三维常系数线性系统的求解与性质探究

李云艾　521021910615

2023 年 1 月 4 日

摘要

本文将类比平面常系数线性系统的求解方法。对三维常系数线性系统的求解进行探究，并探究其平衡点，相图，相空间等。

目录

1 引言

对于平面常系数微分系统 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$(A 为 2x2 矩阵), 可通过 A 的若尔当型及其特征值将其分类，并探究每一类的通解，相图与平衡点等。而对于三维的常系数微分系统我们也可以从其特征方程入手，类似地进行分类并探究。

2 三维常系数线性系统的特征方程

Lemma 2.1 (三次方程根的分布)**.** *任意一元三次方程都可化为 $x^3+px+q=0$: 对于实系数方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ （a 不为 0)*
设 $x=y-b/3a$ 则有 $y^3+py+q=0$ 其中 $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2} q = \frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$
$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$
判别式 $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$
$\Delta > 0$, 则有一实根，与一对共轭复根；
$\Delta > 0$,$p=q=0$, 则有三个相等实根，否则三个实根中有两个相等；
$\Delta < 0$, 则有三个不等实根。

对于三维线性微分系统，其特征方程也为一元三次方程。考虑

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix} \tag{1}$$

则其特征方程为

$$f(\lambda)=\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ae+ac+ec-db-gc-hf)\lambda^1+ahf+gec+dbi-aei-dhc-bde=x^3+\alpha^2+\beta x+\gamma$$

设求该特征方程的根，及 A 特征值等价于求 x³+px+q=0 的解, 由上述定理知，其中 $p=\frac{3\beta-\alpha^2}{9}q=\frac{27\gamma d-9\alpha\beta+2\alpha^3}{27}$,$\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$
接下来我们将通过 Δ 与 q 的符号进行分类讨论并求解。

3 三维常系数线性系统的求解

3.1 Δ=0

3.1.1 q=0

此时有三重特征根

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-\frac{\alpha}{3}$$

采用待定系数法构造解

$$\begin{cases} x_1=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-\alpha/3} \\ x_2=(C_4+C_5t+C_6t^2)e^{-\alpha/3} \\ x_3=(C_7+C_8t+C_9t^2)e^{-\alpha/3)} \end{cases}$$

代入原系统，则所有系数可以由 C_1,C_2,C_3 表示，经计算得最终通解可表示为:

$$x_1=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-\alpha/3}$$

$$x_2=\frac{-(\alpha/3+a)f+dc}{bf-(\alpha/3+e)g}(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-\alpha/3}+\frac{c(af-cd)+f(bf-ec)}{(bf-(\alpha/3+e)c)^2}(C_2t+2C_3t^2)e^{-\alpha/3}$$

$$-2\frac{c^2(af-dc)+cf(bf-ec)}{(bf-(\alpha/3+e)c)^3}C_3t^2e^{-\alpha/3}$$

$$x_3=\frac{-(\alpha/3+a)h+gb}{-b(\alpha/3+i)hc}(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-\alpha/3}+\frac{b(ah-gb)-h(bi-hc)}{(-b(\alpha/3+i)+hc)^2}(C_2t+2C_3t^2)e^{-\alpha/3}$$

$$-2\frac{b^2(ah-gb)-bh(bi-ch)}{(-b(\alpha/3+i)+hc)^3}C_3t^2e^{-\alpha/3}$$

3.1.2 q 不为 0

此时有二重特征根

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{\alpha}{3}-u_0$$

与

$$\lambda_3=-\frac{\alpha}{3}-2u_0$$

其中

$$u_0=(q/2)^{(1/3)}cos\frac{\theta_0+2k\pi}{3}+isin\frac{2k\pi}{3}$$

$$cos\theta_0=-1$$

（k=0，1，2）此时解的形式应为：

$$\begin{cases} x_1=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1}+C_3e^{\lambda_3} \\ x_2=(C_4+C_5t)e^{\lambda_1}+C_6e^{\lambda_3} \\ x_3=(C_7+C_8t)e^{\lambda_1}+C_9e^{\lambda_3} \end{cases}$$

带入系统进行运算，系数同样可以由 C_1,C_2,C_3 表示，这里不再加以详细计算。

3.2 Δ>0

此时有三个不相等的特征根

$$\lambda_1=-\frac{\alpha}{3}+u_1+v_1$$

$$\lambda_2=-\frac{\alpha}{3}+u_2+v_2$$

$$\lambda_3 = -\frac{\alpha}{3} + u_3 + v_3$$

其中

$$u_i = (r_1)^{(1/3)}(cos\frac{\theta_1 + 2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3})$$

$$r_1 = (4\Delta - 4q\Delta + q^2)^{1/2}/2$$

$$cos\theta_1 = \frac{2\Delta^{1/2} - q}{2r_1}$$

$$v_i = (r_2)^{(1/3)}(cos\frac{\theta_2 + 2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3})$$

$$r_2 = (4\Delta + 4q\Delta + q^2)^{1/2}/2$$

$$cos\theta_2 = \frac{2\Delta^{1/2} - q}{2r_2}$$

(k=0,1,2)(i=1,2,3) 由于此时的 A 的若尔当标准型为斜对角矩阵，故可较容易地直接解出特征向量，从而进一步得到原系统的解。
经计算得其通解为：

$$x = (c\lambda_1 + bf - ec)C_1e^{\lambda_1 t} + (c\lambda_2 + bf - ec)C_2e^{\lambda_2 t} + (c\lambda_3 + bf - ec)C_3e^{\lambda_3 t}$$

$$y = (f\lambda_1 - af + ed)C_1e^{\lambda_1 t} + (f\lambda_2 - af + ed)C_2e^{\lambda_2 t} + (f\lambda_3 - af + ed)C_3e^{\lambda_3 t}$$

$$z = (\lambda_1^2 - (a+e)\lambda_1 - ae - bd)C_1e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2^2 - (a+e)\lambda_2 - ae - bd)C_2e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3^2 - (a+e)\lambda_3 - ae - bd)C_3e^{\lambda_3 t}$$

3.3 $\Delta < 0$

此时有三个不相等的特征根

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{3} + u_4 + v_4$$

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha}{3} + u_5 + v_5$$

$$\lambda_3 = -\frac{\alpha}{3} + u_6 + v_6$$

其中

$$u_i = (r_3)^{(1/3)}(cos\frac{\theta_3 + 2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3})$$

$$r_3 = (-4\Delta + q^2)^{1/2}/2$$

$$cos\theta_3 = \frac{-q}{2r_3}$$

$$v_i = (r_4)^{(1/3)}(cos\frac{\theta_4 + 2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3})$$

$$r_4 = (-4\Delta + q^2)^{1/2}/2$$

$$cos\theta_4 = \frac{-q}{2r_4}$$

(k=0,1,2)(i=4,5,6) 类似于上一种情形，同样可以较容易地给出通解：

$$x = (c\lambda_1 + bf - ec)C_1e^{\lambda_1 t} + (c\lambda_2 + bf - ec)C_2e^{\lambda_2 t} + (c\lambda_3 + bf - ec)C_3e^{\lambda_3 t}$$

$$y = (f\lambda_1 - af + ed)C_1e^{\lambda_1 t} + (f\lambda_2 - af + ed)C_2e^{\lambda_2 t} + (f\lambda_3 - af + ed)C_3e^{\lambda_3 t}$$

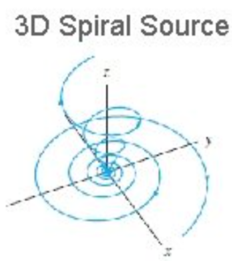
$$z = (\lambda_1^2 - (a+e)\lambda_1 - ae - bd)C_1e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2^2 - (a+e)\lambda_2 - ae - bd)C_2e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3^2 - (a+e)\lambda_3 - ae - bd)C_3e^{\lambda_3 t}$$

4 三维常系数线性系统的平衡点及相空间

三维系统的一些平衡点与二维系统的平衡点具有相似的分类，根据轨道上箭头方向主要可分为源，汇，鞍三大类。以下根据特征值类型分别加以说明。

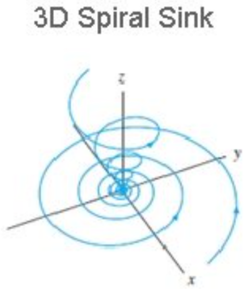
4.1 源与螺旋源

三维系统中的源类似于二维系统中的不稳定两向结点（或不稳定的单向结点或星形结点），螺旋源类似于不稳定焦点。拥有源的系统对应的 A 有三个实的实特征值，拥有螺旋源的系统对应的 A 有 1 个负的实特征值，和一对共轭实部小于零的虚特征值。(如下图，共轭特征值对应的特征向量张成的平面（x-y）上，解轨道螺旋着离开平衡点)



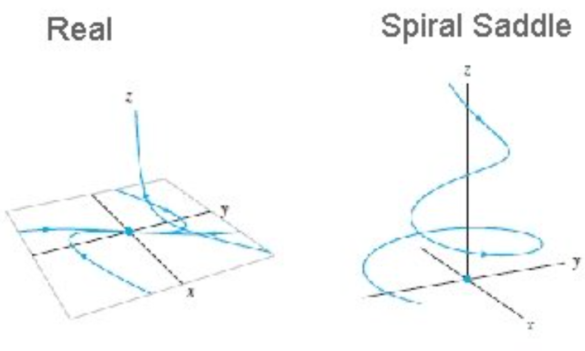
4.2 汇与螺旋汇

三维系统中的汇类似于二维系统中的稳定两向结点（或稳定的单向结点或星形结点），螺旋汇类似于稳定焦点。拥有汇的系统对应的 A 有三个正的实特征值，拥有螺旋源的系统对应的 A 有 1 个负正的实特征值，和一对共轭实部大于零的虚特征值。(如下图，共轭特征值对应的特征向量张成的平面（x-y）上，解轨道螺旋着趋近平衡点)



4.3 鞍与螺旋鞍

拥有鞍的系统对应的 A 有三个非同号的实特征值，拥有螺旋鞍的系统对应的 A 有 1 个负 (正) 的实特征值，和一对共轭实部大于（小于）零的虚特征值。

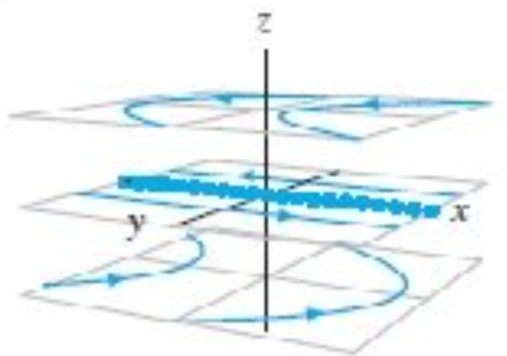


4.4 其他情况

在二维系统中，我们观察到有特征值为零，或者有重复特征值的情况，而三维系统中无疑也有这种情况。当该系统中 A 满足

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

不难看出其特征值均为零，我们计算相关的特征向量得到: 当 z 为 0 时，沿 x 轴的每一个解都满足方程。当 z 不为零时，x 是 y 的二次函数; 对于 z 的恒定值，存在平行于 xy 平面的抛物线解平面。对于 z 的恒定值，可用 xy 平面上的相图来表示，故其三维相空间可作图如下:



5 小结

线性常微分方程的三维系统通常具有类似于其（对应分类的）二维系统的性质。-如果可能的话，也可以首先根据三维中的平面和其上某些轨道来观察，进一步观察三维系统解的性质。分析和求解二维系统的方法通常可以在三维系统中使用，只需稍作修改。

参考文献

[1] 三维复常系数线性微分系统的通解公式汤光宋彭红英

[2] https://slidetodoc.com/three-dimensional-systems-of-linear-ordinary-differential-equations/.