

# Numerical Computing Methods

## 数值计算方法

**李晓鹏**

Li Xiao-Peng

电子与信息工程学院

School of Electronic and Information Engineering

Semester-I 25/26

# 逐次逼近法

① 基本概念

② 线性方程组的迭代法

③ 非线性方程的迭代法

## ① 基本概念

## ② 线性方程组的迭代法

## ③ 非线性方程的迭代法

# 基本概念

逐次逼近法也称为迭代法，它是对所求问题建立一种规则，将所求问题转化为利用初值或已求出的元素计算后继元素，从而形成一个序列。该法在数值计算上有着广泛地应用。

由于逐次逼近法设计两个元素得逼近问题，所以，首先应明确非实数之间得距离以及极限过程得收敛性概念。

我们已知：

- 一维空间，距离原点的距离：  $|x|$ ;
- 二维空间，距离原点的距离：  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- 三维空间，距离原点的距离：  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;

有必要给出一种实用更广泛、应用更灵活且又具有普通长度所具有的特征的“度量”概念。

# 向量与矩阵的范数

**定义:** 设  $\mathbb{R}$  是一个数域,  $V$  是一个线性空间。若  $V$  中的任一元素  $x$  都对应一个实数  $N(x)$ , 即  $N(x)$  是  $V$  上的实值函数, 且满足如下条件

- (1)  $N(x) \geq 0$ , 当且仅当  $x = \theta$  (零元素) 时  $N(x) = 0$ ; (正定性)
- (2)  $N(\alpha x) = |\alpha|N(x), x \in \mathbb{R}$  (齐次性)
- (3)  $N(x + y) \leq N(x) + N(y), x, y \in V$  (三角不等式)

则称  $N(x)$  是  $V$  上的一个范数, 记为  $\|x\|$ , 即  $N(x) = \|x\|$  表示  $x$  的范数。

若在  $V$  中具有“乘法”运算, 则可增加一个条件:  
对任意  $x, y \in V$ , 则  $x \cdot y \in V$  时, 满足如下条件

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$$

# 向量范数

设  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , 常用的四种范数定义如下:

1. 向量的  $\ell_2$ -范数, 也称欧氏范数, 记为

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

或

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \right)^{1/2} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

其中,  $\bar{x}_i$  是  $x_i$  的共轭复数。

若  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , 则

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

# 向量范数

2. 向量的  $\infty$ -范数, 也称最大范数, 记为

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

3. 向量的  $\ell_1$ -范数, 记为

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

4. 向量的  $\ell_p$ -范数, 记为

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

上述四种常用的实值函数都满足正定性、齐次性和三角不等式。

# 矩阵的范数

如无特殊说明, 线性空间为  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ 。  $V$  中存在矩阵乘积运算, 因此定义矩阵范数应满足

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

**定义:** 设  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 且  $\|\mathbf{x}\|_v$  是一种向量范数, 则

$$\|A\|_v = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} = \max_{\|\mathbf{x}\|_v=1} \|A\mathbf{x}\|_v$$

称为矩阵  $A$  的**算子范数**。

显然算子范数满足:  $\|A\mathbf{x}\|_v \leq \|A\|_v \|\mathbf{x}\|_v$

**注意:** 矩阵的算子范数是矩阵范数, 但是反之不一定成立。

# 矩阵的范数

矩阵算子范数的常用三种形式:

设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$

1. 矩阵的行范数: 绝对值最大的行和

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

2. 矩阵的列范数: 绝对值最大的列和

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

3. 矩阵的  $\ell_2$ -范数:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

其中,  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  表示矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  的绝对值最大的特征值。

# 矩阵的范数

**定义：** 对于给定的向量范数  $\|\cdot\|_v$  与矩阵范数  $\|\cdot\|_u$ , 若对任何  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$ , 都有

$$\|\mathbf{A}x\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_u \cdot \|x\|_v$$

则称所给向量范数  $\|\cdot\|_v$  与矩阵范数  $\|\cdot\|_u$  相容。

4. 矩阵的 Frobenius-范数:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

简称为  $\mathbf{A}$  的  $F$ -范数。

可以验证:  $F$ -范数满足范数定义中的 4 个条件, 但是  $F$ -范数不是算子范数。

# 例题

例：已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求  $\|\mathbf{A}\|_{\infty}$ 、 $\|\mathbf{A}\|_1$ 、 $\|\mathbf{A}\|_2$  和  $\|\mathbf{A}\|_F$ .

# 例题

例：已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求  $\|\mathbf{A}\|_\infty$ 、 $\|\mathbf{A}\|_1$ 、 $\|\mathbf{A}\|_2$  和  $\|\mathbf{A}\|_F$ .

解

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{(1 + 1 + 0), (2 + 2 + 1), (0 + 1 + 1)\} = 5$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{(1 + 2 + 0), (1 + 2 + 1), (0 + 1 + 1)\} = 4$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = (1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1)^{1/2} = \sqrt{13} \approx 3.6056$$

# 例题

例：设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求  $\|\mathbf{A}\|_\infty$ 、 $\|\mathbf{A}\|_1$ 、 $\|\mathbf{A}\|_2$  和  $\|\mathbf{A}\|_F$ .

解

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 9 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 38\lambda - 25 = 0$$

解得  $\lambda_1 = 9.1428, \lambda_2 = 2.9211, \lambda_3 = 0.9361$ 。

因此

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{9.1428} \approx 3.0237$$

# 矩阵的范数

定义：设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的特征值为  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 称

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

为  $\mathbf{A}$  的谱半径。注：对一切范数  $\|\cdot\|$ , 都有

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$$

定理：如果  $\|\mathbf{A}\| < 1$ , 则  $\mathbf{I} + \mathbf{A}$  为非奇异矩阵, 且

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|}$$

其中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\|\cdot\|$  为矩阵的算子范数。

# 误差分析介绍

第一章中曾提到数值问题的性态会对问题的计算精度产生很大影响，但是如何判断数值问题的性态只是作了定性的描述，没有给出定量的判别方法。在此，我们以求解线性方程组为例，介绍如何度量方程组性态。

**定义：** 如果线性方程组  $Ax = b$  中， $A$  或  $b$  的元素的微小变化就会引起方程组解的巨大变化，则称该方程组为“病态”方程组， $A$  为“病态”矩阵；否则成该方程组为“良态”方程组， $A$  为“良态”矩阵。

在  $Ax = b$  中，设  $A$  为非奇异矩阵， $x$  为精确解。若  $b$  有误差  $\delta b$ ，则引起解变化，设为  $x + \delta x$ ，即

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

因此

$$A\delta x = \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b$$

取范数，得

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

# 误差分析介绍

因

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

所以

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

即常数项产生的相对误差, 可能将解的相对误差放大  $\|A\| \|A^{-1}\|$  倍。

类似分析, 若  $A$  有误差  $\delta A$ , 所得解  $x + \delta x$ , 则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

大体上, 系数矩阵  $A$  产生的相对误差, 将解的相对误差有可能放大  $\|A\| \|A^{-1}\|$  倍。

$\|A\| \|A^{-1}\|$  刻画了线性方程组中原始数据变化对解的影响, 即刻画了方程组的性态。

# 误差分析介绍

**定义:** 设  $A$  为非奇异矩阵,  $\|\cdot\|$  为矩阵的算子范数, 则称

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

为矩阵  $A$  的条件数。

当  $\text{cond}(A)$  很大时,  $Ax = b$  是“病态”的;

当  $\text{cond}(A)$  很小时,  $Ax = b$  是“良态”的。

$\text{cond}(A)$  的下限是多少?

# 误差分析介绍

**定义:** 设  $A$  为非奇异矩阵,  $\|\cdot\|$  为矩阵的算子范数, 则称

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

为矩阵  $A$  的条件数。

当  $\text{cond}(A)$  很大时,  $Ax = b$  是“病态”的;

当  $\text{cond}(A)$  很小时,  $Ax = b$  是“良态”的。

$\text{cond}(A)$  的下限是多少?

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$$

# 误差分析介绍

直观判断  $Ax = b$  性态的方法:

- 用主元消去法求解时出现小主元;
- 某些行 (列) 几乎线性相关;
- 矩阵  $A$  的元素间数量级相差很大, 且无规律;
- 当  $r = b - A\bar{x}$  的  $\|r\|$  很小时,  $\bar{x}$  作为解精度仍不够;

出现上述情况之一, 方程  $Ax = b$  可能 “病态”。

对于 “病态” 方程组的求解, 常用的方法和措施:

- 提高原始数据和运算的精度。
- 用适当方法改善原始模型的性态, 例如降低矩阵  $A$  的条件数。

## ① 基本概念

## ② 线性方程组的迭代法

## ③ 非线性方程的迭代法

# 线性方程组的迭代法

由第二章可知, 利用直接法可解线性方程组

$$Ax = b \quad (6.1)$$

其中,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

**问题:** 直接法中, 系数矩阵  $A$  在不断变化,  $A$  的阶数高, 则占用内存就大; 且程序较复杂, 程序设计的技巧也较高.

迭代法的思路利用迭代法求解 (6.1), 先将它变形为如下等价方程组:

$$x = Bx + f \quad (6.2)$$

其中,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , 矩阵  $B$  被称为迭代矩阵。

**注:** 利用不同的方法构造 (6.2) 可得到不同的迭代法。

# 线性方程组的迭代法

迭代过程:

取初始向量  $\mathbf{x}^{(0)}$  代入 (6.2), 得

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{f}$$

$$\vdots$$

一般形式为

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.3)$$

称上述求解的方法为求解线性方程的迭代法, 或迭代过程或迭代格式。

# 线性方程组的迭代法

迭代收敛:

当  $k \rightarrow \infty$  时, 若由 (6.3) 所得到的序列  $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^*$ , 即

$$x_i^{(k)} \rightarrow x_i^*, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

其中,  $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ ,  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ , 或写成

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^* \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则称迭代法收敛, 否则迭代法发散。

若迭代法收敛, 则由 (6.3) 得

$$\mathbf{x}^* = B\mathbf{x}^* + \mathbf{f}$$

即  $\mathbf{x}^*$  为方程组 (6.2) 的解, 从而也是 (6.1) 的解。

注: 用迭代法求解就是求向量序列  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$  的极限向量  $\mathbf{x}^*$ 。

# 简单迭代法

简单迭代法又称为基本迭代法。可以有多种形式的推广。

设线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

# 简单迭代法

设矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  为非奇异, 且  $a_{ii} \neq 0$ , 则

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[ b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right] \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[ b_2 - \sum_{j=1, j \neq 2}^n a_{2j} x_j \right] \\ \vdots \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right] \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} \left[ b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j \right] \end{array} \right.$$

# 简单迭代法

即

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right],$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n)$$

上式等价于

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right],$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n)$$

即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i, \\ \Delta x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \\ (k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

上述迭代法被称为 Jacobi 迭代法

# 简单迭代法

设

$$\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & & -a_{jj-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nj-1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1,j} & \cdots & -a_{j-1,n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

# 简单迭代法

则

$$\begin{aligned}A &= D - L - U \\D\mathbf{x} &= (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}B_J &= D^{-1}(L + U), \\ \mathbf{f} &= D^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

得 (6.1) 的等价方程组为

$$\mathbf{x} = B_J\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

迭代格式为

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

# 例题

例：用 Jacobi 迭代格式解线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

# 例题

例：用 Jacobi 迭代格式解线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

解：其矩阵形式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.375 & -0.25 \\ -0.363636 & 0 & 0.090909 \\ -0.5 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# 例题

取初始向量  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ , 得到

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + (2.5, 3, 3)^T = (2.5, 3, 3)^T$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.375 & -0.25 \\ -0.363636 & 0 & 0.090909 \\ -0.5 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.875 \\ 2.363 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.375 & -0.25 \\ -0.363636 & 0 & 0.090909 \\ -0.5 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.875 \\ 2.363 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.136 \\ 2.045 \\ 0.972 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\mathbf{x}^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.999881)^T$$

# Gauss-Seidel迭代法

我们已知

$$D\mathbf{x}^{k+1} = (L + U)\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$$

对上述方程进行一下改进，得

$$\begin{aligned} D\mathbf{x}^{k+1} &= L\mathbf{x}^{k+1} + U\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \\ \Rightarrow \mathbf{x}^{k+1} &= (D - L)^{-1}U\mathbf{x}^k + (D - L)^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

令

$$B_G = (D - L)^{-1}U; \mathbf{f}_G = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

得到 Gauss-Seidel 迭代法，简称 G-S 法

$$\mathbf{x}^{k+1} = B_G\mathbf{x}^k + \mathbf{f}_G$$

元素形式：

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right], \\ (k &= 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

# 例题

例：将下面线性方程组写成G-S迭代格式, 并求解

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

# 例题

例：将下面线性方程组写成G-S迭代格式, 并求解

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2.5 + 0.375x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - 0.363636x_1^{(k+1)} + 0.090909x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 3 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.25x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

取初始向量  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$  代入上式, 得

$$\mathbf{x}^{(1)} = [2.5, 2.090909, 1.768939]^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = [2.999843, 2.000072, 1.000061]^T$$

# 迭代法的收敛性

设某种迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该方程组的精确解为  $\boldsymbol{x}^*$ , 则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} &= \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*) \\ &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \dots = \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\end{aligned}$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*$  是一个非零的不变向量。

于是当  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} \rightarrow \mathbf{0}$  时, 有

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{B}^k &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

# 迭代法的收敛性

定理 2: 迭代法  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$  对任意  $\mathbf{x}^{(0)}$  和  $\mathbf{f}$  均收敛的充分必要条件为

$$\rho(\mathbf{B}) < 1$$

由于  $\rho(\mathbf{B}) \leq \|\mathbf{B}\|$ , 得

定理 3: 若  $\|\mathbf{B}\| < 1$ , 则迭代法  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$  收敛。

**定理 4:** 若  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  中的  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  为按行严格对角占优, 则 Jacobi 法和 G-S 法均收敛。

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

# 例题

如何处理下面方程组，确保在使用 G-S 法时，解收敛。

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

## ① 基本概念

## ② 线性方程组的迭代法

## ③ 非线性方程的迭代法

# 非线性方程的迭代法

问题: 设非线性方程

$$f(\mathbf{x}) = 0$$

求一数  $\bar{x}$ , 使  $f(\bar{x}) = 0$ , 称  $\bar{x}$  为上述方程的根。

例如:

$$\begin{cases} xy - z = 1 \\ xyz + y^2 = 2 \\ e^x + z = 3 \end{cases}$$

当前流行得深度神经网络 (Deep Neural Networks) 几乎都是非线性方程。

# 非线性方程的迭代法

假设: 函数  $f(x)$  是连续的, 它在坐标系  $O_{xy}$  中的图象为连续曲线。

- 若在区间  $[a, b]$  上只有一个根, 称  $[a, b]$  为单根区间;
- 若在区间  $[a, b]$  上有多个根, 称为多根区间;

统称为有根区间。

实际问题中, 大多是多跟问题。

# 简单迭代法

先将方程  $f(x) = 0$  化为一个与它同解的方程

$$x = \varphi(x)$$

即  $f(\bar{x}) = 0$  充分必要条件是  $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$

然后, 任取一个初始值  $x_0$ , 进行如下迭代

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_{k+1} = \varphi(x_k), \dots$$

即迭代公式为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

称上述过程为求解非线性方程的简单迭代法, 或迭代法或迭代过程或迭代格式,  $\varphi(x)$  称为迭代函数,  $x_k$  称为第  $k$  步的迭代值或简单迭代值。

# 迭代收敛

如果由迭代法产生的数列收敛, 即当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ , 则称迭代法收敛; 否则称发散。

显然, 收敛时有

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$$

证明?

# 迭代收敛

如果由迭代法产生的数列收敛, 即当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ , 则称迭代法收敛; 否则称发散。

显然, 收敛时有

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$$

证明?

$$\bar{\mathbf{x}} = \varphi(\bar{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow f(\bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$$

迭代函数的构造方法很多, 例如,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x} - k(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), k(\mathbf{x}) \neq 0\end{aligned}$$

# 例题

例：用迭代法求  $f(x) = 2x^3 - x - 1 = 0$  的根

# 例题

例：用迭代法求  $f(x) = 2x^3 - x - 1 = 0$  的根

解：用以下两种方法：

1) 化方程为等价方程

$$x = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} = \varphi(x)$$

取初始值  $x_0 = 0$ , 则迭代值为

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{0.5} \approx 0.79$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{x_1+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1+0.79}{2}} = \sqrt[3]{0.895} \approx 0.964$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{x_2+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1+0.964}{2}} = \sqrt[3]{0.982} \approx 0.994$$

$\vdots$

显然, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $x_k \rightarrow 1$ , 且  $f(1) = 0$

# 例题

2) 化方程为等价方程

$$x = 2x^3 - 1 = \varphi(x)$$

取初始值  $x_0 = 0$ , 则迭代值为

$$x_1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$

$$x_2 = 2 \times (-1)^3 - 1 = -3$$

$$x_3 = 2 \times (-3)^3 - 1 = -55, \dots$$

显然, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $x_k \rightarrow -\infty$ 。故迭代法发散。

由上例可以看出, 迭代法的收敛与发散, 与迭代函数的构造有关。

# 迭代法收敛的条件

定理 设迭代函数  $\varphi(x)$  满足

- 当  $x \in [a, b]$  时,  $a \leq \varphi(x) \leq b$
- 存在实数  $0 < L < 1$ , 对任意  $x \in [a, b]$ , 都有

$$|\varphi'(x)| \leq L$$

则  $x = \varphi(x)$  在  $[a, b]$  内存在唯一根  $\bar{x}$ , 并且对任意初始值  $x_0 \in [a, b]$ , 迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

收敛于  $\bar{x}$ , 且满足

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$$

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$L \rightarrow 0$  or  $L \rightarrow 1$  收敛快?

# 迭代法收敛的速度

收敛的阶: 设迭代序列  $x_k \rightarrow \bar{x}, k \rightarrow \infty$

定义: 若存在实数  $p \geq 1$  和  $c > 0$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^p} = c$$

则称迭代法为  $p$  阶收敛。

- 当  $p = 1$  时称为线性收敛;
- 当  $p > 1$  时称为超线性收敛;
- 当  $p = 2$  时称为平方收敛。

# Newton迭代法及其变形

构造迭代函数是迭代法中很关键的一步, Newton迭代法是按照如下方式构造:  
对一切非线性方程  $f(\mathbf{x}) = 0$ , 总可构造如下函数:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - k(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \quad k(\mathbf{x}) \neq 0$$

作为方程  $f(\mathbf{x}) = 0$  求解的迭代函数。因

$$\varphi'(\mathbf{x}) = 1 - k'(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - k(\mathbf{x})f'(\mathbf{x})$$

且  $|\varphi'(\mathbf{x})|$  在根  $\bar{\mathbf{x}}$  附近越小, 其局部收敛速度就越快, 故令

$$\varphi'(\bar{\mathbf{x}}) = 1 - k'(\bar{\mathbf{x}})f(\bar{\mathbf{x}}) - k(\bar{\mathbf{x}})f'(\bar{\mathbf{x}}) = 1 - k(\bar{\mathbf{x}})f'(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

若  $f'(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$  (即  $\bar{\mathbf{x}}$  不是  $f(\mathbf{x}) = 0$  的重根), 则

$$k(\bar{\mathbf{x}}) = 1/f'(\bar{\mathbf{x}})$$

因此, 可取  $k(\mathbf{x}) = 1/f'(\mathbf{x})$  代入  $\varphi(\mathbf{x})$ , 得

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f'(\mathbf{x})}$$

# Newton迭代法

定理: 设方程  $f(x) = 0$  的根为  $\bar{x}$ , 且  $f'(\bar{x}) \neq 0$ , 则迭代法

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

至少是平方收敛, 称为 Newton 迭代法。

由于在 Newton 迭代法中, 需要利用导数  $f'(x)$ , 有时不方便。若利用近似等式

$$f'(\mathbf{x}_k) \approx \frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k-1})}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}$$

得

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k-1})} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

称为弦截法。

# 例题

例：用 Newton 法和弦截法分别计算方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在  $x = 1.5$  附近的根。

# 例题

例：用 Newton 法和弦截法分别计算方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在  $x = 1.5$  附近的根。

解：（1）使用Newton法，取  $x_0 = 1.5$ ，迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$$

因此

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} = 1.5 - \frac{1.5^3 - 1.5 - 1}{3 \times 1.5^2 - 1} \approx 1.34783$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx 1.32520$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1.32472$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx 1.32472$$

# 例题

(2) 使用弦截法, 取  $x_0 = 1.5, x_1 = 1.4$ , 迭代公式

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}) \\&= x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{x_k^2 + x_{k-1}x_k + x_{k-1}^2 - 1}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{x_1^2 + x_0x_1 + x_0^2 - 1} \approx 1.33522 \\x_3 &= x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1} \approx 1.32541\end{aligned}$$

# 例题

(3) 取  $x_0 = 0$ , 使用 Newton 法计算方程的根。利用

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$$

进行迭代计算, 得

$$x_1 = -1, x_2 = -0.5, x_3 \approx 0.33, x_4 \approx -1.44$$

可见结果偏离所求的根, 且可能不收敛。

因此, **Newton 法收敛与否与初始值有关。**

# 改进Newton法

在 Newton 法中, 为了防止迭代发散, 增加一个条件

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

为了使  $|f(x_k)|$  满足这种单调性, 引入常数  $\lambda \in (0, 1]$ , 迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

称为 Newton 下山法,  $\lambda$  称为下山因子。

在 Newton 下山法中, 下山因子可采用试算法, 如取

$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$$

# 改进Newton法

```
for  $k = 1, 2, \dots$   
   $\lambda = 1$   
  for  $p = 1, 2, \dots$   
     $x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$   
    if  $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$   
      break  
    else  
       $\lambda = \frac{\lambda}{2}$   
    end  
  end  
  if  $|f(x_k)| < \epsilon$   
    break  
  end  
end
```

# 多根区间上的逐次逼近法

多根区间上的逐次逼近法方程  $f(x) = 0$  在多根区间  $[a, b]$  上分两种情况:

1. 均为单根
2. 有重根

# 二分法

$[a, b]$  是  $f(x) = 0$  仅有单根的多根区间

## 1. 求单根区间

设  $f(x) = 0$  在  $[a, b]$  上有  $m$  个根, 将  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间

$$[b_0, b_1], [b_1, b_2], \dots, [b_{n-1}, b_n], b_0 = a, b_n = b$$

计算  $f(b_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 的值。

若  $f(b_i) f(b_{i+1}) < 0$ , 则  $f(x) = 0$  在  $[b_i, b_{i+1}]$  上至少有一个根。

若这样的有根区间少于根的个数, 则将这些区间继续对分, 对分点为  $b_{i+1/2}$ , 计算  $f(b_{i+1/2})$ , 再搜索有根区间, 直到有根区间的个数是  $m$  为止。

# 二分法

## 2. 在单根区间 $[c, d]$ 上求根

$f(c)f(d) < 0$ , 将  $[c, d]$  对分, 设对分点  $x_0 = \frac{c+d}{2}$  计算  $f(x_0)$ , 若  $f(x_0)$  与  $f(c)$  同号, 则令  $c_1 = x_0, d_1 = d$ ; 否则令  $c_1 = c, d_1 = x_0$ 。在新的有根区间  $[c_1, d_1]$  中, 利用上述对分方法重复进行得到新的有根区间  $[c_2, d_2]$ , 继续下去得有根区间  $[c_n, d_n]$ , 其长度

$$d_n - c_n = \frac{d - c}{2^n} \rightarrow 0$$

因此, 当  $n$  足够大时,  $d_n - c_n$  可达到根的精度要求, 则

$$x_n = \frac{d_n - c_n}{2}$$

可作为根的近似值。以上求根的方法称为**二分法**。

几何解释?

# 例题

例：利用二分法求

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 = 0$$

在  $[0, 1]$  中的根。

# 例题

例：利用二分法求

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 = 0$$

在  $[0, 1]$  中的根。

解：因  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 2 > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  中有根。

下面利用二分法求根。将有根区间  $[0, 1]$  二等分, 得  $[0, 0.5]$ ,  $[0.5, 1]$ 。因

$$f(0.5) = 0.25 > 0$$

故  $f(x)$  在  $[0, 0.5]$  中有根。

因

$$f(0.25) = -0.435 < 0$$

故  $f(x)$  在  $[0.25, 0.5]$  中有根。

上述过程重复下去, 可得根的近似值。