

Table of Contents

序言	1.1
第一章 工具	1.2
推荐书籍	1.2.1
第二章 C++	1.3
基本语法	1.3.1
OOP	1.3.2
模板类与模板函数	1.3.3
COM	1.3.4
常用的python数据处理函数	1.3.5
第三章 算法	1.4
矩阵计算	1.4.1
线性方程组求解方法	1.4.1.1
矩阵变换技巧	1.4.1.2
矩阵分解方法	1.4.1.3
矩阵本征值求解方法	1.4.1.4
奇异矩阵分析	1.4.1.5
大规模稀疏矩阵问题	1.4.1.6
矩阵微分	1.4.1.7
算法与数据结构	1.4.2
最长递增子序列	1.4.2.1
霍夫曼编码	1.4.2.2
最小生成树Prim算法	1.4.2.3
最短路径Dijkstra算法	1.4.2.4
快速排序与二叉树	1.4.2.5
插值	1.4.3
第四章 最优化	1.5
无约束最优化问题	1.5.1
linear search	1.5.1.1
梯度下降法	1.5.1.2
牛顿法	1.5.1.3
Levenberg-Marquardt算法	1.5.1.4
Quasi-Netwon 拟牛顿法	1.5.1.5
信赖域方法	1.5.1.6
共轭梯度法	1.5.1.7
有约束最优化问题	1.5.2
拉格朗日乘子法	1.5.2.1
Karush-Kuhn-Tucker条件	1.5.2.2
最优化的优缺点及其改进方案	1.5.3
参数调节	1.5.4
ResINN	1.5.5
线性与非线性方程组解的稳定性分析	1.5.6
第五章 机器学习	1.6
机器学习面试问题集	1.6.1
机器学习学习任务	1.6.2
机器学习原理	1.6.3

分类	1.6.4
SVM, KKT条件与核函数方法	1.6.4.1
SVM	1.6.4.1.1
KKT条件与对偶	1.6.4.1.2
核函数方法	1.6.4.1.3
逻辑回归与最大熵模型	1.6.4.2
K近邻	1.6.4.3
回归	1.6.5
多元回归分析	1.6.5.1
正则线性模型	1.6.5.2
Ridge回归,Lasso回归, Elastic回归, Early Stopping	1.6.5.2.1
聚类	1.6.6
K均值	1.6.6.1
高斯混合模型	1.6.6.2
降维	1.6.7
PCA	1.6.7.1
流形学习	1.6.7.2
度量学习	1.6.7.3
集成学习	1.6.8
决策树	1.6.8.1
集成学习	1.6.8.2
Bagging	1.6.8.2.1
Boosting	1.6.8.2.2
生成算法	1.6.9
贝叶斯方法	1.6.9.1
隐马尔科夫模型	1.6.9.2
DNN-HMM混合系统	1.6.9.3
图模型	1.6.10
马尔科夫链蒙特卡洛方法	1.6.10.1
特征工程	1.6.11
特征工程	1.6.11.1
模型评估	1.6.12
降维与无监督学习	1.6.13
正则化方法原理与实践	1.6.14
第六章 深度学习	1.7
CNN	1.7.1
RNN	1.7.2
第七章 推荐系统	1.8
计算广告学概论	1.8.1
协同过滤算法	1.8.2
FM(Factorization Machines),FFM	1.8.2.1
SVD在推荐系统的应用	1.8.2.2
基于内容的推荐算法	1.8.3
基于知识的推荐	1.8.4
Learning To Rank LTR	1.8.5
Problem Solver Systems	1.8.6
第八章 项目工作	1.9
Titanic	1.9.1

Customer Segmentation	1.9.2
Residual NN	1.9.3
Fast项目	1.9.4
Miura项目	1.9.5
任务	1.9.6
深度学习的发展脉络	1.9.7
第九章 问题求解系统	1.10
Sklearn介绍	1.10.1
Sklearn的代码架构	1.10.2
Tensorflow介绍	1.10.3
Tensorflow的代码架构	1.10.4
自己动手写神经网络	1.10.5
常用数据处理技巧	1.10.6
NLP常用处理技巧	1.10.7
结束	1.11

序

■日知录是为效法顾炎武的《日知录》而作，里面会记录自己在学习与工作中学到的东西，该书的目的是为了打造一本属于自己的百科全书，也是自己思想体系的体现。最终里面的每一章可能代表一个方向与学科，比如C++, C#最终会成为一章，经济，中国史会成为一章。如果经济学里面记录的内容不多，就编成一章，如果内容多了，则会编成多章，比如宏观经济学，微观经济学，计量经济学。这样，最终一门大的学科，比如，经济学，就编成了一卷。

■自然科学的基础是数学，数学是让一门学科严格化，并能称之为科学的基础。因此，本书的主线是以数学为基础，以编程为技术工具来高效地解决自然科学(如物理，半导体，光学，声学，分子化学)，商业与经济活动(推荐系统，计算广告，图像处理，信号处理，金融)中的问题。要践行毕达哥拉斯学派所谓的“世界的本质是数的理念”，换句话说，数学是所有学科唯一的通用语言。不同学科会分享相同的数学方法，这也就本书要总结的一个方面。不同学科的区别只是研究，处理问题的不同，而没有数学方法上的不同。就像随机偏微分方程可以用于量子力学，也可以用于金融；时间序列分析可以用于金融，也可以用于语音与数字信号处理。

■本书的是自己学习的总结，更是自己思想体系不断进化的体现。因此，这本书会一直去增补，完善，没有停止的说法。在可以预见的未来，本书会经历几个阶段。第一阶段是知识的学习与记录；第二阶段是知识的运用与不同知识原理的提炼；第三阶段就是知识的创造过程，也就是为解决一类问题而创造出一个新的方法。三阶段简单来说，就是把书读厚，把书读薄，再把书读厚的阶段。就时间尺度来说，第一阶段是30周岁以前，第二阶段是30岁以后的三年，第三阶段就是33岁以后的岁月。正如“日知其所亡，月无忘其所能”，自己要做到每一个总结，同时安排下一年的任务。

■李品品 2018年

第一章:工具

1. 主要介绍一些Gitbook相关的工具
2. 一些库函数, 比如Eigen,OpenCV
3. 一些推荐的书籍 限于内存, 暂时删掉第一章。

推荐书籍

- 1.《深度学习核心技术与实践》猿辅导研究团队
- 2.《The Elements of Statistical Learning》Hastie
- 3.《Hands-On Machine learning with Scikit-Learn&Tensorflow》
- 4.《凸优化》Stephen Boyd
- 5.《最优化导论》Edwin K.P.Chong
- 6.《Pattern Recognition and Machine Learning》M.Bishop
- 7.《Neural Network for Pattern Recognition》M.Bishop
- 8.《深度学习》Ian Goodfellow
- 9.《剑指Offer》

第二章 C++

这一章主要涉及到C++编程,

1. 指针与引用
2. 面向对象三大特征, 五大原则
3. 简单的模式设计(六大原则)
4. 进程间通讯
5. 线程同步异步
6. 泛型编程
7. STL
8. C++ 与 Java 的异同

主要是确保自己能够熟练的掌握与运用C++这道工具来实现自己的想法与算法。语言是一致的, 代码写多了才能体会到这一点, 语言只是外功, 数学, 建模思想才是内功; 外功可以在一两年内速成, 但是内功非十年八年难以达到登峰造极的境界, 而且有一点就是, 数学有点靠天赋, 数学好这是上天赐给你的礼物。

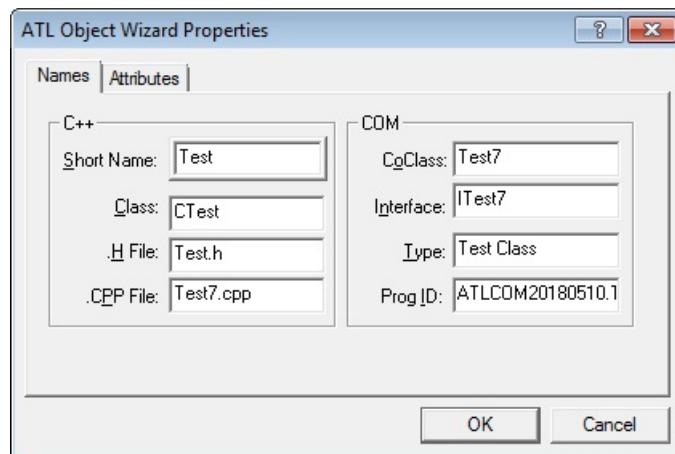
第一节 基本语法

接口：即抽象类，就是包含至少一个纯虚函数的类

```
一个类里面实现多种接口IInterface, IInterfaceB, IInterfaceC
IE84TPTimeOutUIAck : public IUnknown
{
public:
    virtual HRESULT STDMETHODCALLTYPE ResponseTpTimeOutUIAck(
        /* [in] */ short nPortNo,
        /* [in] */ short nTpNo) = 0;

};
```

New ATL object 时，选择simple object，然后属性设置如下：则可以实现一个类中有多组接口函数。



C++通过ATL来实现接口的继承。

```
// Cr3halObj
class ATL_NO_VTABLE Cr3halObj :
public CComObjectRootEx<CComSingleThreadModel>,
public CComCoClass<Cr3halObj, &CLSID_r3halObj>,
public IConnectionPointContainerImpl<Cr3halObj>,
public IR3halObj,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IHALEvents>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IE84Events>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IMMIEvents>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IE90Events>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IE116Events>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IFFUEvents>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IWaferProtrusionEvent>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_ISignalTowerDevice>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IHOAVBLEEvents>,
public IEmuConnectionPointImpl<Cr3halObj, &IID_IE84TPTimeOutUIAck>, //TP3 connection point
public IR3HALDiag
{
    DECLARE_EMUCLASSFACTORY_SINGLETON(Cr3halObj)
}
```

COM组件接口继承的实现 <https://blog.csdn.net/dingbaosheng/article/details/624504>

TL学习笔记03

继承

C++:

C#:

<http://www.cnblogs.com/flyinthesky/archive/2008/06/18/1224774.html>

不能初始化的类叫做抽象类，它们只提供部分实现，但是另一个类可以继承它并且能创建它们的实例。“一个包含一个或多个纯虚函数的类叫抽象类，抽象类不能被实例化，进一步一个抽象类只能通过接口和作为其它类的基类使用。”

“抽象类能够被用于类、方法、属性、索引器和事件，使用abstract 在一个类声明中表示该类倾向要作为其它类的基类”

成员被标示成abstract, 或被包含进一个抽象类, 必须被其派生类实现.

一个抽象类可以包含抽象和非抽象方法, 当一个类继承于抽象类, 那么这个派生类必须实现所有的的基类抽象方法。

一个抽象方法是一个没有方法体的方法。

1. virtual修饰的方法必须有实现(哪怕是仅仅添加一对大括号), 而abstract修饰的方法一定不能实现。
2. virtual可以被子类重写, 而abstract必须被子类重写,
3. 如果类成员被abstract修饰, 则该类前必须添加abstract, 因为只有抽象类才可以有抽象方法。
4. 无法创建abstract类的实例, 只能被继承无法实例化,
5. C#中如果要在子类中重写方法, 必须在父类方法前加virtual, 在子类方法前添加override, 这样就避免了程序员在子类中不小心重写了父类方法。
6. abstract方法必须重写, virtual方法必须有实现(即便它是在abstract类中定义的方法).

```
mRet = TestHalfWafer(token, ref nSeq, true); //C# ref
```

OOP

封装, 继承, 多态是面向对象编程的三大核心。

继承

三种继承方式

继承方式\成员属性	public	protected	private
public继承	public	protected	子类无权访问
protect继承	protectd	protected	子类无权访问
proivate继承	private	private	子类无权访问

C++可以多继承, 但Java,C#只能是单继承。

多态

定义: 允许不同类的对象对同一消息做出响应。即同一消息可以根据发送对象的不同而采用多种不同的行为方式。(发送消息就是函数调用)

实现多态的技术称为: 动态绑定, 是指在执行期间判断所引用对象的实际类型, 根据其实际的类型调用其相应的方法。

多态的作用: 消除类型之间的耦合关系。

子类覆盖父类的函数实现, 也就是子类重新实现父类的函数。不同的子类对相同的父类函数可以有不同的实现, 因此多态就是"一个接口, 多种实现"。

多态就是指程序中定义的引用变量所指向的具体类型和通过该引用变量发出的方法调用在编译时并不确定, 而是在程序运行期间才确定, 即一个引用变量到底会指向哪个类的实例对象, 该引用变量发出的方法调用到底是哪个类中实现的方法, 必须在由程序运行期间才能确定。

多态的好处

继承和多态本质的目的是为了代码重用和解耦。而重用和解耦是为了减少开发时间和减少错误。最终达到降低成本的目的。

多态体现的就是“对扩展开放, 对修改封闭”。封闭就是子类不能直接修改父类的其它函数, 扩展开放也就是子类可以重写父类的函数。

1. 可替换性(substitutability)。多态对已经存在代码具有可替换性。
2. 可扩充性(extensibility)。多态对代码具有可扩充性, 增加新的子类不影响已经存在类的多态性, 继承性, 以及其他特性的运行和操作。实际上新加子类更容易获得多态功能。例如, 在实现圆锥, 半圆锥以及半球体的多态基础上, 很容易增加球体类的多态性。
3. 接口性(interface-ability)。多态是超类通过方法签名, 向子类提供了一个共同接口, 由子类来完善或者覆盖它而实现的。
4. 灵活性(flexibility)。它在应用中体现了灵活多样的操作, 提高了使用效率。
5. 简化性(simplicity)。多态简化对应用软件的编写和修改过程, 尤其在处理大量对象和操作时, 这个特点尤为突出和重要。
6. 提高了代码的维护性(继承保证)
6. 提高了代码的扩展性(由多态保证)

模板类与模板函数

Why can templates only be implemented in the header file?

Clarification: header files are not the _only _portable solution. But they are the most convenient portable solution Error LNK2019 unresolved external symbol "public: int __thiscall Algo<int>::LongestIncreaseSubsequence(int * const,int)" (?LongestIncreaseSubsequence@? \$Algo@H@@QAEHQAHH@Z) referenced in function _main Algo C:\Data\ShareFolder\Group\Tim\Code\Algo\Algo\Main.obj

当模板声明在头文件，实现在cpp中，一般会出现上面的问题，原因是

Algo<int> Alg实例化的时候，编译器会去创建一个int型的Algo的新类，以及LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize)方法，因此编译器会去找这个方法的实现，如果没有找到，自然会报错。因此有如下两个方法

1. 在头文件中实现
2. 在头文件中声明，再在cpp中显示实例化(explicit instantiations) template class Algo<int>;并实现模板函数

方式1：实现在头文件里

```
#pragma once
#include <algorithm>
using namespace std;

template<class T>
class Algo
{
public:
    Algo() {};
    ~Algo() {};
public:
    int LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize)
    {
        int *maxLen = new int[arrSize]();
        for (int i = 0; i < arrSize; i++)
        {
            maxLen[i] = 1;
        }
        for (int j = 1; j < arrSize; j++)
        {
            int maxLenJ = 1;
            for (int i = 0; i < j; i++)
            {
                if (arr[i] < arr[j])
                {
                    maxLenJ = maxLen[i] + 1;
                    maxLen[j] = std::max({ maxLen[j] ,maxLenJ });
                }
            }
        }
        return maxLen[arrSize - 1];
    }
};
```

```
//调用函数
#include "stdafx.h"
#include "Algo.h"
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int param[6] = { 5,3,4,8,6,7 };
    int arrSize = sizeof(param) / sizeof(int);
    Algo<int> Alg;
    int maxLength = Alg.LongestIncreaseSubsequence(param, arrSize);
    cout << "Max length: " << maxLength << endl;
    return 0;
}
```

方式2：在头文件中声明，CPP中定义并对每种实例进行声明

```
Algo.h
#pragma once
#include <algorithm>
using namespace std;
```

```

template<class T>
class Algo
{
public:
    Algo() {};
    ~Algo() {};
public:
    int LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize);
}

```

```

// Algo.cpp : Defines the entry point for the console application.

#include "stdafx.h"
#include "Algo.h"
#include <algorithm>
using namespace std;

template class Algo<int>; //必须先声明, 才可以用
template class Algo<double>;
template class Algo<char>;
template<class T>
int Algo<T>::LongestIncreaseSubsequence(T arr[], int arrSize)
{
    int *maxLen = new int[arrSize]();
    for (int i = 0; i < arrSize; i++)
    {
        maxLen[i] = 1;
    }
    for (int j = 1; j < arrSize; j++)
    {
        int maxLenJ = 1;
        for (int i = 0; i < j; i++)
        {
            if (arr[i] < arr[j])
            {
                maxLenJ = maxLen[i] + 1;
                maxLen[j] = std::max({ maxLen[j] ,maxLenJ });
            }
        }
    }
    return maxLen[arrSize - 1];
}

```

If all you want to know is how to fix this situation, read the next two FAQs.
But in order to understand why things are the way they are, first accept these facts:

A template is not a class or a function. A template is a “pattern” that the compiler uses to generate a family of classes or functions. In order for the compiler to generate the code, it must see both the template definition (not just declaration) and the specific types/whatever used to “fill in” the template. For example, if you’re trying to use a `Foo<int>`, the compiler must see both the `Foo` template and the fact that you’re trying to make a specific `Foo<int>`. Your compiler probably doesn’t remember the details of one .cpp file while it is compiling another .cpp file. It could, but most do not and if you are reading this FAQ, it almost definitely does not. BTW this is called the “separate compilation model.” Now based on those facts, here’s an example that shows why things are the way they are. Suppose you have a template `Foo` defined like this:

```

template<typename T>
class Foo {
public:
    Foo();
    void someMethod(T x);
private:
    T x;
};

Along with similar definitions for the member functions:

template<typename T>
Foo<T>::Foo()
{
    // ...
}

template<typename T>
void Foo<T>::someMethod(T x)
{
    // ...
}

Now suppose you have some code in file Bar.cpp that uses Foo<int>:

// Bar.cpp
void blah_blah_blah()
{
    // ...
}

```

```

Foo<int> f;
f.someMethod(5);
// ...
}

Clearly somebody somewhere is going to have to use the "pattern" for the constructor definition and for the someMethod() definition and instantiate those when T is actually int.
But if you had put the definition of the constructor and someMethod() into file Foo.cpp, the compiler would see the template code when it compiled Foo.cpp and it would see Foo<int> when it compiled Bar.cpp,
but there would never be a time when it saw both the template code and Foo<int>. So by rule #2 above, it co

```

uld never generate the code for `Foo<int>::someMethod()`.
A note to the experts: I have obviously made several simplifications above. This was intentional so please don't complain too loudly. If you know t he difference between a .cpp file and a compilation unit, the difference between a class template and a template class, and the fact that templates really aren't just glorified macros, then don't complain: this particular question/answer wasn't aimed at you to begin with. I simplified things s o newbies would "get it," even if doing so offends some experts.

const对象只能访问**const**成员函数。因为**const**对象表示其不可改变，而非**const**成员函数可能在内部改变了对象，所以不能调用。

而非**const**对象既能访问**const**成员函数，也能访问非**const**成员函数，因为非**const**对象表示其可以改变。

```

#ifndef _MATRIX_H
#define _MATRIX_H
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

template<class T>
class CMatrix
{
public:
    CMatrix();
    CMatrix(int rows, int columns);
    CMatrix(const CMatrix&);
    ~CMatrix();
public:
    void Set(int row, int column, T val);
    T Get(int row, int column) const;
    CMatrix operator +(const CMatrix &mat2);
    CMatrix operator -(const CMatrix &mat2);
    CMatrix operator *(const CMatrix &mat2);
    CMatrix operator *(const T div);
    CMatrix operator /(const T div);
    CMatrix I(int n);
    int Rows() const{ return mRows; }
    int Columns() const{ return mColumns; }
    int Length() { return mRows*mColumns; }
    friend ostream &operator<<(ostream &os, const CMatrix &mat)
    {
        int row = mat.Rows();
        int col = mat.Columns();
        //mat是const, 因此只能访问const成员函数

        for (int i = 0; i < row; i++)
        {
            for (int j = 0; j < col; j++)
            {
                os << fixed << mat.Get(i, j) << '\t';
            }
            if (i < row)
            {
                os << "\n";
            }
        }
        os << "\n";
        return os;
    };

private:
    int mRows;
    int mColumns;
    T* startElement;
};

#endif

```


COM连接点

COM连接点 - 最简单的例子

```
AtAdvise(spCar, sinkptr, __uuidof(IMyCarEvents), &cookies);
sinkptr指向了一个CComObject<CSink>
CComObject<CSink>* sinkptr = nullptr;
CComObject<CSink>::CreateInstance(&sinkptr);
```

换句话说，一旦将sink对象成功挂载到了COM对象，那么sink对象的生命周期就由对应的COM(spCar)对象来管理。

一旦挂载成功，sink对象就托管给对应的COM对象了，如果对应的COM对象析构了，那么所有它管理的sink对象也就释放了。

CLR是什么？

COM Interop(互操作)

引言

- 平台调用
- C++ Interop(互操作)
- COM Interop(互操作)

一、引言

这个系列是在C#基础知识中遗留下来的一个系列的，因为在C# 4.0中的一个新特性就是对COM互操作改进，然而COM互操作性却是.NET平台下其中一种互操作技术，为了帮助大家更好的了解.NET平台下的互操作技术，所以才有了这个系列。然而有些朋友们可能会有这样的疑问——“为什么我们需要掌握互操作技术的呢？”对于这个问题的解释就是——掌握了.NET平台下的互操作性技术可以帮助我们在.NET中调用非托管的dll和COM组件。.NET是建立在操作系统的之上的一个开发框架，其中.NET类库中的类也是对Windows API的抽象封装，然而.NET类库不可能对所有Windows API进行封装，当.NET中没有实现某个功能的类，然而该功能在Windows API被实现了，此时我们完全没必要去自己在.NET中自定义个类，这时候就可以调用Windows API中的函数来实现，此时就涉及到托管代码与非托管代码的交互，此时就需要使用到互操作性的技术来实现托管代码和非托管代码更好的交互。.NET平台下提供了3种互操作性的技术：

1. Platform Invoke(P/Invoke)，即平台调用，主要用于调用C库函数和Windows API
2. C++ Interop，主要用于Managed C++(托管C++)中调用C++类库
3. COM Interop，主要用于在.NET中调用COM组件和在COM中使用.NET程序集。

下面就对这3种技术分别介绍下。

二、平台调用

使用平台调用的技术可以在托管代码中调用动态链接库(Dll)中实现的非托管函数，如Win32 Dll和C/C++ 创建的Dll。看到这里，有些朋友们应该会有疑问——在怎样的场合我们可以使用平台调用技术来调用动态链接库中的非托管函数呢？

这个问题就如前面引言中说讲到的一样，当在开发过程中，.NET类库中没有提供相关API然而Win32 API中提供了相关的函数实现时，此时就可以考虑使用平台调用的技术在.NET开发的应用程序中调用Win32 API中的函数；

然而还有一个使用场景就是——由于托管代码的效率不如非托管代码，为了提高效率，此时也可以考虑托管代码中调用C库函数。

2.1 在托管代码中通过平台调用调用非托管代码的步骤

- (1). 获得非托管函数的信息，即dll的名称，需要调用的非托管函数名等信息
- (2). 在托管代码中对非托管函数进行声明，并且附加平台调用所需要属性
- (3). 在托管代码中直接调用第二步中声明的托管函数

2.2 平台调用的调用过程

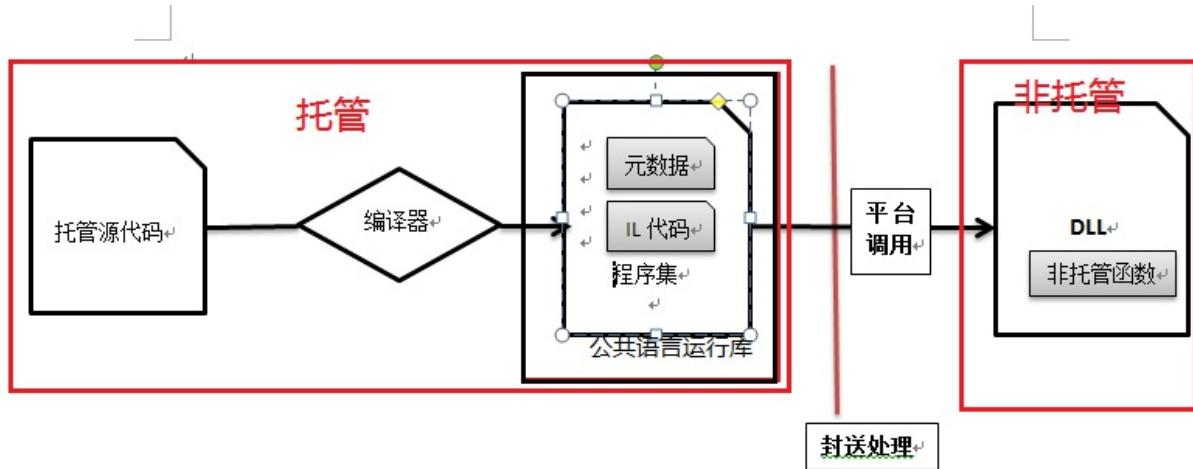
(1) 查找包含该函数的DLL，当需要调用某个函数时，当然第一步就需要知道包含该函数的DLL的位置，所以平台调用的第一步也就是查找DLL，其实在托管代码中调用非托管代码的调用过程可以想象成叫某个人做事情，首先我们要找到那个人在哪里(即查找函数的DLL过程)，找到那个人之后需要把要做的事情告诉他(相当于加载DLL到内存中和传入参数)，最后让他去完成需要完成的事情(相当于让非托管函数去执行任务)。

- (2) 将找到的DLL加载到内存中。

(3) 查找函数在内存中的地址并把其参数推入堆栈，来封装所需的数据。CLR只会在第一次调用函数时，才会去查找和加载DLL，并查找函数在内存中的地址。当函数被调用过一次之后，CLR会将函数的地址缓存起来，CLR这种机制可以提高平台调用的效率。在应用程序域被卸载之前，找到的DLL都一直存在于内存中。

(4) 执行非托管函数。

平台调用的过程可以通过下图更好地理解：



三、C++ Interop

第二部分主要向大家介绍了第一种互操作性技术，然后我们也可以使用C++ Interop技术来实现与非托管代码进行交互。然而C++ Interop 方式有一个与平台调用不一样的地方，就是C++ Interop 允许托管代码和非托管代码存在于一个程序集中，甚至同一个文件中。C++ Interop 是在源代码上直接链接和编译非托管代码来实现与非托管代码进行互操作的，而平台调用是加载编译后生成的非托管DLL并查找函数的入口地址来实现与非托管函数进行互操作的。**C++ Interop** 使用托管C++来包装非托管C++代码，然后编译生成程序集，然后再托管代码中引用该程序集，从而来实现与非托管代码的互操作。关于具体的使用和与平台调用的比较，这里就不多介绍，我将会在后面的专题中具体介绍。

COM(Component Object Model. 组件对象模型)是微软之前推荐的一种开发技术，由于微软过去十多年里开发了大量的COM组件，

然而不可能再使用.NET技术重写这些COM组件实现的功能，所以为了解决在.NET中的托管代码能够调用COM组件中问题，.NET平台下提供了COM Interop，即**COM互操作技术**，COM interop不仅支持在托管代码中使用COM组件，而且支持向COM组件中使用.NET程序集。

1. 在.NET中使用COM组件

在.NET中使用COM对象，主要有三种方法：

1. 使用TlbImp工具为COM组件创建一个互操作程序集来绑定早期的COM对象，这样就可以在程序中添加互操作程序集来调用COM对象
2. 通过反射来后期绑定COM对象
3. 通过P/Invoke创建COM对象或使用C++ Interop为COM对象编写包装类

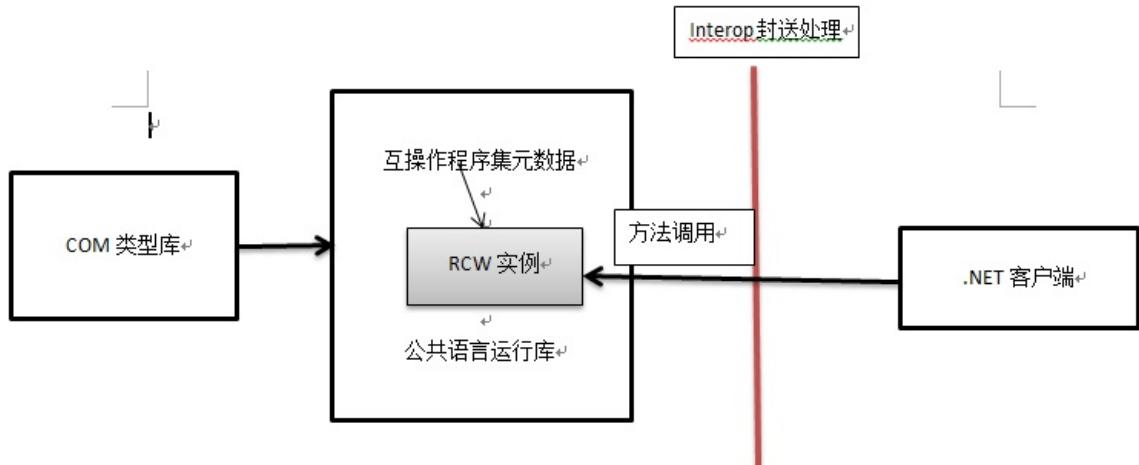
但是我们经常使用的都是方法一，下面介绍下使用方法一在.NET 中使用COM对象的步骤：

1. 找到要使用的COM组件并注册它。使用 regsvr32.exe 注册或注销 COM DLL。
2. 在项目中添加对 COM组件或类型库的引用。

添加引用时，**Visual Studio** 会用到**Tlbimp.exe**(类型库导入程序)，**Tlbimp.exe**程序将生成一个 **.NET Framework 互操作程序集**。该程序集又称为运行时可调用包装 (**RCW**)，其中包含了包装COM组件中的类和接口。**Visual Studio** 将生成组件的引用添加至项目。

1. 创建RCW中类的实例，这样就可以使用托管对象一样来使用COM对象。

下面通过一个图更好地说明在.NET中使用COM组件的过程：

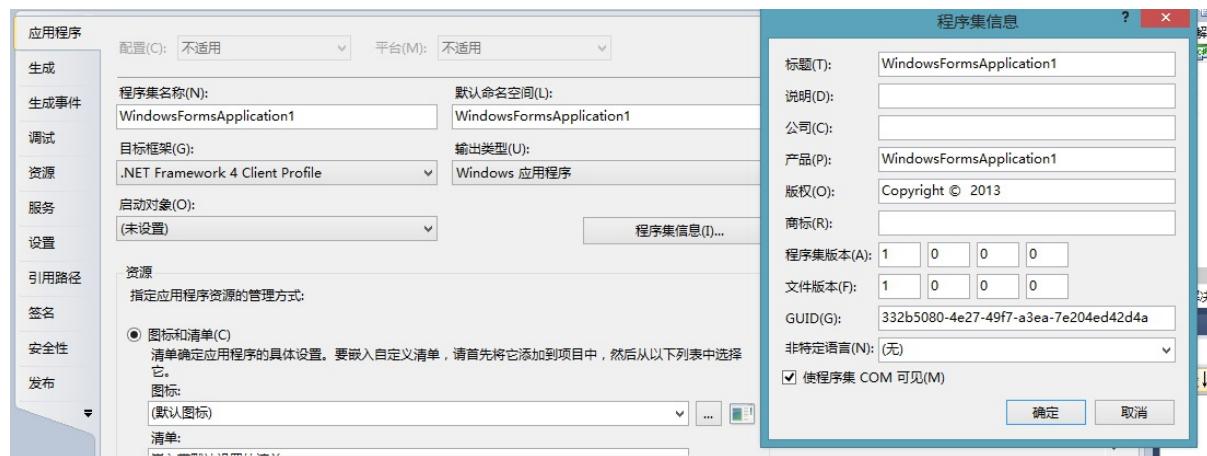


在COM中使用.NET程序集

.NET 公共语言运行时通过COM可调用包装 (COM Callable Wrapper, 即CCW) 来完成与COM类型库的交互。CCW可以使COM客户端认为是在与普通的COM交互，同时使.NET组件认为它正在与托管应用程序交互。在这里CCW是非托管COM客户端与托管对象之间的一个代理。CCW既可以维护托管对象的生命周期，也负责数据类型在COM和.NET之间的相互转换。实现在COM使用.NET类型的基本步骤如：

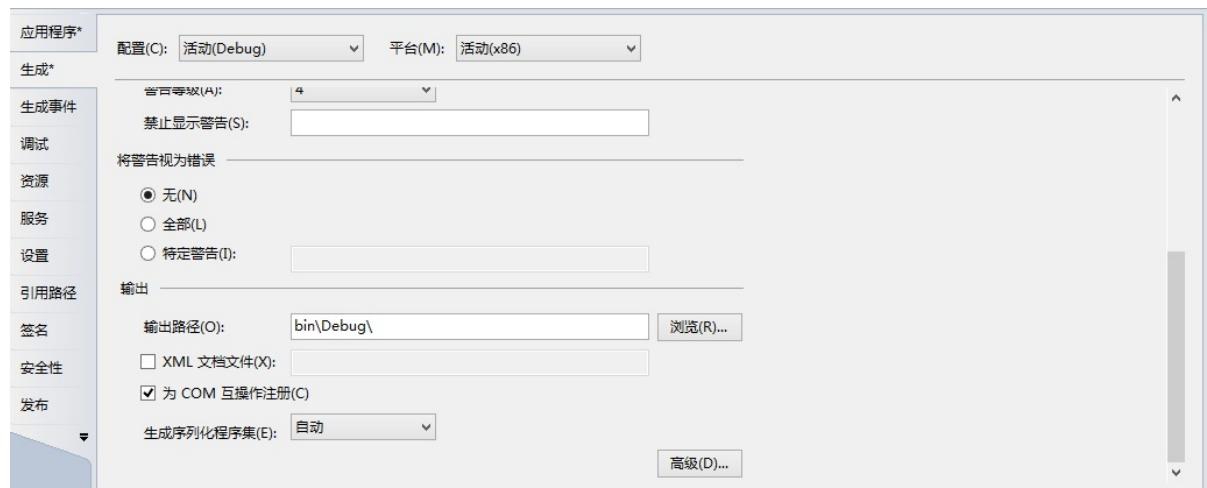
1. 在C#项目中添加互操作特性

可以修改C#项目属性使程序集对COM可见。右键解决方案选择属性，在“应用程序标签”中选择“程序集信息”按钮，在弹出的对话框中选择“使程序集COM可见”选项，如下图所示：



1. 生成COM类型库并对它进行注册以供COM客户端使用

在“生成”标签中，选中“为COM互操作注册”选项，如下图：



勾选“为COM互操作注册”选项后，Visual Studio会调用类型库导出工具(Tlbexp.exe)为.NET程序集生成COM类型库再使用程序集注册工具(Regasm.exe)来完成对.NET程序集和生成的COM类型库进行注册，这样COM客户端可以使用CCW服务来对.NET对象进行调用了。

总结

介绍到这里，本专题的内容就结束，本专题主要对.NET提供的互操作的技术做了一个总的概括，在后面的专题中将会对具体的技术进行详细的介绍和给出一些简单的使用例子。

常用的python数据处理函数

pandas

处理结构化数据(Data Retrieval)DataFrame

List of Dictionaries to DataFrame

```
In[27]: import pandas as pd
In[28]: d = [{"city": "Delhi", "data": 1000},
...: {"city": "Bangalore", "data": 2000},
...: {"city": "Mumbai", "data": 1000}]
In[29]: pd.DataFrame(d)
Out[29]:
   city  data
0  Delhi  1000
1  Bangalore  2000
2  Mumbai  1000
In[30]: df = pd.DataFrame(d)
In[31]: df
Out[31]:
   city  data
0  Delhi  1000
1  Bangalore  2000
2  Mumbai  1000
```

CSV Files to DataFrame

```
import pandas as pd
In [2]: city_data = pd.read_csv(filepath_or_buffer='simplemaps-worldcities-basic.csv')
In [3]: city_data.head(n=10)
Out[3]:
   city  city_ascii  lat  lng  pop  country \
0  Qal eh-ye  Now Qal eh-ye  34.983000  63.133300  2997  Afghanistan
1  Chaghcharan  Chaghcharan  34.516701  65.250001  15000  Afghanistan
2  Lashkar Gah  Lashkar Gah  31.582998  64.360000  201546  Afghanistan
3  Zaranj  Zaranj  31.112001  61.886998  49851  Afghanistan
4  Tarin Kowt  Tarin Kowt  32.633298  65.866699  10000  Afghanistan
5  Zareh Sharah  Zareh Sharah  32.850000  68.416705  13737  Afghanistan
6  Asadabad  Asadabad  34.866000  71.150005  48400  Afghanistan
7  Taloqan  Taloqan  36.729999  69.540004  64256  Afghanistan
8  Mahmud-E Eraqi  Mahmud-E Eraqi  35.016696  69.333301  7407  Afghanistan
9  Mehtar Lam  Mehtar Lam  34.650000  70.166701  17345  Afghanistan
```

Database to DataFrame

可以从数据库中读取数据

```
server = 'xxxxxxxx' # Address of the database server
user = 'xxxxxx' # the username for the database server
password = 'xxxxx' # Password for the above user
database = 'xxxxx' # Database in which the table is present
conn = pymssql.connect(server=server, user=user, password=password, database=database)
query = "select * from some_table"
df = pd.read_sql(query, conn)
```

Data Access

Head and Tail

head提供dataframe前面几行数据, tail提供dataframe倒数几行数据。

```
In [11]: city_data.tail()
Out[11]:
   city  city_ascii  lat  lng  pop  country \
7317  Mutare  Mutare  -18.970019  32.650038  216785.0  Zimbabwe
7318  Kadoma  Kadoma  -18.330006  29.909947  56400.0  Zimbabwe
```

```
7319 Chitungwiza Chitungwiza -18.000001 31.100003 331071.0 Zimbabwe
7320 Harare Harare -17.817790 31.044709 1557406.5 Zimbabwe
7321 Bulawayo Bulawayo -20.169998 28.580002 697096.0 Zimbabwe
```

Slicing and Dicing

数据切片，提取特定标签的数据。

```
In [12]: series_es = city_data.lat//提取lat标签的数据
In [13]: type(series_es)
Out[13]: pandas.core.series.Series
In [14]: series_es[1:10:2]
Out[14]:
1 34.516701
3 31.112001
5 32.850000
7 36.729999
9 34.650000
Name: lat, dtype: float64
In [15]: series_es[:7]
Out[15]:
0 34.983000
1 34.516701
2 31.582998
3 31.112001
4 32.633298
5 32.850000
6 34.866000
Name: lat, dtype: float64
In [23]: series_es[:-7315]
Out[23]:
0 34.983000
1 34.516701
2 31.582998
3 31.112001
4 32.633298
5 32.850000
6 34.866000
Name: lat, dtype: float64
```

iloc

提取多少行(数据样本数目), 多少列(标签数目)。比如提取前4个标签的前5行数据。

```
In [28]: city_data.iloc[:,4]
Out[28]:
city city_ascii lat lng
0 Qal eh-ye Now Qal eh-ye 34.983000 63.133300
1 Chaghcharan Chaghcharan 34.516701 65.250001
2 Lashkar Gah Lashkar Gah 31.582998 64.360000
3 Zaranj Zaranj 31.112001 61.886998
4 Tarin Kowt Tarin Kowt 32.633298 65.866699
```

带判断的搜索

select cities that have population of more than 10 million and select columns that start with the letter l:

```
In [56]: city_data[city_data['pop'] >
10000000][city_data.columns[pd.Series(city_data.columns).str.
startswith('l')]]
Out[53]:
lat lng
360 -34.602502 -58.397531
1171 -23.558680 -46.625020
2068 31.216452 121.436505
3098 28.669993 77.230004
3110 19.016990 72.856989
3492 35.685017 139.751407
4074 19.442442 -99.130988
4513 24.869992 66.990009
5394 55.752164 37.615523
6124 41.104996 29.010002
7071 40.749979 -73.980017
```

Data Operations

Using the values attribute of the output dataframe, we can treat it in the same way as a numpy array. 利用值属性，我们可以为dataframe填充数据，做缺失值处理。

```
In [55]: df = pd.DataFrame(np.random.randn(8, 3),
...: columns=['A', 'B', 'C'])
In [56]: df
Out[56]:
A B C
0 -0.271131 0.084627 -1.707637
1 1.895796 0.590270 -0.505681
2 -0.628760 -1.623905 1.143701
3 0.005082 1.316706 -0.792742
4 0.135748 -0.274006 1.989651
5 1.068555 0.669145 0.128079
6 -0.783522 0.167165 -0.426007
7 0.498378 -0.950698 2.342104
In [58]: nparray = df.values
In [59]: type(nparray)
Out[59]: numpy.ndarray
```

Missing Data and the fillna Function

填补缺失值。

```
In [65]: df.iloc[4,2] = NA
In [66]: df
Out[66]:
A B C
0 -0.271131 0.084627 -1.707637
1 1.895796 0.590270 -0.505681
2 -0.628760 -1.623905 1.143701
3 0.005082 1.316706 -0.792742
4 0.135748 -0.274006 NaN
5 1.068555 0.669145 0.128079
6 -0.783522 0.167165 -0.426007
7 0.498378 -0.950698 2.342104
In [70]: df.fillna (0)
Out[70]:
A B C
0 -0.271131 0.084627 -1.707637
1 1.895796 0.590270 -0.505681
2 -0.628760 -1.623905 1.143701
3 0.005082 1.316706 -0.792742
4 0.135748 -0.274006 0.000000
5 1.068555 0.669145 0.128079
6 -0.783522 0.167165 -0.426007
7 0.498378 -0.950698 2.342104
```

Descriptive Statistics Functions 统计属性

```
In [76]: columns_numeric = ['lat','lng','pop']
In [78]: city_data[columns_numeric].mean()
Out[78]:
lat 20.662876
lng 10.711914
pop 265463.071633
dtype: float64

In [79]: city_data[columns_numeric].sum()
Out[79]:
lat 1.512936e+05
lng 7.843263e+04
pop 1.943721e+09
dtype: float64

In [80]: city_data[columns_numeric].count()
Out[80]:
lat 7322
lng 7322
pop 7322
dtype: int64

In [81]: city_data[columns_numeric].median()
Out[81]:
lat 26.792730
lng 18.617509
pop 61322.750000
dtype: float64
```

```
In [83]: city_data[columns_numeric].quantile(0.8)
Out[83]:
lat 46.852480
lng 89.900018
pop 269210.000000
dtype: float64

In [85]: city_data[columns_numeric].sum(axis = 1)
Out[85]:
0 3.095116e+03
1 1.509977e+04
2 2.016419e+05
3 4.994400e+04
4 1.009850e+04
```

Describe用来输出数据的所有统计属性。

Pandas also provides us with another very handy function called describe. This function will calculate the most important statistics for numerical data in one go so that we don't have to use individual functions.

```
In [86]: city_data[columns_numeric].describe()
Out[86]:
lat lng pop
count 7322.000000 7322.000000 7.322000e+03
mean 28.662876 10.711914 2.654631e+05
std 29.134818 79.044615 8.287622e+05
min -89.982894 -179.589779 -9.900000e+01
25% -0.324710 -64.788472 1.734425e+04
50% 26.792730 18.617509 6.132275e+04
75% 43.575448 73.103628 2.001726e+05
max 82.483323 179.383304 2.200630e+07
```

Concatenating Dataframes

由于我们需要处理的数据通常有多个，因此我们需要合并这些数据。pandas提供了很多函数来支持数据的合并。

Concatenating Using the concat method

合并两组，每组随机选择3个样本。

```
In [25]: city_data1 = city_data.sample(3)
In [26]: city_data2 = city_data.sample(3)
In [29]: city_data_combine = pd.concat([city_data1,city_data2])
In [30]: city_data_combine
Out[30]:
city city_ascii lat lng pop \
4255 Groningen Groningen 53.220407 6.580001 198941.0
5171 Tambov Tambov 52.730023 41.430019 296207.5
4204 Karibib Karibib -21.939003 15.852996 6898.0
4800 Focsani Focsani 45.696551 27.186547 92636.5
1183 Pleven Pleven 43.423769 24.613371 110445.5
7005 Indianapolis Indianapolis 39.749988 -86.170048 1104641.5

country iso2 iso3 province
4255 Netherlands NL NLD Groningen
5171 Russia RU RUS Tambov
4204 Namibia NaN NAM Erongo
4800 Romania RO ROU Vrancea
1183 Bulgaria BG BGR Pleven
7005 United States of America US USA Indiana
Another
```

另外一个场景是，我们对同一个数据集的不同columns进行合并，也就是对标签进行合并。index就是样本标号。

```
In [32]: df1 = pd.DataFrame({'col1': ['col10', 'col11', 'col12', 'col13'],
...: 'col2': ['col20', 'col21', 'col22', 'col23'],
...: 'col3': ['col30', 'col31', 'col32', 'col33'],
...: 'col4': ['col40', 'col41', 'col42', 'col43']},
...: index=[0, 1, 2, 3])

In [33]: df1
Out[33]:
col1 col2 col3 col4
0 col10 col20 col30 col40
1 col11 col21 col31 col41
```

```

2 col12 col22 col32 col42
3 col13 col23 col33 col43
In [34]: df4 = pd.DataFrame({'col2': ['col22', 'col23', 'col26', 'col27'],
...: 'Col4': ['Col42', 'Col43', 'Col46', 'Col47'],
...: 'col6': ['col62', 'col63', 'col66', 'col67']},
...: index=[2, 3, 6, 7])
In [37]: pd.concat([df1,df4], axis=1)
Out[37]:
col1 col2 col3 col4 Col4 col2 col6
0 col10 col10 col10 col10 NaN NaN NaN
1 col11 col21 col31 col41 NaN NaN NaN
2 col12 col22 col32 col42 Col42 col22 col62
3 col13 col23 col33 col43 Col43 col23 col63
6 NaN NaN NaN NaN Col46 col26 col66
7 NaN NaN NaN NaN Col47 col27 col67

```

Database Style Concatenations Using the merge Command

The most familiar way to concatenate data (for those acquainted with relational databases) is using the join operation provided by the databases. Pandas provides a database friendly set of join operations for dataframes. These operations are optimized for high performance and are often the preferred method for joining disparate dataframes.

Joining by columns: This is the most natural way of joining two dataframes. In this method, we have two dataframes sharing a common column and we can join the two dataframes using that column. The pandas library has a full range of join operations (inner, outer, left, right, etc.) and we will demonstrate the use of inner join in this sub-section. You can easily figure out how to do the rest of join operations by checking out the pandas documentation.

For this example, we will break our original cities data into two different dataframes, one having the city information and the other having the country information. Then, we can join them using one of the shared common columns.

Lasso输出系数

```

def train(self):
    x_train, y_train, x_test, y_test = self.load_data()
    lasso = Lasso(random_state=0)
    alphas = np.logspace(-4, -0.5, 30)
    estimator = GridSearchCV(lasso, dict(alpha=alphas))
    estimator.fit(x_train, y_train)
    lasso.fit(x_train, y_train)//必须先对lasso使用fit, 才可以使用coef_
    print "coef_ = ", lasso.coef_
    return estimator

```

第三章:算法

这一章主要介绍

1. 传统的算法与数据结构, 比如排序, 动态规划, 最短路径, 插值; 二叉树, 红黑树, 链表, 队列, 堆栈。
2. 线性代数与矩阵计算中的算法, 比如: LU分解, Householder变换, 矩阵求本征值, 矩阵求逆, PCA, SVD, Krylov子空间法, Lanczos等。主要是要对对称, 非对称矩阵的线程方程求解, 以及矩阵本征值, 本征矢计算有一个清晰的轮廓, 也就是对不同的矩阵类型知道有什么最适合的方法, 以及明白各种方法的优缺点。最后, 最关键的就是大规模稀疏矩阵的低秩分解, 这是推荐系统的基础。
3. 未来可能会把图像与信号处理的算法加在这里, 但是不急。

矩阵计算

这一节主要涉及到线性代数与矩阵计算方面的东西：

1. 求解线性方程

- i. 满秩的使用Gauss消元法, 矩阵求逆
- ii. 欠定方程使用最小二乘法(等价于求伪逆法)
- iii. 超定方程的正则化方法

2. 矩阵变换

- i. Gram-Schmidt 变换
- ii. Household 变换
- iii. Givens 变换

3. 矩阵分解技巧

- i. Schur 分解
- ii. LU 分解
- iii. QR 分解
- iv. Krylov 子空间法

4. 求解矩阵本征值的方法

- i. Power 方法
- ii. QR 分解(对称, $n < 25$ 最实用)
- iii. 分而治之(对称, $n > 25$ 最实用)
- iv. Jacob 方法
- v. 瑞利商迭代
- vi. 对分法和分而治之
- vii. Lanczos 方法求本征态

5. 奇异矩阵分析

- i. SVD
- ii. PCA
- iii. Condition Number

6. 大规模稀疏矩阵(Large Sparse Matrix)问题

- i. Lanczos
- ii. SVD
- iii. Krylov
- iv. Large Sparse Matrix 在推荐系统中的应用

矩阵计算在力学, 物理学, 以及现今的推荐系统中都有着重重要的应用, 后者主要处理的是大规模的稀疏矩阵问题。重要的不是理论, 而是怎么把这些理论用来巧妙地解决实际的问题, 因此, 尽可能的寻找这些方法的应用场景。

这一章主要讨论的实际问题如下:

1. 线性方程组求解问题, 基于最小二乘法的正规方程方法(或者说伪逆法)。以及变量数目远大于方程数目的问题, 主要是基于Ridge Regression, Lasso Regression, Regularized Discriminant Analysis, Regularized multinomial logistic regression。
2. 矩阵本征值求解方法, 求解矩阵本征值的方法有幂法(只能求解最大或者最小的本征值), QR分解方法, 通过一系列的QR会得到一个与原矩阵相似的上三角矩阵。常用的实现QR分解的方法有Gram-Schmidt变换, Household变换, Givens变换(Givens变换可以并行计算, 因此每次只修改i,j两行;且最实用与大规模稀疏矩阵)。为了快速的通过QR分解求解本征值, 我们需要引入Hessenberg矩阵, 通过把矩阵变成上Hessenberg矩阵, 再通过Givens变换进行QR分解, 使得以后每次QR分解的时间复杂度是 $O(n^2)$ 。
 $(A - \sigma I)^{-1}$ 可以用来求解 σ 附近的本征值本征矢。

3. SVD, PCA这些分解有提及, 但是没有给出具体的应用场景。其实SVD可以用于推荐系统, PCA也可以用在机器学习中用于特征提取。
4. Krylov子空间法是很重要的一种求解大规模矩阵(无论稀疏与否)的有效方法, 对于一般矩阵(无论对称与否), 可以使用Arnoldi算法, 化为相似的上Hessenberg矩阵; 而对于对称的矩阵, 我们可以使用更方便的Lanczos方法, 化为三对角矩阵进行求解。此外, 共轭梯度法也是一种Krylov子空间法。

一些结论性的东西

1. 对于维数小于25的三对角矩阵, QR迭代式目前求所有本征值, 本征矢最快最实用的方法。
2. 对于维数大于25的三对角矩阵, 分而治之是目前求所有本征值, 本征矢最快最实用的方法。
3. 非对称矩阵实际使用的直接方法是隐式位移的QR迭代。(求特征值问题实际是多项式求根问题, 采用的是迭代法)
4. 矩阵的条件数或者更一般的矩阵的本征值分布是迭代法求解矩阵本征值或者求解线性方程组收敛的关键性因素。

这一章的终极目的

寻找超大规模稀疏矩阵低秩分解的快速实用方法, 对标的的是当前的SVD算法。推荐系统是其核心的应用场景。

需要做的事情

1. Lanczos方法是求解超大规模稀疏矩阵前几个特征值的有效方法, 能否把他应用到电商推荐系统中, 处理User-Item矩阵问题?
2. 把各种求解本征值问题的时间复杂度列成一张表。
3. 求解线性方程组的方法的时间复杂度列成一张表。
4. 在不理解一些算法的时候, 最好自己去实现她, 在实现的过程中, 就加深理解了。比如“隐式位移的QR迭代”, 分而治之的对称矩阵求解本征值, 本征矢。

线性方程组求解方法

1. 满秩的使用Gauss消元法, 矩阵求逆
2. 超定方程使用最小二乘法(等价于求伪逆法)
3. 欠定方程的正则化方法

满秩的线性方程组

$$\blacksquare Ax = b$$

对于变量数目N不多的线性方程组, 我可以通过矩阵求逆的方式来求得未知变量x;

$$\blacksquare x = A^{-1}b$$

可以利用矩阵的LU分解来求, 求解的时间复杂度就是 $O(N^3)$.

当N很大的时候, 还是很费时间的, 这个时候可以利用共轭梯度法来求解。具体步骤如下:

超定方程使用最小二乘法

$$\blacksquare Ax = b$$

若此时矩阵A是MxN维的, M>N, 则是超定问题。此时我们可以求他们的最小二乘解。即:

$$\blacksquare L(x) = (Ax - b)^2$$

通过L(x)对x求导并令其梯度为0, 可以得到:

$$\blacksquare \frac{\partial L(x)}{\partial x} = A^T Ax - A^T b = 0$$

得到:

$$\blacksquare x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

这就是欠定方程的最小二乘解。

求解欠定方程的正则化方法

$$\blacksquare Ax = b$$

若此时矩阵A是MxN维的, M<N, 此时变量个数大于方程组个数, 因此有无穷多个解, 这就是欠定问题。在这无数多个解中, 我们要根据一些对问题系统的先验知识来对问题进行约束。使得解具有鲁棒性或者稀疏性。

使得解具有稀疏性可能是我们首先要考虑的, 因为系统并没有那么多变量, 或者系统仅仅由少数一些变量决定的。因此我们可以通过L1正则化来求解欠定问题。

$$\blacksquare L(x) = (Ax - b)^2 + \lambda ||x||_1$$

其中的参数 λ 需要通过交叉验证来确定。

other

利用LU分解, 我们可以求满秩的线性方程组的解。对于mxn(m>n)阶矩阵, 对于超定方程(方程数目大于未知数的个数), 因为一般没有解满足 $Ax = b$, 这就是最小二乘法发挥作用的地方。

这个问题的解就是使得: $||Ax - b||_2^2$ 值极小的解, 通过求导(把 $x \rightarrow x + e$, 求梯度等于0的x), 可以得到解为: $x = (X^T A)^{-1} A^T b$

Gram-Schmidt正交化

Gram-Schmidt正交化的基本想法, 是利用投影原理在已有基的基础上构造一个新的正交基。

$((\beta))_1$

<http://elsenaju.eu/Calculator/QR-decomposition.htm>

https://rosettacode.org/wiki/QR_decomposition

https://www.wikiwand.com/en/QR_decomposition#/Example_2

https://www.wikiwand.com/en/Householder_transformation

C#有开源的免费的代数库mathnet.numerics, 功能也比较多, 推荐通过Nuget来安装这个库

矩阵变换方法

1. Gram-Schmidt 变换
2. Household 变换
3. Givens 变换
4. Jacob 方法
5. Lanczos 方法求本征态 最好对每个算法, 给出实用的代码在这儿。
Household 变换, Givens 变换是进行矩阵QR分解的基础, 而这些分解是对矩阵进行本征分解的基础。
对称矩阵进行Household变换或者Givens变换之后, 就变成了三对角矩阵, 对于三对角矩阵, 有高效的求解本征值的方法, 因此对于对称矩阵, 计算本征值的时间复杂度就是这两个变换的时间复杂度。
对于非对称矩阵, 可以通过一系列的QR分解, 来把矩阵变成对角矩阵。(问题是, 怎么保证通过一系列QR分解, 它最终会收敛到对角矩阵)。
LU分解可以用来求解线性方程组, 也可以用来对矩阵求逆。

Gram-Schmidt 变换

对矩阵A进行分解, 首先内积 $[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = \mathbf{a}\mathbf{u}$, 再定义投影:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} = \frac{[\mathbf{u}, \mathbf{a}]}{[\mathbf{u}, \mathbf{u}]} \mathbf{u}$$

然后:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_j} \mathbf{a}_k & \mathbf{e}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|} \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k] \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

注意到所有的 \mathbf{e}_k 是彼此垂直的, 因此:

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^k [\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k] \mathbf{e}_j$$

因此矩阵A可以分解成正交矩阵与上三角矩阵:

$$A = QR$$

其中: $R_{i,j} = [e_i, a_j], i \leq j$

$$Q = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

Household 变换

为了实现QR分解, 我们也可以采用Household变换。

假设 \mathbf{e}_1 是矢量 $(1, 0, 0, \dots, 0)^T$, I 是 $m \times m$ 的单位阵。设:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \alpha \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$Q = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T$$

对于复数矩阵:

$$Q = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$$

Q是 $m \times m$ 的Household矩阵, 并且:

$$Q\mathbf{x} = (\alpha, 0, 0, \dots, 0)^T$$

因此:

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \cdots & A' & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q'_k \end{bmatrix}$$

t次迭代以后, $t = \min(m-1, n)$:

$$\blacksquare R = Q_t \dots Q_2 Q_1 A$$

是一个上三角矩阵，又因为：

$$\blacksquare Q = Q_1^T Q_2^T \dots Q_t^T$$

因此 $A = QR$ 是矩阵 A 的一个 QR 分解。一次 Household 变换需要 $\frac{2}{3}n^3$ 次乘法操作。

Givens 变换

Givens 变换通过每次乘以一个正交矩阵使得一个非对角元变为 0 来实现 QR 分解。相对于 Household 变换的优点是它可以并行，并且适合于非常稀疏的矩阵。因为每次操作只影响 i, j 两行的元素，因此可以做到并行计算。

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

其中：

$$\blacksquare g_{kk} = 1; \quad \blacksquare k \neq i, j$$

$$\blacksquare g_{kk} = c; \quad \blacksquare k \neq i, j$$

$$\blacksquare g_{ij} = -g_{ji} = -s;$$

通过此 Givens 变换使得矩阵 A 的元素 $A_{i,j} = 0$, 其中 $i < j$

We are presented with the following matrix multiplication:

$$G_2 A_2 = A_3 \\ \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & -2.4327 & 3.0729 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

where

$$r \approx \sqrt{(-2.4327)^2 + 4^2} \approx 4.6817$$

$$c \approx -2.4327/r \approx -0.5196$$

$$s \approx -4/r \approx -0.8544.$$

Plugging in these values for c and s and performing the multiplications gives us A_3 :

$$A_3 \approx \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & 4.6817 & 0.9664 \\ 0 & 0 & -4.1843 \end{bmatrix}.$$

矩阵分解方法

1. Schur分解
2. LU分解
3. QR分解
4. 矩阵本征值分解
5. 矩阵奇异值分解
6. Krylov子空间法
7. Cholesky 分解

Schur分解

复 $n \times n$ 的矩阵酉相似于一个上三角阵。

$$A = Q U Q^{-1}$$

其中Q是酉矩阵(Unitary Matrix)。

LU分解

知道存在LU分解，能用来进行线性方程组求解以及矩阵求逆就可以，具体的实现细节可以查书，比如《Matrix Computations》3.2节 THe LU Factorization。明白其思想更好。

任何非奇异方阵都可以分解成上三角阵与下三角阵之积

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

对比两边矩阵的，可以求得：

但是编程时，行列都是从0开始时，要注意转换。

第1行： $a_{1j} = u_{1j}, j = 1, 2, \dots, n.$ => $u_{1j} = a_{1j}$ 。

第1列： $a_{j1} = l_{j1}u_{11}, j = 1, 2, \dots, n.$ => $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$ 。

...

第k行： $a_{kj} = \sum_{i=1}^{i=k} l_{ki}u_{ij}, => u_{kj} = a_{kj} - \sum_{i=1}^{i=k-1} l_{ki}u_{ij}$ 。

第k列： $a_{jk} = \sum_{i=1}^{i=k} l_{ji}u_{ik}, => u_{jk} = [a_{jk} - \sum_{i=1}^{i=k-1} l_{ji}u_{ik}]/u_{kk}$ 。

因为前k-1行的 u_{ij} 都已知，前k-1列的 l_{ij} 都已知，因此可以求得第k行 u_{ij} ，第k列的 l_{ij} 。

问题：得保证 a_{11} 非0，以及矩阵非奇异。

利用LU分解求线性方程组的解

求解线性方程组 $Ax=b$ 相当于求解 $LUX=b$;

设 $Y = UX$; 因此 $LY = b$; 首先求解 $LY = b$,

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

求解上面的方程：

第1行： $y_1 = b_1$ 。

对于第k行： $b_k = \sum_{i=1}^{i=k} l_{ki}y_i => y_k = b_k - \sum_{i=1}^{i=k-1} l_{ki}y_i$ 。

求得Y之后，代入Y=UX求得X：

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

对于上三角矩阵，我们从第n行开始求解

对第n行: $y_n = u_{nn}x_n \Rightarrow x_n = y_n/u_{nn}$

...

对第k行: $y_k = \sum_{i=k}^{i=n} u_{ki}x_i \Rightarrow x_k = [y_k - \sum_{i=k+1}^{i=n} u_{ki}x_i]/u_{kk}$
这样通过LU分解矩阵就求得了线性方程组的解X.

矩阵求逆

我们可以利用LU分解来求非奇异方阵的逆矩阵。

AB=I

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

可以分解成:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

右边的列, 就只是第k行值非0;

$A * b_k = e_k$, 对所有的 e_k 求出 b_k 就可以得到A的逆矩阵 $A^{-1} = B$

实际求解中把A换成LU来减少计算量。总的计算开销还是 n^3 。但是这样并不比直接的高斯消元法来的快。

算法实现如下。

```
//LU
template<class T>
void CMatrix<T>::LU(CMatrix &mat, int N, CMatrix* L, CMatrix* U)
{
    for (int k = 0; k < N; k++)
    {
        for (int j = k; j < N; j++)
        {
            T U_k_j = mat.Get(k, j);
            T L_j_k = mat.Get(j, k);
            for (int i = 0; i < k; i++)
            {
                U_k_j -= L->Get(k, i)*U->Get(i, j);
            }
            U->Set(k, j, U_k_j);

            for (int i = 0; i < k; i++)
            {
                L_j_k -= L->Get(j, i)*U->Get(i, k);
            }
            L_j_k = L_j_k / U->Get(k, k);
            L->Set(j, k, L_j_k);
        }
    }
}

//solve linear algebra equations
CVector Solve(CMatrix<double>& mat, CVector& vec)
{
    CVector X(vec.Size());
    CVector Y(vec.Size());
    if (mat.Columns() != mat.Rows() && mat.Rows() != vec.Size())
    {
        printf("Dimension not match!");
        return X;
    }
    CMatrix<double> L(vec.Size(), vec.Size());
    CMatrix<double> U(vec.Size(), vec.Size());
    mat.LU(mat, vec.Size(), &L, &U);
    Y = SolveLow(L, vec);
    cout << "Y\n" << Y;
    X = SolveUpper(U, Y);
    cout << "X\n" << X;
    return X;
}

CVector SolveLow(CMatrix<double>& mat, CVector& vec)
```

```

{
    CVector vecRes(vec.Size());
    if (mat.Columns() != mat.Rows() && mat.Rows() != vec.Size())
    {
        printf("Dimension not match!");
        return vecRes;
    }

    for (int k = 0; k < vec.Size(); k++)
    {
        double mRes = 0;
        mRes = vec.Get(k);
        for (int i = 0; i < k; i++)
        {
            mRes -= mat.Get(k, i)*vecRes.Get(i);
        }
        vecRes.Set(k, mRes);
    }
    return vecRes;
}

CVector SolveUpper(CMatrix<double>& mat, CVector& vec)
{
    CVector vecRes(vec.Size());
    if (mat.Columns() != mat.Rows() && mat.Rows() != vec.Size())
    {
        printf("Dimension not match!");
        return vecRes;
    }

    for (int k = vec.Size() - 1; k >= 0 ; k--)
    {
        double mRes = 0;
        mRes = vec.Get(k);
        for (int i = k+1; i < vec.Size(); i++)
        {
            mRes -= mat.Get(k, i)*vecRes.Get(i);
        }
        mRes = mRes / mat.Get(k, k);
        vecRes.Set(k, mRes);
    }
    return vecRes;
}

//inverse matrix
template<class T>
CMatrix<T> CMatrix<T>::Inv()
{
    CMatrix result = *this;
    CMatrix<double> L(mRows, mColumns);
    CMatrix<double> U(mRows, mColumns);
    CMatrix<double> InvMat(mRows, mColumns);
    LU(result, mRows, &L, &U);
    for (int col = 0; col < mColumns; col++)
    {
        CVector vec(mRows, col);
        CVector mSolution(mRows);
        mSolution = SolveLow(L, vec);
        mSolution = SolveUpper(U, mSolution);
        for (int row = 0; row < mRows; row++)
        {
            InvMat.Set(row, col, mSolution.Get(row));
        }
    }
    return InvMat;
}

```

QR分解

定理: 设A是 $m \times n$ 阶矩阵, $m \geq n$, 假设A为满秩的, 则存在一个唯一的正交矩阵 Q ($Q^T Q = I$) 和唯一的具有正对角元 $r_{ij} > 0$ 的 $n \times n$ 阶上三角阵 R 使得 $A = QR$.

QR分解算法:

$$\blacksquare A_0 = A = Q_1 R_1$$

然后:

$$\blacksquare A_1 = R_1 Q_1$$

一般形式:

$$\blacksquare A_k = R_k Q_k$$

$$\blacksquare A_k = Q_{k+1} R_{k+1}$$

因此有：

$$\blacksquare A_k = Q_{k+1} R_{k+1} = Q_{k+1} A_{k+1} Q_{k+1}^T$$

因此：

$$\blacksquare A = Q_1 R_1 = Q_1 (A_1 Q_1^T) = Q_1 A_1 Q_1^T$$

$$\blacksquare = (Q_1 Q_2 \dots Q_k) A_k (Q_1 Q_2 \dots Q_k)^T$$

当K区域无穷时， A_k 就是对称矩阵， $(Q_1 Q_2 \dots Q_k)$ 就是本征矢量。

算法的收敛性：假设：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

则矩阵 A_k 的矩阵元 $a_{ij}^{(k)}$ 将以如下方式收敛到0：

$$a_{ij}^{(k)} = O(|\lambda_i/\lambda_j|^k) \text{ for all } i > j.$$

python QR分解实例

发现随着QR迭代次数的增加，与原矩阵A相似的矩阵 A^k 越来越收敛于上三角矩阵，也就是对角元以下的元素越来越趋于0，但是对角元上面的元素并不趋于0。虽然 A^k 并没有趋于一个对角阵，但是 $(Q_1 Q_2 \dots Q_k)$ 就是本征矢。这给你我们QR分解求解矩阵本征值一个直观的图像。

```
A:
[[2, 3], [1, 2]]
Eig of A:
[3.73205081 0.26794919]
EigVector of A:
[[ 0.8660254 -0.8660254]
 [ 0.5         0.5        ]]
EigVector : 0
[[-0.89442719 -0.4472136 ]
 [-0.4472136   0.89442719]]
A = RQ: 0
[[ 3.6 -2.2]
 [-0.2  0.4]]
EigVector : 1
[[ 0.86824314 -0.49613894]
 [ 0.49613894  0.86824314]]
A = RQ: 1
[[3.72307692 2.01538462]
 [0.01538462 0.27692308]]
EigVector : 2
[[-0.86618559 -0.49972245]
 [-0.49972245  0.86618559]]
A = RQ: 2
[[ 3.73140954e+00 -2.00110988e+00]
 [-1.10987791e-03  2.68590455e-01]]
```

缺点：

每步QR分解的时间复杂度是 $O(n^3)$ ，此外当有简并的本征值时，收敛会非常慢。

更有效的QR分解：Hessenberg矩阵

基于直接的QR分解并不是高效的方法，如果通过Household变换或者Givens变换把待分解的矩阵转换成上Hessenberg矩阵，此操作的时间复杂度是 $O(n^3)$ ，此时再利用Givens变换来进行QR分解，则QR分解的复杂度从 $O(n^3)$ 变成了 $O(n^2)$ 。

问题是为啥不直接一步用Household变换实现QR？反正时间复杂度都是 $O(n^3)$ ？

原因是，当我们把矩阵变成Hessenberg矩阵后，以后就不再需要进行 $O(n^3)$ 的操作，因为上三角乘以上Hessenberg矩阵还是上Hessenberg矩阵，也就是所有的 A^k 都是上Hessenberg矩阵。因此，以后的QR分解都在Hessenberg上进行，每次的复杂度都是 $O(n^2)$ 。

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Phase 1}} \left[\begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Phase 2}} \left[\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \end{array}$$

Phase 1. (Section 2.2.1). In the first phase we will compute a Hessenberg matrix H (and orthogonal U) such that

$$A = UHU^*.$$

Unlike the Schur factorization ($A = UTU^*$ where T is upper triangular) such a reduction can be done with a finite number of operations.

Phase 2. (Section 2.2.2). In the second phase we will apply the basic QR-method to the matrix H . It turns out that several improvements can be done when applying the basic QR-method to a Hessenberg matrix such that the complexity of one step is $\mathcal{O}(n^2)$, instead of $\mathcal{O}(n^3)$ in the basic version.

QR分解方式的比较

QR分解的实现方式有三种，第一种通过Gram-Schmidt正交化方法，第二种是Household变换方法，第三种是Givens变换方法。

QR分解方法	时间复杂度	优缺点
Gram-Schmidt正交化方法		
Household变换		
Givens变换		可以并行。适合于稀疏矩阵
Hessenberg+Givens	一次Household进行QR分解的时间	时间复杂度最小

矩阵本征值分解

要证明的是，可以通过矩阵QR分解来实现矩阵本征值分解。

实际上，我们在求解矩阵的本征值的时候，要分矩阵是对称矩阵还是非对称矩阵，或者说是厄密矩阵还是非厄密矩阵。算法的收敛性：假设：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

则矩阵 A_k 的矩阵元 $a_{ij}^{(k)}$ 将以如下方式收敛到0：

$$a_{ij}^{(k)} = O(|\lambda_i/\lambda_j|^k) \text{ for all } i > j. \text{ 也就是对角元以下的矩阵元会以这样的方式收敛到0。}$$

¹ A first course in linear algebra

矩阵本征值求解方法

1. Power方法

2. QR分解(对称, $n < 25$ 最实用)

3. 分而治之(对称, $n > 25$ 最实用)

4. Jacob方法

5. 瑞利商迭代

6. 对分法和分而治之

7. Lanczos方法求本征态

奇异矩阵分析

1. SVD
2. PCA
3. Condition Number

SVD

对于任何一个DxM的矩阵X可以做如下分解：

$$\blacksquare X = UDV^T$$

其中 $U^T U = I_D$, $V V^T = I_N$, D是对角矩阵。

$$\blacksquare X X^T = U D V^T V D U^T = U D^2 U^T$$

$$\blacksquare X^T X = V D U^T U D V^T = V D^2 V^T$$

是矩阵的本征值分解。因此可以通过上面两式来求解U, V。主要用到的是矩阵本征值, 本征矢求解技巧。

PCA

我们可以通过SVD来实现PCA, 具体就是只取X的SVD中的前M个其一分量。

$$\blacksquare X = UDV^T \approx U_M D_M V_M^T$$

其中 U_M, D_M, V_M 对于矩阵X的前M个奇异值分量。

Condition Number

条件数的定义

Let's linear equations:

$$\blacksquare A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Let us investigate first, how a small change in the \mathbf{b} vector changes the solution vector. \mathbf{x} is the solution of the original system and let $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ is the solution when \mathbf{b} changes from \mathbf{b} to $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$.

Then we can write:

$$\blacksquare A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

or $\blacksquare A\mathbf{x} + A\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$

But because $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, it follows that

$$\blacksquare A\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$$

So:

$$\blacksquare \delta\mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

Using the matrix norm properties:

$$\blacksquare ||A\mathbf{x}|| \leq ||A|| ||\mathbf{x}||$$

We can get:

$$\blacksquare ||A^{-1}\Delta\mathbf{b}|| \leq ||A^{-1}|| ||\Delta\mathbf{b}||.$$

Also, we can get:

$$\blacksquare ||\mathbf{b}|| = ||A\mathbf{x}|| \leq ||A|| ||\mathbf{x}||$$

Using equations 2.5 and 2.6 we can get:

$$\blacksquare \frac{||\Delta\mathbf{x}||}{||A|| \cdot ||\mathbf{x}||} \leq \frac{||A^{-1}|| \cdot ||\Delta\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

Let's define condition number as: $K(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

we can rewrite equation 2.7 as:

$$\blacksquare \frac{||\Delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} \leq K(A) \cdot \frac{||\Delta\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

Now, let us investigate what happens if a small change is made in the coefficient matrix

$\blacksquare A$. Consider A is changed to $A + \Delta A$ and the solution changes from \mathbf{x} to $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$

$\blacksquare (A + \Delta A)(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, we can obtain:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}\|} \leq \mathbf{K}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$\mathbf{K}(\mathbf{A})$ is a measure of the relative sensitivity of the solution to changes in the right-hand side vector \mathbf{b} . When the condition number $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ becomes large, the system is regarded as being illconditioned. Matrices with condition numbers near 1 are said to be well-conditioned.

条件数对梯度下降法收敛的影响

例子

线性方程组解的稳定性分析

系统解的稳定性定义成系统小的扰动对系统解的影响。

Example 1:

$$\begin{bmatrix} 400 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$x_1 = -100, x_2 = -200$$

If we give small change to matrix \mathbf{A} , change A_{11} from 400 to 401 then:

$$\begin{bmatrix} 401 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

This time the solution is:

$$x_1 = 40000, x_2 = 79800$$

ill-condition:

When the solution is highly sensitive to the values of the coefficient matrix \mathbf{A} or the righthand side constant vector \mathbf{b} , the equations are called to be ill-conditioned.

SVD在推荐系统中的应用

假设我们现在有评分矩阵 $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$, SVD实际上就是去找到两个矩阵: $U \in \mathbb{R}^{f \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{f \times m}$, 其中矩阵 U 表示 User 和 feature 之间的联系, 矩阵 V 表示 Item 和 feature 之间的联系。

大家这时候肯定会想, 我们的评分矩阵里面一般会有很多缺失值, 那要怎么去得到 U 和 M 呢? 实际上, 这两个矩阵是通过学习的方式得到的, 而不是直接做矩阵分解。我们定义如下的损失函数:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I_{ij} (V_{ij} - p(U_i, M_j))^2 + \frac{k_u}{2} \sum_{i=1}^n \|U_i\|^2 + \frac{k_m}{2} \sum_{j=1}^m \|M_j\|^2$$

其中 $p(U_i, M_j)$ 表示我们对用户 i 对 物品 j 的评分预测:

$$p(U_i, M_j) = U_i^T M_j$$

梯度下降:

$$-\frac{\partial E}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^m I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) M_j) - k_u U_i$$

$$-\frac{\partial E}{\partial M_j} = \sum_{i=1}^n I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) U_i) - k_m M_j$$

实际上, 用户的评分与用户的习惯, 以及该物品的总体评分水平有关, 因此可以加上用户的均值与物品的均值。

$$\hat{r}_{ui} = \mu + b_i + b_u + \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u$$

μ : 训练集中所有记录的评分的全局平均数。在不同网站中, 因为网站定位和销售的物品不同, 网站的整体评分分布也会显示出一些差异。比如有些网站中的用户就是喜欢打高分, 而另一些网站的用户就是喜欢打低分。而全局平均数可以表示网站本身对用户评分的影响。

b_u : 用户偏置(user bias)项。这一项表示了用户的评分习惯中和物品没有关系的那种因素。比如有些用户就是比较苛刻, 对什么东西要求都很高, 那么他的评分就会偏低, 而有些用户比较宽容, 对什么东西都觉得不错, 那么他的评分就会偏高。

b_i : 物品偏置(item bias)项。这一项表示了物品接受的评分中和用户没有什么关系的因素。比如有些物品本身质量就很高, 因此获得的评分相对都比较高, 而有些物品本身质量很差, 因此获得的评分相对都会比较低。

这个时候我们的损失函数变为:

$$\mathbf{E} = \sum_{(u,i) \in k} (r_{ui} - \mu - b_i - b_u - \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u) + \lambda (\|\mathbf{p}_u\|_2 + \|\mathbf{q}_i\|_2 + b_u^2 + b_i^2)$$

¹ SVD在推荐系统中的应用

大规模稀疏矩阵问题

1. Lanczos
2. SVD
3. Krylov
4. The Conjugate Gradient Method
5. Large Sparse Matrix在推荐系统中的应用

Preconditioning

思考线性方程系统: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

假设 $M = M_1 M_2$ 是非奇异的, 考虑线性系统 $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$, 其中:

$$\hat{\mathbf{A}} = M_1^{-1} A M_2^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = M_1^{-1} \mathbf{b}$$

如果 M 与 A 很接近, 因此 $\hat{\mathbf{A}}$ 接近于单位矩阵 I 。因此可以通过 $M_2 \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ 。矩阵 M 被称为 Preconditioner, 为了作为我们感兴趣的问题的求解框架, 它需要满足两个条件:

1. M 必须抓住 A 的本质, 即 $M \approx A$, 因此 $I \approx M_1^{-1} A M_2^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$
 2. 涉及到 M_1, M_2 矩阵的线性系统必须容易求解, 因为 Krylov 过程涉及到 $M_1^{-1} A M_2^{-1}$ 操作。一个好的 preconditioner 意味着更少的迭代。
- 如果 A 是对称正定的, 且 $A \approx I + \Delta A$, 并且 $\text{rank}(\Delta A) = k$ 远小于 n .

矩阵微分

参考闲话矩阵求导

向量 \mathbf{y} 对标量 \mathbf{x} 求导

我们假定所有的向量都是列向量

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix}$$

标量 \mathbf{y} 对向量 \mathbf{x} 求导:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

向量对向量求导

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

标量对矩阵求导,

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{1q}} \\ \frac{\partial y}{\partial x_{21}} & \frac{\partial y}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{2q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{p1}} & \frac{\partial y}{\partial x_{p2}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{pq}} \end{bmatrix}$$

矩阵对标量求导,

注意有个类似于转置的操作, 因为 \mathbf{Y} 是 $m \times n$ 矩阵

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \frac{\partial y_{21}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{m1}}{\partial x} \\ \frac{\partial y_{12}}{\partial x} & \frac{\partial y_{22}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{m2}}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} & \frac{\partial y_{2n}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

用维度分析来解决求导的形式问题

$$\text{向量对向量的微分 } \frac{\partial(\mathbf{Ax})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{Ax})_1}{\partial x_1} & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{Ax})_1}{\partial x_2} & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{Ax})_1}{\partial x_n} & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial(\mathbf{Ax})_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

考虑 $\frac{\partial \mathbf{Au}}{\partial \mathbf{x}}$, \mathbf{A} 与 \mathbf{x} 无关, 所以 \mathbf{A} 肯定可以提出来, 只是其形式不知。假如 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 我们知道最终结果肯定和 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ 有关, 注意到

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 于是 \mathbf{A} 只能转置以后添在后面, 因此:

$$\frac{\partial \mathbf{Au}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T$$

$$dL = \frac{\partial L^T}{\partial \mathbf{w}} d\mathbf{w}$$

再考虑如下问题:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Ay}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 与 } \mathbf{x} \text{ 无关, 我们知道 } \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Ay}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \text{ 因此 } \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Ay}}{\partial \mathbf{x}} = f(A, y) + g(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}, x^T A)$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 因此, 为了满足 $\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{Ay}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, 我们可以知道函数 f, g 的形式。最终有:

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A}) \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{y} \text{ 当 } \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ 时, } \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A}) \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

最后一个例子(还没解出来): $\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 知道 $\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 还需要对迹形式进行求解。

算法与数据结构

主要介绍数据结构，堆，栈，树；传统的一些算法，比如排序，最短路径。

最长递增子序列

对于序列5, 3, 4, 8, 6, 7, 其最长的递增子序列是3, 4, 6, 7, 这里, 不需要保证元素是连在一起的, 只需要序号上升即可。问题变成求解n元系列a[1], a[2], a[3], ..., a[n]。

对于 $i < j < n$, 假设我们已经求得前 i 个元素的最长递增子序列长度为 $\text{MaxLen}[i]$ 满足 $i < j$, 那么我们可以遍历 i 从1到 $j-1$ 来求得 $\text{MaxLen}[j]$ 。基本的一些小算法写在一个CPP里面, 最后封装成一个类, 一般要设计成模板类。

```
int Algo::LongestIncreaseSubsequence(int arr[], int arrSize)
{
    int *maxLen = new int[arrSize]();
    for (int i=0; i<arrSize; i++)
    {
        maxLen[i] = 1;
    }
    for (int j = 1; j < arrSize; j++)
    {
        int maxLenJ = 1;
        for (int i=0; i<j; i++)
        {
            if (arr[i] < arr[j])
            {
                maxLenJ = maxLen[i] + 1;
                maxLen[j] = std::max({ maxLen[j] ,maxLenJ });
            }
        }
    }
    return maxLen[arrSize-1];
}
```


第一节 Kriging插值

<https://xg1990.com/blog/archives/222>

空间插值问题，就是在已知空间上若干离散点 (x_i, y_i) 的某一属性(如气温, 海拔)的观测值 $z_i = z(x_i, y_i)$ 的条件下，估计空间上任意一点 (x, y) 的属性值的问题。

直观来讲，根据地理学第一定律，

大意就是，地理属性有空间相关性，相近的事物会更相似。由此人们发明了反距离插值，对于空间上任意一点 (x, y) 的属性 $z = z(x, y)$ ，

定义反距离插值公式估计量 $\hat{z} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{d^\alpha} z_i$

其中 α 通常取 1 或者 2。

即，用空间上所有已知点的数据加权求和来估计未知点的值，权重取决于距离的倒数(或者倒数的平方)。

那么，距离近的点，权重就大；距离远的点，权重就小。反距离插值可以有效的基于地理学第一定律估计属性值空间分布，但仍然存在很多问题：
 α 的值不确定 用倒数函数来描述空间关联程度不够准确

因此更加准确的克里金插值方法被提出来了

克里金插值公式 $\hat{z}_o = \sum_{i=0}^n \lambda_i z_i$

其中 \hat{z}_o 是点 (x_o, y_o) 处的估计值，即 $\hat{z}_o = z(x_o, y_o)$

假设条件：

1. 无偏约束条件 $E(\hat{z}_o - z_o) = 0$
2. 优化目标/代价函数 $J = Var((\hat{z}_o - z_o))$ 取极小值
3. 半方差函数 r_{ij} 与空间距离 d_{ij} 存在关联，并且这个关联可以通过这两组数据拟合出来，因此可以用距离 d_{ij} 来求得 r_{ij}

半方差函数 $r_{ij} = \sigma^2 - C_{ij}$ ，等价于 $r_{ij} = \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2]$

其中： $C_{ij} = Cov(z_i, z_j) = Cov(R_i, R_j)$

求得 r_{ij} 之后，我们就可以求得 λ_i

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1o} \\ r_{2o} \\ \cdots \\ r_{no} \\ 1 \end{bmatrix}$$

第四章 最优化方法

这章主要讨论常见的非线性最优化方法，以及优化技巧与不同方法的优缺点。

最优化算法的分类方式有多种，从应用的泰勒展开的阶数来说，可分为一阶算法与二阶算法；从搜索的策略来讲，可以分为方向固定的线性搜索算法与步长固定的Trust Region method；就解决的问题而言，有凸优化算法与非凸优化算法。对凸优化问题而言，由于局部极小就是全局最小，因此通过梯度下降方法就可以很好的解决。大多数我们面对的是非凸优化问题，存在大量的局部极小值，我们也不需要得到全局最小值，只需要求得一个较好的局部极小值就可以了，因为局部极小值对应的解是稳定的，就可能是一个满足系统要求的解。

思考这一章该怎么去写？但是得先回答以下两个问题，你写这一章的目的是什么？你想把它写成什么样子？答案不能独立于问题而存在，答案与问题是一对，[Key,Value]，且一个key可以对应多个value。因此，首先来介绍写这一章的目的。

■数值最优化方法也可以按照求解的问题来说，有带约束的非线性优化问题，带约束的非线性优化问题(非线性优化是相对于线性规划而言的，除了线性规划以外的优化问题称为非线性优化问题)。因此优化问题可以分为如下三类：

1. 线性规划

线性规划暂时不讲，因为现在主要讨论非线性优化问题，此外可以通过平方把线性优化问题转化为非线性优化问题，一个例子就是求解线性方程组问题转化为最小二乘问题。

2. 无约束非线性优化问题

一维搜索问题，包含二分法，弦割法，牛顿法，(黄金分割法)这些也不重用，因此主要讨论如下几种算法。

梯度下降法

牛顿法

L-M(Levenberg-Marquardt)算法

DogLeg算法

拟牛顿法

共轭梯度法

3. 带约束非线性优化问题

原则就是通过拉格朗日乘子法把等式约束，用KKT乘子法把不等式约束问题转化为无约束优化问题来求解，这样可以利用无约束优化问题来求解。

等式约束的拉格朗日乘子法

不等式约束的KKT乘子法

1. 局部极小算法
 - i. 一阶方法
 - i. SGD
 - ii. Mini-batch SGD
 - ii. 二阶方法
 - i. 牛顿法
 - ii. 拟牛顿法
 - i. BFGS
 - ii. DFP
 - iii. Brody类方法
 - iii. Trust Region method
 - i. L-M算法
 - ii. DogLeg算法
 - iv. 线性搜索法

- v. 凸优化
 - vi. 非凸优化
2. 全局最小算法
- i. 模拟退火
 - ii. 遗传算法

需要做的事情

1. 把最前沿的非凸优化, 比如ADMM算法加进来
2. 分布式机器学习中应用的优化算法要有清晰的轮廓, 以及她与单机机器学习系统中的优化算法有啥区别。因此, 是否有必要加一个section, 关于分布式机器学习优化方法?
3. 运筹学, 线性规划, 非线性规划里面处理的基本东西要在你的脑海中有一个基本的印象。
4. 有必要加一节对偶。

1

¹. 刘铁岩《分布式机器学习--算法, 理论与实战》[«»](#)

无约束最优化问题

无约束优化问题相对于有约束优化问题而言是简单的。在处理这些问题时，主要要考虑的是算法的收敛速度(线性收敛，二次收敛等等)，算法的时间复杂度与空间复杂度(也就是考虑内存问题)，算法的稳定性(收敛点的特性，鞍点，好的局部极小点，坏的局部极小点还是全局最小点)。Hessian矩阵的奇异性决定了算法的收敛速度。

要思考的一个问题是为啥不同的算法收敛到真正解的精度不同，这是由算法的什么特征导致的？

要思考的另外一个问题是，各算法的使用场景是什么？怎么根据不同场景选择不同的算法？有什么标准吗？怎么解决现实的非教科书的问题？

Linear Search Methods

the steepest descent algorithm proceeds as follows: at each step, starting from the point $x^{(k)}$, we conduct a line search in the direction $-\nabla f(x^{(k)})$, until a minimizer, $x^{(k+1)}$, is found.

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$$

Proposition 8.1: if $x^{(k)}$ is the steepest descent sequence for $f: R^n \rightarrow R$, then for each k the vector $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ is orthogonal to the vector $x^{(k+2)} - x^{(k+1)}$

Proposition 8.2: if $x^{(k)}$ is the steepest descent sequence for $f: R^n \rightarrow R$ and if $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$, then $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$

Stopping criterion:

$$\frac{|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})|}{\|f(x^{(k)})\|} < \epsilon$$

Example: Quadratic function of the form:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$$

Gradient: $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) = Qx - b$

so $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$

where:

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} - \alpha g^{(k)}) = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} \left(\frac{1}{2}(x^{(k)} - \alpha g^{(k)})^T Q(x^{(k)} - \alpha g^{(k)}) - (x^{(k)} - \alpha g^{(k)})^T b \right)$$

Hence:

$$\alpha_k = \frac{g^{(k)T} g^{(k)}}{g^{(k)T} Q g^{(k)}}$$

Covergence properties:

Define:

$$V(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^* T Q x^* = \frac{1}{2}(x - x^*)^T Q(x - x^*)$$

With: $x^* = Q^{-1}b$

Lemma 8.1 The iterative algorithm

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

with $g^{(k)} = Qx^{(k)} - b$ satisfies

$$V(x^{(k+1)}) = (1 - \gamma_k)V(x^{(k)}),$$

where, if $g^{(k)} = 0$ then $\gamma_k = 1$, and if $g^{(k)} \neq 0$ then:

$$\gamma_k = \alpha_k \frac{g^{(k)T} Q g^{(k)}}{g^{(k)T} Q^{-1} g^{(k)}} (2 \frac{g^{(k)T} g^{(k)}}{g^{(k)T} Q g^{(k)}} - \alpha_k)$$

Submit α_k into γ_k , then

$$\gamma_k = \frac{(g^{(k)T} g^{(k)})^2}{(g^{(k)T} Q g^{(k)})(g^{(k)T} Q^{-1} g^{(k)})}$$

Theorem 8.1 Let $x^{(k)}$ be the sequence resulting from a gradient algorithm $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$. Let γ_k be as defined in Lemma 8.1, and suppose that $\gamma_k > 0$ for all k , then $x^{(k)}$ converges to x^* for any initial condition $x^{(0)}$ if and only if:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

Theorem 8.2 In the steepest descent algorithm, we have

$$x^{(k)} \rightarrow x^* \text{ for any } x^{(0)}$$

Theorem 8.3 For the fixed step size gradient algorithm, $x^{(k)} \rightarrow x^*$ for any $x^{(0)}$

if and only if $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}(Q)}$

Convergence Rate:

Theorem 8.4 In the method of steepest descent applied to the quadratic function, at every step k , we have :

$$V(x^{(k+1)}) \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(Q) - \lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(Q)} \right) V(x^{(k)}).$$

Let:

$$r = \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} = \|Q\| \|Q^{-1}\| \text{ the so-called condition number of } Q.$$

Then, it follows from Theorem 8.4 that $V(x^{(k+1)}) \leq (1 - \frac{1}{r})V(x^{(k)})$. We refer to $1 - \frac{1}{r}$ as the convergence ratio. If $r = 1$, then

$\lambda_{\max}(Q) = \lambda_{\min}(Q)$, corresponding to circular contours of f . You can use the convergence ratio r to judge the speed of convergence.

Definition 8.1 Given a sequence $x^{(k)}$ that converges to x^* , that is, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$, we say that the order of convergence is o , where

$p \in R$, if $0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - x^*}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} < \infty$,

if for all $p > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - x^*}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} = 0$,

then we say that the order of convergence is ∞ .

Lemma 8.3. In the steepest descent algorithm, if $g^{(k)} \neq 0$ for all k , then $\gamma_k = 1$ if and only if $g^{(k)}$ is an eigenvector of Q .

Theorem 8.6 Let $x^{(k)}$ be the sequence resulting from a gradient algorithm applied to a function f . Then, the order of convergence of $x^{(k)}$ is 1 in the worst case, that is, there exist a function f and an initial $x^{(0)}$ such that the order of convergence of $x^{(k)}$ is equal 1.

Newton's Method

$$f(x) = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})^T g^{(k)} + \frac{1}{2} (x - x^{(k)})^T F(x^{(k)}) (x - x^{(k)})$$

Theorem 9.1 Suppose that $f \in C^3$, and $x^* \in R^n$ is a point such that $\nabla f(x^*) = 0$ and $F(x^*)$ is invertible. Then, for all $x^{(0)}$ sufficiently close to x^* , Newton's method is well defined for all k , and converges to x^* with order of convergence at least 2.

As stated in the above theorem, Newton's method has superlinear convergence properties if the starting point is near the solution. However, the method is not guaranteed to converge to the solution if we start away from it (in fact, it may not even be well defined because the Hessian may be singular). In particular, the method may not be a descent method; that is, it is possible that $f(x^{(k+1)}) > f(x^{(k)})$. Fortunately, it is possible to modify the algorithm such that descent property holds. To see this, we need the following result.

Theorem 9.2 Let $x^{(k)}$ be the sequence generated by Newton's method for minimizing a given objective function $f(x)$. If the Hessian $F(x^{(k)}) > 0$ and $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) \neq 0$, then the direction

$d^{(k)} = -F(x^{(k)})^{-1} g^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ from $x^{(k)}$ to $x^{(k+1)}$ is a descent direction for f in the sense that there exists an $\alpha > 0$ such that for all $a \in (a, \alpha)$,

$$f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) < f(x^{(k)}).$$

The above theorem motivates the following modification of Newton's method:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k F(x^{(k)})^{-1} g^{(k)} \text{ where}$$

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} f(x^{(k)} - \alpha_k F(x^{(k)})^{-1} g^{(k)})$$

A drawback of Newton's method is that evaluation of $F(x^{(k)})$ for large n can be computationally expensive. Furthermore, we have to solve the set of n linear equations $F(x^{(k)})d^{(k)} = -g^{(k)}$. In the Chapters 10 and 11, we discuss methods that alleviate this difficulty.

Levenberg-Marquardt Modification:

If the Hessian matrix $F(x^{(k)})$ is not positive definite, then the search direction $d^{(k)} = -F(x^{(k)})^{-1} g^{(k)}$ may not point in a descent direction. A simple technique to ensure that the search direction is a descent direction is to introduce the so-called Levenberg-Marquardt Modification to Newton's algorithm:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k F(x^{(k)} + u_k I)^{-1} g^{(k)}$$

where $u_k \geq 0$

Newton's methods for nonlinear least-squares

Consider the following problem:

$$\operatorname{minimize} \sum_{i=1}^m (r_i(x))^2$$

where $r_i : R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$, are given functions. This particular problem is called a nonlinear least-squares problem

$$F_{jk} = 2 \sum_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

$$\text{Let } s(x) = r_i(x) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

So the Hessian matrix as

$$\blacksquare F(x) = 2(J(x)^T J(x) + S(x)).$$

Therefore, Newton's method applied to the nonlinear least-squares problems is given by

$\blacksquare x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J(x)^T J(x) + S(x))^{-1} J(x)^T r(x)$. In some case, $S(x)$ can be ignored because its components are negligibly small. In this case, the above Newton's algorithm reduces to what is commonly called the Gauss-Newton's method:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J(x)^T J(x))^{-1} J(x)^T r(x).$$

A potential problem with the Gauss-Newton method is that the matrix $J(x)^T J(x)$ may not be positive definite. As described before, this problem can be overcome using a Levenberg-Marquardt modification:

$$\blacksquare x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J(x)^T J(x) + u_k I)^{-1} J(x)^T r(x).$$

Conjugate Direction Methods

The conjugate direction methods typically perform better than the method of steepest descent, but not as well as Newton's method. As we saw from the method of steepest descent and Newton's method, the crucial factor in the efficiency of an iterative search method is the direction of the search at each iteration.

Definition 10.1 Let Q be a real symmetric $n \times n$ matrix. The directions $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)}$ are Q -conjugate if, for all $i \neq j$, we have

$$d(i)^T Q d(j) = 0.$$

Lemma 10.1 Let Q be a symmetric positive definite $n \times n$ matrix. If the directions $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)} \in R^n, k \leq n-1$, are nonzero and Q -conjugate, then they are linearly independent.

Basic conjugate Direction Algorithm. Given a start $x^{(0)}$, and Q -conjugate direction

$$\blacksquare d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)}, \text{ for } k \geq 0,$$

$$\blacksquare g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) = Qx^{(k)} - b,$$

$$\blacksquare \alpha_k = -\frac{g^{(k)T} d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}$$

$$\blacksquare x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

Theorem 10.1 For any starting point $x^{(0)}$, the basic conjugate direction algorithm converges to the unique x^* (that solves $Qx = b$) in n steps; that is, $x^{(n)} = x^*$



Lemma 10.2 In the conjugate direction algorithm,

$$\blacksquare g^{(k+1)T} d^{(i)} = 0 \text{ for all } k, 0 \leq k \leq n-1, \text{ and } 0 \leq i \leq k$$

The conjugate gradient algorithm is summarized below.

1. Set $k := 0$; select the initial point $x^{(0)}$
2. $\blacksquare g^{(0)} = \nabla f(x^{(0)})$. If $g^{(0)} = 0$, stop, else set $d^{(0)} = -g^{(0)}$. 3. $\blacksquare \alpha_k = -\frac{g^{(k)T} d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}$
3. $\blacksquare x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$
4. $\blacksquare g^{(k+1)} = \nabla f(x^{k+1})$. If $g^{(k+1)} = 0$, stop.
5. $\blacksquare \beta_k = -\frac{g^{(k+1)T} Q d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}$. 7. $\blacksquare d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}$
6. Set $k := k+1$; go to step 3.

Proposition 10.1 In the conjugate gradient algorithm, the directions $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n-1)}$ are Q -conjugate.

最优化算法

最优化问题分为有约束优化问题与无约束优化问题。

无约束优化问题

$$\blacksquare \min f(x)$$

有约束优化问题

$$\blacksquare \min f(x)$$

$$\blacksquare s.t. h_i(x) = 0, i = 1, 2 \dots n$$

但是我们可以通过拉格朗日乘子转化为无约束优化问题

$$\blacksquare \min [f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i(x)]$$

梯度下降法

牛顿法

共轭梯度法

线性搜索:先确定方向,再确定步长,典型的就是梯度下降法与牛顿法, quasi-newton方法:先确定步长,再找步长方向。常见的又L-M, Dog-Leg方法

最优化

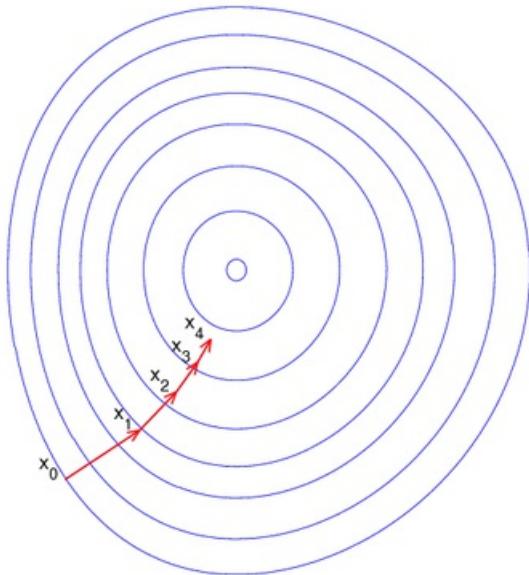
[最速下降法](#), [牛顿法](#), [LBFGS](#)

1. 梯度下降法(Gradient Descent)

梯度下降法是最早最简单,也是最为常用的最优化方法。梯度下降法实现简单,当目标函数是凸函数时,梯度下降法的解是全局解。一般情况下,其解不保证是全局最优解,梯度下降法的速度也未必是最快的。

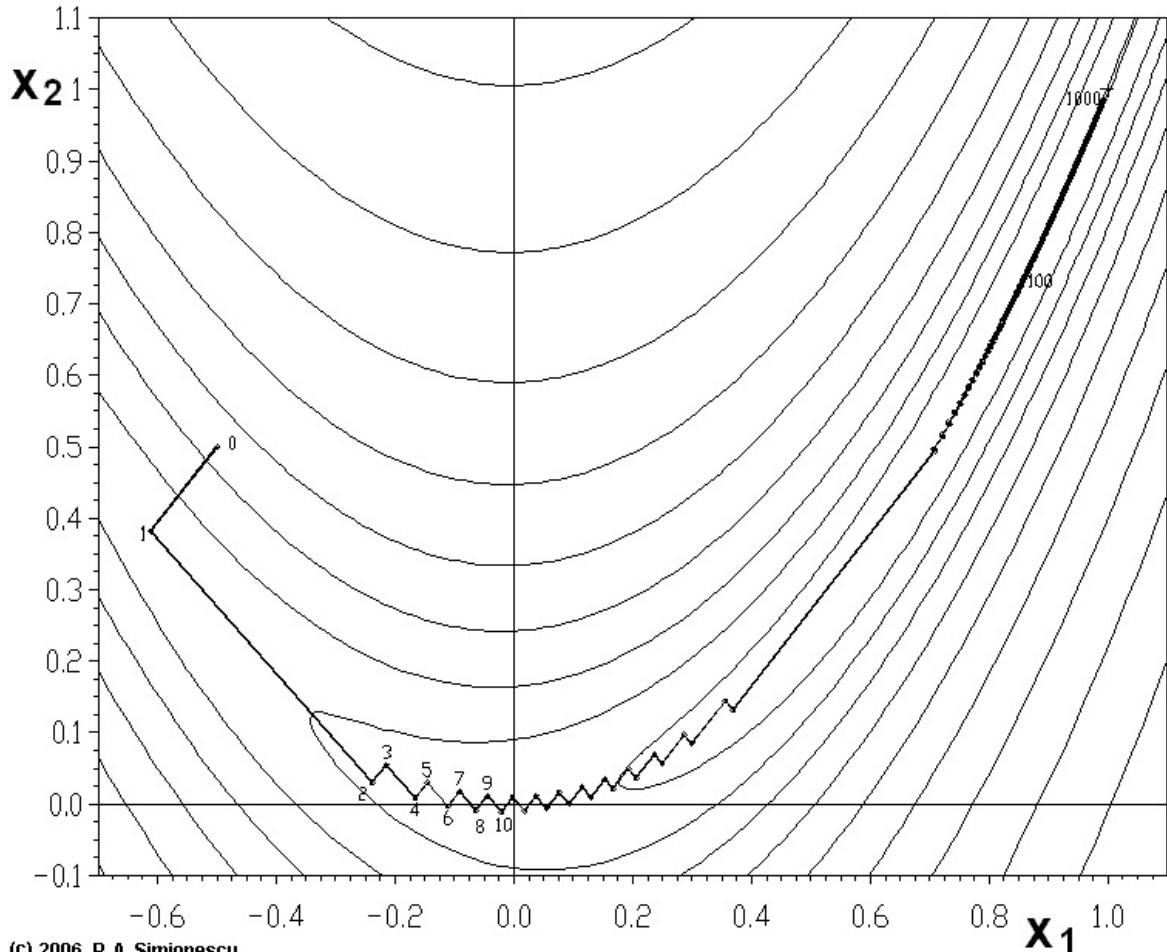
梯度下降法的优化思想是用当前位置负梯度方向作为搜索方向,因为该方向为当前位置的最快下降方向,所以也被称为是“最速下降法”。最速下降法越接近目标值,梯度趋于0,所以步长越小,前进越慢。

梯度下降法的搜索迭代示意图如下图所示:



梯度下降法的缺点:

(1) 越靠近极小值的地方收敛速度越慢,如下图所示



(c) 2006 P. A. Simionescu

从上图可以看出，梯度下降法在接近最优解的区域收敛速度明显变慢，利用梯度下降法求解需要很多次的迭代。

在机器学习中，基于基本的梯度下降法发展了两种梯度下降方法，分别为随机梯度下降法和批量梯度下降法。

比如对一个线性回归(Linear Logistics)模型，假设下面的 $h(x)$ 是要拟合的函数， $J(\theta)$ 为损失函数， θ 是参数，要迭代求解的值， θ 求解出来了那最终要拟合的函数 $h(\theta)$ 就出来了。其中 m 是训练集的样本个数， n 是特征的个数。

$$h(\theta) = \sum_{j=0}^n \theta_j x_j$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y^i - h_\theta(x^i))^2$$

//n是特征的个数，m的训练样本的数目

1) 批量梯度下降法 (Batch Gradient Descent, BDG)

(1) 将 $J(\theta)$ 对 θ 求偏导，得到每个 θ 对应的梯度：

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y^i - h_\theta(x^i)) x_j^i$$

(2) 由于要最小化风险函数，所以按照每个参数 θ 的负梯度方向来更新 θ

$$\theta'_j = \theta_j - \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j} \theta_j + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y^i - h_\theta(x^i)) x_j^i$$

(3) 从上面公式可以注意到，它得到的是一个全局最优解，但是每迭代一步，都要用到训练集所有的数据，如果 m 很大，那么可想而知这种方法的迭代速度会相当的慢。所以，这就引入了另外一种方法——随机梯度下降。

一个实验结果，说明随机梯度下降法能收敛到最终结果：

对于批量梯度下降法，样本个数 m ， x 为 n 维向量，一次迭代需要把 m 个样本全部带入计算，迭代一次计算量为 $m \times n^2$ 。

2) 随机梯度下降 (Stochastic Gradient Descent, SGD)

(1) 上面的风险函数可以写成如下这种形式，损失函数对应的是训练集中每个样本的粒度，而上面批量梯度下降对应的是所有的训练样本

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^m (y^i - h_\theta(x^i))^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m cost(\theta, (x^i, y^i))$$

$$cost(\theta, (x^i, y^i)) = \frac{1}{2}(y^i - h_\theta(x^i))^2$$

(2) 每个样本的损失函数, 对 θ 求偏导得到对应的梯度, 来更新 θ

$$\theta'_j = \theta_j + (y^i - h_\theta(x^i))x_j^i$$

(3) 随机梯度下降是通过每个样本来迭代更新一次, 如果样本量很大的情况(例如几十万), 那么可能只用其中几万条或者几千条的样本, 就已经将 θ 迭代到最优解了, 对比上面的批量梯度下降, 迭代一次需要用到十几万训练样本, 一次迭代不可能最优, 如果迭代10次的话就需要遍历训练样本10次。但是, SGD伴随的一个问题是噪音较BGD要多, 使得SGD并不是每次迭代都向着整体最优化方向。

随机梯度下降每次迭代只使用一个样本, 迭代一次计算量为n2, 当样本个数m很大的时候, 随机梯度下降迭代一次的速度要远高于批量梯度下降方法。两者的关系可以这样理解: 随机梯度下降方法以损失很小的一部分精确度和增加一定数量的迭代次数为代价, 换取了总体的优化效率的提升。增加的迭代次数远远小于样本的数量。

比较批量梯度下降法与随机梯度下降法:

用 $y = 2 * x1 + x2 - 1 + rand(0, 1)$ 产生1000组数, 用这一组数据来反求产生函数中的系数 $(2, 1, -1)^T$.

迭代停止条件就是, 训练得到的相邻两次参数的差的范数小于0.000001(严格来说, 停止条件是损失函数一介导数等于0, 也就是

$$L'(\theta) = -\frac{1}{m} X^T (X\theta - Y) = 0.$$

1) 批量梯度下降法: 1000个样本, 设置的learn rate = 0.0001, 一次迭代所有1000个样本, 最终经过38000次迭代收敛到可以接受的标准。如果设置learn rate 是较大的值, 比如为1, 则发现结果马上发散了, 因此批量梯度下降法对learn rate比较敏感, 而下面的随机梯度下降法就不会出现这个问题, 因为每次只对一个样本进行处理, 即使这个样本对参数的梯度很大, 但是下一个样本又可以马上把参数拉回来。

```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Grad: 4.34235e-05 1.78119e-05 -0.00100021
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993389 para diff norm: 1.00131e-06 iter num: 37888
Grad: 4.3417e-05 1.78092e-05 -0.00100005
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993389 para diff norm: 1.00115e-06 iter num: 37889
Grad: 4.34104e-05 1.78065e-05 -0.000999903
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993391 para diff norm: 1.001e-06 iter num: 37890
Grad: 4.34038e-05 1.78038e-05 -0.000999751
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993392 para diff norm: 1.00085e-06 iter num: 37891
Grad: 4.33973e-05 1.78011e-05 -0.0009996
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993393 para diff norm: 1.0007e-06 iter num: 37892
Grad: 4.33907e-05 1.77984e-05 -0.000999449
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993394 para diff norm: 1.00055e-06 iter num: 37893
Grad: 4.33841e-05 1.77957e-05 -0.000999298
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993395 para diff norm: 1.0004e-06 iter num: 37894
Grad: 4.33776e-05 1.7793e-05 -0.000999147
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993396 para diff norm: 1.00025e-06 iter num: 37895
Grad: 4.3371e-05 1.77903e-05 -0.000998996
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993397 para diff norm: 1.00009e-06 iter num: 37896
Grad: 4.33644e-05 1.77876e-05 -0.000998844
Paras: 1.99971 0.999882 -0.993398 para diff norm: 9.99944e-07 iter num: 37897
pass
solution:
1.99971
0.999882
-0.993398
Golden Solution:
2
1
-1
Press any key to continue . . .
```

2) 随机梯度下降法:

1000个样本, 设置的learn rate = 1, 一次迭代处理一个样本, 最终经过25000次迭代收敛到可以接受的标准。

```

cmd C:\Windows\system32\cmd.exe
Paras: 1.99795 0.9998981 -0.951616 para diff norm: 0.000446962 iter num: 24714
Paras: 1.99818 0.999232 -0.951604 para diff norm: 0.000338804 iter num: 24715
Paras: 1.99816 0.99922 -0.951605 para diff norm: 1.82845e-05 iter num: 24716
Paras: 1.99805 0.998911 -0.951617 para diff norm: 0.000328846 iter num: 24717
Paras: 1.99804 0.998721 -0.951623 para diff norm: 0.000190122 iter num: 24718
Paras: 1.9981 0.999161 -0.951611 para diff norm: 0.000444339 iter num: 24719
Paras: 1.99816 0.999501 -0.951604 para diff norm: 0.000344163 iter num: 24720
Paras: 1.99813 0.998416 -0.951627 para diff norm: 0.00108582 iter num: 24721
Paras: 1.99815 0.998517 -0.951624 para diff norm: 0.000102945 iter num: 24722
Paras: 1.99834 0.999645 -0.951597 para diff norm: 0.00114423 iter num: 24723
Paras: 1.99829 0.999464 -0.951642 para diff norm: 0.000192287 iter num: 24724
Paras: 1.99833 0.99955 -0.95164 para diff norm: 9.18398e-05 iter num: 24725
Paras: 1.99831 0.99951 -0.951641 para diff norm: 4.20315e-05 iter num: 24726
Paras: 1.99805 0.999223 -0.951665 para diff norm: 0.000389985 iter num: 24727
Paras: 1.99804 0.999007 -0.951669 para diff norm: 0.000216928 iter num: 24728
Paras: 1.99784 0.998829 -0.951689 para diff norm: 0.000266407 iter num: 24729
Paras: 1.99765 0.998724 -0.951707 para diff norm: 0.000220029 iter num: 24730
Paras: 1.99779 0.998928 -0.951696 para diff norm: 0.000248953 iter num: 24731
Paras: 1.99774 0.998884 -0.9517 para diff norm: 6.50401e-05 iter num: 24732
Paras: 1.99774 0.998884 -0.9517 para diff norm: 5.54896e-07 iter num: 24733
pass
solution:
1.99774
0.998884
-0.9517
Golden Solution:
2
1
-1
Press any key to continue . . .

```

3)牛顿法

```

cmd C:\Windows\system32\cmd.exe
Paras: 1.99954 1 -0.99909 para diff norm: 1.0188e-06 iter num: 7691
Paras: 1.99955 1 -0.999091 para diff norm: 1.01778e-06 iter num: 7692
Paras: 1.99955 1 -0.999091 para diff norm: 1.01676e-06 iter num: 7693
Paras: 1.99955 1 -0.999092 para diff norm: 1.01575e-06 iter num: 7694
Paras: 1.99955 1 -0.999093 para diff norm: 1.01473e-06 iter num: 7695
Paras: 1.99955 1 -0.999094 para diff norm: 1.01372e-06 iter num: 7696
Paras: 1.99955 1 -0.999095 para diff norm: 1.0127e-06 iter num: 7697
Paras: 1.99955 1 -0.999096 para diff norm: 1.01169e-06 iter num: 7698
Paras: 1.99955 1 -0.999097 para diff norm: 1.01068e-06 iter num: 7699
Paras: 1.99955 1 -0.999098 para diff norm: 1.00967e-06 iter num: 7700
Paras: 1.99955 1 -0.999099 para diff norm: 1.00866e-06 iter num: 7701
Paras: 1.99955 1 -0.9991 para diff norm: 1.00765e-06 iter num: 7702
Paras: 1.99955 1 -0.999101 para diff norm: 1.00664e-06 iter num: 7703
Paras: 1.99955 1 -0.999101 para diff norm: 1.00564e-06 iter num: 7704
Paras: 1.99955 1 -0.999102 para diff norm: 1.00463e-06 iter num: 7705
Paras: 1.99955 1 -0.999103 para diff norm: 1.00363e-06 iter num: 7706
Paras: 1.99955 1 -0.999104 para diff norm: 1.00262e-06 iter num: 7707
Paras: 1.99955 1 -0.999105 para diff norm: 1.00162e-06 iter num: 7708
Paras: 1.99955 1 -0.999106 para diff norm: 1.00062e-06 iter num: 7709
Paras: 1.99955 1 -0.999107 para diff norm: 9.99617e-07 iter num: 7710
pass
solution:
1.99955
1
-0.999107
Golden Solution:
2
1
-1
Press any key to continue . . .

```

对批量梯度下降法和随机梯度下降法的总结：

批量梯度下降---最小化所有训练样本的损失函数，使得最终求解的是全局的最优解，即求解的参数是使得风险函数最小，但是对于大规模样本问题效率低下。

随机梯度下降---最小化每条样本的损失函数，虽然不是每次迭代得到的损失函数都向着全局最优方向，但是大的整体的方向是向全局最优解的，最终的结果往往是在全局最优解附近，适用于大规模训练样本情况。

从实验数据来看，批量梯度下降法收敛到的是全局最优值，而随机梯度下降法收敛到最优值附件的地方。随机梯度下降法的好处是收敛远快于批量梯度下降法。

$$\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = 2X^T X$$

$$X(n+1) = X(n) - f(X(n))/f'(X(n))$$

```

MatrixXd Iteration::BathGradDescent(MatrixXd paras, int iterator_num)
{
    int rows = m_input_data.rows();
    int cols = m_input_data.cols();
    MatrixXd init_paras = paras;
    if (m_input_data.cols() == paras.rows())
    {

        MatrixXd grad = (1.0 / rows)*m_input_data.transpose()*(m_output_data - m_input_data*init_paras);
        paras += m_learn_rate*grad;
    }
    else
    {
        //error
    }
    return paras;
}

MatrixXd Iteration::StocGradDescent(MatrixXd paras, int index)
{
    int rows = m_input_data.rows();
    int cols = m_input_data.cols();
    MatrixXd input_data_i(1,cols);
    MatrixXd output_data_i(1, 1);
    output_data_i(0, 0) = m_output_data(index,0);

    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        input_data_i(0, i) = m_input_data(index, i);
    }

    if (m_input_data.cols() == paras.rows())
    {
        MatrixXd grad = (1.0 / rows) * input_data_i.transpose()*(input_data_i*paras - output_data_i);
        paras = paras - grad;
    }
    else
    {
        //error
    }
    return paras;
}

```

由于牛顿法是基于当前位置的切线来确定下一次的位置，所以牛顿法又被很形象地称为是“切线法”。牛顿法的搜索路径（二维情况）如下图所示：

牛顿法搜索动态示例图：

牛顿法和拟牛顿法 (Newton's method &Quasi-Newton methods)

1)牛顿法 (Newton's method)

牛顿法是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数 $f(x)$ 的泰勒级数的前面几项来寻找方程 $f(x) = 0$ 的根。牛顿法最大的特点就在于它的收敛速度很快。¹

步骤：

首先，选择一个接近函数 $f(x)$ 零点的 x_0 ，计算相应的计算相应的 $f(x_0)$ 和切线斜率 $f'(x_0)$ 。然后计算穿过点 $(x_0, f(x_0))$ 并且斜率为 $f'(x_0)$ 的直线和 x 轴的交点的 x 轴坐标，也就是如下方程：

$$x * f'(x_0) + f(x_0) - x_0 * f'(x_0) = 0$$

我们将新求得的点的 x 坐标命名为 x_1 ，通常 x_1 会比 x_0 更接近方程 $f(x) = 0$ 的解。因此我们现在可以利用 x_1 开始下一轮迭代。迭代公式可化简为如下所示：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

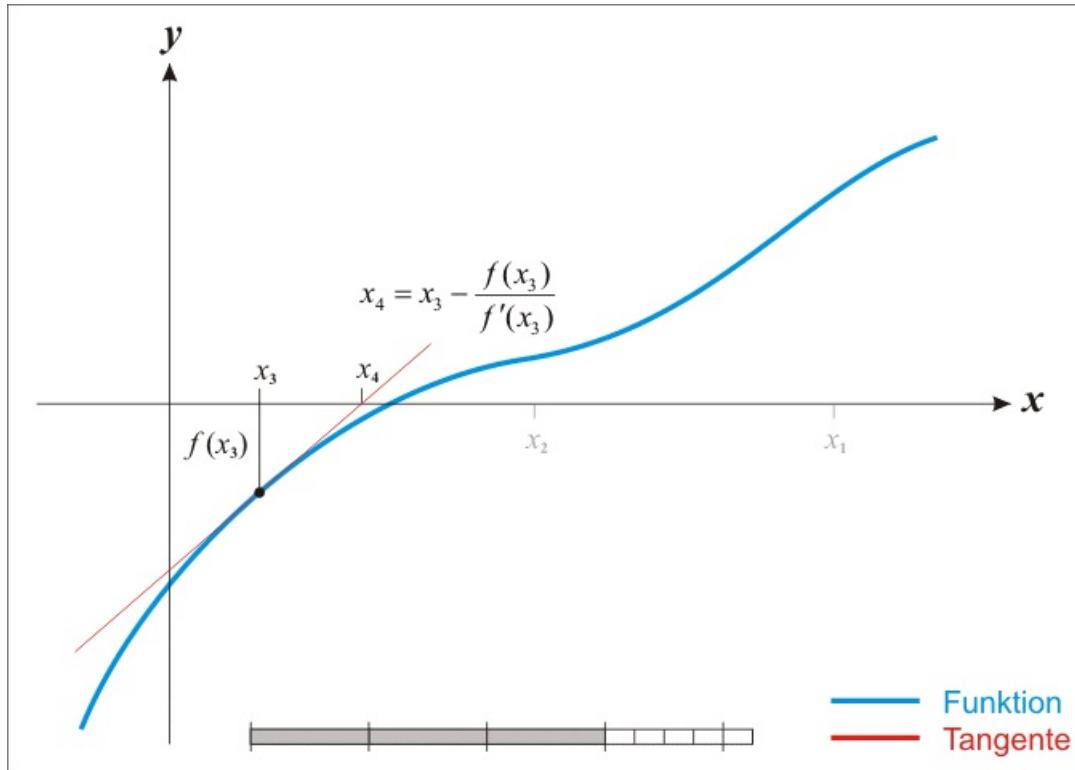
$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \frac{1}{1}$$

如果 X 是向量，则可以写成向量形式：

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \frac{1}{f'}$$

如果X是向量，则可以写成向量形式：

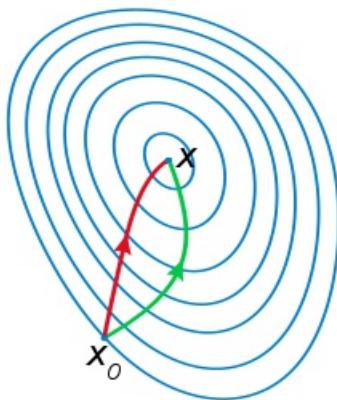
已经证明，如果 $f'(x)$ 是连续的，并且待求的零点 x 是孤立的，那么在零点 x 周围存在一个区域，只要初始值 x_0 位于这个邻近区域内，那么牛顿法必定收敛。并且，如果 $f'(x)$ 不为0，那么牛顿法将具有平方收敛的性能。粗略的说，这意味着每迭代一次，牛顿法结果的有效数字将增加一倍。下图为一个牛顿法执行过程的例子。



关于牛顿法和梯度下降法的效率对比：

从本质上讲，牛顿法是二阶收敛，梯度下降是一阶收敛，所以牛顿法就更快。如果更通俗地说的话，比如你想找一条最短的路径走到一个盆地的最底部，梯度下降法每次只从你当前所处位置选一个坡度最大的方向走一步，牛顿法在选择方向时，不仅会考虑坡度是否够大，还会考虑你走了一步之后，坡度是否会变得更大。所以，可以说牛顿法比梯度下降法看得更远一点，能更快地走到最底部。（牛顿法目光更加长远，所以少走弯路；相对而言，梯度下降法只考虑了局部的最优，没有全局思想。）

根据wiki上的解释，从几何上说，牛顿法就是用一个二次曲面去拟合你当前所处位置的局部曲面，而梯度下降法是用一个平面去拟合当前的局部曲面，通常情况下，二次曲面的拟合会比平面更好，所以牛顿法选择的下降路径会更符合真实的最优下降路径。



注：红色的牛顿法的迭代路径，绿色的是梯度下降法的迭代路径。

牛顿法的优缺点总结：

优点：二阶收敛，收敛速度快；

拟牛顿法是求解非线性优化问题最有效的方法之一，于20世纪50年代由美国Argonne国家实验室的物理学家W.C.Davidon所提出来。Davidon设计的这种算法在当时看来是非线性优化领域最具创造性的发明之一。不久R. Fletcher和M. J. D. Powell证实了这种新的算法远比其他方法快速和可靠，使得非线性优化这门学科在一夜之间突飞猛进。

拟牛顿法的本质思想是改善牛顿法每次需要求解复杂的Hessian矩阵的逆矩阵的缺陷，它使用正定矩阵来近似Hessian矩阵的逆，从而简化了运算的复杂度。拟牛顿法和最速下降法一样只要求每一步迭代时知道目标函数的梯度。通过测量梯度的变化，构造一个目标函数的模型使之足以产生超线性收敛性。这类方法大大优于最速下降法，尤其对于困难的问题。另外，因为拟牛顿法不需要二阶导数的信息，所以有时比牛顿法更为有效。如今，优化软件中包含了大量的拟牛顿算法用来解决无约束、约束、和大规模的优化问题。

具体步骤：

拟牛顿法的基本思想如下。首先构造目标函数在当前迭代 x_k 的二次模型：

$$m_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{p^T B_k p}{2}$$

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

这里 B_k 是一个对称正定矩阵，于是我们取这个二次模型的最优解作为搜索方向，并且得到新的迭代点：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

其中我们要求步长 α_k 满足Wolfe条件。这样的迭代与牛顿法类似，区别就在于用近似的Hesse矩阵 B_k 代替真实的Hesse矩阵。所以拟牛顿法最关键的地方就是每一步迭代中矩阵 B_k 的更新。现在假设得到一个新的迭代 x_{k+1} ，并得到一个新的二次模型：

这个公式被称为割线方程。常用的拟牛顿法有DFP算法和BFGS算法。

[最优化方法：牛顿迭代法和拟牛顿迭代法](#)

梯度下降法

把损失函数展开到一阶。

$$\blacksquare f(x + \alpha \mathbf{d}) = f(x_0) + \alpha f'(x_0) \mathbf{d} + O(\alpha^2)$$

$$x_{t+1} = x_t - \alpha f'(x_t),$$

[牛顿法](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method_in_optimization)

把cost function进行展开到二阶：

$$\blacksquare f(x_{t+1}) = f(x_t) + g(x_{t+1} - x_t) + \frac{1}{2}(x_{t+1} - x_t)^T H(x_{t+1} - x_t)$$

求导， $\frac{\partial f}{\partial x_t} = g + H(x_{t+1} - x_t)$ ，让导数为0就有

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - H^{-1}g$$

要是 H 是正定的，上面的就是凸函数，也就一定有了最小值。可惜 H 不一定是正定的，这就引导出了下面的方法

高斯-牛顿法

cost function可以表示成残差的形式：

$$\blacksquare L(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

根据牛顿法：

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - H^{-1}g,$$

梯度表示为：

$$\blacksquare g_j = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

对方程(4.9)求二阶导，我们可以得到Hessian矩阵：

$$\blacksquare H_{jk} = 2 \sum_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

当残差 r_i 很小的时候，我们就可以去掉最后一项，因此

$$\blacksquare H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With} \quad J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

这样Hessian就是半正定了。

因此参数迭代公式(4.10)可以写成：

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J)^{-1} J^T r,$$

Levenberg-Marquardt

方法用于求解非线性最小二乘问题，结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。

其主要改变是在Hessian阵中加入对角项，加这一样可以保证Hessian阵是正定的。当然，这是一种L2正则化方式。

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (H + \lambda I_n)^{-1}g,$$

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda I_n)^{-1} J^T r$$

L-M算法的不足点。

当 λ 很大时， $J^T J + \lambda I_n$ 根本没用，Marquardt为了让梯度小的方向移动的快一些，来防止小梯度方向的收敛，把中间的单位矩阵换成了 $\text{diag}(J^T J)$ ，

高斯-牛顿法

cost function可以表示成残差的形式:

$$\blacksquare L(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

根据牛顿法:

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - H^{-1}g,$$

梯度表示为:

$$\blacksquare g_j = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

对方程(4.9)求二阶导, 我们可以得到Hessian矩阵:

$$\blacksquare H_{jk} = 2 \sum_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

当残差 r_i 很小的时候, 我们就可以去掉最后一项, 因此

$$\blacksquare H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With } J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

这样Hessian就是半正定了。

因此参数迭代公式(4.10)可以写成:

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J)^{-1} J^T r,$$

Levenberg-Marquardt

方法用于求解非线性最小二乘问题, 结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。

其主要改变是在Hessian阵中加入对角线项, 加这一样可以保证Hessian阵是正定的。当然, 这是一种L2正则化方式。

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda I_n)^{-1} J^T r$$

L-M算法的不足点。

当 λ 很大时, $J^T J + \lambda I_n$ 根本没用, Marquardt为了让梯度小的方向移动的快一些, 来防止小梯度方向的收敛, 把中间的单位矩阵换成了 $\text{diag}(J^T J)$, 因此迭代变成:

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda \text{diag}(J^T J))^{-1} J^T r$$

阻尼项(damping parameter) λ 的选择, Marquardt 推荐一个初始值 λ_0 与因子 $v > 1$, 开始时, $\lambda = \lambda_0$, 然后计算cost functions, 第二次计算 $\lambda = \lambda_0/v$,

如果两者cost function都比初始点高, 然后我们就增大阻尼项, 通过乘以 v , 直到我们发现当 $\lambda = \lambda_0 v^k$ 时, cost function下降。

如果使用 $\lambda = \lambda_0/v$ 使得cost function下降, 然后我们就把 λ_0/v 作为新的 λ

当 $\lambda = 0$ 时, 就是高斯-牛顿法, 当 λ 趋于无穷时, 就是梯度下降法。如果使用 λ/v 没有使损失函数下降, 使用 λ 导致损失函数下降, 那么我们就继续使用 λ 做为阻尼项。

归一化的残差

如果我们假设数据中每一点的贡献是等权重, 因此, 我们有必要对每一项残差加一个权重, 来归一化每一项残差。因此公式(4-9)可以变成, cost function可以表示成残差的形式:

$$\blacksquare L(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i(x)^2 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i^2} (y_i - f_i(x_i))^2$$

此时, Jacobia变成

$$\blacksquare H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With } J_{ij} = y_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$$\blacksquare J_S = \Sigma J, \Sigma_{ij} = \frac{1}{y_i^2} \delta_{ij}$$

L2正则化与Levenberg-Marquardt算法

我们在cost function加上L2正则项

$$\blacksquare L(\beta) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

可以表示成:

$$\blacksquare L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T \nabla_{\beta} L(\beta_0) + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H (\beta - \beta_0) + \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

求一阶导数:

$$\blacksquare L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T g + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H (\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

令其为0:

$$\blacksquare \frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = g + H(\beta - \beta_0) + \lambda \beta = 0$$

我们在cost function加上L2正则项

$$\blacksquare L(\beta) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

可以表示成：

$$\blacksquare L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T \nabla_{\beta} L(\beta_0) + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^T H(\beta - \beta_0) + \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

求一阶导数：

$$\blacksquare L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T g + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^T H(\beta - \beta_0) + \frac{1}{2}\lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

令其为0：

$$\blacksquare \frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = g + H(\beta - \beta_0) + \lambda \beta = 0$$

就得到：

$$\blacksquare \beta = (H + \lambda I_n)^{-1} H \beta_0 - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

牛顿法和拟牛顿法 (Newton's method & Quasi-Newton methods)

1) 牛顿法 (Newton's method)

牛顿法是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数 $f(x)$ 的泰勒级数的前面几项来寻找方程 $f(x) = 0$ 的根。牛顿法最大的特点就在它的收敛速度很快。¹

步骤：

首先，选择一个接近函数 $f(x)$ 零点的 x_0 ，计算相应的 $f(x_0)$ 和切线斜率 $f'(x_0)$ 。然后计算穿过点 $(x_0, f(x_0))$ 并且斜率为 $f'(x_0)$ 的直线和 x 轴的交点的 x 轴坐标，也就是如下方程：

$$x * f'(x_0) + f(x_0) - x_0 * f'(x_0) = 0$$

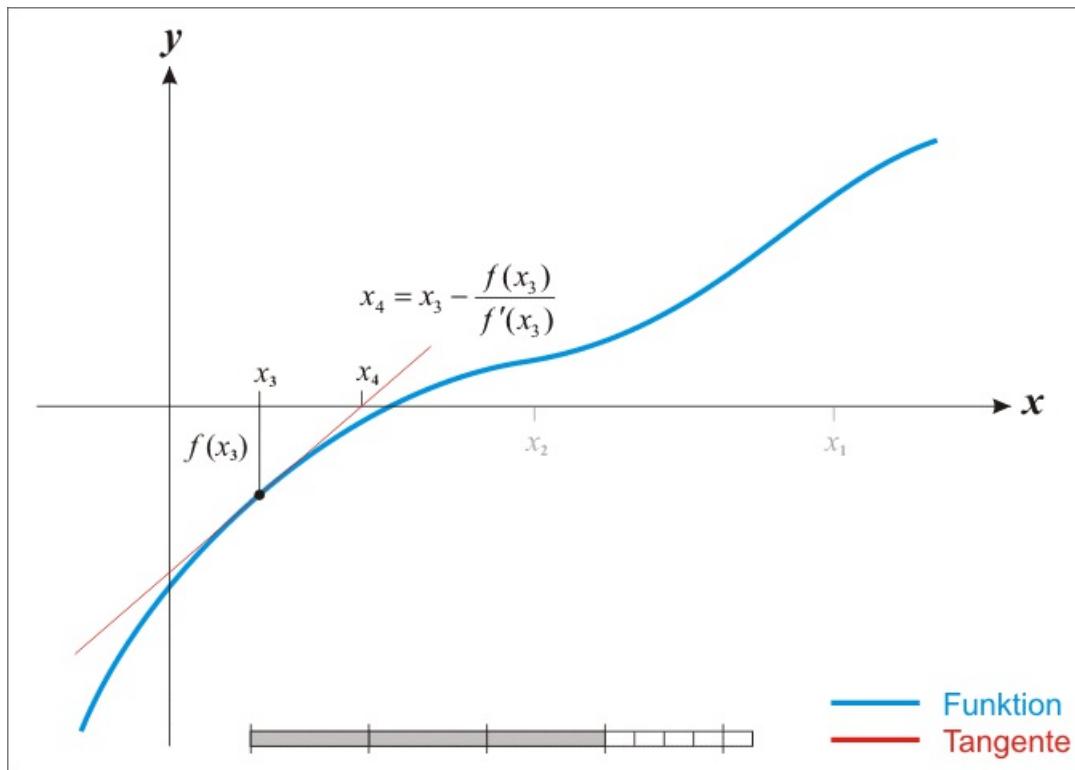
我们将新求得的点的 x 坐标命名为 x_1 ，通常 x_1 会比 x_0 更接近方程 $f(x) = 0$ 的解。因此我们现在可以利用 x_1 开始下一轮迭代。迭代公式可化简为如下所示：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \frac{1}{\mathbf{T}}$$

如果 X 是向量，则可以写成向量形式：

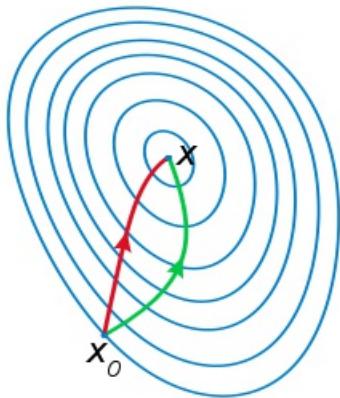
已经证明，如果 $f'(x)$ 是连续的，并且待求的零点 x 是孤立的，那么在零点 x 周围存在一个区域，只要初始值 x_0 位于这个邻近区域内，那么牛顿法必定收敛。并且，如果 $f'(x)$ 不为 0，那么牛顿法将具有平方收敛的性能。粗略的说，这意味着每迭代一次，牛顿法结果的有效数字将增加一倍。下图为一个牛顿法执行过程的例子。



关于牛顿法和梯度下降法的效率对比：

从本质上讲，牛顿法是二阶收敛，梯度下降是一阶收敛，所以牛顿法就更快。如果更通俗地说的话，比如你想找一条最短的路径走到一个盆地的最底部，梯度下降法每次只从你当前所处位置选一个坡度最大的方向走一步，牛顿法在选择方向时，不仅会考虑坡度是否够大，还会考虑你走了一步之后，坡度是否会变得更大。所以，可以说牛顿法比梯度下降法看得更远一点，能更快地走到最底部。（牛顿法目光更加长远，所以少走弯路；相对而言，梯度下降法只考虑了局部的最优，没有全局思想。）

根据 wiki 上的解释，从几何上说，牛顿法就是用一个二次曲面去拟合你当前所处位置的局部曲面，而梯度下降法是用一个平面去拟合当前的局部曲面，通常情况下，二次曲面的拟合会比平面更好，所以牛顿法选择的下降路径会更符合真实的最优下降路径。



注: 红色的牛顿法的迭代路径, 绿色的是梯度下降法的迭代路径。

牛顿法的优缺点总结:

优点: 二阶收敛, 收敛速度快;

缺点: 牛顿法是一种迭代算法, 每一步都要求解目标函数的Hessian矩阵的逆矩阵, 计算比较复杂。

2) 拟牛顿法(Quasi-Newton Methods)

拟牛顿法是求解非线性优化问题最有效的方法之一, 于20世纪50年代由美国Argonne国家实验室的物理学家W.C.Davidon所提出来。Davidon设计的这种算法在当时看来是非线性优化领域最具创造性的发明之一。不久R. Fletcher和M. J. D. Powell证实了这种新的算法远比其他方法快速和可靠, 使得非线性优化这门学科在一夜之间突飞猛进。

拟牛顿法的本质思想是改善牛顿法每次都要求解复杂的Hessian矩阵的逆矩阵的缺陷, 它使用正定矩阵来近似Hessian矩阵的逆, 从而简化了运算的复杂度。拟牛顿法和最速下降法一样只要求每一步迭代时知道目标函数的梯度。通过测量梯度的变化, 构造一个目标函数的模型使之足以产生超线性收敛性。这类方法大大优于最速下降法, 尤其对于困难的问题。另外, 因为拟牛顿法不需要二阶导数的信息, 所以有时比牛顿法更为有效。如今, 优化软件中包含了大量的拟牛顿算法用来解决无约束, 约束, 和大规模的优化问题。

具体步骤:

拟牛顿法的基本思想如下。首先构造目标函数在当前迭代 x_k 的二次模型:

$$m_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{p^T B_k p}{2}$$

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

这里 B_k 是一个对称正定矩阵, 于是我们取这个二次模型的最优解作为搜索方向, 并且得到新的迭代点:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

其中我们要求步长 α_k 满足Wolfe条件。这样的迭代与牛顿法类似, 区别就在于用近似的Hesse矩阵 B_k 代替真实的Hesse矩阵。所以拟牛顿法最关键的地方就是每一步迭代中矩阵 B_k 的更新。现在假设得到一个新的迭代 x_{k+1} , 并得到一个新的二次模型:

这个公式被称为割线方程。常用的拟牛顿法有DFP算法和BFGS算法。

[最优化方法:牛顿迭代法和拟牛顿迭代法](#)

Levenberg-Marquardt算法

Levenberg-Marquardt

方法用于求解非线性最小二乘问题，结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。

其主要改变是在Hessian阵中加入对角项,加这一样可以保证Hessian阵是正定的。当然,这是一种L2正则化方式。

$$x_{t+1} = x_t - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda I_n)^{-1} J^T r$$

L-M算法的不足点。

当 λ 很大时, $J^T J + \lambda I_n$ 根本没用, Marquardt为了让梯度小的方向移动的快一些, 来防止小梯度方向的收敛, 把中间的单位矩阵换成了 $diag(J^T J)$, 因此迭代变成:

$$x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda diag(J^T J))^{-1} J^T r$$

阻尼项(damping parameter) λ 的选择, Marquardt 推荐一个初始值 λ_0 与因子 $v > 1$, 开始时, $\lambda = \lambda_0$, 然后计算 cost functions, 第二次计算 $\lambda = \lambda_0/v$,

如果两者cost function都比初始点高, 然后我们就增大阻尼项, 通过乘以v, 直到我们发现当 $\lambda = \lambda_0 v^k$ 时, cost function下降。

如果使用 $\lambda = \lambda_0/v$ 使得 cost function 下降, 然后我们就把 λ_0/v 作为新的 λ

当 $\lambda = 0$ 时, 就是高斯-牛顿法, 当 λ 趋于无穷时, 就是梯度下降法。如果使用 λ/v 没有使损失函数下降, 使用 λ 导致损失函数下降, 那么我们就继续使用 λ 做为阻尼项。

```
k := 0; x := x0; v := 2; A := J(x)^T J(x)g := J(x)^T f(x)
u := τ * max(aii)
found := (||g||∞ ≤ ε1)
while(not found) and(k < kmax)
    k := k + 1; solve- > (A + uI)hlm = -g
    if ||hlm|| ≤ ε(||x|| + ε2)
        found := true
    else :
        xnew := x + hlm
        ρ := (F(x) - F(x + hdl)/(L(0) - L(hdl)))
        if ρ ≥ 0
            x := xnew; g := J(x)Tf(x)
            A := J(x)TJ(x)g := J(x)Tf(x)
            found := (||g||∞ ≤ ε1)
            u := u * max(1/3, 1 - (2ρ - 1)3); v := 2
        else
```

```
def LM_Solver(self):
    init_p = 0.5 * np.ones((2, 1))
    init_p[0, 0] = 2.0
    init_p[1, 0] = 1.0
    epsilon_1 = 1e-15
    epsilon_2 = 1e-15
    epsilon_3 = 1e-15
    alpha = 1
    cost_history = np.zeros((self.training_steps, 3))
    Jaco = self.Jacobian(init_p)
    Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
    resi = self.residual(init_p)
    m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)
    cost_old = np.dot(resi.transpose(), resi)
    epoch = -1
    train_stop = -1
    miu = Hessian.max()
    lamda_v = 2

    matrix_I = np.identity(Hessian.shape[0])
    while epoch < self.training_steps - 1 and train_stop < 0:
        epoch += 1
        print "Epoch: ", epoch
        go_next_epoch = -1

        while go_next_epoch < 0:
```

```

sigma_p = np.dot(np.linalg.inv(Hessian + miu*matrix_I), m_g)
square_g = np.linalg.norm(sigma_p)
if square_g <= epsilon_2*np.linalg.norm(init_p):
    train_stop = 1
    break
else:
    new_p = init_p + sigma_p
    resi_new = self.residual(new_p)
    cost_new = np.dot(resi_new.transpose(), resi_new)
    frac = np.dot(sigma_p.transpose(), miu* sigma_p + m_g)
    rou = (cost_old - cost_new) / frac
    if rou > 0:
        go_next_epoch = 1
        init_p = new_p
        Jaco = self.Jacobian(init_p)
        Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
        resi = self.residual(init_p)
        m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)
        if (np.abs(m_g)).max < epsilon_1:
            train_stop = 1
            break
    miu *= max(1.0 / 3.0, 1 - pow(2 * rou - 1, 3))
    lamda_v = 2
    print init_p.transpose(), miu, cost_new
    cost_history[epoch, 0] = cost_new
    cost_history[epoch, 1] = miu
    cost_history[epoch, 2] = np.linalg.norm(m_g)
    cost_old = cost_new
else:
    miu *= lamda_v
    # lamda_miu *= 0
    lamda_v *= 2
return cost_history, init_p

```

线性搜索与Armijo准则

符号约定：

■ $g_k : \nabla f(x_k)$, 即目标函数关于k次迭代值 x_k 的导数

■ $G_k : G(x_k) = \nabla^2 f(x_k)$, 即Hessian矩阵

■ d_k : 第k次迭代的步长因子, 在最速下降算法中, 有 $d_k = -g_k$

■ α_k : 第k次迭代的步长因子, 有 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

在精确线性搜索中, 步长因子 α_k 由下面的因子确定:

■ $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$

而对于非精确线性搜索, 选取的 α_k 只要使得目标函数f得到可接受的下降量, 即:

■ $\Delta f(x_k) = f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k)$

Armijo 准则用于非精确线性搜索中步长因子 α 的确定, 内容如下:

Armijo 准则:

已知当前位置 x_k 和优化方向 d_k , 参数 $\beta \in (0, 1), \delta \in (0, 0.5)$. 令步长因子

■ $\alpha_k = \beta^{m_k}$, 其中 m_k 为满足下列不等式的最小非负整数m:

■ $f(x_k + \beta^m d_k) \leq f(x_k) + \delta \beta^m g_k^T d_k$

由此确定下一个位置 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

对于梯度上升, 上面的方程变成:

■ $f(x_k - \beta^m d_k) \geq f(x_k) - \delta \beta^m g_k^T d_k$

由此确定下一个位置 $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$

Quasi-Newton methods

BFGS

我们知道, 在牛顿法中, 我们需要求解二阶导数矩阵-Hessian阵, 当变量很多时, 求解Hessian阵势比较费时间的, Quasi-Newton法主要是在构造Hessian阵上下功夫, 它是通过构造一个近似的Hessian阵, 或者Hessian阵的逆, 而不是解析求解或者利用差分法来求解这个Hessian阵。构造的Hessian阵通过迭代而改变。

比较出名的Quasi-Newton方法有BFGS(以Charles George Broyden, Roger Fletcher, Donald Goldfarb and David Shanno命名)

在牛顿法中, k步搜寻步长与方向是 p_k , 满足下面方程

■ $B_k p_k = -\nabla f(x_k)$

■ B_k 是近似的Hessian阵。下面我们讨论 B_k 如何变化,

我们要求 B_k 的更新满足quasi-Netwon条件

■ $B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$

这个条件就是简单的求 $f(x)$ 的二阶导数。

令:

■ $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k), s_k = x_{k+1} - x_k$, 因此 ■ B_{k+1} 满足 $B_{k+1}s_k = y_k$

这就是割线方程(the secant equation), The curvature condition $s_k^T y_k > 0$ 需要满足。

k 步的Hessian阵以如下方式更新,

■ $B_{k+1} = B_k + U_k + V_k$

为了保持 B_{k+1} 的正定性以及对称性。 B_{k+1} 可以取如下形式:

■ $B_{k+1} = B_k + \alpha uu^T + \beta vv^T$

选择 $u = y_k, v = B_k s_k$, 为了满足割线方程(the secant condition), 我们得到:

■ $\alpha = \frac{1}{y_k^T s_k}$

■ $\beta = \frac{1}{s_k^T B_k s_k}$

最终我们得到Hessian阵的更新方程:

■ $B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k^T}{s_k^T B_k s_k}$

利用 Sherman–Morrison formula,

■ $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$

其中 A 是可逆方阵, $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$

可以方便的得到 B_{k+1} 的逆。

■ $B_{k+1}^{-1} = (I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k}) B_k^{-1} (1 - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}) + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}$

■ $B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{(s_k^T y_k + y_k^T B_k^{-1} y_k)(s_k s_k^T)}{(s_k^T y_k)^2} - \frac{B_k^{-1} y_k s_k^T + s_k y_k^T B_k^{-1}}{s_k^T y_k}$

DFP

参考 DFP的矫正公式如下:

■ $H_{k+1} = H_k + \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}$

当采用精确线搜索时, 矩阵序列 H_k 的正定新条件 $s_k^T y_k > 0$ 可以被满足。但对于Armijo搜索准则来说, 不能满足这一条件, 需要做如下修正:

■ $H_{k+1} = H_k - s_k^T y_k \leq 0$

■ $H_{k+1} = H_k + \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} - s_k^T y_k > 0$

Broyden族算法

之前BFGS和DFP矫正都是由 y_k 和 $B_k s_k$ (或者 s_k 和 $H_k y_k$)组成的秩2矩阵。而Droyden族算法采用了BFGS和DFP校正公式的凸组合, 如下:

■ $H_{k+1}^\phi = \phi_k H_{k+1}^{BFGS} + (1 - \phi_k) H_{k+1}^{DFP} = H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}$ 其中 $\phi_k \in [0, 1]$, v_k 由下式定义:

■ $v_k = \sqrt{\frac{s_k^T H_k y_k}{y_k^T H_k y_k}} (\frac{s_k}{y_k^T s_k} - \frac{H_k y_k}{y_k^T H_k y_k})$

Gauss-Netwon方法

对于函数 $f(x)$ 的小邻域展开

$$\blacksquare f(x+h) \simeq l(h) \equiv f(x) + J(x)h$$

$$\blacksquare F(x+h) \simeq L(h) \equiv \frac{1}{2}l(h)^T l(h) = \frac{1}{2}f^T f + h^T J^T f + \frac{1}{2}h^T J^T J h$$

我们需要选择步长 h_{gn} 来最小化 $L(h)$

$$\blacksquare h_{gn} = \operatorname{argmin}_h L(h)$$

$$\blacksquare (J^T J)h_{gn} = -J^T f$$

信赖域方法

Powell's Dog Leg Method是一种信赖域方法

在Gauss-Netwon迭代中

$$\blacksquare J(x)h \simeq -f(x)$$

最陡的方向由下面公式给出：

$$\blacksquare h_{sd} = -g = -J(x)^T f(x)$$

但是这只是给出了方向，而没有给出步长。

考虑线性模型

$$\blacksquare f(x + \alpha h_{sd}) \simeq f(x) + \alpha J(x)h_{sd}$$

$$\blacksquare F(x + \alpha h_{sd}) \simeq \frac{1}{2}||f(x) + \alpha J(x)h_{sd}||^2 = F(x) + \alpha h_{sd}^T J(x)^T f(x) + \frac{1}{2}\alpha^2 ||J(x)h_{sd}||^2$$

当 α 取如下值得时候，以上函数取最小值

$$\blacksquare \alpha = -\frac{h_{sd}^T J(x)^T f(x)}{||J(x)h_{sd}||^2} = \frac{||g||^2}{||J(x)h_{sd}||^2}$$

现在有两个步长的选择 $a = \alpha h_{sd}$ 以及 $b = h_{gn}$, Powell建议在信赖域半价是 Δ 的时候，步长可以如下选择

If $||h_{gn}|| \leq \Delta$, $h_{dl} = h_{gn}$

$\blacksquare \text{Elseif: } ||\alpha h_{sd}|| \geq \Delta, h_{dl} = (\Delta / ||h_{sd}||)h_{sd}$

else:

$$\blacksquare h_{dl} = \alpha h_{sd} + \beta(h_{gn} - \alpha h_{sd})$$

选择 β 使得 $||h_{dl}|| = \Delta$

在L-M算法中我们定义了增益因子，

$$\blacksquare \rho = (F(x) - F(x + h_{dl}) / (L(0) - L(h_{dl})))$$

其中 L 是线性模型

$$\blacksquare L(h) = \frac{1}{2}||f(x) + J(x)h||^2$$

在L-M我们通过 ρ 来控制阻尼因子，在dog-leg算法中，我们通过它来控制步长

Dog Leg Method

```

 $k := 0; x := x_0; \Delta := \Delta_0; g := J(x)^T f(x)$ 
 $found := (\|f(x)\|_\infty \leq \epsilon_3) \text{ or } (\|g\|_\infty \leq \epsilon_1)$ 
 $\text{while}(not found) \text{and}(k < k_{max})$ 
 $k := k + 1; \text{computer} \alpha \text{by}(2.4)$ 
 $h_{sd} := -\alpha g; \text{solve} J(x)h_{gn} \simeq -f(x)$ 
 $\text{computer} h_{dl} \text{by}(4.5)$ 
 $\text{if} \|h_{dl}\| \leq \epsilon(\|x\| + \epsilon_2)$ 
 $found := \text{true}$ 
 $\text{else} :$ 
 $x_{new} := x + h_{dl}$ 
 $\rho := (F(x) - F(x + h_{dl})) / (L(0) - L(h_{dl}))$ 
 $\text{if } \rho \geq 0$ 
 $x := x_{new}; g := J(x)^T f(x)$ 
 $found := (\|f(x)\|_\infty \leq \epsilon_3) \text{ or } (\|g\|_\infty \leq \epsilon_1)$ 
 $\text{if } \rho \geq 0.75$ 
 $\Delta := \max(\Delta, 3 * \|h_{dl}\|)$ 
 $\text{elseif } \rho < 0.25$ 
 $\Delta := \Delta / 2; found := (\Delta \leq \epsilon_2(\|x\| + \epsilon))$ 

```

```

def Dogleg_Solver(self):
    init_para = np.ones((2, 1))
    epsilon_1 = 1e-15
    epsilon_2 = 1e-15
    epsilon_3 = 1e-15
    alpha = 1
    cost_history = np.zeros((self.training_steps, 3))
    Jaco = self.Jacobian(init_para) //get Jacobian
    Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
    resi = self.residual(init_para)
    m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)
    cost_old = np.dot(resi.transpose(), resi)

    epoch = -1
    train_stop = -1
    delta = 0.01
    while epoch < self.training_steps - 1 and train_stop < 0:
        epoch += 1
        print "Epoch: ", epoch
        go_next_epoch = -1

        while go_next_epoch < 0:
            square_g = np.linalg.norm(m_g)
            square_Jg = np.linalg.norm(np.dot(Jaco, m_g))
            alpha = pow(square_g, 2) / pow(square_Jg, 2)

            h_sd = -alpha * m_g
            h_gn = np.dot(np.linalg.inv(Hessian), -m_g)
            norm_para = np.linalg.norm(init_para)

            ##calculate h_dl
            if np.linalg.norm(h_gn) <= delta:
                h_dl = h_gn
                hdl_type = 0
            elif np.linalg.norm(h_sd) >= delta:
                h_dl = (delta / np.linalg.norm(h_sd)) * h_sd
                hdl_type = 1
            else:
                beta = self._get_h_dl(h_sd, h_gn, delta)
                h_dl = h_sd + beta * (h_gn - h_sd)
                hdl_type = 2

            # #epsilon_2*norm_para:
            if np.linalg.norm(h_dl) < epsilon_2 * (norm_para + epsilon_2):
                train_stop = 1
                break
            else:
                para_0 = init_para + h_dl
                #cost_old = pow(np.linalg.norm(resi), 2)
                resi_new = self.residual(para_0)
                cost_new = np.dot(resi_new.transpose(), resi_new)
                #pow(np.linalg.norm(resi_new), 2)

```

```

    h_sub = h_sd - 0.5 * np.dot(Hessian, h_dl)
    #frac = np.dot(h_dl.transpose(), h_sub)
    if hdl_type == 0:
        frac = cost_new
    elif hdl_type == 1:
        frac = delta/(2*alpha)*(2*np.linalg.norm(alpha*m_g) - delta)
    else:
        frac = 0.5*alpha*pow(beta, 2)*pow(np.linalg.norm(alpha*m_g), 2)
        frac += beta*(2 - beta)*cost_new
    rou = (cost_old - cost_new) /frac
    if rou > 0:
        go_next_epoch = 1
        init_para = para_0
        Jaco = self.Jacobian(init_para)
        Hessian = np.dot(Jaco.transpose(), Jaco)
        resi = self.residual(init_para)
        m_g = np.dot(Jaco.transpose(), resi)

        cost_history[epoch, 0] = cost_new
        cost_history[epoch, 1] = delta
        cost_history[epoch, 2] = np.linalg.norm(m_g)
        print para_0.transpose(), cost_new, delta

        if (np.abs(m_g)).max() < epsilon_1 or (np.abs(resi_new)).max() < epsilon_3:
            train_stop = 1
            break
        if rou > 0.75:
            delta = max(delta, 3 * np.linalg.norm(h_dl))
        elif rou < 0.25:
            delta /= 2.0
            if delta < epsilon_2:
                break
    cost_old = cost_new
return cost_history, init_para

```

共轭梯度法

共轭梯度法(Conjugate Gradient)是介于最速下降法与牛顿法之间的一个方法, 它仅需要一阶导数信息, 但克服了最速下降法收敛慢的缺点, 同时又避免了牛顿法需要储存和计算Hesse矩阵并求逆的缺点, 共轭梯度法不仅是解决大型线性方程组最有用的方法之一, 也是解大型非线性优化问题最有效的算法之一。

向量共轭的定义:

若 \mathbf{A} 是正定对称阵, 若非0矢量 \mathbf{u}, \mathbf{v} 满足, $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = 0$, 则称矢量 \mathbf{u}, \mathbf{v} 是共轭的。

假设:

$P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$ 是一组基于 \mathbf{A} 的共轭矢量, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解 \mathbf{x}^* 可以表示为:

$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{p}_i$, 因此基于基矢量展开, 我们有:

$$\blacksquare \mathbf{Ax}^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{Ap}_i$$

左乘 \mathbf{P}_k^T :

$$\blacksquare \mathbf{P}_k^T \mathbf{Ax}^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{P}_k^T \mathbf{Ap}_i$$

代入: $\mathbf{P}_k^T \mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}, \mathbf{u}^T \mathbf{Av} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, 利用 $i! = k$ 有 $\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i \rangle_A = 0$ 就得到:

如果我们的小心的选择 \mathbf{p}_k , 为了获得解 \mathbf{x}^* 的一个好的近似, 我们并不需要所有的基向量。因此, 我们把共轭梯度算法当成一种迭代算法, 它也允许我们近似 n 很大, 以至于直接求解需要花费太多时间的系统。

我们给 \mathbf{x}_* 一个初始猜测值 \mathbf{x}_0 , 假设 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, 在求解的过程中, 我们需要一种标准来告诉我们是否我们的解更靠近真实的解 \mathbf{x}^* , 实际上, 求解 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 等价于求解如下二次函数的极小值:

$$\blacksquare f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{b},$$

他存在唯一的最小值, 因为他的二阶导是正定的:

$$\blacksquare D^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A},$$

解就是一阶导数等于0的地方

$$\blacksquare Df(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b},$$

假设第一个基矢 \mathbf{p}_0 就是 $f(x)$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 处的负梯度, 我们可以假设 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. 因此:

$$\blacksquare \mathbf{p}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0.$$

令 \mathbf{r}_0 表示第 k 步的残差:

$\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_k, \mathbf{r}_k$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ 处的负梯度。

为了让 \mathbf{p}_k 与前面的所有 \mathbf{p}_i 相互共轭, \mathbf{p}_k 可以如下构造:

$$\blacksquare \mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k - \sum_{i < k} \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{Ar}_k}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{Ap}_i} \mathbf{p}_i$$

沿着这个方向, 因此下一步的优化方向就是:

$$\blacksquare \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \text{ 满足:}$$

$$g'(\alpha_k = 0)$$

因此:

$$\blacksquare f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) =: g(\alpha_k),$$

$$\blacksquare \alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{b}}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{Ap}_k} = \frac{\mathbf{p}_k^T (\mathbf{r}_k + \mathbf{Ax}_k)}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{Ap}_k} = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{Ap}_k}$$

算法:

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$$

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{r}_0$$

$$k := 0$$

repeat:

$$\blacksquare \alpha_k := \mathbf{r}_0$$

$$\blacksquare \alpha_k := \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{Ap}_k}$$

$$\blacksquare \mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

$$\blacksquare \mathbf{r}_{k+1} := \mathbf{r}_k + \alpha_k \mathbf{Ap}_k$$

if r_{k+1} is sufficiently small, then exit loop.

$$\blacksquare \beta_k := \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

$\blacksquare p_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k p_k$
 $\blacksquare k := k + 1$

有约束最优化问题

有约束问题主要通过拉格朗日乘子与KKT乘子来转化为无约束优化问题。问题是的关键是，在什么条件下可以通过乘子法来把有约束优化问题转化成无约束优化问题，因为如果我们能把转化成无约束优化问题，则求解无约束优化问题的方法都可以派上用场了。

拉格朗日乘子法

Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

1. 先讨论一般带约束优化问题的数据描述
2. 然后引入其作用约束与不起作用约束的定义
3. 再引入正则点的定义
4. 接下来引入KKT条件 5. 针对局部极小问题，我们考虑优化函数的二阶导数问题。

一般形式的优化问题：

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中： $f: R^n \rightarrow R, \mathbf{h}: R^n \rightarrow R^m, m \leq n; \mathbf{g}: R^n \rightarrow R^p$ ；

针对这一问题，引入如下定义：

定义21.1. 对于一个不等式约束 $g_i(x) \leq 0$ ，如果在 x^* 处， $g_i(x^*) = 0$ ，那么称该不等式约束是 x^* 处的起作用约束。如果： $g_i(x^*) < 0$ ，那么称该不等式约束是 x^* 处的不起作用约束。

定义21.2. 设 \mathbf{x}^* 满足 $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$ ，设 $J(\mathbf{x}^*)$ 为起作用不等式约束下标集，

$$J(\mathbf{x}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

如果： $\nabla h_i(\mathbf{x}^*), \nabla g_j(\mathbf{x}^*), i \leq m, j \in J(\mathbf{x}^*)$

是线性无关的，则称 \mathbf{x}^* 是一个正则点。

KKT条件：某个点是局部极小点所满足的一阶必要条件。

定理：KKT条件，设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^1$ ，设 \mathbf{x}^* 是问题 $\mathbf{h} = \mathbf{0}, \mathbf{g} \leq \mathbf{0}$ 的一个正则点和局部极小点，那么必然存在 $\lambda^* \in R^m$ 和 $\mathbf{u}^* \in R^p$ 使得以下条件成立：

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^* \geq \mathbf{0} \\ & Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T \\ & \mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0 \end{aligned}$$

λ^* 为拉格朗日乘子向量， \mathbf{u}^* 是KKT乘子向量，其元素分别成为拉格朗日乘子，KKT乘子。

充分条件

上面讲了局部极小的必要条件，这里我们讨论局部极小的充分条件。然后我们就利用KKT条件去求不等式约束问题。

二阶充分必要条件；

定义如下矩阵：

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

$F(\mathbf{x})$ 是 f 在 \mathbf{x} 处的Hessian矩阵；

$$\lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \lambda_1 H_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m H_m(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = u_1 G_1(\mathbf{x}) + \dots + u_p G_p(\mathbf{x})$$

其中 $G_k(\mathbf{x})$ 是 g_k 处的Hessian矩阵。

起作用约束所定义曲面的切线空间： $T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}$ 。

定理：二阶必要条件：如果 \mathbf{x}^* 是上面讨论的优化问题的极小点，那么存在 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得：

1. $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$,
2. $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$
3. $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有 $y \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), y \neq 0$ ，都有 $y^T L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})y > 0$

定理：二阶充分条件：

假设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^2, \mathbf{x}^* \in R^n$ 是一个可行点，存在向量 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得：

4. $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$,
5. $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$
6. $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有 $\mathbf{y} \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, $\mathbf{y} \neq 0$, 都有 $\mathbf{y}^\top L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})\mathbf{y} > 0$

那么 \mathbf{x}^* 是优化问题

$$\blacksquare s.t. \quad \blacksquare \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\blacksquare s.t. \quad \blacksquare \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

的严格局部极小点,

$$T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}.$$

$$\text{其中: } \blacksquare J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = (j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0), \mathbf{u}^* > 0$$

最优化的优缺点及其改进方案

常见的损失函数

分类问题损失函数

y 是标签, f 是预测结果。

对于二分类问题 $Y = [-1, 1]$

0-1损失函数:

$$\blacksquare L_{0-1}(f, y) = 1_{fy \leq 0}$$

Hinge损失函数:

$$\blacksquare L_{hinge}(f, y) = \max(0, 1 - fy)$$

Logistic损失函数:

$$\blacksquare L_{logistic}(f, y) = \log_2(1 + \exp(-fy))$$

当预测值 $f \in [-1, 1]$ 时, 可以定义如下损失函数:

交叉熵(Cross Entropy):

$$\blacksquare L_{crossentropy} = -\log_2(\frac{1+fy}{2})$$

回归问题损失函数

对于回归问题, $Y=R$, 我们希望 $f(x_i, \theta) \approx y_i$, 最常用的损失函数是平方损失函数:

$$\blacksquare L_{square}(f, y) = (f - y)^2$$

平方损失函数对异常点惩罚很大, 因此对异常点比较敏感。为了解决这个问题, 引入了绝对损失函数:

$$\blacksquare L_{square}(f, y) = |f - y|$$

但是绝对损失函数在0点不可以求导。

一个方法是在0点进行函数光滑化也就是在0点附件用平方函数代替。 $\delta > 0$

$$\blacksquare L_{square}(f, y) = \sqrt{(f - y)^2 + \delta^2}$$

或者用Huber损失函数:

Huber损失函数:

$$\blacksquare L_{square}(f, y) = (f - y)^2, |f - y| > \delta$$

$$\blacksquare L_{square}(f, y) = 2\delta|f - y| - \delta^2, |f - y| > \delta$$

还得补充与思考文本处理, 信号处理中的损失函数。

机器学习中哪些是凸优化问题, 哪些是非凸优化问题

凸函数条件:Hessian矩阵为半正定。

逻辑回归, 线性回归, SVM是凸优化问题。PCA, 矩阵分解以及NN是非凸优化问题。

梯度下降

问题1: 怎样验证自己代码中梯度公式的正确性?

$$\blacksquare \left| \frac{L(\theta + hei) - L(\theta - hei)}{2h} - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \approx Mh^2$$

若 $M \leq 10^7$, 则:

$$\blacksquare \left| \frac{L(\theta + hei) - L(\theta - hei)}{2h} - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \leq h$$

因此取 $h = 10^{-7}$ 看, 看上式是否成立, 不成立则 $M \geq 10^7$, 则取 $h = 10^{-8}$, 看上式得值是否变为原来的 10^{-2} 。如果是则, 求导正确, 不是则求导错误。

问题2: 当数据量特别大的时候经典梯度下降法存在什么问题, 需要怎么改进?

因为经典的梯度下降是对整个训练集进行的，如果训练集特别大，每次更新要针对整个数据集，因此需要很大的计算力，计算很费时间。一般采用随机梯度下降法，每次训练一个数据。但是该方法很难收敛，会在极值点振荡，因此一般采用mini-batch Gradient Descent方法。一般batch的size m取2的整数次幂。

为了充分利用数据以及避免数据的特定顺序给算法收敛带来的印象，一般每次遍历数据前，对数据先随机排序，然后每次取m个数据，直到遍历所有数据。有必要再按新规则排序，重复以上步骤。

如何选择学习率 α ，为了加快学习速度与提高精度。一开始取大的学习速率，误差曲线进入平台期后，再减小学习速率做更精细的调整。

问题3：深度学习中常用的优化方法是随机梯度下降法，但是SGD偶尔也会失效，无法给出满意的训练结果，这是为什么？

当SGD遇到山谷的时候，由于沿山谷方向的梯度比较小，因此结果会在山谷方向来回移动，而不能像整体梯度下降一样能沿着山谷有一个确定方向的移动。其次是遇到平坦区域，有些方向的梯度接近于0，因此需要很长世间才能走出这片区域。

问题4：为了改进SGD，研究者都做了哪些改动？提出了哪些方法？他们各有哪些特点？

动量(Momentum)方法

为了解决SGD在山谷振荡，鞍点停滞的现象。我们引入了带动量的SGD。普通SGD是：

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta g_t$$

带动量的SGD公式是：

$$v_t = \gamma v_{t-1} + \eta g_t$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - v_t$$

通过 $0 < \gamma < 1$ ，能实现梯度的累积，也就是速度的累积，因此能更好的冲出山谷与平坦(平原)区域。

AdaGrad方法

惯性的获得是基于历史的，除了从过去的步伐中获得一股子冲劲，我们还想知道不同参数更新的步伐，这样，对于更新频率低的参数能加快更新步伐，而更新频率高的参数减小步伐。因此就有了AdaGrad方法，他采用“历史梯度平均和”来衡量不同参数的梯度的稀疏性。取值越小表明越稀疏。更新公式如下：

$$\theta_{t+1,i} = \theta_{t,i} - \frac{\eta}{\sqrt{\sum_{k=0}^t g_{k,i}^2 + \epsilon}} g_{t,i}$$

$\theta_{t+1,i}$ 表示t+1时刻，参数向量的第i个参数， $g_{k,i}$ 表示k时刻，参数向量的第i个方向。此外，分母的求和式实现了退火过程，意味着随着时间推移，学习速率越来越小，保证算法最终收敛。

Adam方法

Adam方法将惯性保持与环境感知这两个有点集合在一起。

通过记录梯度的一阶矩来保持惯性，通过记录二阶矩来实现环境感知能力。通过指数衰减平均技术来实现时间久远的梯度对当前平均值的贡献呈指数衰减。计算公式如下：

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2$$

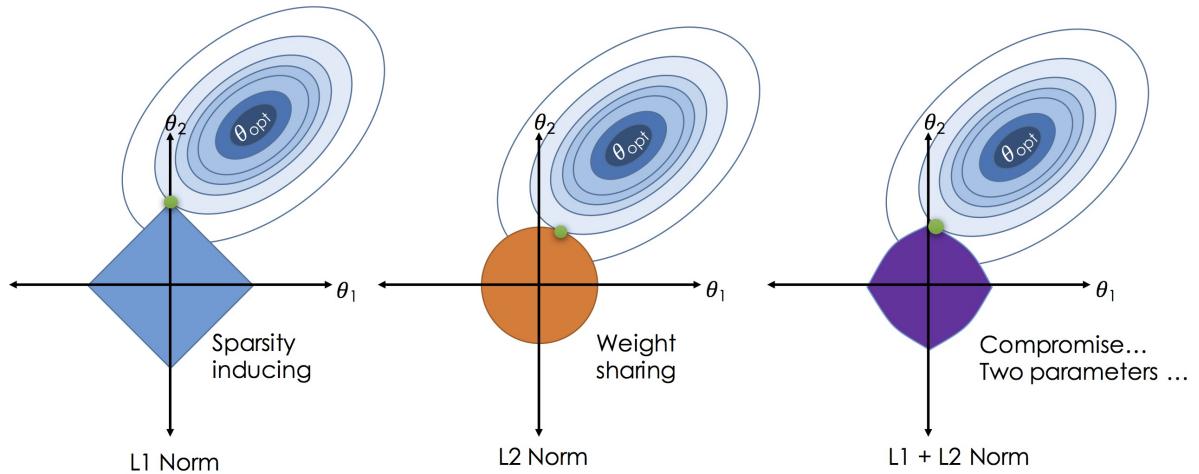
Adam更新公式：

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{\eta m_t}{\sqrt{v_t} + \epsilon}$$

其中： $\hat{m}_t = \frac{m_t}{1-\beta_1^t}$, $\hat{v}_t = \frac{v_t}{1-\beta_2^t}$

问题5：L1正则化使得模型参数具有稀疏性的原理是什么？

角度1：通过做等高线图



由图可知, L1更容易在轴上与等高线相交, 而L2更容易在两轴之间相交。其实加L1,L2正则就是加一个约束, 也就是带约束的优化问题, 通过这个约束, 我们就知道了解空间的限定范围。

角度2: 贝叶斯先验

L1正则化相当于对模型参数引入了拉普拉斯先验, L2正则化相当于对模型参数引入了高斯先验。因为拉普拉斯先验分布中, 参数取值为0的概率更高, 因此更容易产生稀疏性。而高斯先验分布只会让所有参数趋于0, 并且在趋于0的不同位置是等概率的, 因此不会让参数等于0。

优化收敛位置

参考知乎上面

对于N个参数的系统(神经网络), 对应的Hessian阵是N阶的, 我们假定其本征值的正负概率都是0.5. 因此, 要保证是局部最小值, 则Hessian正定, 意味着所有的本征值都为正。其概率是 $\frac{1}{2^N}$ 。同样, 是局部最大值, 则Hessian阵负定, 概率也为 $\frac{1}{2^N}$ 。因此, 最有可能的是本征值有正有负, 也就是鞍点的情形。但是即使是普通的鞍点, 函数不会震荡, 而是马上逃离。

实际的情形是, 函数收敛到了一个大的平坦区域, 其表现就是一阶导数很小, 以至于在训练结束的时候还没有逃离出这个平坦区域。那么, 我们得从数学上讨论这种平坦区域(平坦马鞍面)具有什么样的性质。可以看下面一个方程:

$$f(x, y) = \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}y^2$$

$$f_x = \alpha x; f_y = -\beta y.$$

假设 $\alpha > 0, \beta > 0$
(0, 0)点是唯一的鞍点。在x方向, 该点是局部最小值, 但在y方向, 是局部极大值, 如果 β 很小, 很小是它与学习率r相乘结果与1来说的。假设学习率是r一开始 $y = \Delta_0$, 则一次迭代后

$$\Delta_1 = \Delta_0 + r * \beta * \Delta_0 = (1 + r\beta)\Delta_0$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 + r * \beta * \Delta_1 = (1 + r\beta)\Delta_1$$

n次迭代后:

如果训练总的次数为N, $r\beta \leq \frac{1}{N}$, 那N次迭代之后 $(1 + r\beta)^N \Delta_0 \leq (1 + \frac{1}{N})^N \approx e\Delta_0 = 2.71828\Delta_0$, 这定量的给出了在训练结束的时候, 函数能多大程度的逃离(0, 0)点。

这个模型可以推广到N维情形。假设Hessian阵有N-K个本征值非负, K个小于零。

考虑通过平移后, 鞍点处于(0, 0...0)点附近的二阶展开:

$$L(X) = L(0) + \sum_{i=K+1}^{i=N} \frac{\alpha_i}{2} x_i^2 - \sum_{i=1}^{i=K} \frac{\alpha_i}{2} x_i^2$$

如果满足所有的 $\alpha_i \ll 1, i \in [1, K]$, 这时候, 函数会在很长时间内, 局域在鞍点附件。

可以考虑的时, 怎么通过设计Cost Function来避免产生这些超级马鞍面。

这些超级马鞍面的产生要考虑激活函数吗, 时候Relu比Sigmoid不容易产生这些马鞍面?

激活函数的作用

增加非线性, 增强学习能力

为啥使用收敛慢的(随机)梯度下降法

因为只需要计算一阶导数, 而不需要计算二阶, 因为几十万以上的参数, 计算二阶导数太费时间, 内存也是个问题(除非用L-BFGS)

SVD PCA

SVD 将矩阵分解成累加求和的形式, 其中每一项的系数即是原矩阵的奇异值。这些奇异值, 按之前的几何解释, 实际上就是空间超椭球各短轴的长度。现在想象二维平面中一个非常扁的椭圆(离心率非常高), 它的长轴远远长于短轴, 以至于整个椭圆看起来和一条线段没有什么区别。这时候, 如果将椭圆的短轴强行置为零, 从直观上看, 椭圆退化为线段的过程并不突兀。回到 SVD 分解当中, 较大的奇异值反映了矩阵本身的主要特征和信息; 较小的奇异值则如例中椭圆非常短的短轴, 几乎没有体现矩阵的特征和携带的信息。因此, 若我们将 SVD 分解中较小的奇异值强行置为零, 则相当于丢弃了矩阵中不重要的一部分信息。

因此, SVD 分解至少有两方面作用:

- 分析了解原矩阵的主要特征和携带的信息(取若干最大的奇异值), 这引出了主成分分析(PCA);
- 丢弃忽略原矩阵的次要特征和携带的次要信息(丢弃若干较小的奇异值), 这引出了信息有损压缩、矩阵低秩近似等话题。

项目背景

随着半导体工艺中，芯片中的尺寸越来越小，光学衍射效应越来越明显，单纯的几何光学（初中物理老师告诉你，光是直线传播的，这其实说的是，光是粒子，但光通过狭窄的缝隙会发生衍射效应，这时，光不是直线传播的了）以及不适用，要考虑光的衍射效应。光通过Musk就相当于一次傅里叶变化，从时域变到了频率域。再通过棱镜，又相当于一次傅里叶变换，从频率域变到时域。但棱镜的尺寸有限，因此只接收了低频波，因此，用图像处理的话来说，棱镜的作用就是一个低通滤波器。去掉了高频部分，因此投影到wafer（晶圆）上的图案不再菱角分明，而是在边界处会比较圆滑。

如果没有一些傅里叶光学的背景，你们听起来会比较费劲，但是如果你们有图像处理的背景的话，就记住把Musk上的图案刻蚀到晶圆上就是经历了两次傅里叶变换再加一个低通滤波器。

光通过单缝后，其频谱是连续的，但是经过周期性（结构）缝，其频谱就是离散的，如果为了节约棱镜的开支，就只能取很低的频谱。

光学建模是个逆问题（逆问题的例子，就是CT，通过收集到的信号来反推身体的内部结构）。（怎么把逆问题与深度学习，机器学习联系起来？），再通俗点，它实际上和机器学习，深度学习要处理的问题是一样的，就是求解一个模型，就是train一个model。正向过程就是你已经训练好了一个模型（取啥例子？），然后输入一张图，看它的分类是啥，这很容易，难得是，我有一堆分类好的图片，让你训练一个model。逆问题就是一个优化问题，因此就设计到一些优化算法，这时候考点就来了？有哪些优化算法，总结下，有两种，线性搜索方法（linear search）以及 trust region。但是对于这个求逆问题而言，是很复杂的，直接离散的话，参数基本在10的15次方以上，总之，这个求逆问题是很难的，即使求出来，也不会很准。因此，我们有两个研究的方向。直接通过光学图像（也就是将要刻蚀在wafer上的电路板）来反求印刷这张图像的模板（Musk），其实这个光刻就像拍照片，拍的物体（比如风景）就是Musk，wafer就相当于胶卷，wafer上的图像就相当于风景在胶卷上的投像。

第一个方向是，直接通过光学图像（也就是将要刻蚀在wafer上的电路板）来反求印刷这张图像的模板（Musk），我们的模型就是卷积网络，因为多层网络可以用来近似任何一个函数（通用近似定理（Universal approximation theorem，一译万能逼近定理））指的是：如果一个前馈神经网络具有线性输出层和至少一层隐藏层，只要给予网络足够数量的神经元，便可以实现以足够高精度来逼近任意一个在 R^n 的紧子集（Compact subset）上的连续函数。只要神经元足够多，再加一个激活函数），当然可以用来近似这个求逆过程。但是这条路风险很大，因此，我们有了第二条研究的路径，就是修正原有的物理模型，使得它更powerful，也就是说，我们仍然需要建立物理model，来进行求逆过程，得到一个物理的model，只是，这个model不是足够强大，会有一些缺陷，因此，我们想通过一个CNN来修正这个model，来让我们的模型更有效。这就是大致的背景。背景讲清楚了，我们就该讲我们是怎么做的了。

搭建GPU环境，装显卡驱动（显卡驱动，蓝屏），cuda，cudnn，但是发现不能使用apt-get install东西，重装了很多次系统，装了不同的ubuntu系统，从12.04到16.04的五个不同版本，折腾了一周。（因此因为公司的IP保护，无线网卡解决问题）我们一开始做了些尝试，用了CNN，VGG，遇到的问题（图像预处理，亚像素的偏离），数据集不够，因为真实数据都是机密（IP），不可以轻易拿到。自己去切割图像，通过有经验的人工来做分类。再通过翻转这些操作来增加数据集。此外，数据集也是很讲究的，你得保证同一数据集中的物理参数，焦距，偏振方向都是一致的，焦距不同，得到的图像模糊程度不同。很长一段时间，我们都在用用记忆卷积，反卷积的深度神经网络，都没发现很好的效果。后来使用了pre-trained model，因为我们的数据量少（30000张图），但是经过CNN处理过的图像，并不比没有处理的图像好，这就尴尬了，因此，我们一直加深网络。

线性与非线性方程组解的稳定性分析

最速下降法中, Hessian矩阵的条件数决定了系统的收敛速度。

线性方程组解的稳定性分析

系统解的稳定性定义成系统小的扰动对系统解的影响。.

Example 1:

$$\begin{bmatrix} 400 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$x_1 = -100, x_2 = -200$$

If we give small change to matrix A, change A_{11} from 400 to 401 then:

$$\begin{bmatrix} 401 & -201 \\ -800 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix}$$

This time the solution is:

$$x_1 = 40000, x_2 = 79800$$

ill-conditioned:

When the solution is highly sensitive to the values of the coefficient matrix A or the righthand side constant vector b, the equations are called to be ill-conditioned.

Condition Number

Let's linear equations:

$$\blacksquare Ax = b,$$

Let us investigate first, how a small change in the b vector changes the solution vector. x is the solution of the original system and let $x + \Delta x$ is the solution when b changes from b to $b + \Delta b$.

Then we can write:

$$\blacksquare A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

or $\blacksquare Ax + A\Delta x = b + \Delta b$

But because $Ax = b$, it follows that

$$\blacksquare A\Delta x = \Delta b$$

So: $\blacksquare \delta x = A^{-1} \Delta b$

Using the matrix norm properties:

$$\blacksquare \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

We can get:

$$\blacksquare \|A^{-1} \Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Also, we can get:

$$\blacksquare \|\Delta b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Using equations 2.5 and 2.6 we can get:

$$\blacksquare \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Let's define condition number as: $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

we can rewrite equation 2.7 as:

$$\blacksquare \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Now, let us investigate what happens if a small change is made in the coefficient matrix

$\blacksquare A$. Consider A is changed to $A + \Delta A$ and the solution changes from x to $x + \Delta x$

$\blacksquare (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$, we can obtain:

$$\blacksquare \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$K(A)$ is a measure of the relative sensitivity of the solution to changes in the right-hand

side vector b. When the condition number $K(A)$ becomes large, the system is regarded as being illconditioned.

Matrices with condition numbers near 1 are said to be well-conditioned.

非线性方程组解的稳定性分析

For non-linear system,

最小二乘法求解线性, 非线性方程组

所有的线性方程组或者非线性方程组可以转化成一个最小二乘法问题, 使得拟合的方程与观察值之间的平方和最小。

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta} S(\beta) = \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2$$

y_i 是观测值, x_i 是已知变量, 一共m组观测值。

当 $f(\mathbf{x}, \beta)$ 是线性方程组时

即 $f(\mathbf{X}, \beta) = \mathbf{A}\beta$

cost function 可以表示如下:

$$L(\beta) = ||\mathbf{Y} - \mathbf{A}\beta||^2$$

其中 $\mathbf{Y} = [y_1, y_2 \dots y_m]^T$

cost function 对 β

$$L(\beta) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T \mathbf{A}\beta + \beta^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\beta$$

求导,

$$-2\mathbf{A}^T \mathbf{Y} + 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\beta = 0$$

再让导数等于0, 就可以求得解为: β

$$\beta = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}$$

我们接下来主要讨论非线性的情况:

也就是残差 $y_i - f(x_i, \beta)$ 不能表示成线性形式。

当然我们有很多方法来求解方程(4.1), 比如 梯度下降法, 牛顿法, 高斯-牛顿法, 以及 Levenberg-Marquardt 梯度下降法把损失函数展开到一阶。

$$f(x + \alpha \mathbf{d}) = f(x_0) + \alpha f'(x_0) \mathbf{d} + O(\alpha^2)$$

$$x_{t+1} = x_t - \alpha f'(x_t),$$

牛顿法

把cost function进行展开到二阶:

$$f(x_{t+1}) = f(x_t) + g(x_{t+1} - x_t) + \frac{1}{2}(x_{t+1} - x_t)^T H(x_{t+1} - x_t)$$

求导, $\frac{\partial f}{\partial x_t} = g + H(x_{t+1} - x_t)$, 让导数为0就有

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g$$

要是H是正定的, 上面的就是凸函数, 也就一定有了最小值。可惜H不一定是正定的, 这就引导出了下面的方法

高斯-牛顿法

cost function可以表示成残差的形式:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

根据牛顿法:

$$x_{t+1} = x_t - H^{-1}g,$$

梯度表示为:

$$g_j = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

对方程(4.9)求二阶导, 我们可以得到Hessian矩阵:

$$H_{jk} = 2 \sum_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

当残差 r_i 很小的时候, 我们就可以去掉最后一项, 因此

$$H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With} \quad J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

这样Hessian就是半正定了。

因此参数迭代公式(4.10)可以写成：

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J)^{-1} J^T r,$$

Levenberg-Marquardt

方法用于求解非线性最小二乘问题，结合了梯度下降法和高斯-牛顿法。

其主要改变是在Hessian阵中加入对角线项。当然，这是一种L2正则化方式。

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda I_n)^{-1} J^T r$$

L-M算法的不足点。

当 λ 很大时， $J^T J + \lambda I_n$ 根本没用，Marquardt为了让梯度小的方向移动的快一些，来防止小梯度方向的收敛，把中间的单位矩阵换成了 $diag(J^T J)$ ，因此迭代变成：

$$\blacksquare x_{t+1} = x_t - (J^T J + \lambda diag(J^T J))^{-1} J^T r$$

阻尼项(damping parameter) λ 的选择，Marquardt 推荐一个初始值 λ_0 与因子 $v > 1$ ，开始时， $\lambda = \lambda_0$ ，然后计算 cost functions，第二次计算 $\lambda = \lambda_0/v$ ，

如果两者 cost function 都比初始点高，然后我们就增大阻尼项，通过乘以 v ，直到我们发现当 $\lambda = \lambda_0 v^k$ 时，cost function 下降。

如果使用 $\lambda = \lambda_0/v$ 使得 cost function 下降，然后我们就把 λ_0/v 作为新的 λ

当 $\lambda = 0$ 时，就是高斯-牛顿法，当 λ 趋于无穷时，就是梯度下降法。如果使用 λ/v 没有使损失函数下降，使用 λ 导致损失函数下降，那么我们就继续使用 λ 做为阻尼项。

归一化的残差

如果我们假设数据中每一点的贡献是等权重，因此，我们有必要对每一项残差加一个权重，来归一化每一项残差。因此公式(4-9)可以变成，cost function 可以表示成残差的形式：

$$\blacksquare L(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i(x)^2 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i^2} (y_i - f_i(x_i))^2 \text{ 此时，Jacobia 变成 } \blacksquare H_{jk} \approx 2 \sum_i J_{ij} J_{ik} \quad \text{With } J_{ij} = y_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$$\blacksquare J_S = \Sigma J, \Sigma_{ij} = \frac{1}{y_i} \delta_{ij}$$

L2正则化与Levenberg-Marquardt算法

我们在 cost function 加上 L2 正则项

$$\blacksquare L(\beta) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

可以表示成：

$$\blacksquare L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T \nabla_{\beta} L(\beta_0) + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H (\beta - \beta_0) + \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

求一阶导数：

$$\blacksquare \nabla_{\beta} L(\beta) = L(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^T g + \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)^T H (\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \lambda \|\beta\|^2 + O(\beta^3)$$

令其为0：

$$\blacksquare \frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = g + H(\beta - \beta_0) + \lambda \beta = 0$$

就得到：

$$\blacksquare \beta = (H + \lambda I_n)^{-1} H \beta_0 - (H + \lambda I_n)^{-1} g,$$

第五章 机器学习

这章主要讨论传统的机器学习方法，涉及到分类，回归，聚类，降维，决策树与集成学习，图模型以及模型验证。本章序言要对这章介绍的方法起介绍作用，要通过语言使读者明白算法的原理，推到步骤以及算法之间的联系。完成理论的写作之后，你需要明白在实际问题中灵活运用理论或算法是更重要的一件事情。能否灵活的运用理论，创造性的发展理论靠的就是你的实战经验与理论功底。

机器学习

1. 过拟合与欠拟合, 交差验证的目的, 超参数搜索方法, EarlyStopping
2. L1正则和L2正则的做法, 正则化背后的思想, BatchNorm, Covariance Shift, L1正则产生稀疏解的原理
3. 逻辑回归为何是线性模型, LR如何解决低维不可分, 从图模型角度看LR,
4. 和朴素贝叶斯和无监督
5. 几种参数估计方法MLE, MAP, 贝叶斯的联系与区别
6. 简单说下SVM的支持向量, KKT, 何为对偶, 核的通俗理解
7. GBDT, 随机森林能否并行, 问下bagging, boosting
8. 生成模型, 判别模型举个例子
9. 聚类方法的掌握, 问下kmeans的EM推导思路, 谱聚类和Graph-cut的理解
10. 梯度下降类方法和牛顿类方法的区别, 随便问问Adam, L-BFGS的思路
11. 半监督的思想, 问一些特定半监督算法是如何利用无标签数据的, 从MAP角度看半监督
12. 常见的分类模型的评价指标(顺便问问交叉熵, ROC如何绘制, AUC的物理含义, 类别不均匀样本)

神经网络

1. CNN中卷积操作和卷积核作用, maxpooling作用
2. 卷积层与全连接层的联系
3. 梯度爆炸与消失的概念(顺便问问神经网络权重初始化的方法, 为何能减缓梯度爆炸与消失, CNN中有哪些解决方法, LSTM如何解决的, 如何梯度裁剪, dropout如何用在RNN系列网络中, dropout如何防止过拟合)
4. 为何卷积可以用在图像, 语音, 语句上, 顺便问问channel在不同类型数据源中的含义

自然语言处理, 推荐系统

1. CRF跟逻辑回归, 最大熵模型的关系
2. CRF的优化方法, CRF和MRF的联系, HMM与CRF的关系(顺便问问朴素贝叶斯和HMM的联系, LSTM+CRF用于序列标注的原理, CRF的点函数和边函数, CRF的经验分布)
3. wordEmbedding的几种常用方法和原理(language model, perplexity评价指标, word2vec跟Glove的异同)
4. Topic model说一说, 为何CNN能用在文本分类, syntactic 和semantic问题举例,
5. 常见的sentence embedding方法, 注意力机制(注意力机制的几种不同情形, 为何引入, seq2seq原理)
6. 序列标注的评价指标, 语义消歧的做法, 常见的跟word有关的特征
7. factorization machine, 常见矩阵分解模型
8. 如何把分类模型用于商品推荐(包括数据集划分, 模型验证等)
9. 序列学习, wide & deep model(顺便问问为何wide和deep)

第一步(一个月), 公式推导必须会, 核心思想会, 并且要融会贯通。

1. SVM
2. LR, LTR
3. 决策树, RF, GBDT, xgboost
4. 贝叶斯
5. 降维:PCA, SVD
6. BP的公式推导, 以及写一个简单的神经网络, 并跑个小的数据。用python, numpy。
7. LeetCode上面刷Easy与Medium的题
8. 看面经, 找面试常遇到的问题

第二步是最优化总结(半个月), 总结常用的优化算法, 比如梯度下降, 牛顿, 拟牛顿, trust region, 二次规划。

机器学习score函数设置:

1. 回归, 分类, 决策树, 深度神经网络, 图模型, 概率统计, 最优化方法
2. 分类, 聚类, 特征选择, 降维等数据挖掘技术
3. 机器学习, 概率统计, 最优化
4. GBDT, LR, LTR, 特征提取
5. 推荐系统基本算法: LR, GBDT, SVD/SVD++, FM/FFM具体实用场景与变形
6. 对分类, 回归, 聚类, 标注等统计机器学习问题有深入研究, 熟悉常用模型:LR, KNN, Naive bayes, rf, GBDT, SVM, PCA, SVD, kmeans, kmodes等
7. 精通主流机器学习算法, 对贝叶斯, 随机森林, SVM, 神经网络, 聚类, PCA等有深入研究
8. 熟悉数据分析思路, 熟悉经典的数据挖掘, 机器学习算法, 如:LR, 决策树, BP神经网络, SVM等浅层学习, 熟悉集成算法, 诸如bagging, boosting, 了解深度学习CNN, RNN, 熟悉使用python, 了解pandas, sklearn, xgboost
9. 熟悉常用的最优化算法设计与实现, 对于非凸优化问题有深入的理解(并行模拟退火, 蒙特卡洛等优化方法)
10. 机器学习算法: 贝叶斯, 聚类, 逻辑回归, SVM, GBDT, RF

总结:

1. 分类:
 - i. SVM,
 - ii. LR
2. 回归:
3. 集成学习:
 - i. bagging
 - ii. Boosting
4. 工具:
 - i. sklearn, xgboost, tensorflow

分类总结:

1. Regression:
 2.
 - i. Ordinary Least Squares Regression(OLSR)
 - ii. Linear Regression
 - iii. Logistic Regression
 - iv. Stepwise Regression
 - v. Multivariate Adaptive Regression Splines
 - vi. Locally Estimated Scatterplot Smoothing
 3. Regularization Algorithms
 4.
 - i. Ridge Regression
 - ii. Least Absolute Shrinkage and Selection Operator(LASSO)
 - iii. Least-Angle Regression(LARS)
 5. Ensemble Algorithms
 6.
 - i. Boosting
 - ii. Booststrapped Aggregation(Bagging)
 - iii. Adaboost
 - iv. Stacked Generalization(Blending)
 - v. Gradient Boosting Machines(GBM)
 - vi. Gradient Boosted Regression Trees(GBRT)
 - vii. Random Forest

- 7. Decision Tree Algorithms
- 8.
 - i. Classification and Regression Tree(CART)
 - ii. Iterative Dichotomiser3(ID3)
 - iii. C4.5 and C5.0
 - iv. Chi-Squared Automatic Interaction Detection(CHAID)
 - v. Decision Stump
 - vi. M5
 - vii. Conditional Decision Trees
- 9. Dimensionality Reduction Algorithms
- 10.
 - i. Principle Component Analysis(PCA)
 - ii. Principle Component Regression(PCR)
 - iii. Sammon Mapping
 - iv. Multidimensional Scaling(MDS)
 - v. Projection Pursuit
 - vi. Linear Discriminant Analysis(LDA)
 - vii. Mixture Discriminant Analysis(MDA)
 - viii. Quadratic Discriminant Analysis(QDA)
 - ix. Flexible Discriminant Analysis(FDA)
- 11. Bayesian Algorithms
- 12.
 - i. Naive Bayes
 - ii. Gaussian Naive Bayes
 - iii. Multinomial Naive Bayes
 - iv. Averaged One-Dependence Estimators(AODE)
 - v. Bayesian Belief Network(BBN)
 - vi. Bayesian Network(BN)
- 13. Clustering Algorithms
- 14.
 - i. K-Means
 - ii. K-Medians
 - iii. Expectation Maximisation(EM)
 - iv. Hierarchical
- 15. Instance-Based Algorithms
- 16.
 - i. K-Nearest Neighbor(KNN)
 - ii. Learning Vector Quantization(LVQ)
 - iii. Self-Organizing Map(SOM)
 - iv. Locally Weighted Learning(LWL)
- 17. Graphical Models
- 18.
 - i. Bayesian Network
 - ii. Markov random field
 - iii. Chain Graphs
 - iv. Ancestral Graph
- 19. Association Rule Learning Algorithms
- 20.
 - i. Apriori Algorithm
 - ii. Eclat Algorithm
 - iii. FP-growth
- 1. Deep Learning
- 2.
 - i. Deep Boltzmann Machine(DBM)
 - ii. Deep Belief Networks(DBN)
 - iii. Convolutional Neural Network(CNN)
 - iv. Stacked Auto-Encoders
- 3. Artificial Neural Network
- 4.
 - i. Perception

- ii. Back-Propagation
- iii. Radial Basis Function Network(RBFN)

机器学习原理

偏差, 方差, 噪声

偏差-方差分解可以用来对学习算法的期望泛化错误率进行拆分。同时, 偏差-方差分解为我们设计模型与分析提供了一个比较清晰的方向。

假设测试样本是 \mathbf{x} , 令 y_D 为 \mathbf{x} 在数据集上的标记(可能存在标记错误的情况), y 为 \mathbf{x} 的真实标记, $f(\mathbf{x}; D)$ 为训练集 D 上学得模型 f 在 \mathbf{x} 上的预测输出, 以回归模型为例, 学习算法的期望预测为:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = E_D[f(\mathbf{x}, D)]$$

方差是:

$$var(\mathbf{x}) = E_D[f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x})]^2$$

噪声是:

$$\epsilon^2 = E_D[y_D - y]^2$$

输出期望与真实标记之间的差别成为偏差(Bias), 即:

$$bias^2(\mathbf{x}) = E_D[\hat{f}(\mathbf{x}) - y]^2$$

为方便讨论, 假设噪声的期望为0; 即: $E_D[y_D - y] = 0$. 下面来对模型的期望泛化误差进行分解:

$$\begin{aligned} E(f; D) &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}) + \hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)^2] + E_D[2(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))(\hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y + y - y_D)^2] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y)^2] + E_D[(y - y_D)^2] + E_D[2(\hat{f}(\mathbf{x}) - y)(y - y_D)] \\ &= E_D[(f(\mathbf{x}, D) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2] + E_D[(\hat{f}(\mathbf{x}) - y)^2] + E_D[(y - y_D)^2] \end{aligned}$$

因此就得到:

$$E(f; D) = bias^2(\mathbf{x}) + var(\mathbf{x}) + \epsilon^2$$

也就是泛化误差分成偏差, 方差与噪声之和。我们设计模型分析时, 可以从这三方面去考虑。

噪声

为了消除噪声的影响, 我们需要对数据进行清洗, 进行预处理。在很大程度上就是为了得到更干净的数据。

Bias

偏差小, 说明的是模型很准, 可能有过拟合的倾向, 增加模型的复杂度可以使得bias减小。但是泛化能力变差, 也就是variance会大, 模型对数据很敏感。如果模型bias大, 可以通过对简单的模型进行boost, 来提升模型的准确性, 也就是Boost系列算法做的事情, 如: AdaBoost, GBDT, XGBoost。

方差

方差小, 说明模型很稳定, 也就是说模型的泛化能力好, 可能测试集上的数据相对于训练集来说有一些变化, 但是也不影响模型的输出结果, 此时, 可能模型欠拟合, 因此泛化能力好。如果模型variance大,

可以通过训练多个模型, 并让各个模型之间的关联性很小, 通过求平均来减小Variance, 这就是集成模型中bagging系列算法做的事情, 如Bagging, Random Forest.

最大似然函数

输入: $X \in R^n$

输出: $Y \in (1, 2, \dots, K)$

条件概率: $P(X = x|Y = C_k) = P(X^{(1)} = x^{(1)}, X^{(2)} = x^{(2)}, \dots, X^{(n)} = x^{(n)}|Y = C_k)$, $k=1, 2, \dots, K$

假设有N个样本点 (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$

条件概率: $P(Y = y|X = x, \theta)$, 其中 θ 是模型的参数。

似然函数定义为：每个样本点发生概率的乘积：

$$L(\theta) = \prod_{n=1}^N P(Y = Y_n | X = X_n, \theta)$$

我们需要求得一个模型，使得在所有样本点在该模型发生的几率极大，几率是联合几率，是每个样本发生几率的乘积。也就是极大化似然函数。分类与回归问题似乎都可以转化成求解似然函数。

用极大似然函数求解回归问题

输入： $\mathbf{X} \in R^n$

输出： $Y \in R$

我们的模型是 $f(\mathbf{X}, \Theta)$, 其中 Θ 是模型参数, \mathbf{X} 是输入变量。

假设我们的损失函数是平方误差, 因此我们的cost function可以表示如下：

$$\blacksquare L(\mathbf{X}, \Theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (f(X_n, \Theta) - Y_n)^2$$

等价于：

$$\blacksquare e^{L(\mathbf{X}, \Theta)} = e^{\sum_{n=1}^N \frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2} = \prod_{n=1}^N e^{\frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2}$$

实际上, 最小化 $L(\mathbf{X}, \Theta)$ 等价于最小化 $e^{L(\mathbf{X}, \Theta)}$, 等价于最大化 $e^{-L(\mathbf{X}, \Theta)}$, 也就是等价于最大化

$$\blacksquare \Gamma(\Theta) = \prod_{n=1}^N e^{-\frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2} = \prod_{n=1}^N P(X_n, \Theta)$$

其中

$$\blacksquare P(X_n, \Theta) = e^{-\frac{1}{2}(f(X_n, \Theta) - Y_n)^2}$$

定义成回归模型中样本 (X_n, Y_n) 发生的几率, 这样我们就把回归问题与几率联系起来了。我们把求解损失函数最小, 转化成极大化似然函数的求解。

对于不同的损失函数, 我们都可以转化成对应的概率。

对于分类问题, 怎么用一个统一的框架来解析? 可以是基于概率的。

用极大似然函数求解多类分类问题

在这里我们以多项逻辑斯蒂回归为例, 讨论怎么用最大化似然函数来求解这一类问题。

假设离散性随机变量 Y 的取值是 $(1, 2, \dots, K)$, 输入变量 $\mathbf{X} \in R^n$

则, 模型如下：

$$\blacksquare P(Y = k | \mathbf{x}) = \frac{exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}, k = 1, 2, \dots, K - 1$$

$$\blacksquare P(Y = K | \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}$$

这里 $\mathbf{x} \in R^{n+1}$; $\mathbf{w}_k \in R^{n+1}$.

因此, 总的似然函数可以表示为:

$$\blacksquare L(\mathbf{W}) = \prod_{n=1}^N P(Y = Y_n | X = X_n)$$

这样, 我们需要求的参数是 $W = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n+1})$.

用极大似然与SVM来做多类分类问题

核心, 定义出到超平面的距离, 每一个类, 一个超平面, 然后定义距离, 然后转化成概率, 最终转化成极大似然函数求解。

麦克斯韦妖与信息熵

不存在一个监测系统, 能区分粒子的速度而对粒子做出区分, 使得原本温度相同的系统, 自发的形成高温与低温子系统。因为在区分例子速度时, 就是一个信息处理的过程, 使得系统的信息熵减小。那么, 怎么根据熵增原理, 确定系统的熵减数量与检测系统需要付出的信息熵的数量, 或者能量。

极大似然与最大熵原理的等价性

最大熵原理

奥卡姆剃刀

Evaluation Metrics

二分类: AUC.

多分类: 交叉熵(log loss)

回归: 均方差

For any kind of machine learning problem, we must know how we are going to evaluate our results, or what the evaluation metric or objective is. For example in case of a skewed binary classification problem we generally choose area under the receiver operating characteristic curve (ROC AUC or simply AUC). In case of multi-label or multi-class classification problems, we generally choose categorical cross-entropy or multiclass log loss and mean squared error in case of regression problems.

No FREE Lunch定理, 先验, 正则化

NO FREE LUNCH

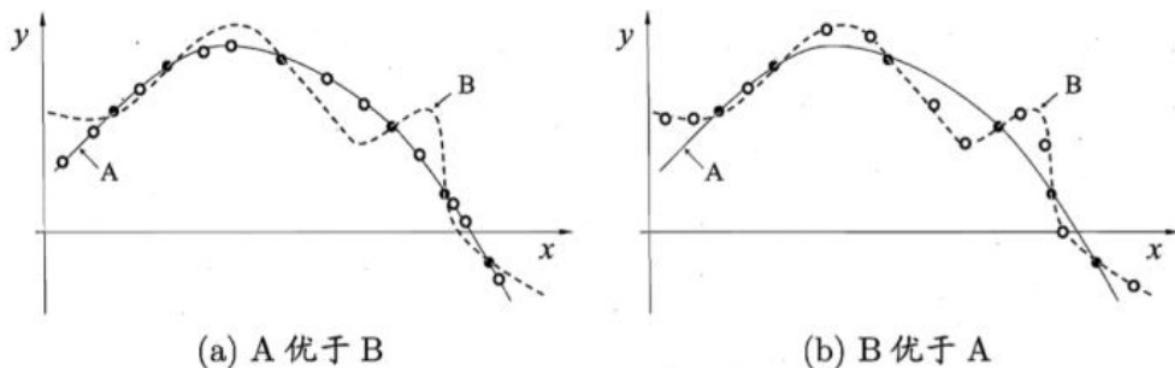


图 1.4 没有免费的午餐. (黑点: 训练样本; 白点: 测试样本)

黑点是训练样本, 白点是测试样本点。根据训练样本, 我们得到模型A, B。如果测试点不同, 则A, B的相对表现不同。问题的关键在于, 我们先验的假设了(测试)样本点在所有空间是均匀分布的, 因此, 在训练集上训练出的所有模型的效果是一样的, 因为你总有样本集是落在你模型预测的曲线上。

因此, 如果样本点在整个数据空间是均匀分布的前提下, 则不存在一个模型或算法在所有问题上比其它算法更优越。

但是现实遇到的问题是, 数据的分布是受限制的, 数据存在一个先验分布, 因此会存在一些模型比其它模型更有效。这里NFL不再有是因为问题的前提--数据是均匀分布的--不再成立。因此, 脱离场景谈方法是无效的, 我们只能针对特定的问题, 寻找最佳的优化方法。

正则化

没有免费的午餐定理告诉我们没有一个模型是对所有的样本是最优的¹, 因此, 对于特定的样本, 我们需要把先验加进模型中(也就是损失函数中), 这个先验就是我们对这个样本的知识, 比如样本数据的分布, 样本的均值或者方差等(统计物理学中的系统的能量可以看成一种均值, 统计物理学中有很多启发性的模型)。加到模型中的就是我们的正则项, 正则项就是一个先验, 是我们需要模型满足的约束。

先验分布与损失函数。

知道预测误差的先验分布, 才能选择合适的损失函数。知其然, 才能知其所以然。

交叉熵

平方损失:

0-1损失: 分类问题,

Log损失:

Hinge损失:

指数损失:

平方损失: 等价于误差服从高斯分布的极大似然估计。适用于回归问题。

麦哈顿距离损失等价于误差服从拉普拉斯分布的极大似然估计。

0-1损失相当于误差服从

数据的误差的先验分布(统计学派观点?): 极大似然

模型参数的先验分布(贝叶斯观点):正则化是模型复杂度的惩罚函数, 真理是美的, 简洁的。你可以自己定义模型的复杂度?问题是怎公定义模型复杂度?(正则化是要求模型参数只能在0附近, 但是现实可能是, 真实的模型参数不在0附件, 贝叶斯观点并不能与模型参数误差的先验分布联系起来, 因为正则化假定模型参数的均值皆为0, 但是贝叶斯观点并不要求这样。)

损失函数	预测误差的先验分布
平方损失	高斯分布
曼哈顿距离损失	拉普拉斯分布
0-1损失	
交叉熵	

1. Ian Goodfellow 《deep learning》 ↵

分类

分类的方法有

1. SVM
2. Logistic回归
3. K近邻
4. LDA(线性判别器)
5. 分类树

SVM, KKT条件与核函数方法

SVM的本质就是利用对偶方法求解带约束的凸优化问题，这是三种求解优化问题的方法中，对偶方法的典型应用。KKT条件保证了可以通过求解对偶问题来求解原始问题。要理解的是怎么利用对偶方法求解优化问题，这是求解优化问题的很重要的一种方法，SVM只是这种方法的一个典型例子。

核函数的作用的通过非线性变换，使得SV可以用来处理非线性分类问题。

三种优化方法：

- 1.
- 2.
3. 对偶方法

SVM

线性可分二分类问题

一组数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N, y_i \in +1, -1, x_i \in R^m$

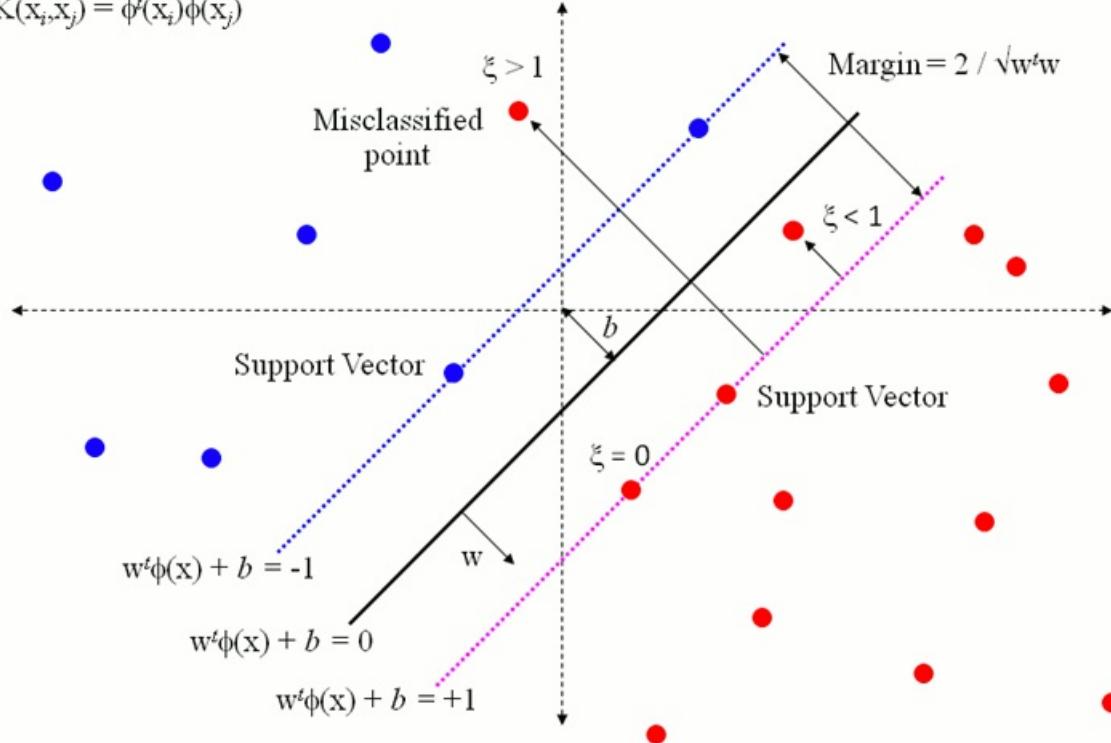
SVM 算法是为了求得一个分割超平面 $\mathbf{w}x + b = 0$ 使得所有的样本点到超平面的几何距离都不小于 γ , 且这个 γ 是最大的。

首先我们定义几何距离和函数距离:

几何距离: $\gamma_i = y_i(\frac{\mathbf{w}x_i}{\|\mathbf{w}\|} + \frac{b}{\|\mathbf{w}\|})$

除以 $\|\mathbf{w}\|$ 是因为 x, b 同时乘以一个因子, 超平面不变。

$$K(x_i, x_j) = \phi(x_i)\phi(x_j)$$



函数间距: $\gamma_i = y_i(\mathbf{w}x_i + b)$

我们要使: $\gamma_i \geq \gamma$, 对任何的样本点 i 都成立, 并求得 γ 的最大值。故上面的问题可以用如下数学来刻画:

$$\max_{\mathbf{w}, b} \gamma$$

$$\text{s.t. } y_i(\frac{\mathbf{w}x_i}{\|\mathbf{w}\|} + \frac{b}{\|\mathbf{w}\|}) \geq \gamma$$

转化为函数间距:

$$\max_{\mathbf{w}, b} \gamma$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}x_i + b) \geq \|\mathbf{w}\|\gamma = \hat{\gamma}$$

为了简化计算, 我们取 $\hat{\gamma} = 1$

因此问题转化为:

$$\max_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}x_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

转化为求极小问题:

$$\min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2$$

$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{w}x_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

问题转化成带约束的优化问题(在这里是凸优化问题)。带等式的约束问题可以通过引入拉格朗日乘子求解, 带不等式约束的问题可以引入 KKT 乘子求解。下面一节我们讨论带约束的凸优化问题。

线性不可分与软间隔最大化

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i \\ \text{s.t. } & y_i (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, N \\ & \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

通过构造拉格朗日函数求对偶函数。原问题的解是 (w^*, ξ^*, b^*) , 对偶问题的解是 α^* 。

参考文献:

1. July · pluskid, 支持向量机通俗导论: <https://raw.githubusercontent.com/liuzheng712/Intro2SVM/master/Intro2SVM.pdf>

Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

1. 先讨论一般带约束优化问题的数据描述
2. 然后引入其作用约束与不起作用约束的定义
3. 再引入正则点的定义
4. 接下来引入KKT条件 5. 针对局部极小问题，我们考虑优化函数的二阶导数问题。

一般形式的优化问题：

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中： $f: R^n \rightarrow R$, $\mathbf{h}: R^n \rightarrow R^m$, $m \leq n$; $\mathbf{g}: R^n \rightarrow R^p$;

针对这一问题，引入如下定义：

定义21.1. 对于一个不等式约束 $g_i(x) \leq 0$, 如果在 x^* 处, $g_i(x^*) = 0$, 那么称该不等式约束是 x^* 处的起作用约束。如果: $g_i(x^*) < 0$, 那么称该不等式约束是 x^* 处的不起作用约束。

定义21.2. 设 \mathbf{x}^* 满足 $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$, 设 $J(\mathbf{x}^*)$ 为起作用不等式约束下标集,

$$J(\mathbf{x}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

如果: $\nabla h_i(\mathbf{x}^*), \nabla g_j(\mathbf{x}^*), i \leq m, j \in J(\mathbf{x}^*)$

是线性无关的，则称 \mathbf{x}^* 是一个正则点。

KKT条件: 某个点是局部极小点所满足的一阶必要条件。

定理: KKT条件, 设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^1$, 设 \mathbf{x}^* 是问题 $\mathbf{h} = \mathbf{0}, \mathbf{g} \leq \mathbf{0}$ 的一个正则点和局部极小点, 那么必然存在 $\lambda^* \in R^m$ 和 $\mathbf{u}^* \in R^p$ 使得以下条件成立:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^* \geq \mathbf{0} \\ & Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T \\ & \mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0 \end{aligned}$$

λ^* 为拉格朗日乘子向量, \mathbf{u}^* 是KKT乘子向量, 其元素分别成为拉格朗日乘子, KKT乘子。

充分条件

上面讲了局部极小的必要条件, 这里我们讨论局部极小的充分条件。然后我们就利用KKT条件去求不等式约束问题。

二阶充分必要条件;

定义如下矩阵:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

$F(\mathbf{x})$ 是 f 在 \mathbf{x} 处的Hessian矩阵;

$$\lambda \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \lambda_1 H_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m H_m(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = u_1 G_1(\mathbf{x}) + \dots + u_p G_p(\mathbf{x})$$

其中 $G_k(\mathbf{x})$ 是 g_k 处的Hessian矩阵。

起作用约束所定义曲面的切线空间: $T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}$.

定理: 二阶必要条件: 如果 \mathbf{x}^* 是上面讨论的优化问题的极小点, 那么存在 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得:

1. $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$,
2. $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$
3. $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有 $y \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), y \neq 0$, 都有 $y^T L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})y > 0$

定理: 二阶充分条件:

假设 $f, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^2$, $\mathbf{x}^* \in R^n$ 是一个可行点, 存在向量 $\lambda^* \in R^m, \mathbf{u}^* \in R^p$ 使得:

4. $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$,
5. $Df(\mathbf{x}^*) + \lambda^* Dh(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}^* Dg(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$
6. $\mathbf{u}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$

4. 对所有 $\mathbf{y} \in T(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, $\mathbf{y} \neq 0$, 都有 $\mathbf{y}^\top L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})\mathbf{y} > 0$

那么 \mathbf{x}^* 是优化问题

$$\begin{aligned} \text{■ s.t. } \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

的严格局部极小点。

$$T(\mathbf{x}^*) = \{y \in R^n : Dh(x^*)y = 0, Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}.$$

$$\text{其中: } \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = (j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0), \mathbf{u}^* > 0$$

学习的对偶算法

对于求极小问题:

$$\text{■ min}_{\mathbf{w}, \mathbf{b}} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2$$

$$\text{■ s.t. } \quad \mathbf{y}_i(\mathbf{w}\mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

引入拉格朗日函数, 对每个不等式约束引入拉格朗日乘子 $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, N$:

$$\text{■ } L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i (\mathbf{w}\mathbf{x}_i + b) + \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ 为拉格朗日乘子向量。

根据拉格朗日对偶性, 原始问题的对偶问题是极大极小问题:

$$\text{■ } \max_{\boldsymbol{\alpha}} \min_{\mathbf{w}, \mathbf{b}} L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})$$

现对 \mathbf{w}, \mathbf{b} 求极小, 再对 $\boldsymbol{\alpha}$ 求极大。

(1) 求 $\min_{\mathbf{w}, \mathbf{b}} L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})$ 。对 \mathbf{w}, \mathbf{b} 求导并令其为 0, 得到:

$$\begin{aligned} \text{■ } \frac{\partial L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i (\mathbf{x}_i) = 0 \\ \text{■ } \frac{\partial L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \end{aligned}$$

把上面两个式子代入拉格朗日函数, 可以得到:

$$\text{■ } \min_{\mathbf{w}, \mathbf{b}} L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

(2) 求 $\min_{\mathbf{w}, \mathbf{b}} L(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})$ 对 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极大即是对偶问题。

$$\text{■ } \max_{\boldsymbol{\alpha}} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

$$\text{s.t. } \quad \text{■ } \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0$$

$\boldsymbol{\alpha} \geq 0, i=1, 2, \dots, N$ 由于原始问题满足 KKT 条件, 所以存在 $\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\alpha}^*$ 使得 \mathbf{w}^* 是原始问题的解, $\boldsymbol{\alpha}^*$ 是对偶问题的解。

定理: 由对偶问题求原始问题

假设 $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T$ 是对偶问题的解, 则存在一个指标 j 使得 $\alpha_j > 0$, 使得原问题的解 \mathbf{w}^*, b 可由下面方程给出:

$$\begin{aligned} \text{■ } \mathbf{w}^* &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i) \\ \text{■ } b^* &= y_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i * \mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

由此得到分离超平面:

$$\text{■ } \mathbf{w}^* \mathbf{x} + b^* = 0$$

分类决策函数:

$$\begin{aligned} \text{■ } f(x) &= \text{sign}(\mathbf{w}^* \mathbf{x} + b^*) \\ \text{■ } &= \text{sign}(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j + b^*) \end{aligned}$$

线性不可分与软间隔最大化

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i \\
& \text{s.t.} \quad y_i (\mathbf{w} \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, N \\
& \quad \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned}$$

通过构造拉格朗日函数求对偶函数。原问题的解是 (w^*, ξ^*, b^*) , 对偶问题的解是 α 。

实际上与线性可分的求法是一致的, 只是对应的 ξ 会多出一个拉格朗日乘子, 在求解对偶问题的最优化时, 多了一个约束。 \mathbf{w}^* 是唯一的, b 不唯一。

核函数方法

引入核函数

其实在我们求解对偶问题的最优化问题时，我们只需要求 $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$ ，因此如果存在一种变换，使得：

$$\mathbf{x} - > \phi(\mathbf{x})$$

且 $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j - > \phi(\mathbf{x}_i) \phi(\mathbf{x}_j) = K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$

其实我们不需要显示的给出 $\phi(\mathbf{x})$ 的表达式，只需要知道 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 就可以了， $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 就是核函数。

引入核函数，是因为我们可以利用核函数方法来解决非线性分类问题。

正定核函数

正定核的充要条件

设 $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 上的对称函数，则 $K(x, z)$ 为正定核函数的充要条件是对任意 $x_i \in X, i=1, 2, \dots, m, K(x, z)$ 对应的Gram矩阵：

$$K = [K(x_i, x_j)]_{m \times m}$$

的半正定矩阵。

常用的核函数

1. 线性核：

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$$

2. 多项式核函数：

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + 1)^p$$

分类决策函数是：

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x} + 1)^p + b^*\right)$$

3. 高斯核函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

分类决策函数是：

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}{2\sigma^2}\right) + b^*\right)$$

4. 拉普拉斯核函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}{\sigma}\right) \sigma > 0$$

5. Sigmoid核函数

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \tanh(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + \theta) \quad \beta > 0, \theta < 0$$

非线性分类问题

输入：训练数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N, y_i \in \{-1, 1\}, x_i \in \mathbb{R}^m$

输出：分类决策函数

(1)选择适合的核函数 $K(x, z)$ 和适当的参数 C ，构造并求解优化问题：

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, i=1, 2, \dots, N.$$

求得最优解 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T$ ：

(2)选择一个指标 j 使得 $0 < \alpha_j < C$ ，计算

$$b^* = y_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

(3)构造分类决策函数：

$$f(x) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b^*\right)$$

逻辑回归

在这里我们以多项逻辑斯蒂回归为例, 讨论怎么用最大化似然函数来求解这一类问题。

假设离散性随机变量 Y 的取值是 $(1, 2, \dots, K)$, 输入变量 $\mathbf{X} \in R^n$

则, 模型如下:

$$\blacksquare P(Y = k|x) = \frac{\exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{K-1} \exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}, k = 1, 2, \dots, K - 1$$

$$\blacksquare P(Y = K|x) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} \exp(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x})}$$

这里 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1}$; $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^{n+1}$.

因此, 总的似然函数可以表示为:

$$\blacksquare L(\mathbf{W}) = \prod_{n=1}^N P(Y = Y_n | X = X_n) \text{ 这样, 我们需要求的参数是 } W = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n+1}).$$

最简单的就是二项逻辑斯蒂回归, 在这里 $K=2$: 似然函数可以写成如下简单形式:

$$\blacksquare L(\mathbf{W}) = \prod_{n=1}^N [\pi(x_i)^{y_i}] [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i}$$

其中: $\blacksquare P(Y = 1|x) = \pi(x) = \frac{\exp(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})}{1 + \exp(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})}$

$$\blacksquare P(Y = 0|x) = 1 - \pi(x)$$

当 $y_i = 0$ 时:

$$\blacksquare [\pi(x_i)^{y_i}] [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i} = 1 - \pi(x_i) \text{ 当 } y_i = 1 \text{ 时:}$$

$$\blacksquare [\pi(x_i)^{y_i}] [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i} = \pi(x_i)$$

实际上分别是 $y_i = 0, y_i = 1$ 发生的概率。

一般连乘形式的似然函数容易发生值溢出, 故而一般求对数似然函数:

$$\begin{aligned} \blacksquare L(\mathbf{W}) &= \sum_{n=1}^N [y_i \log \pi(x_i) + (1 - y_i) \log [1 - \pi(x_i)]] \\ &= \sum_{n=1}^N [y_i(w \cdot x_i) + \log(1 + \exp(w \cdot x_i))] \end{aligned}$$

求 $L(\mathbf{W})$ 的极大值, 得到 w 的估计值。

问题转化为以对数似然函数为目标函数的最优化问题, 一般采用梯度下降法或者拟牛顿法求解。(为啥不使用牛顿法? 因为求Hessian矩阵比较麻烦, 而拟牛顿法只需要构造Hessian阵就可以了, 用迭代法求)

最大熵模型

最大熵原理

最大熵原理是概率模型学习的一个准则, 最大熵原理认为, 学习概率模型时, 在所有可能的概率模型(分布)中, 熵最大的模型是最好的模型。通常用约束条件来确定概率模型的集合。所以, 最大熵原理也可以表述为在满足约束条件的模型集合中, 选取熵最大的模型。

怎么建立起最大熵原理与最大似然原理之间的联系?

最大熵模型如下:

对于给定的训练数据集: $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$

以及特征函数 $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), i = 1, 2, \dots, n$, 最大熵模型的学习等价于约束最优化问题:

$$\blacksquare \max_{P \in C} H(P) = \sum_{x,y} \hat{P}(x) P(y|x) \log P(y|x)$$

$$\blacksquare S.t. E_P(f_i) = E_{\hat{P}}(f_i), i = 1, 2, \dots, n \quad \blacksquare \sum_y P(y|x) = 1$$

可以转化为求极小问题:

$$\blacksquare \min_{P \in C} H(P) = - \sum_{x,y} \hat{P}(x) P(y|x) \log P(y|x)$$

$$\blacksquare S.t. E_P(f_i) - E_{\hat{P}}(f_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad \blacksquare \sum_y P(y|x) = 1$$

一般，带约束的优化问题可以通过引入拉格朗日乘子与KKT乘子来求解，也就是把原始问题转化为对偶问题来求解。在满足KKT条件时，对偶问题与原始问题等价：

首先引入拉格朗日乘子 w_0, w_1, \dots, w_n ，定义拉格朗日函数 $L(P, \mathbf{w})$ ；

$$\begin{aligned} L(P, \mathbf{w}) &= -H(P) + w_0(1 - \sum_y P(y|x)) + \sum_{i=1}^n w_i(E_P(f_i) - E_P(f_i)) \\ &= -\sum_{x,y} \hat{P}(x)P(y|x) \log P(y|x) + w_0(1 - \sum_y P(y|x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n w_i(\sum_{x,y} \hat{P}(x,y) f_i(x,y) - \sum_{x,y} \hat{P}(x)P(y|x) f_i(x,y)) \end{aligned}$$

最优化的原始问题是：

$$\max_{P \in C} \min_{\mathbf{w}} L(P, \mathbf{w})$$

最优化的对偶问题是：

$$\max_{\mathbf{w}} \min_{P \in C} L(P, \mathbf{w})$$

由于拉格朗日函数 $L(P, \mathbf{w})$ 是 P 的凸函数，因此原始问题与对偶问题的解释等价的。（为什么？用KKT条件能解析吗？）

令： $\Psi(\mathbf{w}) = \min_{P \in C} L(P, \mathbf{w})$

$\Psi(\mathbf{w})$ 称为对偶函数。同时，将其解记为：

$$P_w = \arg \min_{P \in C} L(P, \mathbf{w}).$$

具体计算就是 $L(P, \mathbf{w})$ 对 P 求导，并让其等于0。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(P, \mathbf{w})}{\partial P(y|x)} &= \sum_{x,y} \hat{P}(x)(\log P(y|x) + 1) - \sum_y w_0 - \sum_{x,y} (\hat{P}(x) \sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y)) \\ &= \sum_{x,y} \hat{P}(x)(\log P(y|x) + 1 - w_0 - \sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y)) \end{aligned}$$

令其偏导数等于0，在 $\hat{P}(x) > 0$ 的情况下，解得：

$$P(y|x) = \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y)) + w_0 - 1$$

由于： $\sum_y P(y|x) = 1$ ，得：

$$P_w(y|x) = \frac{1}{Z_w(x)} \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y))$$

其中：

$$Z_w(x) = \sum_y \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y))$$

其中： $Z_w(x)$ 称为规范化因子， $f_i(x,y)$ 称为特征函数， w_i 是特征函数的权重。

其实这些就可以和统计物理学中的波尔兹曼分布联系在一起了，上面的推导也适用于波尔兹曼分布的推导。这也不奇怪，因为最大熵原理的理论就是脱胎于统计物理学。

之后再求解对偶问题外部的极大化问题：

$$\max_w \Psi(\mathbf{w})$$

将其解记作 w^* ，即：

$$w^* = \arg \max_w \Psi(\mathbf{w})$$

因为最大熵模型是一个带约束的优化问题，因此可任意通过定于拉格朗日函数，通过对变量求极值得到对偶函数，再通过对偶函数来求解。又因为在这里，对偶函数等价于对数似然函数，因此可以求对数似然函数的最大化。

模型学习的最优化算法

我们已知模型的概率分布：

$$P_w(y|x) = \frac{1}{Z_w(x)} \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y))$$

因此模型的对数似然函数是：

$$\begin{aligned} L(w) &= \sum_{x,y} P(x,y) \sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y) - \sum_x P(x) \log Z_w(x) \\ L(w) &= \sum_{x,y} P(x,y) \sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y) - \sum_x P(x) \log \sum_y \exp(\sum_{i=1}^n w_i f_i(x,y)) \end{aligned}$$

求解上面函数的最大值，可以通过拟牛顿法或者改进的迭代尺度法来求解。（有时间就加上这两个算法）

BFGS

输入: 特征函数 f_1, f_2, \dots, f_n ; 经验分布 $P(x,y)$, 目标函数 $f(w)$, 梯度 $g(w) = \nabla f(w)$, 精度要求 ϵ 。

输出: 最优化参数 w^* ; 最优模型 $P_{w^*}(y|x)$ 。

(1) 选定初始点 w^0 , 取 B_0 为正定对称函数, 置 $k=0$;

(2) 计算 $g_k = g(w^k)$, 若 $\|g_k\| < \epsilon$, 则停止计算, 得到 $w^* = w^k$; 否则转到(3)

(3) 由 $B_k p_k = -g_k$ 得出 p_k ;

(4) 一维搜索, 求 λ_k 使得:

$$\boxed{f(w^{(k)} + \lambda_k p_k) = \min_{\lambda \geq 0} f(w^{(k)} + \lambda p_k)}$$

(5) 置: $w^{(k+1)} = w^{(k)} + \lambda_k p_k$

(6) 计算 $g_{k+1} = g(w^{(k+1)})$, 若 $\|g_{k+1}\| < \epsilon$, 则停止计算, 得 $w^* = w^{(k+1)}$; 否则按下面方式求 B_{k+1} 。

$$\boxed{B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^T B_k^T}{\delta_k^T B_k \delta_k}}$$

其中:

$$\boxed{y_k = g_{k+1} - g_k}$$

$$\boxed{\delta_k = w^{(k+1)} - w^{(k)}}$$

(7) 置 $k=k+1$, 转到(3)

K近邻

K-近邻不需要训练，因此是一种懒惰学习，急切学习(在训练时就分类)。算法的关键是度量(距离)的定义，K值得选择。
如果样本很大，类别不多，每个类别样本比例比较一致，且不同类别区别比较大的时候，如果给定一个分类错误的上限 ϵ ，我们没有必要遍历所有样本点找到K个近邻。因为，我们可以找到一个需要的样本上限N，N是 ϵ 的函数，然后我们从总的样本中挑选出N个样本，进行K紧邻就可以巨大的减小判别的时间。
K近邻的实现就是遍历所有样本，找出K个最近邻中所属类别最多的类，这就是该样本所属的类。

回归

1. 线性回归
2. Ridge回归
3. Lasso回归
4. 回归树
5. Ordinary Least Squares Regression(OLSR)

回归问题，可以通过最小二乘法来求解，最终是一个优化问题。因此重要的是怎么转化为一个优化问题，并通过优化方法来进行求解。

线性回归中，如果是满秩问题或者超定问题，我们可以通过正则方程求解，也就是矩阵求逆或者矩阵求伪逆。如果是欠定问题，则可以把正则化应用于回归分析中，主要涉及L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化。

欠定问题在当前的一个核心，最典型的就是深度学习，一般模型的参数数目远大于数据的数目，因此需要一些正则化方法。比如L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化，Early Stopping。

多元回归分析

求解线性方程组，如果问题是为满秩，或者超定问题，可以通过矩阵求逆来解决。当然如果矩阵求逆太费时间，则可以通过共轭梯度法来求解。
这一节不分析欠定问题。

多元回归方程

$$\hat{y} = \lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

其中 b_j 是 x_j 的偏回归系数， \hat{y} 是样本的估计值。

根据最小值原理，可以求得偏回归系数。

$$L(b) = \sum_{i=0}^{n-1} [y_i - (\lambda_0 + \lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} + \dots + \lambda_m x_{mi})]^2$$

变量数为m，样本数为n。最小二乘法的目的就是找到一组偏回归系数使得损失函数L极小，极端情况就是L=0，则所有样本估计值就是样本的观测值。这只在满秩的情况下存在。一般只是求得L的极小值点。对损失函数求偏导，可以得到：

正则方程

实际问题可以转化成矩阵分析

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \\ \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

即：

$$X * \lambda = Y + \epsilon$$

寻找一组 λ 使得 $L(\lambda) = (X * \lambda - Y)^T (X * \lambda - Y)$ 极小

利用 $L(\lambda)$ 对向量 λ 求导可以得到¹：

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} = 2X^T(X\lambda - Y) = 0$$

我们也可以得到： $\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = 2X^T X$

求得： $\lambda = (X^T X)^{-1} X^T Y$

$(X^T X)^{-1} X^T$ 也称为X的伪逆。

共轭梯度法

当矩阵X非常大的时候，时间复杂度是 $O(n^3)$ 的矩阵求逆方法太费时间，一般采用共轭梯度法来求解。这在矩阵计算那一章会讨论。

多项式拟合

函数的多项式表示方式：

$$y = \sum_{k=0}^m \lambda_k x^k$$

对于n组数据 (x_i, y_i) 若我们想用多项式去拟合这组数据，就是寻找使下列函数值极小的一组系数 λ

$$L(\lambda) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \sum_{k=0}^m \lambda_k x_i^k)^2$$

令： $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$

$$X_i = [x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^m]$$

$$Y = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}]^T$$

则上面损失函数可以表示为：

$$L(\lambda) = (X * \lambda - Y)^T (X * \lambda - Y)$$

对其求一阶导，结果为0：

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

最终方程可以化简成如下形式：

$$\blacksquare \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} x_j^0 & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^1 \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^m \end{bmatrix}$$

即: $X * \lambda = Y$ 得到 $\lambda = X^{-1}Y$

若在方程上加上一个正则项,

$$\blacksquare L(\lambda) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \sum_{k=0}^m \lambda_k x_i^k)^2 + \sum_{k=0}^m \lambda_k^2$$

得到如下的矩阵:

$$\blacksquare \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} x_j^0 - 2n & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^1 & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 - 2n & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} x_j^m & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{m+1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{2m} - 2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^1 \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j * x_j^m \end{bmatrix}$$

类似于Ridge回归:

但是对于加噪声参数的多项式数据, 发现不加正则项能给出正确的结果, 加正则项反倒不能, 因为这是满秩问题, 没必要加正则项, 对于欠定问题, 才可以加正则项来对解进行约束。

迭代法求解

求解上面的方程也可以使用迭代法求解, 实际上就是最优化方法。

¹. 矩阵求导术(上), <https://zhuanlan.zhihu.com/p/24709748> ↵

正则化回归

在线性回归分析中，如果是欠定问题，则可以把正则化应用于回归分析中，主要涉及L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化。此外，Early Stopping也是一种正则化方法。

欠定问题在当前的一个核心，最典型的就是深度学习，一般模型的参数数目远大于数据的数目，因此需要一些正则化方法。比如L1(Lasso Regression),L2(Ridge Regression),L1+L2(Elastic Net)正则化，Early Stopping。

线性回归问题

对于线性系统，也就是预测函数：

$$\blacksquare f(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$$

然后通过最小二乘求解符合数据的模型。通过加正则项来约束模型的复杂度或者参数范围。对于非线性模型，只是把模型 $f(\mathbf{x})$ 换成你想要的非线性函数即可，比如N元M次多项式，选最简单的就是N元二次方程，这是最简单的非线性模型。

非线性回归问题

光学建模

物理学中有一些很有意思的非线性回归模型，比如光的衍射成像，光通过特定结构的衍射，反射成像，求解这些模型，第一步是建model，也就是通过求解Maxwell方程，得到非线性方程组，第二步就是通过实验数据来求解模型中的参数，这些参数有两类，一类是几何参数，也就是设计到要处理问题的几何结构；第二类是物理参数，主要是描述系统材料属性的参数，比如折射率，反射率，光的波长等。

神经网络

一个典型的非线性回归例子就是深度学习，神经网络就是一个高度非线性的函数，非线性是由激活函数决定的，也就是激活函数是非线性函数。通过这个非线性函数，可以把输入的数据映射到输出的数据空间；高度的非线性是神经网络具有强大的非线性拟合能力的根本。神经网络的表达能力由下面的定理给出。

万能近似定理

万能近似定理(universal approximation theorem)(Hornik et al., 1989;Cybenko, 1989)表明，一个前馈神经网络如果具有线性输出层和至少一层具有任何一种“挤压”性质的激活函数(例如logistic sigmoid激活函数)的隐藏层，只要给予网络足够数量的隐藏单元，它可以以任意的精度来近似任何从一个有限维空间到另一个有限维空间的Borel 可测函数。

线性系统的Regularized Regression

这里讨论的还是线性系统，也就是预测函数：

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p x_j \beta_j}$$

然后通过最小二乘求解数据的模型。通过加正则项来约束模型的复杂度或者参数范围。对于非线性模型，只是把模型 $f(\mathbf{x})$ 换成你想要的非线性函数即可，比如 N 元 M 次多项式，选最简单的就是 N 元二次方程，这是最简单的非线性模型。

物理学中有一些很有意思的非线性回归模型，比如光的衍射成像，光通过特定结构的衍射，反射成像，求解这些模型，第一步是建model，也就是通过求解Maxwell方程，得到非线性方程组，第二步就是通过实验数据来求解模型中的参数，这些参数有两类，一类是几何参数，也就是设计到要处理问题的几何结构；第二类是物理参数，主要是描述系统材料属性的参数，比如折射率，反射率，光的波长等。

一个典型的非线性回归例子就是深度学习，神经网络就是一个高度非线性的函数，非线性是由激活函数决定的，也就是激活函数是非线性函数。通过这个非线性函数，可以把输入的数据映射到输出的数据空间；高度的非线性是神经网络具有强大的非线性拟合能力的根本。神经网络的表达能力由下面的定理给出。

万能近似定理

万能近似定理(universal approximation theorem)(Hornik et al., 1989;Cybenko, 1989) 表明，一个前馈神经网络如果具有线性输出层和至少一层具有任何一种“挤压”性质的激活函数(例如logistic sigmoid激活函数)的隐藏层，只要给予网络足够数量的隐藏单元，它可以以任意的精度来近似任何从一个有限维空间到另一个有限维空间的Borel 可测函数。

正则化的目的是减少test误差而不是training误差，这是要明白的。

Ridge回归，Shrink与SVD

$$\boxed{\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2}$$

等价于：

$$\boxed{\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2}$$

$$\boxed{\text{subject to : } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq t.}$$

上面的问题也等价于假定， y_i, β_i 服从如下分布：

$$\boxed{y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)}$$

$$\boxed{\beta_i \in N(0, \tau^2)}$$

其中： $\lambda = \sigma^2 / \tau^2$

因此RRS(Root sum square)可以写成如下形式：

$$\boxed{RRS(\lambda) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) + \lambda \beta^T \beta}$$

通过对 β 求导并令其为0，可以得到：

$$\boxed{\hat{\beta}^{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}}$$

为了建立起L2与SVD之间的联系，我们对 \mathbf{X} 进行SVD分解：

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T}$$

我们重写没有正则化的最小二乘拟合：

$$\boxed{\mathbf{X}\beta^{ls} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{y}}$$

对于L2正则化的最小二乘法：

$$\boxed{\mathbf{X}\beta^{ls} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{D}^2 + \lambda I)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{y}}$$

$$\boxed{\mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{D}^2 + \lambda I)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{y} = \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_j \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda} \mathbf{u}_j^T \mathbf{y}}$$

从上面的分式 $\frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda}$ 可以知道，对于 $d_j \ll \lambda$ ，则相应的方向会收缩到0。可以认为L2就是对数据进行了SVD分解后，只保留了 $d_j > \lambda$ 的分量。

Lasso(L1)回归

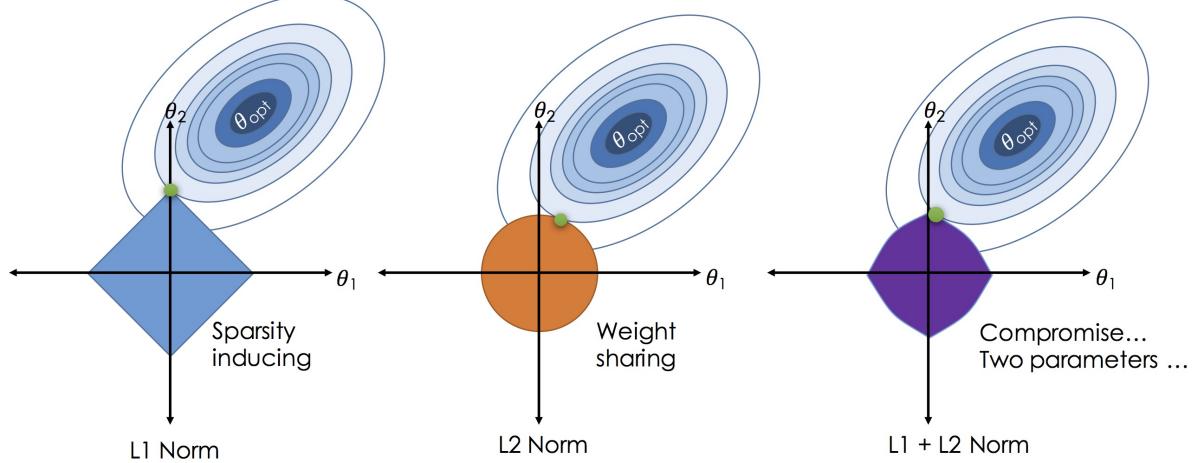
$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

等价于：

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j)^2$$

$$\text{subject to : } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t.$$

L1更容易产生稀疏性,因为椭圆与菱形更易在菱形顶点相交,而与圆形不容易在坐标轴上相切。



L1稀疏性的数学解析

一个数学上更严格的解析。。

上面的问题也等价于假定, y_i, β_i 服从如下分布:

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in (1/2\tau) \exp(-|\beta|/\tau)$$

其中: $\tau = 1/\lambda$

因此 β_i 更容易分布在0的附件,也就是能级排斥(量子混沌里面的概念, L1是可积系统, L2是GOE)

最小二乘一般通过Cholesky分解($p^3 + Np^2/2$)或者QR分解(NP^2)来实现, 前者一般更快, 但是没有后者稳定。

聚类

聚类的方法有

1. K-means
2. 核K均值
3. 谱聚类
4. K中值

无监督学习中的EM算法是否属于聚类算法？

K均值EM等聚类算法

K-means是一种无监督的学习方法，通过定义距离与分类的数目K，样本归属于哪个类，取决于该样本距离K个类中心的距离，选择距离最小的类作为归属。随机选择K个起始点，通过迭代，最终收敛。其迭代过程就是求如下函数极小的过程。

$$E = \sum_{i=1}^K \sum_{x \in C_i} \|x - u_i\|^2$$

$$u_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} x$$

问题

一个主要的问题就是怎么选取类的数目K。

改进方案

k-means对初始值的设置很敏感，所以有了k-means++、intelligent k-means、genetic k-means。

k-means对噪声和离群值非常敏感，所以有了k-medoids和k-medians。

k-means只用于numerical类型数据，不适用于categorical类型数据，所以k-modes。

k-means不能解决非凸(non-convex)数据，所以有了kernel k-means

K-Means算法流程

输入：样本集D=(x_1, x_2, \dots, x_m)，聚类数目k。

从D中随机选取k个样本点作为中心。 (u_1, u_2, \dots, u_k)

repeat:

 ■令 $C_i = 0, (1 \leq i \leq k)$

 ■for j=1,2,...,m,do

 ■样本点 x_j 到与各均值 u_i 的距离

 ■ $d_{ij} = \|x_j - u_i\|_2$

 ■根据距离确定样本点j所属于的类： $\lambda_j = \arg \min d_{ji}$

 ■将 x_j 划入所属的类 $C_{\lambda_j} = C_{\lambda_j} + u_i$

 ■end for

 ■for i=1,2,...,k,do

 ■计算 ■ $u'_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} x$

 ■if $u'_i \neq u_i$

 ■ $u_i = u'_i$

 ■else:

 ■not change

 ■end for

■until所有的均值向量都没有改变。

■输出簇划分 $C = (C_1, C_2, \dots, C_k)$

高斯混合模型

三硬币模型

三枚硬币A, B, C正面出现的概率是 π, p, q . 进行如下实验: 先掷硬币A, 正面选硬币B, 反面选硬币C; 然后掷选出的硬币, 掷硬币的结果出现正面记作1, 反面记作0. 独立地重复n次实验, 得到一个观察序列如下:

1,1,0,1,0,0,1,0,1,1

三硬币模型可以写作:

$$\blacksquare P(y|\theta) = \sum_z P(y, z|\theta) = \sum_z P(z|\theta)P(y|z, \theta)$$

$$\blacksquare = \pi p^y(1-p)^{1-y} + (1-\pi)q^y(1-q)^{1-y}$$

$\Theta = (\pi, p, q)$ 是模型参数, 随机变量y的数据可以观察, 随机变量z的数据不可以观察。

最大似然函数

寻找一组模型参数, 使得在该参数下, 观测序列出现的概率极大。

将可观察数据表示为 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$, 观测数据表示为

$$\blacksquare Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T.$$

则观察数据的似然函数是:

$$\blacksquare P(Y|\theta) = \sum_Z P(Z|\theta)P(Y|Z, \theta)$$

$$\blacksquare = \prod_{j=1}^n [\pi p^y(1-p)^{1-y} + (1-\pi)q^y(1-q)^{1-y}]$$

考虑求模型参数 $\Theta = (\pi, p, q)$ 的极大似然估计, 即:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log(P(Y|\theta))$$

只能通过迭代来求解模型参数。EM算法就是该问题的一种方法。

EM算法

E步: 计算模型参数 $\pi^{(i)}, p^{(i)}, q^{(i)}$ 下观测数据 y_j 来自掷硬币B的概率是(无论是正面还是反面, 都可以用下面公式进行计算):

$$\blacksquare u^{(i+1)} = \frac{\pi^{(i)}(p^{(i)})^{y_j}(1-p^{(i)})^{1-y_j}}{\pi^{(i)}(p^{(i)})^{y_j}(1-p^{(i)})^{1-y_j} + (1-\pi^{(i)})(q^{(i)})^{y_j}(1-q^{(i)})^{1-y_j}}$$

M步: 计算模型参数的新估计值:

之所以抛硬币B是因为抛硬币A出现了正面, 因此 π (抛A出现正面的几率)如下计算)

$$\blacksquare \pi^{(i+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u^{(i+1)}$$

在抛硬币B的前提下, 根据抛B得到正面的频率得到P(B正面出现的概率)

$$\blacksquare p^{(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n u^{(i+1)} y_j}{\sum_{j=1}^n u^{(i+1)}}$$

在抛硬币C的前提下(1-来自抛B的概率), 根据抛C得到正面的频率得到P(C正面出现的概率)

$$\blacksquare p^{(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n (1-u^{(i+1)}) y_j}{\sum_{j=1}^n (1-u^{(i+1)})}$$

EM算法流程

输入: 观察变量数据Y, 隐变量数据Z, 联合分布 $P(Y, Z|\theta)$, 条件分布 $P(Z|Y, \theta)$;

输出: 模型参数 θ .

(1)选择参数的初始值 $\theta^{(0)}$, 开始迭代;

(2)E步: 记 $\theta^{(i)}$ 为第*i*次迭代参数 θ 的估计值, 在第*i*+1次迭代的E步, 计算:

$$\blacksquare Q(\theta, \theta^{(i)}) = E_z[\log P(Y, Z|\theta)|Y, \theta^{(i)}] = \sum_z P(Z|Y, \theta^{(i)}) \log P(Y, Z|\theta)$$

这里, $P(Y, Z|\theta^{(i)})$ 是在给定

观测数据Y和当前的参数估计 $\theta^{(i)}$ 下隐变量数据Z的条件概率分布:

(3)M步(求导令其等于0得极大):求使 $Q(\theta, \theta^{(i)})$ 极大的 θ ,确定第*i*+1次迭代的参数的估计值 $\theta^{(i+1)}$:

$$\theta^{(i+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^{(i)})$$

(4)重复第(2)(3)步,直到收敛。

Q函数

完全数据的对数似然函数 $\log P(Y, Z|\theta)$ 关于给定观测数据Y和当前参数 θ 下对未观察数据Z的条件概率分布 $\log P(Z|Y, \theta^{(i)})$ 的期望成为Q函数,即:

$$Q(\theta, \theta^{(i)}) = E_z[\log P(Y, Z|\theta)|Y, \theta^{(i)}]$$

高斯混合模型

高斯混合模型是指的具有如下形式的概率分布模型:

$$P(y|\theta) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi(y|\theta_k)$$

其中 α_k 是系数 $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$; $\phi(y|\theta_k)$ 是高斯分布函数, $\theta_k = (u_k, \sigma_k^2)$,

$$P(y|\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(y-u_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

称为第k个分模型。 $\sqrt{2\pi}\sigma_k$

高斯混合模型参数估计得EM算法

可以用EM算法来求解GMM的参数 α_k, u_k, σ_k .

$\gamma_{jk} = 1$ 表示第j个观测来自第k个分模型, $\gamma_{jk} = 0$ 表示第j个观测不是来自第k个分模型。

有了观察数据 y_j 以及未观测数据 γ_{jk} ,则完全数据是:

$$(y_j, \gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jK}), j = 1, 2, \dots, K$$

似然函数为:

$$\begin{aligned} P(y, \gamma|\theta) &= \prod_{j=1}^N P(y_j, \gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jK}|\theta) \\ &= \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^N [\alpha_k \phi(y_j|\theta_k)]^{\gamma_{jk}} \\ &= \prod_{k=1}^K \alpha_k^{n_k} \prod_{j=1}^N [\phi(y_j|\theta_k)]^{\gamma_{jk}} \\ &= \prod_{k=1}^K \alpha_k^{n_k} \prod_{j=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(y_j - u_k)^2}{2\sigma_k^2}\right) \right]^{\gamma_{jk}} \end{aligned}$$

式中 $\sum_{j=1}^N \gamma_{jk} = n_k$, $\sum_{k=1}^K n_k = N$ 。

转化为完全数据的对数似然函数。

GMM算法流程

降维

降维的方法有：

1. PCA
2. 核函数PCA
3. LDA
4. L1正则化
5. 局部保持映射
6. 拉普拉斯特征映射

PCA

机器学习一般面对的是一个高维的问题，样本稀疏。容易面临严重的维数灾难。处理维数灾难的一个重要方法就是降维。确切的来说，有两种情形：

1. 基于距离的聚类问题。对于M个数据，定义距离后，M个数据张成一个MxM的距离矩阵，而且是对称矩阵。
2. 基于数据的低秩分解。对于M个数据，每个数据是N维，我们是对这个数据集张成的MxN维矩阵进行降维。
这就可以用到我们在矩阵计算中的一些方法，比如主成分分析(PCA)，实际上我们是通过SVD来实现PCA的，就是取最大的K个奇异值与奇异向量来实现矩阵的低秩分解。

下面我们主要考虑第一种情况，也就是处理聚类问题。

SVD

对于任何一个MxD的矩阵X可以做如下分解：

$$\blacksquare X = UDV^T$$

其中 $U^T U = I_D$, $V V^T = I_N$, D是MxD的对角矩阵。

$$\blacksquare X X^T = UDV^T VD^T U^T = UDD^T U^T$$

$$\blacksquare X^T X = VD^T U^T UDV^T = VD^T DV^T$$

是矩阵的本征值分解。因此可以通过上面两式来求解U, V。主要用到的是矩阵本征值，本征矢求解技巧。这都在矩阵计算(第五章)那一章讨论的内容。

对于我们的情况M=D, 因此

$$\blacksquare D^T = D$$

令 $B = X^T X$, 对B做特征值分解，得到

$$\blacksquare B = V \Lambda V^T,$$

假设 Λ 的矩阵元按如下方式排序：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$$

PCA

我们可以通过SVD来实现PCA，具体就是只取X的SVD中的前M个其一分量。

$$\blacksquare X = UDV^T \approx U_M D_M V_M^T$$

其中 U_M, D_M, V_M 对于矩阵X的前M个奇异值分量。

取前d个奇异向量。选择一个比例t，一般取t = 95%，使得。

$$\blacksquare \frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} \geq t$$

PCA的好处

1. 通过降维，使得样本的采样密度变大，这是降维的主要目的¹
2. 当数据收噪声影响时，小的特征值所对应的特征向量一般受噪声影响，因此去掉这些量在一定程度上能起到去噪的作用。

¹. 周志华《机器学习》[←](#)

流形学习¹

流形学习是一类借鉴拓扑流行概念的降维方法，"流形"是在局部与欧氏空间同胚的空间。换言之，它在局部具有欧氏空间的性质，可以用欧式距离来计算距离。对于近邻，我们可以利用欧式距离来计算距离，而对于非近邻，我们可以利用测地线来计算距离，转化成计算两点之间最短路径，计算最短路径可以利用Dijkstra算法或者Floyd算法。

等度量映射

等度量映射(Isometric Mapping,简称IsoMap)的基本出发点是认为低维流形嵌入到高维空间后，直接在高维空间计算距离具有误导性，因为高维空间的直线距离在低维空间是不可达到。就如下图所示，低维空间的距离是"测地线geodesic"距离，是图中的红线是这两点的测地线，测地线是两点之间的本真距离。显然，直接在高维空间计算两点之间的距离是不恰当的。

我们必须通过流形在局部上与欧氏空间同胚这个性质，对每个点基于欧式距离找到近邻点，然后建立近邻连接图，再计算图中任意两点的距离，算法就是Dijkstra算法或者Floyd算法。

得到任意两点之间的距离之后，就可以利用MDS方法来获得样本点在低维空间的坐标。

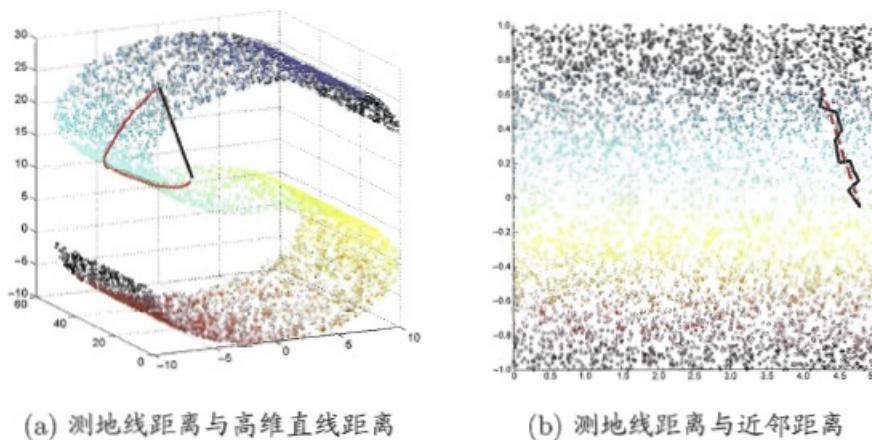


图 10.7 低维嵌入流形上的测地线距离(红色)不能用高维空间的直线距离计算，但能用近邻距离来近似

局部线性嵌入(LLE)

与Isomap试图保持近邻样本之间的距离不同，局部线性嵌入(Locally Linear Embedding)试图保持领域内样本之间的线性关系。如下图所示，假定样本点 x_i 的坐标可以通过它的领域样本 x_j, x_k, x_l 的坐标通过线性组合的方式来重构出来。即：

$$\mathbf{x}_i = w_{ij} \mathbf{x}_j + w_{ik} \mathbf{x}_k + w_{il} \mathbf{x}_l$$

LLE希望上式的关系在低维空间得以保持。

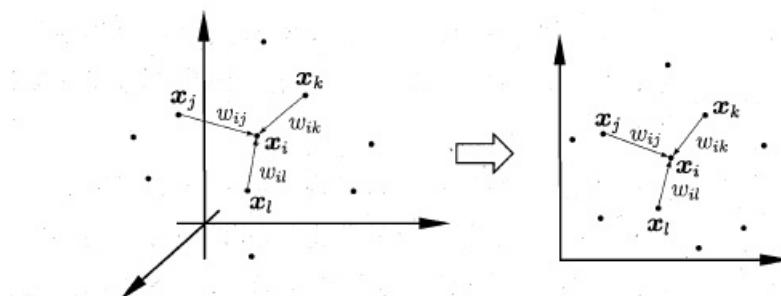


图 10.9 高维空间中的样本重构关系在低维空间中得以保持

LLE为每个样本 \mathbf{x}_i 找到近邻下标集合 Q_i , 然后计算出基于 Q_i 中的样本点对 \mathbf{x}_i 进行线性重构的系数 \mathbf{w}_i .

$$\min_{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}_i - \sum_{j \in Q_i} w_{ij} \mathbf{x}_j\|_2^2$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in Q_i} w_{ij} = 1$$

其中 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 均已知, 令 $C_{jk} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$, w_{ij} 有闭式解:

$$w_{ij} = \frac{\sum_{k \in Q_i} C_{jk}^{-1}}{\sum_{l, s \in Q_i} C_{ls}^{-1}}$$

LLE在低维中保持 \mathbf{w}_i 不变, 于是 \mathbf{x}_i 对应的低维空间坐标 \mathbf{z}_i 可以通过下式求解:

$$\min_{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{z}_i - \sum_{j \in Q_i} w_{ij} \mathbf{z}_j\|_2^2$$

令 $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m) \in R^{(d', m)}$, $(W)_{ij} = w_{ij}$.

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \mathbf{W}),$$

则关于 \mathbf{z}_i 的最优化问题可以转化为:

$$\min_{\mathbf{Z}} \text{tr}(\mathbf{Z} \mathbf{M} \mathbf{Z}^T),$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T = 1,$$

可以对上面你的 \mathbf{M} 进行特征值分解, \mathbf{M} 最小的 d' 个特征值对应的特征向量组成的矩阵就是 \mathbf{Z}^T

度量学习

决策树与集成学习

- 1. 决策树
 - i. ID3
 - ii. C4.5
 - iii. CART
 - iv. Decision Stump
- 2. 集成学习
 - i. Bagging
 - i. 随机森林
 - ii. Boost
 - i. Adaboost
 - ii. GBDT
 - iii. XGBoost
 - iv. LightGBM

Ensemble learning(团体学习)

利用多个学习方法来获得更好的预测能力，机器学习中的系综学习的样本是有限的，但是统计力学中的系综方法其样本是无限的。机器学习中的系综方法包括Bagging,boosting

Bagging算法(Bootstrap aggregating)

参考 是一种团体学习方法,可以看成是一种圆桌会议,或者投票选举的形式,其思想是“群众的眼光是雪亮的”,可以训练多个模型,之后将这些模型进行加权组合,一般这类方法的效果,都会好于单个模型的效果。在实践中,在特征一定的情况下,大家总是使用Bagging的思想去提升效果。

算法步骤 给定一个大小为n的训练集D, Bagging算法从中均匀、有放回地(即使用自助抽样法)选出m个大小为n'的子集 D_i , 作为新的训练集。在这m个训练集上使用分类、回归等算法,则可得到m个模型,同一个训练集中的成员可以有重重复,再通过取平均值、取多数票等方法,即可得到Bagging的结果。

Boosting

在Bagging方法中,我们假设每个训练样本的权重都是一致的;而Boosting算法则更加关注错分的样本,越是容易错分的样本,约要花更多精力去关注。对应到数据中,就是该数据对模型的权重越大,后续的模型就越要拼命将这些经常分错的样本分正确。最后训练出来的模型也有不同权重,所以boosting更像是会整,级别高,权威的医师的话语权就重些。训练:先初始化每个训练样本的权重相等为 $1/d$, d为样本数量;之后每次使用一部分训练样本去训练弱分类器,且只保留错误率小于0.5的弱分类器,对于分对的训练样本,将其权重调整为 $\text{error}(M_i)/(1-\text{error}(M_i))$, 其中 $\text{error}(M_i)$ 为第i个弱分类器的错误率(降低正确分类的样本的权重,相当于增加分错样本的权重);

测试:每个弱分类器均给出自己的预测结果,且弱分类器的权重为 $\log(1-\text{error}(M_i))/\text{error}(M_i)$ 权重最高的类别,即为最终预测结果。

在adaboost中,弱分类器的个数的设计可以有多种方式,例如最简单的就是使用一维特征的树作为弱分类器。

adaboost在一定弱分类器数量控制下,速度较快,且效果还不错。

我们在实际应用中使用adaboost对输入关键词和推荐候选关键词进行相关性判断。随着新的模型方法的出现,adaboost效果已经稍显逊色,我们在同一数据集下,实验了GBDT和adaboost,在保证召回基本不变的情况下,简单调参后的Random Forest准确率居然比adaboost高5个点以上,效果令人吃惊。。。

Bagging和Boosting都可以视为比较传统的集成学习思路。现在常用的Random Forest, GBDT, GBRank其实都是更加精细化,效果更好的方法。后续会有更加详细的内容专门介绍。

决策树与集成学习

决策树是一种基本的回归与分类的方法。决策树由节点与边构成，节点分类内部节点与叶子节点；内部节点表示属性或者特征，叶子节点表示一个类。

决策树学习

训练集 $D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$ 其中 $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \dots x_i^{(n)})$ 是 n 维变量， n 表示特征的数目， $y_i \in (1, 2 \dots K)$ 类标签。训练的本质是基于一定标准得到一组分类规则。我们需要得到一组与训练数据矛盾较小并且泛化能力也好的分类规则，其中泛化能力说的是在测试集上其错误率也小，错误率有不同的定义方式，可以是均方误差，也可以是似然函数，一般回归问题选择均方误差，分类问题选择似然函数，想想这是为什么？。分类规则就是特征选择的过程，特征选择是基于一些可以量化的函数，一般基于信息熵增益最大或者信息熵增益率最大或者 Gini 系数下降最大的规则。因此，接下来我们要定义如下概念。

1. 信息熵
2. 条件熵
3. 信息增益
4. 信息增益率
5. Gini 系数

1. 信息熵

熵的概念来自于统计物理，描述微观系统的混乱程度，由 Rudolf Clausius 提出，

$$S = k_B \ln \Omega = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

其中 k_B 是 Boltzmann constant, Ω 表示系统的可能状态数。

它表示的就是 $\ln(p_i)$ 的期望值。香农把这个概念引入信息学，定义了信息熵。

考虑一个只能取有限 n 个值的系统，值对应的就是状态，比如投硬币，只能取两个值，就是说只能有 2 个状态，因此 $n=2$ 。在统计物理中，状态对应的是系统的能级，也就是一个能级对应一个状态，系统处于不同能级的概率就是 p_i

$$\blacksquare P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2 \dots n$$

$$\text{熵的定义如下: } H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

若系统是确定的，则有一个 $p_i = 1$ ，其他的 $p_i = 0$ 等于 0，因此代入熵的公式可知，熵为 0。可以证明，对于 n 个状态的系统，系统的熵满足如下不等式：

$$\blacksquare 0 \leq H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \ln n.$$

2. 条件熵

联合概率说的是两个及两个以上系统随机变量共同发生的几率问题，条件熵 $H(Y|X)$ 说的是随机变量 X 给定的情况下，随机变量 Y 的条件熵。

计算如下：

$$\blacksquare H(Y|X) = \sum_{i=1}^n p_i H(Y|X = x_i)$$

这里， $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2 \dots n$ 。

$H(Y|X = x_i)$ 计算与上面的信息熵一样，只是对于 $H(Y|X = x_i)$ ，我们只计算 $X = x_i$ 的那些样本的熵，因为我们会对所有 X 取不同值得样本进行求和，因此会遍历整个样本。

3. 信息增益

信息增益是基于以上两个概念的，是针对特征而言的，特征 A 对训练数据集 D 的信息增益 $g(D, A)$ 定义成经验熵 $H(D)$ 与特征 A 给定的条件下， D 的经验条件熵 $H(D|A)$ 之差。即：

$$\blacksquare g(D, A) = H(D) - H(D|A).$$

如果我们知道数据集 D 的信息熵计算，以及条件熵的计算，则信息增益的计算不难。

4. 信息增益率

特征A对训数据集D的信息增益率 $g_R(D, A)$ 定义成信息增益 $g(D, A)$ 与特征A的经验熵 $H(A)$ 之比：

$$g_R(D, A) = \frac{g(D, A)}{H(A)}。$$

其中 $H(A) = \sum_{i=1}^{i=K} p_i \ln p_i$, K是特征A能取不同值得数目, p_i 是取不同值得概率。

他的计算基于信息增益与信息熵。

5. Gini系数

基尼系数定义：对于分类问题，假设有K个类，样本点处于第k个类的概率是 p_k ，则概率分布的基尼系数定义成：

$$Gini(p) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(1 - p_i) = 1 - \sum_{i=1}^{i=K} p_i^2$$

基尼系数描述的是不同类之间的不一致程度，一个类与其它类的不一致概率和，也就是不一致程度程度，说的是从样本集合D中随便挑出两个样本，他们属于不同类的概率。由下面函数刻画 $p_i(1 - p_i)$ 。对于分类问题，我们希望最终的叶子节点里面，所有的样本点尽可能使同一个类里面的，也就是基尼系数尽可能趋近于0。

假设样本D中有K个类, C_k 是第k类的集合, $|C_k|$ 是集合 C_k 的大小, 因此样本集合的基尼系数定义成：

$$Gini(p) = 1 - \sum_{i=1}^{i=K} \left(\frac{|C_k|}{|D|}\right)^2$$

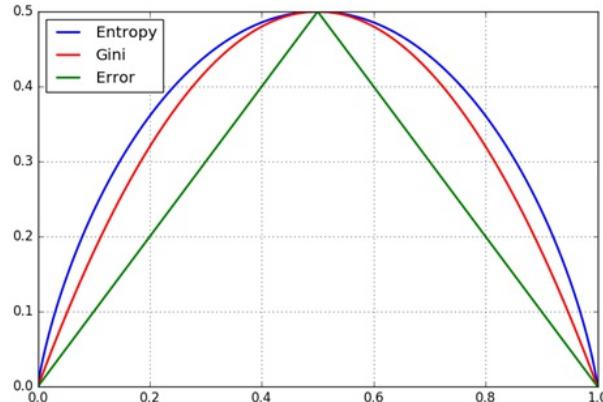
基于不同的指标，比如信息增益，信息增益率，基尼系数，我们会得到不同的决策树生成算法，依次是ID3, C4.5, CART。

关于Gini系数的讨论(一家之言)

□ 考察Gini系数的图像、熵、分类误差率三者之间的关系

■ 将 $f(x)=-\ln x$ 在 $x=1$ 处一阶展开，忽略高阶无穷小，得到 $f(x) \approx 1-x$

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{k=1}^K p_k \ln p_k \\ &\approx \sum_{k=1}^K p_k(1-p_k) \end{aligned}$$



信息熵与基尼系数的函数大致一致，实际上在iris数据集中，生成决策树时，两者没有差别。

ID3算法

ID3算法基于信息增益最大，代码实现如下，它的缺点在于，它倾向于选择取值很多的特征，因为当特征能取很多值得时候，此时系统的不确定度降低，极端情况是，特征能取N个不同的值，N个训练集的数量，此时特征A条件熵为0。为了避免这种情况，而引入了C4.5算法。

假设特征A是信息增益最大的特征，当特征A取离散值时，假设特征A可以取K个不同值，我们选择A作为特征之后会生出K个节点，对于每个节点，我们要重复上面的步骤，继续寻找信息增益最大的特征，只是，这时候特征数目减小了1，减小的这个特征就是A特征本身。当一个节点，它的熵小于一定阈值的时候，我们就不再分割这个节点而是把他当成一个叶子节点。我们可以使用递归来实现ID3算法。

对于特征值取连续的情况，我们通过计算特征值大于阈值与小于阈值的两部分熵之和来计算熵。

算法实现的时候要注意的一点就是，计算熵时，不能让概率等于0，否则会出错。

```

import scipy
import numpy as np
from sklearn import tree
from sklearn.datasets import load_iris
import matplotlib.pyplot as plt

class DecisionTree(object):
    def __init__(self):
        self.training_steps = 50

    def Entropy(self, Prob):
        entropy = 0
        for n in range(Prob.shape[0]):
            entropy -= Prob[n] * (np.log2(Prob[n])) ##Entropy
            #entropy += Prob[n] * (1 - Prob[n]) ##Gini
        return entropy

    def distribution(self, feature_data, threshold_n):
        entropy = 0
        prob = 0.001*np.ones((3, 1))
        for n in range(0, threshold_n):
            for index in range(3):
                if np.abs(feature_data[n, 1] - index) < 0.01:
                    prob[index] += 1
        prob = prob/threshold_n
        p_1 = (1.0*threshold_n)/feature_data.shape[0]
        H_1 = self.Entropy(prob)
        entropy += p_1*H_1

        prob_2 = 0.001*np.ones((3, 1))
        for n in range(threshold_n, feature_data.shape[0]):
            for index in range(3):
                if round(feature_data[n, 1]) == index:
                    prob_2[index] += 1
        prob_2 = prob_2/(feature_data.shape[0] - threshold_n)
        H_2 = self.Entropy(prob_2)
        entropy += (1 - p_1) * H_2
        return entropy

    def best_feature_threshold(self, data):
        best_threshold = 0
        best_feature = 0
        best_entropy = 100000
        feature_num = data.shape[1] - 1
        for feature_index in range(feature_num):
            a_arg = np.argsort(iris_data[:, feature_index])
            sorted_data = iris_data[a_arg]
            for n in range(1, sorted_data.shape[0]):
                threshold = (sorted_data[n-1, feature_index] + sorted_data[n, feature_index])/2
                feature_result_data = np.zeros((sorted_data.shape[0], 2))
                feature_result_data[:, 0] = sorted_data[:, feature_index]
                feature_result_data[:, -1] = sorted_data[:, -1]
                condition_entropy = self.distribution(feature_result_data, n)
                if condition_entropy < best_entropy:
                    best_threshold = threshold
                    best_entropy = condition_entropy
                    best_feature = feature_index
            print best_entropy, best_feature, best_threshold
        return best_entropy, best_feature, best_threshold

if __name__ == '__main__':
    DT = DecisionTree()
    iris = load_iris()
    clf = tree.DecisionTreeClassifier()
    clf = clf.fit(iris.data, iris.target)
    data = iris.data
    target = iris.target
    iris_data = np.zeros((data.shape[0], data.shape[1] + 1))
    iris_data[:, 0:data.shape[1]] = data
    iris_data[:, -1] = target
    best_entropy, best_feature, best_threshold = DT.best_feature_threshold(iris_data)

```

C4.5

C4.5算法弥补了ID3算法的不足，通过使用信息增益率来作为特征的选择标准。

$$g_R(D, A) = \frac{g(D, A)}{H(A)}$$

其中 $H(A) = \sum_{i=1}^{K} p_i \ln p_i$, K是特征A能取不同值得数目, p_i 是取不同值得概率。

模型的剪枝

为什么需要剪枝:提高泛化能力,

我们可以一步步的细分节点而使得系统的分类误差很小,但是这只是训练数据集上的结果,当我们把模型运用到测试集时,误差率会很高,这是因为模型过拟合你,我们通过对决策树进行剪枝来提高模型的泛化能力。

为了进行剪枝,我们得定义剪枝的标准,也就是定义损失函数,损失函数至少要包括两项,一个是模型在训练集上的误差,一个是模型的复杂程度。模型的复杂程度可以定义成与叶子节点正相关。模型在训练集上的误差率可以如下定义。

$$C(T) = \sum_{t=1}^{t=|T|} N_t H_t$$

其中 N_t 是叶子节点t上的样本点数目, H_t 是叶子节点t的熵。

叶子节点的熵定义为:

$$H_t = -\sum_{k=1}^{k=K} \frac{N_{tk}}{N_t} \ln \frac{N_{tk}}{N_t},$$

其中 $k \in (1, 2, \dots, K)$ 是样本结果可以取不同值的数目,也就是标签有K类 N_t 是叶子节点t的样本数目, N_{tk} 是叶子节点t中标签属于k类的数目。总体而言,C(T)刻画的是模型在训练集上的误差。结合这两部分,我们可以定义剪枝的损失函数:

$$C_\alpha(T) = C(T) + \alpha |T|$$

其中正数 α 用来权衡模型的误差率与模型的复杂度。

输入:计算生成的整个树T,参数 α

输出:修剪后的子树 T_α

(1)计算每个节点的经验熵

(2)递归地从树的叶节点向上回溯

设一组叶节点回溯到父节点之前与之后的整个树为 T_B, T_A ,对应的损失函数值分别为 $C_\alpha(T_B)$ 和 $C_\alpha(T_A)$,如果:

$$C_\alpha(T_A) \leq C_\alpha(T_B)$$

则进行剪枝,将父节点变成新的叶节点。

(3)返回(2),直到不能继续为止,得到损失函数最小的子树 T_α

局部加权平均

$$L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_i w_i (\hat{y}_i - y_i)^2$$

$$\text{其中: } w_i = \exp\left(\frac{x_i - \bar{x}}{2\sigma^2}\right)$$

CART

决策树的生成就是递归的构建二叉决策树的过程。对回归树用平方误差最小的准则,对分类树用基尼指数最小化准则,进行特征选择,生成二叉树。

CART包含分类树与回归树,下面分别来讨论分类树与回归树

回归树的生成

假设X和Y分别为输入与输出变量,并且Y是连续变量,给定训练数据集

$$D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)).$$

假设已将输入空间划分为M个单元 R_1, R_2, \dots, R_M ,并且每个单元 R_m 上有一个固定的输出值 c_m ,于是回归树模型可以表示为:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=M} c_m I(x \in R_m)$$

当输入空间的划分确定时,可以用平方误差

$$\sum_{x_i \in R_m} (y_i - f(x_i))^2$$

来表示回归树对于训练数据的预测误差,用平方误差最小的准则来求解每个单元上的最优输出值。

可以求得

$$\hat{c}_m = \text{ave}(y_i | x_i \in R_m).$$

问题是,怎么对输入的空间进行划分?

回归树可以处理离散特征与连续特征,对于连续特征,若这里按第j个特征的取值s进行划分,切分后的两个区域分别为:

$$R_1(j, s) = (x_i | x_i^j \leq s)$$

$$R_2(j, s) = (x_i | x_i^j > s)$$

若为离散特征,则找到第j个特征下的取值s:

$$\blacksquare R_1(j, s) = (x_i | x_i^j = s)$$

$$\blacksquare R_2(j, s) = (x_i | x_i^j \neq s)$$

分别计算 R_1, R_2 的类别估计 c_1, c_2 ,然后计算按照(j,s)切分后的损失:

$\blacksquare \min_{j,s} [\sum_{x_i \in R_1} (y_i - c_1)^2 + \sum_{x_i \in R_2} (y_i - c_2)^2]$,找到是的损失最小的(j,s)对即可,也就是说找到最优特征的分割值 s^* 。递归执行(j,s)的选择过程,知道满足停止条件为止。递归的意思是,对分割出的两个区域 R_1, R_2 分别进行如上的步骤,再分割下去。

总结:

回归树算法:

输入:训练集 $D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$.

输出:回归树T

1.求解选择的切分特征j与切分特征取值s, j将训练集D划分成两部分, R_1, R_2 ,

$$\blacksquare R_1(j, s) = (x_i | x_i^j \leq s)$$

$$\blacksquare R_2(j, s) = (x_i | x_i^j > s)$$

其中:

$$\blacksquare c_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{x_i \in R_1} y_i$$

$$\blacksquare c_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{x_i \in R_2} y_i$$

2.遍历所有的可能解(j,s),找到最优的(j^*, s^*),最优解使得如下损失函数最小,

$$\blacksquare \min_{j,s} [\sum_{x_i \in R_1} (y_i - c_1)^2 + \sum_{x_i \in R_2} (y_i - c_2)^2]$$

按照最优特征(j^*, s^*)来切分即可

3.递归调用1., 2.步骤, 直到满足停止条件

4.将输入空间划分为M个区域 R_1, R_2, \dots, R_M ,返回决策树T

$$\blacksquare f(x) = \sum_{m=1}^{m=M} \hat{c}_m I(x \in R_m)$$

回归树采用了分治策略,对于无法用唯一的全局线性回归来优化的目标进行分而治之,进而可以取得比较准确的结果,但分段取均值并不是一明智的选择,可以考虑将叶节点设置为一个线性函数,这就是所谓的分段线性树模型。

分类树

分类树是CART中用来分类的,不同于ID3与C4.5,分类树采用基尼系数来选择最优的切分特征,而且每次都是二分。

输入:训练集 $D = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$.

输出:回归树T

1)利用特征A的取值a将数据分为两部分,计算A=a时的基尼系数

$$\blacksquare Gini(D, A) = \frac{|D_1|}{D} Gini(D_1) + \frac{|D_2|}{D} Gini(D_2) \text{ 其中}$$

$$\blacksquare D_1(A, a) = (x_i | x_i^A = a)$$

$$\blacksquare D_2(A, a) = (x_i | x_i^A \neq a)$$

2)对整个数据集中所有的可能特征A以及其可能取值a选取基尼系数最小的特征 A^* 与特征下的取值 a^* ,来将数据集切分,将数据集 D_1, D_2 分到两个子节点中去。

3.对子节点(D_1, D_2)递归调用1., 2.步骤,直到满足停止条件

4.返回CART分类树T

CART的剪枝¹

剪枝基于如下的损失函数

$$\blacksquare C_\alpha(T) = C(T) + \alpha |T|$$

其中T为任意子树,|T|为子树的叶子结点个数,C(T)为对训练数据的预测误差(如基尼系数),正数 α 用来权衡模型的误差率与模型的复杂度。

对于固定的 α ,存在唯一的最有子树 $C_\alpha(T)$.

Breiman等人证明,可以用递归的方法对树进行剪枝,将 α 从0开始增大, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$,得到一系列最优子树系列 (T_0, T_1, T_n) ,序列中的子树是嵌套的(?)。

具体的,从整棵树 T_0 开始剪枝,对 T_0 的任意内部节点t,以t为单节点的损失函数是(也就是把t下面的所有节点减掉之后的损失函数):

$$\blacksquare C_\alpha(t) = C(t) + \alpha$$

以t为根结点的字数 T_t 的损失函数是(不进行剪枝时的损失函数):

$$\blacksquare C_\alpha(T_t) = C(T_t) + \alpha|T_t|$$

当\alpha 小于某个值时, 不剪枝会使得整体的损失函数较小, 也就是:

$$\blacksquare C_\alpha(T_t) < C_\alpha(t)$$

当\alpha增大时, 在某一\alpha有:

$$\blacksquare C_\alpha(T_t) = C_\alpha(t)$$

当\alpha再增大时, 不等式反向, 只要 $\alpha = \frac{C(t)-C(T_t)}{|T_t|-1}$, T_t 与t有相同的损失函数。

为此, 对 T_0 中每一个内部节点t, 计算:

$$\blacksquare g(t) = \frac{C(t)-C(T_t)}{|T_t|-1}$$

它表示剪枝之后整体损失函数减小的程度, 在 T_0 中减去 $g(t)$ 最小的 T_t , 将得到的子树作为 T_1 , 同时将最小的 $g(t)$ 设为 α_1 , T_1 为区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 的最优子树。

如此剪枝下去, 在这一过程中, 不断的增加\alpha的取值, 产生新的区间, 最终会的到一组决策树 (T_0, T_1, T_n) , 对应于椅子确定的权衡参数 (a_0, a_1, a_n) ,

通过验证集合中每棵树的总体误差, 也就得到了最终的最优决策树 T^* .

T是整颗决策树吗?

输入:CART 生成树 T_0

输出:剪枝后的最优树 T^*

1) 设 $k=0$, $T = T_0$, $a = +\infty$

3) 自下而上的对内部节点 t 计算 :

$$\blacksquare g(t) = \frac{C(t)-C(T_t)}{|T_t|-1}$$

$a=\min(a, g(t))$

4) 自上而下的访问内部节点 t, 对最小的 $g(t)=a$ 进行剪枝, 并对叶节点 tt 以多数表决形式决定其类别, 得到树 TT

5) $k=k+1, a_k = a, T_k = T$

6) 如果 T 为非单节点树, 回到 4).

7) 对于产生的子树序列 (T_0, T_1, T_n) 分别计算损失, 得到最优子树 T^* 并返回.

现在写出 CART 剪枝算法.

算法 5.7 (CART 剪枝算法)

输入: CART 算法生成的决策树 T_0 ;

输出: 最优决策树 T_α .

(1) 设 $k=0$, $T=T_0$.

(2) 设 $\alpha=+\infty$.

(3) 自下而上地对各内部结点 t 计算 $C(T_t)$, $|T_t|$ 以及

$$g(t) = \frac{C(t) - C(T_t)}{|T_t| - 1}$$

$$\alpha = \min(\alpha, g(t))$$

这里, T_t 表示以 t 为根结点的子树, $C(T_t)$ 是对训练数据的预测误差, $|T_t|$ 是 T_t 的叶结点个数.

(4) 自上而下地访问内部结点 t , 如果有 $g(t)=\alpha$, 进行剪枝, 并对叶结点 t 以多数表决法决定其类, 得到树 T .

(5) 设 $k=k+1$, $\alpha_k=\alpha$, $T_k=T$.

(6) 如果 T 不是由根结点单独构成的树, 则回到步骤 (4).

(7) 采用交叉验证法在子树序列 T_0, T_1, \dots, T_n 中选取最优子树 T_α . ■

CART 总结

CART(classification and regression tree)即分类回归树, 意思是它既可以用来做分类又可以用来做回归。

对分类问题, 我们基于基尼系数构造分类树, 其做法与ID3, C4.5一致。

对于回归问题, 我们基于平方误差最小, 构造回归树。构造就是, 基于一个特征(输入样本的一个维度), 选择最佳的切分点, 把当前数据集分成两部分, 分别求两部分输出值的质心(平均值), 再求两部分中的每一部分的输出值到该区域质心的平方误差, 对平方误差求和, 选择最佳切分点, 使得这两部分的误差和最小, 这就是该特征的最佳切分点, 再在该数据集中的所有特征中这个误差, 找到最佳的切分特征, 最后得到最佳特征以及最佳特征的切分点。基于这两个值, 把数据集分成两部分, 再对这两部分分别进行如上的操作(求最佳特征与该特征下的最佳切分点)

1. 决策树之 CART . ←

集成学习

集成学习就是组合一系列的弱分类器生成强分类器。组合的弱分类器之间的关系有两种：

一种是彼此间相互依赖，一系列学习器之间需要串行生成，代表算法是Boosting系列算法，代表算法是AdaBoost与GBDT。

一种是学习器彼此间无关联，一些列算法可以并行的生成，代表算法是Bagging(Bootstrap Aggregating)和随机森林(Random Forest)系列。随机森林是时Bagging的进行版，随机表现在两个方面，一方面是取样本点是随机的，另一方面，选择特征也是随机的（比如总共有N个特征，随机选取小于N的K个特征）

还有一种是两者的结合物：stacking

PAC, 弱可学习, 强可学习

PAC(Probably approximately correct)

强可学习：如果存在一个多项式的学习算法学习呀，学习的正确率很高

弱可学习：如果存在一个多项式的学习算法学习呀，学习的正确率仅比随机猜测略好

在PAC学习框架下，一个概念是强可学习的充分必要条件是这个概念是弱可学习的。

集成学习的理论基础

我们考虑多个不相干分类器叠加处理二分类的问题， $y \in (-1, +1)$ 和真实的函数 f ，假设基分类器的错误率都是 ϵ ，即对每个分类器都有

$$\mathbb{P}(h_i(x) \neq f(x)) = \epsilon$$

假设集成通过简单的投票表决结合 T 个基分类器，若半数的基分类器正确，则集成分类正确。

$\{\% \text{math}\} \text{kern}{10 em} H(x) = \text{sign}(\sum_{i=1}^T h_i(x)) \{\% \text{endmath}\}$

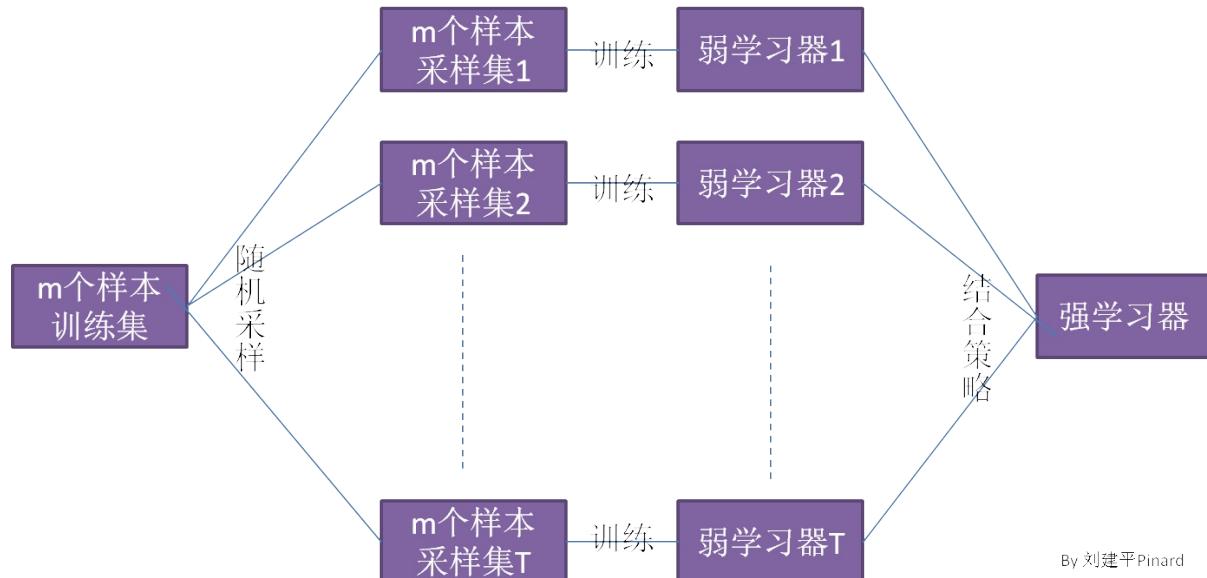
价格基分类器之间的错误率是相互独立的，则由Hoeffding不等式可知，集成的错误率为：

$$\mathbb{P}(H(x) \neq f(x)) = \sum_{i=0}^{[T/2]} \binom{T}{k} (1 - \epsilon)^k \epsilon^{T-k} \leq \exp\left(-\frac{1}{2} T(1 - 2\epsilon)^2\right)$$

上式表明，随着集成中个体分类器数目 T 的增大，集成的错误率将指数下降，最终趋向于0。

Bagging

Bagging系列方法的原理图如下：



Bagging的本质思想是平均一个个多noisy(variance大)但是近似无偏的模型，因此可以减少variance。树是bagging理想的候选者，因为他们能抓住数据中复杂的相互作用结构。在大多数问题中，boosting相对于bagging有压倒性优势，成为更好的选择。

Boosting通过弱学习者的时间演化，成员投一个带权重的票。

Regression: $\hat{f}_{rf}^B(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b(x)$

因为从bagging中生成的树是id(identically distributed),B颗树的期望与单颗树的期望一样，如果输出之间是IID(independent identically distributed)，每颗树的variance是 σ^2 ,则B颗树的variance是 $\frac{\sigma^2}{B}$,假设树之间的关联系数是c,则B颗树的variance是：

$$c\sigma^2 + \frac{1-c}{B}\sigma^2$$

如果c=1,就回到iid情况,如果c ≠ 0,则上面的第一项不会随着B增大而减小,只有第二项会随着B增大而减小,因此我们要尽量使得树之间的关联系数c趋于0.这可以通过随机化来实现,对样本和对特征这两方面随机化。

问题:怎么构造具有负关联系数的系统？ $\hat{f}_{bag}(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^*(x)$

当B趋于无穷时,上述表达式就是bagging 估计的一个Monte Carlo估计。

Random Forest

参数推荐：

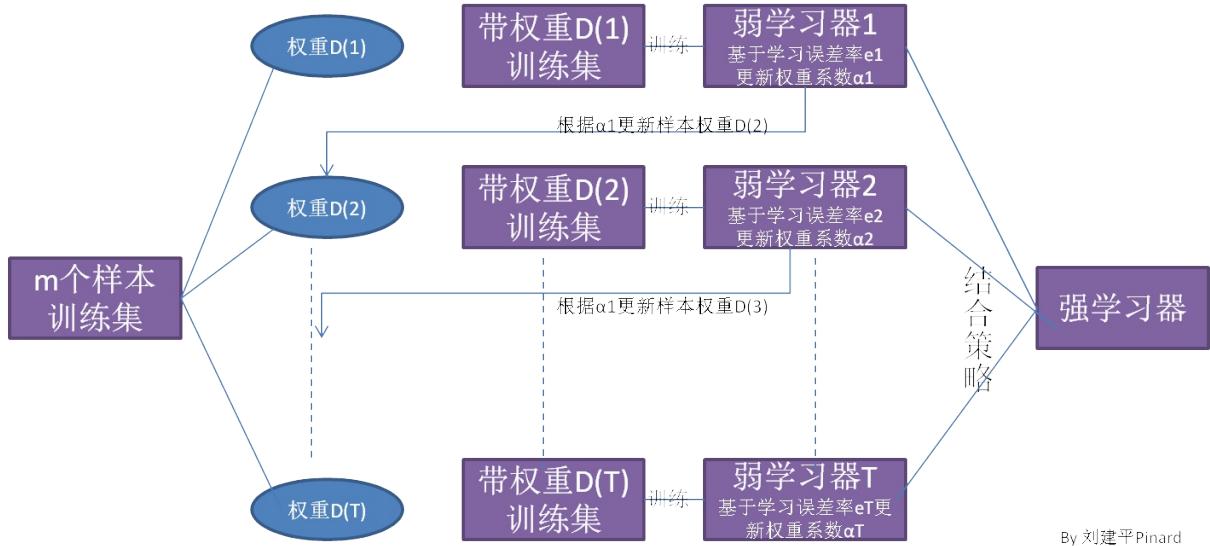
对于分类问题，默认m是 \sqrt{p} ,最小的节点数是1.

对于回归问题，默认的m是 $p/3$, 最小的节点尺寸是5.

OOB:out of box, bagging中有 $(1 - \frac{1}{N})^N = 1/e$ 的样本没有被选中,可以用来做验证,因此不需要交叉验证。当OOB误差稳定后,训练也就可以结束了。

Boosting

Boosting系列方法的原理图如下：



AdaBoost

Boosting系列算法的代表就是AdaBoost。

算法如下：

输入：训练数据集 $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N))$, 其中 $x_i \in X \subseteq R^n, y \in (-1, +1)$

输出：最终的分类器 $G(x)$

(1) 初始化训练数据集的权重分布

$$D_1 = (w_{11}, \dots, w_{1i}, \dots, w_{1N}),$$

$$w_{1i} = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \dots, N$$

(2) 对 $m=1, 2, \dots, M$

使用具有权值分布 D_m 的训练数据集进行训练，得到基分类器

$$G_m(x) : \chi \in (-1, +1)$$

(b) 计算 $G_m(x)$ 在训练集上的分类误差率：

$$e_m = P(G_m(x_i) \neq y_i) = \sum_{i=1}^N w_{mi} I(G_m(x_i) \neq y_i)$$

(c) 计算 $G_m(x)$ 的系数

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \log \frac{1-e_m}{e_m}$$

这里用的是自然对数。

(d) 更新训练数据集的权值分布：

$$D_1 = (w_{m+1,1}, \dots, w_{m+1,i}, \dots, w_{m+1,N}),$$

$$w_{m+1,i} = \frac{w_{mi}}{Z_m} \exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i)), i = 1, 2, \dots, N$$

这里， Z_m 是归一化因子：

$$Z_m = \sum_{i=1}^N w_{mi} \exp(-\alpha_m y_i G_m(x_i))$$

它使 D_{m+1} 成为一个概率分布。

(3) 构建基本分类器的线性组合：

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_m G_m(x)$$

得到最终分类器

$$G(x) = \text{sign}(f(x)) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_m G_m(x)\right)$$

由 α_m 的定义可以知道, 第m个分类器的误差率越小, 则 α_m 的值越大, 因此第m个分类器在总的分类器中占的比重越大。因此, AdaBoost会加大那些准确率很高的分类器的权重。

同时, 在第m+1个分类器求解时, 对于上一轮被分错的样本的权值会变大。

不改变所给的训练数据, 而不断的改变训练数据权值的分布, 使得训练数据在基本分类器的学习中起不同的作用, 这是AdaBoost的一个特点。可以参考《统计机器学习》8.1节的例子来加深理解。

AdaBoost算法的训练误差分析

定理:(AdaBoost的训练误差界)

AdaBoost 算法最终分类器的训练误差界为:

$$\blacksquare \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(G_m(x_i) \neq y_i) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-y_i f(x_i)) = \prod_m Z_m$$

定理(二分类问题AdaBoost的训练误差界)

$$\blacksquare \prod_m Z_m = \prod_{m=1}^M [2\sqrt{\frac{e_m(1-e_m)}{1-4\gamma_m^2}}] = \prod_{m=1}^M \sqrt{\frac{1-4\gamma_m^2}{1-4\gamma_m^2}} \leq \exp(-2 \sum_{m=1}^M \gamma_m m^2)$$

其中: $\gamma_m = \frac{1}{2} - e_m$

梯度提升

提升树是以分类树或者回归树为基本分类器的提升方法, 提升树被认为是统计学习中性能最好的方法之一。

提升树实际采用加法模型(即基函数的线性组合)与前向分步算法。以决策树为基函数的提升方法称为提升树。对分类问题决策树是二叉分类树, 对回归问题决策树是二叉回归树。

决策树桩(decision stump): 可以看成是一个根节点直接连接两个叶节点的简单决策树。提升树模型可以表示为决策树的加法模型。

$$\blacksquare f_M(x) = \sum_{m=1}^M T(x; \Theta_m)$$

其中: $T(x, \Theta_m)$ 表示决策树; Θ_m 为决策树的参数; M为树的个数。

梯度提升算法:

提升树算法采用前向分步算法。首先缺点初始提升树 $f_0(x) = 0$, 第m步的模型是:

$$\blacksquare f_m(x) = f_{m-1}(x) + T(x; \Theta_m)$$

其中, $f_{m-1}(x)$ 为当前模型, 通过经验风险极小化来确定下一刻决策树的参数 Θ_m

$$\blacksquare \hat{\Theta}_m = \operatorname{argmin}_{\Theta_m} \sum_{i=1}^N L(y_i, f_{m-1}(x_i) + T(x_i; \Theta_m)).$$

对于一个训练数据集 $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$, $x_i \in \chi \subset R^N$, χ 为输入控件, $y_i \in R$, 为输出空间。如果将输入控件 χ 划分为J个互不相交的区域 R_1, R_2, \dots, R_J , 并且在每个区域上确定输出的常量 c_j , 那么树可以表示为:

$$\blacksquare T(x; \theta) = \sum_{j=1}^J c_j I(x \in R_j).$$

其中, 参数 $\Theta = ((R_1, c_1), (R_2, c_2), \dots, (R_J, c_J))$ 表示树的区域划分和各区域上的常数。J是回归树的发杂都, 即叶节点个数。

回归为题提升树使用以下前向分步算法:

$$\blacksquare f_0(x) = 0$$

$$\blacksquare f_m(x) = f_{m-1}(x) + T(x; \Theta_m), m = 1, 2, \dots, M$$

$$\blacksquare f_m(x) = \sum_{m=1}^M T(x; \Theta_m)$$

在前向分步算法的第m步, 给定当前模型 $f_{m-1}(x)$, 需求解:

$$\blacksquare \hat{\Theta}_m = \operatorname{argmin}_{\Theta_m} \sum_{i=1}^N L(y_i, f_{m-1}(x_i) + T(x_i; \Theta_m)).$$

得到 $\hat{\Theta}_m$, 即第m颗树的参数。

采用平方误差损失函数时:

$$\blacksquare L(y, f(x)) = (y - f(x))^2$$

其损失变成:

$$\blacksquare L(y, f_{m-1}(x) + T(x; \Theta_m)) = (y - f_{m-1}(x) - T(x; \Theta_m))^2 = [r - T(x; \Theta_m)]^2$$

这里,

$$\blacksquare r = y - f_{m-1}(x)$$

是当前模型拟合数据的残差。所以, 对回归问题的提升树算法来说, 只需要简单地你和当前模型的残差。

GBDT

当损失函数是平方损失和指数损失函数时，每一步优化是很简单的，但是对于一般损失函数而言，往往每一步优化不容易。针对这一问题，Freidman提出了梯度提升(gradient boosting)算法，这是利用最速下降法的近似方法，其关键是利用损失函数的负梯度在当前模型的值。

$$\blacksquare - \left[\frac{\partial L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)} \right]_{f(x)=f_{m-1}(x)}$$

作为回归问题提升算法中的残差的近似值，拟合一个回归树。

梯度提升树算法

输入：训练数据集 $T = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N))$, $x_i \in \chi \in R^N$, χ 为输入, $y_i \in R$. 损失函数为 $L(y, f(x))$:

输出：回归树 $\hat{f}(x)$.

(1) 初始化

$$\blacksquare f_0(x) = \operatorname{argmin}_c \sum_{i=1}^N L(y_i, c).$$

(2) 对 $m=1, 2, \dots, M$

(a) 对 $i=1, 2, \dots, N$, 计算

$$\blacksquare r_{mi} = - \left[\frac{\partial L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)} \right]_{f(x)=f_{m-1}(x)}$$

(b) 对 r_{mi} 拟合一个回归树，得到第 m 课树叶节点区域 R_{mj} , $j = 1, 2, \dots, J$

(c) 对 $j=1, 2, \dots, J$, 计算

$$\blacksquare c_{mj} = \operatorname{argmin}_c \sum_{x_i \in R_{mj}} L(y_i, f_{m-1}(x_i) + c).$$

$$(d) \text{更新 } f_m(x) = f_{m-1}(x) + \sum_{j=1}^J c_{mj} I(x \in R_{mj}), m = 1, 2, \dots, M$$

(3) 得到回归树

$$\blacksquare \hat{f}(x) = f_M(x) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J c_{mj} I(x \in R_{mj})$$

函数空间的数值优化：

XGBoost¹

模型复杂度惩罚是XGBoost相对于MART的提升。

$$\blacksquare = \sum_{m=1}^M [\gamma T_m + \frac{1}{2} \lambda ||w_m||_2^2 + \alpha ||w_m||_1]$$

MART includes row subsampling, while XGBoost includes both row and column subsampling

Newton boosting

Input: Data set D, A loss function L, A base learner L_Φ , the number of iterations M. The learning rate η

1. Initialize $\hat{f}^{(0)}(x) = \hat{f}_{(0)}(x) = \hat{\theta}_0 = \operatorname{argmin}_\theta \sum_{i=1}^n L(y_i, \theta)$;

2. for $m = 1, 2, \dots, M$ do

3. $\hat{g}_m(x_i) = \left[\frac{\partial L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)} \right]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$

4. $\hat{h}_m(x_i) = \left[\frac{\partial^2 L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)^2} \right]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$

5. $\hat{\phi}_m = \operatorname{argmin}_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) [(-\frac{\hat{g}_m(x_i)}{\hat{h}_m(x_i)}) - \phi(x_i)]^2$

6. $\hat{f}_m(x) = \eta \hat{\phi}_m(x)$;

7. $\hat{f}^m(x) = \hat{f}^{(m-1)}(x) + \hat{f}_m(x)$;

8. end

Output: $\hat{f}(x) = \hat{g}^{(M)}(x) = \sum_{m=1}^M \hat{f}_m(x)$

对于没有惩罚项的Newton tree boosting(NTB)，每一次迭代都最小化如下损失函数：

$$\blacksquare J_m(\phi_m) = \sum_{i=1}^n L(y_i, \hat{f}^{(m-1)}(x_i) + \phi_m(x_i))$$

对于梯度提升算法，基函数是如下的树：

$$\blacksquare \phi_m(x) = \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm})$$

这里的 T 是第 m 颗树叶节点的个数, w_{jm} 是第 m 颗树中第 j 个树叶节点的权重。

对上式进行二阶泰勒展开，并忽略掉常数项可以得到：

$$\blacksquare J_m(\phi_m) = \sum_{i=1}^n [\hat{g}_m(x_i)\phi_m(x_i) + \frac{1}{2}\hat{h}_m(x_i)\phi_m(x_i)^2]$$

代入：

$$\begin{aligned}\blacksquare \phi_m(x) &= \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}) \\ \blacksquare J_m(\phi_m) &= \sum_{i=1}^n [\hat{g}_m(x_i) \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}) + \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) (\sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}))^2]\end{aligned}$$

由于每个样本点只能属于一个叶子节点，因此：

$$\blacksquare I(x \in R_{jm})I(x \in R_{im}) = \delta_{ij}$$

因此上面可以简化成：

$$\begin{aligned}\blacksquare J_m(\phi_m) &= \sum_{i=1}^n [\hat{g}_m(x_i) \sum_{j=1}^T w_{jm} I(x \in R_{jm}) + \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) \sum_{j=1}^T w_{jm}^2 I(x \in R_{jm})] \\ \blacksquare &= \sum_{j=1}^T \sum_{i \in I_{jm}} [\hat{g}_m(x_i) w_{jm} + \frac{1}{2} \hat{h}_m(x_i) w_{jm}^2]\end{aligned}$$

定义：

$$\blacksquare G_{jm} = \sum_{i \in I_{jm}} \hat{g}_m(x_i)$$

$$\blacksquare H_{jm} = \sum_{i \in I_{jm}} \hat{h}_m(x_i)$$

因此，可以把cost function写成：

$$\begin{aligned}J_m(\phi_m) &= \sum_{j=1}^T [G_{jm} w_{jm} + \frac{1}{2} H_{jm} w_{jm}^2] \\ \blacksquare &\geq - \sum_{j=1}^T \frac{1}{2} \frac{G_{jm}^2}{H_{jm}}\end{aligned}$$

成立条件是：

$$w_{jm} = -\frac{G_{jm}}{H_{jm}}, j = 1, 2, \dots, T$$

为了寻找最佳分裂点j，也就是最大化如下的Gain：

$$\blacksquare Gain = \frac{1}{2} [\frac{G_L^2}{H_L} + \frac{G_R^2}{H_R} - \frac{G_{jm}^2}{H_{jm}}]$$

总结起来：Newton tree boosting算法如下：

Input: Data set D, A loss function L, A base learner L_Φ , the number of iterations M. The learning rate η

1. Initialize $\hat{f}^{(0)}(x) = \hat{f}_{(0)}(x) = \hat{\theta}_0 = \operatorname{argmin}_\theta \sum_{i=1}^n L(y_i, \theta);$
2. for m = 1, 2, ..., M do
3. $\hat{g}_m(x_i) = [\frac{\partial L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)}]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$
4. $\hat{h}_m(x_i) = [\frac{\partial^2 L(y_i, f(x_i))}{\partial f(x_i)^2}]_{f(x)=\hat{f}^{(m-1)}(x)}$
5. Determine the structure $\hat{R}_{jm}, j = 1, \dots, T$ by selecting splits which maximize

$$\blacksquare Gain = \frac{1}{2} [\frac{G_L^2}{H_L} + \frac{G_R^2}{H_R} - \frac{G_{jm}^2}{H_{jm}}]$$

6. Determine the leaf weights $w_{jm}, j = 1, \dots, T$ for the learnt structure by

$$\hat{w}_{jm} = -\frac{G_{jm}}{H_{jm}}, j = 1, 2, \dots, T$$

7. $\hat{f}_m(x) = \eta \sum_{j=1}^T \hat{w}_{jm} I(x \in \hat{R}_{jm});$

8. $\hat{f}^{(m)}(x) = \hat{f}^{(m-1)}(x) + \hat{f}_m(x);$

9. end

$$\text{Output: } \hat{f}(x) = \hat{g}^{(M)}(x) = \sum_{m=1}^M \hat{f}_m(x)$$

生成算法

1. 贝叶斯方法
2. HMM
3. DMM-HMM混合系统

贝叶斯方法

朴素贝叶斯

朴素贝叶斯是基于特征条件独立假设。输入变量中所有特征之间是独立的因此，联合条件概率是各个条件概率的乘积。

输入: $X \in R^n$

输出: $Y \in (1, 2, \dots, K)$

条件概率: $P(X = x|Y = C_k) = P(X^{(1)} = x^{(1)}, X^{(2)} = x^{(2)}, \dots, X^{(n)} = x^{(n)}|Y = C_k), k=1,2,\dots,K$

条件独立假设:

$$P(X = x|Y = y) = P(X = x|Y = C_k) = P(X^{(1)} = x^{(1)}, X^{(2)} = x^{(2)}, \dots, X^{(n)} = x^{(n)}|Y = C_k) = \prod_{j=1}^n P(X^{(j)} = x^{(j)}|Y = C_k)$$

在上面的公式中，先验概率计算如下：

$$P(Y = C_k) = \frac{\sum_{i=1}^N I(y_i=c_k)}{N}, k = 1, 2, \dots, K$$

条件概率计算

假设第j个特征 $x^{(j)}$ 的可能取值集合是 $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{js_j})$ ，条件概率计算如下：

$$P(X^{(j)} = a_{jl}|Y = C_k) = \frac{\sum_{i=1}^N I(x_i^{(j)}=a_{jl}, y_i=c_k)}{\sum_{i=1}^N I(y_i=c_k)}$$

$j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, S_j; k = 1, 2, \dots, K$

后验概率计算

基于贝叶斯定理计算后验概率：

$$P(Y = C_k|X = x) = \frac{P(X=x|Y=C_k)P(Y=C_k)}{\sum_k P(X=x|Y=C_k)P(Y=C_k)}$$

把条件独立假设代入可以得到: $P(Y = C_k|X = x) = \frac{P(Y=C_k) \prod_{j=1}^n P(X^{(j)}=x^{(j)}|Y=C_k)}{\sum_k P(Y=C_k) \prod_{j=1}^n P(X^{(j)}=x^{(j)}|Y=C_k)}$

因为分母对不同的类别k都是一样的，因此只需要求分子就可以了。计算不同的类别k对应的值，分类结果对应概率最大的。

因此朴素贝叶斯可以表示为：

$$y = f(x) = \operatorname{argmax}_{c_k} P(Y = C_k) \prod_{j=1}^n P(X^{(j)} = x^{(j)}|Y = C_k)$$

Laplace Smoothing

在实际计算条件概率的时候，或出现0的情况，这会影响后面的后验概率的计算。一般通过Laplace Smoothing来处理。

$$P(X^{(j)} = a_{jl}|Y = C_k) = \frac{\sum_{i=1}^N I(x_i^{(j)}=a_{jl}, y_i=c_k)+\lambda}{\sum_{i=1}^N I(y_i=c_k)+s_j\lambda}$$

$\lambda > 0, j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, S_j; k = 1, 2, \dots, K$

基本上到此，朴素贝叶斯的介绍也就完结了，朴素贝叶斯不需要计算任何参数，计算简单，缺点是分类性能不一定高。

极大似然估计

极大似然估计是试图在所有的模型参数可能取值中，找到一个能使得数据出现的可能性最大的值。

贝叶斯网络

隐马尔科夫模型

定义

HMM类似于量子力学中的路径积分。马尔科夫模型是关于时序的概率模型，描述由一个隐藏的马尔科夫链生成不可观测的状态随机序列，再由各个状态生成一个可观测而产生可观测随机序列的过程。隐藏的马尔科夫链随机生成的状态的序列成为状态序列(state sequence);每个状态生成一个可观测，而由次产生的可观测的随机序列成为可观测序列(observation sequence).序列的每一个位置又可以看成一个时刻。

马尔科夫模型由初始概率分布、状态转移概率分布以及可观测概率分布确定。

设 Q 是所有可能的状态集合， V 是所有可能的可观测的集合。

$$\blacksquare Q = (q_1, q_2, \dots, q_N), V = (v_1, v_2, \dots, v_M)$$

其中 N 是可能的状态数， M 是可能的可观测数。

I 是长度为 T 的状态序列， O 是对应的可观测序列。

$$\blacksquare I = (i_1, i_2, \dots, i_T), O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$$

A 是状态转移矩阵：

$$\blacksquare A = [a_{ij}]_{N \times N}$$

其中：

$$\blacksquare a_{ij} = P(i_{t+1} = q_j | i_t = q_i), i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$$

是在 t 时刻处于 q_i 的条件下在时刻 $t+1$ 转移到 q_j 的概率。

B 是可观测概率矩阵：

$$\blacksquare B = [b_j(k)]_{N \times M}$$

其中：

$$b_j(k) = P(o_t = v_k | i_t = q_j), k = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$$

是在时刻 t 处于状态 q_j 的条件下生成可观测 v_k 的概率。

π 是初始状态概率向量：

$$\blacksquare \pi = (\pi_i)$$

其中：

$$\blacksquare \pi_i = P(i_1 = q_i), i = 1, 2, \dots, N$$

是在时刻 $t=1$ 处于状态 q_i 的概率。

马尔科夫模型 λ 可以用三元符号来表示：

$$\blacksquare \lambda = (A, B, \pi)$$

A, B, π 称为马尔科夫模型的三要素。

马尔科夫模型的两个假设：

(1)齐次马尔科夫假设。任一时刻只与前一时刻有关系

$$\blacksquare P(i_t | i_{t-1}, o_{t-1}, \dots, i_1, o_1) = P(i_t | i_{t-1}), t = 1, 2, \dots, T$$

(2)可观测独立性假设：任一时刻的可观测只依赖于该时刻的马尔科夫链的状态，而与其他可观测以及状态没有关系。

$$\blacksquare P(o_t | i_T, o_T, \dots, i_{t+1}, o_{t+1}, i_t, i_{t-1}, o_{t-1}, i_1, o_1) = P(o_t | i_t)$$

HMM的三个问题

1. 概率计算问题：给定模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ，和可观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ ，计算在模型 λ 下可观测序列 O 出现的概率 $P(O|\lambda)$ 。
2. 学习问题：已知可观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ ，估计模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ，使得 $P(O|\lambda)$ 最大。即用极大似然法的方法估计参数。
3. 预测问题(也称为解码(decoding)问题)：已知可观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ 和模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ ，求给定可观测序列条件概率 $P(I|O)$ 最大的序列 $I = (i_1, i_2, \dots, i_T)$ ，即给定可观测序列，求最有可能的对应的状态序列。

概率计算问题

直接计算方法：

问题:给定模型 $\lambda = (A, B, \pi)$,和观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$,计算在模型 λ 下观测序列 O 出现的概率 $P(O|\lambda)$ 。

对于状态序列 $I = (i_1, i_2, \dots, i_T)$ 的概率是: $P(I|\lambda) = \pi_{i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{T-1} i_T}$,

对于上面这种状态序列,产生观测序列 $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ 的概率是:

$$P(O|I, \lambda) = b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\dots b_{i_T}(o_T),$$

因此I和O的联合概率是:

$$P(O, I|\lambda) = P(O|I, \lambda)P(I|\lambda) = b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\dots b_{i_T}(o_T)\pi_{i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{T-1} i_T}$$

对所有可能的I求和,得到:

$$\blacksquare P(O|\lambda) = \sum_I P(O, I|\lambda)$$

直接计算,时间复杂度是 $O(TN^T)$.为了降低计算的时间复杂度,引入了前向算法。

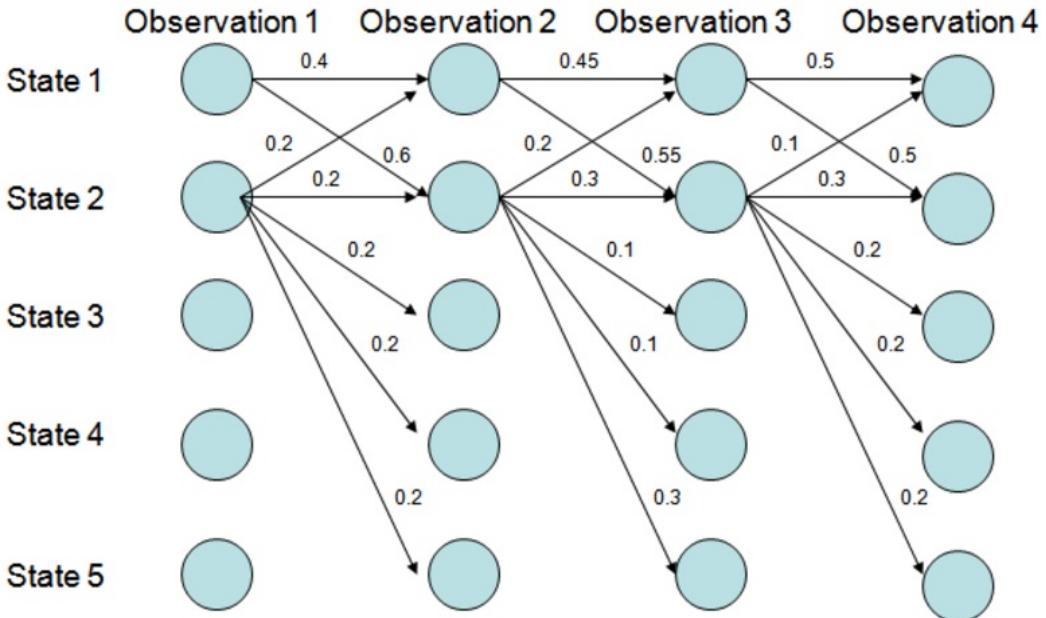
前向算法

给定模型 λ ,定义到时刻t部分观测序列为 $O = o_1, o_2, \dots, o_t$ 且状态为 q_i 的概率为前向概率。记作:

$$\blacksquare \alpha_t(i) = P(o_1, o_2, \dots, o_t, i_t = q_i | \lambda)$$

有了前向概率就可以通过递归的方法来计算任何一个观测序列的概率。就如下图所示:

前向算法使用前向概率的概念,记录每个时间下的前向概率,使得在递推计算下一个前向概率时,只需要上一个时间点的所有前向概率即可。原理上也是用空间换时间。这样的时间复杂度是 $O(N^2 T)$ 。



上面就是状态数目为5,时间 $T=4$ 的图。一个问题是,前向算法是否可以转化为矩阵求解问题?

$$\blacksquare \alpha_t = (\alpha_t(1), \alpha_t(2), \dots, \alpha_t(N))^T$$

初始状态是 π ,转移矩阵是 A ,因此时刻t的概率分布是一个 $N \times M$ 的矩阵,也就是 N 个状态,每个状态有 M 个分立值,计算如下:问题是怎么降低运算复杂度? N^T 的复杂度是 $O(N^{2.373} \log T)$

后向概率

$$\blacksquare \beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \dots, o_T | i_t = q_i, \lambda)$$

定义 $\blacksquare \beta_T(i) = 1, i = 1, 2, \dots, N$

对 $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$ 有:

$$\blacksquare \beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \beta_t &= A^{T-t} \prod_{j=t+1}^T x B[o_j], t = T-1, T-2, \dots, 1 \\ \blacksquare \beta_t &= (\beta_t(1), \beta_t(2), \dots, \beta_t(N))^T \end{aligned}$$

一些概率与期望值

(1) 给定模型 λ 以及观测 O , 在时刻t处于状态 q_i 的概率为:

$$\blacksquare \gamma_t(i) = P(i_t = q_i | O, \lambda) = \frac{P(i_t = q_i, O | \lambda)}{P(O | \lambda)}$$

因为 $\blacksquare \alpha_t(i) \beta_t(i) = P(i_t = q_i, O | \lambda)$

$$\text{所以: } \blacksquare \gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \beta_t(i)}$$

(2) 给定模型 λ 以及观测 O , 在时刻t处于状态 q_i 且在t+1时刻处以 q_j 的概率为:

$$\blacksquare \xi_t(i, j) = P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j | O, \lambda)$$

$$\blacksquare \xi_t(i, j) = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda)}{P(O | \lambda)} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda)}$$

而:

$$\blacksquare P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O | \lambda) = \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

所以:

$$\blacksquare \xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}$$

(3) 将 $\gamma_t(i), \xi_t(i, j)$ 对不同时刻t求和, 可以得到一些有用的期望:

(a) 在观测 O 下状态i出现的期望值:

$$\blacksquare \sum_{i=1}^T \gamma_t(i)$$

(b) 在观测 O 下由状态i转移的期望值:

$$\blacksquare \sum_{i=1}^{T-1} \gamma_t(i)$$

(c) 在观测 O 下由状态i转移到状态j的期望值:

$$\blacksquare \sum_{i=1}^{T-1} \xi_t(i, j)$$

学习算法

监督学习方法

我们有观测序列和对应的状态序列 $[(O_1, I_1), (O_2, I_2), \dots, (O_S, I_S)]$

怎么可以通过统计方法来得到转移矩阵A, 观测概率B, 以及初始状态概率 π

$$\blacksquare \hat{a}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{T-1} \gamma_k(i) \xi_k(i, j)}{\sum_{k=1}^{T-1} \gamma_k(i)}, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$$

$$\blacksquare \hat{b}_j(k) = \frac{\sum_{i=1}^T \gamma_i(k) \xi_i(i, j)}{\sum_{i=1}^T \gamma_i(k)}, j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, M$$

初始状态概率 π_i 的估计值 $\hat{\pi}_i$ 为S个样本中初始状态为 q_i 的频率。

人工标注的成本很高, 因此就会利用非监督学习的方法。

Baum-Welch算法思想

假设给定训练数据只包含S个长度为T的观察序列 (O_1, O_2, \dots, O_s) 而没有对应的状态序列, 目标是学习HMM模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ 的参数。我们将观测序列数据堪称观察数据O, 状态序列数据看作不可观测的隐数据I, 那么隐马尔科夫模型事实上是一个含有隐变量的概率模型:

$$\blacksquare P(O | \lambda) = \sum_I P(O | I, \lambda) P(I | \lambda)$$

他的参数学习可以由EM算法来实现。

4. 确定完全数据的对数似然函数

所有观测数据写成 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$, 所有隐数据写成 $I = (i_1, i_2, \dots, i_T)$, 完成数据是 $(O, I) = (o_1, o_2, \dots, o_T, i_1, i_2, \dots, i_T)$. 完全数据的对数似然函数是 $\log P(O, I | \lambda)$

5. EM算法的E步, 求Q函数 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$

$$\blacksquare Q(\lambda, \hat{\lambda}) = E_I[\log P(O, I | \lambda) | O, \hat{\lambda}]$$

$$\blacksquare Q(\lambda, \hat{\lambda}) = \sum_I \log P(O, I | \lambda) P(O, I | \hat{\lambda})$$

其中, $\hat{\lambda}$ 是隐马尔科夫模型参数的当前估计值, λ 是要极大化的马尔科夫模型参数。

$$\blacksquare P(O, I | \lambda) = \pi_{i_1} b_{i_1}(o_1) b_{i_2}(o_2) \dots b_{i_T}(o_T) \pi_{i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{T-1} i_T}$$

于是函数 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 可以写成:

$$\blacksquare Q(\lambda, \hat{\lambda}) = \sum_I \log \pi_{i_1} P(O, I | \hat{\lambda}) + \sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{i_t i_{t+1}} \right) P(O, I | \hat{\lambda}) + \sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log b_{i_t}(o_t) \right) P(O, I | \hat{\lambda})$$

式中求和都是对所有训练数据的序列总长度 T 进行的。

6. EM算法的M步: 极大化Q函数 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 求模型参数 A, B, π, λ 。极大化, 满足梯度为0, 也就对 A, B, λ 中的元素分别求导令其为0。

在 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 中的三项中, 分别只包含了 $\pi, a_{ij}, b_j(k)$, 因此求解起来比较方便。此外, 我们还可以利用概率和为1的限定条件, 也就是利用拉格朗日乘子来进行计算。

对 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 的第一项, 我们求 λ :

$$\blacksquare \sum_{i=1}^N \log \pi_{i1} P(O, I | \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \log \pi_i P(O, i_1 = i | \hat{\lambda})$$

因为 π_i 满足约束条件 $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$, 利用拉格朗日乘子, 写出拉格朗日函数:

$$\blacksquare \sum_{i=1}^N \log \pi_i P(O, i_1 = i | \hat{\lambda}) + \gamma (\sum_{i=1}^N \pi_i - 1)$$

对其进行求偏导并令其为0:

$$\blacksquare \frac{\partial}{\partial \pi_i} [\sum_{i=1}^N \log \pi_i P(O, i_1 = i | \hat{\lambda}) + \gamma (\sum_{i=1}^N \pi_i - 1)] = 0$$

得到:

$$\blacksquare P(O, i_1 = i | \hat{\lambda}) + \gamma \pi_i = 0$$

对 i 求和得到 γ :

$$\blacksquare \gamma = -P(O | \hat{\lambda})$$

代入上式, 得到:

$$\blacksquare \pi_i = \frac{P(O, i_1 = i | \hat{\lambda})}{P(O | \hat{\lambda})}$$

对 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 的第二项, 我们求 a_{ij} :

$$\blacksquare \sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{i_t i_{t+1}} \right) P(O, I | \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{T-N} \sum_{t=1}^{T-1} \log a_{ij} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j | \hat{\lambda})$$

利用约束条件 $\sum_{i=1}^N a_{ij} = 1$, 利用拉格朗日乘子可以得到:

$$\blacksquare a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j | \hat{\lambda})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i | \hat{\lambda})}$$

对 $Q(\lambda, \hat{\lambda})$ 的第三项, 我们求 $b_j(k)$:

$$\blacksquare \sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log b_{i_t}(o_t) \right) P(O, I | \hat{\lambda}) = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T \log b_j(o_t) P(O, i_t = j | \hat{\lambda})$$

利用 $\sum_{k=1}^M b_j(k) = 1$. 注意只有在 $o_t = v_k$ 时, $b_j(o_t)$ 对 $b_j(k)$ 的偏导数才不为0, 以 $I(o_t = v_k)$ 表示, 求得:

$$\blacksquare b_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^T P(O, i_t = j | \hat{\lambda}) I(o_t = v_k)}{\sum_{t=1}^T P(O, i_t = j | \hat{\lambda})}$$

$\hat{\lambda}$ 是当前 (A, B, π) 的估计值, 因此可以通过迭代, 得到 (A, B, π) 的收敛解。

Baum-Welch算法

输入: 观测数据 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$;

输出: 隐马尔科夫模型的参数

(1) 初始化

对n=0,选取 $a_{ij}^{(0)}, b_j(k)^{(0)}, \pi_i^{(0)}$ 得到模型 $\lambda^{(0)} = (A^{(0)}, B^{(0)}, \pi^{(0)})$

(2).递推对n=1,2,..,

$$\begin{aligned}\blacksquare a_{ij} &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^T \xi_t(i)} \\ \blacksquare b_j(k) &= \frac{\sum_{t=1, o_t=v_k}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}\end{aligned}$$

$$\blacksquare \pi_i = \gamma_1(i)$$

右端的值按照观测 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ 和模型 $\lambda^{(n)} = (A^{(n)}, B^{(n)}, \pi^{(n)})$,以及式中 $\xi_t(i, j)$ 按照“一些概率与期望值”中定义进行计算。

(3)终止, 得到模型参数 $\lambda^{(n+1)} = (A^{(n+1)}, B^{(n+1)}, \pi^{(n+1)})$

预测算法

前面已经讨论了给定观测序列 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$ 的概率计算问题以及通过观测序列学习模型参数问题, 还余下HMM三个问题中的给定观测下隐变量的预测问题。

前面, 我们在“一些概率与期望值”中通过前向概率和后向概率, 得到了当前模型参数以及观察序列下, 某一时刻隐变量的取值概率 $\xi_t(i)$ 。

$$\blacksquare \gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

计算每一时刻t最可能出现的状态i,然后得到最有可能出现的序列。这就是近似算法.

近似算法

$$\blacksquare i_t^* = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\gamma_t(i)], t = 1, 2, \dots, T$$

从而得到状态序列 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_T^*)$ 。近似算法简单, 但是会预测出一些实际上不发生的状态, 比如转移矩阵等于0的两个相邻状态。尽管如此, 近似算法还是有用的。

维特比算法思想

维特比算法是用动态规划解马尔科夫模型预测问题, 即用动态规划求概率最大路径(最优路径), 这时, 一条路径对应一个状态序列。

根据动态规划原理, 最优路径具有这样的特性:如果最优路径在时刻t通过节点 i_t^* ,那么这一路径从结点 i_t^* 到终点 i_T^* 的部分路径, 对于从 i_t^* 到 i_T^* 的所有可能部分路径来说, 必须是最优的。因为假如不是这样, 那么从 i_t^* 到 i_T^* 就有另外一条更好的部分路径存在, 如果他和从 i_t^* 到 i_T^* 的部分路径连接起来, 就会形成一条比原来的路径更优的路径, 这是矛盾的。

根据这一原理, 我们

首先定义两个变量 δ, ψ , 定义在时刻t状态为i的所有单个路径 (i_1, i_2, \dots, i_t) 中概率最大值为:

$$\blacksquare \delta_t(i) = \max_{i_1, i_2, \dots, i_{t-1}} P(i_t = i, i_{t-1}, i_{t-2}, \dots, i_1, o_t, \dots, o_1 | \lambda), i = 1, 2, \dots, N$$

由定义可以得到变量 δ 的递推公式:

$$\begin{aligned}\blacksquare \delta_{t+1}(i) &= \max_{i_1, i_2, \dots, i_t} P(i_{t+1} = i, i_{t-1}, i_{t-2}, \dots, i_1, o_{t+1}, \dots, o_1 | \lambda) \\ &= \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_t(j) a_{ji}] b_t(o_{t+1}), i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T - 1\end{aligned}$$

定义在时刻t状态i的所有单个路径 $(i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i)$ 中概率最大的路径的第t-1个节点为:

$$\blacksquare \psi_t(i) = \arg \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_{t-1}(j) a_{ji}], i = 1, 2, \dots, N$$

维特比算法步骤

输入: 模型 $\lambda = (A, B, \pi)$ 和观测数据 $O = (o_1, o_2, \dots, o_T)$;

输出: 最优化路径 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_T^*)$ 。

(1). 初始化

$$\blacksquare \delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\blacksquare \psi_1(i) = 0, i = 1, 2, \dots, N$$

(2). 递推。对 $t=2,3,\dots,T$

$$\blacksquare \delta_{t+1}(i) = \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_t(j)a_{ji}]b_i(o_{t+1}), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\blacksquare \psi_t(i) = \arg \max_{1 \leq j \leq N} [\delta_{t-1}(j)a_{ji}], i = 1, 2, \dots, N$$

(3). 终止

$$\blacksquare P^* = \max_{1 \leq j \leq N} \delta_T(i)$$

$$\blacksquare i_T^* = \arg \max_{1 \leq j \leq N} \delta_T(i)$$

(4) 最优路径回溯。对 $t=T-1, T-2, \dots, 1$

$$\blacksquare i_t^* = \psi_{t+1}(i_{t+1}^*)$$

求得最优路径 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_T^*)$.

DNN-HMM混合系统

DNN-HMM混合系统利用DNN强大的表示学习能力以及HMM的序列化建模能力,他在大词汇连续语音识别任务中的表现远优于传统的(GMM-HMM).

图模型

主要涉及到隐马尔科夫模型(HMM),条件随机场(CRF),LDA(Latent Dirichlet Allocation)主题模型以及近似推断方法。

马尔科夫链蒙特卡洛方法

[参考这篇文章](#)

基本思想

对于一个给定的概率分布 $P(X)$, 若要得到其样本, 通过上述的马尔科夫链的概念, 我们可以构造一个转移矩阵 P 的马尔科夫链, 使得该MC的平稳分布是 $P(X)$, 这样, 无论初始状态是何值, 比如是 x_0 , 那么随着马尔科夫过程的转移, 得到了一系列的状态值, 如: $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$, 如果这个马尔科夫过程在第 n 步已经收敛, 那么分布 $P(X)$ 的样本就是 x_n, x_{n+1}, \dots

细致平衡条件

假设一个各态便利的马尔科夫过程, 其转移矩阵是 P , 分布是 $\pi(x)$, 若满足:

$$\blacksquare \pi(i)P_{i,j} = \pi(j)P_{j,i}$$

则 $\pi(x)$ 是马尔科夫链的平稳分布, 上式称为细致平衡条件。

Metropolis采样算法

Metropolis采样算法的基本原理

假设需要从目标概率密度 $p(\theta)$ 中进行采样, 同时, θ 满足 $-\infty < \theta < \infty$. Metropolis采样算法根据马尔科夫链去生成一个序列:

$$\theta^{(1)} \rightarrow \theta^{(2)} \rightarrow \dots \theta^{(t)} \rightarrow$$

其中, $\theta^{(t)}$ 表示的是马尔科夫链在第 t 时刻的状态。

在 Metropolis 采样算法过程中, 首先初始化状态值 $\theta^{(1)}$, 然后利用一个已知的分布 $q(\theta|\theta^{(t-1)})$ 生成一个新的候选状态 $\theta^{(*)}$, 随后根据一定的概率选择接受这个新值还是拒绝这个新值, 在 Metropolis 采样中, 概率为:

$$\blacksquare \alpha = \min\left(1, \frac{p(\theta^{(*)})}{p(\theta^{(t-1)})}\right)$$

这样的过程一直持续到采样过程的收敛, 当收敛以后, 样本 $\theta^{(t)}$ 即为目标分布 $P(\theta)$ 中的样本。

Metropolis采样算法的流程

基于以上的分析, 可以总结出如下的 Metropolis 采样算法的流程

初始化时间 $t=1$

设置 u 的值, 并初始化初始状态 $\theta^{(t)} = u$

重复以下的过程:

■令 $t=t+1$ ■从已知分布 $q(\theta|\theta^{(t-1)})$ 中生成一个候选状态 $\theta^{(*)}$

■计算接受的概率: $\alpha = \min\left(1, \frac{p(\theta^{(*)})}{p(\theta^{(t-1)})}\right)$

■从均匀分布 Uniform(0,1) 生成一个随机值 a . ■如果 $a < \alpha$, 则接受新生成的值: $\theta^{(t)} = \theta^{(*)}$; 否则 $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$ 直到 $t=T$.

Metropolis采样算法的解释

要证明 Metropolis 采样算法的正确性, 最重要的是要证明构造的马尔科夫过程满足细致平衡条件, 即:

$$\blacksquare \pi(i)P_{i,j} = \pi(j)P_{j,i}$$

对于上面的过程, 分布为 $p(\theta)$, 从状态 i 转移到状态 j 的转移概率为:

$$\blacksquare P_{i,j} = \alpha_{i,j} Q_{i,j}$$

其中, $Q_{i,j}$ 为上述已知分布, 且是对称的分布 $Q_{i,j} = Q_{j,i}$ 。即:

■ $q(\theta = \theta^{(t)} | \theta^{(t-1)}) = q(\theta = \theta^{(t-1)} | \theta^{(t)})$ 接下来, 我们需要证明 Metropolis 采样算法中构造的马尔科夫链满足细致平衡条件:

$$\blacksquare p(\theta^{(t)} P_{i,j} = p(\theta^{(t)} \alpha_{i,j} Q_{i,j})$$

$$= p(\theta^{(t)} \min\left(1, \frac{p(\theta^{(j)})}{p(\theta^{(t)})}\right) Q_{i,j})$$

$$\begin{aligned}\blacksquare &= \min(p(\theta^{(i)})Q_{i,j}, p(\theta^{(j)})Q_{i,j}) \\ \blacksquare &= p(\theta^{(j)} \min(\frac{p(\theta^{(i)})}{p(\theta^{(j)})}, 1)Q_{j,i} \\ \blacksquare &= p(\theta^{(i)})\alpha_{i,j}Q_{i,j} \\ \blacksquare &= p(\theta^{(j)})P_{j,i}\end{aligned}$$

因此，通过上面方法构造出来的马尔科夫链满足细致平衡条件。

MCMC的使用场景

MCMC——Metropolis-Hastings算法

MCMC——Gibbs Sampling算法

特征工程

特征工程

特征工程是什么

有这么一句话在业界广泛流传：数据和特征决定了机器学习的上限，而模型和算法只是逼近这个上限而已。那特征工程到底是什么呢？顾名思义，其本质是一项工程活动，目的是最大限度地从原始数据中提取特征以供算法和模型使用。通过总结和归纳，人们认为特征工程包括以下方面：

特征选择方式

参考知乎上[这篇文章](#)

特征选择与特征提取是特征工程中的两大核心问题。特征选择是指选择获得相应模型和算法最好性能的特征集，工程上常用的方法如下：

1. 计算每一个特征与相应变量的相关性。一般是算皮尔逊系数和互信息系数。皮尔逊系数只能衡量线性相关性，互信息系数能够很好地度量各种相关性，但是计算相对复杂，很多toolkit里面包含了这个工具（如sklearn的MINI），得到相关性之后就可以排序选择特征了。
2. 构建单个特征的模型，通过模型的准确性为特征排序，借此来选择特征。
3. 通过L1正则项来选择特征，L1正则方法具有稀疏解的特性，因此天然具备特征选择的特性。
4. 训练能够对特征打分的预选模型：RF和LR等都对模型的特征打分，通过打分获得相关性后再训练最终模型。
5. 通过特征组合后回来选择特征：如对用户ID和用户特征的组合来获得较大的特征集再来选择特征，这种做法在推荐系统和广告系统中比较常见，这也是所谓亿级甚至十亿集特征的主要来源，原因是用户数据比较稀疏，特征组合能同时兼顾全局模型和个性化模型。
6. 通过深度学习来进行特征选择/目前这种手段

总体而言，有两种方法：

基于方差的方法（PCA），基于相关性方法。

1. 相关性：一般用皮尔逊相关系数来定义。
2. 方差法：去掉值变化不大的特征，因为可以把这些特征看成常数值，他们对分类或者回归结果影响不大。

特征选择

1. Filter方法：自变量与目标变量之间的关联
 - i. Pearson相关系数
 - ii. 卡方检测
 - iii. 信息增益，互信息(MIC)
2. Wrapper方法：通过目标函数来决定是否加入一个变量
 - i. 迭代：产生特征子集，评价
 - ii. 完全搜索
 - iii. 启发式搜索
 - iv. 随机搜索(GA, SA)
3. Embedded方法：学习器自身自动选择特征
 - i. 正则化L1, L2
 - ii. 决策树(熵-信息增益, 基尼系数)
 - iii. 深度学习

Filter

Pearson相关系数

Pearson相关系数（取值在[-1,1]之间，大于0是正相关，小于0是负相关，等于0就没有相关性。只对具有线性相关性的变量有效，不能处理具有非线性关系的两组变量）

互信息(MIC)

$$\text{MIC} : I(X, Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log\left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\right)$$

对于线性与非线性关系的数据都实用。

距离相关系数(Distance Correlation)

为了克服Pearson相关系数只对具有线性关系的变量起作用而引入。

样本： $(X_k, Y_k), k = 1, 2, \dots, n$

定义距离矩阵：

$$\blacksquare a_{j,k} = ||\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k||, \quad \blacksquare j, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\blacksquare b_{j,k} = ||\mathbf{Y_j} - \mathbf{Y_k}||, \quad \blacksquare j, k = 1, 2, \dots, n$$

$\|\cdot\|$ 是欧氏距离。取所有的双中心距离。

$$\blacksquare A_{j,k} := a_{j,k} - \hat{a}_{j\cdot} - \hat{a}_{\cdot k} + \hat{a}_{\cdot\cdot}$$

$$\blacksquare \mathbf{B}_{j,k} := b_{j,k} - \hat{b}_{j\cdot} - \hat{b}_{\cdot k} + \hat{b}_{\cdot\cdot}$$

$\hat{a}_{j\cdot}$ 是j-th row的平均, $\hat{a}_{\cdot k}$ 是k-th column的平均, $\hat{a}_{\cdot \cdot}$ 是全局平均。

定义 The squared sample distance covariance:

$$\blacksquare dCov_n^2(X, Y) := \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{jk}$$

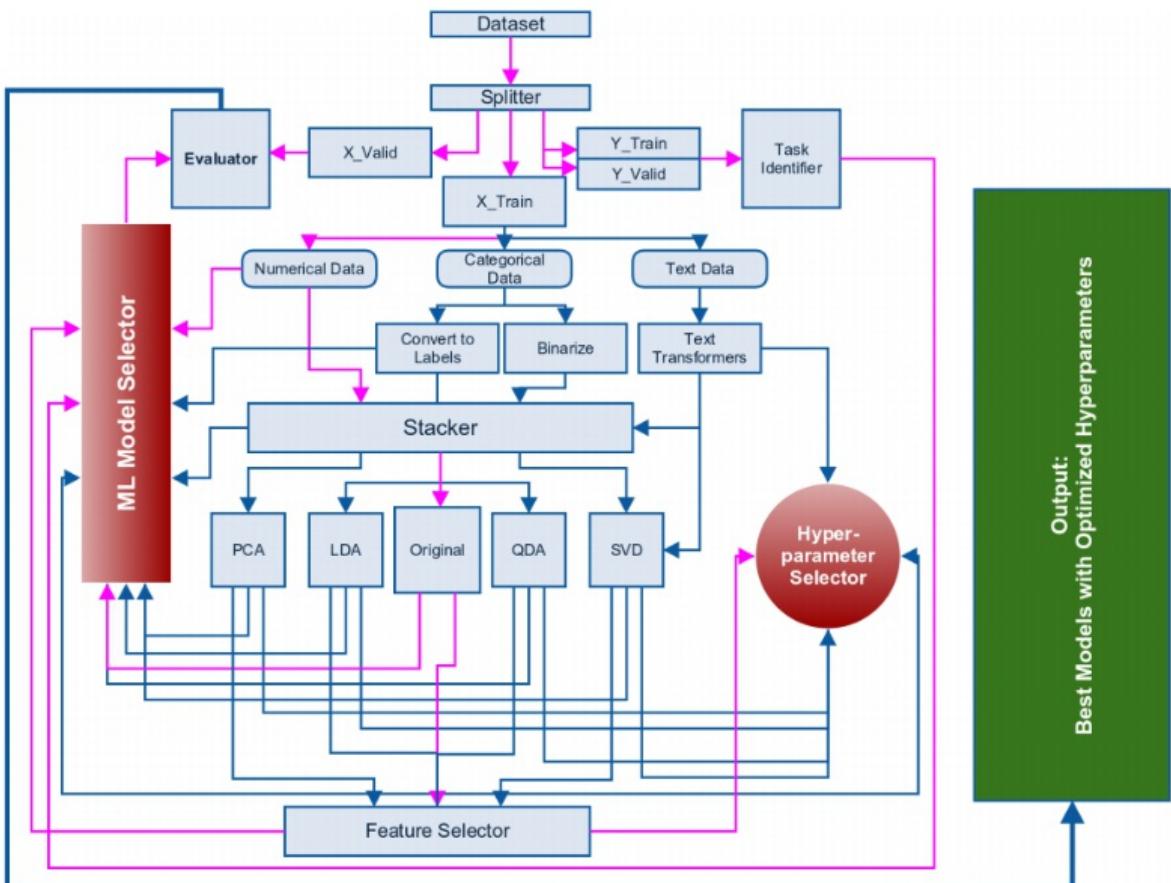
虽然MIC与距离相关系数能处理具有线性与非线性关系的变量之间的相关性，但是Pearson还是不可替代的。第一，Pearson系数计算速度快；第二，相对于其它两种取值在[0,1]，Pearson取值[-1,1]，正负表关系的正负，绝对值表示强度。前提就是两个变量是线性相关的。

特征工程小结

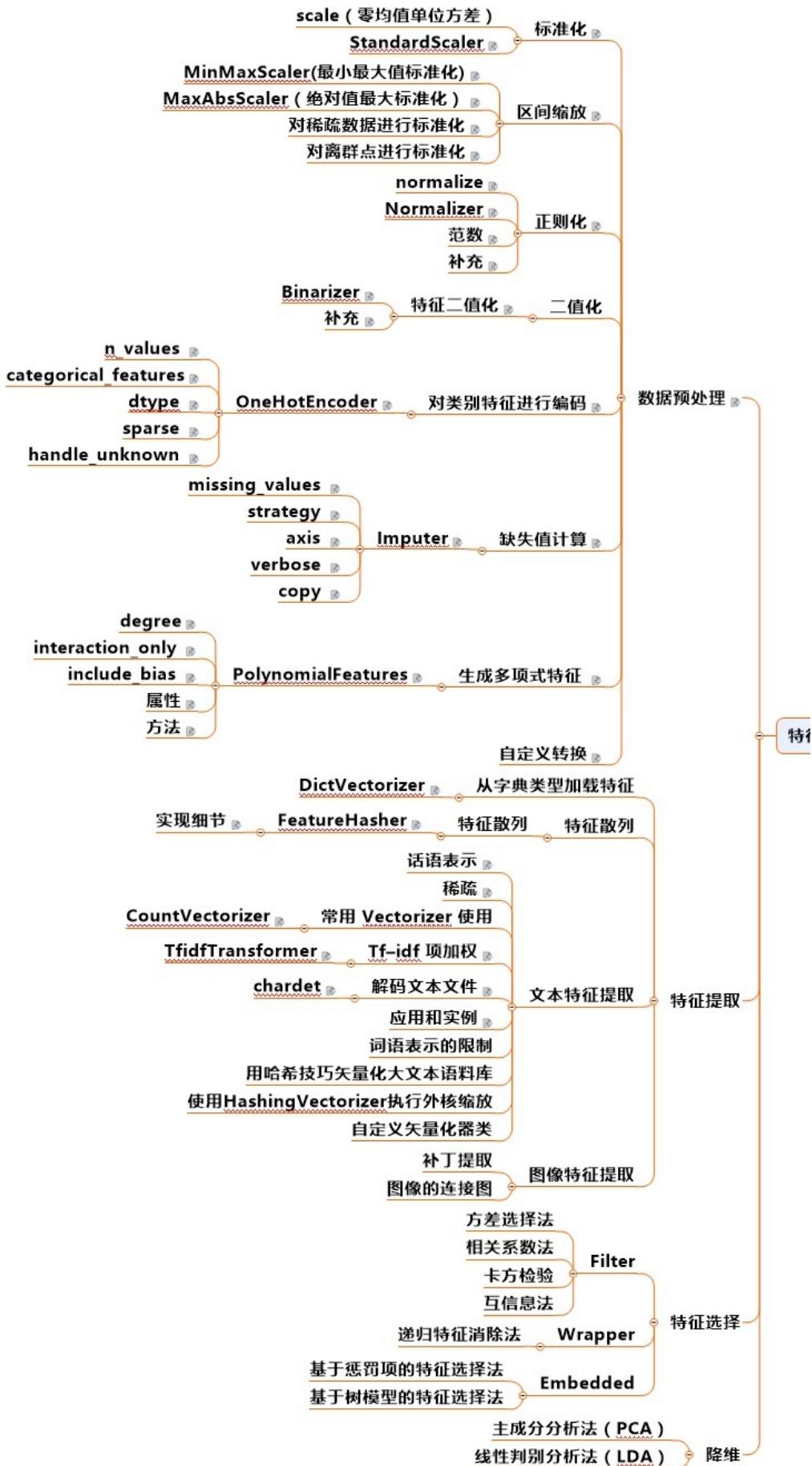
- 特征工程:利用数据领域的相关知识来创建能够使机器学习算法达到最佳性能的特征的过程。
 - 特征构建:是原始数据中人工的构建新的特征。
 - 特征提取:自动地构建新的特征,将原始特征转换为一组具有明显物理意义或者统计意义或核的特征。
 - 特征选择:从特征集合中挑选一组最具统计意义的特征子集,从而达到降维的效果。
重要性排名:特征构建>特征提取>特征选择

ML框架¹

参考



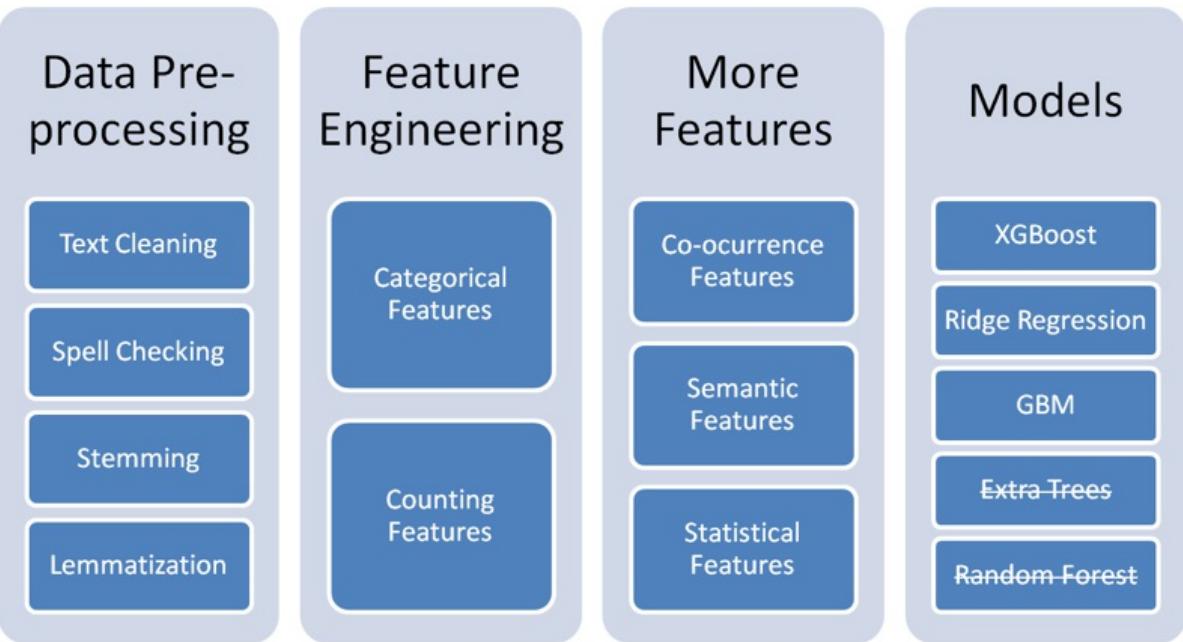
特征工程



模型的超参数调节

Model	Parameters to optimize	Good range of values
Linear Regression	<ul style="list-style-type: none"> • fit_intercept • normalize 	<ul style="list-style-type: none"> • True / False • True / False
Ridge	<ul style="list-style-type: none"> • alpha • Fit_intercept • Normalize 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100 • True/False • True/False
k-neighbors	<ul style="list-style-type: none"> • N_neighbors • p 	<ul style="list-style-type: none"> • 2, 4, 8, 16 • 2, 3
SVM	<ul style="list-style-type: none"> • C • Gamma • class_weight 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.001, 0.01.....10...100...1000 • 'Auto', RS* • 'Balanced' , None
Logistic Regression	<ul style="list-style-type: none"> • Penalty • C 	<ul style="list-style-type: none"> • L1 or L2 • 0.001, 0.01.....10...100
Naive Bayes (all variations)	NONE	NONE
Lasso	<ul style="list-style-type: none"> • Alpha • Normalize 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.1, 1.0, 10 • True/False
Random Forest	<ul style="list-style-type: none"> • N_estimators • Max_depth • Min_samples_split • Min_samples_leaf • Max features 	<ul style="list-style-type: none"> • 120, 300, 500, 800, 1200 • 5, 8, 15, 25, 30, None • 1, 2, 5, 10, 15, 100 • 1, 2, 5, 10 • Log2, sqrt, None
Xgboost	<ul style="list-style-type: none"> • Eta • Gamma • Max_depth • Min_child_weight • Subsample • Colsample_bytree • Lambda • alpha 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.01,0.015, 0.025, 0.05, 0.1 • 0.05-0.1,0.3,0.5,0.7,0.9,1.0 • 3, 5, 7, 9, 12, 15, 17, 25 • 1, 3, 5, 7 • 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 • 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 • 0.01-0.1, 1.0 , RS* • 0, 0.1, 0.5, 1.0 RS*

NLP 特征工程



特征工程可以参考[这篇文章](#)

<http://blog.kaggle.com/2016/07/21/approaching-almost-any-machine-learning-problem-abhishek-thakur/>

机器学习的本质是数据加算法，算法就是数学函数，方程与优化。

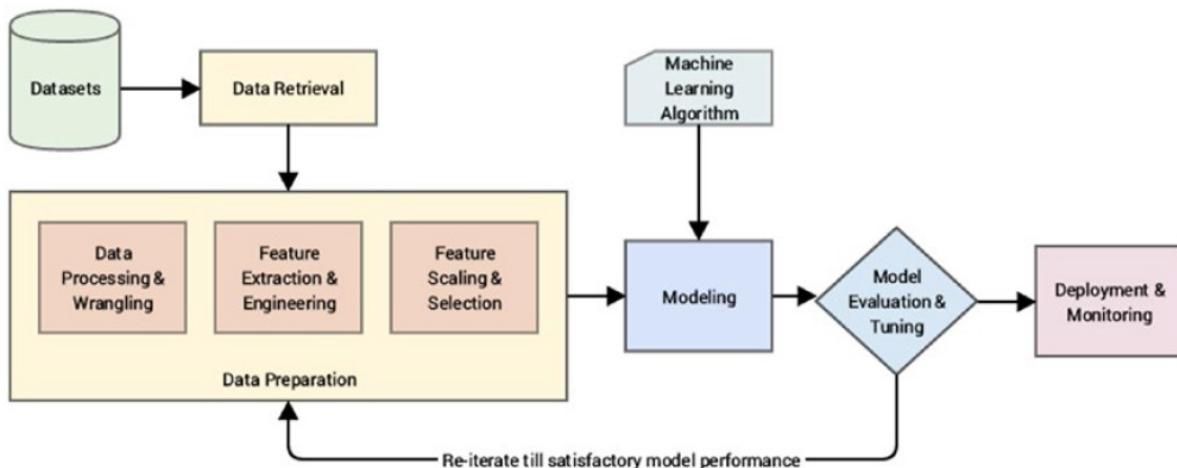


Figure 4-1. Revisiting our standard Machine Learning pipeline

Feature extraction and engineering

标准的机器学习pipeline

特征提取, 标度, 选择的pipeline。

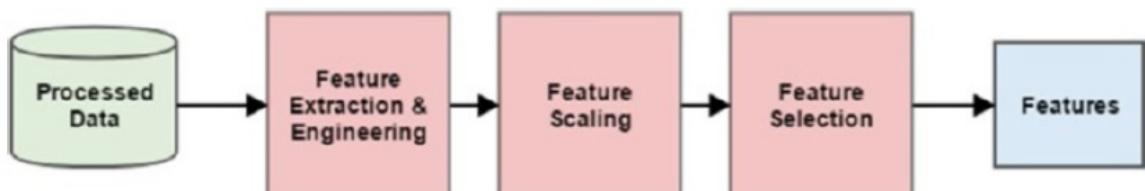


Figure 4-2. A standard pipeline for feature engineering, scaling, and selection

特征提取和特征工程是整个机器学习pipeline中最重要的步骤。

特征工程就是通过特殊领域的知识与特殊的技能，把数据转化成特征。数据科学家把他们时间的80%花在特征工程上。花在模型搭建与评估上的时间相对的少，但是也是重要的。深度学习(CNN,RNN,LSTM)区别于机器学习是其拥有机器学习没有的特征自动提取功能。
One-Hot编码在类别数据中工作的非常好，但是当类别很多时会造成灾难，此时需要Bin-Counting Scheme., Feature Hashing Scheme.

文本数据处理

Bag of Words Model.对次进行统计

Bag of N-Grams Model, 对N个连续的词进行统计，比如两个或三个, Bi-Grams, Tri-Grams. 在NLP中, Tri-Grams就已经足够了。

词袋模型只考虑词的统计特性。但是有些词在所有文本中本身就具有高的频率，因此就有了TF-IDF model(Term Frequency-Inverse Document Frequency)

$$tfidf(w, D) = tf(w, D) * idf(w, D) = f(w, D) * \log\left(\frac{C}{df(w)}\right)$$

tf-idf(w,D)是词w在文本D中TF-IDF分数。tf(w,D)表示词w在文档D中的频率, idf(w,D)是词w的逆文档频率, C是该语料库中的文本数。TF-IDF模型可以用来做为文本关键词提取。以及文本相似性计算(一般用余弦相似性), 因此可以用来做聚类, 适用于无监督学习。

LDA(Latent Dirichlet Allocation)作用在TF-IDF矩阵上, 分解成document-topic matrix与topic-term matrix。

```
In [11]: from sklearn.decomposition import LatentDirichletAllocation  
...:  
...: lda = LatentDirichletAllocation(n_topics=2, max_iter=100, random_state=42)  
...: dt_matrix = lda.fit_transform(tv_matrix)  
...: features = pd.DataFrame(dt_matrix, columns=['T1', 'T2'])  
...: features  
Out[11]:  
      T1          T2  
0  0.190615  0.809385  
1  0.176860  0.823140  
2  0.846148  0.153852  
3  0.815229  0.184771  
4  0.180563  0.819437  
5  0.839140  0.160860
```

利用LDA把tf-idf矩阵分解成两个主题T1,T2,可以看出0, 1, 4成一类, 2, 3, 5成一类。

图像数据

Canny edge detection算法;from skimage.feature import canny。

Object Detection:HOG(Histogram of Oriented gradients)

from skimage.feature import hog

Feature scaling

Feature selection

准确率与召回率

True Positive(TP):实际是正例并且我们分类成正例的样本数。

False Positive(FP):实际是负例但是我们分类成正例的样本数。

True Negative(TN):实际是负例并且我们分类成也是负例的样本数。

False Negative(FN):实际是正例但是我们分类成也是负例的样本数。

Accuracy

$$\text{Accuracy} = \frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$$

Precision

只针对于正样本或者误分为正样本的样本, 在不均衡样本中比较有用, 比如人群中癌症阳性的比例很小, 因此如果预测人群众没有患癌则获得的accuracy很高, 但是precision是0.。

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP+FP}$$

Recall

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP+FN}$$

F1 Score

$$F1Score = \frac{2*Precision*Recall}{Precision+Recall}$$

超参数finetune

两种方法:Grid 搜索与随机搜索。

模型评估

这一章主要介绍一些模型评估的方法，比如Cross-Validation, ROC, AUC

降维与无监督学习

隐语义模型

LFM(Latent factor model):通过隐含特征(Latent Factor)联系用户兴趣和物品.

LFM通过如下公式计算用户u对物品i的兴趣:

$$Preference(u, i) = r_{ui} = p_u^T q_i = \sum_{k=1}^K p_{u,k} q_{i,k}$$

公式中 $p_{u,k}$ 和 $q_{i,k}$ 是模型的参数, 其中 $p_{u,k}$ 度量了用户u的兴趣和第k个隐类的关系。而 $q_{i,k}$ 都表示了第k个隐类和物品i之间的关系。

$p_{u,k}, q_{i,k}$ 通过如下方式求解:

$$C = \sum_{(u,i) \in K} (r_{ui} - \hat{r}_{ui})^2 = \sum_{(u,i) \in K} (r_{ui} - \sum_{k=1}^K p_{u,k} q_{i,k})^2 + \lambda ||p_u||^2 + \lambda ||q_i||^2$$

SVD++

指标

1. 准确率
2. 召回率
3. 覆盖率
4. 多样性

麦克斯韦妖与信息熵

不存在一个监测系统, 能区分粒子的速度而对粒子做出区分, 使得原本温度相同的系统, 自发的形成高温与低温子系统。因为在区分例子速度时, 就是一个信息处理的过程, 使得系统的信息熵减小。那么, 怎么根据熵增原理, 确定系统的熵减数量与检测系统需要付出的信息熵的数量, 或者能量。

非负矩阵分解

$N * p$ 数据矩阵X近似表示为:

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{WH}$$

其中: $\mathbf{W} \in R^{N \times r}, \mathbf{H} \in R^{r \times p}, r \leq \max(N, p)$, 我们假定 $x_{ij}, w_{ik}, h_{kj} \geq 0$.

矩阵W, H通过最大化下面似然函数确定:

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p [x_{ij} \log(\mathbf{WH})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij}]$$

这个从一个 x_{ij} 满足均值为 $(\mathbf{WH})_{ij}$ 的泊松分布的模型的似然函数。

通过梯度下降法可以求解。

正则化方法原理

Ridge回归, Shrink与SVD

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

等价于:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{ridge} &= \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 \\ &\text{subject to: } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq t. \end{aligned}$$

上面的问题也等价于假定, y_i, β_i 服从如下分布:

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in N(0, \tau^2)$$

其中: $\lambda = \sigma^2 / \tau^2$

因此RRS(Root sum square)可以写成如下形式:

$$RRS(\lambda) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) + \lambda \beta^T \beta$$

通过对 β 求导并令其为0, 可以得到:

$$\hat{\beta}^{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

为了建立起L2与SVD之间的联系, 我们对 \mathbf{X} 进行SVD分解:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$$

我们重写没有正则化的最小二乘拟合:

$$\mathbf{X}\beta^{ls} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

对于L2正则化的最小二乘法:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\beta^{ls} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda I)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{D}^2 + \lambda I)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_j \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda} \mathbf{u}_j^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

从上面的分式 $\frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda}$ 可以知道, 对于 $d_j \ll \lambda$, 则相应的方向会收缩到0。可以认为L2就是对数据进行了SVD分解后, 只保留了 $d_j > \lambda$ 的分量。

Lasso(L1)回归

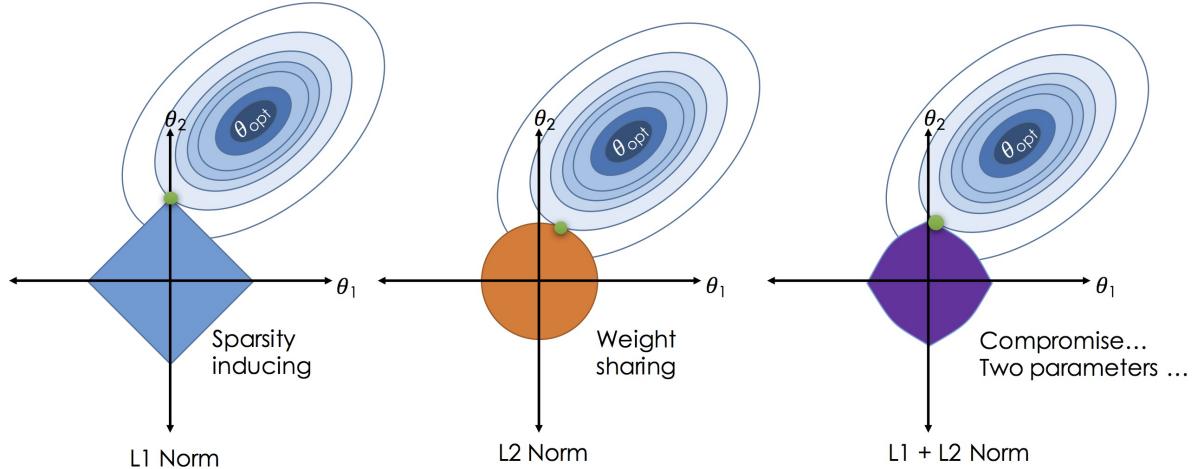
$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

等价于:

$$\hat{\beta}^{ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2$$

$$\text{subject to: } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t.$$

L1更容易产生稀疏性,因为椭圆与菱形更易在菱形顶点相交,而与圆形不容易在坐标轴上相切。



L1稀疏性的数学解析

一个数学上更严格的解析。。上面的问题也等价于假定, y_i, β_i 服从如下分布:

$$y_i \in N(\beta_0 + x_i^T \beta, \sigma^2)$$

$$\beta_i \in (1/2\tau) \exp(-|\beta|/\tau)$$

其中: $\tau = 1/\lambda$

因此 β_i 更容易分布在0的附件, 也就是能级排斥(量子混沌里面的概念, L1是可积系统, L2是GOE)

最小二乘一般通过Cholesky分解($p^3 + Np^2/2$)或者QR分解(NP^2)来实现, 前者一般更快, 但是没有后者稳定。

第六章 深度学习

这一章主要讨论深度学习模型。主要包含CNN, RNN, DNN(MLP)。

CNN侧重于空间，主要用在图像分类模型，比如LeNet-5,AlexNet,VGG,GoogLeNet,Residual Net,Dense Net,Two path Net。

RNN侧重于时间序列，主要用于语音识别，自然语言处理，包含的网络有传统的RNN, LSTM以及GRU。

DNN(MLP)主要指有多个隐藏层的神经网络，也称为多层感知机(Multi-layer perceptron,MLP)。

在介绍完CNN与RNN之后，就是介绍这两种网络的实际用途了，比如RNN在语音识别方面的应用。GAN是一大块，但是不知道能用在什么地方，有空也必须添加进去。

CNN

CNN主要是处理空间数据，比如图像数据。CNN主要包含LeNet-5,AlexNet,GoogLeNet,VGG,Residual Net,Dense Net。

CNN核心：局部感受野，权值共享，时间或空间采样这三种思想来保证某种程度的平移，尺度，形变不变性。

介绍每种模型的时候，要说明这种模型的优点，最好能阐述为啥会有这种优点。

CNN基础

如何理解CNN中的卷积？

CNN相对于全连接网络的好处

减少模型参数数量，减少计算时间。

CNN的卷积核与特征提取

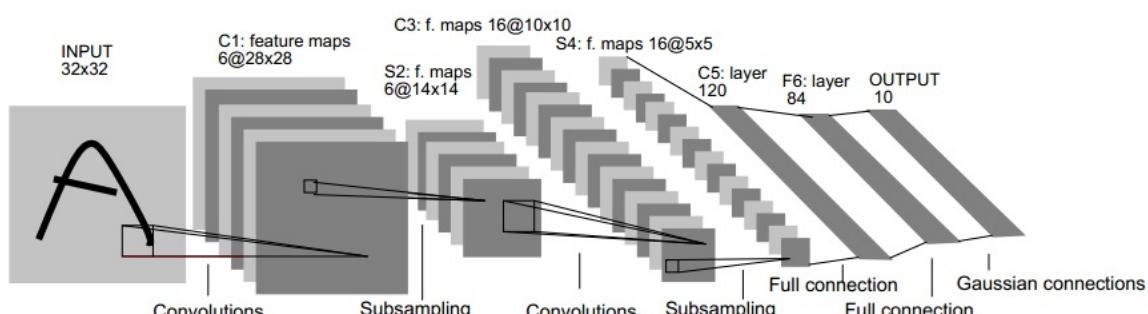
CNN中卷积核数目以及参数数据的计算。根据的是相邻两层feature maps个数，以及每个map的大小来计算出所用卷积核的数目。

CNN的卷积核大小为啥是奇数？

不能保持对称性，比如原来图像长度宽是 $M \times M$ ，卷积核大小是 $n \times n$ ，则卷积作用后图像大小是 $(M-n+1) \times (M-n+1)$ ，如果 n 是偶数，则 $n-1$ 是奇数，因此处理后的图像不再对称了。

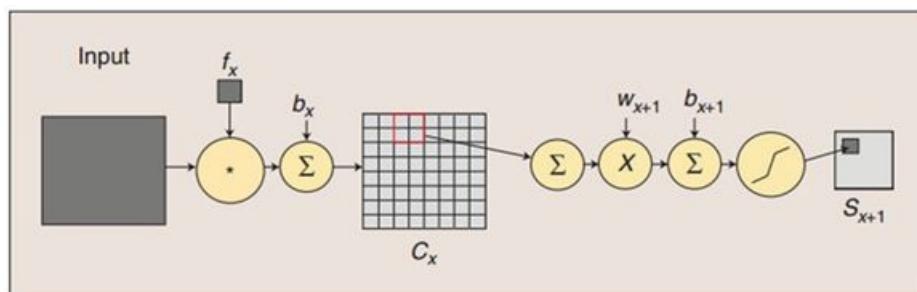
在这里，我们将要计算模型中，两层之间的参数数目。

如何计算CNN两层之间参数数目



C1层是卷积层，单通道下用了6个卷积核，这样就得到了6个feature map，其中每个卷积核的大小为 5×5 ，用每个卷积核与原始的输入图像进行卷积，这样feature map的大小为 $(32-5+1) \times (32-5+1) = 28 \times 28$ ，所需要的参数的个数为 $(5 \times 5+1) \times 6 = 156$ （其中 5×5 为卷积模板参数，1为偏置参数），连接数为 $(5 \times 5+1) \times 28 \times 28 \times 6 = 122304$ （其中 28×28 为卷积后图像的大小）。

S2层为pooling层，也可以说是池化或者特征映射的过程，拥有6个feature map，每个feature map的大小为 14×14 ，每个feature map的隐单元与上一层C1相对应的feature map的 2×2 单元相连接，这里没有重叠。计算过程是： 2×2 单元里的值相加然后再乘以训练参数 w ，再加上一个偏置参数 b （每一个feature map共享相同 w 和 b ），然后取sigmoid值，作为对应的该单元的值。所以S2层中每feature map的长宽都是上一层C1的一半。S2层需要 $2 \times 6 = 12$ 个参数，连接数为 $(4+1) \times 14 \times 14 \times 6 = 5880$ 。注：这里池化的过程与ufldl教程中略有不同。下面为卷积操作与池化的示意图：



计算CNN相邻两层之间参数数目，假设上层有大小是 $N \times M \times M$ ，其中 n 是通道数目， $M \times M$ 是图像大小。如果连接下一层的卷积核大小是 $n \times n$ ，我们可以对上一层的 a 个通道做卷积，则每次操作需要 a 个卷积核，再加上一个偏置，则需要 $a \times n \times n + 1$ 个参数。假设下一层有 K 个通道，则两层之间所有的参数数目是 $K(a \times n \times n + 1)$ 。这里 a 可以取不同值，也可以是不同值的组合，比如在LeNet-5中，S2到C3之间就存在不同通道的组合，C3的前6个特征

图以S2中3个相邻的特征图子集为输入。接下来6个特征图以S2中4个相邻特征图子集为输入。然后的3个以不相邻的4个特征图子集为输入。最后一个将S2中所有特征图为输入。这样C3层有 $6(3 \times 25 + 1) + 6(4 \times 25 + 1) + 3(4 \times 25 + 1) + (25 \times 6 + 1) = 1516$ 个可训练参数和 $10 \times 10 \times 1516 = 151600$ 个连接。

CNN的pooling的作用

降维与信息提取。

下采样与上采样的误差怎么传递与反向？

[卷积神经网络\(CNN\)反向传播算法](#)

[CNN中一些特殊环节的反向传播](#)

CNN网络中另外一个不可导的环节就是Pooling池化操作，因为Pooling操作使得feature map的尺寸变化，假如做 $2 \times 22 \times 22 \rightarrow 2 \times 11 \times 11$ 的池化，假设那么第I+1层的feature map有16个梯度，那么第III层就会有64个梯度，这使得梯度无法对位的进行传播下去。其实解决这个问题的思想也很简单，就是把1个像素的梯度传递给4个像素，但是需要保证传递的loss（或者梯度）总和不变。根据这条原则，mean pooling和max pooling的反向传播也是不同的。

1、mean pooling

mean pooling的前向传播就是把一个patch中的值求取平均来做pooling，那么反向传播的过程也就是把某个元素的梯度等分为n份分配给前一层，这样就保证池化前后的梯度（残差）之和保持不变，还是比较理解的。

mean pooling比较容易让人理解错的地方就是会简单的认为直接把梯度复制N遍之后直接反向传播回去，但是这样会造成loss之和变为原来的N倍，网络是会产生梯度爆炸的。

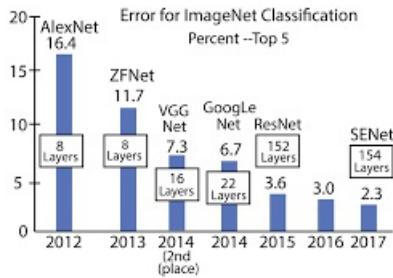
2、max pooling

max pooling也要满足梯度之和不变的原则，max pooling的前向传播是把patch中最大的值传递给后一层，而其他像素的值直接被舍弃掉。那么反向传播也就是把梯度直接传给前一层某一个像素，而其他像素不接受梯度，也就是为0。所以max pooling操作和mean pooling操作不同点在于需要记录下池化操作时到底哪个像素的值是最大，也就是max id，这个可以看caffe源码的pooling_layer.cpp，下面是caffe框架max pooling部分的源码

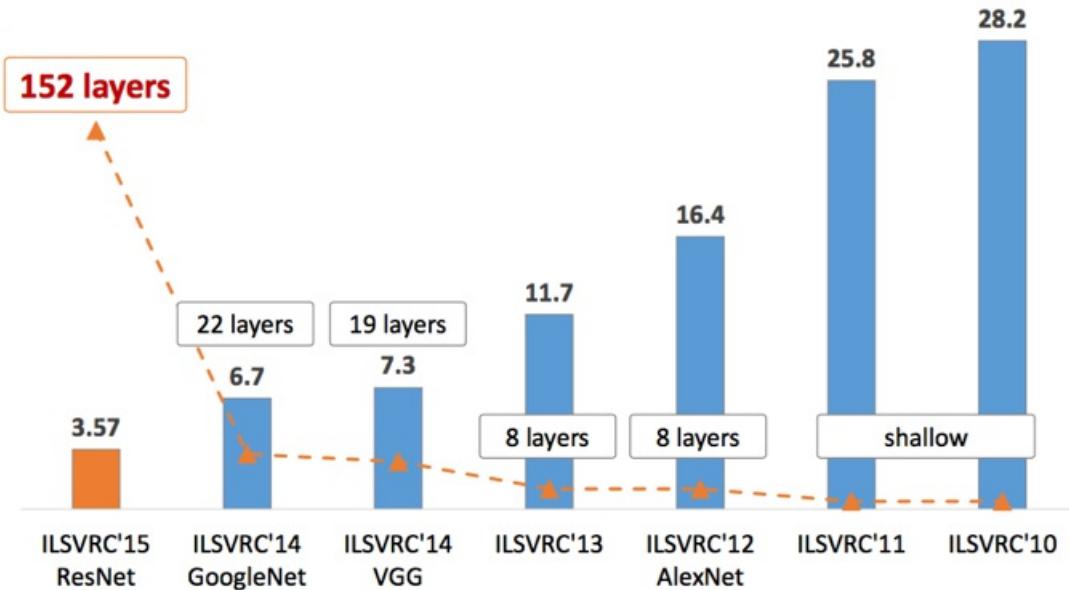
```
// If max pooling, we will initialize the vector index part.  
if (this->layer_param_.pooling_param().pool() == PoolingParameter_PoolMethod_MAX && top.size() == 1)  
{  
    max_idx_.Reshape(bottom[0]->num(), channels_, pooled_height_, pooled_width_);  
}
```

源码中有一个max_idx_的变量，这个变量就是记录最大值所在位置的，因为在反向传播中要用到，那么假设前向传播和反向传播的过程就如下图所示

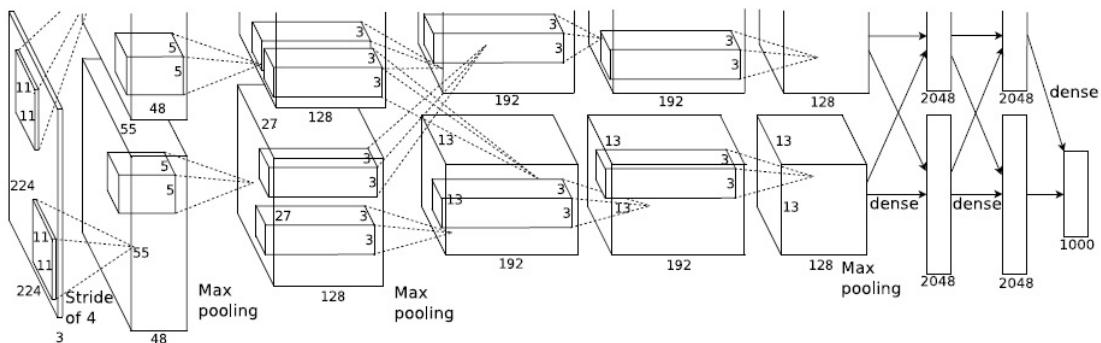
ImageNet top5 error record history



网络层数随历史的变化。



AlexNet



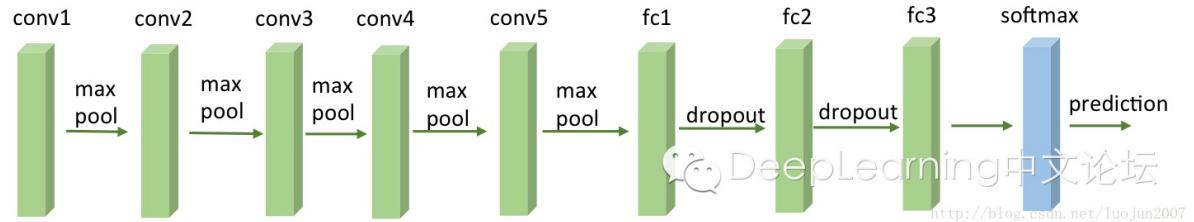
AlexNet的优点。

1. 使用ReLU作为激活函数，消除了sigmoid,tanh造成的梯度消失问题。同时也减小了激活函数的计算量。
2. 百万数据和多GPU训练减小了计算时间。
3. 局部响应归一化(LRN,Local Response Normalization)
4. 重叠池化，也就是pooling的尺寸小于步长。
5. 通过数据增强(裁剪, 平移, 尺度变换, 水平翻转, 加随机光照)与Dropout降低过拟合

VGG

相对于以前的网络而言, VGG与GoogLeNet的网络变得更深了。VGGNet在整个网络中使用3x3的小感受野, 以步长1进行逐像素卷积, 因此两个3x3卷积相当于一个5x5, 三个3x3卷积核相当于一个7x7的卷积核, 这样大大减小了模型的参数个数。使用了小尺寸的卷积核, 增加了网络深度并不会带来明显的参数膨胀, 却能在更深的网络中获得更高的精度。

each conv includes 3 convolutional layers

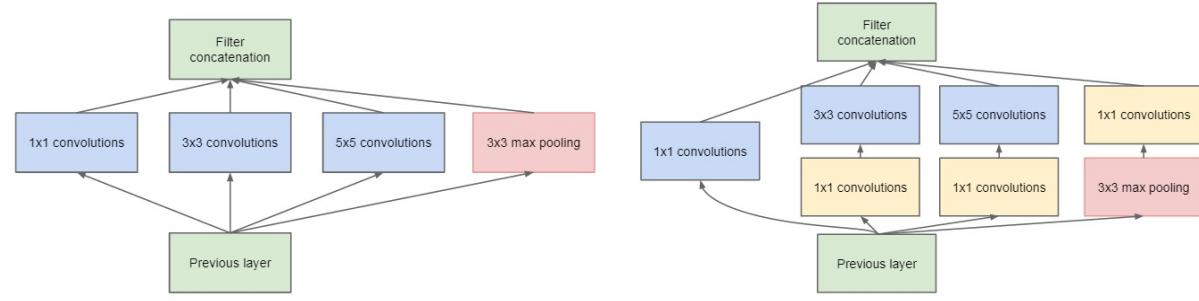


GoogLeNet

特点:

1. 不适用全连接层, 而是用平均池化代替全连接层, 减小模型的参数数量, 这种想法来自于NIN。
2. 采用一种高效的机器视觉深度神经网络结构, 称为"Inception", 这种模块化结构方便增加与修改, 现在inception版本到了V6/V7。GoogLeNet中采用了9个inception模块。
3. 为了避免梯度小时, 网络额外增加了2个辅助的softmax用于向前传导梯度。

GoogLeNet中的Inception



(a) Inception module, naïve version

GoogLeNet的参数:可以看出里面用7x7的平均池代替了全连接。

后续改进的版本:

1. Inception-v2在之前的版本中主要加入了batch Normalization; 另外也借鉴VGGNet的思想, 用两个3x3的卷积代替5x5的卷积, 不仅降低了训练参数, 也提升了速度。
2. Inception-3在v2的基础上进一步分解大的卷积, 比如把nxn的卷积拆分成两个一维卷积: 1xn, nx1。
3. Inception-V4借鉴了ResNet可以构建更深层网络的思想, 设计了一个更深更优化的模型。

type	patch size/ stride	output size	depth	#1×1	#3×3 reduce	#3×3	#5×5 reduce	#5×5	pool proj	params	ops
convolution	7×7/2	112×112×64	1							2.7K	34M
max pool	3×3/2	56×56×64	0								
convolution	3×3/1	56×56×192	2		64	192				112K	360M
max pool	3×3/2	28×28×192	0								
inception (3a)		28×28×256	2	64	96	128	16	32	32	159K	128M
inception (3b)		28×28×480	2	128	128	192	32	96	64	380K	304M
max pool	3×3/2	14×14×480	0								
inception (4a)		14×14×512	2	192	96	208	16	48	64	364K	73M
inception (4b)		14×14×512	2	160	112	224	24	64	64	437K	88M
inception (4c)		14×14×512	2	128	128	256	24	64	64	463K	100M
inception (4d)		14×14×528	2	112	144	288	32	64	64	580K	119M
inception (4e)		14×14×832	2	256	160	320	32	128	128	840K	170M
max pool	3×3/2	7×7×832	0								
inception (5a)		7×7×832	2	256	160	320	32	128	128	1072K	54M
inception (5b)		7×7×1024	2	384	192	384	48	128	128	1388K	71M
avg pool	7×7/1	1×1×1024	0								
dropout (40%)		1×1×1024	0								
linear		1×1×1000	1							1000K	1M
softmax		1×1×1000	0								

Table 1: GoogLeNet incarnation of the Inception architecture

Residual Net

详见第九章项目工作, Residual NN.

Dense Net

DenseNet的示意图, 主要表现任意两层间可以有short connection。

在ResNets中, 只在相邻两层有skip connection. 在激活函数是恒等函数的前提下, 有:

$$\blacksquare x_l = H_l(x_{l-1}) + x_{l-1}$$

对于Dense Net,l层可以与0, 1, ..., l-1中任意多层相连。因此有:

$$\blacksquare x_l = H_l(x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$$

DenseNet的一个优点是网络更窄, 参数更少, 大一部分原因是得益于这种dense block的设计, 后面有提到在dense block中每个卷积层的输出feature map数量都很小(小于100), 而不像其他网络一样动不动就是几百上千的宽度。同样这种连接方式使得特征和梯度的传递更加有效, 网络也更容易训练。前面提到过梯度消失问题是网络深度越深的时候越容易出现, 原因就是输入信息和梯度信息在很多层之间传递导致的, 而现在这种dense connection相当于每一层都直接连接input和loss, 因此就可以减轻梯度消失现象, 这样更深网络不是问题。

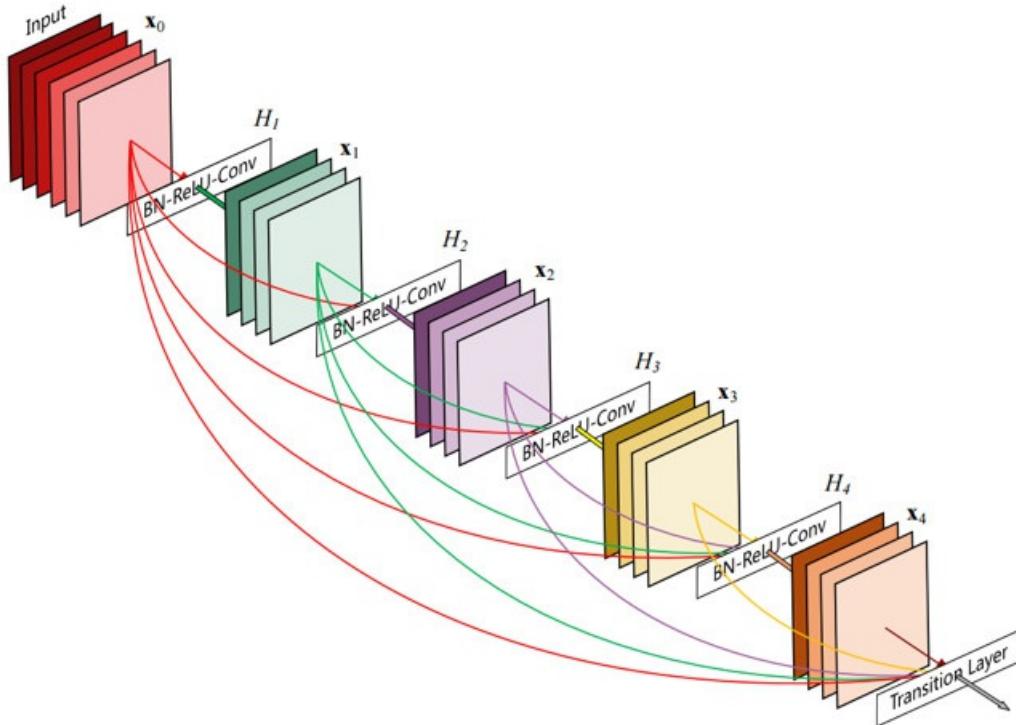
Dense net主要通过建立不同层之间的直接连续, 充分利用了feature, 进一步减轻了梯度消失问题, 加深了网络深度, 而且训练效果非常好。另外利用bottleneck layer, translation layer以及较小的growth rate使得网络变窄, 参数减小, 有效抑制了过拟合, 同时减小了计算量。

对于Dense Net, l层可以与0, 1, ..., l-1中任意多层相连。因此有：

$$\mathbf{x}_l = H_l(x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$$

DenseNet的一个优点是网络更窄，参数更少，大部分原因是得益于这种dense block的设计，后面有提到在dense block中每个卷积层的输出feature map数量都很小(小于100)，而不像其他网络一样动不动就是几百上千的宽度。同样这种连接方式使得特征和梯度的传递更加有效，网络也更容易训练。前面提到过梯度消失问题是网络深度越深的时候越容易出现，原因就是输入信息和梯度信息在很多层之间传递导致的，而现在这种dense connection相当于每一层都直接连接input和loss，因此就可以减轻梯度消失现象，这样更深网络不是问题。

Dense net主要通过建立不同层之间的直接连接，充分利用了feature，进一步减轻了梯度消失问题，加深了网络深度，而且训练效果非常好。另外利用bottleneck layer, translation layer以及较小的growth rate使得网络变窄，参数减小，有效抑制了过拟合，同时减小了计算量。



Dense Blocks之间通过pooling与convolution来改变图像尺寸。

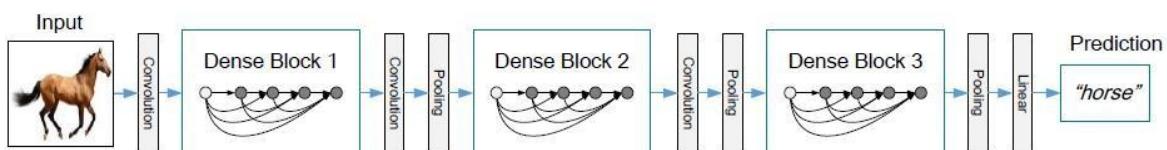


Figure 2. A deep DenseNet with three dense blocks. The layers between two adjacent blocks are referred to as transition layers and change feature map sizes via convolution and pooling.

问题集

1. 为什么 1×1 的卷积核可以用来降维？

- 1、降维 (dimension reductionality)。比如，一张 500×500 且厚度 depth 为 100 的图片在 20 个 filter 上做 1×1 的卷积，那么结果的大小为 $500 \times 500 \times 20$ 。
- 2、加入非线性。卷积层之后经过激励层， 1×1 的卷积在前一层的学习表示上添加了非线性激励 (non-linear activation)，提升网络的表达能力。

参考

RNN

建模序列化数据的一种主流深度学习模型。

设计目的

捕获长距离输入之间的依赖。

背景：

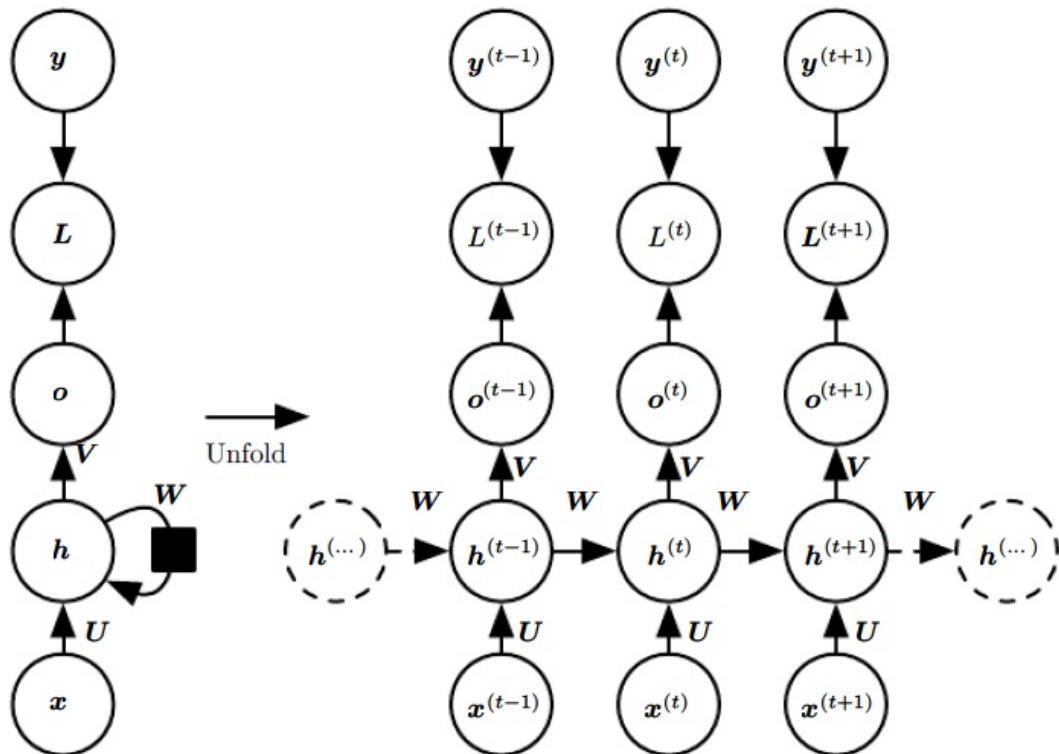
传统的前馈神经网络一般输入的都是一个定长的向量，无法处理变长的序列信息，即使通过一些方法把序列处理成定长的向量，模型也很难捕捉序列中的长距离依赖关系。RNN则通过将神经元串行起来处理序列化的数据。由于每个神经元能用它的内部变量保存之前输入的序列信息，因此整个序列被浓缩成抽象的表示，并可以据此进行分类或生成新的序列。近年来，得益于计算能力的大幅度提升和模型的改进，RNN在很多领域取得了突破性的进展——机器翻译、图像描述、推荐系统、智能聊天机器人、自动作词作曲等。

循环神经网络(RNN)

循环神经网络中一些重要的设计模式包含如下几种：

(1) 每个时间步都有输出，并且隐藏单元之间有循环连接的循环网络，如下图所示。

RNN的输入到隐藏的连接由权值矩阵U参数化，隐藏到隐藏的循环由权重矩阵W参数化，隐藏到输出层的连接由权重矩阵V参数化。 $L^{(t)}$ 是损失函数。



前向传播公式：假设激活函数是tanh，我们有如下的更新方程：

$$\mathbf{a}^{(t)} = \mathbf{b} + \mathbf{W}\mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(t)}$$

$$\mathbf{h}^{(t)} = \tanh(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{o}^{(t)} = \mathbf{c} + \mathbf{V}\mathbf{h}^{(t)}$$

$$\hat{\mathbf{y}}^{(t)} = \text{softmax}(\mathbf{o}^{(t)})$$

其中**b**,**c**是偏置向量,**U**,**V**,**W**是权重矩阵。

这一循环网络将一个输入序列映射到相同长度的输出序列。与x序列配对的y的总的损失就是所有时间步的损失之和。例如, $L^{(t)}$ 为给定的

$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)}$ 后 $y^{(t)}$ 的负对数似然，则：

$$\blacksquare L((x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\tau)}), (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(\tau)})) = \sum_t L^{(t)}$$

$$\blacksquare = - \sum_t \log p_{model}(y^{(t)} | (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)})$$

其中 $p_{model}(y^{(t)} | (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)})$ 需要读取模型输出向量 $\hat{y}^{(t)}$ 对应于 $y^{(t)}$ 的项。

应用于展开图且代价为 $O(\tau)$ 的反向传播算法是通过时间反向传播(back-propagation through time, BPTT)。

(2) 每个时间步都产生一个输出，只有当前时刻的输出到下个时刻的隐藏单元之间有循环连接的循环网络。如下图所示：

该图中，RNN 被训练将特定输出值放入 o 中，并且 o 是被允许传播到未来的唯一信息。此处没有从 h 前向传播的直接连接。之前的 h 仅通过产生的预测间接地连接到当前。 o 通常缺乏过去的重要信息，除非它非常高维并且内容丰富。这使得该图中的 RNN 不那么强大，但是它更容易训练，因为每个时间步可以与其他时间步分离训练，允许训练期间更多的并行化。

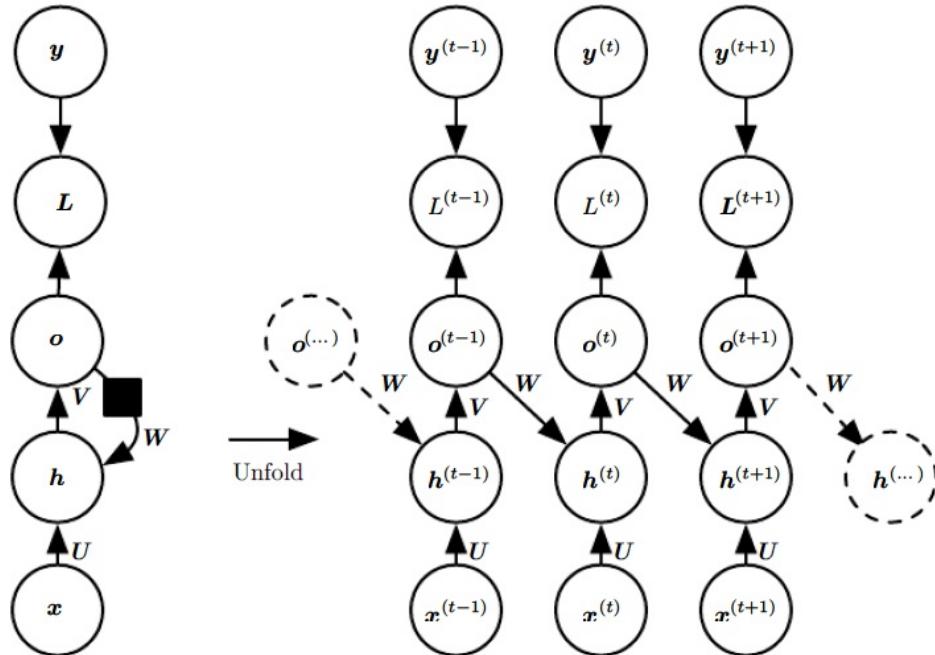


Figure 10.4: An RNN whose only recurrence is the feedback connection from the output to the hidden layer. At each time step t , the input is x_t , the hidden layer activations are $h^{(t)}$, the outputs are $o^{(t)}$, the targets are $y^{(t)}$ and the loss is $L^{(t)}$. (Left) Circuit diagram.

(3) 隐藏单元之间存在循环连接，但读取整个序列后产生单个输出的循环网络，如下图所示：

这样的网络可以用于概括序列并产生用于进一步处理的固定大小的表示。在结束处可能存在目标，或者通过更下游模块的反向传播来获得输出

$o^{(t)}$ 上的梯度。

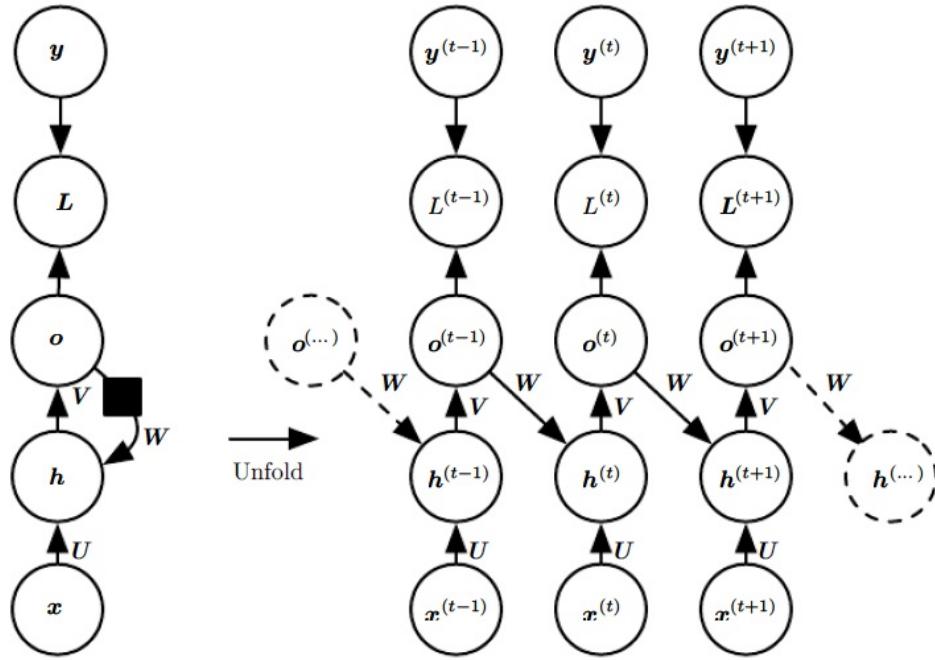


Figure 10.4: An RNN whose only recurrence is the feedback connection from the output to the hidden layer. At each time step t , the input is \mathbf{x}_t , the hidden layer activations are $\mathbf{h}^{(t)}$, the outputs are $\mathbf{o}^{(t)}$, the targets are $\mathbf{y}^{(t)}$ and the loss is $L^{(t)}$. (Left) Circuit diagram.

(3) 隐藏单元之间存在循环连接，但读取整个序列后产生单个输出的循环网络，如下图所示：

这样的网络可以用于概括序列并产生用于进一步处理的固定大小的表示。在结束处可能存在目标，或者通过更下游模块的反向传播来获得输出 $\mathbf{o}^{(t)}$ 上的梯度。

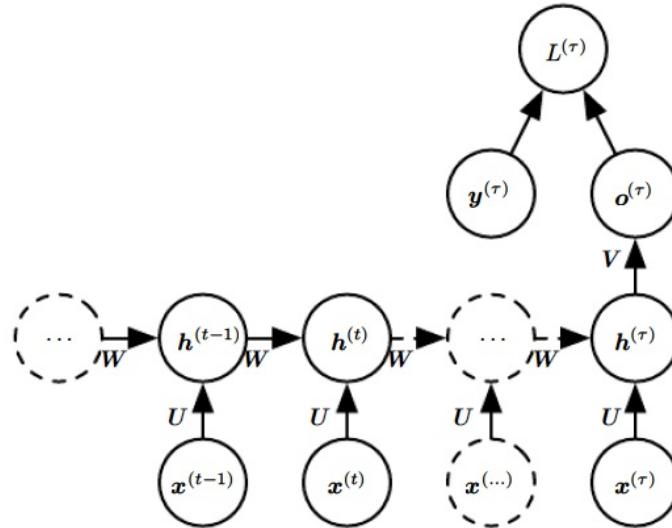


Figure 10.5: Time-unfolded recurrent neural network with a single output at the end of the sequence. Such a network can be used to summarize a sequence and produce a fixed-size representation used as input for further processing. There might be a target right at the end (as depicted here) or the gradient on the output $\mathbf{o}^{(t)}$ can be obtained by back-propagating from further downstream modules.

Clockwork RNNs

第一种是带遗忘门的Traditional LSTM。公式如下：

$$\begin{aligned} \blacksquare f_t &= \sigma_g(W_f x_t + U_f h_{t-1} + b_f) \\ \blacksquare i_t &= \sigma_g(W_i x_t + U_i h_{t-1} + b_i) \\ \blacksquare o_t &= \sigma_g(W_o x_t + U_o h_{t-1} + b_o) \\ \blacksquare c_t &= f_t * c_{t-1} + i_t * \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c) \\ \blacksquare h_t &= o_t * \sigma_h(c_t) \end{aligned}$$

前三行是三个门，分别是遗忘门f, 输入门i, 输出门o, 输入都是 x_t, h_{t-1} , 只是参数不同，然后要经过一个激活函数把值缩放到[0,1]之间，第四行 c_t 是cell state, 由上一时刻的 c_{t-1} 和输入得到，两者相互独立。如果遗忘门 f_t 取0的话，那么上一时刻的状态就会全部被清空，然后只关注此时刻的输入。输入门 i_t 决定是否接收此时刻的输入，最后输出门 o_t 决定是否输出cell state。

$$\blacksquare \hat{c} = \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c)$$

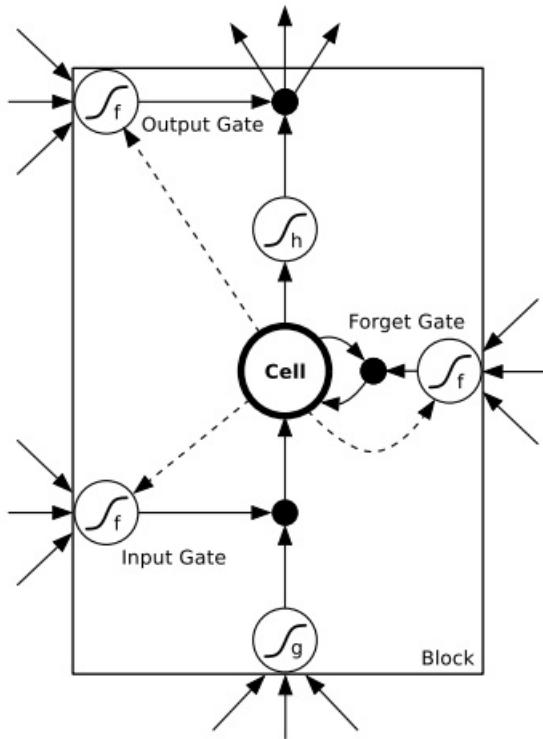
$$\text{因此有 } c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \hat{c}.$$

这样一来cell state的更新来源就明显了，一部分是上时刻的自己，一部分是new memory content，而且两个来源是相互独立地由两个门控制的。遗忘门控制是否记住以前的那些特征，输入们决定是否接受当前的输入。后面可以看到GRU其实把这两个门合二为一了。

第二种是带遗忘门的Peephole LSTM，公式如下：

$$\begin{aligned} \blacksquare f_t &= \sigma_g(W_f x_t + U_f c_{t-1} + b_f) \\ \blacksquare i_t &= \sigma_g(W_i x_t + U_i c_{t-1} + b_i) \\ \blacksquare o_t &= \sigma_g(W_o x_t + U_o c_{t-1} + b_o) \\ \blacksquare c_t &= f_t * c_{t-1} + i_t * \sigma_c(W_c x_t + b_c) \\ \blacksquare h_t &= o_t * \sigma_h(c_t) \end{aligned}$$

和上面的公式比较，发现只是把 h_{t-1} 换成了 c_{t-1} ，即三个门的输入都改成了 $[x_t, c_{t-1}]$ ，因为是从cell state里取得信息，所以叫窥视管(peephole)。把这两种结构结合起来，可以用如下图描述：



图中连着门的那些虚线都是peephole。三个输入都是 $[x_t, h_{t-1}, c_{t-1}]$

GRU

$$\begin{aligned}
\boxed{i_t} &= \sigma_g(W_i x_t + U_i h_{t-1} + b_i) \\
\boxed{o_t} &= \sigma_g(W_o x_t + U_o h_{t-1} + b_o) \\
\boxed{c_t} &= f_t * c_{t-1} + i_t * \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c) \\
\boxed{h_t} &= o_t * \sigma_h(c_t)
\end{aligned}$$

前三行是三个门，分别是遗忘门f，输入门i，输出门o，输入都是 x_t, h_{t-1} ，只是参数不同，然后要经过一个激活函数把值缩放到[0,1]之间，第四行 c_t 是cell state，由上一时刻的 c_{t-1} 和输入得到，两者相互独立。如果遗忘门 f_t 取0的话，那么上一时刻的状态就会全部被清空，然后只关注此时刻的输入。输入门 i_t 决定是否接收此时刻的输入，最后输出门 o_t 决定是否输出cell state。

$$\boxed{\hat{c}} = \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c)$$

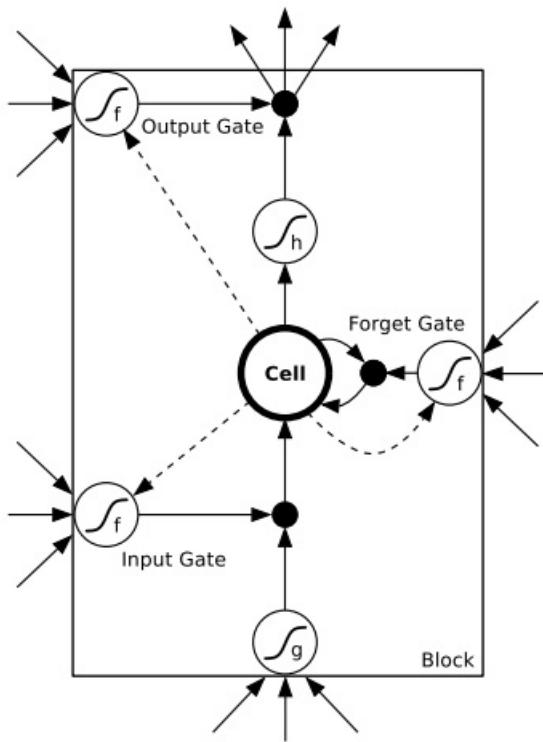
因此有 $c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \hat{c}$ 。

这样一来cell state的更新来源就明显了，一部分是上时刻的自己，一部分是new memory content，而且两个来源是相互独立地由两个门控制的。遗忘门控制是否记住以前的那些特征，输入们决定是否接受当前的输入。后面可以看到GRU其实把这两个门合二为一了。

第二种是带遗忘门的Peephole LSTM，公式如下：

$$\begin{aligned}
\boxed{f_t} &= \sigma_g(W_f x_t + U_f c_{t-1} + b_f) \\
\boxed{i_t} &= \sigma_g(W_i x_t + U_i c_{t-1} + b_i) \\
\boxed{o_t} &= \sigma_g(W_o x_t + U_o c_{t-1} + b_o) \\
\boxed{c_t} &= f_t * c_{t-1} + i_t * \sigma_c(W_c x_t + b_c) \\
\boxed{h_t} &= o_t * \sigma_h(c_t)
\end{aligned}$$

和上面的公式比较，发现只是把 h_{t-1} 换成了 c_{t-1} ，即三个门的输入都改成了 $[x_t, c_{t-1}]$ ，因为是从cell state里取得信息，所以叫窥视管(peephole)。把这两种结构结合起来，可以用如下图描述：



图中连着门的那些虚线都是peephole。三个输入都是 $[x_t, h_{t-1}, c_{t-1}]$

GRU

参考循环神经网络(RNN, Recurrent Neural Networks)介绍

GRU这个结构2014年才出现，结构与LSTM类似，效果一样，但是精简一些，参数更少。公式如下：

$$\boxed{z_t} = \sigma(W_z x_t + U_z h_{t-1})$$

第七章 推荐系统

推荐系统在数学上就是一个超大规模稀疏矩阵的分解与重构问题，推荐实际上就是寻找User-Item矩阵中本该不为0而实际为0的矩阵元。对矩阵分块，实现的就是聚类功能，可以有基于Item的聚类，也可以有基于User的聚类，因此，要研究怎么有效的对矩阵进行分块。

推荐系统中的Matrix Factorization(MF)或者Dimensionality Reduction，实际上就是数学SVD，因此推荐系统中这些算法也称为SVD模型。

推荐算法分类¹

1. 协同过滤推荐算法	基于记忆(Memory-based CF)	基于用户(User-based),相似度
CF:Collaborative Filtering		基于物品(item-based), 相似度
	基于模型(Model-based CF)	隐因子模型(SVD,PCA), 朴素贝叶斯分类
2. 基于内容的推荐算法(CB:Content-Based)	基于信息检索	TF-IDF
基于用户的浏览记录，购买记录建立用户画像。基于物品的描述信息，提取物品特征，建立物品画像。		基于Rocchio的CB推荐算法
		基于决策树，基于线性分类，基于朴素贝叶斯，基于KNN
3. 基于知识的推荐算法(KB:Knowledge-based)	关联知识与关联规则挖掘	Apriori
	约束知识与约束推荐算法	约束推荐算法

不同推荐算法的优缺点

1. 协同过滤推荐算法:CF的优点:不需要知道物品的内容描述，容易实现用户潜在兴趣的挖掘;缺点:新用户/新物品的冷启动问题，推荐的可解性差。
2. 基于内容的推荐算法:CB的优点:用户间独立性，可解性，新物品的冷启动容易解决。缺点:新用户的冷启动问题难以解决，对用户潜在的兴趣挖掘难以实现，难以提取物品的特征。
3. 基于知识的推荐算法:KB推荐方法中的应用局限。

不同推荐算法之间的融合

怎么通过解决一些常见的推荐系统问题，比如冷启动？

推荐系统算法的评估

矩阵分解

U-I矩阵是一个大的稀疏矩阵，我们需要寻找矩阵的一个低秩分解，实际上就是一个奇异值分解(SVD)。

$$\blacksquare V = UM$$

评分矩阵 $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$, SVD实际上就是去找到两个矩阵: $U \in \mathbb{R}^{f \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{f \times m}$, 其中矩阵U表示 User 和 feature 之间的联系，矩阵V表示 Item 和 feature 之间的联系。 $f \ll m, f \ll n$ 。这样就完成了矩阵的分解。实际计算中，我们并不是通过常规的求本征值本征矢的SVD来做分解，而是通过最小二乘加正则约束来实现分解。

SVD存在的问题

会出现矩阵元为负数的非现实情况。因此有了非负矩阵分解。

一些需要处理的问题

1. 怎么有效的对矩阵进行低秩分解？能否针对不同场景总结出不同的分解方法？
2. 怎么设定求解的损失函数？是欧氏距离而是L1距离？这得回到我们的业务要求，如果U-I矩阵的矩阵元就是消费的金额，是否损失函数中曼哈顿距离比欧氏距离更好？
3. 正则项怎么加？
4. 隐变量个数怎么选择？

5. 怎么加显式反馈数据(explicit feedbacks)和隐式反馈(implicit feedbacks)数据？
6. 怎么设置损失函数？损失函数应该包括哪些项目？
7. 怎么有效的为矩阵分块？矩阵分块实际上实现的就是聚类。

¹ 牛温佳《用户网络行为画像》[←](#)

计算广告学概论¹

一些概念

CPM:Cost per Mille,千次展览付费
RPM:Revenue per Mille千次展览收益
CPC:Cost per Click按点击付费
CPT:Cost Per Time按时间付费
CPS:Cost Per Sale按销售额付费
CPA:Cost per Action按转化付费
ROI:Return On Investment 投入产出比
RTB:Real Time Bidding
ADN:ad Net-work 广告网络
Auction-based advertising:竞价广告
Search ad:搜索广告
GSP:Generalized Second Price广义第二高价
DSP:Demand Side Platform 需求方平台

优化目标

eCPM:excepted Cost Per Mille,千次展示期望收入
 $ePCM = \text{点击率} \times \text{点击价值}$
流量塑形:在有些情况下,我们可以主动地影响流量,以利于合约的达成。
搜索广告是典型的竞价广告,是整个在线广告中份额最大的部分。

定价问题

常见的两种:GSP与基于纳什均衡的VCG(Vickrey-Clarke-Groves)定价策略。
GSP(广义第二高价):对赢得每一个位置的广告主,都按照他下一位的广告位置出价来收取费用。
基于纳什均衡。
 $ePCM$ 等于点击率乘以出价 $\blacksquare r = u \cdot v$
一般有如下变形: $\blacksquare r = u^k \cdot v$ 其中k是价格挤压(Squashing)因子.

重定向

把那些曾经对广告主服务发生明确兴趣的用户找出来,向他们投放该广告主的广告。

常用的相似度

余弦相似度

¹. 刘鹏《计算广告--互联网商业变现的市场与技术》[←](#)

协同过滤算法

FM(Factorization Machines),FFM

FM

■一般的线性模型为：

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$$
 一般模型中，各个特征是独立考虑的，没有考虑特征之间的相互关系。如果考虑特征 x_i, x_j 之间的相互关系，模型修改如下：

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_{ij} x_i x_j$$

■如果系统的特征比较多的话，计算复杂度会大大提升。为了降低时间复杂度，我们引入了辅助向量latent vector

$$\mathbf{V}_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}]^T$$

,辅助变量是描述变量之间的相关性。模型修改如下：

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (V_i, V_j) x_i x_j$$

以上就是FM模型。k是超参数，一般娶30或者40。时间复杂度是 $O(kn^2)$ ，可通过如下方式化简。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (V_i, V_j) x_i x_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (V_i, V_j) x_i x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V_i, V_i) x_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{f=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_{if} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n v_{if}^2 x_i^2 \end{aligned}$$

通过对每个特征引入latent vector V_i ，并对公式进行化简，可以把时间复杂度降为 $O(kn)$.

隐语义模型

LFM(Latent factor model):通过隐含特征(Latent Factor)联系用户兴趣和物品。

LFM通过如下公式计算用户u对物品i的兴趣：

$$Preference(u, i) = r_{ui} = p_u^T q_i = \sum_{k=1}^K p_{u,k} q_{i,k}$$

公式中 $p_{u,k}$ 和 $q_{i,k}$ 是模型的参数，其中 $p_{u,k}$ 度量了用户u的兴趣和第k个隐类的关系。而 $q_{i,k}$ 都凉了第k个隐类和物品i之间的关系。

$p_{u,k}, q_{i,k}$ 通过如下方式求解：

$$C = \sum_{(u,i) \in K} (r_{ui} - \hat{r}_{ui})^2 = \sum_{(u,i) \in K} (r_{ui} - \sum_{k=1}^K p_{u,k} q_{i,k})^2 + \lambda ||p_u||^2 + \lambda ||q_i||^2$$

SVD++

指标

1. 准确率
2. 召回率
3. 覆盖率
4. 多样性

非负矩阵分解

$N * p$ 数据矩阵X近似表示为：

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{WH}$$

其中： $\mathbf{W} \in R^{N \times r}$, $\mathbf{H} \in R^{r \times p}$, $r \leq \max(N, p)$. 我们假定 $x_{ij}, w_{ik}, h_{kj} \geq 0$.

矩阵W, H通过最大化下面似然函数确定：

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p [x_{ij} \log(\mathbf{WH})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij}]$$

这个从一个 x_{ij} 满足均值为 $(\mathbf{WH})_{ij}$ 的泊松分布的模型的似然函数。

通过梯度下降法可以求解。

SVD在推荐系统中的应用

假设我们现在有评分矩阵 $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$, SVD 实际上就是去找到两个矩阵: $U \in \mathbb{R}^{f \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{f \times m}$, 其中矩阵 U 表示 User 和 feature 之间的联系, 矩阵 M 表示 Item 和 feature 之间的联系。大家这时候肯定会想, 我们的评分矩阵里面一般会有很多缺失值, 那要怎么去得到 U 和 M 呢? 实际上, 这两个矩阵是通过学习的方式得到的, 而不是直接做矩阵分解。我们定义如下的损失函数:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I_{ij} (V_{ij} - p(U_i, M_j))^2 + \frac{k_u}{2} \sum_{i=1}^n \|U_i\|^2 + \frac{k_m}{2} \sum_{j=1}^m \|M_j\|^2$$

其中 $p(U_i, M_j)$ 表示我们对用户 i 对 物品 j 的评分预测:

$$p(U_i, M_j) = U_i^T M_j$$

梯度下降:

$$\frac{\partial E}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^m I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) M_j) - k_u U_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial M_j} = \sum_{i=1}^n I_{ij} ((V_{ij} - p(U_i, M_j)) U_i) - k_m M_j$$

实际上, 用户的评分与用户的习惯, 以及该物品的总体评分水平有关, 因此可以加上用户的均值与物品的均值。

$$\hat{r}_{ui} = \mu + b_i + b_u + \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u$$

μ : 训练集中所有记录的评分的全局平均数。在不同网站中, 因为网站定位和销售的物品不同, 网站的整体评分分布也会显示出一些差异。比如有些网站中的用户就是喜欢打高分, 而另一些网站的用户就是喜欢打低分。而全局平均数可以表示网站本身对用户评分的影响。

b_u : 用户偏置(user bias)项。这一项表示了用户的评分习惯中和物品没有关系的那种因素。比如有些用户就是比较苛刻, 对什么东西要求都很高, 那么他的评分就会偏低, 而有些用户比较宽容, 对什么东西都觉得不错, 那么他的评分就会偏高。 b_i : 物品偏置(item bias)项。这一项表示了物品接受的评分中和用户没有什么关系的因素。比如有些物品本身质量就很高, 因此获得的评分相对都比较高, 而有些物品本身质量很差, 因此获得的评分相对都会比较低。这个时候我们的损失函数变为:

$$E = \sum_{(u,i) \in k} (r_{ui} - \mu - b_i - b_u - \mathbf{q}_i^T \mathbf{p}_u) + \lambda (\|\mathbf{p}_u\|_2 + \|\mathbf{q}_i\|_2 + b_u^2 + b_i^2)$$

¹ [SVD在推荐系统中的应用](#)

基于内容的推荐算法

基于知识的推荐

LTR

LTR or machine-learned ranking(MLR)是运用机器学习,典型的监督,半监督或者强化学习来为信息检索系统构建排序模型

排序学习可以在信息检索(IR),NLP, DM等领域被广泛应用,典型的应用有文献检索,专家检索系统,定义查询系统,协同过滤,问答系统,关键词提取,文档摘要还有机器翻译等。

互联网搜索方面的一个新趋势是使用机器学习方法去自动的建立评价模型 $f(q, d)$ 。

对于标注训练集,选定LTR方法,确定损失函数,以最小化损失函数为目标进行优化即可得到排序模型的相关参数,这就是学习过程。预测过程就是将待预测结果输入到学习到的排序模型中,即可以得到结果的相关得,利用该得分进行排序即可得到待预测结果的最终顺序。

Building Real World Intelligent Systems

情感分析(Sentiment analysis)常用的模型

- Bing Liu's Lexicon,具体的可以参看[这个网站](#)
- MPQA Subjectivity Lexicon
- Pattern Lexicon
- SentiWordNet Lexicon
- VADER Lexicon
- AFINN Lexicon是最简单与最流行的lexicons.

文本分类系统的搭建

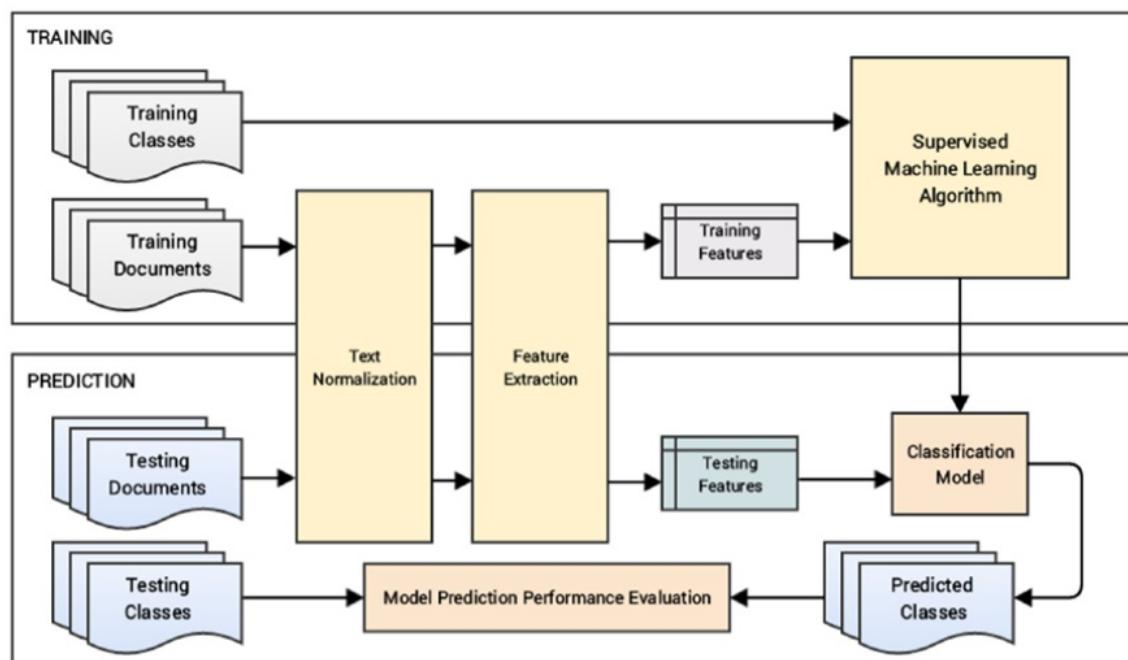


Figure 7-4. Blueprint for building an automated text classification system (Source: *Text Analytics with Python*, Apress 2016)

Silhouette Score

K-means找到最佳clusters数目的标准。

Kernel里面有详细的教程与讨论。

第八章 项目工作

这章主要通过Kaggle实战来提升自己的运用的能力，最主要的是特征提取的能力。

Titanic

Variable Description

Survived: Survived (1) or died (0)
Pclass: Passenger's class
Name: Passenger's name
Sex: Passenger's sex
Age: Passenger's age
SibSp: Number of siblings/spouses aboard
Parch: Number of parents/children aboard
Ticket: Ticket number
Fare: Fare
Cabin: Cabin
Embarked: Port of embarkation

常用的数据清洗技巧

导入数据

```
train = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\train.csv")
test = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\test.csv")
test_Y = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\gender_submission.csv")
```

导入库函数

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
# Handle table-like data and matrices
import numpy as np
import pandas as pd

# Modelling Algorithms
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
from sklearn.naive_bayes import GaussianNB
from sklearn.svm import SVC, LinearSVC
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier, GradientBoostingClassifier

# Modelling Helpers
from sklearn.preprocessing import Imputer, Normalizer, scale
from sklearn.cross_validation import train_test_split, StratifiedKFold
from sklearn.feature_selection import RFECV

# Visualisation
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.pylab as pylab
import seaborn as sns

# Configure visualisations
%matplotlib inline
mpl.style.use('ggplot')
sns.set_style('white')
pylab.rcParams['figure.figsize'] = 8, 6
```

数据的统计属性

```
train.shape ##数据的维度
train.head ##显示所有数据
```

相关系数与统计属性

In [6]: `train.describe()`

Out[6]:

	PassengerId	Survived	Pclass	Age	SibSp	Parch	Fare
count	891.000000	891.000000	891.000000	714.000000	891.000000	891.000000	891.000000
mean	446.000000	0.383838	2.308642	29.699118	0.523008	0.381594	32.204208
std	257.353842	0.486592	0.836071	14.526497	1.102743	0.806057	49.693429
min	1.000000	0.000000	1.000000	0.420000	0.000000	0.000000	0.000000
25%	223.500000	0.000000	2.000000	20.125000	0.000000	0.000000	7.910400
50%	446.000000	0.000000	3.000000	28.000000	0.000000	0.000000	14.454200
75%	668.500000	1.000000	3.000000	38.000000	1.000000	0.000000	31.000000
max	891.000000	1.000000	3.000000	80.000000	8.000000	6.000000	512.329200

In [7]: `train.corr()`

Out[7]:

	PassengerId	Survived	Pclass	Age	SibSp	Parch	Fare
PassengerId	1.000000	-0.005007	-0.035144	0.036847	-0.057527	-0.001652	0.012658
Survived	-0.005007	1.000000	-0.338481	-0.077221	-0.035322	0.081629	0.257307
Pclass	-0.035144	-0.338481	1.000000	-0.369226	0.083081	0.018443	-0.549500
Age	0.036847	-0.077221	-0.369226	1.000000	-0.308247	-0.189119	0.096067
SibSp	-0.057527	-0.035322	0.083081	-0.308247	1.000000	0.414838	0.159651
Parch	-0.001652	0.081629	0.018443	-0.189119	0.414838	1.000000	0.216225
Fare	0.012658	0.257307	-0.549500	0.096067	0.159651	0.216225	1.000000

相关系数, 分布, 类别图

```
def plot_correlation_map( df ):
    corr = train.corr()
    _, ax = plt.subplots( figsize =( 12 , 10 ) )
    cmap = sns.diverging_palette( 220 , 10 , as_cmap = True )
    _ = sns.heatmap(
        corr,
        cmap = cmap,
        square=True,
        cbar_kws={ 'shrink' : .9 },
        ax=ax,
        annot = True,
        annot_kws = { 'fontsize' : 12 }
    )

def plot_distribution( df , var , target , **kwargs ):
    row = kwargs.get( 'row' , None )
    col = kwargs.get( 'col' , None )
    facet = sns.FacetGrid( df , hue=target , aspect=4 , row = row , col = col )
    facet.map( sns.kdeplot , var , shade= True )
    facet.set( xlim=( 0 , df[ var ].max() ) )
    facet.add_legend()

def plot_categories(fd, cat, target, **kwargs):
    row = kwargs.get('row', None)
    col = kwargs.get('col', None)
    facet = sns.FacetGrid(fd, row = row, col = col)
    facet.map(sns.barplot, cat, target)
    facet.add_legend()

plot_correlation_map(train)
plot_distribution( train , var = 'Age' , target = 'Survived' , row = 'Sex' )
plot_categories(train, cat = 'Embarked', target = 'Survived')
```

`plot_correlation_map(train)`



类标签数字化

```
sex = pd.Series( np.where( train.Sex == 'male' , 1 , 0 ) , name = 'Sex' )
```

通过pandas产生一个新的数组，它是把原来sex中的male转化成1，其它的sex类别转化成0.

对类标签添加前缀

```
embarked = pd.get_dummies( train.Embarked , prefix='Embarked' )
```

原来Embarked的类标签是C, Q, S。现在添加了前缀Embarked_，并且把原来的一个类分成了三个类。

In [47]: `embarked.head()`

Out[47]:

	Embarked_C	Embarked_Q	Embarked_S
0	0	0	1
1	1	0	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	0	1

缺失值填充

通过均值来填充

```
imputed = pd.DataFrame()
imputed[ 'Age' ] = train.Age.fillna( train.Age.mean() )
```

```
imputed[ 'Fare' ] = train.Fare.fillna( train.Fare.mean() )
imputed[ 'Pclass' ] = train.Pclass.fillna( train.Pclass.mean() )
```

数据拼接

```
DataSet = pd.concat([imputed, embarked, sex, train.Pclass, train.SibSp, train.Parch],axis = 1)
```

DataSet.shape就是(891,10)

构造训练数据

```
train_X = DataSet[0:891]
train_Y = train.Survived
```

模型选择与训练

```
model = RandomForestClassifier(max_depth=3, max_features='auto',n_estimators=100)
model.fit(train_X, train_Y)
print model.score(train_X, train_Y),model.score(test_X, test_Y)

0.8305274971941639 0.8851674641148325
```

当你选定一个模型后，就根据这个模型，进行相应的参数输入，最基本的包括输入(X,Y)，其它的就是模型参数的设定，这个你可以根据sklearn的API进行设置。当然有目的性的调参考验的就是你的理论功底了。

总的效果

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
# Handle table-like data and matrices
import numpy as np
import pandas as pd

from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
from sklearn.naive_bayes import GaussianNB
from sklearn.svm import SVC, LinearSVC
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier , GradientBoostingClassifier

# Modelling Helpers
from sklearn.preprocessing import Imputer , Normalizer , scale
from sklearn.cross_validation import train_test_split , StratifiedKFold
from sklearn.feature_selection import RFECV
import xgboost as xgb

train = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\\train.csv")
test = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\\test.csv")
test_Y = pd.read_csv("C:\Data\Group\ShareFolder\Kaggle\Titanic\\gender_submission.csv")

imputed_train = pd.DataFrame()
imputed_train[ 'Age' ] = train.Age.fillna( train.Age.mean() )
imputed_train[ 'Fare' ] = train.Fare.fillna( train.Fare.mean() )
imputed_train[ 'Pclass' ] = train.Pclass.fillna( train.Pclass.mean() )
embarked_train = pd.get_dummies(train.Embarked, prefix = 'Embarked')
sex_train= pd.Series( np.where( train.Sex == 'male' , 1 , 0 ) , name = 'Sex' )
DataSet_train = pd.concat([imputed_train, embarked_train, sex_train, train.Pclass, train.SibSp, train.Parch],axis = 1)

imputed_test = pd.DataFrame()
imputed_test[ 'Age' ] = test.Age.fillna( train.Age.mean() )
imputed_test[ 'Fare' ] = test.Fare.fillna( train.Fare.mean() )
imputed_test[ 'Pclass' ] = test.Pclass.fillna( train.Pclass.mean() )
embarked_test = pd.get_dummies(test.Embarked, prefix = 'Embarked')
sex_test = pd.Series( np.where( test.Sex == 'male' , 1 , 0 ) , name = 'Sex' )
DataSet_test = pd.concat([imputed_test, embarked_test, sex_test, test.Pclass, test.SibSp, test.Parch],axis = 1)

test_X = DataSet_test[0:418]
train_X = DataSet_train[0:891]
train_Y = train.Survived
train_X.shape,train_Y.shape,test_X.shape,test_Y.shape
```

最终结果

使用SVM在Titanic数据上，训练集效果依次是线性SVM, GBDT,LR,RF,DT,KNN。最诡异的是，有事测试集上准确率比训练集上高。
对于随机森林RF，会发现，一开始随着树的深度增加，RF整体的准确率会上升，也就是说，RF需要准确性高的(或者说bias小的)分类器做基函数，对于GBDT，发现随深度增加，准确率下降，也就是GBDT需要深度浅，variance很小的树作为分类器，这符合他们的原理。即RF基于bias小的基分类器，通过增加树的数目来降低variance, boosting基于variance小的基分类器，通过boost来降低bias。
但是有个问题是，RF在100颗树时效果最好，选择1000, 10000都没有100的效果好。

```
In [78]: model = GaussianNB()
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.7710437710437711
test score =  0.7870813397129187

In [79]: model = DecisionTreeClassifier()
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.9820426487093153
test score =  0.8110047846889952

In [81]: model = RandomForestClassifier(max_depth=6, min_samples_leaf = 1, max_features='auto',n_estimators=100)
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.8664421997755332
test score =  0.8947368421052632

In [77]: model = LogisticRegression()
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.8024691358024691
test score =  0.9497607655502392

In [80]: model = GradientBoostingClassifier(max_depth=1,min_samples_leaf=3)
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.8148148148148148
test score =  0.9784688995215312

In [82]: model = SVC(kernel = 'linear')
model.fit(train_X, train_Y)
print "train score = ", model.score(train_X, train_Y)
print "test score = ", model.score(test_X, test_Y)

train score =  0.7867564534231201
test score =  1.0
```

模型融合

对多个模型的结果取平均(投票)，作为最终的结果。比如拿SVM, LR, RF, GBDT的平均结果作为最终结果。

用几个模型筛选出较为重要的特征

```
def get_top_n_features(titanic_train_data_X, titanic_train_data_Y, top_n_features):
    # 随机森林
    rf_est = RandomForestClassifier(random_state=42)
    rf_param_grid = {'n_estimators': [500], 'min_samples_split': [2, 3], 'max_depth': [20]}
    rf_grid = model_selection.GridSearchCV(rf_est, rf_param_grid, n_jobs=25, cv=10, verbose=1)
    rf_grid.fit(titanic_train_data_X,titanic_train_data_Y)
    #将feature按Importance排序
    feature_imp_sorted_rf = pd.DataFrame({'feature': list(titanic_train_data_X), 'importance': rf_grid.best_estimator_.feature_importances_}).sort_values('importance', ascending=False)
    features_top_n_rf = feature_imp_sorted_rf.head(top_n_features)['feature']
    print('Sample 25 Features from RF Classifier')
    print(str(features_top_n_rf[:25]))

    # AdaBoost
    ada_est = ensemble.AdaBoostClassifier(random_state=42)
    ada_param_grid = {'n_estimators': [500], 'learning_rate': [0.5, 0.6]}
    ada_grid = model_selection.GridSearchCV(ada_est, ada_param_grid, n_jobs=25, cv=10, verbose=1)
    ada_grid.fit(titanic_train_data_X, titanic_train_data_Y)
    #排序
    feature_imp_sorted_ada = pd.DataFrame({'feature': list(titanic_train_data_X), 'importance': ada_grid.best_estimator_.feature_importances_}).sort_values('importance', ascending=False)
```

```
features_top_n_ada = feature_imp_sorted_ada.head(top_n_features)[‘feature’]

# ExtraTree
et_est = ensemble.ExtraTreesClassifier(random_state=42)
et_param_grid = {‘n_estimators’: [500], ‘min_samples_split’: [3, 4], ‘max_depth’: [15]}
et_grid = model_selection.GridSearchCV(et_est, et_param_grid, n_jobs=25, cv=10, verbose=1)
et_grid.fit(titanic_train_data_X, titanic_train_data_Y)

#排序
feature_imp_sorted_et = pd.DataFrame({‘feature’: list(titanic_train_data_X), ‘importance’: et_grid.best_estimator_.feature_importances_}).sort_values(‘importance’, ascending=False)
features_top_n_et = feature_imp_sorted_et.head(top_n_features)[‘feature’]
print(‘Sample 25 Features from ET Classifier:’)
print(str(features_top_n_et[:25]))

# 将三个模型挑选出来的前features_top_n_et合并
features_top_n = pd.concat([features_top_n_rf, features_top_n_ada, features_top_n_et], ignore_index=True).drop_duplicates()

return features_top_n
```

Customer Segmentation

制定简单的方案花不了多少时间，尤其在具有理论基础的前提下。花时间的是怎么用代码去实现你的方案。只有在对语言(这个工具)非常熟悉的时候你才能快速的实现你的demo。

问题与技术路线

1. 要处理的问题是什么?
 - i. 客户分割
2. 要实现什么结果?
 - i. 把客户分割成不同的几个类别
3. 数据要怎么处理?
 - i. 数据清洗(去除错误的项目，比如购物数量小于0, 无意义的项目，比如用户ID是nan项)
 - ii. 以客户的ID作为标识，来对客户进行分类
4. 怎么实现我们的目的?
 - i. 通过客户的三个特征(RFM, Recency, Frequency, Monetary Value), 再用K-means进行聚类
 - ii. Recency:客户最近多长时间购物过
 - iii. Frequency:客户购物的频率
 - iv. Monetary value:客户一共花了多少钱

groupby("CustomerID").sum().reset_index() 的作用就是根据CustomerID进行聚类，再对同一CustomerID的amount进行求和。

```
customer_monetary_val = cs_df[['CustomerID', 'amount']].groupby("CustomerID").sum().reset_index()
customer_history_df = customer_history_df.merge(customer_monetary_val, how='outer')
customer_freq = cs_df[['CustomerID', 'amount']].groupby("CustomerID").count().reset_index()
customer_freq.rename(columns={'amount': 'frequency'}, inplace=True)
customer_history_df = customer_history_df.merge(customer_freq, how='outer')

print cs_df.shape, '\n', customer_history_df.head(5)
(354345, 11)
   CustomerID  recency    amount  frequency
0      12346.0     326.0  77183.60         1
1      12747.0      2.0   4196.01        103
2      12748.0      1.0   33719.73       4596
3      12749.0      4.0   4890.88       199
4      12820.0      3.0    942.34        59
```

对数化这是那个指标

```
from sklearn import preprocessing
customer_history_df['recency_log'] = customer_history_df['recency'].apply(math.log)
customer_history_df['amount_log'] = customer_history_df['amount'].apply(math.log)
customer_history_df['frequency_log'] = customer_history_df['frequency'].apply(math.log)
feature_vector = ['recency_log', 'amount_log', 'frequency_log']
X_subset = customer_history_df[feature_vector].as_matrix()
scaler = preprocessing.StandardScaler().fit(X_subset)
X_scaled = scaler.transform(X_subset)
```

要注意，如下两种表达方式是一样的。

```
recency_log_1 = customer_history_df['recency'].apply(math.log)
recency_log_2 = customer_history_df.recency.apply(math.log)
```

然后做直方图，也就是统计amount_log在每个值区间的出现的概率。用n,bins, patchs接收返回的数据。

```
X = customer_history_df.amount_log
n, bins, patchs = plt.hist(X,1000,facecolor='green',alpha = 0.75)
plt.xlabel('Log of Sales Amount')
plt.ylabel('Probability')
plt.title('Histogram of Log Transformed Customer Monetary Value')
plt.grid(True)
plt.show()
```

画RFM图，进行聚类。

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```

fig = plt.figure(figsize=(8,6))
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')

xs = customer_history_df.recency_log
ys = customer_history_df.frequency_log
zs = customer_history_df.amount_log
ax.scatter(xs,ys,zs,s=5)

ax.set_xlabel('Recency')
ax.set_ylabel('Frequency')
ax.set_zlabel('Monetary')

```

用KMeans来进行聚类

```

from sklearn.cluster import KMeans
from sklearn.metrics import silhouette_samples, silhouette_score
import matplotlib.cm as cm

X = X_scaled

cluster_centers = dict()

for n_clusters in range(3,6,2):
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
    #ax2 = plt.subplot(111, projection='3d')
    fig.set_size_inches(18, 7)
    ax1.set_xlim([-0.1, 1])
    ax1.set_ylim([0, len(X) + (n_clusters + 1) * 10])

    clusterer = KMeans(n_clusters=n_clusters, random_state=10)
    cluster_labels = clusterer.fit_predict(X)

    silhouette_avg = silhouette_score(X, cluster_labels)
    cluster_centers.update({n_clusters : {
        'cluster_center':clusterer.cluster_centers_,
        'silhouette_score':silhouette_avg,
        'labels':cluster_labels
    }})

    sample_silhouette_values = silhouette_samples(X, cluster_labels)
    y_lower = 10
    for i in range(n_clusters):
        ith_cluster_silhouette_values = \
            sample_silhouette_values[cluster_labels == i]

        ith_cluster_silhouette_values.sort()

        size_cluster_i = ith_cluster_silhouette_values.shape[0]
        y_upper = y_lower + size_cluster_i

        color = cm.nipy_spectral(float(i) / n_clusters)
        ax1.fill_betweenx(np.arange(y_lower, y_upper),
                          0, ith_cluster_silhouette_values,
                          facecolor=color, edgecolor=color, alpha=0.7)

        ax1.text(-0.05, y_lower + 0.5 * size_cluster_i, str(i))
        y_lower = y_upper + 10 # 10 for the 0 samples

    ax1.set_title("The silhouette plot for the various clusters.")
    ax1.set_xlabel("The silhouette coefficient values")
    ax1.set_ylabel("Cluster label")
    ax1.axvline(x=silhouette_avg, color="red", linestyle="--")
    ax1.set_yticks([])
    ax1.set_xticks([-0.1, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1])
    colors = cm.nipy_spectral(cluster_labels.astype(float) / n_clusters)
    feature1 = 1
    feature2 = 2
    ax2.scatter(X[:, feature1], X[:, feature2], marker='.', s=30, lw=0, alpha=0.7,
                c=colors, edgecolor='k')

    centers = clusterer.cluster_centers_
    ax2.scatter(centers[:, feature1], centers[:, feature2], marker='o',
                c="white", alpha=1, s=200, edgecolor='k')
    for i, c in enumerate(centers):
        ax2.scatter(c[feature1], c[feature2], marker='%' % i, alpha=1,
                    s=50, edgecolor='k')

    ax2.set_title("The visualization of the clustered data.")
    ax2.set_xlabel("Feature space for the 1st feature i.e. monetary value")
    ax2.set_ylabel("Feature space for the 2nd feature i.e. frequency")
    plt.suptitle(("Silhouette analysis for KMeans clustering on sample data "
                 "with n_clusters = %d" % n_clusters),

```

```

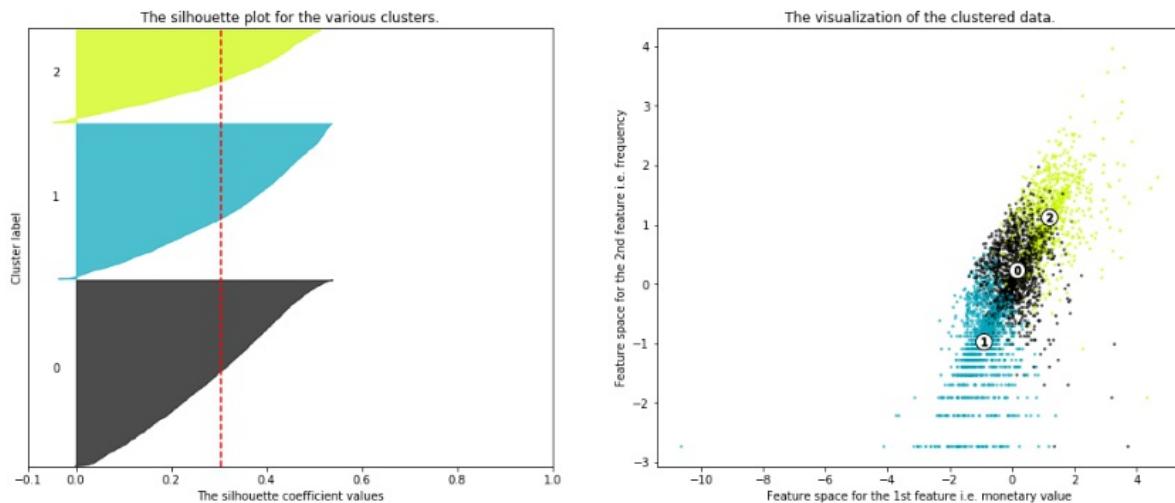
    fontsize=14, fontweight='bold')
plt.show()

```

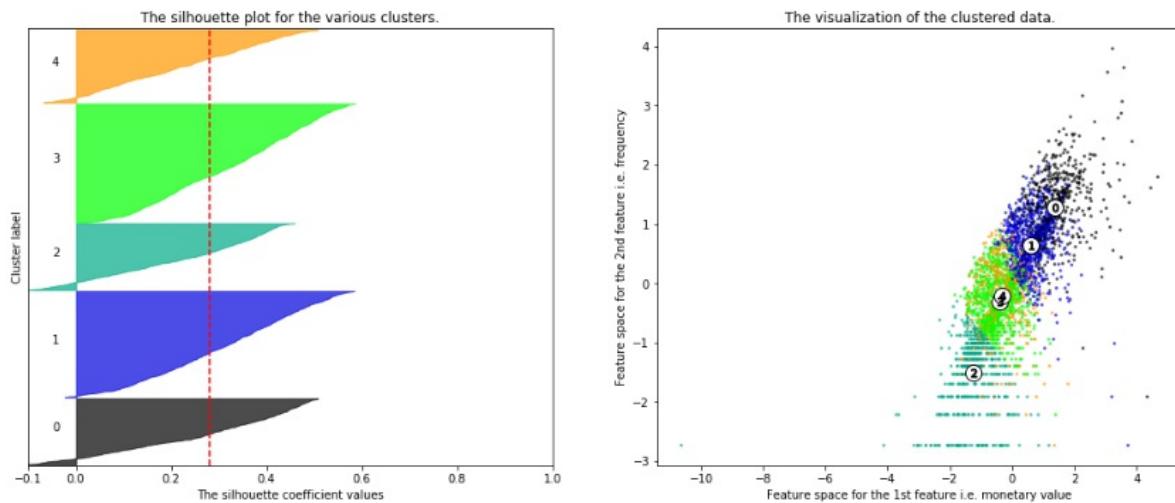
对于聚类要注意这个指标:silhouette score

聚类图如下。

Silhouette analysis for KMeans clustering on sample data with n_clusters = 3



Silhouette analysis for KMeans clustering on sample data with n_clusters = 5



然后对不同的特征画进行分析, 画最小值, 最大值, 25%, 中值, 75%。

traces是一个list, 通过append来添加元素, 把y,name,cls添加到traces里面。

plotly的使用可以参看[官方教程](#), plotly是一个完全开源的项目。

`np.percentile(y0, cutoff_quantile)`表示取从小到大, 在cutoff_quantile%处的值, cutoff_quantile为百分位值。

```

import plotly as py
import plotly.graph_objs as go
py.offline.init_notebook_mode()

x_data = ['Cluster 1','Cluster 2','Cluster 3','Cluster 4', 'Cluster 5']
cutoff_quantile = 100
field_to_plot = 'recency'

y0 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==0][field_to_plot].values
y0 = y0[y0<np.percentile(y0, cutoff_quantile)]
y1 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==1][field_to_plot].values
y1 = y1[y1<np.percentile(y1, cutoff_quantile)]
y2 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==2][field_to_plot].values
y2 = y2[y2<np.percentile(y2, cutoff_quantile)]
y3 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==3][field_to_plot].values
y3 = y3[y3<np.percentile(y3, cutoff_quantile)]
y4 = customer_history_df[customer_history_df['num_cluster5_labels']==4][field_to_plot].values
y4 = y4[y4<np.percentile(y4, cutoff_quantile)]

```

```

y_data = [y0,y1,y2,y3,y4]

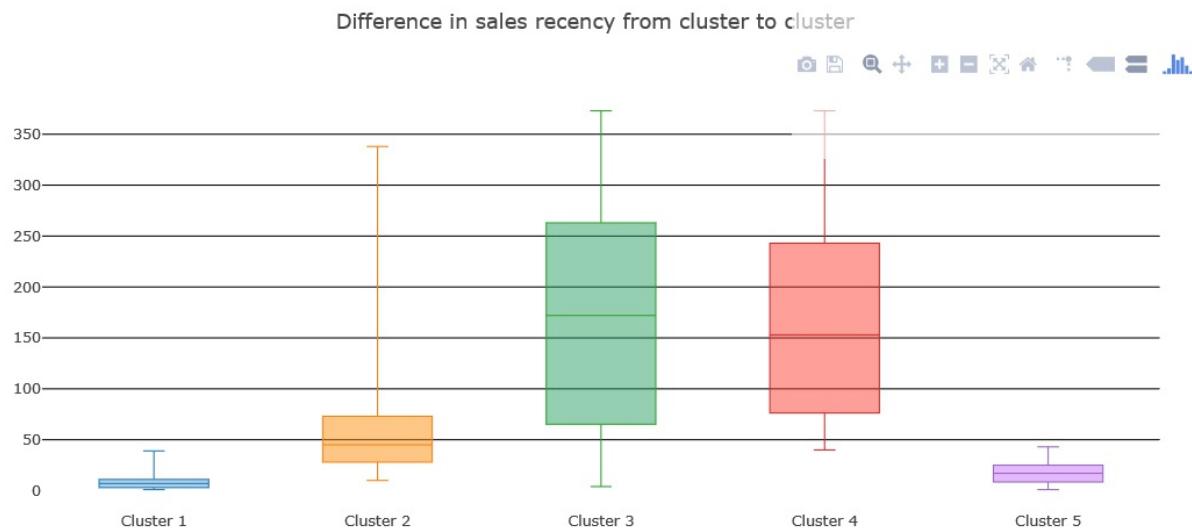
colors = ['rgba(93, 164, 214, 0.5)', 'rgba(255, 144, 14, 0.5)', 'rgba(44, 160, 101, 0.5)', 'rgba(255, 65, 54, 0.5)', 'rgba(207, 114, 255, 0.5)', 'rgba(127, 96, 0, 0.5)']
traces = []

for xd, yd, cls in zip(x_data, y_data, colors):
    traces.append(go.Box(
        x=xd,
        y=yd,
        name=xd,
        boxpoints=False,
        jitter=0.5,
        whiskerwidth=0.2,
        fillcolor=cls,
        marker=dict(
            size=2,
        ),
        line=dict(width=1),
    ))

layout = go.Layout(
    title='Difference in sales {} from cluster to cluster'.format(field_to_plot),
    xaxis=dict(
        autorange=True,
        showgrid=True,
        zeroline=True,
        dtick=50,
        gridcolor='black',
        gridwidth=0.1,
        zerolinecolor='rgb(255, 255, 255)',
        zerolinewidth=2,
    ),
    margin=dict(
        l=40,
        r=30,
        b=80,
        t=100,
    ),
    paper_bgcolor='white',
    plot_bgcolor='white',
    showlegend=False
)

fig = go.Figure(data=traces, layout=layout)
py.offline.iplot(fig)

```



Effective Cross Selling

问题与技术路线

1. 要处理的问题是什么？
 - i. 市场篮分析

2. 要实现什么结果？
 - i. 寻找客户潜在的购买模式, 来制定销售策略, 增加销售量。
3. 数据要怎么处理？
 - i. 数据清洗(去除错误的项目, 比如购物数量小于0, 无意义的项目, 比如用户ID是nan项)
4. 怎么实现我们的目的？
 - i. 关联规则挖掘(Association Rule-Mining)
 - ii. FP Growth算法

concepts

Itemset: 存在的物品组合, 比如{A,B,C,...,X}

Support: 特定组合物品组合占所有交易的比例。

n = number of transactions with beer and diaper;

N = total transactions;

$$\blacksquare \text{supp}(beer, diaper) = \frac{n}{N}$$

Confidence: 一种规则的置信度。

for a rule which statrs{beer->diaper}

$$\blacksquare \text{confidence}(beer, diaper) = \frac{\text{supp}(beer \text{ and } diaper)}{\text{supp}(beer)}$$

Lift: the lift of rule {X->Y}

$$\blacksquare \text{lift}(X -> Y) = \frac{\text{supp}(X \cup Y)}{\text{supp}(X) * \text{supp}(Y)}$$

Frequent itemset: Frequent itemsets are itemsets whose support is greater than a user defined support threshold.

深度学习在晶圆检测中的应用研究

要从这个项目中深挖出整个深度学习，也就是从这个项目中涉及到CNN, RNN,DNN.以及训练技巧以及ML。图像处理与信号处理。也就是要体现出深度与广度。三段经历代表深度学习，编程，最优化(机器学习)三大领域，要会发现亮点，也就是自己的特色。注意深度，附带是广度。

项目背景与目的

通过深度学习来提升光刻模型的性能。随着芯片制造中芯片节点(晶体管栅极的最小线宽(栅宽))变小，光成像过程中光的波动性越来越显著，几何光学要被波动光学所修正。光刻成像的模型也越来越复杂，但是，即使模型越来越复杂，我们通过光刻的成像模型也与显示的成像结果存在一些差距，尤其在边角处。这些由成像模型导致的错误，很大部分可以由有经验的工程师来辨别出来，这些错误区别于真实的印刷错误。我们的目的是想通过深度学习来减小我们的模型错误而保留真实的印刷错误。可以认为是把模型导致的错误当成噪声，我们需要抑制这些噪声，而把真正的印刷错误当成真实的信号来对待，我们需要保留这些信号而抑制噪声。

一个问题是：不加特殊的处理，你在抑制噪声的时候，也同时抑制了真正的信号。那你的网络要怎么处理才能保留住信号而抑制噪声？

问题的延伸

我们真正想要找的是印刷错误(真正的错误)，而模型导致的错误是虚假的错误。因此，我们可以当成一个二分类问题去求解。但是不能漏掉一个真实的错误。

背景

随着半导体工艺中，芯片中的尺寸越来越小，光学衍射效应越来越明显，单纯的几何光学(初中物理老师告诉你，光是直线传播的，这其实说的是，光是粒子，但光通过狭窄的缝隙会发生衍射效应，这时，光不是直线传播的了)以及不适用，要考虑光的衍射效应。光通过Musk就相当于一次傅里叶变化，从时域变到了频率域。再通过棱镜，又相当于一次傅里叶变换，从频率域变到时域。但棱镜的尺寸有限，因此只接收了低频波，因此，用图像处理的话来说，棱镜的作用就是一个低通滤波器。去掉了高频部分，因此投影到wafer(晶圆)上的图案不再菱角分明，而是在边界处会比较圆滑。

如果没有一些傅里叶光学的背景，你们听起来会比较费劲，但是如果你们有图像处理的背景的话，就记住把Musk上的图案刻蚀到晶圆上就是经历了两次傅里叶变换再加一个低通滤波器。

光通过单缝后，其频谱是连续的，但是经过周期性(结构)缝，其频谱就是离散的，如果为了节约棱镜的开支，就只能取很低的频谱。

光学建模是个逆问题(逆问题的例子，就是CT，通过收集到的信号来反推身体的内部结构)。(怎么把逆问题与深度学习，机器学习联系起来？)，再通俗点，它实际上和机器学习，深度学习要处理的问题是一样的，就是求解一个模型，就是train一个model。正向过程就是你已经训练好了一个模型(取啥例子？)，然后输入一张图，看它的分类是啥，这很容易，难得是，我有一堆分类好的图片，让你训练一个model。逆问题就是一个优化问题，因此就涉及到一些优化算法，这时候考点就来了？有哪些优化算法，总结下，有两种，线性搜索方法(linear search)以及 trust region。但是对于这个求逆问题而言，是很复杂的，直接离散的话，参数基本在10的15次方以上，总之，这个求逆问题是很难的，即使求出来，也不会很准。因此，我们有两个研究的方向。直接通过光学图像(也就是将要刻蚀在wafer上的电路板)来反求印刷这张图像的模板(Musk)，其实这个光刻就像拍照片，拍的物体(比如风景)就是Musk, wafer就相当于胶卷，wafer上的图像就相当于风景在胶卷上的投缘。

第一个方向是，直接通过光学图像(也就是将要刻蚀在wafer上的电路板)来反求印刷这张图像的模板(Musk)，我们的模型就是卷积网络，因为多层网络可以用来近似任何一个函数(通用近似定理 (Universal approximation theorem, 一译万能逼近定理))指的是：如果一个前馈神经网络具有线性输出层和至少一层隐藏层，只要给予网络足够数量的神经元，便可以实现以足够高精度来逼近任意一个在 R^n 的紧子集 (Compact subset) 上的连续函数。只要神经元足够多，再加一个激活函数)，当然可以用来近似这个求逆过程。但是这条路风险很大，因此，我们有了第二条研究的路径，就是修正原有的物理模型，使得它更powerful，也就是说，我们仍然需要建立物理model，来进行求逆过程，得到一个物理的model，只是，这个model不是足够强大，会有一些缺陷，因此，我们想通过一个CNN来修正这个model，来让我们的模型更有效。这就是大致的背景。背景讲清楚了，我们就该讲我们是怎么做的了。

搭建GPU环境，装显卡驱动(显卡驱动，蓝屏)，cuda，cudnn，但是发现不能使用apt-get install东西，重装了很多次系统，装了不同的ubuntu系统，从12.04到16.04的五个不同版本，折腾了一周。(因此因为公司的IP保护，无线网卡解决问题)

我们一开始做了些尝试，用了CNN, VGG，遇到的问题(图像预处理，亚像素的偏移)，数据集不够，因为真实数据都是机密(IP)，不可以轻易拿到。自己去切割图像，通过有经验的人工来做分类。再通过翻转这些操作来增加数据集。此外，数据集也是很讲究的，你得保证同一数据集中的物理参数，焦距，偏振方向都是一致的，焦距不同，得到的图像模糊程度不同。

很长一段时间，我们都在用记忆卷积，反卷积的深度神经网络，都没发现很好的效果。后来使用了pre-trained model，因为我们的数据量少(30000张图)，但是经过CNN处理过的图像，并不比没有处理的图像好，这就尴尬了，因此，我们一直加深网络。

工具

Quardo 4000; Tensorflow

图像预处理

主要困难还是在于图像的收集，我们可以通过降低判定real-false的阈值来增加模型错误的图像数量，我们也需要人工来判定哪些错误是真实的印刷错误，哪些是由模型导致的错误。而人工标注是一件很费时间的事情。

我们输入的是我们模型产生的图像，而我们的target是真是拍摄到的芯片图像。这些都是数字图像，我们必须确保输入与输出的图像是同一个地方的，也就是图像必须真正的对齐，不能差任何一点，半个pixel也不能(查一点就会导致两图相减在边缘地方出现巨变)，但是最后发现我们的图像差了半个pixel，我们必须通过信号处理的方法来对齐我们的输入与输出图像。这些是数据预处理过程中遇到的真实问题。

数据集

图像大小:48*48。
数据集:一共31400张图片，训练集90%，一共28260张图，测试集10%，一共3140张图
batch size大小5。
一个epoch(训练完28260张图)的时间是600s,即10分钟左右。

```
#batch_size = 5
#learn_rate = 0.0001
net = tflearn.input_data(shape=[None, 48, 48, 1])
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 3, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 1, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 1, 1)
Training Step: 1000 | total loss: 6.56844 | time: 118.655s
| Adam | epoch: 001 | loss: 6.56844 - acc: 0.7033 | val_loss: 8.57394 - val_acc: 0.6723 -- iter: 05000/28260
--
Training Step: 2000 | total loss: 6.26063 | time: 234.816s
| Adam | epoch: 001 | loss: 6.26063 - acc: 0.6907 | val_loss: 8.11802 - val_acc: 0.6762 -- iter: 10000/28260
--
Training Step: 3000 | total loss: 5.61156 | time: 351.264s
| Adam | epoch: 001 | loss: 5.61156 - acc: 0.7085 | val_loss: 7.88475 - val_acc: 0.6794 -- iter: 15000/28260
--
Training Step: 4000 | total loss: 6.61628 | time: 469.786s
| Adam | epoch: 001 | loss: 6.61628 - acc: 0.7000 | val_loss: 9.18316 - val_acc: 0.6804 -- iter: 20000/28260
--
Training Step: 5000 | total loss: 5.81782 | time: 586.015s
| Adam | epoch: 001 | loss: 5.81782 - acc: 0.6987 | val_loss: 7.58499 - val_acc: 0.6852 -- iter: 25000/28260
--
Training Step: 6000 | total loss: 5.99239 | time: 50.356ss
| Adam | epoch: 002 | loss: 5.99239 - acc: 0.7008 | val_loss: 6.78956 - val_acc: 0.6852 -- iter: 01740/28260
```

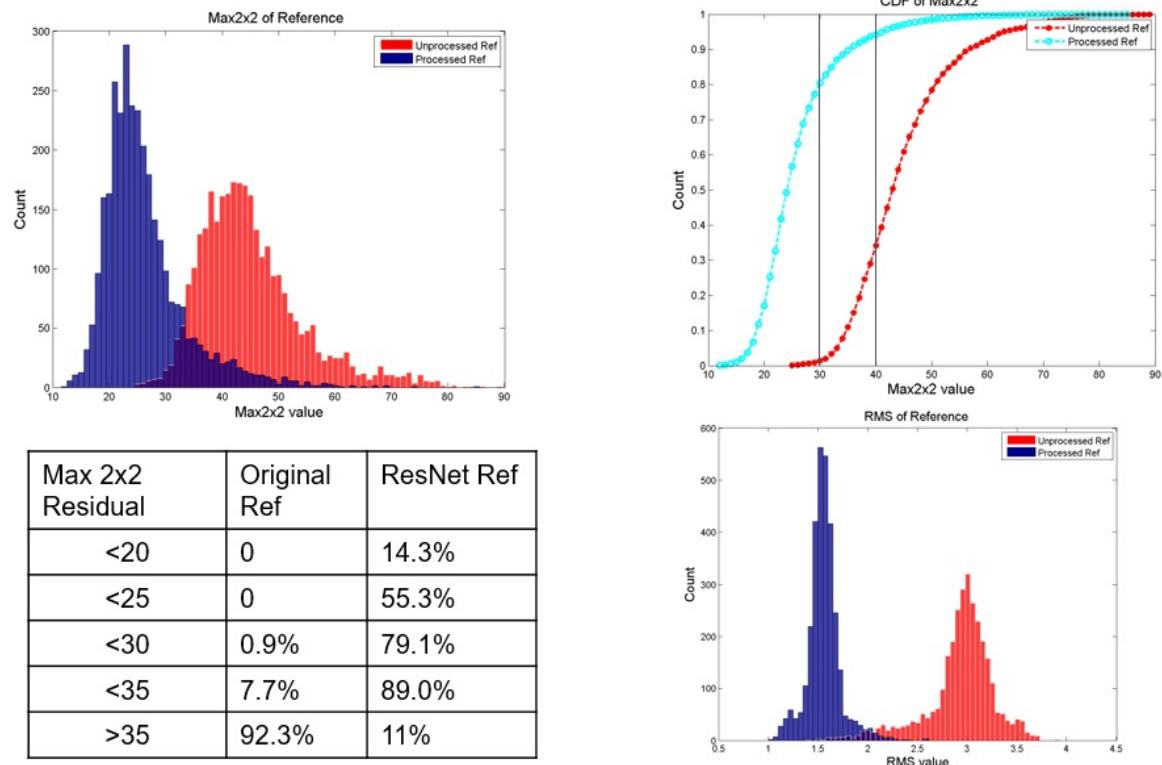
网络选择

从一开始的VGG到

```
#batch_size = 5
#learn_rate = 0.0001
net = tflearn.input_data(shape=[None, 48, 48, 1])
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.residual_block(net, 1, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 64, 1)
net = tflearn.residual_block(net, 1, 64)
net = tflearn.residual_block(net, 2, 64)
net = tflearn.conv_2d(net, 1, 1)
Training Step: 1000 | total loss: 6.41052 | time: 88.615s
```

效果

通过我们的ResidualNN, 我们能很大的降低我们模型得到的图像与实际拍摄到的图像之间的差别, 也就是在Max2x2。(RMS怎么定义忘记了?)



原因是, 我们输入的图像已经很接近输出的图像, 因此, 我们只需要训练残差就可以了。

图像与信号处理

Residual NN

Residual NN提出来的背景:

随着网络变深, 训练误差与测试误差得提高了。这是违反我们的训练的初衷的, 因为即使我们把26层后面的网络变成恒等映射, 效果也不会变差。

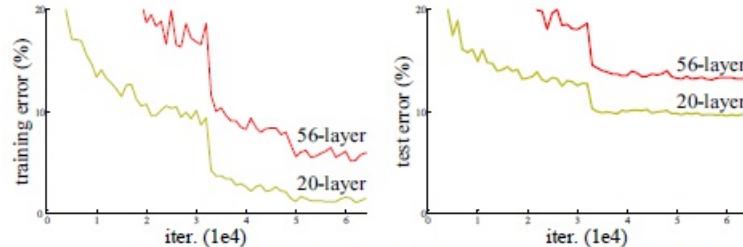


Figure 1. Training error (left) and test error (right) on CIFAR-10 with 20-layer and 56-layer “plain” networks. The deeper network has higher training error, and thus test error. Similar phenomena on ImageNet is presented in Fig. 4.

存在这种随着网络层数增加, 会出现如下两个问题:

1. 梯度消失或者爆炸, 导致训练难以收敛。这个问题可以通过normalized initialization 和intermediate normalization layers解决。
2. 随着深度增加, 模型的训练误差与测试误差会迅速下滑, 这不是overfit造成的。这种现象在CIFAR-10和ImageNet中都有提及。

Residual-NN的实现

参考He Kaiming的这篇文章

Residual Block的设计如下：

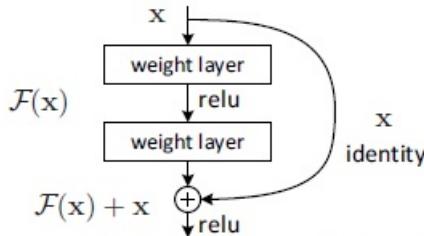


Figure 2. Residual learning: a building block.

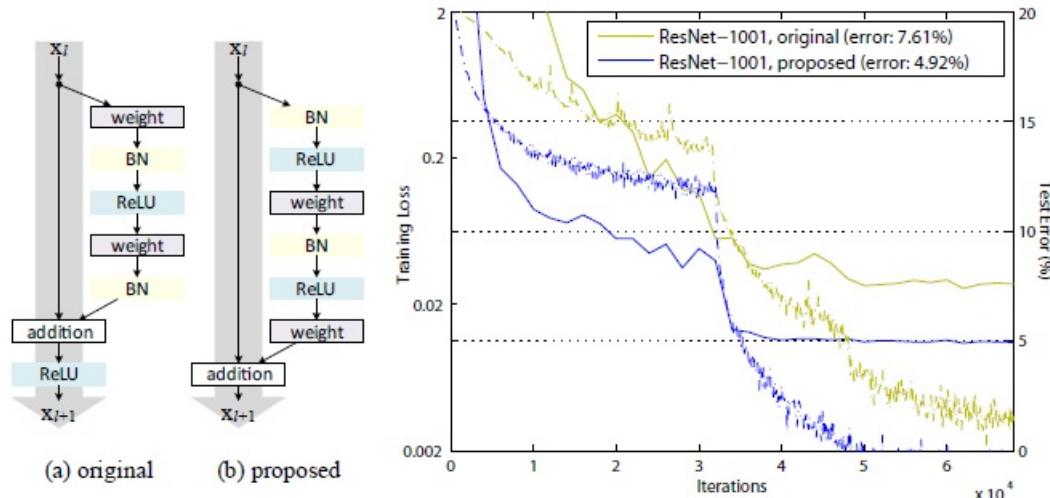
对于每一个Residual Units:

$$y_l = h(x_l) + F(x_l, W_l)$$

$$x_{l+1} = f(y_l)$$

其中函数h一般取恒等映射 $h(x_l) = x_l$, 实验发现f取恒等映射能实现最快的误差下降与最低的训练误差;f是激活函数, 取ReLU。F的残差函数。

一个推荐的网络结构:



如果激活函数f取恒等映射 $y_l = f(y_l)$, 则有:

$$x_{l+1} = x_l + F(x_l, W_l)$$

$$x_L = x_l + \sum_{i=l}^{L-1} F(x_i, W_i)$$

因此对于误差反向传播:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x_L} \frac{\partial x_L}{\partial x_l} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x_L} \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=l}^{L-1} F(x_i, W_i)\right)$$

因为 $\frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=l}^{L-1} F(x_i, W_i)$ 不会常等于-1, 因此梯度不会消失, 即使当权重非常小的时候。

因此信号对于正向与反向传播, 可以直接的从一个单元传到另外一个单元。条件就是skip connection 函数h, 激活函数f是恒等映射时保证梯度不消失或者爆炸的关键。

他们使用的mini-batch是128, 用了2GPUs, 权重衰减是0.0001, 动量是0.9, 权重初始化了。详细的可以看上面给的论文链接。权重每30个epoch变成原来的十分之一。

Residual NN模型效果:

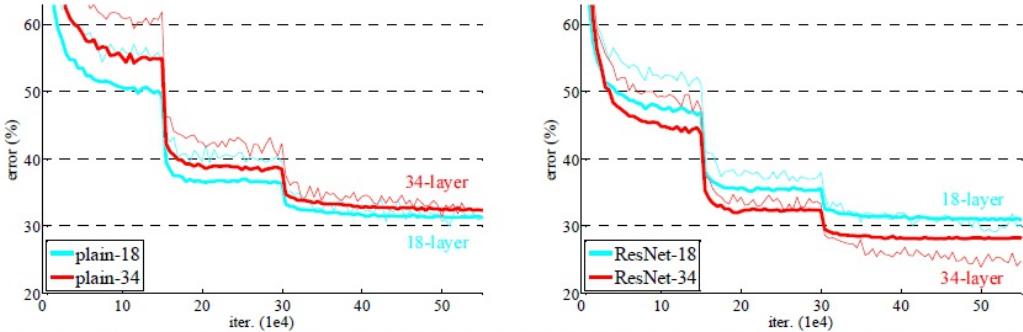


Figure 4. Training on ImageNet. Thin curves denote training error, and bold curves denote validation error of the center crops. Left: plain networks of 18 and 34 layers. Right: ResNets of 18 and 34 layers. In this plot, the residual networks have no extra parameter compared to their plain counterparts.

Resi-NN能解决以往随着模型加深训练与测试误差变大的现象。与其它网络的结果比较。

CIFAR-10	error (%)	CIFAR-100	error (%)
NIN [13]	8.81	NIN [13]	35.68
DSN [14]	8.22	DSN [14]	34.57
FitNet [15]	8.39	FitNet [15]	35.04
Highway [7]	7.72	Highway [7]	32.39
ELU [12]	6.55	ELU [12]	24.28
FitResNet, LSUV [16]	5.84	FitNet, LSUV [16]	27.66
ResNet-110 [1] (1.7M)	6.61	ResNet-164 [1] (1.7M)	25.16
ResNet-1202 [1] (19.4M)	7.93	ResNet-1001 [1] (10.2M)	27.82
ResNet-164 [ours] (1.7M)	5.46	ResNet-164 [ours] (1.7M)	24.33
ResNet-1001 [ours] (10.2M)	4.92 (4.89 ± 0.14)	ResNet-1001 [ours] (10.2M)	22.71 (22.68 ± 0.22)
ResNet-1001 [ours] (10.2M) [†]	4.62 (4.69 ± 0.20)		

模型的改进(Simons)

是否可以通过逐渐加深网络来实现浅层的网络而具有强大的功能。具体步骤就是：

1. 一个浅层的网络进行end-end的训练，训练到一定程度的时候，进行第二步
 2. 沿用第一步的权重，通过以Residual Block来微调网络，减小误差，优化方法是SGD，但是我们要保证，每增加一层网络，总的模型的效果会更好。
 3. 循环第二步，直到结果符合我们期望的为止(误差到noise层)
- 理论上，这类似于机器学习中的Adaboost，是否可以分析它的误差会指数衰减？希望能像ML算法一样，能有数学理论来分析深度学习。通过理论指导，像搭积木一样来构建深度神经网络。

三大神经网络

CNN

怎么实现最简单的CNN？

RNN

LSTM

DNN

自编码

强化学习

Fast项目

要从这个项目中体现出你对语言的驾驭能力，也就是编程能力。各大语言的区别，主要是C++，Java与python。OOP，还有就是模式设计这些。

指针与引用

C++的OOP

C++的继承与多态

C++与Java的最大区别

模式设计

Windows的消息机制

多线程与同步

进程间通讯

Socket

泛型编程

STL--标准模板库

智能指针

数据结构

排序算法

Miura项目

要从这个项目中你对这最优化问题的理解与实践。也就是能对不同的最优化算法能如数家珍，并能知道其适用场景。从最优化扯到ML, DL。还是多与机器学习靠拢，这就形成自己的三个方面。

最优化

一阶方法--梯度下降法

随机梯度下降法

动量方法

Adagrad

Adam

特殊的一阶方法--共轭梯度法

二阶方法

牛顿法

quasi-Netwon法

BFGS

DFP

线性搜索

Trust-region方法

L-M算法

Dog-Leg算法

约束最优化问题

拉格朗日乘子理论

罚函数法

二次规划

对偶性与方法

Updates Log

ToDo

- Tensorflow - char embedding layer
- Tensorflow - Pointer Layer
- 机器学习 - 专题-XGBoost
- 深度学习 - GAN 与 RL 基本模型
- CRF 条件随机场 / 图模型
- Linux Shell 常用命令
 - wc/sed/awk/grep/sort/uniq/paste/cat/head/tail
- DL - 专题 - 加速方法
- 机器学习基础相关
 - 深度学习与机器学习的异同及联系
- 机器学习实践相关
 - 数据预处理
 - 缺失值
 - 特征工程, 特征选择的标志(为什么选择这些特征)
 - XGB 调参的方法、LightGBM、CatBoost
 - gbdt,xgboost,lgbm的区别
 - 模型融合的方法
 - 数据可视化分析 - 流形学习
- 算法专题-排列与组合
- 吉布斯采样
- 算法-矩阵乘法
 - 稀疏矩阵
- 显著性检测
- 机器学习的体系、学派
- 朴素贝叶斯与逻辑回归的区别
- 为什么 RNN 中采用 tanh 作为激活函数
 - <https://www.zhihu.com/question/61265076>
- 修订 FastText 中词向量生成的描述
- 自定义用于快速测试代码的数据结构及相关方法
- 并查集
- 什么是梯度消失
- HR面常见问题
- 超参数调优
- 机器学习实战-部分代码(K-Means等)
- 判断相似二叉树及优化
- $\max(x, y)$ 的期望
- 加速网络收敛的方法
- 回归树、基尼指数
- 判断两个链表是否相交(CSDN)
- 一阶 二阶泰勒展开
- 梯度下降往往没有指向

问题求解系统

分类,回归,支持向量机,决策树,集成学习与随机森林,维数约化,特征工程

深度学习的发展脉络

写这一节的目的是为了对深度学习的发展有一个认识。可以写成一部深度学习的发展史。里面要描述出当时存在的问题，以及为解决这些问题而发展出什么模型；为解决不同领域的问题如图像识别方向，语音识别方向，自然语言处理方向而发展出的不同模型。以及为解决特定领域的问题而发展特定的方法。比如从RNN到LSTM。最总会成为一个树形结构。

另外一个目的就是要时刻对最前沿的领域有一个了解，及时去拜读arxiv上最新的深度学习的论文。了解当前存在的主要问题是什么，然会看存在的可能的解决方案是什么？自己有什么想法等。看CVPR的前三名，就基本对计算机视觉的最新工作有个基本的了解了。

格式：论文是为了解决什么问题，解决的怎么样了，相对于其它方法的优势是什么，附上论文的地址。

第九章 问题求解系统

这一章，主要是构建自己的ML, DL问题求解系统，基于的是scikit-learn与tensorflow，目的是通过构建自己的问题系统，来方便的训练与使用模型；最终会把这个系统打造成自己的AutoML系统，当然不止是ML，还有DL。需要包含如下几部分。这个系统可以参照[阿里的云栖](#)。最终，本书中的理论都是这个系统的注脚。

1. Scikit-learn的代码框架
2. tensorflow的代码框架
3. 自己系统的框架
 - i. 数据清洗
 - ii. 模型的选择
 - iii. 模型的验证
 - iv. 模型的使用
4. 系统处理的问题
 - i. 基于sklearn, 对不同的主流方向(主流问题, 如分类, 回归, 降维, 特征工程, 推荐系统), 构建不同的父类
 - ii. 数据清洗是一个麻烦的工程, 这个工程也该包含在我们的系统里面
 - iii. 接下来就是模型的选择
 - iv. 特征工程是一个大的方面
 - v. 模型结果的验证
5. 问题求解系统的几大部分
 - i. 数据预处理
 - ii. 特征工程
 - iii. 统计分析
 - iv. 机器学习
 - v. 深度学习
 - vi. 将包含的部分
 - i. 时间序列分析
 - ii. 文本分析
 - iii. 网络分析
 - iv. 推荐系统
 - v. 自动参数调节
6. 需要思考的问题
 - i. 最终是否要做成一个PC端的应用程序？
 - ii. 用什么语言写做这个界面？
 - iii. 底层用什么语言实现？
 - iv. AutoML的当前市场, 未来的趋势以及怎么盈利？
7. 考虑自己的框架怎么给业界带来便利, 加速业界各项研究的发展?
 - i. 自己框架怎么让机器学习, 语音识别, NLP的研究变得更容易？
 - ii. 怎么解决非一二线互联网工作没有优秀的ML, DL人才的问题？了解他们应用AI存在的困难, 以及探索解决之道。(PC端这样方便)
8. 实现问题求解系统中将要遇到的困难？只有当自己能预测自己的进度的时候, 也就表明自己对整个系统成竹在胸了。每一步需要的知识, 怎么建构都有自己的想法的是, 自己的解决方案的时候, 余下的就只是体力活了。最终, 自己的系统是不是会像keras一样, 只是封装了sklearn, tensorflow。

最终要实现的框架，基于这个框架能够快速的在特殊的场景下搭建起一个平台。

Sklearn介绍

sklearn的算法与模块

如下图所示，sklearn的定位是作为数据挖掘与数据分析的有效工具。它提供了这四大类算法，分类，回归，聚类，降维；两个模块：模型选择，预处理。每类算法包含有不同的算法。

1. 分类
 - i. SVM, 最近邻, 随机森林
2. 回归
 - i. SVR, ridge regression, Lasso regression
3. Clustering
 - i. k-Means,spectral clustering,man-shift
4. 降维
 - i. PCA,特征提取, 非负矩阵分解
5. 模型选择
 - i. grid search,cross validation
6. Preprocessing
 - i. 预处理, 特征提取

User Guide

细节的东西我们可以看scikit-learn的User Guide。

User Guide包含如下几大模块：

1. Supervised learning
2. Unsupervised learning
3. Model selection and evaluation
4. Dataset transformations
5. Dataset loading utilities
6. Computing with scikit-learn

Sklearn的代码架构

API Reference

1. `sklearn.base` : **Base classes and utility functions**
2. `sklearn.calibration` : **Probability Calibration**
3. `sklearn.cluster` : **Clustering**
4. `sklearn.compose` : **Composite Estimators**
5. `sklearn.covariance` : **Covariance Estimators**
6. `sklearn.cross_decomposition` : **Cross decomposition**
7. `sklearn.datasets` : **Datasets**
8. `sklearn.decomposition` : **Matrix Decomposition**
9. `sklearn.discriminant_analysis` : **Discriminant Analysis**
10. `sklearn.dummy` : **Dummy estimators**
11. `sklearn.ensemble` : **Ensemble Methods**
12. `sklearn.exceptions` : **Exceptions and warnings**
13. `sklearn.feature_extraction` : **Feature Extraction**
14. `sklearn.feature_selection` : **Feature Selection**
15. `sklearn.gaussian_process` : **Gaussian Processes**
16. `sklearn.isotonic` : **Isotonic regression**
17. `sklearn.impute` : **Impute**
18. `sklearn.kernel_approximation` **Kernel Approximation**
19. `sklearn.kernel_ridge` **Kernel Ridge Regression**
20. `sklearn.linear_model` : **Generalized Linear Models**
21. `sklearn.manifold` : **Manifold Learning**
22. `sklearn.metrics` : **Metrics**
23. `sklearn.mixture` : **Gaussian Mixture Models**
24. `sklearn.model_selection` : **Model Selection**
25. `sklearn.multiclass` : **Multiclass and multilabel classification**

26. `sklearn.multioutput` : Multioutput regression and classification
27. `sklearn.naive_bayes` : Naive Bayes
28. `sklearn.neighbors` : Nearest Neighbors
29. `sklearn.neural_network` : Neural network models
30. `sklearn.pipeline` : Pipeline
31. `sklearn.preprocessing` : Preprocessing and Normalization
32. `sklearn.random_projection` : Random projection
33. `sklearn.semi_supervised` Semi-Supervised Learning
34. `sklearn.svm` : Support Vector Machines
35. `sklearn.tree` : Decision Trees
36. `sklearn.utils` : Utilities

python类的继承

```

class Person(object):
    pass

class Child(Person):          # Child 继承 Person
    pass

May = Child()
Peter = Person()

print(isinstance(May,Child))   # True
print(isinstance(May,Person))  # True
print(isinstance(Peter,Child)) # False
print(isinstance(Peter,Person))# True
print(issubclass(Child,Person))# True

```

class Child(Person)表示Child继承于Person, 任何类最终都可以追溯到根类object, 这与Java,C#是一样的。

多态

定义:允许不同类的对象对同一消息做出响应。即同一消息可以根据发送对象的不同而采用多种不同的行为方式。(发送消息就是函数调用)
实现多态的技术称为:动态绑定, 是指在执行期间判断所引用对象的实际类型, 根据其实际的类型调用其相应的方法。

多态的作用:消除类型之间的耦合关系。

子类覆盖父类的函数实现, 也就是子类重新实现父类的函数。不同的子类对相同的父类函数可以有不同的实现, 因此多态就是"一个接口, 多种实现"。

多态就是指程序中定义的引用变量所指向的具体类型和通过该引用变量发出的方法调用在编译时并不确定, 而是在程序运行期间才确定, 即一个引用变量到底会指向哪个类的实例对象, 该引用变量发出的方法调用到底是哪个类中实现的方法, 必须在由程序运行期间才能确定。

多态的好处

继承和堕胎本质的目的是为了代码重用和解耦。而重用和解耦是为了减少开发时间和减少错误。最终达到降低成本的目的。

多态体现的就是“对扩展开放, 对修改封闭”。封闭就是子类不能直接修改父类的其它函数, 扩展开放也就是子类可以重写父类的函数。

1. 可替换性(substitutability)。多态对已经存在代码具有可替换性。
2. 可扩充性(extensibility)。多态对代码具有可扩充性, 增加新的子类不影响已经存在类的多态性, 继承性, 以及其他特性的运行和操作。实际上新加子类更容易获得多态功能。例如, 在实现圆锥, 半圆锥以及半球体的多态基础上, 很容易增加球体类的多态性。
3. 接口性(interface-ability)。多态是超类通过方法签名, 向子类提供了一个共同接口, 由子类来完善或者覆盖它而实现的。
4. 灵活性(flexibility)。它在应用中体现了灵活多样的操作, 提高了使用效率。
5. 简化性(simplicity)。多态简化对应用软件的编写和修改过程, 尤其在处理大量对象和操作时, 这个特点尤为突出和重要。
5. 提高了代码的维护性(继承保证)

6. 提高了代码的扩展性(由多态保证)

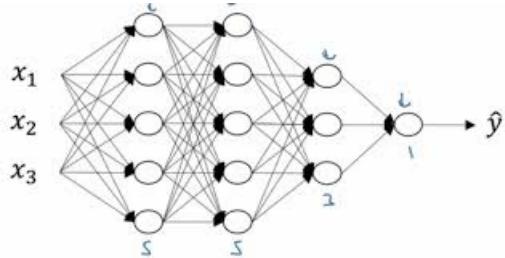
Tensorflor介绍

Tensorflow的代码架构

自己动手写神经网络

这里需要实现NN, CNN,RNN, 区别在于是否加卷积。对于NN, 要保证层数不说限制, 每层的神经元不受限制, 只处理一维输入,输出也就一维, 也就是分类问题;CNN处理二维输入(图像), 设计卷积和卷积核, 实现的例子就是LeNet-5。RNN就是实现最简单的RNN。三者通用的东西是什么? 可以提出来, 我们需要用到哪些模块? 这个心里是要清楚的。

NN



CNN

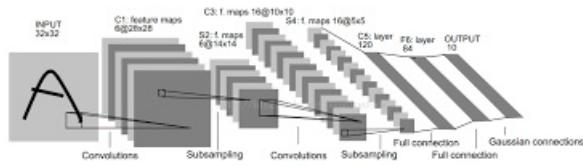


Fig. 2. Architecture of LeNet-5, a Convolutional Neural Network, here for digits recognition. Each plane is a feature map, i.e. a set of units whose weights are constrained to be identical.

常用数据处理技巧

文本数据

技巧总结

1. 分割含有子特征的特征，让每个子特征成为一个特征。
2. 时间数据则分割成天、星期、月、年等小特征来处理。
3. 缺失值补充，根据先验知识，补成0或者均值。
4. 类别数据通过onehot来进行处理。(还有更多需要考虑的，哪些情况下不能这么做)
5. 最终所有特征必须是数值数据或者布尔型数据。
6. 运用一个算法去得到一个预测模型。
7. 选取最佳的特征

文本数据统计

统计文本中词出现的频率，具体一个场景就是统计购物历史记录中的每类物品总的销售量。这些技巧都要固化到自己软件系统中。

set()是不重复集合，相当于字典的key。第一个函数得到字典的key。第二个函数建立一个list(),然后每一次购物记录作为一列。这次购物中有特定key则设为1，否则为0。

Google Analytics Customer Revenue Prediction

1 Introduction

Here is an Exploratory Data Analysis for the Google Analytics Customer Revenue Prediction competition within the R environment. For this EDA in the main we will use `tidyverse` packages. Also for modelling we will use `glmnet`, `xgboost` and `keras` packages.

Our task is to build an algorithm that predicts the natural log of the sum of all transactions per user. Thus, for every user in the test set, the target is:

$$y_{user} = \sum_{i=1}^n transaction_{user_i}$$
$$target_{user} = \ln(y_{user} + 1).$$

Submissions are scored on the root mean squared error, which is defined as:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

where \hat{y} is the predicted revenue for a customer and y is the natural log of the actual revenue value.

Let's prepare and have a look at the dataset.

```
# Necessary libraries
import os # it's a operational system library, to set some informations
import random # random is to generate random values

import pandas as pd # to manipulate data frames
import numpy as np # to work with matrix
from scipy.stats import kurtosis, skew # it's to explore some statistics of numerical values

import matplotlib.pyplot as plt # to graphics plot
import seaborn as sns # a good library to graphic plots
import squarify # to better understand proportion of categorys - it's a treemap layout algorithm

# Importing librarys to use on interactive graphs
from plotly.offline import init_notebook_mode, iplot, plot
import plotly.graph_objs as go

import json # to convert json in df
from pandas.io.json import json_normalize # to normalize the json file

# to set a style to all graphs
plt.style.use('fivethirtyeight')
init_notebook_mode(connected=True)
```

```

def cross_selling(file_path_name):
    grocery_items = set()
    with open(file_path_name) as f:
        reader = csv.reader(f, delimiter=",")
        for i, line in enumerate(reader):
            grocery_items.update(line)
    output_list = list()
    with open(file_path_name) as f:
        reader = csv.reader(f, delimiter=",")
        for i, line in enumerate(reader):
            row_val = {item: 0 for item in grocery_items}//set item to 0 as initial value
            row_val.update({item: 1 for item in line})//set to 1 if item in line
            output_list.append(row_val)
    grocery_df = pd.DataFrame(output_list)
    return grocery_df

if __name__ == '__main__':
    file_path_name = "C:\Users\pili\GitBook\Kaggle\OnlineRetailTransactions\grocery_dataset.txt"
    cross_selling(file_path_name)

```

```

item_summary_df = grocery_df.sum().sort_values(ascending=False).reset_index()
item_summary_df.rename(columns={item_summary_df.columns[0]:'item_name',item_summary_df.columns[1]:'item_count'},inplace=True)

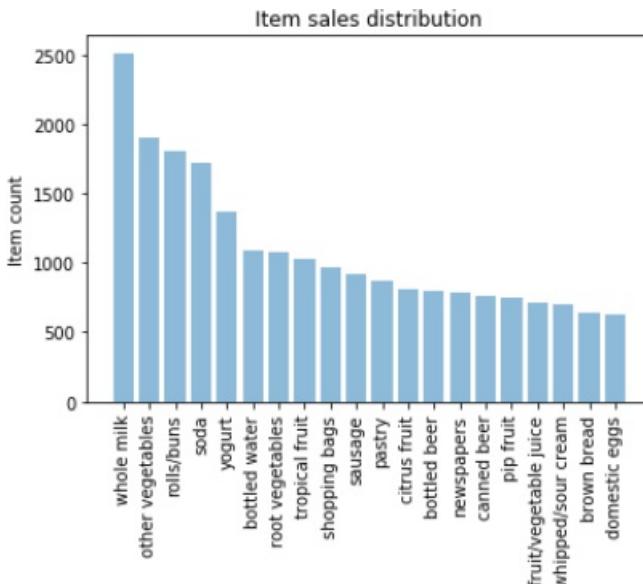
```

降序排序，再更换columns的名字。

```

import matplotlib.pyplot as plt
objects = (list(item_summary_df['item_name'].head(20)))
y_pos = np.arange(len(objects))
performance = list(item_summary_df['item_count'].head(20))
plt.bar(y_pos,performance,align='center',alpha=0.5)
plt.xticks(y_pos, objects, rotation='vertical')
plt.ylabel('Item count')
plt.title('Item sales distribution')
plt.show()

```



带多个标签数据的处理 1

```

cf_pd.geoNetwork[0]
{
    "continent": "Asia", "subContinent": "Western Asia", "country": "Turkey", "region": "Izmir", "metro": "(not set)", "city": "Izmir", "cityId": "not available in demo dataset", "networkDomain": "ttnet.com.tr", "latitude": "not available in demo dataset", "longitude": "not available in demo dataset", "networkLocation": "not available in demo dataset"
}

```

带多个标签数据的处理 2

```

cf_pd.totals[0]
{
    "visits": "1", "hits": "1", "pageviews": "1", "bounces": "1", "newVisits": "1"
}

```

数据处理技巧

1. 把所有子标签都提取出来做为一个标签。一个标签就是一个feature
 - i. 怎么自动的提取子标签？
2. 列出所有的feature名字(.columns)
3. 如果一个feature只有一个类, 则舍去
4. 对于时间这个特征, 可以使用datetime把他分成年, 月, 日, 星期, hour这多个特征来处理(最后原始时间这个特征要删除)
 - i. 含有时间的feature怎么自动分割成小的特征?

缺失值的比例

```
def missing_values(data):  
    total = data.isnull().sum().sort_values(ascending=False)  
    percent = (data.isnull().sum()/data.isnull().count()*100).sort_values(ascending=False)  
    df = pd.concat([total, percent], axis=1, keys=['Total', 'Percent'])  
  
    print("Total columns at least one Values:")  
    print(df[~df['Total'] == 0])  
    print("\n Total of Sales % of Total: ", round((df_train[df_train['totals.transactionRevenue'] != np.nan]['totals.transactionRevenue'].count() /  
len(df_train['totals.transactionRevenue'])) * 100),4))  
    return total, percent
```

时间特征处理

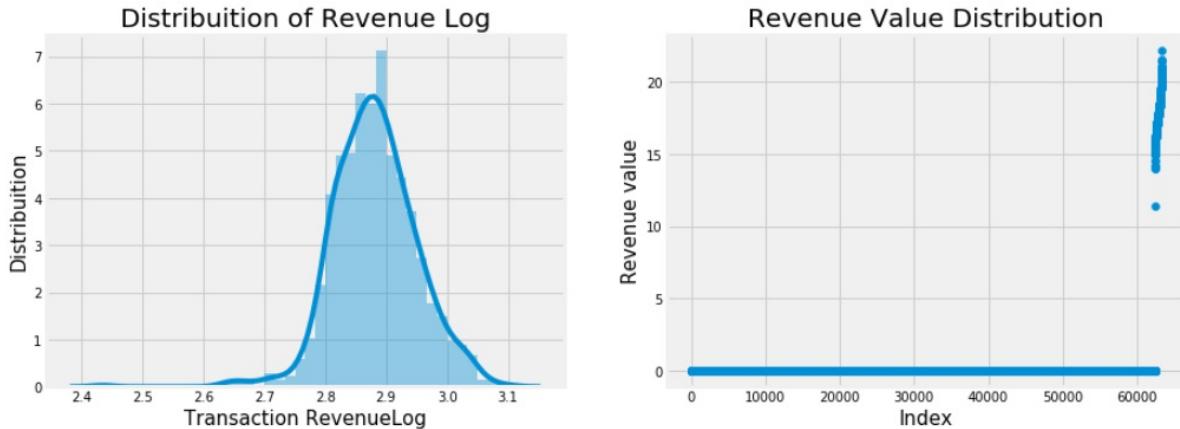
```
from datetime import datetime  
def date_process(df):  
    df['date'] = pd.to_datetime(df["date"], format="%Y%m%d")  
    df["_weekday"] = df['date'].dt.weekday  
    df["_day"] = df['date'].dt.day  
    df["_month"] = df['date'].dt.month  
    df["_year"] = df['date'].dt.year  
    df["_visitHour"] = (df['visitStartTime'].apply(lambda x:str(datetime.fromtimestamp(x.hour))).astype(int))  
    return df
```

找到只有一个类的数据并删除

```
discovering_consts = [col for col in df_train.columns if df_train[col].nunique() == 1]  
df_train.drop(discovering_consts, axis=1, inplace=True)
```

画图:

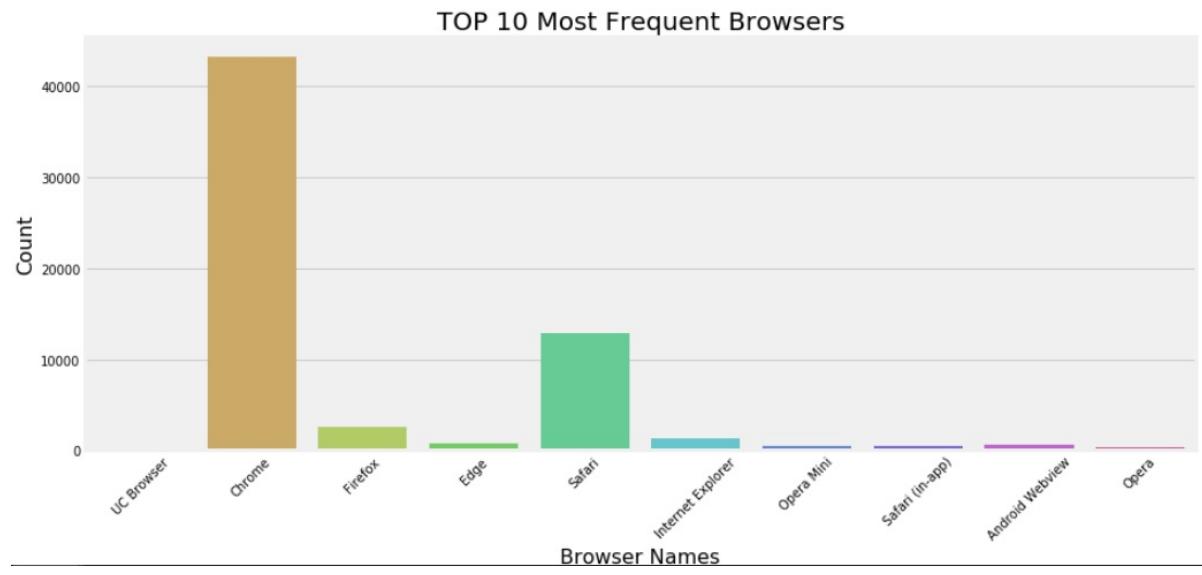
```
# seting the figure size of our plots  
plt.figure(figsize=(14,5))  
  
# Subplot allow us to plot more than one  
# in this case, will be create a subplot grid of 2 x 1  
plt.subplot(1,2,1)  
# seting the distribution of our data and normalizing using np.log on values highest than 0 and +  
# also, we will set the number of bins and if we want or not kde on our histogram  
ax = sns.distplot(np.log(df_train[df_train['totals.transactionRevenue'] > 0]['totals.transactionRevenue'] + 0.01), bins=40, kde=True)  
ax.set_xlabel('Transaction RevenueLog', fontsize=15) #seting the xlabel and size of font  
ax.set_ylabel('Distribution', fontsize=15) #seting the ylabel and size of font  
ax.set_title("Distribution of Revenue Log", fontsize=20) #seting the title and size of font  
  
# setting the second plot of our grid of graphs  
plt.subplot(1,2,2)  
# ordering the total of users and seting the values of transactions to understanding  
plt.scatter(range(df_train.shape[0]), np.sort(df_train['totals.transactionRevenue'].values))  
plt.xlabel('Index', fontsize=15) # xlabel and size of words  
plt.ylabel('Revenue value', fontsize=15) # ylabel and size of words  
plt.title("Revenue Value Distribution", fontsize=20) # Setting Title and fontsize  
  
plt.show()
```



Season CountPlot

```
plt.figure(figsize=(14,6))
df_top10 = df_train['device.browser'].value_counts()[:10].index.values
#df_train['device.browser'].isin(df_top10)
sns.countplot(df_train[df_train['device.browser'].isin(df_top10)]['device.browser'], palette="hls")
plt.title("TOP 10 Most Frequent Browsers", fontsize=20) # Adding Title and seting the size
plt.xlabel("Browser Names", fontsize=16) # Adding x label and seting the size
plt.ylabel("Count", fontsize=16) # Adding y label and seting the size
plt.xticks(rotation=45) # Adjust the xticks, rotating the labels

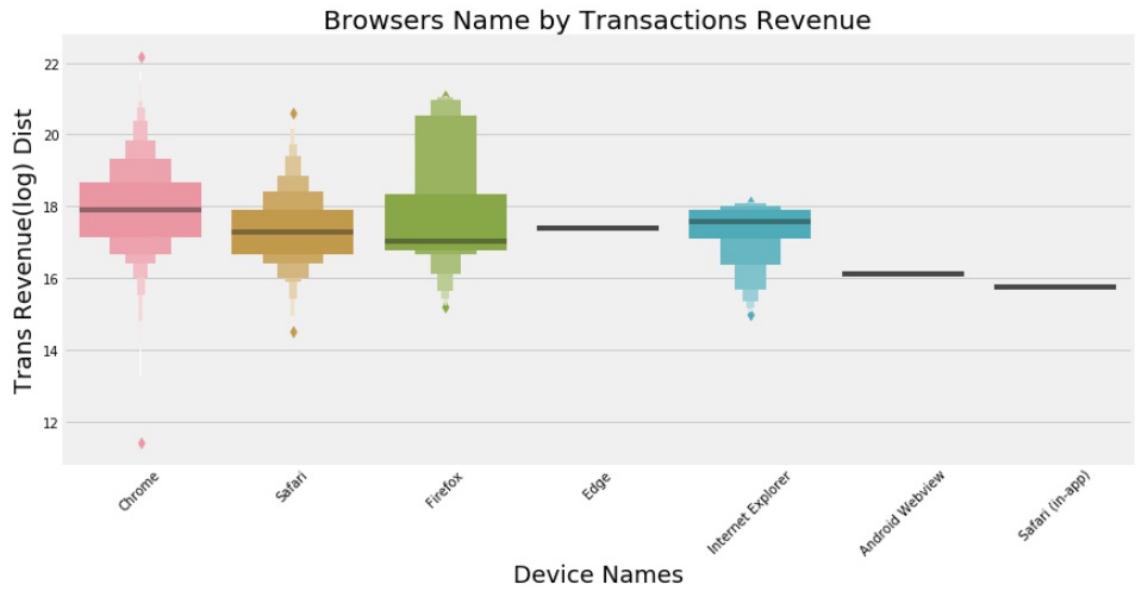
plt.show() #use plt.show to render the graph that we did above
```



boxenplot

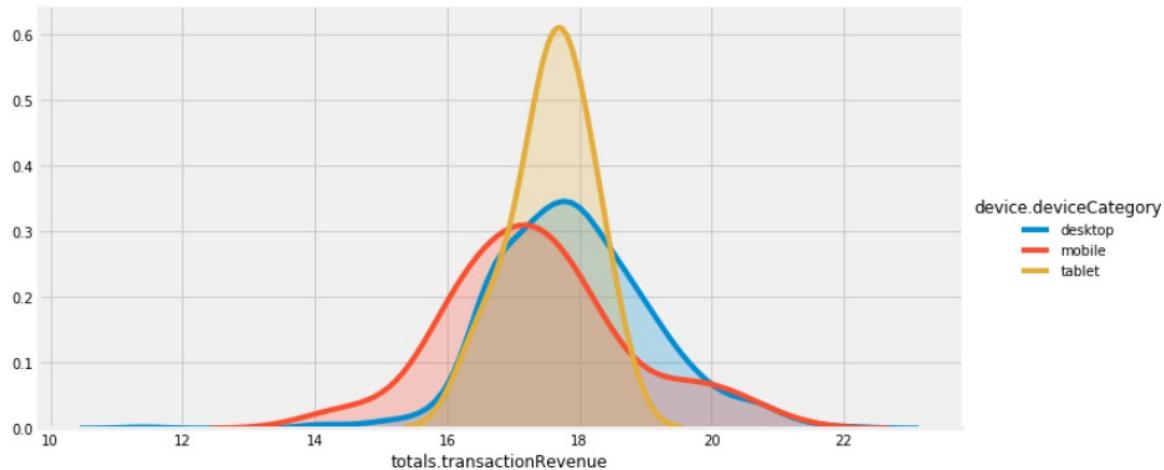
```
plt.figure(figsize=(13,6))
df_top10 = df_train['device.browser'].value_counts()[:10].index.values
g1 = sns.boxenplot(x='device.browser',y='totals.transactionRevenue',
                    data=df_train[(df_train['device.browser'].isin(df_top10))&df_train['totals.transactionRevenue']>0])
g1.set_title('Browsers Name by Transactions Revenue', fontsize=20) # title and fontsize
g1.set_xticklabels(g1.get_xticklabels(), rotation=45) # It's the way to rotate the xticks when we use variable to our graphs
g1.set_xlabel('Device Names', fontsize=18) # Xlabel
g1.set_ylabel('Trans Revenue(log) Dist', fontsize=18) #Ylabel

plt.show()
```



FacetGrid

```
(sns.FacetGrid(df_train[df_train['totals.transactionRevenue'] > 0],
               hue='device.deviceCategory', height=5, aspect=2)
 .map(sns.kdeplot, 'totals.transactionRevenue', shade=True)
 .add_legend()
)
plt.show()
```



Crosstab

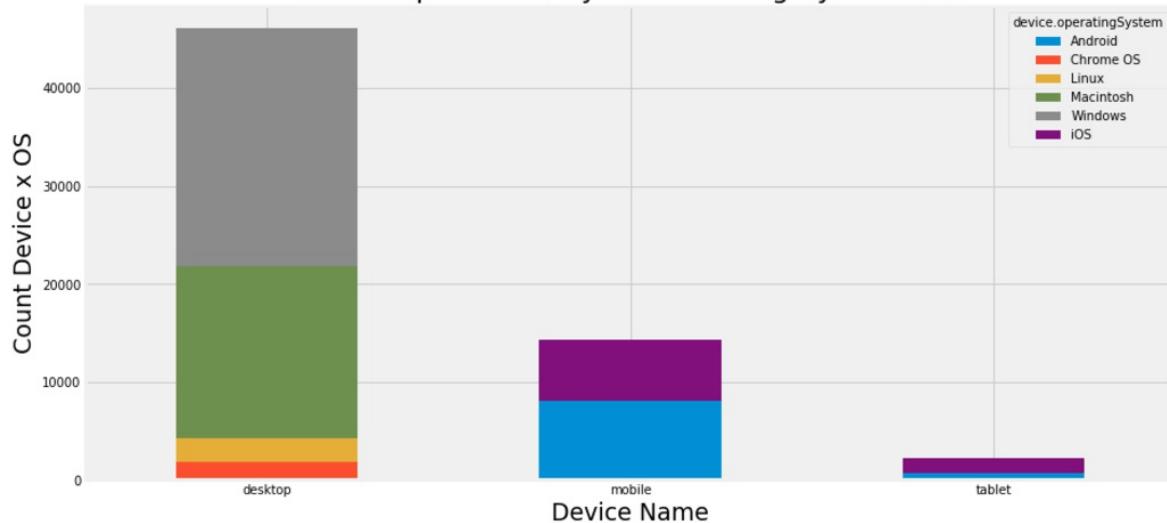
```
# At index I will use isin to substitute the loop and get just the values with more than 1%
crosstab_eda = pd.crosstab(index=df_train['device.deviceCategory'], # at this line, I am using the isin to select just the top 5 of browsers
                           columns=df_train[df_train['device.operatingSystem']]
                           .isin(df_train['device.operatingSystem']\
                           .value_counts()[:6].index.values)]['device.operatingSystem'])

# Plotting the crosstab that we did above
crosstab_eda.plot(kind="bar", # select the bar to plot the count of categoricals
                  figsize=(14,7), # adjusting the size of graphs
                  stacked=True) # code to unstack

plt.title("Most frequent OS's by Device Category of users", fontsize=22) # adjusting title and fontsize
plt.xlabel("Device Name", fontsize=19) # adjusting x label and fontsize
plt.ylabel("Count Device x OS", fontsize=19) # adjusting y label and fontsize
plt.xticks(rotation=0) # Adjust the xticks, rotating the labels

plt.show() # rendering
```

Most frequent OS's by Device Categorys of users



Countplot

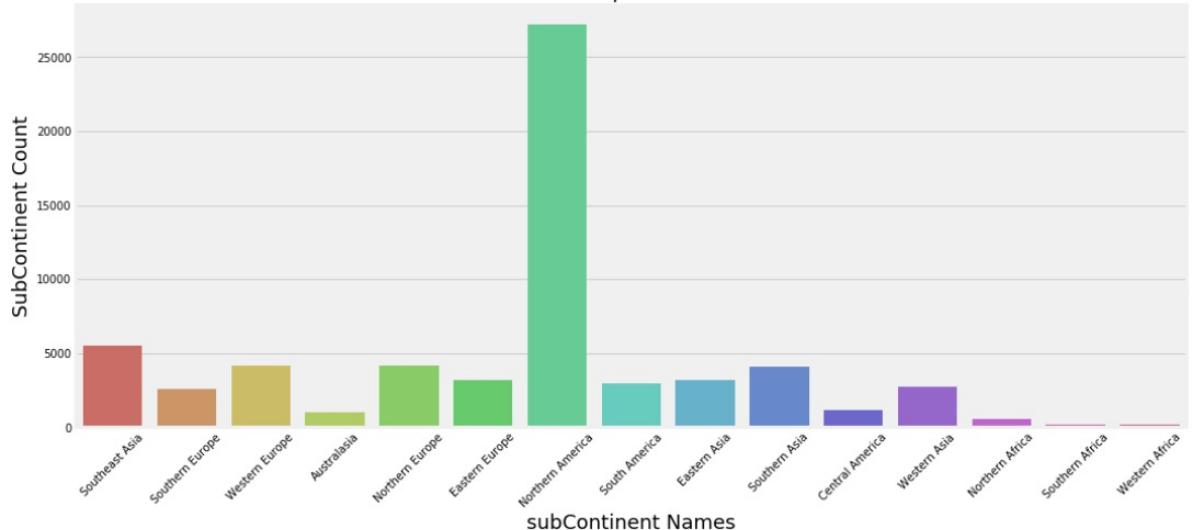
```
plt.figure(figsize=(16,7))

sns.countplot(df_train[df_train['geoNetwork.subContinent']\
    .isin(df_train['geoNetwork.subContinent'].value_counts()[:15].index.values)]\

[geoNetwork.subContinent], palette="hls")
plt.title("TOP 15 most frequent SubContinents", fontsize=20) # seting the title size
plt.xlabel("subContinent Names", fontsize=18) # seting the x label size
plt.ylabel("SubContinent Count", fontsize=18) # seting the y label size
plt.xticks(rotation=45) # Adjust the xticks, rotating the labels

plt.show()
```

TOP 15 most frequent SubContinents



Crosstab

```
date_sales = [_visitHour, '_weekday'] #seting the desired

cm = sns.light_palette("green", as_cmap=True)
pd.crosstab(df_train[date_sales[0]], df_train[date_sales[1]],
            values=df_train["totals.transactionRevenue"], aggfunc=[np.sum]).style.background_gradient(cmap = cm)

# tab.columns.levels[1] = ["Sun", "Mon", "Thu", "wed", "Thi", "Fri", "Sat"]
```

	sum							
_weekday	0	1	2	3	4	5	6	
_visitHour								
0	126.386	192.059	143.162	36.2319	37.3215	53.0282	142.051	
1	138.872	87.9446	120.248	70.4552	37.2508	70.3504	106.245	
2	122.176	160.589	54.7113	139.921	125.765	17.7265	116.501	
3	107.211	124.656	84.0083	76.1021	74.1997	15.76	36.4601	
4	71.6829	107.381	90.8094	69.3424	49.719	16.8251	17.6372	
5	105.335	70.0461	36.3155	53.4049	52.448	53.8893	72.7108	
6	34.9277	70.9624	16.7699	36.6059	17.6348	0	52.4337	
7	17.7273	35.4628	0	18.3798	0	0	16.79	
8	54.4742	18.619	0	33.8402	0	0	0	
9	0	19.2371	0	0	0	0	0	
10	0	17.597	0	17.0134	0	17.8254	0	
11	18.9495	18.2831	19.9462	17.5434	53.2772	0	0	
12	0	18.747	74.8096	58.3735	55.9478	0	52.9778	
13	181.915	93.8184	50.857	71.523	107.002	0	34.476	
14	87.7575	36.8734	123.865	155.946	142.324	72.1576	0	
15	211.405	122.643	183.972	205.398	274.288	32.8824	85.0231	
16	91.8596	123.522	85.8605	182.576	178.588	82.5616	86.4576	
17	214.562	167.027	236.304	167.496	88.2338	18.0095	53.8049	
18	288.439	230.905	235.754	308.098	183.177	0	0	
19	174.786	202.682	123.821	175.253	143.794	107.968	53.4519	
20	160.666	249.791	183.774	105.292	170.235	53.6175	51.9169	
21	199.911	85.0781	93.2237	200.392	126.461	141.345	72.2549	
22	172.337	143.755	90.8017	101.408	188.296	17.0162	85.5684	
23	87.7206	88.2007	107.127	105.673	219.07	110.034	85.0856	

```

number_of_colors = 20 # total number of different colors that we will use

# Here I will generate a bunch of hexdecimal colors
color = ["#"+''.join([random.choice('0123456789ABCDEF') for j in range(6)])
          for i in range(number_of_colors)]
country_tree = df_train["geoNetwork.country"].value_counts() #counting the values of Country

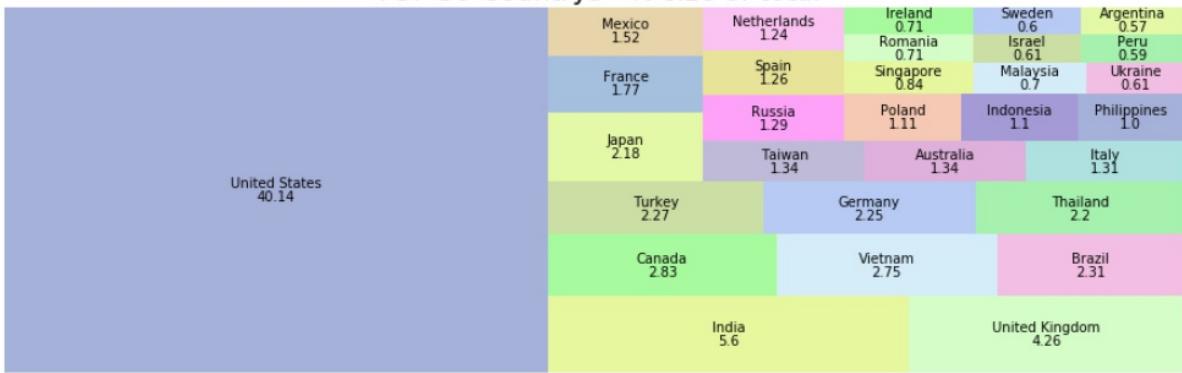
print("Description most frequent countrys: ")
print(country_tree[:15]) #printing the 15 top most

country_tree = round((df_train["geoNetwork.country"].value_counts()[:30] \
                      / len(df_train['geoNetwork.country']) * 100),2)

plt.figure(figsize=(14,5))
g = squarify.plot(sizes=country_tree.values, label=country_tree.index,
                   value=country_tree.values,
                   alpha=.4, color=color)
g.set_title("TOP 30 Countrys - % size of total", fontsize=20)
g.set_axis_off()
plt.show()

```

'TOP 30 Countries - % size of total



plot country map

画这幅图时会出现问题，就是不显示，需要关掉笔记再打开。

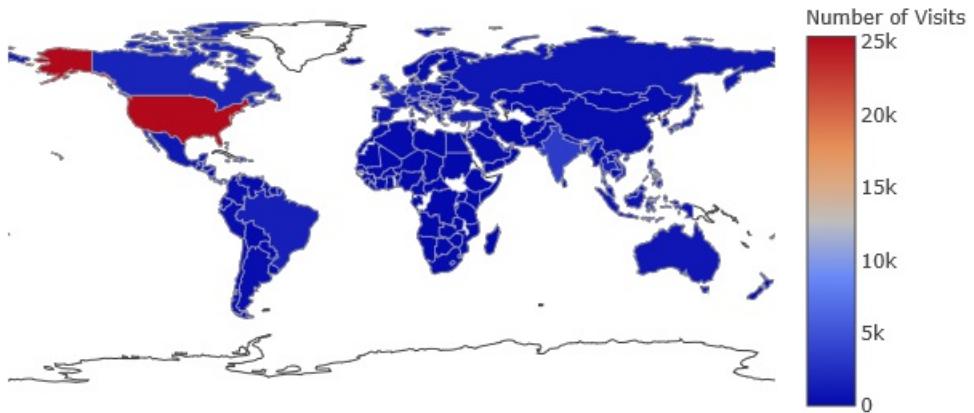
```
# Counting total visits by countrys
countMaps = pd.DataFrame(df_train['geoNetwork.country'].value_counts()).reset_index()
countMaps.columns=['country', 'counts'] #renaming columns
countMaps = countMaps.reset_index().drop('index', axis=1) #reseting index and droping the column

data = [ dict(
    type = 'choropleth',
    locations = countMaps['country'],
    locationmode = 'country names',
    z = countMaps['counts'],
    text = countMaps['country'],
    autocolorscale = False,
    marker = dict(
        line = dict (
            color = 'rgb(180,180,180)',
            width = 0.5
        ),
        colorbar = dict(
            autotick = False,
            tickprefix = '',
            title = 'Number of Visits'),
    )
)
]

layout = dict(
    title = 'Counting Visits Per Country',
    geo = dict(
        showframe = False,
        showcoastlines = True,
        projection = dict(
            type = 'Mercator'
        )
    )
)

figure = dict( data=data, layout=layout )
iplot(figure, validate=False, filename='map-countrys-count')
```

Couting Visits Per Country



Pie

```
def PieChart(df_colum, title, limit=15):
    """
    This function helps to investigate the proportion of visits and total of transaction revenue by each category
    """

    count_trace = df_train[df_colum].value_counts()[:limit].to_frame().reset_index()
    rev_trace = df_train.groupby(df_colum)[["totals.transactionRevenue"].sum().nlargest(10).to_frame().reset_index()

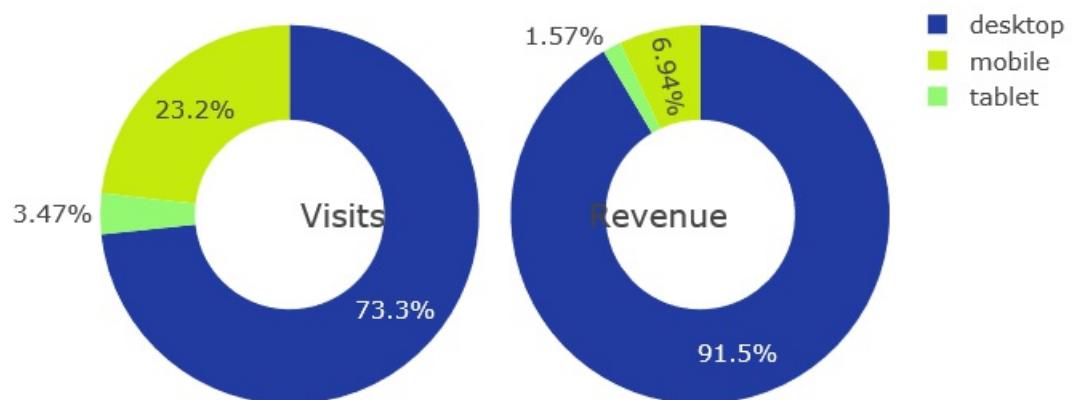
    trace1 = go.Pie(labels=count_trace['index'], values=count_trace[df_colum], name= "% Acesses", hole= .5,
                     hoverinfo="label+percent+name", showlegend=True, domain= {'x': [0, .48]},
                     marker=dict(colors=color))

    trace2 = go.Pie(labels=rev_trace[df_colum],
                     values=rev_trace['totals.transactionRevenue'], name="% Revenue", hole= .5,
                     hoverinfo="label+percent+name", showlegend=False, domain= {'x': [.52, 1]})

    layout = dict(title= title, height=450, font=dict(size=15),
                  annotations = [
                      dict(
                          x=.25, y=.5,
                          text='Visits',
                          showarrow=False,
                          font=dict(size=20)
                      ),
                      dict(
                          x=.80, y=.5,
                          text='Revenue',
                          showarrow=False,
                          font=dict(size=20)
                      )
                  ])
    fig = dict(data=[trace1, trace2], layout=layout)
    iplot(fig)

PieChart("device.deviceCategory", "Device Category")
```

Device Category



NLP常用处理技巧

特征构造

矢量化

1. 通过求每一个词的tf-idf值，用tf-idf值代替单词，将文本转化为向量。
2. 将tf-idf值小于一定阈值的词删掉，这样来降低维度。
3. 用词汇表将每一个文本转化为维度一样的向量，并且非0值即为单词所对应的tf-idf值。

PageRank算法

思想：

1. 链接数量。一个网页被越多的其它网页链接，说明这个网页越重要。
2. 链接质量。一个网页被一个越高权值的网页链接，也能表明这个网页越重要。贡献的权值等于这个网页的权值除以这个网页的出链数目。

$In(V_i)$ 是 V_i 的入链集合，代表有多少其它网页链接它； $Out(V_i)$ 是 V_i 的出链集合，也就是引用了哪些其它网页。网页 V_i 的得分为：

$$\blacksquare S(V_i) = \sum_{j \in In(V_i)} \left(\frac{1}{Out(V_j)} S(V_j) \right)$$

为了防止有些网页的权值为0，则加入一个阻尼项。

$$\blacksquare S(V_i) = (1 - d) + d \sum_{j \in In(V_i)} \left(\frac{1}{Out(V_j)} S(V_j) \right)$$

不需要借助语料库，单篇文章提取关键词的算法TextRank的原理与PageRank一致，因为是借鉴PageRank算法的。

结束