Ação de Grupos

Thiago Landim

March 2020

1 Lista de problemas

1.1 Ações de Grupos e Geometria

> *"...[A geometria] é, antes de tudo, o estudo analítico de um grupo; nada impede, consequentemente, de abordar outros grupos análogos e mais gerais."*
>
> H. Poincaré

Exemplo (Grupo $ax+b$)**.** Uma das grandes magias da ação de grupos é nos permitir ver que diversos grupos estão contidos em grupos matriciais, ou são quocientes desses. Um exemplo inicial que pode ser visto é o ***Grupo Afim*** da reta, também chamado de grupo $ax+b$, definido por $\mathrm{Aff}(1) \coloneqq \{ax+b \mid a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$. Não é muito difícil de ver que esse grupo pode ser naturalmente mergulhado em $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, mas uma normalização

$$ax + b \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nos permite ver esse grupo como subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Essa construção pode ser generalizada para o $\mathbb{R}^n$ e para corpos finitos como $\mathbb{F}_p$.

Exemplo (Esfera)**.** Denote por $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. O grupo $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ age naturalmente, transitivamente e fielmente em S^{n-1} por $Q \cdot x = Qx$. Vamos usar o Teorema da Órbita e do Estabilizador para descrever essa ação. Fizemos o vetor $(1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$ e note que o seu estabilizador são as matrizes da forma

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{Q} \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$. Assim, encontramos a identificação

$$S^{n-1} \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Analogamente, podemos ver que

$$S^{n-1} \cong \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Exemplo (Plano Projetivo)**.** O plano projetivo $\mathbb{PR}^{n-1}$ é o espaço de todas as retas de $\mathbb{R}^n$ que saem da origem. Note que cada uma essas retas incide em S^{n-1} em exatamente duas antípodas. Assim, podemos ver

$$\mathbb{PR}^{n-1} \cong S^{n-1}/\{\pm I\}.$$

Aqui deveremos separar na paridade de n.

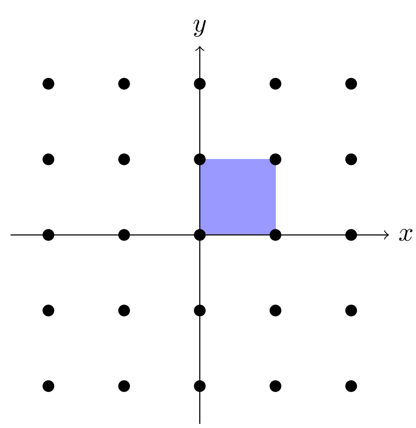
- Se n é par, então a ação não é fiel: note que $-I$ age trivialmente no espaço. Mais ainda, o estabilizador da ação é dado por $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \times \{\pm I\}$. Além disso, como $n-1$ é ímpar, então temos um isomorfismo canônico entre $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \times \{\pm I\}$ e $\mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$. Portanto

$$\mathbb{PR}^{n-1} \cong \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\,\mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

- Se n é ímpar, então a ação de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ é fiel, porém o estabilizador ainda é dado por $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \times \{\pm I\}$. Por outro lado, nós não temos mais o isomorfismo canônico, e só podemos escrever

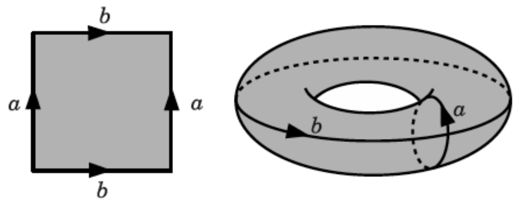
$$\mathbb{PR}^{n-1} \cong \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/(\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \times \{\pm I\}).$$

Exemplo (Toro)**.** Podemos considerar ação do grupo aditivo $\mathbb{R}^2$ agindo nele mesmo por $v \cdot w = v + w$. Essa ação é trivialmente transitiva, fiel, etc. Não tem muito o que estudar, mas podemos estudar subgrupos discretos de $\mathbb{R}^2$. O mais natural a se tomar é dado por $\mathbb{Z}^2$. Neste caso, as órbitas dos pontos também são discretas, e há um *domínio* que contém exatamente um ponto de cada órbita, chamado ***Domínio Fundamental***, dado por $[0,1)^2$.

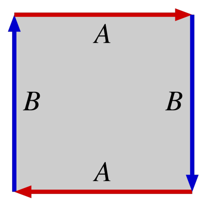


Essa região é muito importante e podemos representá-la bem geometricamente. Note que os lados do quadrado podem ser identificados (e portanto colados!) como na figura a seguir, formando o que conhecemos como o toro $\mathbb{T} := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Essa construção pode ser generalizada para $\mathbb{R}^n$, nos permitindo construir o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Note que $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.



Há outras formas de identificar os lados de um quadrado, uma das quais já vimos. Note que o plano projetivo pode ser visto como o quadrado com a seguinte identificação dos lados.



Quais outras superfícies são formadas pelas outras identificações dos lados de um quadrados?

Exemplo (Grupo Modular)**.** Neste exercícios, iremos estudar algumas propriedades do plano hiperbólico e do seu grupo de isometria. Denotaremos o plano superior por $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Talvez a classe mais famosa de *funções holomorfas* é dada pelas ***Transformações de Möbius***. A cada matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

podemos associar a função

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Infelizmente, temos um polo em $z = -d/c$, logo essa função não está bem definida em todo o plano complexo $\mathbb{C}$. Para contornar esse problema, podemos considerar essa função sendo definida na ***Esfera de Riemann*** $\bar{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Por outro lado, no lugar de estender nosso domínio, podemos restringi-lo. Dois domínios naturais são dados pelo disco unitário $\mathbb{D}$ e o semiplano superior $\mathbb{H}$; iremos focar nesse segundo.

(a) Mostre que $f_A \circ f_B = f_{AB}$, logo temos uma ação do grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{C}$. (Mais ainda, temos não apenas uma bijeção, mas uma função que preserva a estrutura complexa diferenciável.)

(b) Encontre $\Im(f_A(z))$ em função de $\Im(z)$. Para quais matrizes $\mathbb{H}$ é invariante?

(c) Note que $f_{\lambda A} = f_A$, então podemos supor nossa matriz A em $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Mostre que essa ação é transitiva.

(d) Para quais matrizes A vale que $f_A(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{H}$? Assim, podemos considerar a ação em $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \coloneqq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$. Agora nossa ação também é fiel.

(e) Como nossa ação é transitiva, queremos usar o Teorema da Órbita e do Estabilizador para saber a cara de $\mathbb{H}$. Calcule $\mathrm{Stab}(i)$ e mostre que

$$\mathbb{H} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

com respeito à ação.

Não precisamos nos restringir apenas ao grupo todo, podemos ver como alguns subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ e $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agem em $\mathbb{H}$, e grupos *discretos* têm um papel importante nesse estudo, eles são chamados de ***Grupos Fuchsianos***.

(f) Mostre que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ e $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \coloneqq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ são subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ e $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Este segundo é chamado ***Grupo Modular***.

Sejam

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desejamos mostrar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ é igual a $\langle S, T\rangle$, o subgrupo gerado por S e T.

(g) Mostre que todas as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$$

estão em $\langle S, T\rangle$.

(h) Mostre que podemos fazer uma divisão euclidiano matricial

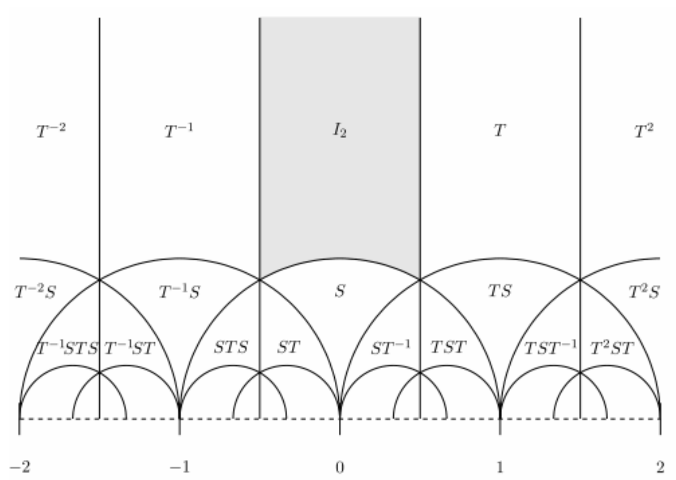
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-qa \\ c & d-qc \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-qb & b \\ c-qc & d \end{pmatrix}.$$

(i) Note que podemos aplicar essa multiplicação quantas vezes desejarmos de modo que $c = 0$ ou $d = 0$. Conclua que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T\rangle$.

(j) Mostre que S tem ordem 4, e que T tem ordem infinita, mas ST tem ordem 6. Mais ainda, essas ordens são divididas por dois quando nos restringimos ao grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Conclua que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(Dica: veja a ação restrita aos irracionais e use o lema do Ping Pong.)

Visto por meio das transformações de Möbius, isso significa que as funções $f_S(z) = -1/z$ e $f_T(z) = z + 1$ geram a nossa ação.



(k) A ação de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ particiona o semiplano $\mathbb{H}$ em diversos domínios fundamentais. Mostre que

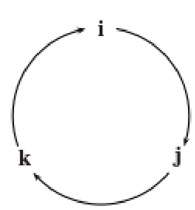
$$D = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1,\ |\Re(z)| \leq 1/2\}$$

é um domínio fundamental.

Assim como ocorre com o toro, o domínio fundamental pode ser visto como um quociente

$$D \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Exemplo (Quatérnions e Rotações no $\mathbb{R}^3$)**.** Nesses exercícios, mostraremos como os quatérnions são usados para rotacionar em $\mathbb{R}^3$. Em geral, definimos os quatérnions como os elementos $q = a + bi + cj + dk$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Podemos multiplicar os quatérnions usando a seguinte regra.



Por outro lado, como $ij = k$, nós podemos escrever um número complexo da seguinte forma $q = (a+bi)+(c+di)j = z+wj$. Ou seja, temos uma construção bem análoga à construção dos números complexos. Bem, os complexos podem ser descritos pelas matrizes em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Analogamente, mostre que os quatérnions podem ser descritos pelas matrizes em $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ da forma

$$q = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Mais ainda, mostre que o valor absoluto de q é dado por $\det(q)$ e, portanto, é multiplicativo.

(b) Defina o quatérnion conjugado, mostre que $q \cdot \bar{q} = |q|^2$ e encontre q^{-1}.

(c) Embora o produto dos quatérnions não seja comutativo, mostre que, se $a \in \mathbb{R}$, então $aq = qa$ para todo $q \in \mathbb{H}$. Mais ainda, mostre a recíproca desse resultado.

(d) Pela definição usual dos quatérnions, note que os quatérnions unitários são exatamente os elementos de S^3. Mostre que S^3 se torna um grupo multiplicativo por meio dos quatérnions. Por outro lado, mostre pela nossa nova definição que os quatérnions unitários são dados pelos elementos de $\mathrm{SU}(2)$, logo esses grupos são isomorfos.

(e) Como os reais formam um subespaço bem especial de $\mathbb{H}$ (são os elementos que comutam com todos os outros), seu complemento ortogonal também é especial. Chamamos um quatérnion de imaginário puro se ele for da forma $p = bi + cj + dk$. Mostre que se u e v são quatérnions puros, então

$$uv = -u \cdot v + u \times v,$$

onde o primeiro número é a parte real de uv, que será dada pelo produto interno entre os vetores, vistos como vetores em $\mathbb{R}^3$, e o segundo número é o produto vetorial entre u e v, fazendo a identificação entre os quatérnions imaginários puros e $\mathbb{R}^3$.

(f) Mostre que, se u é imaginário puro de norma 1, então $u^2 = -1$. Assim, analogamente aos números complexos, dado $t \in \mathbb{H}$ unitário, existe u imaginário puro de norma 1 tal que $t = \cos\theta + u \operatorname{sen}\theta$.

(g) Mostre que a conjugação $\varphi_t(q) = t^{-1}qt$ preserva $\mathbb{R}$ e seu ortogonal, os imaginários puros. Para quais $t \in S^3$ vale que $\varphi_t = \mathrm{Id}$?

(h) Por fim, mostre que a conjugação por $t = \cos\theta + u \operatorname{sen}\theta$ nos imaginários puros age como uma rotação de 2θ com respeito ao eixo u. Concluímos, assim, também que

$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\} \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$

1.2 Ações de Grupos e Álgebra

"Just the place for a Snark! I have said it twice:
That alone should encourage the crew.
Just the place for a Snark! I have said it thrice:
What I tell you three times is true."

L. Carroll

Exemplo (Grupos de Permutação)**.**

Exemplo (Espectro de Anéis)**.** Ações de grupos também podem nos ajudar a descrever o espectro de alguns anéis. Dado um anel comutativo R, definimos seu espectro como o conjunto

$$\mathrm{Spec}(R) \coloneqq \{I \lhd R \mid I \text{ é ideal primo}\}.$$

Na geometria algébrica, em geral estuda-se corpos algebricamente fechados, por exemplo os complexos $\mathbb{C}$, e não os reais $\mathbb{R}$.

Teorema (Fórmula de Classes)**.** *Seja A um G-conjunto e denote por $Z = \{a \in A \mid \forall g \in G,\ g \cdot a = a\}$ o conjunto dos pontos fixos da ação e por G_a o estabilizador de $a \in A$. Então vale que*

$$|A| = |Z| + \sum_a [G : \mathrm{Stab}_G(a)],$$

onde escolhemos um único a em cada órbita não trivial.

Lema (que não é de Burnside)**.**

Lema (Cauchy)**.**

Teorema (Sylow)**.**

1.3 Ações de Grupos e Teoria dos Números

"One and one and one is three."

The Beatles

Teorema (Fermat)**.**

Teorema (Wilson)**.**

Teorema (Lucas)**.**

Teorema (Schur)**.**

1.4 Ação de Grupos e Sistemas Dinâmicos

"I know who I WAS when I got up this morning, but I think I must have been changed several times since then."

L. Carroll

Exemplo (Shifts ou Deslocamentos)**.** O conjunto $\{0,1\}$ representa bem, por exemplo, o resultado do lançamento de uma moeda. Dessa forma, o conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$ representa a noção que temos de infinitos lançamentos de moeda, e também pode ser descrito por

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \{0,1\}\}.$$

Temos uma operação natural nesse conjunto, denominada **shift** ou **deslocamente**, definida por

$$\sigma((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

que representa fazer um lançamento de moeda. Temos um problema, porém, pois essa função não é injetiva, portanto não irá definir uma açaõ de grupos. Para corrigir isso, consideramos o conjunto

$$\{0,1\}^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in \{0,1\}\},$$

chamado o conjunto das sequências bilaterais. Nesse caso, o operador shift é um bijetivo, e temos a ação natural de $\mathbb{Z}$ em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definida por $n \mapsto \sigma^n$.

Exemplo (Operadores que comutam)**.** Sistemas Dinâmicos estudam o comportamento de transformações bem comportadas agindo em um determinado espaço, em especial, desejamos estudar o que ocorre quando essas transformações são iteradas diversas vezes. Nada mais natural que ela nos dê diversos exemplos de ações de grupos, alguns dos quais já foram vistos. Dados quaisquer dois operadores $T, S \colon X \to X$ que comutam, nós podemos considerar uma ação de $\mathbb{Z}^2$ em X dada por $(a,b) \mapsto T^a S^b$. Mais geralmente, se $T_1, T_2, \dots, T_n \colon X \to X$ são n operadores que comutam dois a dois, então podemos considerar a ação de $\mathbb{Z}^n$ em X definida por $(k_1, k_2, \dots, k_n) \mapsto T_1^{k_1} T_2^{k_2} \cdots T_n^{k_n}$. Isso nos permite estudar propriedades aditivas de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}^n$ estudando transformações em algum espaço X.

Exemplo (Operadores que não comutam)**.**

1.5 Ação de Grupos e Análise

"In the places I go, there are things that I see
That I never could spell if I stopped with the Z.
I'm telling you this 'cause you're one of my friends.
My alphabet starts where your alphabet ends!"

Dr. Seuss

Exemplo (Diferenciação)**.** Seja $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, nós podemos definir a **derivada direcional** na direção v por

$$\nabla_v f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

Mostre que ∇ define uma ação do grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo (Grupo F de Thompson)**.**

Exemplo (Grupo de Heisenberg)**.** Nos exercícios abaixo, iremos apresentar algumas propriedades do conhecido ***Grupo de Heisenberg***. Primeiramente, podemos definir o Grupo de Heisenberg contínuo como o conjunto das matrizes

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por simplicidade, denotaremos seus elementos por $H(a,b,c)$.

(a) Mostre que o conjunto $H_3(\mathbb{R})$ é um grupo.

(b) Encontre o centro de $H_3(\mathbb{R})$. A qual grupo conhecido ele é isomorfo?

Mais ainda, podemos definir o grupo de Heisenberg discreto $H_3(\mathbb{Z})$, impondo apenas adicionalmente que $a, b, c \in \mathbb{Z}$, e podemos outras definir versões por meio de congruência.

(c) Mostre que o conjunto $H_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ é isomorfo a D_4, o grupo de simetrias do quadrado.

(d) Voltemos ao âmbito do grupo de Heisenberg contínuo. Mostre que o comutador possui a seguinte identidade $[H(a,0,0), H(0,b,0)] = H(0,0,ab)$.

(e) Mostre cada cada coordenada corresponde a uma cópia de $\mathbb{R}$.

(f) Em análise, temos duas operações bem famosas que se comportam muito bem no estudo de transformadas.

- $T_a(f(x)) = f(x-a)$;
- $E_b(f(x)) = e^{2\pi i b x} f(x)$.

Note que T_a e E_b são cópias dos reais, quando variamos a e b. Mais ainda, mostre que

$$[T_a, E_b] = e^{-2\pi i a b} \operatorname{Id}.$$

(g) Mostre, portanto, que o grupo de Heisenberg contínuo $H_3(\mathbb{R})$ age no espaço das funções contínuas por meio da função

$$H(a,b,c) \mapsto e^{-2\pi i c} E_b T_a.$$

(Caso já tenha visto em Análise, note que a transposição é levada na transformada de Fourier.)

(h) Mais geralmente, nós definimos

$$H_{2n+1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v & t \\ 0 & I_n & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid v, w \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostre que podemos construir ações análogas para funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.