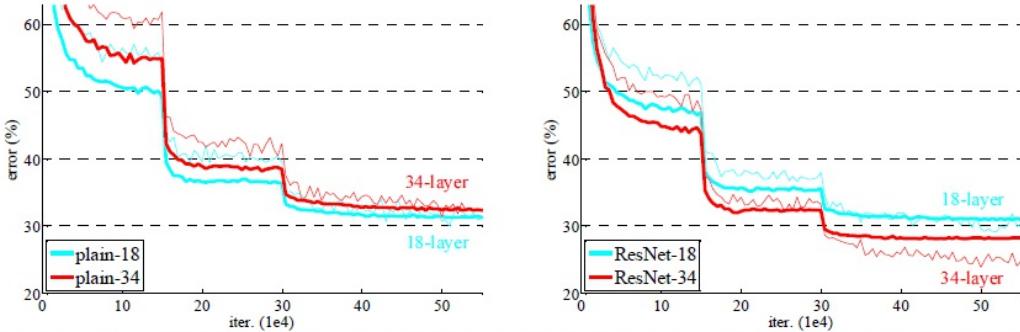


Figure 4. Training on ImageNet. Thin curves denote training error, and bold curves denote validation error of the center crops. Left: plain networks of 18 and 34 layers. Right: ResNets of 18 and 34 layers. In this plot, the residual networks have no extra parameter compared to their plain counterparts.

Resi-NN能解决以往随着模型加深训练与测试误差变大的现象。与其它网络的结果比较。

CIFAR-10	error (%)	CIFAR-100	error (%)
NIN [13]	8.81	NIN [13]	35.68
DSN [14]	8.22	DSN [14]	34.57
FitNet [15]	8.39	FitNet [15]	35.04
Highway [7]	7.72	Highway [7]	32.39
ELU [12]	6.55	ELU [12]	24.28
FitResNet, LSUV [16]	5.84	FitNet, LSUV [16]	27.66
ResNet-110 [1] (1.7M)	6.61	ResNet-164 [1] (1.7M)	25.16
ResNet-1202 [1] (19.4M)	7.93	ResNet-1001 [1] (10.2M)	27.82
ResNet-164 [ours] (1.7M)	5.46	ResNet-164 [ours] (1.7M)	24.33
ResNet-1001 [ours] (10.2M)	4.92 ( $4.89 \pm 0.14$ )	ResNet-1001 [ours] (10.2M)	<b>22.71</b> ( $22.68 \pm 0.22$ )
ResNet-1001 [ours] (10.2M) <sup>†</sup>	<b>4.62</b> ( $4.69 \pm 0.20$ )		

## 模型的改进(Simons)

是否可以通过逐渐加深网络来实现浅层的网络而具有强大的功能。具体步骤就是：

1. 一个浅层的网络进行end-end的训练，训练到一定程度的时候，进行第二步
  2. 沿用第一步的权重，通过以Residual Block来微调网络，减小误差，优化方法是SGD，但是我们要保证，每增加一层网络，总的模型的效果会更好。
  3. 循环第二步，直到结果符合我们期望的为止(误差到noise层)
- 理论上，这类似于机器学习中的Adaboost，是否可以分析它的误差会指数衰减？希望能像ML算法一样，能有数学理论来分析深度学习。通过理论指导，像搭积木一样来构建深度神经网络。

## 三大神经网络

### CNN

怎么实现最简单的CNN？

### RNN

### LSTM

### DNN

## 自编码

## 强化学习



## Fast项目

要从这个项目中体现出你对语言的驾驭能力，也就是编程能力。各大语言的区别，主要是C++，Java与python。OOP，还有就是模式设计这些。

### C++基础

1. 指针与引用
2. C++的OOP
3. C++的继承与多态
4. C++与Java的最大区别
5. 智能指针

### Windows编程

1. Windows的消息机制
2. 多线程与同步
3. 进程间通讯
4. Socket

### 软件架构

1. 泛型编程
2. STL--标准模板库
3. 模式设计

### 算法与数据结构

1. 数据结构
2. 排序算法

## Miura项目

要从这个项目中你对这最优化问题的理解与实践。也就是能对不同的最优化算法能如数家珍，并能知道其适用场景。从最优化扯到ML, DL。还是多与机器学习靠拢，这就形成自己的三个方面。

## 最优化

### 一阶方法--梯度下降法

1. 随机梯度下降法
2. 动量方法
3. Adagrad
4. Adam
5. 特殊的一阶方法--共轭梯度法

### 二阶方法

1. 牛顿法
2. quasi-Netwon法
  - i. BFGS
  - ii. DFP

## 线性搜索

### Trust-region方法

1. L-M算法
2. Dog-Leg算法

## 约束最优化问题

1. 拉格朗日乘子理论
2. 罚函数法
3. 对偶性与方法

# Titanic

## Variable Description

Survived: Survived (1) or died (0)  
Pclass: Passenger's class  
Name: Passenger's name  
Sex: Passenger's sex  
Age: Passenger's age  
SibSp: Number of siblings/spouses aboard  
Parch: Number of parents/children aboard  
Ticket: Ticket number  
Fare: Fare  
Cabin: Cabin  
Embarked: Port of embarkation

## 常用的数据清洗技巧

### 导入数据

```
train = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\train.csv")
test = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\test.csv")
test_Y = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\gender_submission.csv")
```

### 导入库函数

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
# Handle table-like data and matrices
import numpy as np
import pandas as pd

# Modelling Algorithms
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
from sklearn.naive_bayes import GaussianNB
from sklearn.svm import SVC, LinearSVC
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier, GradientBoostingClassifier

# Modelling Helpers
from sklearn.preprocessing import Imputer, Normalizer, scale
from sklearn.cross_validation import train_test_split, StratifiedKFold
from sklearn.feature_selection import RFECV

# Visualisation
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.pylab as pylab
import seaborn as sns

# Configure visualisations
%matplotlib inline
mpl.style.use('ggplot')
sns.set_style('white')
pylab.rcParams['figure.figsize'] = 8, 6
```

### 数据的统计属性

```
train.shape ##数据的维度
train.head ##显示所有数据
```

## 相关系数与统计属性

In [6]: `train.describe()`

Out[6]:

	PassengerId	Survived	Pclass	Age	SibSp	Parch	Fare
count	891.000000	891.000000	891.000000	714.000000	891.000000	891.000000	891.000000
mean	446.000000	0.383838	2.308642	29.699118	0.523008	0.381594	32.204208
std	257.353842	0.486592	0.836071	14.526497	1.102743	0.806057	49.693429
min	1.000000	0.000000	1.000000	0.420000	0.000000	0.000000	0.000000
25%	223.500000	0.000000	2.000000	20.125000	0.000000	0.000000	7.910400
50%	446.000000	0.000000	3.000000	28.000000	0.000000	0.000000	14.454200
75%	668.500000	1.000000	3.000000	38.000000	1.000000	0.000000	31.000000
max	891.000000	1.000000	3.000000	80.000000	8.000000	6.000000	512.329200

In [7]: `train.corr()`

Out[7]:

	PassengerId	Survived	Pclass	Age	SibSp	Parch	Fare
PassengerId	1.000000	-0.005007	-0.035144	0.036847	-0.057527	-0.001652	0.012658
Survived	-0.005007	1.000000	-0.338481	-0.077221	-0.035322	0.081629	0.257307
Pclass	-0.035144	-0.338481	1.000000	-0.369226	0.083081	0.018443	-0.549500
Age	0.036847	-0.077221	-0.369226	1.000000	-0.308247	-0.189119	0.096067
SibSp	-0.057527	-0.035322	0.083081	-0.308247	1.000000	0.414838	0.159651
Parch	-0.001652	0.081629	0.018443	-0.189119	0.414838	1.000000	0.216225
Fare	0.012658	0.257307	-0.549500	0.096067	0.159651	0.216225	1.000000

## 相关系数, 分布, 类别图

```
def plot_correlation_map( df ):
    corr = train.corr()
    _, ax = plt.subplots( figsize =( 12 , 10 ) )
    cmap = sns.diverging_palette( 220 , 10 , as_cmap = True )
    _ = sns.heatmap(
        corr,
        cmap = cmap,
        square=True,
        cbar_kws={ 'shrink' : .9 },
        ax=ax,
        annot = True,
        annot_kws = { 'fontsize' : 12 }
    )

def plot_distribution( df , var , target , **kwargs ):
    row = kwargs.get( 'row' , None )
    col = kwargs.get( 'col' , None )
    facet = sns.FacetGrid( df , hue=target , aspect=4 , row = row , col = col )
    facet.map( sns.kdeplot , var , shade= True )
    facet.set( xlim=( 0 , df[ var ].max() ) )
    facet.add_legend()

def plot_categories(fd, cat, target, **kwargs):
    row = kwargs.get('row', None)
    col = kwargs.get('col', None)
    facet = sns.FacetGrid(fd, row = row, col = col)
    facet.map(sns.barplot, cat, target)
    facet.add_legend()

plot_correlation_map(train)
plot_distribution( train , var = 'Age' , target = 'Survived' , row = 'Sex' )
plot_categories(train, cat = 'Embarked', target = 'Survived')
```

`plot_correlation_map(train)`



## 类标签数字化

```
sex = pd.Series( np.where( train.Sex == 'male' , 1 , 0 ) , name = 'Sex' )
```

通过pandas产生一个新的数组，它是把原来sex中的male转化成1，其它的sex类别转化成0.

## 对类标签添加前缀

```
embarked = pd.get_dummies( train.Embarked , prefix='Embarked' )
```

原来Embarked的类标签是C, Q, S。现在添加了前缀Embarked\_，并且把原来的一个类分成了三个类。

In [47]: `embarked.head()`

Out [47]:

	Embarked_C	Embarked_Q	Embarked_S
0	0	0	1
1	1	0	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	0	1

## 缺失值填充

通过均值来填充

```
imputed = pd.DataFrame()
imputed[ 'Age' ] = train.Age.fillna( train.Age.mean() )
```

```
imputed[ 'Fare' ] = train.Fare.fillna( train.Fare.mean() )
imputed[ 'Pclass' ] = train.Pclass.fillna( train.Pclass.mean() )
```

## 数据拼接

```
DataSet = pd.concat([imputed, embarked, sex, train.Pclass, train.SibSp, train.Parch],axis = 1)
```

DataSet.shape就是(891,10)

## 构造训练数据

```
train_X = DataSet[0:891]
train_Y = train.Survived
```

## 模型选择与训练

```
model = RandomForestClassifier(max_depth=3, max_features='auto',n_estimators=100)
model.fit(train_X, train_Y)
print model.score(train_X, train_Y),model.score(test_X, test_Y)

0.8305274971941639 0.8851674641148325
```

当你选定一个模型后，就根据这个模型，进行相应的参数输入，最基本的包括输入(X,Y)，其它的就是模型参数的设定，这个你可以根据sklearn的API进行设置。当然有目的性的调参考验的就是你的理论功底了。

## 总的效果

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
# Handle table-like data and matrices
import numpy as np
import pandas as pd

from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
from sklearn.naive_bayes import GaussianNB
from sklearn.svm import SVC, LinearSVC
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier , GradientBoostingClassifier

# Modelling Helpers
from sklearn.preprocessing import Imputer , Normalizer , scale
from sklearn.cross_validation import train_test_split , StratifiedKFold
from sklearn.feature_selection import RFECV
import xgboost as xgb

train = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\\train.csv")
test = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\\test.csv")
test_Y = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\\gender_submission.csv")

imputed_train = pd.DataFrame()
imputed_train[ 'Age' ] = train.Age.fillna( train.Age.mean() )
imputed_train[ 'Fare' ] = train.Fare.fillna( train.Fare.mean() )
imputed_train[ 'Pclass' ] = train.Pclass.fillna( train.Pclass.mean() )
embarked_train = pd.get_dummies(train.Embarked, prefix = 'Embarked')
sex_train= pd.Series( np.where( train.Sex == 'male' , 1 , 0 ) , name = 'Sex' )
DataSet_train = pd.concat([imputed_train, embarked_train, sex_train, train.Pclass, train.SibSp, train.Parch],axis = 1)

imputed_test = pd.DataFrame()
imputed_test[ 'Age' ] = test.Age.fillna( train.Age.mean() )
imputed_test[ 'Fare' ] = test.Fare.fillna( train.Fare.mean() )
imputed_test[ 'Pclass' ] = test.Pclass.fillna( train.Pclass.mean() )
embarked_test = pd.get_dummies(test.Embarked, prefix = 'Embarked')
sex_test = pd.Series( np.where( test.Sex == 'male' , 1 , 0 ) , name = 'Sex' )
DataSet_test = pd.concat([imputed_test, embarked_test, sex_test, test.Pclass, test.SibSp, test.Parch],axis = 1)

test_X = DataSet_test[0:418]
train_X = DataSet_train[0:891]
train_Y = train.Survived
train_X.shape,train_Y.shape,test_X.shape,test_Y.shape
```

## 最终结果

使用SVM在Titanic数据上，训练集效果依次是线性SVM, GBDT,LR,RF,DT,KNN。最诡异的是，有事测试集上准确率比训练集上高。  
对于随机森林RF，会发现，一开始随着树的深度增加，RF整体的准确率会上升，也就是说，RF需要准确性高的(或者说bias小的)分类器做基函数，对于GBDT，发现随深度增加，准确率下降，也就是GBDT需要深度浅，variance很小的树作为分类器，这符合他们的原理。即RF基于bias小的基分类器，通过增加树的数目来降低variance, boosting基于variance小的基分类器，通过boost来降低bias。  
但是有个问题是，RF在100颗树时效果最好，选择1000, 10000都没有100的效果好。

```
In [78]: model = GaussianNB()
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.7710437710437711
test score =  0.7870813397129187

In [79]: model = DecisionTreeClassifier()
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.9820426487093153
test score =  0.8110047846889952

In [81]: model = RandomForestClassifier(max_depth=6, min_samples_leaf = 1, max_features='auto',n_estimators=100)
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.8664421997755332
test score =  0.8947368421052632

In [77]: model = LogisticRegression()
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.8024691358024691
test score =  0.9497607655502392

In [80]: model = GradientBoostingClassifier(max_depth=1,min_samples_leaf=3)
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.8148148148148148
test score =  0.9784688995215312

In [82]: model = SVC(kernel = 'linear')
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.7867564534231201
test score =  1.0
```

## 模型融合

对多个模型的结果取平均(投票)，作为最终的结果。比如拿SVM, LR, RF, GBDT的平均结果作为最终结果。

### 用几个模型筛选出较为重要的特征

```
def get_top_n_features(titanic_train_data_X, titanic_train_data_Y, top_n_features):
    # 随机森林
    rf_est = RandomForestClassifier(random_state=42)
    rf_param_grid = {'n_estimators': [500], 'min_samples_split': [2, 3], 'max_depth': [20]}
    rf_grid = model_selection.GridSearchCV(rf_est, rf_param_grid, n_jobs=25, cv=10, verbose=1)
    rf_grid.fit(titanic_train_data_X,titanic_train_data_Y)
    #将feature按Importance排序
    feature_imp_sorted_rf = pd.DataFrame({'feature': list(titanic_train_data_X), 'importance': rf_grid.best_estimator_.feature_importances_}).sort_values('importance', ascending=False)
    features_top_n_rf = feature_imp_sorted_rf.head(top_n_features)['feature']
    print('Sample 25 Features from RF Classifier')
    print(str(features_top_n_rf[:25]))

    # AdaBoost
    ada_est = ensemble.AdaBoostClassifier(random_state=42)
    ada_param_grid = {'n_estimators': [500], 'learning_rate': [0.5, 0.6]}
    ada_grid = model_selection.GridSearchCV(ada_est, ada_param_grid, n_jobs=25, cv=10, verbose=1)
    ada_grid.fit(titanic_train_data_X, titanic_train_data_Y)
    #排序
    feature_imp_sorted_ada = pd.DataFrame({'feature': list(titanic_train_data_X), 'importance': ada_grid.best_estimator_.feature_importances_}).sort_values('importance', ascending=False)
```

```
features_top_n_ada = feature_imp_sorted_ada.head(top_n_features)[‘feature’]

# ExtraTree
et_est = ensemble.ExtraTreesClassifier(random_state=42)
et_param_grid = {‘n_estimators’: [500], ‘min_samples_split’: [3, 4], ‘max_depth’: [15]}
et_grid = model_selection.GridSearchCV(et_est, et_param_grid, n_jobs=25, cv=10, verbose=1)
et_grid.fit(titanic_train_data_X, titanic_train_data_Y)

#排序
feature_imp_sorted_et = pd.DataFrame({‘feature’: list(titanic_train_data_X), ‘importance’: et_grid.best_estimator_.feature_importances_}).sort_values(‘importance’, ascending=False)
features_top_n_et = feature_imp_sorted_et.head(top_n_features)[‘feature’]
print(‘Sample 25 Features from ET Classifier:’)
print(str(features_top_n_et[:25]))

# 将三个模型挑选出来的前features_top_n_et合并
features_top_n = pd.concat([features_top_n_rf, features_top_n_ada, features_top_n_et], ignore_index=True).drop_duplicates()

return features_top_n
```

# Customer Segmentation

制定简单的方案花不了多少时间，尤其在具有理论基础的前提下。花时间的是怎么用代码去实现你的方案。只有在对语言(这个工具)非常熟悉的时候你才能快速的实现你的demo。

## 问题与技术路线

1. 要处理的问题是什么?
  - i. 客户分割
2. 要实现什么结果?
  - i. 把客户分割成不同的几个类别
3. 数据要怎么处理?
  - i. 数据清洗(去除错误的项目，比如购物数量小于0, 无意义的项目，比如用户ID是nan项)
  - ii. 以客户的ID作为标识，来对客户进行分类
4. 怎么实现我们的目的?
  - i. 通过客户的三个特征(RFM, Recency, Frequency, Monetary Value), 再用K-means进行聚类
  - ii. Recency:客户最近多长时间购物过
  - iii. Frequency:客户购物的频率
  - iv. Monetary value:客户一共花了多少钱

groupby("CustomerID").sum().reset\_index() 的作用就是根据CustomerID进行聚类，再对同一CustomerID的amount进行求和。

```
customer_monetary_val = cs_df[['CustomerID', 'amount']].groupby("CustomerID").sum().reset_index()
customer_history_df = customer_history_df.merge(customer_monetary_val, how='outer')
customer_freq = cs_df[['CustomerID', 'amount']].groupby("CustomerID").count().reset_index()
customer_freq.rename(columns={'amount': 'frequency'}, inplace=True)
customer_history_df = customer_history_df.merge(customer_freq, how='outer')

print cs_df.shape, '\n', customer_history_df.head(5)
(354345, 11)
   CustomerID  recency    amount  frequency
0      12346.0     326.0  77183.60         1
1      12747.0      2.0   4196.01        103
2      12748.0      1.0   33719.73       4596
3      12749.0      4.0   4890.88       199
4      12820.0      3.0    942.34        59
```

对数化这是那个指标

```
from sklearn import preprocessing
customer_history_df['recency_log'] = customer_history_df['recency'].apply(math.log)
customer_history_df['amount_log'] = customer_history_df['amount'].apply(math.log)
customer_history_df['frequency_log'] = customer_history_df['frequency'].apply(math.log)
feature_vector = ['recency_log', 'amount_log', 'frequency_log']
X_subset = customer_history_df[feature_vector].as_matrix()
scaler = preprocessing.StandardScaler().fit(X_subset)
X_scaled = scaler.transform(X_subset)
```

要注意，如下两种表达方式是一样的。

```
recency_log_1 = customer_history_df['recency'].apply(math.log)
recency_log_2 = customer_history_df.recency.apply(math.log)
```

然后做直方图，也就是统计amount\_log在每个值区间的出现的概率。用n,bins, patchs接收返回的数据。

```
X = customer_history_df.amount_log
n, bins, patchs = plt.hist(X,1000,facecolor='green',alpha = 0.75)
plt.xlabel('Log of Sales Amount')
plt.ylabel('Probability')
plt.title('Histogram of Log Transformed Customer Monetary Value')
plt.grid(True)
plt.show()
```

画RFM图，进行聚类。

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```

fig = plt.figure(figsize=(8,6))
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')

xs = customer_history_df.reency_log
ys = customer_history_df.frequency_log
zs = customer_history_df.amount_log
ax.scatter(xs,ys,zs,s=5)

ax.set_xlabel('Recency')
ax.set_ylabel('Frequency')
ax.set_zlabel('Monetary')

```

## 用KMeans来进行聚类

```

from sklearn.cluster import KMeans
from sklearn.metrics import silhouette_samples, silhouette_score
import matplotlib.cm as cm

X = X_scaled

cluster_centers = dict()

for n_clusters in range(3,6,2):
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
    #ax2 = plt.subplot(111, projection='3d')
    fig.set_size_inches(18, 7)
    ax1.set_xlim([-0.1, 1])
    ax1.set_ylim([0, len(X) + (n_clusters + 1) * 10])

    clusterer = KMeans(n_clusters=n_clusters, random_state=10)
    cluster_labels = clusterer.fit_predict(X)

    silhouette_avg = silhouette_score(X, cluster_labels)
    cluster_centers.update({n_clusters : {
        'cluster_center':clusterer.cluster_centers_,
        'silhouette_score':silhouette_avg,
        'labels':cluster_labels
    }})

    sample_silhouette_values = silhouette_samples(X, cluster_labels)
    y_lower = 10
    for i in range(n_clusters):
        ith_cluster_silhouette_values = \
            sample_silhouette_values[cluster_labels == i]

        ith_cluster_silhouette_values.sort()

        size_cluster_i = ith_cluster_silhouette_values.shape[0]
        y_upper = y_lower + size_cluster_i

        color = cm.nipy_spectral(float(i) / n_clusters)
        ax1.fill_betweenx(np.arange(y_lower, y_upper),
                          0, ith_cluster_silhouette_values,
                          facecolor=color, edgecolor=color, alpha=0.7)

        ax1.text(-0.05, y_lower + 0.5 * size_cluster_i, str(i))
        y_lower = y_upper + 10 # 10 for the 0 samples

    ax1.set_title("The silhouette plot for the various clusters.")
    ax1.set_xlabel("The silhouette coefficient values")
    ax1.set_ylabel("Cluster label")
    ax1.axvline(x=silhouette_avg, color="red", linestyle="--")
    ax1.set_yticks([])
    ax1.set_xticks([-0.1, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1])
    colors = cm.nipy_spectral(cluster_labels.astype(float) / n_clusters)
    feature1 = 1
    feature2 = 2
    ax2.scatter(X[:, feature1], X[:, feature2], marker='.', s=30, lw=0, alpha=0.7,
                c=colors, edgecolor='k')

    centers = clusterer.cluster_centers_
    ax2.scatter(centers[:, feature1], centers[:, feature2], marker='o',
                c="white", alpha=1, s=200, edgecolor='k')
    for i, c in enumerate(centers):
        ax2.scatter(c[feature1], c[feature2], marker='%' % i, alpha=1,
                    s=50, edgecolor='k')

    ax2.set_title("The visualization of the clustered data.")
    ax2.set_xlabel("Feature space for the 1st feature i.e. monetary value")
    ax2.set_ylabel("Feature space for the 2nd feature i.e. frequency")
    plt.suptitle(("Silhouette analysis for KMeans clustering on sample data "
                 "with n_clusters = %d" % n_clusters),

```

```

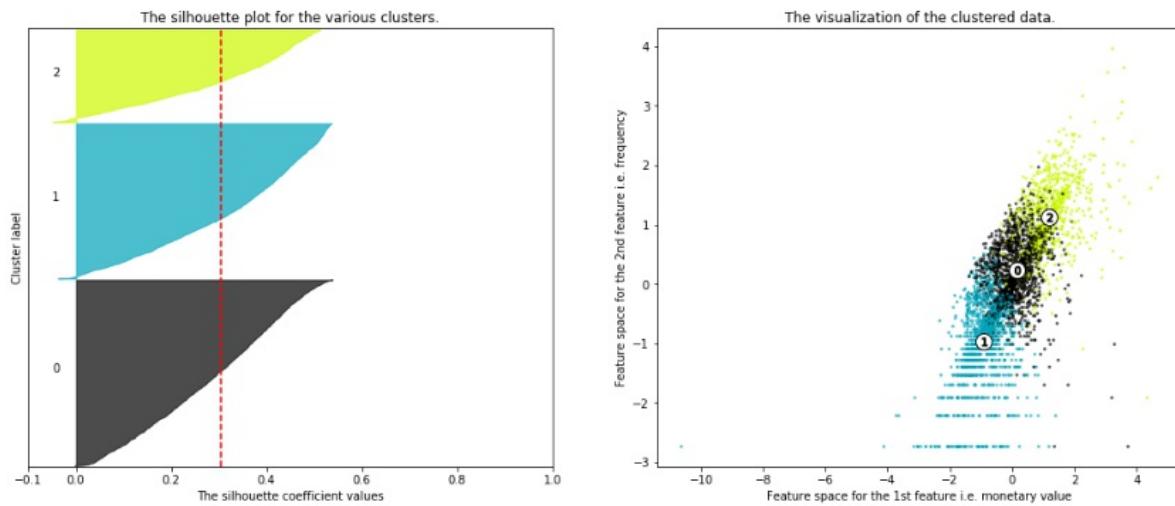
    fontsize=14, fontweight='bold')
plt.show()

```

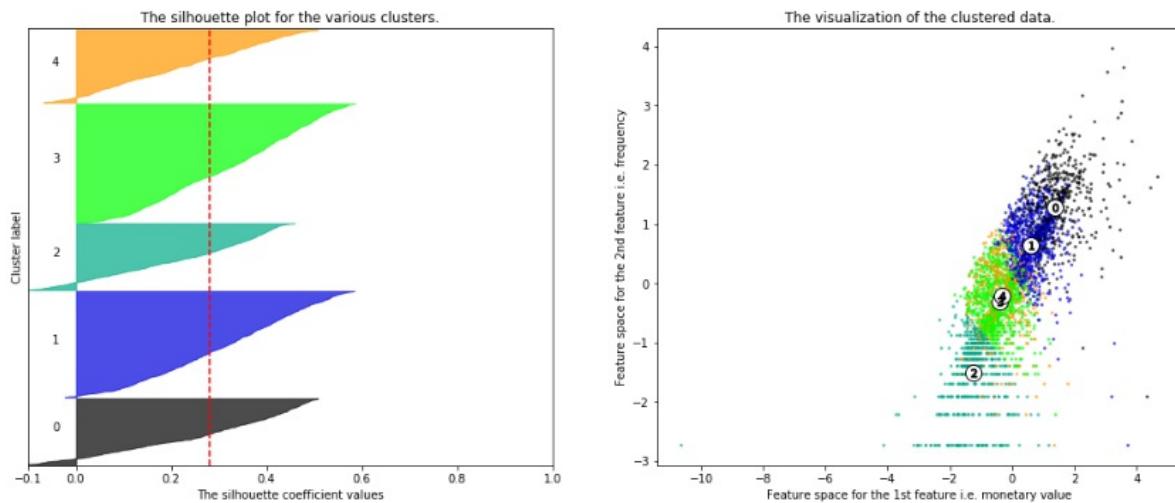
对于聚类要注意这个指标:silhouette score

聚类图如下。

Silhouette analysis for KMeans clustering on sample data with n\_clusters = 3



Silhouette analysis for KMeans clustering on sample data with n\_clusters = 5



然后对不同的特征画进行分析, 画最小值, 最大值, 25%, 中值, 75%。

traces是一个list, 通过append来添加元素, 把y,name,cls添加到traces里面。

plotly的使用可以参看[官方教程](#), plotly是一个完全开源的项目。

`np.percentile(y0, cutoff_quantile)`表示取从小到大, 在cutoff\_percentile%处的值, cutoff\_percentile为百分位值。

```

import plotly as py
import plotly.graph_objs as go
py.offline.init_notebook_mode()

x_data = ['Cluster 1','Cluster 2','Cluster 3','Cluster 4', 'Cluster 5']
cutoff_quantile = 100
field_to_plot = 'recency'

y0 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==0][field_to_plot].values
y0 = y0[y0<np.percentile(y0, cutoff_quantile)]
y1 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==1][field_to_plot].values
y1 = y1[y1<np.percentile(y1, cutoff_quantile)]
y2 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==2][field_to_plot].values
y2 = y2[y2<np.percentile(y2, cutoff_quantile)]
y3 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==3][field_to_plot].values
y3 = y3[y3<np.percentile(y3, cutoff_quantile)]
y4 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==4][field_to_plot].values
y4 = y4[y4<np.percentile(y4, cutoff_quantile)]

```

```

y_data = [y0,y1,y2,y3,y4]

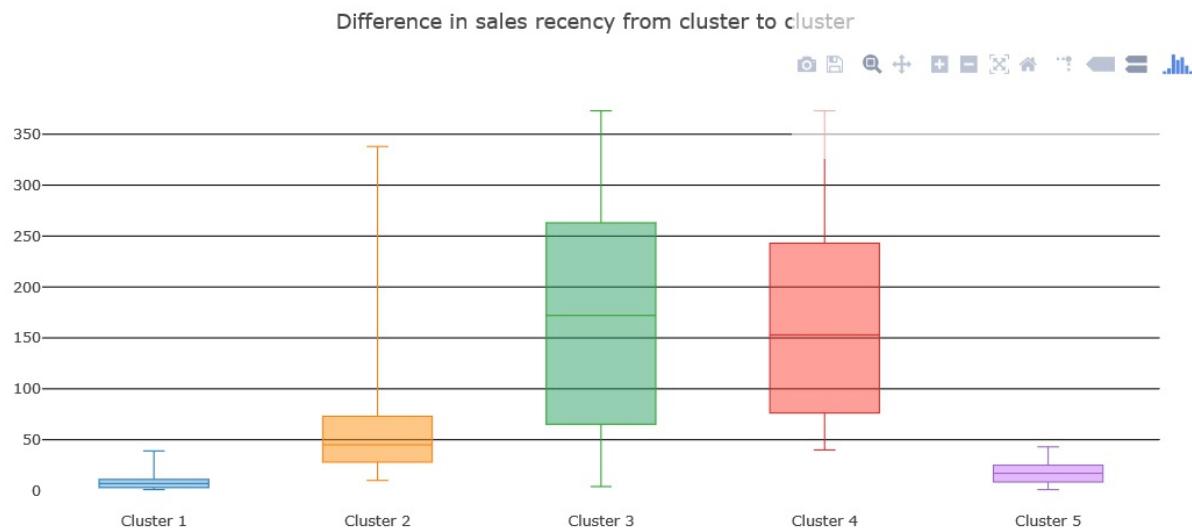
colors = ['rgba(93, 164, 214, 0.5)', 'rgba(255, 144, 14, 0.5)', 'rgba(44, 160, 101, 0.5)', 'rgba(255, 65, 54, 0.5)', 'rgba(207, 114, 255, 0.5)', 'rgba(127, 96, 0, 0.5)']
traces = []

for xd, yd, cls in zip(x_data, y_data, colors):
    traces.append(go.Box(
        x=xd,
        y=yd,
        name=xd,
        boxpoints=False,
        jitter=0.5,
        whiskerwidth=0.2,
        fillcolor=cls,
        marker=dict(
            size=2,
        ),
        line=dict(width=1),
    ))

layout = go.Layout(
    title='Difference in sales {} from cluster to cluster'.format(field_to_plot),
    xaxis=dict(
        autorange=True,
        showgrid=True,
        zeroline=True,
        dtick=50,
        gridcolor='black',
        gridwidth=0.1,
        zerolinecolor='rgb(255, 255, 255)',
        zerolinewidth=2,
    ),
    margin=dict(
        l=40,
        r=30,
        b=80,
        t=100,
    ),
    paper_bgcolor='white',
    plot_bgcolor='white',
    showlegend=False
)

fig = go.Figure(data=traces, layout=layout)
py.offline.iplot(fig)

```



## Effective Cross Selling

### 问题与技术路线

1. 要处理的问题是什么？
  - i. 市场篮分析

2. 要实现什么结果？
  - i. 寻找客户潜在的购买模式, 来制定销售策略, 增加销售量。
3. 数据要怎么处理？
  - i. 数据清洗(去除错误的项目, 比如购物数量小于0, 无意义的项目, 比如用户ID是nan项)
4. 怎么实现我们的目的？
  - i. 关联规则挖掘(Association Rule-Mining)
  - ii. FP Growth算法

## concepts

Itemset: 存在的物品组合, 比如{A,B,C,...,X}

Support: 特定组合物品组合占所有交易的比例。

$n$  = number of transactions with beer and diaper;

$N$  = total transactions;

$$supp(beer, diaper) = \frac{n}{N}$$

Confidence: 一种规则的置信度。

for a rule which statrs{beer->diaper}

$$confidence(beer, diaper) = \frac{supp(beer and diaper)}{supp(beer)}$$

Lift: the lift of rule {X->Y}

$$lift(X -> Y) = \frac{supp(XUY)}{supp(X)*supp(Y)}$$

Frequent itemset: Frequent itemsets are itemsets whose support is greater than a user defined support threshold.

# 任务

## ToDo

- Tensorflow - char embedding layer
- Tensorflow - Pointer Layer
- 机器学习 - 专题-XGBoost
- 深度学习 - GAN 与 RL 基本模型
- CRF 条件随机场 / 图模型
- Linux Shell 常用命令
  - wc/sed/awk/grep/sort/uniq/paste/cat/head/tail
- DL - 专题 - 加速方法
- 机器学习基础相关
  - 深度学习与机器学习的异同及联系
- 机器学习实践相关
  - 数据预处理
  - 缺失值
  - 特征工程, 特征选择的标志(为什么选择这些特征)
  - XGB 调参的方法、LightGBM、CatBoost
    - gbdt,xgboost,lgbm的区别
  - 模型融合的方法
  - 数据可视化分析 - 流形学习
- 算法专题-排列与组合
- 吉布斯采样
- 算法-矩阵乘法
  - 稀疏矩阵
- 显著性检测
- 机器学习的体系、学派
- 朴素贝叶斯与逻辑回归的区别
- 为什么 RNN 中采用 tanh 作为激活函数
  - <https://www.zhihu.com/question/61265076>
- 修订 FastText 中词向量生成的描述
- 自定义用于快速测试代码的数据结构及相关方法
- 并查集
- 什么是梯度消失
- HR面常见问题
- 超参数调优
- 机器学习实战-部分代码(K-Means等)
- 判断相似二叉树及优化
- $\max(x, y)$  的期望
- 加速网络收敛的方法
- 回归树、基尼指数
- 判断两个链表是否相交(CSDN)
- 一阶 二阶泰勒展开
- 梯度下降往往没有指向

## 问题求解系统

分类,回归,支持向量机,决策树,集成学习与随机森林,维数约化,特征工程

## 深度学习的发展脉络

写这一节的目的是为了对深度学习的发展有一个认识。可以写成一部深度学习的发展史。里面要描述出当时存在的问题，以及为解决这些问题而发展出什么模型；为解决不同领域的问题如图像识别方向，语音识别方向，自然语言处理方向而发展出的不同模型。以及为解决特定领域的问题而发展特定的方法。比如从RNN到LSTM。最总会成为一个树形结构。

另外一个目的就是要时刻对最前沿的领域有一个了解，及时去拜读arxiv上最新的深度学习的论文。了解当前存在的主要问题是什么，然会看存在的可能的解决方案是什么？自己有什么想法等。看CVPR的前三名，就基本对计算机视觉的最新工作有个基本的了解了。

格式：论文是为了解决什么问题，解决的怎么样了，相对于其它方法的优势是什么，附上论文的地址。

# 第九章 问题求解系统

这一章，主要是构建自己的ML, DL问题求解系统, 基于scikit-learn与tensorflow, 目的是通过构建自己的问题系统，来方便的训练与使用模型；最终会把这个系统打造成自己的AutoML系统，当然不止是ML, 还有DL。需要包含如下几部分。这个系统可以参照[阿里的云栖](#)。最终，本书中的理论都是这个系统的注脚。但是，这回事一项很浩瀚的工程。

1. Scikit-learn的代码框架
2. tensorflow的代码框架
3. 自己系统的框架
  - i. 数据清洗
  - ii. 模型的选择
  - iii. 模型的验证
  - iv. 模型的使用
4. 系统处理的问题
  - i. 基于sklearn, 对不同的主流方向(主流问题, 如分类, 回归, 降维, 特征工程, 推荐系统), 构建不同的父类
  - ii. 数据清洗是一个麻烦的工程, 这个工程也该包含在我们的系统里面
  - iii. 接下来就是模型的选择
  - iv. 特征工程是一个大的方面
  - v. 模型结果的验证
5. 问题求解系统的几大部分
  - i. 数据预处理
  - ii. 特征工程
  - iii. 统计分析
  - iv. 机器学习
  - v. 深度学习
  - vi. 将包含的部分
    - i. 时间序列分析
    - ii. 文本分析
    - iii. 网络分析
    - iv. 推荐系统
    - v. 自动参数调节
6. 需要思考的问题
  - i. 最终是否要做成一个PC端的应用程序？
  - ii. 用什么语言写做这个界面？
  - iii. 底层用什么语言实现？
  - iv. AutoML的当前市场, 未来的趋势以及怎么盈利？
7. 考虑自己的框架怎么给业界带来便利, 加速业界各项研究的发展?
  - i. 自己框架怎么让机器学习, 语音识别, NLP的研究变得更容易？
  - ii. 怎么解决非一二线互联网工作没有优秀的ML, DL人才的问题？了解他们应用AI存在的困难, 以及探索解决之道。(PC端这样方便)
8. 实现问题求解系统中将要遇到的困难？只有当自己能预测自己的进度的时候, 也就表明自己对整个系统成竹在胸了。每一步需要的知识, 怎么建构都有自己的想法的是, 自己的解决方案的时候, 余下的就只是体力活了。最终, 自己的系统是不是会像keras一样, 只是封装了sklearn, tensorflow。

最终要实现的框架，基于这个框架能够快速的在特殊的场景下搭建起一个平台。

## Sklearn介绍

### sklearn的算法与模块

如下图所示，sklearn的定位是作为数据挖掘与数据分析的有效工具。它提供了这四大类算法，分类，回归，聚类，降维；两个模块：模型选择，预处理。每类算法包含有不同的算法。

1. 分类
  - i. SVM, 最近邻, 随机森林
2. 回归
  - i. SVR, ridge regression, Lasso regression
3. Clustering
  - i. k-Means,spectral clustering,man-shift
4. 降维
  - i. PCA,特征提取, 非负矩阵分解
5. 模型选择
  - i. grid search,cross validation
6. Preprocessing
  - i. 预处理, 特征提取

## User Guide

细节的东西我们可以看scikit-learn的User Guide。

User Guide包含如下几大模块：

1. Supervised learning
2. Unsupervised learning
3. Model selection and evaluation
4. Dataset transformations
5. Dataset loading utilities
6. Computing with scikit-learn

# Sklearn的代码架构

## API Reference

1. `sklearn.base` : **Base classes and utility functions**
2. `sklearn.calibration` : **Probability Calibration**
3. `sklearn.cluster` : **Clustering**
4. `sklearn.compose` : **Composite Estimators**
5. `sklearn.covariance` : **Covariance Estimators**
6. `sklearn.cross_decomposition` : **Cross decomposition**
7. `sklearn.datasets` : **Datasets**
8. `sklearn.decomposition` : **Matrix Decomposition**
9. `sklearn.discriminant_analysis` : **Discriminant Analysis**
10. `sklearn.dummy` : **Dummy estimators**
11. `sklearn.ensemble` : **Ensemble Methods**
12. `sklearn.exceptions` : **Exceptions and warnings**
13. `sklearn.feature_extraction` : **Feature Extraction**
14. `sklearn.feature_selection` : **Feature Selection**
15. `sklearn.gaussian_process` : **Gaussian Processes**
16. `sklearn.isotonic` : **Isotonic regression**
17. `sklearn.impute` : **Impute**
18. `sklearn.kernel_approximation` **Kernel Approximation**
19. `sklearn.kernel_ridge` **Kernel Ridge Regression**
20. `sklearn.linear_model` : **Generalized Linear Models**
21. `sklearn.manifold` : **Manifold Learning**
22. `sklearn.metrics` : **Metrics**
23. `sklearn.mixture` : **Gaussian Mixture Models**
24. `sklearn.model_selection` : **Model Selection**
25. `sklearn.multiclass` : **Multiclass and multilabel classification**

26. `sklearn.multioutput` : Multioutput regression and classification
27. `sklearn.naive_bayes` : Naive Bayes
28. `sklearn.neighbors` : Nearest Neighbors
29. `sklearn.neural_network` : Neural network models
30. `sklearn.pipeline` : Pipeline
31. `sklearn.preprocessing` : Preprocessing and Normalization
32. `sklearn.random_projection` : Random projection
33. `sklearn.semi_supervised` Semi-Supervised Learning
34. `sklearn.svm` : Support Vector Machines
35. `sklearn.tree` : Decision Trees
36. `sklearn.utils` : Utilities

## python类的继承

```
class Person(object):
    pass

class Child(Person):           # Child 继承 Person
    pass

May = Child()
Peter = Person()

print(isinstance(May,Child))   # True
print(isinstance(May,Person))  # True
print(isinstance(Peter,Child)) # False
print(isinstance(Peter,Person))# True
print(issubclass(Child,Person))# True
```

class Child(Person)表示Child继承于Person, 任何类最终都可以追溯到根类object, 这与Java,C#是一样的。

## **Tensorflor介绍**

## **Tensorflow的代码架构**

# 常用数据处理技巧

## 文本数据

### 技巧总结

1. 分割含有子特征的特征，让每个子特征成为一个特征。
2. 时间数据则分割成天、星期、月、年等小特征来处理。
3. 缺失值补充，根据先验知识，补成0或者均值。
4. 类别数据通过onehot来进行处理。(还有更多需要考虑的，哪些情况下不能这么做)
5. 最终所有特征必须是数值数据或者布尔型数据。
6. 运用一个算法去得到一个预测模型。
7. 选取最佳的特征

### 文本数据统计

统计文本中词出现的频率，具体一个场景就是统计购物历史记录中的每类物品总的销售量。这些技巧都要固化到自己软件系统中。

`set()`是不重复集合，相当于字典的key。第一个函数得到字典的key。第二个函数建立一个list(),然后每一次购物记录作为一列。这次购物中有特定key则设为1，否则为0。

## Google Analytics Customer Revenue Prediction

### 1 Introduction

Here is an Exploratory Data Analysis for the Google Analytics Customer Revenue Prediction competition within the R environment. For this EDA in the main we will use `tidyverse` packages. Also for modelling we will use `glmnet`, `xgboost` and `keras` packages.

Our task is to build an algorithm that predicts the natural log of the sum of all transactions per user. Thus, for every user in the test set, the target is:

$$y_{user} = \sum_{i=1}^n transaction_{user_i}$$
$$target_{user} = \ln(y_{user} + 1).$$

Submissions are scored on the root mean squared error, which is defined as:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

where  $\hat{y}$  is the predicted revenue for a customer and  $y$  is the natural log of the actual revenue value.

Let's prepare and have a look at the dataset.

```
# Necessary libraries
import os # it's a operational system library, to set some informations
import random # random is to generate random values

import pandas as pd # to manipulate data frames
import numpy as np # to work with matrix
from scipy.stats import kurtosis, skew # it's to explore some statistics of numerical values

import matplotlib.pyplot as plt # to graphics plot
import seaborn as sns # a good library to graphic plots
import squarify # to better understand proportion of categorys - it's a treemap layout algorithm

# Importing librarys to use on interactive graphs
from plotly.offline import init_notebook_mode, iplot, plot
import plotly.graph_objs as go

import json # to convert json in df
from pandas.io.json import json_normalize # to normalize the json file

# to set a style to all graphs
plt.style.use('fivethirtyeight')
init_notebook_mode(connected=True)
```

```

def cross_selling(file_path_name):
    grocery_items = set()
    with open(file_path_name) as f:
        reader = csv.reader(f, delimiter=",")
        for i, line in enumerate(reader):
            grocery_items.update(line)
    output_list = list()
    with open(file_path_name) as f:
        reader = csv.reader(f, delimiter=",")
        for i, line in enumerate(reader):
            row_val = {item: 0 for item in grocery_items}//set item to 0 as initial value
            row_val.update({item: 1 for item in line})//set to 1 if item in line
            output_list.append(row_val)
    grocery_df = pd.DataFrame(output_list)
    return grocery_df

if __name__ == '__main__':
    file_path_name = "C:\Users\pili\GitBook\Kaggle\OnlineRetailTransactions\grocery_dataset.txt"
    cross_selling(file_path_name)

```

```

item_summary_df = grocery_df.sum().sort_values(ascending=False).reset_index()
item_summary_df.rename(columns={item_summary_df.columns[0]:'item_name',item_summary_df.columns[1]:'item_count'},inplace=True)

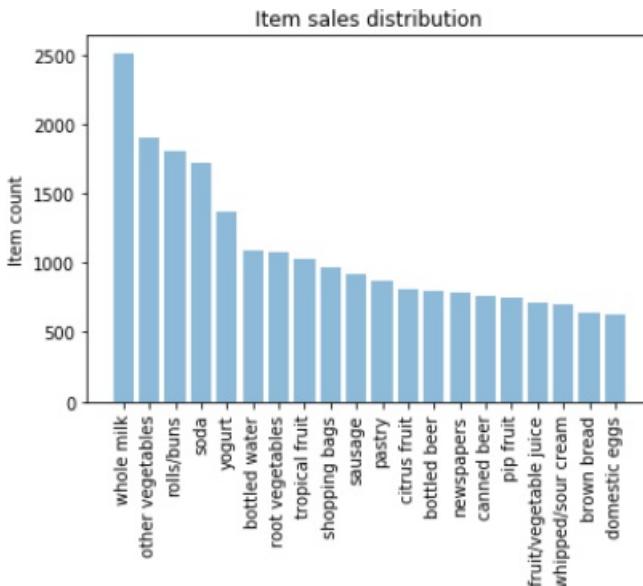
```

降序排序，再更换columns的名字。

```

import matplotlib.pyplot as plt
objects = (list(item_summary_df['item_name'].head(20)))
y_pos = np.arange(len(objects))
performance = list(item_summary_df['item_count'].head(20))
plt.bar(y_pos,performance,align='center',alpha=0.5)
plt.xticks(y_pos, objects, rotation='vertical')
plt.ylabel('Item count')
plt.title('Item sales distribution')
plt.show()

```



带多个标签数据的处理 1

```

cf_pd.geoNetwork[0]
{
    "continent": "Asia", "subContinent": "Western Asia", "country": "Turkey", "region": "Izmir", "metro": "(not set)", "city": "Izmir", "cityId": "not available in demo dataset", "networkDomain": "ttnet.com.tr", "latitude": "not available in demo dataset", "longitude": "not available in demo dataset", "networkLocation": "not available in demo dataset"
}

```

带多个标签数据的处理 2

```

cf_pd.totals[0]
{
    "visits": "1", "hits": "1", "pageviews": "1", "bounces": "1", "newVisits": "1"
}

```

## 数据处理技巧

1. 把所有子标签都提取出来做为一个标签。一个标签就是一个feature
  - i. 怎么自动的提取子标签？
2. 列出所有的feature名字(.columns)
3. 如果一个feature只有一个类, 则舍去
4. 对于时间这个特征, 可以使用datetime把他分成年, 月, 日, 星期, hour这多个特征来处理(最后原始时间这个特征要删除)
  - i. 含有时间的feature怎么自动分割成小的特征?

缺失值的比例

```
def missing_values(data):  
    total = data.isnull().sum().sort_values(ascending=False)  
    percent = (data.isnull().sum()/data.isnull().count()*100).sort_values(ascending=False)  
    df = pd.concat([total, percent], axis=1, keys=['Total', 'Percent'])  
  
    print("Total columns at least one Values:")  
    print(df[~df['Total'] == 0])  
    print("\n Total of Sales % of Total: ", round((df_train[df_train['totals.transactionRevenue'] != np.nan]['totals.transactionRevenue'].count() /  
len(df_train['totals.transactionRevenue'])) * 100),4))  
    return total, percent
```

时间特征处理

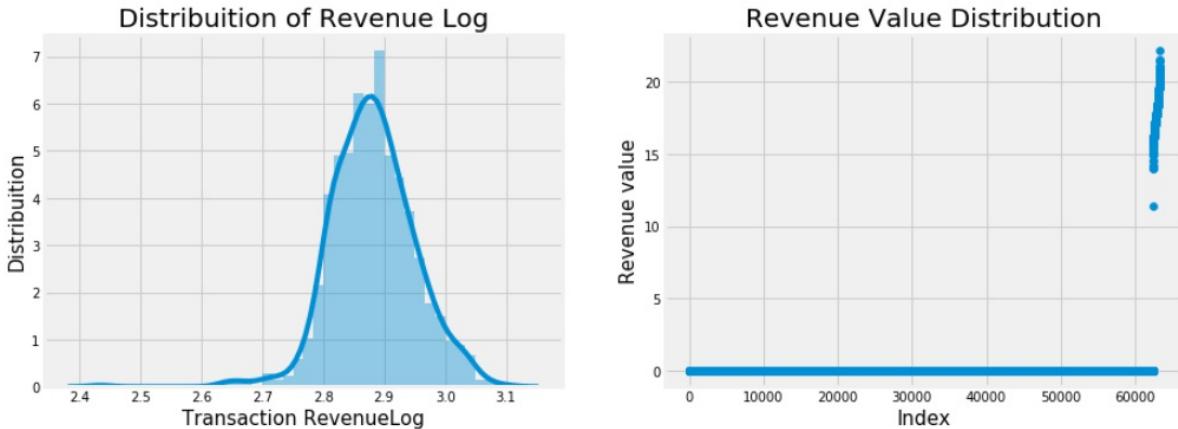
```
from datetime import datetime  
def date_process(df):  
    df['date'] = pd.to_datetime(df["date"], format="%Y%m%d")  
    df["_weekday"] = df['date'].dt.weekday  
    df["_day"] = df['date'].dt.day  
    df["_month"] = df['date'].dt.month  
    df["_year"] = df['date'].dt.year  
    df["_visitHour"] = (df['visitStartTime'].apply(lambda x:str(datetime.fromtimestamp(x.hour))).astype(int))  
    return df
```

找到只有一个类的数据并删除

```
discovering_consts = [col for col in df_train.columns if df_train[col].nunique() == 1]  
df_train.drop(discovering_consts, axis=1, inplace=True)
```

画图:

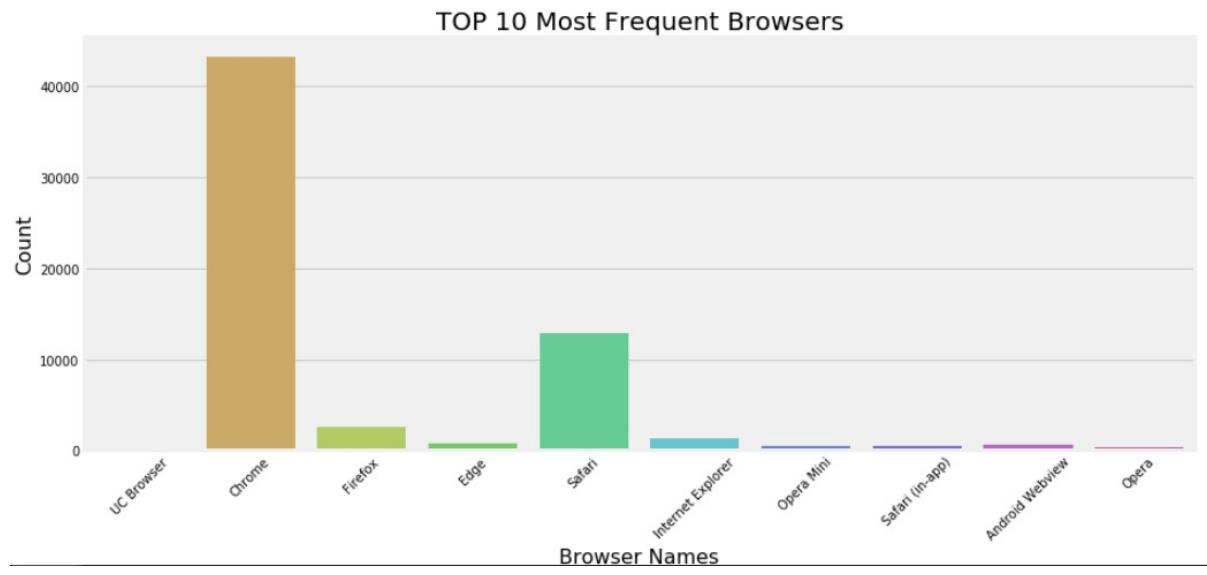
```
# seting the figure size of our plots  
plt.figure(figsize=(14,5))  
  
# Subplot allow us to plot more than one  
# in this case, will be create a subplot grid of 2 x 1  
plt.subplot(1,2,1)  
# seting the distribution of our data and normalizing using np.log on values highest than 0 and +  
# also, we will set the number of bins and if we want or not kde on our histogram  
ax = sns.distplot(np.log(df_train[df_train['totals.transactionRevenue'] > 0]['totals.transactionRevenue'] + 0.01), bins=40, kde=True)  
ax.set_xlabel('Transaction RevenueLog', fontsize=15) #seting the xlabel and size of font  
ax.set_ylabel('Distribution', fontsize=15) #seting the ylabel and size of font  
ax.set_title("Distribution of Revenue Log", fontsize=20) #seting the title and size of font  
  
# setting the second plot of our grid of graphs  
plt.subplot(1,2,2)  
# ordering the total of users and seting the values of transactions to understanding  
plt.scatter(range(df_train.shape[0]), np.sort(df_train['totals.transactionRevenue'].values))  
plt.xlabel('Index', fontsize=15) # xlabel and size of words  
plt.ylabel('Revenue value', fontsize=15) # ylabel and size of words  
plt.title("Revenue Value Distribution", fontsize=20) # Setting Title and fontsize  
  
plt.show()
```



Season CountPlot

```
plt.figure(figsize=(14,6))
df_top10 = df_train['device.browser'].value_counts()[:10].index.values
#df_train['device.browser'].isin(df_top10)
sns.countplot(df_train[df_train['device.browser'].isin(df_top10)]['device.browser'], palette="hls")
plt.title("TOP 10 Most Frequent Browsers", fontsize=20) # Adding Title and seting the size
plt.xlabel("Browser Names", fontsize=16) # Adding x label and seting the size
plt.ylabel("Count", fontsize=16) # Adding y label and seting the size
plt.xticks(rotation=45) # Adjust the xticks, rotating the labels

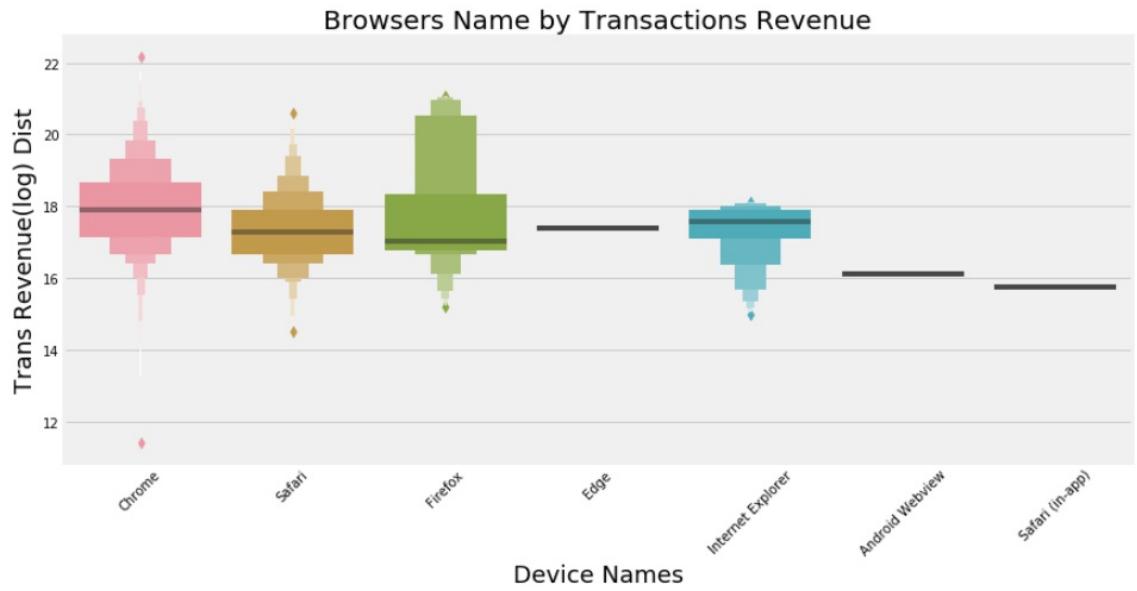
plt.show() #use plt.show to render the graph that we did above
```



boxenplot

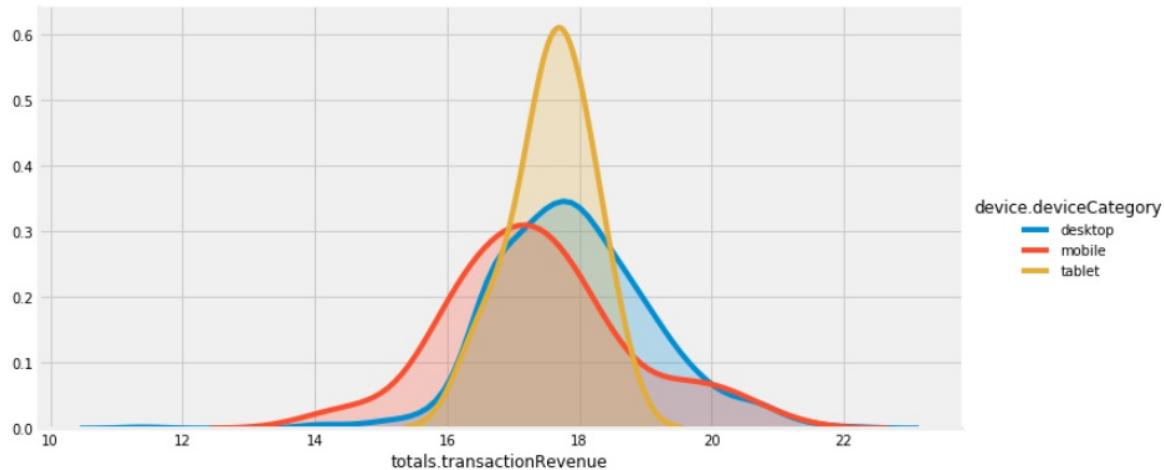
```
plt.figure(figsize=(13,6))
df_top10 = df_train['device.browser'].value_counts()[:10].index.values
g1 = sns.boxenplot(x='device.browser',y='totals.transactionRevenue',
                    data=df_train[(df_train['device.browser'].isin(df_top10))&df_train['totals.transactionRevenue']>0])
g1.set_title('Browsers Name by Transactions Revenue', fontsize=20) # title and fontsize
g1.set_xticklabels(g1.get_xticklabels(), rotation=45) # It's the way to rotate the xticks when we use variable to our graphs
g1.set_xlabel('Device Names', fontsize=18) # Xlabel
g1.set_ylabel('Trans Revenue(log) Dist', fontsize=18) #Ylabel

plt.show()
```



#### FacetGrid

```
(sns.FacetGrid(df_train[df_train['totals.transactionRevenue'] > 0],
               hue='device.deviceCategory', height=5, aspect=2)
 .map(sns.kdeplot, 'totals.transactionRevenue', shade=True)
 .add_legend()
)
plt.show()
```



#### Crosstab

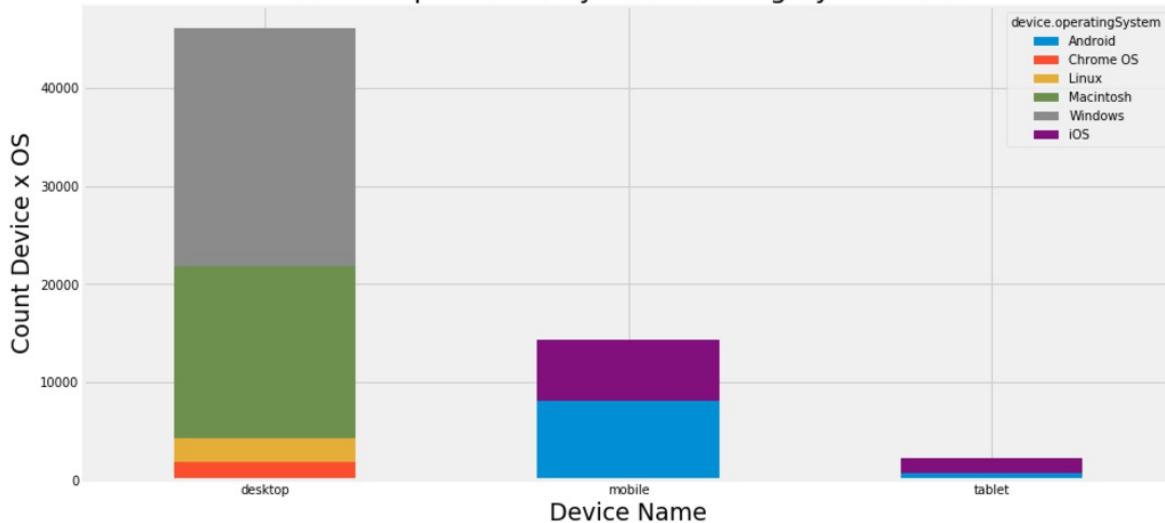
```
# At index I will use isin to substitute the loop and get just the values with more than 1%
crosstab_eda = pd.crosstab(index=df_train['device.deviceCategory'], # at this line, I am using the isin to select just the top 5 of browsers
                           columns=df_train[df_train['device.operatingSystem']]
                           .isin(df_train['device.operatingSystem']\
                           .value_counts()[:6].index.values)]['device.operatingSystem'])

# Plotting the crosstab that we did above
crosstab_eda.plot(kind="bar", # select the bar to plot the count of categoricals
                  figsize=(14,7), # adjusting the size of graphs
                  stacked=True) # code to unstack

plt.title("Most frequent OS's by Device Category of users", fontsize=22) # adjusting title and fontsize
plt.xlabel("Device Name", fontsize=19) # adjusting x label and fontsize
plt.ylabel("Count Device x OS", fontsize=19) # adjusting y label and fontsize
plt.xticks(rotation=0) # Adjust the xticks, rotating the labels

plt.show() # rendering
```

### Most frequent OS's by Device Categorys of users



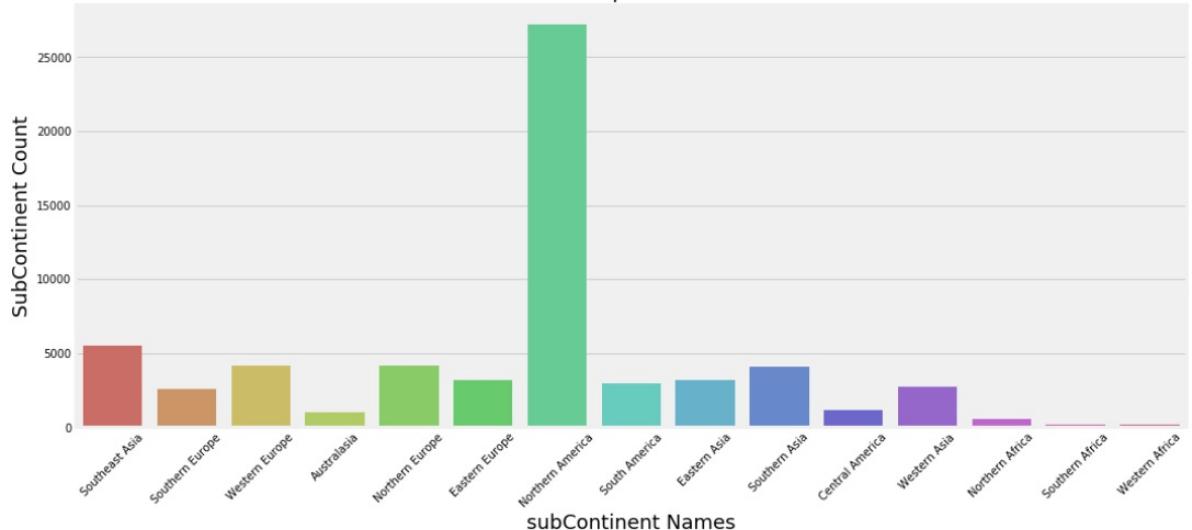
Countplot

```
plt.figure(figsize=(16,7))

sns.countplot(df_train[df_train['geoNetwork.subContinent']]\n              .isin(df_train['geoNetwork.subContinent'].value_counts()[:15].index.values])\n              [ 'geoNetwork.subContinent'], palette="hls")
plt.title("TOP 15 most frequent SubContinents", fontsize=20) # seting the title size
plt.xlabel("subContinent Names", fontsize=18) # seting the x label size
plt.ylabel("SubContinent Count", fontsize=18) # seting the y label size
plt.xticks(rotation=45) # Adjust the xticks, rotating the labels

plt.show()
```

### TOP 15 most frequent SubContinents



Crosstab

```
date_sales = ['_visitHour', '_weekday'] #seting the desired

cm = sns.light_palette("green", as_cmap=True)
pd.crosstab(df_train[date_sales[0]], df_train[date_sales[1]],
            values=df_train["totals.transactionRevenue"], aggfunc=[np.sum]).style.background_gradient(cmap = cm)

# tab.columns.levels[1] = ["Sun", "Mon", "Thu", "wed", "Thi", "Fri", "Sat"]
```

	sum							
_weekday	0	1	2	3	4	5	6	
_visitHour								
0	126.386	192.059	143.162	36.2319	37.3215	53.0282	142.051	
1	138.872	87.9446	120.248	70.4552	37.2508	70.3504	106.245	
2	122.176	160.589	54.7113	139.921	125.765	17.7265	116.501	
3	107.211	124.656	84.0083	76.1021	74.1997	15.76	36.4601	
4	71.6829	107.381	90.8094	69.3424	49.719	16.8251	17.6372	
5	105.335	70.0461	36.3155	53.4049	52.448	53.8893	72.7108	
6	34.9277	70.9624	16.7699	36.6059	17.6348	0	52.4337	
7	17.7273	35.4628	0	18.3798	0	0	16.79	
8	54.4742	18.619	0	33.8402	0	0	0	
9	0	19.2371	0	0	0	0	0	
10	0	17.597	0	17.0134	0	17.8254	0	
11	18.9495	18.2831	19.9462	17.5434	53.2772	0	0	
12	0	18.747	74.8096	58.3735	55.9478	0	52.9778	
13	181.915	93.8184	50.857	71.523	107.002	0	34.476	
14	87.7575	36.8734	123.865	155.946	142.324	72.1576	0	
15	211.405	122.643	183.972	205.398	274.288	32.8824	85.0231	
16	91.8596	123.522	85.8605	182.576	178.588	82.5616	86.4576	
17	214.562	167.027	236.304	167.496	88.2338	18.0095	53.8049	
18	288.439	230.905	235.754	308.098	183.177	0	0	
19	174.786	202.682	123.821	175.253	143.794	107.968	53.4519	
20	160.666	249.791	183.774	105.292	170.235	53.6175	51.9169	
21	199.911	85.0781	93.2237	200.392	126.461	141.345	72.2549	
22	172.337	143.755	90.8017	101.408	188.296	17.0162	85.5684	
23	87.7206	88.2007	107.127	105.673	219.07	110.034	85.0856	

```

number_of_colors = 20 # total number of different colors that we will use

# Here I will generate a bunch of hexdecimal colors
color = ["#" + ''.join([random.choice('0123456789ABCDEF') for j in range(6)])
          for i in range(number_of_colors)]
country_tree = df_train["geoNetwork.country"].value_counts() #counting the values of Country

print("Description most frequent countrys: ")
print(country_tree[:15]) #printing the 15 top most

country_tree = round((df_train["geoNetwork.country"].value_counts()[:30] \
                     / len(df_train['geoNetwork.country']) * 100),2)

plt.figure(figsize=(14,5))
g = squarify.plot(sizes=country_tree.values, label=country_tree.index,
                   value=country_tree.values,
                   alpha=.4, color=color)
g.set_title("TOP 30 Countrys - % size of total", fontsize=20)
g.set_axis_off()
plt.show()

```

'TOP 30 Countries - % size of total



plot country map

画这幅图时会出现问题，就是不显示，需要关掉笔记再打开。

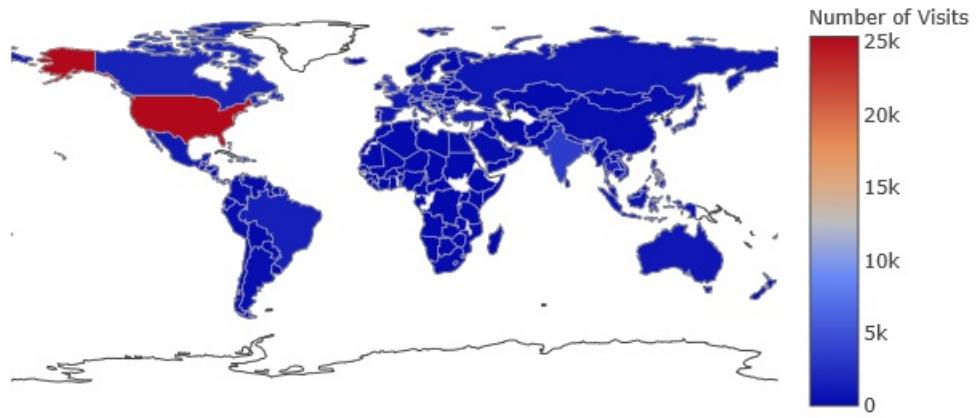
```
# Counting total visits by countrys
countMaps = pd.DataFrame(df_train['geoNetwork.country'].value_counts()).reset_index()
countMaps.columns=['country', 'counts'] #renaming columns
countMaps = countMaps.reset_index().drop('index', axis=1) #reseting index and droping the column

data = [ dict(
    type = 'choropleth',
    locations = countMaps['country'],
    locationmode = 'country names',
    z = countMaps['counts'],
    text = countMaps['country'],
    autocolorscale = False,
    marker = dict(
        line = dict (
            color = 'rgb(180,180,180)',
            width = 0.5
        ),
        colorbar = dict(
            autotick = False,
            tickprefix = '',
            title = 'Number of Visits'),
    )
)
]

layout = dict(
    title = 'Counting Visits Per Country',
    geo = dict(
        showframe = False,
        showcoastlines = True,
        projection = dict(
            type = 'Mercator'
        )
    )
)

figure = dict( data=data, layout=layout )
iplot(figure, validate=False, filename='map-countrys-count')
```

## Couting Visits Per Country



### Pie

```
def PieChart(df_colum, title, limit=15):
    """
    This function helps to investigate the proportion of visits and total of transaction revenue
    by each category
    """

    count_trace = df_train[df_colum].value_counts()[:limit].to_frame().reset_index()
    rev_trace = df_train.groupby(df_colum)[["totals.transactionRevenue"].sum().nlargest(10).to_frame().reset_index()

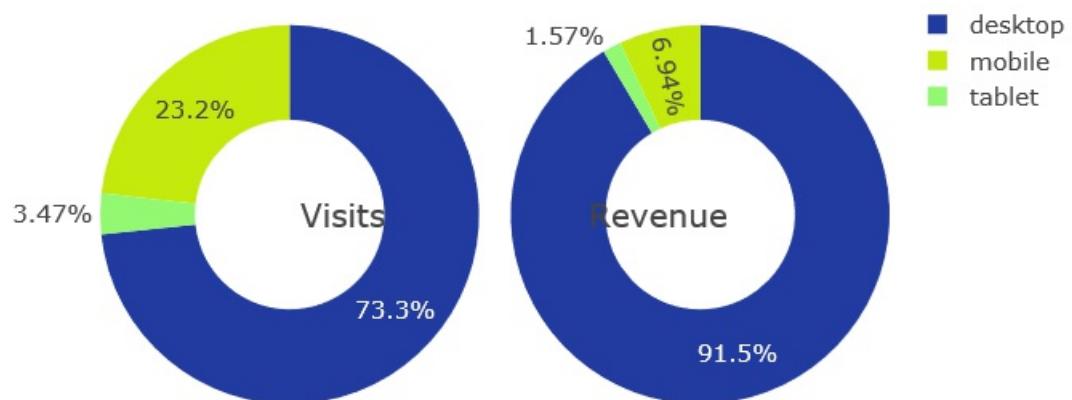
    trace1 = go.Pie(labels=count_trace['index'], values=count_trace[df_colum], name= "% Acesses", hole=.5,
                     hoverinfo="label+percent+name", showlegend=True, domain= {'x': [0, .48]},
                     marker=dict(colors=color))

    trace2 = go.Pie(labels=rev_trace[df_colum],
                     values=rev_trace['totals.transactionRevenue'], name="% Revenue", hole=.5,
                     hoverinfo="label+percent+name", showlegend=False, domain= {'x': [.52, 1]})

    layout = dict(title= title, height=450, font=dict(size=15),
                  annotations = [
                      dict(
                          x=.25, y=.5,
                          text='Visits',
                          showarrow=False,
                          font=dict(size=20)
                      ),
                      dict(
                          x=.80, y=.5,
                          text='Revenue',
                          showarrow=False,
                          font=dict(size=20)
                      )
                  ])
    fig = dict(data=[trace1, trace2], layout=layout)
    iplot(fig)

PieChart("device.deviceCategory", "Device Category")
```

### Device Category



# NLP常用处理技巧

## 特征构造

### 矢量化

1. 通过求每一个词的tf-idf值，用tf-idf值代替单词，将文本转化为向量。
2. 将tf-idf值小于一定阈值的词删掉，这样来降低维度。
3. 用词汇表将每一个文本转化为维度一样的向量，并且非0值即为单词所对应的tf-idf值。

## PageRank算法

思想：

1. 链接数量。一个网页被越多的其它网页链接，说明这个网页越重要。
2. 链接质量。一个网页被一个越高权值的网页链接，也能表明这个网页越重要。贡献的权值等于这个网页的权值除以这个网页的出链数目。

$In(V_i)$ 是 $V_i$ 的入链集合，代表有多少其它网页链接它； $Out(V_i)$ 是 $V_i$ 的出链集合，也就是引用了哪些其它网页。网页 $V_i$ 的得分为：

$$S(V_i) = \sum_{j \in In(V_i)} \left( \frac{1}{Out(V_j)} S(V_j) \right)$$

为了防止有些网页的权值为0，则加入一个阻尼项。

$$S(V_i) = (1 - d) + d \sum_{j \in In(V_i)} \left( \frac{1}{Out(V_j)} S(V_j) \right)$$

不需要借助语料库，单篇文章提取关键词的算法TextRank的原理与PageRank一致，因为是借鉴PageRank算法的。

## 第十章 面试

这章涉及到C++,传统算法, ML, DL方面的常见问题。

# 机器学习类面试问题集

## 算法理论方面

- 2.1 LR, SVM, KNN, GBDT, XGB推导, 算法细节(LR为何是sigmod, 理论推导出sigmod,KNN距离度量方式, XGBoost为什么要用二阶信息不用一阶, LR和SVM对比, GBDT和XGB和LightGBM对比)。
- 2.2 CNN DNN RNN 细节以及相关问题(pool层, 激活函数, 梯度消失弥散问题, LSTM结构图, 深度网络优势及缺点)。
- 2.3 常见排序算法的复杂度和一些细节以及改进优化。
- 2.4 树模型建模过程。
- 2.5 特征选择方法。
- 2.6 模型训练停止方法。
- 2.7 正则化作用。
- 2.8 模型效果评价指标。
- 2.9 AUC理解和计算方法。
- 2.10 Hadoop, Hive, Spark相关理论。
- 2.11 L\_BFGS, DFP推导。
- 2.12 弱分类器组合成强分类器的理论证明。
- 2.13 FM, FMM, Rank\_SVM算法细节。
- 2.14 map\_reduce基本概念以及常见处理代码。
- 2.15 过拟合的解决方法。
- 2.16 各个损失函数之间区别。
- 2.17 L1,L2正则化相关问题。

# 前向神经网络问题

## 激活函数的作用

增加非线性，增强学习能力

## 为啥使用收敛慢的(随机)梯度下降法

因为只需要计算一阶导数，而不需要计算二阶，因为几十万以上的参数，计算二阶导数太费时间，内存也是个问题(除非用L-BFGS)

## 非线性激活函数在神经网络中的作用

1. 线性激活函数的劣势：如果只是线性激活函数，则多层网络与单层网络等价，因为每多一层，只是相当于乘以一个矩阵。
2. 非线性激活函数的好处：能把原来线性不可解的问题变为高纬度空间中的线性可解问题。线性可解的意思是：
  - i. 对于分类问题，则原本线性不可分的在新的空间中线性可分了；
  - ii. 对于回归问题，非线性激活函数的存在使得我们可以逼近任意的连续函数。

## 为啥Sigmoid和Tanh激活函数会导致梯度消失的现象？

因为在参数很大或者很小的时候，他们的导数会趋于0，因此造成了梯度消失。

**ReLU系列激活函数相对于Sigmoid和Tanh激活函数的有点是什么？它们有什么局限性以及如何改进？**

### 优点

- (1)计算梯度简单，因为Sigmoid和Tanh涉及到指数运算
- (2)ReLU能有效解决后两者的问题都消失问题，提供相对宽的激活边界
- (3)ReLU的单侧抑制提供了网络的稀疏表达能力(Why？因为他可以使得一部分神经元的输出为0，因此这些神经元不起作用。)

### 缺点

ReLU的局限性在于其训练过程中会导致神经元死亡的问题，由于激活函数是 $f(x) = \max(0, z)$ 导致梯度在经过该ReLU单元时，被置为0。且之后再也不能被任何数据激活，因为流经这个神经元的梯度永远为0，因此不对任何数据产生响应。因此会导致一定比例的神经元不可逆的死亡，进而参数梯度永远无法更新，整个训练过程失败。

为了解决这一问题，人们设计了Leaky ReLU(LReLU)其表达式是：

$$\begin{aligned}f(z) &= z; z > 0 \\f(z) &= az; z \leq 0\end{aligned}$$

一般a是一个很小的正数，但是怎么选取a也是一个问题。为解决这个问题，人们发明了参数化的PReLU(Parametric ReLU)，它与LReLU的主要区别是，斜率参数a作为网络中一个可学习的参数。而另一个LReLU的变种增加了“随机化”机制，具体的，在训练过程中，斜率a作为一个满足某种分布的随机采样；测试时再固定下来。Random ReLU(RReLU)在一定程度上能起到正则化的作用。

## 平方误差损失函数和交叉熵损失函数分别适合什么场景？

平方损失函数：回归问题，输出是连续值，并且最后一层不含Sigmoid或者Softmax激活函数的NN。因为会导致梯度很小而发生梯度消失的问题  
交叉熵：分类问题。

## 写出多层感知机的平方误差和交叉熵损失函数

给定包含m个样本的集合 $((x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (x^{(m)}, y^{(m)}))$ 。

### 代价函数

平方误差其整体代价函数是：

$$\begin{aligned}J(W, b) &= [\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m J(W, b; x^{(i)}, y^{(i)})] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{s_l} \sum_{j=1}^{s_{l+1}} (W_{ij}^{(l)})^2 \\&= [\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \|y^{(i)} - L_{W,b}(x^{(i)})\|^2] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{s_l} \sum_{j=1}^{s_{l+1}} (W_{ij}^{(l)})^2\end{aligned}$$

二分类交叉熵误差其整体代价函数是：

$$J(W, b) = -[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m J(W, b; x^{(i)}, y^{(i)})] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{s_l} \sum_{j=1}^{s_{l+1}} (W_{ij}^{(l)})^2$$

$$= -[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y^{(i)} \ln o^{(i)} + (1 - y^{(i)}) \ln(1 - o^{(i)}))] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{s_l} \sum_{j=1}^{s_l+1} (W_{ij}^{(l)})^2$$

多分类交叉熵误差的整体代价函数是：

$$\begin{aligned} J(W, b) &= -[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m J(W, b; x^{(i)}, y^{(i)})] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{s_l} \sum_{j=1}^{s_l+1} (W_{ij}^{(l)})^2 \\ &= -[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_k^{(i)} \ln o_k^{(i)}] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{s_l} \sum_{j=1}^{s_l+1} (W_{ij}^{(l)})^2 \end{aligned}$$

其中  $o_k^{(i)}$

代表第*i*个样本的预测属于类别k的概率， $y_k^{(i)}$ 为实际的概率(如果第*i*个样本的真实类别为k，则 $y_k^{(i)} = 1$ ，否则为0)。

梯度计算公式

第(*l*)层的参数为  $W^{(l)}, b^{(l)}$ ，每一层的线性变换为：

$$\mathbf{z}^{(l)} = \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{x}^{(l)} + \mathbf{b}^{(l)}$$

输出为：

$$\mathbf{a}^{(l)} = f(\mathbf{z}^{(l)})$$

其中f是非线性激活函数(比如Sigmoid, Tanh, ReLu等)； $\mathbf{a}^{(l)}$ 直接作为下一层的输入，即： $\mathbf{x}^{(l+1)} = \mathbf{a}^{(l)}$ 。我们通过批量梯度下降法来优化网络参数。

$$\mathbf{W}_{ij}^{(l)} = \mathbf{W}_{ij}^{(l)} - \alpha \frac{\partial}{\partial W_{ij}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{b}_i^{(l)} = \mathbf{b}_i^{(l)} - \alpha \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}),$$

问题的核心是求  $\frac{\partial}{\partial W_{ij}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}), \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b})$

然后从最后一层，反向迭代。

$$\frac{\partial}{\partial W_{ij}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \frac{\partial J(\mathbf{W}, \mathbf{b})}{\partial z_j^{(l+1)}} \frac{\partial z_j^{(l+1)}}{\partial \mathbf{W}_{ij}^{(l)}}$$

## 神经网络训练技巧

主要涉及的问题是“过拟合”：解决方法包括数据集增强，正则化，模型集成。其中dropout是模型集成方法中最高效与常用的技巧。此外，DNN训练中设计的手动调参，如学习率，权重衰减系数，Dropout比例等，这些参数的选择会显著影响模型最终的训练效果。Batch Normalization(BN)方法有效规避了这些复杂参数对网络训练产生的影响，在加速训练收敛的同时也提升了网络的泛化能力。

### 神经网络训练时是否可以将全部参数初始化为0？

因为所有参数都是相同的值，所有神经元都是对称的，因此没有办法打破这种对称，导致无论学习多久，所有参数依然是相同的。因此我们需要随机地初始化NN参数的值，来打破这种对称性。

### 为啥Dropout可以抑制过拟合？它的工作原理和实现？

还得先介绍Dropout的实际步骤，也就是训练的时候是多少个神经元？预测的时候是多少个？

Dropout作用于小批量训练数据，由于其随机丢弃部分神经元的机制，相当于每次迭代都是在训练不同结构的神经网络，类比于Bagging方法，Dropout可被认为是一种实用的大规模深度神经网络的模型集成算法。这是由于传统意义上的Bagging涉及多个模型的同时训练和测试评估，当网络与参数规模庞大时，这种集成方式需要消耗大量的运算时间与空间。Dropout在小批量级别上的操作，提供了一种轻量级的Bagging集成近似，能够实现指数级数量神经网络的训练与评测。

Dropout在具体实现中，某个神经元以概率p被丢弃，因此N个神经元在Dropout下相当于是 $2^N$ 个模型的集成。这 $2^N$ 个模型可认为是原始网络的子网络，它们共享部分权值，并且具有相同的网络层数，而模型的整体参数数目不变，这就大大简化了运算。对于任意神经元，每次训练中都与一组随机挑选的不同的神经元集合共同进行优化，这个过程会减弱全体神经元之间的联合适应性，减小过拟合的风险，增强泛化能力。

批量归一化的基本动机与原理是什么？在卷积神经网络中如何使用？

神经网络训练过程的本质是学习数据分布，如果训练数据与测试数据的分布不同将大大降低网络的泛化能力，因此我们需要在训练开始前对所有输入数据进行归一化处理。

归一化方法是针对每一批数据(比如m个样本)，在网络的每一层的输入之前增加归一化处理(均值为0，方差为1)，将所有批处理数据强制在统一的数据分布下，即对该层的任一神经元(假设是第k维) $\hat{x}^{(k)}$ 采用如下公式：

$$\hat{x}^{(k)} = \frac{x^{(k)} - E[x^{(k)}]}{\sqrt{Var[x^{(k)}]}}$$

其中 $x^{(k)}$ 为该层第k个神经元的原始输入数据， $E[x^{(k)}]$ 为这一批输入数据在第k个神经元的均值， $\sqrt{Var[x^{(k)}]}$ 为这一批数据在k个神经元的标准差。

卷积操作的本质特性包括系数交互和参数共享，具体解释这两种特性以及作用。

## 稀疏交互

对于全连接网络，如果第k层有m个神经元，第k+1层有n个神经元，总两层间的权重数目是mn，对于卷积网络，如果卷积核大小为k，则这两层间的权重个数是kn，因为后面一层，每一个神经元只与前一层k个神经元相连。一般k远远小于m，因此相对于全连接网络而言，参数数量大大减少了，因此具有稀疏交互的特征。

稀疏交互的物理意义是，通常图像、文本、语音等现实世界中的数据都具有局部的特征结构，我们可以先学习局部的特征，再将局部的特征组合起来形成复杂和抽象的特征。以人脸识别为例，最底层的神经元可以检测出各个角度的边缘特征，中间层的神经元可以将边缘组合起来得到眼睛、鼻子、嘴巴等复特征；最后，位于上层的神经元可以根据各个器官的组合检测出人脸的特征。

## 参数共享

参数共享是指在同一个模型的不同模块中使用相同的参数，它是卷积运算的固有属性。在学习的过程中，我们学到的就是卷积核（的参数）。根据参数共享的思想，我们只需要学习一组参数集合，而不需要针对每个位置的每个参数都进行优化，从而大大降低了模型的储存需求。

参数共享的物理意义是使得卷积具有平移不变性。假如图像中有一只猫，那么无论它出现在图像中的什么位置，都应该将它识别为猫，也就是说神经网络的输出对于平移变换具有不变性。

## 常用的池化操作有哪些？池化的作用是什么？

常用的池化操作主要针对非重叠区域，包括均值（mean pooling）、最大池（max pooling）。mean pooling是用一个区域的平均值代替这个区域，能够抑制由于领域大小受限造成估计值方差增大的现象，特点是对背景的保留效果更好；max pooling是用一个区域的最大值代替这个区域本身，能够抑制网络参数误差造成估计均值偏移现象，特点是更好地提取纹理信息。

池化操作的本质是降采样。除了能显著降低参数数量，还能够保持对平移、伸缩、旋转操作的不变性。平移不变性是对小量平移而言，尺度一般是pooling的尺寸。伸缩（尺度）不变性，因为pooling就是一个能保持区域主要信息（如最大值）的压缩变换，因此具有伸缩不变性。旋转不变性，在配合多重pooling以后，对于max pooling，对于旋转的图像，我们仍能得到相同的结果，比如图像数字5。

## 卷积神经网络如何用于文本分类任务？

假设文本总词量是N，每个单词可以转化为一个K维向量，向量维度K可以预先在其它语料库中获得，也可以作为未知的参数有网络训练得到。这样就组成了一个NXK的输入矩阵，可以看成是一个图像。

### 卷积层

在这个矩阵上，我们引入hXK大小的卷积核，进行卷积操作：

$$c_i = f(w * x_{i:i+h-1+b})$$

卷积后得到一个N-h+1维度大小的特征向量。通过不同大小的卷积核，提炼出不同的特征向量，构成卷积层的输出。

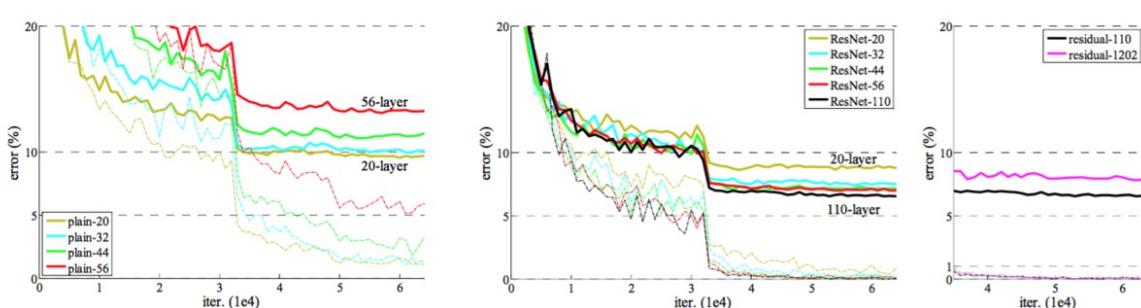
### 池化层

选用K-Max进行池化，也就是对每个卷积核作用之后得到的特征向量，进行k-Max池化，也就是选择特征向量中最大的K个特征，这样，每个特征向量转化成一个K维向量，效果就是，通过池化把不同长度的句子转化成定长的向量表示。若有M个卷积核，池化后就得到一个KXM的矩阵，k=1的话就是，1-Max，最终一个文本对应一个1XM的向量。

后面的网络结构就与具体的任务有关了，如果是文本分类，就最后接入一个全连接层，并使用softmax激活函数输出每个类别的概率。

## ResNet的提出背景和核心理论是什么？

ResNet的提出背景是解决或缓解深层的神经网络训练中的梯度消失问题。当时的一个问题是，层数更深的神经网络反而会有更大的训练误差。这种反常，很大程度上归结于深度神经网络的梯度消失问题。随着网络层数的增加，误差反向传递时，在每层间是相乘的，N层网络，从输出到输入，就是N次连乘，因此很容易造成梯度的消失与膨胀，影响参数的学习。下图就是传统深度神经网络与残差网络的对比。

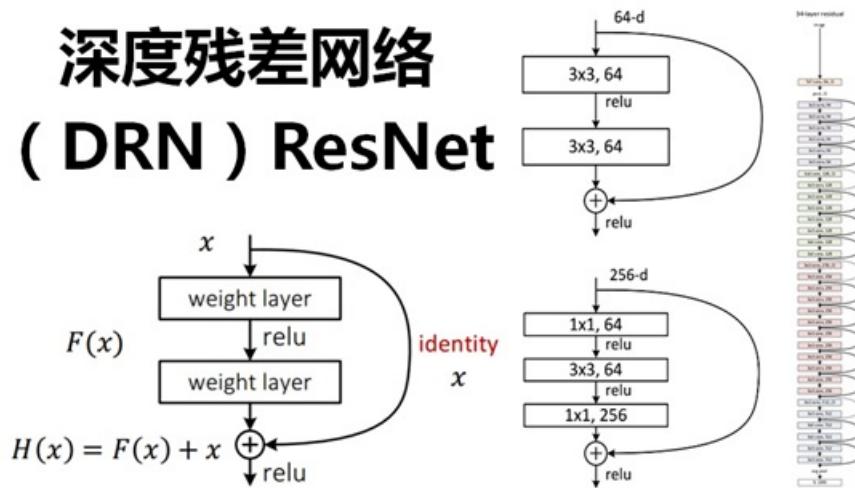


如下图所示，输入x经过两个神经网络的变换得到F(x)，同时也短接到两层之后，最后这个包含两层神经网络模块输出H(x)=F(x)+x；这样一来，F(x)被设计为只需要拟合输入x与目标输出H(x)的残差H(x)-x，残差网络的名字因此而来。如果某一层的输出已经很好的拟合了期望结果，那么多加入一层不会使得模型变差，因为该层的输出将直接被短接到两层之后，直接相当于学习了一个恒等映射，而跳过的两层只需要拟合上层输出和

目标之间的残差即可。

ResNet可以有效改善深层的神经网络学习问题，使得训练更深的网络成为可能。

# 深度残差网络 ( DRN ) ResNet



## 神经网络的种类适用场景与优缺点

# 基本C++问题

## 指针与引用的区别

指针是一个变量，该变量储存的是一个地址，指向内存中的一个内存单元；而引用只是原来变量的一个别名。

## 数组名与指针的区别

数组名a可以当成数字首地址的指针，除如下两种情况，`sizeof(a),&a.`

1. `sizeof`得到不同结果；对数组取`sizeof`得到整个数组的长度；对指针取`sizeof`得到指针本身所占空间的大小。
2. 指针可以`pointer++`，数组名不可以。
3. 指针可以赋值再指向别人，数组名不可以。

## 字符串指针赋值问题

如果指针没有分配空间，则会出现`0xC0000005: Access violation writing location`

```
void main(int n)
{
    //char pStr[] = "abc"; //right
    //char pStr[4] = "abc"; //right
    //char pStr[3] = "abc"; //wrong, need >=4
    char* pStr = "abc"; //wrong, 没有分配空间.
    char temp = 'b';
    pStr[0] = temp;
    printf("%s\n",pStr);
}
```

## sizeof

定义一个空的类型，里面没有任何成员变量和成员函数，但是对该类型求`sizeof`，得到的结果是多少？

答案：1；

不是0的原因是，当我们声明该类型的实例时，它必须在内存中有一定的空间，否则无法使用这些实例，至少占多少内存，由编译器决定，在VS中，每个空类型的实例占1字节的空间。

面试官：如果在该类型里面添加一个构造函数和析构函数，再对该类型求`sizeof`，得到的结果又是多少？

应聘者：1。因为调用构造函数与析构函数只需要知道函数的地址即可，而这些函数的地址只与类型相关，与类型的实例无关，编译器也不会因为这两个函数而在实例中添加额外的信息。

面试官：那如果把析构函数标记为虚函数呢？

应聘者：编译器一旦发现一个类型中有虚函数，就会为该类型生成虚函数表，并在该类型的每一个实例中添加一个指向该虚函数表的指针，在32位的机器上，一个指针占4字节，因此求`sizeof`是4，不是4+1，因为只是指向虚函数表的指针的大小，在64位机器上，一个指针占8字节，因此求`sizeof`是8。

## 数组与指针的sizeof

`sizeof`对数组，得到整个数组所占空间的大小。

`sizeof`对指针，得到指针本身所占空间的大小。

数组的名字就是一个指针，该指针指向数组的第一个元素，我们可以用一个指针来访问数组。也就是数组名加元素下标来访问数组元素或者获取数组元素的值。

```
int data1[] = {1,4,7,9,6};
cout<<sizeof(data1)<<endl;
cout<<"1st of data1:"<<*(data1)<<endl;
cout<<"2st of data1:"<<*(data1 + 1)<<endl;
cout<<"1st of data1:"<<*(data1+3)<<endl;

20
1st of data1:1
2st of data1:4
1st of data1:9
```

## class与struct区别

C++中Class成员变量或者成员函数默认`private`，而struct成员变量默认为`public`。

C#中，class与struct的成员变量与成员函数都默认是`private`。

```

#include <iostream>
#include <array>
int main ()
{
    std::array<int,5> myints;
    std::cout << "size of myints:" << myints.size() << std::endl;
    std::cout << "sizeof(myints):" << sizeof(myints) << std::endl;
    return 0;
}
size of myints: 5
sizeof(myints): 20

```

## String 类

`string`的构造、拷贝构造、析构、赋值、输出、比较、字符串加、长度、子串

## 数据结构

数据结构一直是技术面试的重点，大多数面试题都是围绕数组、字符串、链表、树、栈以及队列这几种常用的数据结构展开的，因此每一个面试者都必须掌握着集中数据结构。

数组和字符串是两种最基本的数据结构，他们用连续内存分别储存数据和字符。链表和树是面试中出现频率最高的数据结构，由于操作链表和树需要大量的指针，应聘者在解决相关问题的时候一定要留意代码的鲁棒性，否则容易出现程序崩溃的问题。栈是一个与递归密切相关的数据结构，同样队列也与广度优先遍历算法密切相关，深入理解这两种数据结构能帮助我们解决很多算法问题。

### 数组

它占用一块连续的内存空间并按照顺序存储数据，创建数据时，我们需要首先指定数组的容量大小，然后根据大小分配内存。即使我们只在数组中存储一个数字，也需要为所有的数据预先分配内存，因此数组的空间效率不是很好，经常会有空闲的区域没有得到充分利用。

数组中的内存是连续的，因此我们可以根据下标在O(1)时间读/写任何元素，因此它的效率是很高的。我们可以根据数组时间效率高的优点来实现简单的哈希表，把数组的下标设为哈希表的键值(key)，数组中的数据设为哈希表的value。这样就可以在O(1)时间内实现查找，从而快速、高效地解决很多问题。

### Vector

针对数组空间效率不高的问题，人们设计实现了多种动态数组，比如STL中的vector，为了避免浪费，我们首先为数组开辟较小的空间，然后往数组中添加数据，当数据的数目超过数组的容量时，我们再重新分配一个更大的空间(STL中vector每次扩容时，新的容量都是前一次的两倍)，把之前的数据复制到新的数组中，再把之前的内存释放，这样就减小内存的浪费。每次扩容都需要大量的额外操作，因此尽量减小改变数组容量大小的次数。

简单设计Vector：一开始，新建一个大小为N的数组（弄成数组是保证内存是连续的），当vector中的元素内存超出开始的数组内存大小时，就新建一个大小为2N的数值，把原来的数组copy到新的数组，再释放原来的内存。用这种节奏来创建更大的数组来容纳更多的vector。

```

void CList::ReplaceEmpty(char str[], int length)
{
    if(str == NULL || length <= 0)
        return;
    int count = 0;
    int num = 0;
    while(str[num] != '\0')
    {
        if(str[num] == ' ')
            count++;
        num++;
    }
    int newStringLength = num + 2*count;
    int newNum = newStringLength;
    if(newStringLength >= length)
        return;
    for(int n = num; n >= 0; n--)
    {
        if(str[n] == ' ')
        {
            str[newNum--] = '0';
            str[newNum--] = '2';
            str[newNum--] = '%';
        }
        else
            str[newNum--] = str[n];
    }
}

```

## 二叉树：

### 树的遍历

1. 前序遍历：先访问根结点，再访问左子结点，最后访问右子结点。

2. 中序遍历：先访问左子结点，再访问根结点，最后访问右子结点。

3. 后序遍历：先访问左子结点，再访问右子结点，再访问根结点。

前中后表示访问根结点的时间。

- 前序遍历：先访问根结点，再访问左子结点，最后访问右子结点。

图 2.5 中的二叉树的前序遍历的顺序是 10、6、4、8、14、12、16。

- 中序遍历：先访问左子结点，再访问根结点，最后访问右子结点。

图 2.5 中的二叉树的中序遍历的顺序是 4、6、8、10、12、14、16。

- 后序遍历：先访问左子结点，再访问右子结点，最后访问根结点。

图 2.5 中的二叉树的后序遍历的顺序是 4、8、6、12、16、14、10。

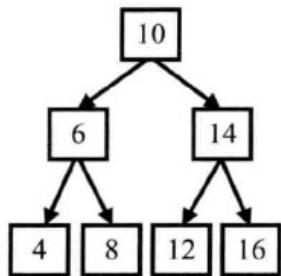


图 2.5 一个二叉树的例子

根据前序，中序来重建树：

如图 2.7 所示，前序遍历序列的第一个数字 1 就是根结点的值。扫描中序遍历序列，就能确定根结点的值的位置。根据中序遍历特点，在根结点的值 1 前面的 3 个数字都是左子树结点的值，位于 1 后面的数字都是右子树结点的值。

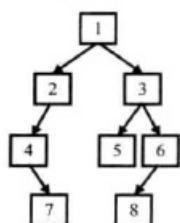


图 2.6 根据前序遍历序列{1, 2, 4, 7, 3, 5, 6, 8}和中序遍历序列{4, 7, 2, 1, 5, 3, 8, 6}重建的二叉树

前序中，第一个点就是根结点，根据根结点的值，在中序中找到根结点的值，则根结点之前的是左子树，根结点之后的是右子树。根据中序排列中左子树的大小(长度)L，在前序排列中找到左子树(从1到L)，因此对于左子树，又得到了前序和中序排列。对右子树也可以得到前序与中序排列。由此递归实现。

由于在中序遍历序列中，有 3 个数字是左子树结点的值，因此左子树总共有 3 个左子结点。同样，在前序遍历的序列中，根结点后面的 3 个数字就是 3 个左子树结点的值，再后面的所有数字都是右子树结点的值。这样我们就在前序遍历和中序遍历两个序列中，分别找到了左右子树对应的子序列。

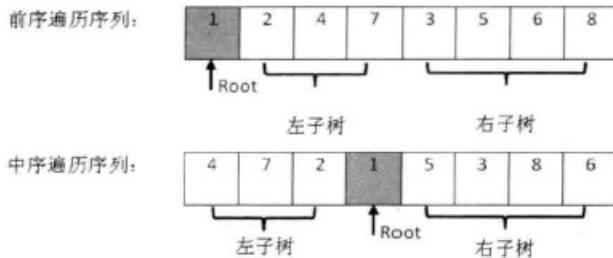


图 2.7 在二叉树的前序遍历和中序遍历的序列中确定根结点的值、左子树结点的值和右子树结点的值

```
BinaryTreeNode* CTree::ConstructBinaryTree(int* preorderS, int* preorderEnd, int* inorderS, int* inorderEnd)
{
    int rootValue = preorderS[0];
    int* rootNode = inorderS;

    while(*rootNode <= inorderEnd && *rootNode != rootValue) //find root in inorder
    {
        ++rootNode;
    }
    int LLen = rootNode - inorderS;
    BinaryTreeNode* RootTree = new BinaryTreeNode();
    RootTree->m_nValue = rootValue;
    if(LLen > 0)
    {
        RootTree->m_pLeft = ConstructBinaryTree(preorderS+1, preorderS+LLen, inorderS, rootNode-1);
    }
    if(LLen < preorderEnd - preorderS)
    {
        RootTree->m_pRight = ConstructBinaryTree(preorderS+LLen + 1, preorderEnd, rootNode+1, inorderEnd);
    }
    return RootTree;
}

void CTree::PreOrderPrint(BinaryTreeNode* BTree)
{
    if(BTree != NULL)//print root first
    {
        m_preorder.push_back(BTree->m_nValue);
        cout<<BTree->m_nValue<<endl;
    }
    if(BTree->m_pLeft != NULL)
    {
        PreOrderPrint(BTree->m_pLeft);
    }
    if(BTree->m_pRight != NULL)
    {
        PreOrderPrint(BTree->m_pRight);
    }
}

void CTree::InOrderPrint(BinaryTreeNode* BTree)
{
    if(BTree->m_pLeft != NULL)
    {
        InOrderPrint(BTree->m_pLeft);
    }
    if(BTree != NULL)//print root second
    {
        m_preorder.push_back(BTree->m_nValue);
        cout<<BTree->m_nValue<<endl;
    }
    if(BTree->m_pRight != NULL)
    {

```

```

        InOrderPrint(BTree->m_pRight);
    }
}

void CTree::PostOrderPrint(BinaryTreeNode* BTree)
{
    if(BTree->m_pLeft != NULL)
    {
        PostOrderPrint(BTree->m_pLeft);
    }

    if(BTree->m_pRight != NULL)
    {
        PostOrderPrint(BTree->m_pRight);
    }

    if(BTree != NULL)//print root last
    {
        m_postorder.push_back(BTree->m_nValue);
        cout<<BTree->m_nValue<<endl;
    }
}

```

## 栈与队列

栈:先进后出, 压入push,弹出pop

队列:后进先出, 压入push,弹出pop

用两个栈来实现队列。模板类的实现要在.h里面

```

#pragma once
#include <stack>
using namespace std;

template <class T>
class CStackDequeue
{
public:
    CStackDequeue();
    ~CStackDequeue();
    void appendTail(const T& node);
    T deleteHead();

private:
    stack<T> m_stack1;
    stack<T> m_stack2;
};

template<class T>
void CStackDequeue<T>::appendTail(const T& node)
{
    m_stack1.push(node);
}

template<class T>
T CStackDequeue<T>::deleteHead()
{
    if(m_stack2.size() <= 0)
    {
        while(m_stack1.size() > 0)
        {
            T& node = m_stack1.top();
            m_stack1.pop();
            m_stack2.push(node);
        }
    }

    if(m_stack2.size() <= 0)
        throw new exception("queue is empty!");

    T node2 = m_stack2.top();
    m_stack2.pop();
    return node2;
}

void main()
{
    CStackDequeue<int> queue;
    queue.appendTail(1);
    int value = queue.deleteHead();
}

```

## 排序算法

核心是在数组中选择一个值，重新排列数组，使得该值左边的元素都小于该值，右边的元素都大于该值。分成两组后，再继续这种操作，以此递归下去，最终得到全排序。

下面都是对数组操作，因此要注意下标问题。

```
int CSort::Partition(int data[], int length, int start, int end)
{
    if(start >= end)
        return start;
    if(data == NULL || start < 0 || end > length || length <= 0)
        throw new exception("Invalide parameters!");
    int small = start;
    srand((unsigned)time(NULL)); //random seed
    int randInt = rand()%(end - start);
    int value = data[start + randInt];
    cout<<"Value: "<<value<<endl;
    swap(data[start+randInt],data[end]); //all element start from start,
    for(int index = start; index < end; index++)
    {
        if(data[index] < value)
        {
            swap(data[index], data[small]);
            small++;
        }
    }
    swap(data[small], data[end]);
    return small;
}

void CSort::QuicikSort(int data[], int length, int start, int end)
{
    if(end <= start)
        return;

    int index = Partition(data,length,start,end);
    if(index>start)
    {
        QuicikSort(data,length,start, index-1);
    }
    if(index < end)
    {
        QuicikSort(data, length, index + 1 ,end);
    }
}
```

## 与，或，异或

负数的二进制表示

举例：

-5 在计算机中表达为：11111111 11111111 11111111 11111011。转换为十六进制：0xFFFFFFF5。

-1在计算机中如何表示：

先取1的原码：00000000 00000000 00000000 00000001

得反码：11111111 11111111 11111111 11111110

得补码：11111111 11111111 11111111 11111111

可见, -1在计算机里用二进制表达就是全1。16进制为:0xFFFFFFFF。

注:十六进制前缀是0x。

表 2.1 与、或、异或的运算规律

与 (&)	$0 \& 0 = 0$	$1 \& 0 = 0$	$0 \& 1 = 0$	$1 \& 1 = 1$
或 ( )	$0   0 = 0$	$1   0 = 1$	$0   1 = 1$	$1   1 = 1$
异或 (^)	$0 ^ 0 = 0$	$1 ^ 0 = 1$	$0 ^ 1 = 1$	$1 ^ 1 = 0$

左移运算符  $m << n$  表示把  $m$  左移  $n$  位。左移  $n$  位的时候, 最左边的  $n$  位将被丢弃, 同时在最右边补上  $n$  个 0。比如:

$00001010 << 2 = 00101000$

$10001010 << 3 = 01010000$

## 计算二进制中1的个数

```
int CRecursion::CountNumber1(int n)
{
    int count = 0;
    while(n)
    {
        if(n&1)
            count++;
        n = n>>1;
    }
    return count;
}
```

## 链表

### 在O(1)时间内删除一个节点

方法:通过用节点下一个节点来覆盖这个节点, 因此不需要查询将被删除节点前面的所有节点。

问题:

如果你传入一个指针, 实际上你传入的就是一个物理地址, 对于链表而言, 你不能在链表头插入一个元素, 因为最终出来的时候, 指针(的地址)一直没变, 因此技术你在函数里面对指针进行赋值, 但是出了函数, 有没有效果了。

一种会出错的删除做法:

```
void CList::DeleteNode(ListNode* pListHead, ListNode* pToDelete)
{
    if(!pListHead || !pToDelete)
        return;

    if(pToDelete->m_pNext == NULL)
    {
        pToDelete = NULL;
    }
    if(pToDelete->m_pNext != NULL)
    {

        /*pToDelete->m_value = pToDelete->m_pNext->m_value; //出错的做法
        pToDelete->m_pNext = pToDelete->m_pNext->m_pNext;
        delete pToDelete->m_pNext; //因为删除了pToDelete->m_pNext, 因此索引到此, 访问了空地址. 程序会崩溃. 正确的做法如下

        ListNode* pNext = pToDelete->m_pNext; //将要被删除的节点, 在删除之前, 复制它的值
        pToDelete->m_value = pToDelete->m_pNext->m_value;
        pToDelete->m_pNext = pToDelete->m_pNext->m_pNext;
        delete pNext;
    }
}
```

## 对数组中奇偶数据分类排序

```

void CCArry::ReorderOddEven(int* data, int length, bool (*Func)(int))
{
    if(data==NULL || length <= 0)
        return;
    int* pBegin = data;
    int* pEnd = data + length - 1;

    while(pBegin < pEnd)
    {
        while(!Func(*pBegin))
        {
            pBegin++;
        }

        while(Func(*pEnd))
        {
            pEnd--;
        }

        int temp = *pEnd;
        *pEnd = *pBegin;
        *pBegin = temp;
    }
}

void main()
{
    const int length = 6;
    int data[] = {4,1,5,3,6,7};
    CCArry* test_arr = new CCArry();
    test_arr->ReorderOddEven(data, length, IsEven);//函数指针的调用
    for(int i = 0; i < length; i++)
    {
        cout<<data[i]<<endl;
    }
}

bool IsEven(int value)
{
    return (value&1) == 0;
}

```

## 为啥要用C++智能指针

1. 内存泄漏：是指操作系统将空间分配给你，但是那个空间被你申请后并没有被使用，并且没有相应的释放语句。也就是该空间不再被任何指针或引用所引用，成为一个幽灵空间，操作系统以为你在控制它，但其实你并没有控制它。
  2. 重复释放：程序通过free或delete语句释放已经不属于该程序的空间。这是很危险的，因为第二次free的空间已经被别的程序所使用。所以C++中把这种错误当成了致命错误。
- 栈上的空间是由系统分配的。堆上的空间是由用户自己分配的。通过new创建，free释放。

## C++什么时候该使用new?该注意什么来防止内存泄漏？

打印1到最大的n位数，比如n=2,怎打印1到99.

```

void PrintToMaxofNDigits(int n); //输入要打印的位数
void PrintNumber(char* number); //打印字符串
bool Increment(char* number); //每次增加1看是否越界
void CRecursion::PrintToMaxofNDigits(int n)
{
    if(n <= 0)
        return;

    char *number = new char[n+1];
    memset(number, '0', n);
    number[n] = '\0';
    while(!Increment(number))
    {
        PrintNumber(number);
    }
    delete []number;
}

bool CRecursion::Increment(char* number)
{
    bool isOverFlow = false;
    int numLength = strlen(number);
    int nTakeOver = 0;
    for(int i = numLength - 1; i >= 0; i--)

```

```

{
    int nSum = number[i] - '0' + nTakeOver;
    if(i == numLength -1)
        nSum++;

    if(nSum >= 10)
    {
        if(i == 0)
        {
            isOverflow = true;
        }
        else
        {
            number[i] = nSum - 10 + '0';
            nTakeOver = 1;
        }
    }
    else
    {
        number[i] = nSum + '0';
        break;
    }
}
return isOverflow;
}

void CRecursion::PrintNumber(char* number)
{
    bool isBeginning0 = true;
    int nLength = strlen(number);
    for(int i = 0; i < nLength; ++i)
    {
        if(isBeginning0 && number[i] != '0')
            isBeginning0 = false;
        if(!isBeginning0)
        {
            printf("%c", number[i]);
        }
    }
    printf("\n");
}

```

printf("%c",number[i]);打印字符

接下来是递归算法：

通过递归，打印只针对于个位数，也就是index == length -1的位置。

```

void CRecursion::PrintToMaxofNDigitsRecur(int n)
{
    if(n <= 0)
        return;

    char* number = new char[n+1];
    number[n] = '\0';
    for(int i = 0; i < 10; i++)
    {
        number[0] = i + '0';
        PrintToMaxofNDigitsRecursively(number, n, 0);
    }
    delete[] number;
}

void CRecursion::PrintToMaxofNDigitsRecursively(char* number, int length, int index)
{
    if(index == length -1)
    {
        PrintNumber(number);
        return;
    }

    for(int i = 0; i < 10; i++)
    {
        number[index+1] = i + '0';
        PrintToMaxofNDigitsRecursively(number, length, index + 1);
    }
}

```

输入两颗二叉树A和B，判断B是不是A的子结构。

通过递归实现。如果两个头节点相同，则比较两者的左右子树。如果不相同，则把A的左右子树当成树，看他们是否含有B。

```

bool CTree::HasSubtree(BinaryTreeNode* pRoot1, BinaryTreeNode* pRoot2)
{
    bool result;
    if(pRoot2 == NULL)
        return true;
    if(pRoot1 == NULL)
        return false;

    if(pRoot1->m_nValue == pRoot2->m_nValue)
    {
        result = DoesTree1HaveTree1(pRoot1, pRoot2);
    }
    if(!result)
    {
        result = DoesTree1HaveTree1(pRoot1->m_pLeft, pRoot2);
    }
    if(!result)
    {
        result = DoesTree1HaveTree1(pRoot1->m_pRight, pRoot2);
    }
    return result;
}

bool CTree::DoesTree1HaveTree1(BinaryTreeNode* pRoot1, BinaryTreeNode* pRoot2)
{
    bool result;
    if(pRoot2 == NULL)
        return true;
    if(pRoot1 == NULL)
        return false;

    if(pRoot1->m_nValue != pRoot2->m_nValue)
    {
        return false;
    }

    return DoesTree1HaveTree1(pRoot1->m_pLeft, pRoot2->m_pLeft)&&DoesTree1HaveTree1(pRoot1->m_pRight, pRoot2->m_pRight);
}

```

输入两个整数序列，第一个是栈的压入序列，第二个是不是栈的弹出序列

比如压入序列是1, 2, 3, 4, 5; 则4, 5, 3, 2, 1是可能的弹出序列，而4, 3, 5, 1, 2不是弹出序列。

```

bool CTree::IsPopOrder(const int* pPush, const int* pPop, int nLength)
{
    stack<int> stackData;
    const int* pNextPush = pPush;
    const int* pNextPop = pPop;
    int pushLength = 0;
    while(pushLength < nLength)
    {
        int topData = *pNextPop;
        while(*pNextPush != topData)
        {
            if(pNextPush == NULL)// no this element in the push list
                return false;
            stackData.push(*pNextPush);
            pNextPush++;
            pushLength++;
        }
        pNextPush++;
        pushLength++;
        pNextPop++;
    }
    while(!stackData.empty())
    {
        if(stackData.top() != *pNextPop)
        {
            return false;
        }
        stackData.pop();
        pNextPop++;
    }
    return true;
}

```



# 标准模板库

STL这节包含两部分，一个是数据结构，一个是算法。对于这些数据结构，一方面要知道有哪些数据结构，然后要知道每一种数据结构的特征与功能，能实现哪些操作。然后是我们要知道每种数据结构使用的场景。然后要知道这些数据结构实现的原理是什么？比如红黑树这些。最终就是知道原理以后，我们能基于特定任务而创建自己的数据结构。

algorithms，要知道有哪些算法，这些算法的操作对象是什么(迭代器)？哪些数据结构。然后就是熟悉常用的一些算法。

Boost库包含150多个库，其中就有线性代数库uBLAS，Boost是STL的高阶版，当前自己用不到，因此，了解了STL就足够了。如果要用线性代数库，则Eigen可能是一个好的选择。遇到问题，需要开发库，原则来说先看已有的库，基本上已有的库就呢个满足自己的需求了。

参考这篇文章 [C++ STL 一般总结](#)

STL中体现了泛型程序设计的思想，泛型是一种软件的复用技术。

## STL的六大组件：

### 容器(Container)

是一种数据结构，如list,vector,deques,以模板的方法提供，为了访问容器中的数据，可以使用由容器类输出的迭代器。

顺序容器：vector,list,deque,string。

关联容器：set,multiset, map, multimap,hash\_set,hash\_map,hash\_multiset,hash\_multimap

杂项： stack,queue,valarray,bits

### 迭代器(Iterator)

提供了访问容器中对象的方法，例如，可以使用一堆迭代器指定list或vector中的一定范围的对象。迭代器如同一个指针。事实上，C++指针也是一种迭代器。但是迭代器也可以是那些定义了operator\*()以及其它类似于指针的操作符地方的类对象。

### 算法(algorithm)

是用来操作容器中数据的模板函数。列例如，STL中的sort()来对一个vector中的数据进行排序。用find()来搜索一个list中的对象，函数本身与他们操作的数据的结构和类型无关，因此他们可以在从简单数组到高级复杂容器的任何数据结构上使用。

### 仿函数(Function object)

仿函数(functor)又称为函数对象(function object)，其实就是重载了()操作符的struct，没有什么特别的地方。

### 迭代适配器(adaptor)

### 空间配置器(allocator)

其中主要工作包括1.对象的创建与销毁，2.内存的获取与释放

[STL底层数据结构实现](#)

[容器的基本特征](#)

**概念**：容器是储存其他对象的对象。被储存的对象必须是同一类型。

**基本特征**：以下用X表示容器类型（后面会讲到），T表示储存的对象类型（如int）；a和b表示为类型X的值；u表示为一个X容器的标识符（如果X表示vector<int>，则u是一个vector<int>对象。）

表达式	返回类型	说明	复杂度
X::iterator	指向T的迭代器类型	满足正向迭代器要求的任何迭代器	编译时间
X u		创建一个名为u的空容器	固定
X()		创建一个匿名空容器	固定
X u(a)		同X u(a);	线性
a.begin()	迭代器	返回指向容器第一个元素的迭代器	固定
a.end()	迭代器	返回指向超尾值的迭代器	固定
a.size()	无符号整型	返回元素个数	固定
a.swap()	void	交换a和b内容	固定
a == b	可转换为bool	如果a和b长度相当且每个元素都相等，则为真	线性
a != b	可转换为bool	返回！(a == b)	线性

顺序容器的基本特征

**概念**：序列是对基本容器的一种改进，在保持其基础功能上增加一些我们需要的更为方便的功能。

**要求**：序列的元素必须是严格的线性顺序排序。因此序列中的元素具有确定的顺序，可以执行将值插入到特定位置、删除特定区间等操作。

**序列容器基本特征**：以下用t表示类型为T（储存在容器中的值的类型）的值，n表示整数，p、q、i和j表示迭代器。

表达式	返回类型	说明
X a(n,t)		声明一个名为a的由n个t值组成的序列
X(n,t)		创建一个由n个t值组成的匿名序列
X a(i,j)		声明一个名为a的序列，并将其初始化为区间[i,j)的内容
X(i,j)		创建一个匿名序列，并将其初始化为区间[i,j)的内容
a.insert(p,t)	迭代器	将t插入到p的前面
a.insert(p,n,t)	void	将n个t插入到p的前面
a.insert(p,i,j)	void	将区间[i,j)的元素插入到p前面
a.erase(p)	迭代器	删除p所指向的元素
a.erase(p,q)	迭代器	删除区间[p,q)中的元素
a.clear()	void	清空容器

不同容器特有的特征

不同容器特有的特征：

表达式	返回类型	含义	支持的容器
a.front()			vector、list、deque
a.back()			vector、list、deque
a.push_front(t)			list、deque
a.push_back(t)			vector、list、deque
a.pop_front(t)			list、deque
a.pop_back(t)			vector、list、deque
a[n]			vector、deque
a.at(t)			vector、deque

## data structure

1. array
2. vector
3. deque
4. list
5. stack
6. queue
7. set
8. map
9. pair

## algorithms

## 常规问题

### 数值的整数次方

$$a^n = a^{(n-1)/2}a^{(n-1)/2}, a \text{ is even}$$

$$a^n = a^{(n-1)/2}a^{(n-1)/2}a, a \text{ is odd}$$

```
double Chapter3::Power(double base, int exponent)
{
    if(base <= 0)
    {
        this->bMInvideSetting = false;
        return 0;
    }
    if(exponent == 0)
    {
        return 1;
    }

    if(exponent < 0)
    {
        base = 1.0/base;
        exponent = -exponent;
    }
    double result = Power(base, exponent>>1);
    result *= result;
    if(exponent & 0x1 == 1)
        result *= base;
    return result;
}
```

### 数组奇偶分类

奇数在前，偶数在后排列，复杂度 $O(n)$

```
void Chapter3::RecordOddEven(int *pData, unsigned int length)
{
    if(pData == NULL || length == 0)
        return;
    int *pStart = pData;
    int *pEnd = pData + length - 1;
    int temp;
    while(pStart < pEnd)
    {
        if(*pStart & 1 == 1)
        {
            pStart++;
        }
        else
        {
            temp = *pEnd;
            *pEnd = *pStart;
            *pStart = temp;
            pEnd--;
        }
    }
}
```

$pStart < pEnd$  比大小，就是比较内存中位置先后。

### 一次查找链表倒数第k个节点

```
ListNode* Chapter3::FindKthToTail(ListNode* pHeadList, unsigned int k)
{
    if(pHeadList == NULL)
        return NULL;
    ListNode *KthNode = pHeadList;
    int num = 0;
    while(++num < k)
```

```

    {
        pHeadList = pHeadList->m_pNext;
        if(pHeadList ==NULL)
            return NULL;
    }
    while(pHeadList != NULL)
    {
        pHeadList = pHeadList->m_pNext;
        if(pHeadList ==NULL)
            return KthNode;
        KthNode = KthNode->m_pNext;
    }
}

```

```

//test FindKthToTail
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    Chapter3* chp = new Chapter3();
    ListNode* p;
    ListNode* head = new ListNode();
    p = head;
    for(int n = 0; n < 10; n++)
    {
        ListNode* node = new ListNode();
        node->m_value = n;
        p->m_pNext = node;
        p = node;
    }
    p->m_pNext = NULL;
    int k_th = 2;
    ListNode *kthNode = chp->FindKthToTail(head, k_th);
    cout << "Last "<< k_th << " is:"<<kthNode->m_value<<endl;
    return 0;
}

```

## 树

### 二叉搜索树的后序遍历

输入一个整数数组，判断该数组是不是某二叉搜索树的后序遍历的结果，是返回true，否则返回false。假设输入的数组的任意两个数字都不相同。二叉搜索树的特征是结点的值大于所有左子树的值，且小于所有右子树的值。如果是后序遍历，则最后一个数是根节点的值，这个值通过一刀把它前面的数组切分成左右两部分，左部分的值都小于该值，为树的左子树，右边部分的值都大于该值，是右子树。如果这个划分不存在，则输入数组不是某二叉树的后序遍历。

例如输入数组{5, 7, 6, 9, 11, 10, 8}，则返回 true，因为这个整数序列是图 4.6 二叉搜索树的后序遍历结果。如果输入的数组是{7, 4, 6, 5}，由于没有哪棵二叉搜索树的后序遍历的结果是这个序列，因此返回 false。

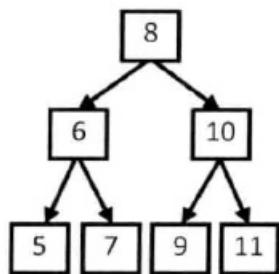


图 4.6 后序遍历序列 5、7、6、9、11、10、8 对应的二叉搜索树

```

bool CTree::VerifySequenceOnBST(int sequence[], int length)
{
    if(sequence == NULL || length< 0)
        return false;

    int rootValue = sequence[length -1];
    int leftTreeLength = 0;
    for(int i = 0; i < length; i++)//finding the point can devide the sequence into 2 parts

```

```

{
    if(sequence[i] > rootValue && leftTreeLength == 0)
    {
        leftTreeLength = i+1;
        break;
    }
}
//make sure the right part large than the root value
for(int i = leftTreeLength; i < length; i++)
{
    if(sequence[i] < rootValue)
        return false;
}

bool left = true;
bool right = true;
if(leftTreeLength > 0)
    left = VerifySequenceOnBST(sequence, leftTreeLength);

if(length - 1 - leftTreeLength > 0)
    right = VerifySequenceOnBST(sequence + leftTreeLength, length - leftTreeLength - 1);

return (left&&right);
}

```

## 二叉树中和为某一值的路径

输入一颗二叉树和一个整数，打印出二叉树中结点值的和为输入整数的

所有路径。从树的根结点开始往下一直到叶结点所经过的结点形成一条路径。

通过递归来实现。求和到叶结点，看是否符合。符合则打印，不符合则把改节点弹出并返回上一级看右结点是否符合。都不符合则再返回上一级，看右边的子树。

```

void CTree::FindPath(BinaryTreeNode* pRoot, int exceptedSum)
{
    if(pRoot == NULL)
        return;

    vector<int> treePath;
    int currentSum = 0;
    FindPath(pRoot->m_pRight,treePath,currentSum,exceptedSum);
}

void CTree::FindPath(BinaryTreeNode* pRoot, vector<int>& path, int currentSum, int exceptedSum)
{
    currentSum += pRoot->m_nValue;
    if(currentSum > exceptedSum)//can't delete this node, because m_nValue can be negative.
    {
        pRoot =NULL;
        return;
    }
    path.push_back(pRoot->m_nValue);
    if(currentSum == exceptedSum && pRoot->m_pLeft == NULL && pRoot->m_pRight == NULL)
    {
        for(int i=0 ; i < path.size(); i++)
        {
            printf("%c\t",path[i]);
        }
        printf("\n");
    }
    if(pRoot->m_pLeft != NULL)
    {
        FindPath(pRoot->m_pLeft,path,currentSum,exceptedSum);
    }
    if(pRoot->m_pRight != NULL)
    {
        FindPath(pRoot->m_pRight,path,currentSum,exceptedSum);
    }
    path.pop_back();
}

```

## 从上到下打印二叉树

通过deque实现，在pop\_front的同时，把该结点的左右子节点push\_back到队列的尾部。这样打印完整个deque

```

void CTree::PrintFromTopToBottom(BinaryTreeNode* pRoot)
{
    if(!pRoot)

```

```

    return;

    deque<BinaryTreeNode*> dequeTreeNode;
    dequeTreeNode.push_back(pRoot);
    while(dequeTreeNode.size())
    {
        BinaryTreeNode* currentNode = dequeTreeNode.front();
        dequeTreeNode.pop_front();
        printf("%c",currentNode->m_nValue);

        if(currentNode->m_pLeft)
            dequeTreeNode.push_back(currentNode->m_pLeft);

        if(currentNode->m_pRight)
            dequeTreeNode.push_back(currentNode->m_pRight);
    }
}

```

## 之字形打印整个二叉树

通过两个stack来实现，比如第1层存于stack1，在打印第一层时，把第一层的子节点(也就是dierceng)存于stack2,打印完stack1,此时stack为空，再打印stack2,,在打印stack2时，把第二层的子节点(也就是第三层)存于stack1。以此循环下去，直到stack1,stack2为空为止。

## 复杂链表的复制

请实现函数ComplexListNode\* Clone(ComplexListNode\* pHead),复制一个复杂链表在复杂链表中除了有一个m\_pNext指针指向下一个节点，还有一个m\_pSibling指针指向链表中的任意节点或者nullptr。节点的C++定义如下。

分三步：

- 1.在原来链表每个结点后面复制前面的节点，做成一个map,也就是hash表。这样原来每个节点N后面都跟着一个N'。
- 2.为链表中新加的每个N'链接指针m\_pSibling。
- 3.把链表结点根据序号的奇偶性分成两部分，这样就得到了我们想要的clone的链表。返回表头即可。

## 二叉搜索树与双向链表

将一个二叉搜索树转化成一个排序的双向链表。要求不能添加任何新的结点，只能调整树中结点指针的指向。如图：

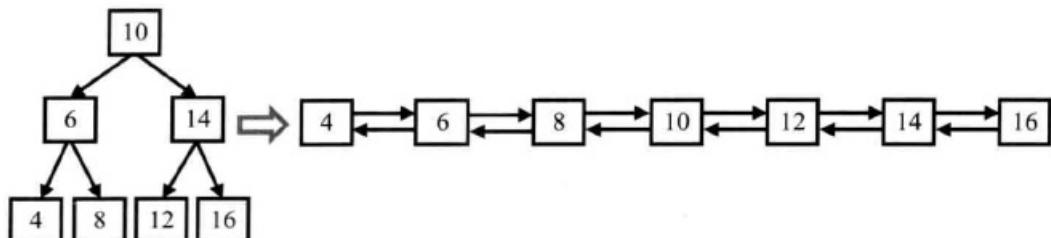


图 4.12 一棵二叉搜索树及转换之后的排序双向链表

通过根结点，把树分为两部分，对每部分都转化成一个双向链表，再最终把这两部分与根节点拼起来，就得到最终的双向链表。问题转化为两个问题，1.怎么把树分成两部分再实现递归；2.怎么办把根结点与两个排序好的链表进行链接。

```

BinaryTreeNode* CTree::Convert(BinaryTreeNode* pRoot)
{
    if(pRoot == NULL)
        return;

    BinaryTreeNode* pLastNodeInList = NULL;
    ConvertNode(pRoot, &pLastNodeInList);
    BinaryTreeNode* pHeadofList = pLastNodeInList;
    while(pHeadofList!=NULL &&pHeadofList->m_pLeft !=NULL)
    {
        pHeadofList = pHeadofList->m_pLeft;
    }
    return pHeadofList;
}

void CTree::ConvertNode(BinaryTreeNode* pRoot, BinaryTreeNode** pLastNodeInList)
{
    if(pRoot == NULL)
        return;

    BinaryTreeNode* pCurrentNode = pRoot;
    if(pCurrentNode->m_pLeft!=NULL)

```

```

ConvertNode(pCurrentNode->m_pLeft, pLastNodeInList);
//左结点转化为双向链表
pCurrentNode->m_pLeft = *pLastNodeInList;//当前节点的右节点连接到双向链表
if(*pLastNodeInList != NULL)
    (*pLastNodeInList)->m_pRight = pCurrentNode;
//当前节点变成链表最后一个节点
*pLastNodeInList = pCurrentNode;
if(pCurrentNode->m_pRight!=NULL)
    ConvertNode(pCurrentNode->m_pRight, pLastNodeInList);
}

```

## 字符串排列

输入一个字符串，打印出该字符串中字符的所有排列，比如abc，则所有排列为：abc,acb,bca,bac,cba,cab.

```

void CRecursion::Permutation(char* pStr)
{
    if(pStr == nullptr)
        return;
    Permutation(pStr,pStr);
}

void CRecursion::Permutation(char* pStr, char* pBegin)
{
    if(*pBegin == '\0')
        printf("%s\n",pStr);
    else
    {
        for(char* pch = pBegin; *pch != '\0'; ++pch)
        {
            char temp = *pch;//pch与pBegin置换
            *pch = *pBegin;
            *pBegin = temp;
            Permutation(pStr, pBegin+1);
            temp = *pch;//还原到原来的样子
            *pch = *pBegin;
            *pBegin = temp;
        }
    }
}

void main(int n)
{
    CRecursion recu;
    char pstr[] = "abc";
    recu.Permutation(pstr);
    printf("Print end!\n");
}

```

## 序列化二叉树

请实现两个函数，分别用来序列化与反序列化二叉树。若结点的子节点为空，则用\$来代替，如果两个子节点都不存在，则用两个\$来代替。节点之间用","隔开。

为确保根节点在最前面，采取前序遍历来序列化数据。ostream用来文件写操作，从内存中写入到硬盘中。

反序列化则把字符串重构为二叉树。根据读取的是数还是\$来判定是否需要再建子节点。建完左子节点再建右子节点。

```

void CTree::Serialize(BinaryTreeNode* pRoot, ostream& stream)
{
    if(pRoot == NULL)
    {
        stream << "$,";
        return;
    }
    stream << pRoot->m_nValue << ',';
    Serialize(pRoot->m_pLeft,stream);
    Serialize(pRoot->m_pRight,stream);
}

void CTree::DeSerialize(BinaryTreeNode** pRoot, istream& stream)
{
    int number;
    if(ReadStream(stream, &number))
    {
        *pRoot = new BinaryTreeNode();
        (*pRoot)->m_nValue = number;
        (*pRoot)->m_pLeft = nullptr;
        (*pRoot)->m_pRight = nullptr;
    }
}

```

```

        DeSerialize(&(*pRoot)->m_pLeft,stream);
        DeSerialize(&(*pRoot)->m_pRight,stream);
    }
}

bool CTree::ReadStream(istream& stream, int* number)
{
    if(stream.eof())
        return false;

    char buffer[32];
    buffer[0] = '\0';

    char ch;
    stream >> ch;
    int i = 0;
    while(!stream.eof() && ch != ',')
    {
        buffer[i++] = ch;
        stream >> ch;
    }
    bool isNumber = false;
    if(i>0 && buffer[0] != '$')
    {
        *number = atof(buffer);
        isNumber = true;
    }
    return isNumber;
}

```

## 寻找数组中第K大的数据

参考[无序整数数组中找第k大的数](#)

利用快速排序的思想。从数组中随机挑选一个数S,把数组分成大于S的数组SL, 以及小于等于S的数组SR,第一次时间复杂度为N, 如果SL数组大小大于K, 则要找的数据在SL中, 否则在SR中。假设在SL中, 我们再一次分割数组, 这一次平均时间复杂度为N/2, 如果有第三次划分, 怎第三次平均时间复杂度是N/4,这样下来总的时间是2N,因此时间复杂度是O(N).

## 寻找最小的K个数

利用堆排序来实现时间复杂度为O(Nlog(K+1))的算法。建立大小为K的堆, 则查找的时间复杂度是O(K+1)。

一个问题是怎么维护一个最大堆?最大堆可以在O(1)时间内找到最大值, 在O(log K)时间内插入。

下面实现利用了快速排序中的二分法。

```

void CCArry::SmallestKInList(int* numbers, int length, int K)
{
    if(numbers == NULL || length <= 0)
        return;

    int middle = length >> 1;
    int start = 0;
    int end = length - 1;
    int index = 0;
    CSort* sort = new CSort();
    while(end > K-1)
    {
        index = sort->Partition(numbers,length,start,end);
        if(index == K-1)
            break;
        else if(index > K -1)
            end = index -1;
        else
            start = index + 1;
    }
    delete sort;
    return;
}

```

## 寻找频率超过半数的数

实际上就是中位数

```

int CCArry::MoreThanHalfNumSort(int* numbers, int length)
{
    if(numbers == NULL || length <= 0)

```

```

    return 0;

int middle = length >> 1;
int start = 0;
int end = length -1;
int index = 0;
CSort* sort = new CSort();

while(start < end)
{
    index = sort->Partition(numbers,length,start,end);
    if(index == middle)
        return numbers[middle];
    else if(index > middle)
        end = index - 1;
    else
        start = index + 1;
}
return numbers[middle];
}

```

## 连续子数组最大和。

输入译者整型数组，其中数组里面有正数也有负数，数组中一个或者连续的多个数组组成一个子数组。求所有子数组的和。

通过定义一个中间变量，子数组以为终点的连续子数组的最大和 $f[i]$ ，则我们要求的连续子数组最大和也就是 $f[i]$ 在 $i=1, \dots, n$ 中的最大值。因为 $f[i]$ 可以用如下递归公式简单的实现。因为问题可以简单的求解。

$$f[i] = f[i - 1] + d[i], \text{ if } f[i-1] > 0$$

$$f[i] = d[i], \text{ if } f[i-1] \leq 0$$

结束