Compêndio CIIM

Igor Albuquerque Araujo
Thiago Ribeiro Tergolino
Rafael Filipe dos Santos

2 de março de 2022

“A mathematician is a machine for turning coffee into theorems.” Alfréd Rényi

Sumário

Parte I
Provas

CIIM 2009

Primeiro Dia

Problema 1. Demonstrar que para qualquer inteiro positivo n, o número $(\frac{3+\sqrt{17}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{17}}{2})^n$ é um número inteiro ímpar.

Problema 2. Determinar se para todo natural n existe uma matriz $n \times n$ de números reais tal que seu determinante é 0 e ao mudar qualquer elemento se pode obter outra matriz com determinante diferente de zero.

Problema 3. Sejam $r > n$ inteiros positivos. Uma palavra boa é uma n-upla $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ de inteiros positivos diferentes entre 1 e r. Uma jogada consiste em mudar um inteiro a_i de uma palavra boa, de modo que a palavra resultante também seja boa. A distância entre duas palavras boas $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ e $B = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ é a menor quantidade de jogadas necessárias para chegar de A a B. Calcule a máxima distância possível entre duas palavras boas.

CIIM 2009

Segundo Dia

Problema 4. Sejam m uma reta no plano e M um ponto que não pertence a m. Encontre o lugar geométrico dos focos das parábolas com vértice M que sejam tangentes a m.

Problema 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon$

ii) Para todo $b \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in \mathbb{R}$, com $b - \varepsilon < x < b < y < b + \varepsilon$, tal que $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ e $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$.

Demonstrar que se $f(a) < d < f(b)$, então existe c com $a < c < b$ ou $b < c < a$ tal que $f(c) = d$.

Problema 6. Seja ε uma raíz n-ésima da unidade. Suponhamos que $z = p(\varepsilon)$ é um número real para algum polinômio p (não constante) com coeficientes inteiros. Demonstrar que existe um polinômio q com coeficientes inteiros tal que $z = q(2 \cos 2\pi/n)$.

CIIM 2010

Primeiro Dia

Problema 1. Dados dois vetores $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ em $\mathbb{R}^n$, definimos a matriz $v{*}w$ cujo elemento na linha i e coluna j é $v_i w_j$. Suponha que v e w são linearmente independentes. Determine o posto da matriz $v{*}w - w{*}v$.

Obs.: O posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes.

Problema 2. Num lado de um corredor existem $2N$ quartos igualmente espaçados numerados sucessivamente de 1 até $2N$. Em cada quarto i entre 1 e N existem p_i camas. Deseja-se transportar todas as camas aos quartos de $N+1$ a $2N$, de modo que ao final, para cada j entre $N+1$ e $2N$ haja p_j camas no quarto j. Suponha que cada cama pode ser transportada uma única vez e que o custo de transportar uma cama entre o quarto i e o quarto j é $(i-j)^2$.

Determine uma maneira de mover cada cama de tal forma que se minimize o custo total.

Obs.: Os números p_i são dados e satisfazem $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = p_{N+1} + p_{N+2} + \cdots + p_{2N}$.

Problema 3. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem dimensão zero se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem um inteiro positivo k e intervalos limitados $I_1, I_2, \dots, I_k$ tais que $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$ e $\sum_{j=1}^{k} |I_j|^{\varepsilon} < \varepsilon$.

Mostre que existem conjuntos $X, Y \subset [0,1]$, ambos de dimensão zero, tais que $X + Y = [0,2]$, onde $X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$.

Obs.: $|I|$ denota o comprimento do intervalo I.

CIIM 2010

Segundo Dia

Problema 4. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função crescente, contínua em $[0,1]$, diferenciável em $(0,1)$ e com derivada menor que 1 em cada ponto. Definimos a sequência de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots$ da seguinte maneira: $A_1 = f([0,1])$, e para $n \geq 2$, $A_n = f(A_{n-1})$. Demonstre que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(A_n) = 0$, onde $d(A)$ é o diâmetro so conjunto A.

Obs.: O diâmetro de um conjunto X se define como $d(X) = \sup\limits_{x,y\in X} |x-y|$, ou em outras palavras como o comprimento do intervalo $[a,b]$ que contém X para o qual $b-a$ é mínimo.

Problema 5. Sejam n e d inteiros maiores que 1 com $mdc(n, d!) = 1$. Prove que n e $n+d$ são primos se e somente se

$$d!d((n-1)!+1) + n(d!-1) \equiv 0 \pmod{n(n+d)}.$$

Problema 6. Dizemos que um grupo é localmente cíclico se cada um de seus subgrupos finitamente gerados é cíclico. Prove que um grupo localmente cíclico é isomorfo a um de seus subgrupos próprios se e somente se é isomorfo a um subgrupo próprio do grupo dos números racionais com a operação de soma.

Obs.:

- Um grupo é finitamente gerado se contém um subconjunto finito de elementos tal que com estes e seus inversos é possível obter qualquer outro elemento do grupo usando a operação do grupo um número finito de vezes.
- Um grupo é cíclico se é gerado por um único elemento.
- Um subgrupo próprio é um subgrupo estritamente contido no grupo.

CIIM 2011

Primeiro Dia

Problema 1. Encontre todos números reais a para os quais existem números reais b, c e d diferentes entre si e diferentes de a tais que as quatro tangentes traçadas a curva $y = sen(x)$ nos pontos $(a, sen(a))$, $(b, sen(b))$, $(c, sen(c))$ e $(d, sen(d))$ formam um retângulo.

Problema 2. Seja k um inteiro positivo e seja a um inteiro tal que $a - 2$ é múltiplo de 7 e $a^6 - 1$ é múltiplo de 7^k. Prove que $(a + 1)^6 - 1$ também é múltiplo de 7^k.

Problema 3. Seja $f(x)$ uma função racional com coeficientes complexos cujo denominador não tem raízes múltiplas. Sejam $u_0, u_1, \ldots, u_n$ as raízes complexas de f e $w_1, w_2, \ldots, w_m$ as raízes de f'. (Cada raíz está considerada tantas vezes quanto sua multiplicidade). Suponha que u_0 é uma raíz com multiplicidade um de f. Prove que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{w_k - u_0} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k - u_0}.$$

Nota: Uma função racional é o quociente de dois polinômios.

CIIM 2011

Segundo Dia

Problema 4. Para $n \geq 3$, seja $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Seja $C_n = (c_{i,j})_{n\times n}$ a matriz definida por $c_{i,j} = b_{(j-i)\ mod\ n}$. Demonstre que $\det(C_n) = 3$ se n não é múltiplo de 3 e $\det(C_n) = 0$ se n é múltiplo de 3.

Nota: $m\ mod\ n$ é o resíduo da divisão de m por n.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo com d dígitos, todos distintos de zero. Para $k = 0, \ldots, d-1$, definimos n_k como o número que se obtem ao mover os últimos k dígitos de n ao início. Por exemplo, se $n = 2184$ então $n_0 = 2184$, $n_1 = 4218$, $n_2 = 8421$ e $n_3 = 1842$. Para m um inteiro positivo, definimos $s_m(n)$ como a quantidade de valores k tais que n_k é múltiplo de m. Finalmente definimos a_d como a quantidade de inteiros n com d dígitos, todos diferentes de zero, para os quais $s_2(n) + s_3(n) + s_5(n) = 2d$. Encontre

$$\lim_{d\to\infty} \frac{a_d}{5^d}.$$

Problema 6. Seja Γ o ramo $x > 0$ da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Sejam $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ pontos distintos de Γ com $P_0 = (1, 0)$ e $P_1 = (13/12, 5/12)$. Seja t_i a reta tangente a Γ em P_i. Suponha que para todo $i \geq 0$ a área da região limitada por t_i, t_{i+1} e Γ é uma constante que não depende de i. Encontre as coordenadas dos pontos P_i em função de i.

CIIM 2012

Primeiro Dia

Problema 1. Para cada inteiro positivo n se define A_n como a matriz de tamanho $n \times n$ tal que sua entrada a_{ij} é igual a $\binom{i+j-2}{j-1}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Calcule o valor do determinante de A_n.

Problema 2. Um conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ (esta padre) se sempre que $x, y \in A$ com $x \leq y$ também temos $2y - x \in A$. Demonstrar que se A (esta padre), $0, a, b \in A$ com $0 < a < b$ e $d = mdc(a, b)$ então 2.Traduzir 'esta padre' d jeito certo

$$a + b - 3d,\ a + b - 2d \in A.$$

Problema 3. Sejam a, b, c os tamanhos dos lados de um triângulo. Demonstrar que

$$\sqrt{\frac{(3a+b)(3b+a)}{(2a+c)(2b+c)}} + \sqrt{\frac{(3b+c)(3c+b)}{(2b+a)(2c+a)}} + \sqrt{\frac{(3c+a)(3a+c)}{(2c+b)(2a+b)}} \geq 4.$$

CIIM 2012

Segundo Dia

Problema 4. Seja $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$. Calcule

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

Problema 5. Seja $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Uma função de direção para D é uma função $f : D \times D \to \{0, 1\}$. Um real $r \in [0, 1]$ é compatível com f se pode ser escrito na forma

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j}$$

com $d_j \in D$ e $f(d_j, d_{j+1}) = 1$ para todo inteiro positivo j.

Determinar o menor inteiro k tal que para toda função de direção f, se existem k reais compatíveis com f então há infinitos reais compatíveis com f.

Problema 6. Sejam $n \geq 2$ e $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstrar que se existe um inteiro positivo k tal que $(x-1)^{k+1}$ divide $p(x)$ então

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| > 1 + \frac{2k^2}{n}.$$

CIIM 2013

Primeiro Dia

Problema 1. Dados os números naturais m e n denotamos por $\overline{m,n}$ o número que resulta se a m escrevemos n depois da vírgula decimal.

a Demonstrar que existem infinitos naturais k tais que para cada um deles a equação $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ não possui solução.

b Demonstrar que existem infinitos naturais k tais que para cada um deles a equação $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ possui solução.

Problema 2. Consideremos um polinômio $p \in \mathbb{R}$ de grau n sem raízes reais. Demonstre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p(x))^2 + (p'(x))^2} dx$$

Converge e é menor ou igual a $n^{3/2}\pi$.

Problema 3. Dado um conjunto de meninos e meninas, chamaremos amigável um par (A, B) de pessoas se A e B são amigos. A relação de amizade é simétrica. Um conjunto de pessoas é afetuoso se se cumprem as seguintes três condições:

i O conjunto tem o mesmo número de meninos e meninas.

ii Para cada quatro pessoas distintas A, B, C, D, se os pares (A, B), (B, C), (C, D) e (D, A) são todas amigáveis, então pelo menos um dos pares (A, C) e (B, D) é também amigável.

iii Pelo menos $\frac{1}{2013}$ de todos os pares menino-menina são amigáveis.

Seja m um inteiro positivo. Demonstre que existe um inteiro $N(m)$ tal que se um conjunto afetuoso tem $N(m)$ pessoas ou mais, então existem m meninos que são todos amigos entre si ou m meninas que são todas amigas entre si.

CIIM 2013

Segundo Dia

Problema 4. Sejam a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 números reais positivos e $F, G : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ duas funções diferenciáveis e positivas que cumpram as identidades

$$\frac{x}{F} = 1 + a_1 x + b_1 y + c_1 G$$
$$\frac{y}{G} = 1 + a_2 x + b_2 y + c_2 F$$

Demosntre que se $0 < x_1 \leq x_2$ e $0 < y_2 \leq y_1$, então $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ e $G(x_1, y_1) \geq G(x_2, y_2)$.

Problema 5. Sejam A e B matrizes de tamanho $n \times n$ com entradas complexas. Demonstre que existem uma matriz T e uma matriz invertível S tais que

$$B = S(A+T)S^{-1} - T$$

se e somente se $tr(A) = tr(B)$, onde tr denota o traço da matriz.

Problema 6. Seja (X, d) um espaço métrico com $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Suponhamos que X é conexo e compacto. Demonstre que existe um $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumpre a seguinte propriedade: para todo inteiro $n > 0$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$, existe $x \in X$ tal que a média das distâncias de $x_1, \ldots, x_n$ a x é α, ou seja:

$$\frac{d(x, x_1) + d(x, x_2) + \cdots + d(x, x_n)}{n} = \alpha$$

CIIM 2014

Primeiro Dia

Problema 1. Seja $g : [2013, 2014] \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as duas seguintes condições:

- $g(2013) = g(2014) = 0$,
- para quaisquer $a, b \in [2013, 2014]$, tem-se que $g(\frac{a+b}{2}) \leq g(a) + g(b)$

Demonstre que g possui zeros em qualquer subintervalo aberto $(c, d) \subset [2013, 2014]$.

Problema 2. Sejam n um inteiro positivo e p um primo maior que 2. Mostre que:

$$(p-1)^n n! | (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1}).$$

Problema 3. Dado $n \geq 2$, seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos do conjunto com n elementos $\{1, ..., n\}$ tal que, para quaisquer $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$, se verifica que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leq n - 2$. Mostre que $|A| \leq 2^{n-2}$. Nota: $|X|$ designa a cardinalidade do conjunto X.

CIIM 2014

Segundo Dia

Problema 4. Seja (a_i) uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos. Definimos a sequência (s_k):

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]}$$

onde $[a_i, a_{i+1}]$ denota o mínimo múltiplo comum de a_i e a_{i+1}.

Mostre que a sequência (s_k) é convergente.

Problema 5. Uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se chama interessante se $f(z)$ é real ao longo da parábola $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$.

a Encontre um exemplo de uma função interessante que não seja constante.

b Prove que todas as funções interessantes f satisfazem $f'(-3/4) = 0$.

Problema 6.

a Seja $\{x_n\}$ uma sequência com $x_n \in [0, 1]$ para todo n. Prove que existe $C > 0$ tal que, para todo inteiro positivo r, exitem $m \geq 1$ e $n > m + r$ que cumprem

$$(n - m)|x_n - x_m| \leq C$$

b Prove que para todo $C > 0$ existem uma sequência $\{x_n\}$, com $x_n \in [0, 1]$ para todo n, e um inteiro positivo r tais que, se $m \geq 1$ e $n > m + r$, então

$$(n - m)|x_n - x_m| > C$$

CIIM 2015

Primeiro Dia

Problema 1. Encontre o número real a tal que a integral definida

$$\int_a^{a+8} e^{-x}e^{-x^2}dx$$

alacança seu valor máximo.

Problema 2. Ache todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfazem a identidade

$$P(x^3-2) = P(x)^3 - 2$$

para todo número real x.

Problema 3. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ } e \text{ } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $k \geq 1$ um inteiro. Prove que para inteiros não nulos quaisquer $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j_1, j_2, \ldots, j_k$ e inteiros quaisquer i_0, i_k, se verifica

$$A^{i_0}B^{j_1}A^{i_1}B^{j_2}\ldots A^{i_{k-1}}B^{j_k}A^{i_k} \neq I$$

Nota: I denota a matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CIIM 2015

Segundo Dia

Problema 4. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e α um número real tais que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$$

Mostre que para qualquer $r > 0$, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x - y = r$ e $f(x) = f(y)$.

Problema 5. Há n pessoas sentadas em uma mesa circular que tem os lugares numerados de 1 a n no sentido horário. Seja k um inteiro fixo com $2 \leq k \leq n$. As pessoas podem trocar de lugar. Há dois tipos de movimentos permitidos:

a Cada pessoa se move para o lugar vizinho no sentido horário.

b Somente trocam de lugar as pessoas que se encontram nos lugares 1 e k.

Determine, em função de n e k, o número de possíveis configurações de pessoas na mesa que podem ser obtidas, usando alguma sequência de movimentos permitidos.

Problema 6. Prove que existe um real $C > 1$ que satisfaz a seguinte propriedade: se $n > 1$ e $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ são inteiros postivos tais que $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots \frac{1}{a_n}$ estão em progressão aritmética, então $a_0 > C^n$.

Parte II

Soluções

CIIM 2009

Problema 1. Seja $x_n = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$. Como $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ e $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ são raízes da equação $x^2 - 3x - 2 = 0$, temos que $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 2x_n$ (para todo $n \geq 0$) e $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 13$. Por indução, x_1 e x_2 são inteiros ímpares e, se x_n e x_{n+1} são inteiros ímpares, então $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 2x_n$ é inteiro ímpar, pois $3x_{n+1}$ é inteiro ímpar, $2x_n$ é inteiro par e a soma de um inteiro ímpar com um inteiro par é um inteiro ímpar. Logo, x_n é inteiro ímpar para todo $n \geq 1$.

Problema 2. Seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ um conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^n$. Considere a matriz com vetores coluna $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 + \cdots + v_{n-1}$. Essa matriz tem determinante nulo e, escolhendo qualquer entrada (i, j) dela, temos que os vetores coluna $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, v_1 + \cdots + v_{n-1}$ geram o espaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Basta então provarmos que alterando a entrada j de v_i podemos obter $\widetilde{v_i}$ que não pertence ao espaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ e alterando qualquer entrada de $v_1 + \cdots + v_{n-1}$ também podemos obter um vetor que não está no espaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Para isso tome $v_i = e_i + e_n$ e $\widetilde{v_i} = e_j + e_i + e_n$ se $j \neq i$ e $\widetilde{v_i} = e_n$ se $j = i$. Tome também $\widetilde{v_n}$ como v_n trocando a entrada j por 0. (e_k é o k-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$)

Concluímos que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$ tem determinante nulo e alterando qualquer entrada diferente de zero para zero ou qualquer entrada nula para 1 a matriz obtida tem determinante diferente de zero.

Problema 3. Com $r = n + 1$, n par, $A = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$ e $B = \langle 2, 1, \ldots, n, n-1 \rangle$ não podemos mudar a_i para b_i para nenhum i na primeira jogada. E devemos ter pelo menos 3 jogadas para mudar cada par (a_1, a_2) para (b_1, b_2), (a_3, a_4) para (b_3, b_4) e assim por diante. Dessa maneira a distância entre A e B é pelo menos $3n/2$.

Agora vamos mostrar que a máxima distância é de fato $3n/2$. Sem perdas, supomos $a_i = i$ para todo i. Se $b_j > n$ para algum j então com uma jogada mudamos a_j para b_j. Após fazer esses movimentos de uma jogada, caímos no caso análogo a $A = \langle 1, 2, \ldots, m, \ldots, n \rangle$ e $B = \langle \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m), m+1, \ldots, n \rangle$ para alguma permutação σ de $\{1, 2, \ldots, m\}$. Vamos mostrar que nesse caso a distância entre A e B é no máximo $3m/2$ mostrando uma maneira de levar A para B com $3m/2$ jogadas. A primeira jogada é trocar a_1 por $t > n$ para algum t de modo que a palavra resultante ainda seja boa. Depois trocamos $a_{\sigma^{-1}(1)}$ por 1 e $a_{\sigma^{-1} \circ \ldots \sigma^{-1}(1)}$ ($t+1$ vezes σ^{-1}) por $\sigma^{-1} \circ \ldots \sigma^{-1}(1)$ (t vezes σ^{-1}) para todos t até $\sigma^{-1} \circ \ldots \sigma^{-1}(1) = 1$. Assim ajeitamos todos a_i com i na mesma órbita de 1 em σ com uma jogada a mais que o tamanho da órbita. O número de jogadas para levar A para B dessa maneira é $m+$número de órbitas não triviais de $\sigma \leq 3m/2$. No caso n ímpar é fácil perceber que a distância máxima será $3\lfloor n/2 \rfloor$.

Problema 4. Antes vamos resolver a seguinte questão: Qual deve ser o valor do parâmetro p para que a reta $y = mx + q$ seja tangente a parábola $y^2 = 2px$ e qual seria o foco dessa parábola? Como a reta tangente a $y^2 = 2px$ no ponto (x_0, y_0) é $yy_0 = p(x + x_0)$, devemos ter $m = \frac{p}{y_0}$ e $q = \frac{px_0}{y_0}$, então $y_0 = \frac{p}{m}$, $x_0 = \frac{q}{m}$ e de $y_0^2 = 2px_0$ obtemos $(\frac{p}{m})^2 = 2p(\frac{q}{m}) \to p = 2mq$. Assim o foco da parábola seria o ponto $(mq, 0)$.

Suponha, sem perdas, que a reta m seja $y = -1$ e o ponto $M = (0, 0)$. O que vamos fazer é calcular o foco da parábola que tem m como reta tangente e o eixo da parábola fazendo ângulo θ com a horizontal (diferenciamos θ de $\theta + \pi$ considerando que o foco está na semi-reta que sai da origem com ângulo θ). Perceba que precisamos considerar apenas $0 < \theta < \pi$, pois nos outros casos a reta $y = -1$ não pode ser tangente a parábola. Mudando os eixos em cada caso para a parábola ser $(y')^2 = 2px'$, temos que a reta $y = -1$ é $y' = -\tan(\theta)x' - \sec(\theta)$ e o foco da parábola nessas novas coordenadas é $(\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)^2}, 0)$. Passando para as coordenadas anteriores o foco é $(\tan(\theta), \tan(\theta)^2)$ e fazendo θ variar entre 0 e π obtemos a curva $y = x^2$ (uma parábola com vértice M, eixo perpendicular a m e foco a distância de M sendo 1/4 da distância entre m e M).

Problema 5. Sem perda de generalidade vamos assumir que $a < b$. Seja $S = \{x \in [a,b] : f(x) > d\}$. Sabemos que $b \in S$ e que a é um limite inferior de S. Seja $c = \inf S$ (existe pois $[a,b]$ é um intervalo fechado, S é não vazio e sabemos que existe um limite inferior do conjunto). Vamos mostrar que $f(c) = d$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Das hipóteses temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in (c, c+\delta), f(x) < f(c) + \epsilon$$

Temos que, da definição de ínfimo, existe $y \in (c, c+\delta) \cap S$. Portanto

$$f(c) > f(y) - \epsilon > d - \epsilon$$

Também temos que existem w e z com $c - \epsilon < w < c < z < c + \epsilon$ tais que

$$|f(w) - f(c)| < \epsilon, |f(z) - f(c)| < \epsilon$$

Como $c - \epsilon < w < c$ temos que ϵ é pequeno suficiente de forma que $w \in [a, c) \subset [a, b]$ e $f(w) \leq d$. Portanto

$$|f(w) - f(c)| < \epsilon \Rightarrow f(c) < f(w) + \epsilon \leq d + \epsilon$$

Então temos que

$$\forall \epsilon > 0 : d - \epsilon < f(c) < d + \epsilon$$

E portanto $f(c) = d$.

Problema 6. Vamos usar as seguintes fórmulas para polinômios de Chebyshev de primeiro (T_n) e segundo (U_n) tipo

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$
$$\sin x U_{n-1}(\cos x) = \sin nx$$
$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

Sejam $\phi = \frac{2\pi}{n}$ e $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Seja $t \in \mathbb{Z}$ tal que $\epsilon = e^{it\phi}$. Da hipótese do problema temos que

$$p(\epsilon) = z \in \mathbb{R}$$

Como os coeficientes de p são inteiros, temos que

$$z = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt\phi$$
$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin kt\phi$$

Substituindo nas expressões os polinômios de Chebyshev e observando que $\sin\phi \neq 0$ temos que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T_{kt}(\cos\phi) = z \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k(U_{kt}(\cos\phi) - \cos\phi U_{kt-1}(\cos\phi)) = z$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k U_{kt-1}(\cos\phi) = 0$$

Juntando as duas últimas igualdades obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k U_{kt}(\cos\phi) = z$$

Como $U_n(x) = h(2x)$, para algum polinômio h com coeficientes inteiros, concluímos que

$$z = q(2\cos\phi) = q(2\cos\frac{2\pi}{n})$$

Observação: Para mostrar que U_n é um polinômio em $2x$ basta usarmos a fórmula $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ e concluirmos por indução forte. De fato, $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$. Vamos agora supor que $U_k(x) = h_k(2x)$ para algum h_k, com k entre 0 e n. Pela fórmula de recorrência obtemos

$$U_{n+1}(x) = 2xh_n(2x) - h_{n-1}(2x)$$

Como $2x$ é um polinômio em $2x$ temos que $U_{n+1}(x)$ é um polinômio em $2x$, o que conlui a indução.

CIIM 2010

Problema 1. Repare que $v*w$ é a matriz v^Tw (considerando v e w como vetores coluna), que possui imagem contida no espaço gerado por v. Logo a imagem de $v*w - w*v$ está contida no espaço gerado por v e w e $posto(v*w - w*v) \leq 2$. Além disso, os vetores coluna da matriz $v*w - w*v$ são os vetores $w_iv - v_iw$. Como v e w são linearmente independentes, dois vetores $w_iv - v_iw$ e $w_jv - v_jw$ só são linearmente dependentes se os vetores $(w_i, -v_i)$ e $(w_j, -v_j)$ (de $\mathbb{R}^2$) são linearmente dependentes.

Como v e w são linearmente independentes, existem índices i e j tais que (w_i, v_i) e (w_j, v_j) são linearmente independentes e, então, $(w_i, -v_i)$ e $(w_j, -v_j)$ são linearmente independentes, $w_iv - v_iw$ e $w_jv - v_jw$ são linearmente independentes e a matriz $v*w - w*v$ tem posto 2.

Problema 2. Sendo $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n \leq j_1 \leq j_2 \leq 2n$, temos que $(j_1 - i_1)^2 + (j_2 - i_2)^2 \leq (j_2 - i_1)^2 + (j_1 - i_2)^2$ pois, tomando $x = i_2 - i_1$, $y = j_1 - i_2$ e $z = j_2 - j_1$, $(j_2 - i_1)^2 + (j_1 - i_2)^2 - (j_1 - i_1)^2 - (j_2 - i_2)^2 = (x + y + z)^2 + y^2 - (x + y)^2 - (y + z)^2 = 2xz \geq 0$. Concluímos que o custo é menor quando levamos uma cama de i_1 para j_1 e de i_2 para j_2 e o custo será reduzido se levarmos primeiro todas camas possíveis do quarto 1 para os quartos com menor índice (primeiro levamos para $n + 1$ e, se esgotarmos $n + 1$, levamos para $n + 2$ e assim por diante), depois fazemos o mesmo com as camas do quarto 2 e assim até o quarto n.

Problema 3.

Problema 4. Como f é crescente e $0 \leq f^{'} < 1$, f é contração, tem único ponto fixo e as sequências $x_n = f^n(0)$ e $y_n = f^n(1)$ convergem para esse único ponto fixo. Logo (como $A_{n+1} = [x_n, y_n]$) $d(A_{n+1}) = y_n - x_n \to 0$.

Problema 5. $mdc(n, d!) = 1 \to n > d$, $d!d((n-1)!+1)+n(d!-1) \equiv d!d(n-1)!+(n+d)d!-n \equiv d(d!(n-1)!+1) \equiv d(1+(-1)^{n-1}(n+d-1)!)\ (mod\ n+d)$ e $d!d((n-1)!+1)+n(d!-1) \equiv d!d((n-1)!+1)\ (mod\ n)$.

Pelo teorema de Wilson, $(p - 1)! + 1 \equiv 0\ (mod\ p)$ se e somente se p é primo. Se n e $n + d$ são primos ($d \geq 2$ e $n > 2$), então $d(1 + (-1)^{n-1}(n + d - 1)!) \equiv d(1 + (-1)^n) \equiv d(1 - 1) \equiv 0\ (mod\ n + d)$ e $d!d((n - 1)! + 1) \equiv d!d(-1 + 1) \equiv 0\ (mod\ n)$.

Agora, se n é composto, $d!d((n-1)!+1)+n(d!-1) \equiv d!d\ (mod\ n)$ e, como $mdc(n, d!) = 1$, n não divide $d!d$. Se $n + d$ for composto, $d!d((n - 1)! + 1) + n(d! - 1) \equiv d(1 + (-1)^{n-1}(n + d - 1)!) \equiv d\ (mod\ (n + d))$ e $n + d$ não divide d pois $d < n + d$. Assim, se $d!d((n - 1)! + 1) + n(d! - 1) \equiv 0\ (mod\ n(n + d))$, então n e $n + d$ são primos.

Problema 6. A demonstração segue em algumas etapas

a Um grupo G localmente cíclico é periódico (todo elemento tem ordem finita) ou livre de torção (todo elemento tem ordem infinita).

Prova: Sejam $g, h \in G$ dois elementos quaisquer. Como o grupo é localmente cíclico, temos que

$$< g, h >=< a >, a \in G$$

Se a é de ordem finita, como g e h são potências de a, temos que g e h também são de ordem finita. Agora vamos supor que existam elementos em G, x e y, o primeiro de ordem finita e o segundo de ordem infinita. Seja $a \in G$ tal que $< x, y >=< a >$. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $a^n = x, a^m = y$. Como x tem ordem finita, temos que existe α tal que $x^\alpha = e$, e portanto $a^{n\alpha} = e$ e assim a tem ordem finita. Como vimos antes isso implica que y também é de ordem finita, o que é um absurdo.

b Um grupo é localmente cíclico e livre de torção se, e somente se é isomorfo a um subgrupo do grupo dos racionais.

Prova: $(\Rightarrow)$:

Seja $g \in G, g \neq e$. Tomemos a seguinte função

$$\phi : G \to \mathbb{Q}$$

$$\phi(g) = 1$$

$$\forall h \in G, m, n \in \mathbb{N} : h^m = g^n \Rightarrow \phi(h) = \frac{n}{m}$$

Observemos que tais m e n existem pois o subgrupo $< g, h >$ é cíclico.

A função ϕ está bem definida. De fato, vamos supor que existam inteiros m_1, n_1, m_2 e n_2 com $m_1 n_2 \neq m_2 n_1$ com $h^{m_1} = g^{n_1}$ e $h^{m_2} = g^{n_2}$. Temos então que vale $g^{m_1 n_2 - m_2 n_1} = e$ e como $g \neq e$ temos que $m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0$, o que contradiz $m_1 n_2 \neq m_2 n_1$

Vamos agora verficar que ϕ é um homomorfismo. De fato, sejam a e b dois elementos em G com

$$\phi(a) = \frac{n_1}{m_1}, \phi(b) = \frac{n_2}{m_2}$$

Agora observemos que das definições anteriores vale que

$$(ab)^{m_1 m_2} = g^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$$

E portanto

$$\phi(ab) = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{m_1 m_2} = \frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} = \phi(a)\phi(b)$$

Por fim vamos verificar que ϕ é injetiva. De fato, vamos supor que existam a e b distintos tais que $\phi(a) = \phi(b) = \frac{n}{m}$. Temos então que vale

$$a^m = b^m = g^n \Rightarrow (ab^{-1})^m = e$$

Como o grupo é livre de torção temos que $(ab^{-1}) = e$, o que implica $a = b$, o que é um absurdo.

$(\Leftarrow)$:

Temos que o grupo dos racionais é localmente cíclico e livre de torção. Além disso é claro que subgrupos de grupos localmente cíclicos são localmente cíclicos e também subgrupos de grupos livres de torção também são livre de torção. Com o dado isomorfismo que assume-se por hipótese existir obtemos o resultado desejado junto com as propriedades ditas anteriormente.

c Um grupo G localmente cíclico periódico é isomorfo a um produto direto de grupos cíclicos de ordem potência de um primo ou $p-$quasicíclico (grupo onde os elementos têm ordem potência de um primo), onde p é um primo.

Prova:

Para cada primo p seja G_p o subgrupo de G onde todos os seus elementos têm ordem potência de um primo (é um subgrupo pois as condições de inverso, produto e identidade valem para ele). Primeiro observemos que G é um produto dos G_p. De fato, cada elemento de G tem ordem finita e portanto gera um subgrupo cíclico. Observemos que esse subgrupo é um produto direto de grupos cíclicos de ordem potência de um primo. De fato, seja x o elemento e $\alpha = p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$ a ordem dele. Como os p_i são primos e em particular primos entre si e portanto a sequência definida por $t_i = \prod_{j \neq i} p_j^{\gamma_j}$, temos pelo Teorema de Bachet-Bézout que existem $a_1, \dots, a_k$ inteiros tais que $\sum_{i=1}^k a_i t_i = 1$. Portanto $\prod_{i=1}^k x^{a_i t_i} = x^{\sum_{i=1}^k a_i t_i} = x$. Por fim observemos que o subgrupo gerado por esse elemento é isomorfo ao produto direto dos subgrupos gerados por $x^{a_i t_i}$, que são isomorfos aos grupos cíclicos de ordem $p_i^{\gamma_i}$, respectivamente. Agora sejam dois elementos de ordem p^k, digamos a e b. Temos que o subgrupo gerado pelos dois elementos é o grupo gerado por x. Temos em particular que $x^i = a$ e $x^j = b$. Podemos supor que $m.d.c.(i, j) = 1$ pois caso contrário teríamos que esse grupo é gerado por $x^{m.d.c.(i,j)}$, com $m.d.c.(i, j) > 1$, o que contradiz ele ser gerado por x. Temos então que x tem ordem uma potência de p menor ou igual a p^k. Se tomarmos outro elemento com ordem p^k, digamos c, teremos que a e c são potências de um elemento y que possui ordem uma potência de um primo. Mais que isso, teremos que x e y serão representados como potência de um elemento em G cuja ordem é uma potência de um primo. Por fim concluímos que existe um elemento de ordem divisor de p^k que suas potências podem representar todos os elementos de ordem p^k (o processo deve terminar pois geramo um elemento com ordem no máximo p^k, em particular finita, que representa todos os números de ordem p^k até aquela etapa, e portanto poderemos ter no máximo p^k elementos diferentes de ordem p^k). Então os G_p geram o grupo G. Além disso, os grupos G_p se intersectam apenas na identidade.

Como os G_p são subgrupos de G, eles são localmente cíclicos e periódicos. Se G_p for finito, então ele é cíclico. Se for infinito, é o grupo $p-$quasicíclico.

d Um grupo localmente cíclico é isomorfo a um subgrupo próprio se, e somente se é livre de torção

Prova:

$(\Leftarrow)$:

Seja a função $h : G \longrightarrow G$ definida como $h(x) = x^2$. Primeiro observemos que h é injetiva. De fato, se tivermos dois elementos tais que $a^2 = b^2$, temos que vale $(ab^{-1})^2 = e$ pois os elementos do grupo comutam já que ele é localmente cíclico. Como ele é livre de torção temos que $ab^{-1} = e \Rightarrow a = b$. Agora verifiquemos que h é um homomorfismo. Sejam $x, y \in G$. Temos que

$$h(x)h(y) = x^2y^2 = (xy)^2 = h(xy)$$

O que termina a prova. Se tomarmos o homorfismo sobrejetivo $g : G \longrightarrow h(G)$ temos o isomorfismo desejado.

$(\Rightarrow)$:

Vamos usar a e c para provar o desejado. Vamos supor que o grupo G não é livre de torção. Portanto ele é periódico. Seja ϕ o isomorfismo no subgrupo próprio de G. Seja a um elemento de ordem m. Seja A_m o conjunto de todos so elementos de G com ordem m. Claramente ϕ leva A_m num subconjunto de A_m. Porém, como para um valor específico de m existe um número finito de possibilidades de elementos de ordem m, temos que A_m é finito. Como ϕ é uma bijeção, temos que leva A_m em A_m. Como isso vale para todo m, temos que ϕ leva G em G.

Vamos provar a ida. Por d temos que o grupo é livre de torção. Por b temos que o grupo é isomorfo a um subgrupo dos racionais. Para terminar basta mostrarmos que esse subgrupo não é o grupo dos racionais. Vamos supor que o grupo G fosse isomorfo a $\mathbb{Q}$. Seja H o subgrupo próprio de G isomorfo a G. Seja ϕ_1 o isomorfismo de G para H e ϕ_2 o isomorfismo de G para $\mathbb{Q}$. Como H é um subgrupo próprio de G e esse grupo é isomorfo a $\mathbb{Q}$, temos que ϕ_2 é um isomorfismo de H para um subgrupo próprio de $\mathbb{Q}$. Dessa forma temos que $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 \circ \phi_2$ é um isomorfismo de $\mathbb{Q}$ para um subgrupo próprio de $\mathbb{Q}$. Isso porém é um absurdo pois $\mathbb{Q}$ não é isomorfo a um subgrupo próprio (de fato, se fosse teríamos $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, onde f é o isomorfismo, e assim esse é um isomorfismo de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$), o que termina a prova de que G é isomorfo a um subgrupo próprio dos racionais.

Vamos agora provar a volta. Por b temos que o grupo é livre de torção. Por c temos que o grupo é isomorfo a um subgrupo próprio, o que termina a prova.

CIIM 2011

Problema 1. A inclinação da tangente a curva $y = sen(x)$ em $x = t$ é $cos(t)$. Para o ângulo entre duas retas ser reto o produto dos coeficientes angulares das retas deve ser -1. Assim, devemos ter $cos(a)cos(b) = -1$, $cos(b)cos(c) = -1$, $cos(c)cos(d) = -1$ e $cos(d)cos(a) = -1$, logo $cos(a) = cos(c) = 1$ e $cos(b) = cos(d) = -1$ ou $cos(a) = cos(c) = -1$ e $cos(b) = cos(d) = 1$. Todos os a desejados são os tais que $cos(a) = 1$ ou $cos(a) = -1$, ou seja, $a = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Problema 2. Temos que $a^6 - 1 = (a+1)(a-1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$ e $(a+1)^6 - 1 = a(a+2)(a^2 + a + 1)(a^2 + 3a + 3)$. Como $a \equiv 2 \ (mod\ 7)$, $(a+1)(a-1)(a^2 - a + 1) \equiv 2 \ (mod\ 7)$ e, portanto, 7^k divide $a^2 + a + 1$ e 7^k divide $(a+1)^6 - 1$.

Problema 3. Tomemos $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Temos que

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

Para um polinômio qualquer g com raízes $x_1, x_2, \ldots, x_t$ vale

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x - x_i}$$

Seja $h(x) = p'(x)q(x) - p(x)q'(x)$. Temos que $h'(x) = p''(x)q(x) - p(x)q''(x)$. Como u_0 é uma raiz de multiplicidade 1 de f, é uma raiz de multiplicidade 1 de p. Portanto temos que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x - w_k} = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

Temos que u_0 não é raiz de f' pois é raiz de multiplicidade 1. Temos então que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{u_0 - w_k} = \frac{h'(u_0)}{h(u_0)} = \frac{p''(u_0)}{p'(u_0)}$$

Agora observemos que

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x - u_k}$$

Portanto

$$\frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{1}{x - u_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - u_k}$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{1}{x - u_0} = \frac{-(p(x) + (u_0 - x)p'(x))}{(x - u_0)p(x)}$$

Agora observemos que pela fórmula de Taylor para o polinômio p no ponto x, obtemos

$$p(u_0) = \frac{p(x)}{0!} + \frac{(u_0 - x)}{1!}p'(x) + \frac{(u_0 - x)^2}{2!}p''(x) + \ldots$$

E portanto

$$\frac{-(p(x) + (u_0 - x)p'(x))}{(x - u_0)p(x)} = \frac{\frac{(u_0 - x)^2 p''(x)}{2} + \ldots}{(x - u_0)p(x)}$$

Onde na última expressão o numerador possui os demais termos com potências de $(x - u_0)$ maiores que 2. Como p tem uma vez o fator $x - u_0$, no denominador existe exatamente o termo $(x - u_0)$ com potência 2. Além disso, como $p'(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p(x)}{x - u_i}$, temos que, sendo $g(x) = \frac{p(x)}{x - u_0}$, vale $p'(u_0) = g(u_0)$. Portanto

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_0 - u_k} = \frac{p''(u_0)}{2p'(u_0)}$$

Juntando a última expressão com a obtida anteriormente concluímos o resultado desejado.

Problema 4. Vamos considerar as seguintes matrizes $n \times n$ auxiliares:

- A_n definida por $a_{ij} = 1$ se $1 \le i \le n-1$ e $|i-j| \in \{0,1\}$ ou se $i = n$ e $j = 1$ ou $j = n$ e $a_{ij} = 0$ nos outros casos.
- B_n definida por $b_{ij} = 1$ se $1 \le i \le n-1$ e $j - i \in \{0,1,2\}$ ou se $i = n$ e $j = 1$ ou $j = n$ e $b_{ij} = 0$ nos outros casos.
- T_n a matriz tridiagonal definida pra $t_{ij} = 1$ se $|i-j| \in \{0,1\}$ e $t_{ij} = 0$ caso $|i-j| \ge 2$.

Usando Laplace na primeira coluna de C_n, obtemos

$$\det(C_n) = (-1)^{n+1}\det(T_{n-1}) + (-1)^n \det(A_{n-1}) + \det(B_{n-1})$$

Usando Laplace na última linha de A_n e de B_n, na primeira coluna e depois na primeira linha de T_n, obtemos

$$\det(A_n) = \det(T_{n-1}) + (-1)^{n+1}$$
$$\det(B_n) = (-1)^{n+1}\det(T_{n-1}) + 1$$
$$\det(T_n) = \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2})$$

Assim, temos $\det(C_n) = (-1)^{n+1}\det(T_{n-1}) + 2(-1)^n \det(T_{n-2}) + 2$ e o resultado segue (ao analisarmos cada congruência de n módulo 6) do fato que $\det(T_n) = 1$ se $n \equiv 0$ ou $1\ (mod\, 6)$, $\det(T_n) = 0$ se $n \equiv 2$ ou $5\ (mod\, 6)$ e $\det(T_n) = -1$ se $n \equiv 3$ ou $4\ (mod\, 6)$ (que pode ser facilmente percebido a partir de $\det(T_1) = 1$, $\det(T_2) = 0$ e $\det(T_n) = \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2})$)

Problema 5. Primeiro repare que $s_2(n)$ é a quantidade de dígitos pares em n, $s_5(n)$ é a quantidade de 5 em n e $s_3(n) = 0$ se n não é múltiplo de 3 e $s_3(n) = d$ se n é múltiplo de 3. Assim, se n não é múltiplo de 3, $s_2(n) + s_3(n) + s_5(n) = 2d$ se e só se $s_2(n) + s_5(n) = 2d$ e devemos ter todos d dígitos de n ao mesmo tempo pares e sendo 5, um absurdo. Logo os números contados em a_d são todos múltiplos de 3 e tais que $s_2(n) + s_5(n) = d$, ou seja, todos dígitos de n pertencem a {2,4,5,6,8}. Basta então contarmos o número de escolhas de d-uplas de números em {2,4,5,6,8} cuja soma é múltipla de 3.

Sejam b_d e c_d a quantidade de d-uplas com soma congrua a 1 e 2, respectivamente, módulo 3. Assim, $a_d + b_d + c_d = 5^d$, (separando em cada caso de escolha de primeiro dígito)
$a_d = b_{d-1} + c_{d-1} + b_{d-1} + a_{d-1} + b_{d-1}$;
$b_d = c_{d-1} + a_{d-1} + c_{d-1} + b_{d-1} + c_{d-1}$;
$c_d = a_{d-1} + b_{d-1} + a_{d-1} + c_{d-1} + a_{d-1}$
e $a_d = 5^{d-1} + 2b_{d-1}$;
$b_d = 5^{d-1} + 2c_{d-1}$;
$c_d = 5^{d-1} + 2a_{d-1}$
Logo $a_d = 5^{d-1} + 2.5^{d-2} + 4.5^{d-3} + 8a_{d-3} \Rightarrow$

$$\frac{a_d}{5^d} = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8a_{d-3}}{125.5^{d-3}}.$$

Sendo $x_d = \frac{a_d}{5^d}$, temos

$$x_d = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8}{125}x_{d-3} = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8}{125}(\frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8}{125}x_{d-6}) =$$

$$\sum_{i=0}^{5} \frac{2^i}{5^{i+1}} + \frac{2^6}{5^6}x_{d-6} = \cdots = \sum_{i=0}^{3k-1} \frac{2^i}{5^{i+1}} + \frac{2^{3k}}{5^{3k}}x_{d-3k}$$

Contas simples mostarm que $x_1 = 1/5$, $x_2 = 7/25$ e $x_3 = 47/125$. Assim, $\lim_{d\to\infty} \frac{2^d}{5^d} x_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Tomando $k = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$ na equação acima, obtemos

$$x_d = \sum_{i=0}^{3\lfloor \frac{d}{3} \rfloor - 1} \frac{2^i}{5^{i+1}} + \frac{2^{3\lfloor \frac{d}{3} \rfloor}}{5^{3\lfloor \frac{d}{3} \rfloor}} x_{d-3\lfloor \frac{d}{3} \rfloor} \Rightarrow$$

$$\lim_{d\to\infty} x_d = \lim_{d\to\infty} \sum_{i=0}^{3\lfloor \frac{d}{3} \rfloor - 1} \frac{2^i}{5^{i+1}} = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{5^i} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$$

Obs.: Podíamos ter definido $A_d = \frac{a_d}{5^d}$, $B_d = \frac{b_d}{5^d}$ e $C_d = \frac{c_d}{5^d}$ e usar $|A_d - B_d| = \frac{2}{5}|B_{d-1} - C_{d-1}|$ (e outra equações análogas) para provar que $A_d - B_d \to 0$, $A_d - C_d \to 0$, $C_d - B_d \to 0$ e junto com $A_d + B_d + C_d = 1$ concluir que $A_d \to \frac{1}{3}$.

Problema 6. Vamos calcular a área desejada somando a área de dois trapézios e depois tirando a área sob o ramo da hipérbole. Vamos chamar o encontro das tangentes entre os pontos $P_i = (x_i, y_i)$ e $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ de $P = (x, y)$. Os trapézios que vamos observar são os formados pelos pontos $(x_i, 0)$, $(x, 0)$, P e P_i e $(x, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, P_{i+1} e P. A área abaixo da curva é dada por $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\log x + \sqrt{x^2-1}}{2}|_{x_i}^{x_{i+1}}$. A área A obtida é

$$A = \frac{(x - x_i)(y + y_i)}{2} + \frac{(x_{i+1} - x)(y_{i+1} + y)}{2} + \frac{x_{i+1}y_{i+1} - x_i y_i + \log \frac{x_{i+1}+y_{i+1}}{x_i+y_i}}{2}$$

$$A = \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2}{2(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)} + \frac{\log \frac{x_{i+1}+y_{i+1}}{x_i+y_i}}{2}$$

Vamos chamar $r = \frac{x_{i+1}+y_{i+1}}{x_i+y_i}$. Agora observemos que

$$(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2 = 2(1 - x_{i+1}x_i + y_{i+1}y_i)$$

E também

$$(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2 = (x_{i+1} - x_i + y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i - y_{i+1} + y_i)$$

$$(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2 = ((x_{i+1} + y_{i+1}) - (x_i + y_i))((x_{i+1} - y_{i+1}) - (x_i - y_i))$$

$$(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2 = (r - 1)(x_i + y_i)((x_{i+1} - y_{i+1}) - (x_i - y_i))$$

$$(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2 = (r - 1)(\frac{1}{r} - 1) = \frac{-(r-1)^2}{r}$$

Temos então que

$$x_{i+1}x_i - y_{i+1}y_i = 1 + \frac{(r-1)^2}{2r} = \frac{r}{2} + \frac{1}{2r}$$

Além disso

$$r = \frac{x_{i+1} + y_{i+1}}{x_i + y_i} = (x_i - y_i)(x_{i+1} + y_{i+1})$$

$$r = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i + x_i x_{i+1} - y_i y_{i+1}$$

E portanto

$$x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i = \frac{r}{2} - \frac{1}{2r}$$

Logo

$$A = \frac{1 - r}{1 + r} + \log r$$

Agora observemos a função

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} + \log x$$

Temos que

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x^2}{x(1+x)^2} > 0$$

Portanto f é estritamente crescente e em particular injetiva. Logo, para a área A ser constante temos que r é constante. Dos casos iniciais concluímos que $r = \frac{3}{2}$. Por fim temos que, dado os casos iniciais

$$x_n = \frac{1}{2}((\frac{3}{2})^n + (\frac{2}{3})^n)$$
$$y_n = \frac{1}{2}((\frac{3}{2})^n - (\frac{2}{3})^n)$$

Observação 1: Vamos calcular a seguinte integral $\int \sqrt{x^2-1}dx$ para a variável maior ou igual a 1

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1} + K - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + K' + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Agora observemos que

$$(\log(x+\sqrt{x^2-1}))' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Portanto

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{2} + C$$

Observação 2: A integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ pode ser calculada através da substituição trigonométrica $x = \sec\theta$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{\tan\theta\sec\theta}{\tan\theta}d\theta = \log|\tan\theta + \sec\theta| + K_1$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2-1}) + K_1$$

CIIM 2012

Problema 1.

Primeira Solução

Substituindo cada linha por ela menos a anterior a primeira coluna se torna $(1, 0, \ldots, 0)$ e o determinante de A_n é o mesmo que o determinante da matriz $n-1 \times n-1$ que resta ao retirar a primeira linha e primeira coluna da nova matriz. A entrada (i, j) da nova matriz será $\binom{(i+1)+(j+1)-2}{(j+1)-1} - \binom{i+(j+1)-2}{(j+1)-1} = \binom{i+j-1}{j-1}$. Fazendo as mesmas operações obtemos a matriz $n-2 \times n-2$ com entrada (i, j) dada por $\binom{(i+1)+(j+1)-1}{(j+1)-1} - \binom{i+(j+1)-1}{(j+1)-1} = \binom{i+j}{j-1}$. Fazendo a operação $n-1$ vezes obtemos a matriz 1×1 com entrada $\binom{i+j-2+(n-1)}{j-1}$ para $i = 1$ e $j = 1$, ou seja, $\binom{i+j-2+(n-1)}{j-1} = \binom{n-1}{0} = 1$. Concluímos então que $\det(A_n) = 1$.

Segunda Solução

Seja B a matriz dada por $b_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$. Temos então que, sendo $C = BB^T$, vale que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1}\binom{j-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1}\binom{j-1}{(j-1)-(k-1)}$. Pela fórmula de Euler temos que $c_{ij} = \binom{(i-1)+(j-1)}{j-1}$ e portanto $A = BB^T$. Observando que B é uma matriz triangular superior com diagonal composta de 1's e $\det A = \det B \det B^T = (\det B)^2$, temos que $\det A = 1$.

Problema 2. Vamos provar por indução em b. Primeiro observemos que se A é "padre", então $A - t$ também é para qualquer $t \in \mathbb{Z}$. Agora vamos analisar alguns casos:

Se $b = 2a$ temos que $m.d.c.(a, b) = a$ e portanto $a + b - 3d = 0$ e $a + b - 2d = a$ e portanto o resultado segue. Observemos que esse caso inclui o caso base da indução, $a = 1, b = 2$.

Vamos supor agora que $b \neq 2a$. Temos que $2a - 0 \in A$ e portanto $0, a, b - a \in A - a$. Logo, existem 3 elementos distintos em $A - a$. Observemos que $m.d.c.(a, b) = m.d.c.(a, b - a)$ e assim podemos aplicar a hipótese de indução para o par $(a, b - a)$, caso $b - a > a$, ou para o par $(b - a, a)$, caso $b - a < a$. Em ambos os casos obtemos que

$$a + (b - a) - 3d \in A - a$$
$$a + (b - a) - 2d \in A - a$$

E portanto

$$a + b - 3d \in A$$
$$a + b - 2d \in A$$

O que conclui a demonstração.

Problema 3.

Como a,b e c são lados de triângulos, podemos fazer $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$. Logo, o problema equivale a $\sum_{cic} \sqrt{\frac{(4x+3y+z)(4x+3z+y)}{(2x+3y+z)(2x+3z+y)}} \geq 4$. Vamos mostrar que $\sqrt{\frac{(4x+3y+z)(4x+3z+y)}{(2x+3y+z)(2x+3z+y)}} \geq \frac{2x+y+z}{x+y+z}$. Elevando ao quadrado e abrindo tudo queremos mostrar que:

$$(2x + 2x + 3y + z)(2x + 2x + 3z + y)(x + y + z)^2 - (x + x + y + z)^2(2x + 3y + z)(2x + 3z + y) \geq 0$$

$$\iff 2x(2x)(x + y + z)^2 + 2x(2x + 3z + y)(x + y + z)^2 + 2x(2x + 3y + z)(x + y + z)^2 -$$
$$-x^2(2x + 3y + z)(2x + 3z + y) - 2x(x + y + z)(2x + 3y + z)(2x + 3z + y) \geq 0.$$

Veja que cancelamos a parcela $(2x + 3y + z)(2x + 3z + y)(x + y + z)^2$. Dividindo por $x > 0$, queremos mostrar que:

$$4x(x + y + z)^2 + 2(x + y + z)^2(4x + 4y + 4z) - (2x + 3y + z)(2x + 3z + y)(x + 2(x + y + z)) \geq 0$$

$$\iff 4x(x + y + z)^2 + 8(x + y + z)^3 - (2x + 3y + z)(2x + 3z + y)(3x + 2z + 2y) \geq 0$$

$$\iff 4(x + y + z)^2(3x + 2y + 2z) - (2x + 3y + z)(2x + 3z + y)(3x + 2z + 2y) \geq 0$$

$\iff (3x + 2y + 2z)(y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0 \iff (3x + 2y + 2z)(y - z)^2 \geq 0$, o que é sempre verdade pois $x > 0$,$y > 0$ e $z > 0$ e $(y - z)^2 \geq 0$.

Logo, segue que $\sum_{cic} \sqrt{\frac{(4x+3y+z)(4x+3z+y)}{(2x+3y+z)(2x+3z+y)}} \geq \sum_{cic} \frac{2x+y+z}{x+y+z} = 4$, como queríamos.

Problema 4. Veja que $\lim\limits_{T\to\infty} T = \infty$. Note também que: $\int_0^T \sqrt{1+f'(x)^2}dx \geq \int_0^T \sqrt{1}dx = T$. Logo $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \infty$. Então, podemos usar a regra de L'Hôpital. Derivando a integral em relação a T, pelo teorema fundamental do Cálculo, obtemos $\sqrt{1+f'(T)^2}$ e derivando o denominador em relação a T, temos que o resultado é 1.

Então, se existir $\lim\limits_{T\to\infty} \sqrt{1+f'(T)^2}$, vale que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \lim_{T\to\infty} \sqrt{1+f'(T)^2}.$$

Temos que $f'(T) = \frac{cos(T).T-sen(T)}{T^2}$. Pelo teorema do Sanduíche, tanto $\frac{cos(T)}{T}$ como $\frac{sen(T)}{T^2}$ tendem a zero quando $T \to \infty$. Logo, $\lim\limits_{T\to\infty} f'(T) = 0$. Portanto, $\lim\limits_{T\to\infty} \sqrt{1+f'(T)^2} = 1$. Concluímos que $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{1+f'(x)^2}dx = 1$.

Problema 5. Vamos considerar uma função de direção f_d, num universo com d dígitos. Seja k_d o menor inteiro tal que para toda função de direção se existem k_d reais compatíveis com f_d então existem infinitos. É fácil perceber que $k_2 = 3$. Queremos encontrar $k = k_{10}$.

Vamos considerar uma função de direção $f = f_{10}$, tal que existam apenas finitos reais compatíveis com f. Denotaremos por $g(i)$ a quantidade de reais compatíveis com f que começam por i. Desse modo temos que $g(i) = \sum\limits_{j=0}^{9} f(i,j)g(j)$ pois um real que começa com i pode ter como segundo dígito todo j tal que $f(i,j) = 1$ e a partir do segundo dígito a escolha dos próximos é equivalente a quando o real começa com j.

Repare que se, para algum i, $f(i,j) = 0$ para todo j então $g(i) = 0$ e reciprocamente se $g(i) = 0$ então podemos fazer $f(j,i) = f(i,j) = 0$ sem diminuirmos o número de reais compatíveis. Vamos supor então que $f(i,j) = 1$ apenas quando $g(i) \neq 0$ e $g(j) \neq 0$.

Temos dois casos:

i) Se para cada j existe i tal que $f(i,j) = 1$, então só poderemos ter $f(i,j) = 1$ para esses 9 valores de (i,j) (senão $\sum\limits_{i=0}^{9} g(i) = \sum\limits_{i=0}^{9}\sum\limits_{j=0}^{9} f(i,j)g(j) > \sum\limits_{j=0}^{9} g(j)$) e então $g(i) = 1$ $\forall i$ e existem exatamente 10 reais compatíveis, logo $k_{10} \geq 11$. (Com argumento análogo para o caso com d dígitos obtemos $k_d \geq d+1$)

ii) Existe j tal que para todo i vale $f(i,j) = 0$ e o dígito j só aparece na primeira casa decimal. Sem perdas supomos $j = 9$. Temos dois tipos de reais compatíveis: os x que não possuem 9 na representação decimal e os da forma $(9+x)/10$, assim $(k_{10}-1) \leq max\{2(k_9-1), 10+1\}$.

Com argumento análogo para o caso com d dígitos obtemos $(k_d-1) \leq max\{2(k_{d-1}-1), d+1\}$. Como $k_{d-1} \geq d$, $2(k_{d-1}-1) \geq 2d-2 \geq d+1$ para $d \geq 3$ e $(k_d-1) \leq 2(k_{d-1}-1)$ para $d \geq 3$.

Concluímos que $(k_{10}-1) \leq 2^8(k_2-1)$ e $k_{10} \leq 2^9+1 = 513$. Para mostrar a igualdade basta mostrar que existe um função de direção f com exatamente 2^9 reais compatíveis.

Se $f : D \times D \to$\{0,1\} é tal que $f(i,j) = 1$ se e só se $j < i$ ou $j = i = 0$ então para todo subconjunto de $\{1,\ldots,9\}$ existe um real compatível com f associado a esse subconjunto (por exemplo, $0,9743$ está associado a $\{3,4,7,9\}$) e é fácil perceber que esses são os únicos reais compatíveis. Então para essa função de direção temos exatamente 2^9 reais compatíveis.

Obs.: Para obter $k_2 = 3$ podemos usar que se $f_2(i,j) = 1$ para pelo menos 3 valores de (i,j) então f_2 tem infinitos reais compatíveis e se $f_2(i,j) = 1$ para dois valores, f_2 tem exatamente 2 reais compatíveis. Por exemplo a função f_2:\{0,1\}×\{0,1\} $\to$ \{0,1\} dada por $f_2(0,0) = f_2(1,0) = 1$ e $f_2(0,1) = f_2(1,1) = 0$ tem somente 0 e 0,1 como reais compatíveis e se mudarmos $f_2(1,1)$ para 1 temos que 0,11...1 é compatível com f_2 para qualquer quantidade de uns.

Problema 6. Como $(x-1)^{k+1}$ divide $p(x)$ temos que $p^{(i)}(1) = 0$ para $0 \leq i \leq k$, onde $p^{(i)}$ representa a i-ésima derivada de p. Seja $f_0(x) = 1$ e $f_i(x) = (x-(i-1))f_{i-1}(x)$, para $1 \leq i \leq k$. Temos que $\sum_{j=0}^{n} a_j f_m(j) = 0$, para $0 \leq m \leq k$. Observemos que todo polinômio de grau k pode ser escrito como combinação linear de f_i. De fato, igualando uma combinação linear de f_i com um polinômio qualquer nos pontos 0, 1, ..., k obtemos um sistema linear possível e determinado nos coeficientes da combinação linear.

Sendo g um polinômio qualquer de grau k temos, pela conclusão acima, que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j g(j) = 0$$

Sabemos que o polinômio de Chebyshev T_{2k} é par de grau $2k$. Tomemos então o polinômio de grau k dado por $T_{2k}(\sqrt{\frac{x}{n-1}})$. Temos então que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j T_{2k}(\sqrt{\frac{j}{n-1}}) = 0$$

Temos então que

$$|T_{2k}(\sqrt{\frac{n}{n-1}})| = |\sum_{j=0}^{n-1} a_j T_{2k}(\sqrt{\frac{j}{n-1}})|$$

$$|T_{2k}(\sqrt{\frac{n}{n-1}})| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j T_{2k}(\sqrt{\frac{j}{n-1}})|$$

$$|T_{2k}(\sqrt{\frac{n}{n-1}})| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$$

Temos que

$$T_{2k}(\sqrt{\frac{n}{n-1}}) = \frac{(\sqrt{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{\frac{1}{n-1}})^{2k} + (\sqrt{\frac{n}{n-1}} + \sqrt{\frac{1}{n-1}})^{2k}}{2}$$

$$T_{2k}(\sqrt{\frac{n}{n-1}}) \geq (1 + \frac{1}{n-1})^k + \binom{2k}{2} \frac{1}{n-1}(1 + \frac{1}{n-1})^{k-1}$$

$$T_{2k}(\sqrt{\frac{n}{n-1}}) \geq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k(2k-1)}{n} = 1 + \frac{2k^2}{n}$$

Portanto

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \geq 1 + \frac{2k^2}{n}$$

CIIM 2013

Problema 1. (a) Seja c o número de algarismos de n e d o número de algarismos de n. Então, queremos mostrar que existem infinitos inteiros k tais que:

$$(m + n.10^{-c})(n + m.10^{-d}) = k \iff (10^c m + n)(10^d n + m) = 10^{c+d}k$$

Analisando a equação acima módulo 3, como $10 \equiv 1 \pmod 3$, seque que $(m+n)^2 \equiv k \pmod 3$. Como $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$, basta escolher $k \equiv 2 \pmod 3$ que não teremos solução.

(b) Sejam a e b ímpares e t tal que

$$10^{a-1} < 2^t < 10^a$$
$$10^{b-1} < 5^t < 10^b$$

Sabemos que existem infinitas ternas (a, b, t) satisfazendo essa propriedade. Temos também que

$$10^{a+b-2} < 10^t < 10^{a+b}$$

Portanto $t = a + b - 1$. Assim precisamos achar os pares (a, b) satisfazendo

$$10^{a-1} < 2^{a+b-1} < 10^a$$
$$10^{b-1} < 5^{a+b-1} < 10^b$$

Que é equivalente a

$$2 \times 5^a > 2^b > 5^{a-1}$$
$$\Leftrightarrow a \log 5 > (b-1)\log 2, (a-1)\log 5 < b \log 2$$
$$\Leftrightarrow a\frac{\log 5}{\log 2} + 1 > b > (a-1)\frac{\log 5}{\log 2}$$

Como $a\frac{\log 5}{\log 2} + 1 - (a-1)\frac{\log 5}{\log 2} > 1$, temos que para qualquer a inteiro, existe um número inteiro no intervalo $((a-1)\frac{\log 5}{\log 2}, a\frac{\log 5}{\log 2} + 1)$ e portanto existe o b inteiro desejado.

Tomemos $m = 2^t 10^{a-1}$ e $n = 5^t 10^{b-1}$. Temos então que

$$\overline{m, n} = 2^t 10^{a-1} + 5^t 10^{-b}$$
$$\overline{n, m} = 5^t 10^{b-1} + 2^t 10^{-a}$$

Assim temos que

$$\overline{n, m} \times \overline{m, n} = (2^t 10^{a-1} + 5^t 10^{-b})(5^t 10^{b-1} + 2^t 10^{-a})$$
$$\overline{n, m} \times \overline{m, n} = 10^t 10^{a+b-1} + \frac{4^t + 25^t + 1}{10}$$

Observemos que t é ímpar e portanto $4^t \equiv 4 (mod 5)$ e $25^t \equiv 1 (mod 2)$. Dessa forma vemos que $\frac{4^t+25^t+1}{10}$ é inteiro. Portanto temos que para os números da forma

$$k = 10^t 10^{a+b-1} + \frac{4^t + 25^t + 1}{10}$$

A equação $\overline{n, m} \times \overline{m, n} = k$ possui solução. Fazendo a e b variarem dentre todos os inteiros ímpares possíveis satisfazendo as condições estabelecidas inicialmente obtemos infinitos valores para k satisfazendo a condição desejada.

Problema 2. Observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{(x-m)^2}{n} + 1} dx = \sqrt{n}\pi, m \in \mathbb{R}$$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as raízes de p. Temos por Cauchy-Schwarz

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-x_k})^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x-x_k|^2}$$

Agora observemos que a função $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ é crescente nos reais positivos. Temos então que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p'(x))^2 + (p(x))^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\frac{p'(x)}{p(x)})^2}{(\frac{p'(x)}{p(x)})^2 + 1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p'(x))^2 + (p(x))^2} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{|x-x_k|^2}}{n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x-x_k|^2} + 1}$$

Além disso temos que

$$\frac{\frac{n}{|x-x_j|^2}}{n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x-x_k|^2} + 1} \leq \frac{\frac{n}{|x-x_j|^2}}{n\frac{1}{|x-x_j|^2} + 1} = \frac{n}{n + |x-x_j|^2} < \frac{n}{n + (x - \Re x_j)^2}$$

Juntando tudo temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p'(x))^2 + (p(x))^2} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n}\pi = n^{3/2}\pi$$

Problema 3. Vamos olhar o seguinte problema que implica o resultado desejado:

Seja G um grafo com vértices $V(G) = A \cup B, |A| = |B| = n$ que não possui C_4 induzido. Suponha que $e(G) > cn^2$ para alguma constante $c > 0$. Vale então que $w(G) > kn$ para alguma constante $k > 0$, onde $w(G)$ é o tamanho do maior clique que existe em G.

De fato esse problema implica o desejado pois tomando $N(m) = \frac{2m}{k}$ temos que existe K_{2m} em G. Como os vértices desse K_{2m} pertencem a $A \cup B$ temos que pelo menos uma das partes possui pelo menos m vértices na interseção com esse K_{2m}.

Vamos agora provar o resultado. Primeiro precisamos de um

Lema 0.1. *Para um grafo G sem C_4 induzido vale que $w(G) \geq c_1 d_{avg}(G)^2 n^{-1}$ para alguma constante $c_1 > 0$, onde $n = |V(G)|$.*

Demonstração. Primeiro relembremos que para todo grafo G existe um subgrafo induzido H com $\delta(H) \geq \frac{d_{avg}(G)}{2}$ e $d_{avg}(H) \geq d_{avg}(G)$. Com esse resultado podemos supor que o próprio grafo G possui a propriedade $\delta(G) \geq \frac{d_{avg}}{2}$. De fato, suponha que o resultado vale para o subgrafo induzido H. Então vale

$$w(G) \geq w(H) \geq \frac{c_1 d_{avg}(H)^2}{|V(H)|} \geq \frac{c_1 d_{avg}(G)}{|V(G)|}$$

Vamos a partir de agora então assumir que $\delta(G) \geq d_{avg}(G)$. Fizemos um conjunto S independente com $|S| = t$. Escrevamos $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ e A_i os vizinhos de x_i. Seja $k = \max_{i \neq j} A_i \cap A_j$. Como G não possui C_4 induzido temos que $G[A_i \cap A_j]$ é um grafo completo pois $(x_i, x_j) \notin E(G)$. Portanto $k \leq w(G)$. Como $|A_i| \geq \frac{d_{avg}(G)}{2}$ temos que

$$t\frac{d_{avg}(G)}{2} - \binom{t}{2}k \leq \sum_{1 \leq i \leq t} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq t} |A_i \cap A_j| \leq |\cup_{1 \leq i \leq t} A_i| \leq n$$

o que implica

$$w(G) \geq k \geq \frac{t\frac{d_{avg}(G)}{2}}{\binom{t}{2}}$$

Vamos separar agora em dois casos:

Se $\alpha(G) \geq \frac{4n}{d_{avg}(G)}$, então, tomando t o menor inteiro maior ou igual a $\frac{4n}{d_{avg}(G)}$, vale

$$w(G) \geq \frac{n}{\binom{4n/d_{avg}(G)+1}{2}} = \frac{n d_{avg}(G)^2}{(4n + d_{avg}(G))(2n)} \geq \frac{d_{avg}(G)^2}{(5n)(2)} = 0.1 d_{avg}(G)^2 n^{-1}$$

Se $\alpha(G) \leq \frac{4n}{d_{avg}(G)}$, então $\alpha(G)$ é menor ou igual que o piso de $\frac{4n}{d_{avg}(G)}$. Vamos mostrar que $w(G) \geq \frac{n}{\binom{\alpha(G)+1}{2}}$. Selecionemos um conjunto independente S de tamanho $\alpha(G)$. Temos então que os conjuntos $A_i \cap A_j$ e $B_i \cup \{x_i\}$ cobrem $V(G)$, onde B_i é o conjunto de vértices que possuem apenas x_i como vizinho em S. Como vimos antes $A_i \cap A_j$ espande um subgrafo completo. Temos que $B_i \cup \{x_i\}$ também é um grafo completo pois caso não fosse poderiamos tomar dois vértices em B_i que não são vizinhos e substituir x_i por esses dois vértices em S e obter um conjunto independente de tamanho $\alpha(G)+1$, o que é um absurdo. Temos então que

$$w(G) \geq \frac{n}{\binom{\alpha(G)+1}{2}} \geq \frac{n}{\binom{4n/d_{avg}(G)+1}{2}}$$

E, como antes, concluímos que

$$w(G) \geq 0.1 d_{avg}(G)^2 n^{-1}$$

□

Como $e(G) > cn^2$ e $d_{avg}(G) = \frac{2e(G)}{2n} = \frac{e(G)}{n}$ temos que $d_{avg}(G) > cn$ e pelo Lema concluímos que $w(G) > \frac{c^2 c_1 n}{2}$.

Problema 4. Vamos mostrar que $\frac{dF}{dx} \geq 0$, $\frac{dF}{dy} \leq 0$, $\frac{dG}{dx} \leq 0$, $\frac{dG}{dy} \geq 0$ que claramente implica o resultado desejado.

$$\frac{1}{F} - x\frac{dF}{dx}\frac{1}{F^2} = a_1 + c_1\frac{dG}{dx}$$
$$-x\frac{dF}{dy}\frac{1}{F^2} = b_1 + c_1\frac{dG}{dy}$$
$$-y\frac{dG}{dx}\frac{1}{G^2} = a_2 + c_2\frac{dF}{dx}$$
$$\frac{1}{G} - y\frac{dG}{dy}\frac{1}{G^2} = b_2 + c_2\frac{dF}{dy}$$

Observemos das equações iniciais do problema, lembrando que $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, F, G > 0$, temos que

$$\frac{1}{G} - b_2 > 0$$
$$\frac{1}{F} - a_1 > 0$$

Multiplicando as duas equações sobtemos também que

$$\frac{xy}{FG} > c_1 c_2 FG$$

Usando as equações diferenciais e fazendo as devidas substituições obtemos

$$[c_1 - \frac{xy}{c_2 F^2 G^2}]\frac{dG}{dy} = \frac{-x}{F^2}[\frac{1}{c_2}(\frac{1}{G} - b_2)] - b_1 < 0 \Rightarrow \frac{dG}{dy} > 0$$

Da segunda equação diferencial temos que $\frac{dF}{dy} < 0$

$$[c_2 - \frac{xy}{c_1 F^2 G^2}]\frac{dF}{dx} = \frac{-y}{G^2}[\frac{1}{c_1}(\frac{1}{F} - a_1)] - a_2 < 0 \Rightarrow \frac{dF}{dx} > 0$$

Da terceira equação diferencial temos que $\frac{dG}{dx} < 0$

Problema 5. Para a questão usaremos o seguinte

Teorema 0.2. *Seja C uma matriz. Então $tr(C) = 0$ se, e somente se, existem matrizes X e Y tais que*

$$C = XY - YX$$

$(\Rightarrow)$: Aplicando traço dos dois lados da igualdade, obtemos

$$tr(B) = tr(S(A+T)S^{-1} - T) = tr(S(A+T)S^{-1}) - tr(T)$$
$$tr(A+T) - tr(T) = tr(A) + tr(T) - tr(T) = tr(A)$$

$(\Leftarrow)$: Tomemos no Teorema $C = A - B$. Logo $tr(A - B) = 0$ e portanto existem matrizes X e Y tais que

$$(A - B) = XY - YX \Leftrightarrow XY - A = YX - B = T$$

Como trocar X por $X - \lambda I$ não altera $XY - YX$, podemos assumir que X é invertível. Obtemos que

$$A + T = XY$$
$$B + T = YX$$

E portanto

$$X^{-1}(A+T)X = (B+T)$$

Tomando $X = S^{-1}$ obtemos o resultado na forma desejada.

Problema 6. *Primeira Solução:* Seja X^n o conjunto de todas as n-uplas em X. Seja $\mathcal{F} = \cup_{n\in\mathbb{N}} X^n$. Seja $F \in \mathcal{F}$, com $F = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vamos definir $f_F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x)$. Como X é conexo e compacto temos que a imagem de f_F é um intervalo fechado, digamos $[a_F, b_F]$. Queremos então provar que $\cap_{F\in\mathcal{F}}[a_F, b_F] \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\forall F, G \in \mathcal{F}, G = (y_1, \ldots, y_m)$ vale $a_F \leq b_G$, o que claramente é suficiente para mostrarmos o resultado desejado.

Da definição de a_F e b_F temos que

$$a_F \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_i) \leq b_F, \forall i$$

Portanto basta provarmos que existem i e j tais que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_i) \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} d(y_k, x_j)$$

Vamos assumir por absurdo que não existam tais i e j. Temos então que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_i) > \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} d(y_k, x_j), \forall i, j$$

Somando as desigualdades de $i, j = 1$ até $i = m, j = n$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_i) > \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} d(y_k, x_j)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_i) > \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(y_k, x_j)$$

Como d é simétrico chegamos a um absurdo. Portanto existem tais i e j, o que termina a prova.

Segunda Solução: Consideremos um jogo de soma zero de dois jogadores onde cada um escolhe independentemente um ponto do espaço e o ganho é a distância entre eles. Pelo Teorema de Glicksberg o jogo tem um valor e uma estratégia ótima. Chamemos esse valor de α. Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma coleção finita qualquer de pontos em X. Considere a estratégia mista do minimizador que dá peso $1/n$ a cada um desses pontos. Temos então, quando a estratégia é ótima ou não, por continuidade, compacidade e definição de valor de um jogo

$$\max_P \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_1, P) \geq \alpha$$

Claramente o maximizador pode usar a mesma estratégia e portanto

$$\min_P \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_1, P) \leq \alpha$$

As funções em P nas duas desigualdades são a mesma e como a imagem de uma função contínua de um conjunto conexo é conexo, temos que existe um ponto x onde a igualdade é atingida. Portanto

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_1, x) = \alpha$$

CIIM 2014

Problema 1. Por simplicidade vamos considerar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := g(x+2013)$. É claro que assim obtemos $f(0) = f(1) = 0$ e $f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a) + f(b)$ para quaisquer $a, b \in [0,1]$.

Por indução em n, temos que $f(\frac{k}{2^n}) \leq 0$ para todo k inteiro $(1 \leq k \leq 2^n)$. Pois $f(\frac{1}{2}) \leq f(0) + f(1) = 0, f(\frac{1}{4}) \leq f(0) + f(\frac{1}{2}) \leq 0$ e $f(\frac{3}{4}) \leq f(\frac{1}{2}) + f(1) \leq 0$. Supondo a hipótese de indução válida pra n, então a hpótese para n+1 é óbvia para k par e com k ímpar (k=2t+1) temos $f(\frac{2t+1}{2^{n+1}}) \leq f(\frac{t}{2^n}) + f(\frac{t+1}{2^n}) \leq 0$.

Por outro lado, pondo b=0 na inequação original, obtemos $f(\frac{a}{2}) \leq f(a)$ para todo $a \in [0,1]$. E, para todo $x \in [0, \frac{2}{3}]$, $f(\frac{3x}{2}) + f(\frac{x}{2}) \geq f(x) \Rightarrow f(\frac{3x}{2}) \geq f(x) - f(\frac{x}{2}) \geq 0$. Escolhendo $\frac{3x}{2} = \frac{k}{2^n}$ temos que $f(\frac{k}{2^n}) \geq 0$ para todo n inteiro e todo k inteiro com $1 \leq k \leq 2^n$.

Como $f(\frac{k}{2^n}) \leq 0$ e $f(\frac{k}{2^n}) \geq 0$, então $f(\frac{k}{2^n}) = 0$ e o conjunto dos $\frac{k}{2^n}$ é claramente denso em [0,1], donde o resultado segue.

Problema 2. Seja F o corpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Vamos analisar os conjuntos de n elementos de F^n (aqui visto como espaço vetorial sobre F) que formam uma base. A ideia é simples: existem $(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\dots(p^n-p^{n-1})$ n-uplas de vetores de F^n que formam uma base, então existem $\frac{(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\dots(p^n-p^{n-1})}{n!}$ conjuntos que formam uma base. Vamos separá-los em grupos com $(p-1)^n$ conjuntos cada e então $(p-1)^n | \frac{(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\dots(p^n-p^{n-1})}{n!}$, o que implica que $(p-1)^n n! | (p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\dots(p^n-p^{n-1})$.

Para cada conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ que é uma base de F^n, cada um dos conjuntos $\{\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n\}$ (com $\alpha_i \in \{1, \dots, p-1\}$) também é base. Assim, temos os $(p-1)^n$ conjuntos que formam base e estão na mesma "classe"que $\{v_1, \dots, v_n\}$ e o resultado segue.

Problema 3. Dizemos que um conjunto $A \in \mathcal{A}$ possui uma cobertura de tamanho 2 se existem $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ tais que $A \subset A_i \cup A_j$ (não necessariamente $A_i \neq A_j$). Tomemos $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que A não possui cobertura de tamanho 2 com $|A|$ é mínimo. Consideremos agora a família de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ dada por $\mathcal{F} = \mathcal{A} \cap A$. Como A não possui cobertura de tamanho 2, temos que se $X \in \mathcal{F}$, então $A - X \notin \mathcal{F}$. Portanto $|\mathcal{F}| \leq 2^{|A|-1}$.

Seja agora o conjunto $B = \{1, 2, \dots, n\} - A$ e tomemos a família $\mathcal{G} = \mathcal{A} \cap B$. Vamos mostrar que se $X \in \mathcal{G}$, então $B - X$ não pertence a $\mathcal{G}$. Vamos supor por absurdo que existe $X = A_l \cap B \in \mathcal{G}$ tal que $B - X = A_m \cap B \in \mathcal{G}$. Da definição de A temos que existem i, j, k tais que $A_i \cup A_j = A - \{k\}$. Temos então que $|A_i \cup A_j \cup A_l \cup A_m| = n-1$, o que é um absurdo. Temos então que $|\mathcal{G}| \leq 2^{n-|A|-1}$.

Como cada conjunto em $\{1, 2, \dots, n\}$ pode ser unicamente determinado pela intersecção com A e B, temos que $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{F}||\mathcal{G}| \leq 2^{|A|-1} 2^{n-|A|-1} = 2^{n-2}$.

Problema 4. Ao longo desta solução $[a, b]$ irá denotar o mmc entre a e b, enquanto (a, b), o mdc entre a e b. Um fato bastante conhecido é que $[a, b](a, b) = ab$. Além disso, pelo Teorema de Bezout, (a, b) é a menor (em módulo) das combinações lineares de a e b. Em particular, $(a, b) \leq |b - a|$.

Assim, $\frac{1}{[a,b]} = \frac{(a,b)}{ab} \leq \frac{|b-a|}{ab}$ e, se $b > a$, $\frac{1}{[a,b]} \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Desse modo $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]} \leq \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{k+1}}$ e $s_k \leq \frac{1}{a_1}$, donde concluímos que s_k converge, pois é uma sequência estritamente crescente e limitada.

Problema 5. Vamos usar os seguintes fatos:

- $\cos\sqrt{z}$ é uma função inteira (analítica em todo o plano complexo). Podemos verificar isso pelas equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{idf}{dx} = \frac{df}{dy}$$

Para $f = \cos\sqrt{z} = \frac{e^{i\sqrt{z}} + e^{-i\sqrt{z}}}{2}$ temos

$$\frac{idf}{dx} = i[\frac{i}{4\sqrt{x+iy}} e^{i\sqrt{z}} i - \frac{i}{\sqrt{x+iy}} e^{-i\sqrt{z}}]$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{i^2}{4\sqrt{x+iy}} e^{i\sqrt{z}} i - \frac{i^2}{\sqrt{x+iy}} e^{-i\sqrt{z}}$$

De onde se verificam as equações de Cauchy-Riemann.

- $\cos 2\pi ix = \cosh 2\pi x$
- Se f é uma função inteira (holomorfa em todo o plano complexo), então $\overline{f(\overline{z})}$ também é uma função inteira, o que segue das equações de Cauchy-Riemann.

a) Vamos usar que $x^2 + ix - 1/4 = (x + i/2)^2$. Temos que $f(z) = \cos 2\pi\sqrt{1/4 - z}$ é uma função inteira. Para $w = x^2 + ix$ temos que

$$f(w) = \cos 2\pi\sqrt{-(x + i/2)^2} = \cos 2\pi i(x + i/2) =$$
$$\cos(2\pi ix - \pi) = -\cos 2\pi ix = -\cosh 2\pi x$$

que é um número real para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Seja f uma função interessante. Tomemos a função $g(z) = \overline{f(\overline{-z - z^2})}$. Como $f(-z - z^2)$ é uma função inteira, temos que $g(z)$ também é. Vamos observar agora $h(z) = f(z - z^2) - \overline{f(\overline{-z - z^2})}$. Pelas observações anteriores temos que h é uma função inteira. Tomemos $z \in \mathbb{I}, z = ix, x \in \mathbb{R}$. Temos que $h(ix) = f(x^2 + ix) - \overline{f(\overline{x^2 - ix})} = f(x^2 + ix) - \overline{f(x^2 + ix)}$ e como f na parábola $\Re x = (\Im z)^2$ é real temos que $h(ix) = 0$. Isso implica que f é uma função inteira e limitada pois tomando $x \to \infty$ temos que a função tende a zero, e pelo Teorema de Liouville temos que ela é constante. Logo vale a igualdade $f(z - z^2) = \overline{f(\overline{-z - z^2})}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Temos então que

$$(1 - 2z)f'(z - z^2) = \overline{(-1 - 2z)}\,\overline{f'(\overline{-z - z^2})}$$

Para $z = -1/2$ obtemos

$$2f'(-3/4) = 0 \Rightarrow f'(-3/4) = 0$$

Problema 6.

a Temos duas possibilidades

i Para todo $\delta > 0$ existem n, k inteiros positivos tais que

$$|\{1 \le s \le k | \exists j, 1 \le j \le k, x_{n+j} \in [\frac{s-1}{k}, \frac{s}{k}]\}| < \delta k$$

Nesse caso tomaremos $C = 1$. De fato, dado $r \ge 1$ tomamos $\delta = 1/r$. Dados n, k inteiros positivos tais que $|\{1 \le s \le k | \exists j, 1 \le j \le k, x_{n+j} \in [\frac{s-1}{k}, \frac{s}{k}]\}| < \delta k = k/r$, para algum s com $1 \le s \le k$ existirão mais que r valores de j com $1 \le j \le k$ tais que $x_{n+j} \in [\frac{s-1}{k}, \frac{s}{k}]$. Portanto existem $1 \le j_1 < j_1 + r \le j_2 \le k$ tais que $x_{n+j_1}, x_{n+j_2} \in [\frac{s-1}{k}, \frac{s}{k}]$. Logo $(n + j_2) - (n + j_1) = j_2 - j_1 \ge r$ e $|x_{n+j_2} - x_{n+j_1}| \le 1/k \le 1/(j_2 - j_1)$ e portanto

$$((n + j_2) - (n + j_1))|x_{n+j_2} - x_{n+j_1}| \le 1 = C$$

ii Existe $\delta \in (0, 1)$ tal que para quaisquer n, k inteiros positivos temos

$$|\{1 \le s \le k | \exists j, 1 \le j \le k, x_{n+j} \in [\frac{s-1}{k}, \frac{s}{k}]\}| \ge \delta k$$

Nesse caso tomaremos $C = 1 + 2/\delta$. Seja v o maior inteiro menor ou igual a $1/\delta$. Dado $r \ge 1$ inteiro consideremos, para $0 \le i \le v$, os conjuntos $A_i := \{2ir + j, 1 \le j \le r\}$ e $X_i = \{1 \le s \le r | \exists t \in A_i, x_t \in [\frac{s-1}{r}, \frac{s}{r}]\}$. Como $|X_i| \ge \delta r$ e $(v + 1)\delta r > r$, existem $0 \le i_1 < i_2 \le v$ tais que $X_{i_1} \cap X_{i_2} \ne \emptyset$. Se $s \in X_{i_1} \cap X_{i_2}$, então existem $t_1 \in A_{i_1}$ e $t_2 \in A_{i_2}$ tais que $x_{t_1}, x_{t_2} \in [\frac{s-1}{r}, \frac{s}{r}]$ e portanto $|x_{t_2} - x_{t_1}| \le 1/r$. Por outro lado, $r \le t_2 - t_1 \le (2v + 1)r$ e portanto

$$(t_2 - t_1)|x_{t_2} - x_{t_1}| \le 2v + 1 \le 1 + 2/\delta = C$$

b Tomemos $r = \lceil 6C \rceil$. Definamos a seguinte sequência:

$$x_n = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \sqrt{2} - \left\lfloor \frac{n}{r}\sqrt{2} \right\rfloor$$

Observemos que $x_n \in [0, 1)$ $(0 \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \sqrt{2} - \lfloor \frac{n}{r}\sqrt{2} \rfloor < \frac{n}{r}\sqrt{2} - (\frac{n}{r}\sqrt{2} - 1) = 1)$ e que se p é inteiro e q inteiro positivo, então $|q\sqrt{2} - p| > \frac{1}{3q}$. De fato, para $q = 1$ temos $|\sqrt{2} - p| > |\sqrt{2} - 1| > \frac{1}{3}$. Para $q \geq 2$ observemos que $|q\sqrt{2} - p||q\sqrt{2} + p| = |2q^2 - p^2| \geq 1$. Vamos agora supor por absurdo que $|q\sqrt{2} - p| \leq \frac{1}{3q}$. Temos que $|q\sqrt{2} + p| \leq 2q\sqrt{2} + |q\sqrt{2} - p| \leq 2q\sqrt{2} + \frac{1}{3q}$ que é menor que $3q$ para $q \geq 2$. Dessa forma concluímos que $|q\sqrt{2} - p||q\sqrt{2} + p| < 3q\frac{1}{3q} = 1$, o que é um absurdo.

Temos então que, para $n \geq m + r$, $1 \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \lfloor \frac{m}{r} \rfloor < \frac{n-m}{r} + 1 < \frac{2(n-m)}{r}$.

Portanto $(n - m)|x_n - x_m| = (n - m)|(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \lfloor \frac{m}{r} \rfloor)\sqrt{2} - (\lfloor \lfloor \frac{n}{r}\sqrt{2} \rfloor \rfloor - \lfloor \lfloor \frac{m}{r}\sqrt{2} \rfloor \rfloor)| > \frac{n-m}{3(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \lfloor \frac{m}{r} \rfloor)} > \frac{r}{6} \geq C$.

CIIM 2015

Problema 1. A função $g(x) = -x - x^2$ é simétrica com respeito ao ponto $-0,5$. Essa função cresce até $x = -0,5$ e decresce depois. Como a função exponencial é crescente, o mesmo vale para $f(x) = e^{g(x)}$. Assim, a integral atinge seu máximo quando o intervalo $[a, a+8]$ é centrado em $-\frac{1}{2}$, ou seja, quando $a = -\frac{9}{2}$.

Problema 2. Seja $f(x) = x^3 - 2$. Queremos achar os polinômios P que comutam com f. Claramente os polinômios $f^{(n)}(x) = f \circ f \circ \cdots \circ f(x)$, com n natural, satisfazem a essa relação. Vamos mostrar que esses são os únicos polinômios possíveis além de um possível polinômio constante. Para tal vamos primeiro mostrar que $P(x) = Q(x^3)$ para algum polinômio Q, quando P não é constante.

Primeiro, chamando $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_n \neq 0$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x^3 - 2)^k = (\sum_{k=0}^{n} a_k x^k)^3 - 2$$

Do lado esquerdo da equação temos um polinômio em x^3, então do lado direito todos coeficientes de x^t com t não múltiplo de 3 tem que ser nulos. Igualando os coeficientes dos dois lados temos que, supondo $a_0 \neq 0$, o coeficiente de x^1 é $3a_1 a_0^2 = 0$, logo $a_1 = 0$. Por indução, se $a_t = 0$ para todos t de 1 a k não múltiplos de 3, então para o próximo t não múltiplo de 3 também teremos $a_t = 0$ pois o coeficiente de x^t será $3a_t a_0^2 = 0$ (não há como fazer aparecer x^t apenas como produto de potências múltiplas de 3). Assim, os coeficientes não nulos de P(x) são apenas os múltiplos de 3 e $P(x) = Q(x^3)$.

Se $a_0 = 0$, então $P(0) = 0$ e $P \circ f^{(n)}(0) = f^{(n)} \circ P(0) = f^{(n)}(0)$ e teremos $P(x_n) = x_n$ para todos os valores de $x_n = f^{(n)}(0)$, que é uma sequência estritamente decrescente de reais ($x_0 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = -10$, $\ldots$). Como dois polinômios distintos só podem coincidir para um número finito de valores então P(0)=0 só se P(x)=x.

Podemos então supor que $P(x) = H(x^3 - 2) = H \circ f(x)$, caso P não seja identidade ou constante. De fato, tomemos $H(x) = Q(x+2)$. Dessa forma concluímos que se P comuta com f, então existe polinômio H_1 tal que $P = H_1 \circ f$. Logo, vale que $f \circ H_1 \circ f = H_1 \circ f \circ f$ e como f é bijetiva, $f \circ H_1 = H_1 \circ f$. Temos então que H_1 satisfaz à condição inicial do problema e portanto é da forma $H_1 = H_2 \circ f$ para algum polinômio H_2. Repetindo até chegarmos a um polinômio H_n de grau 1 concluimos que $P(x) = f^{(n)}(x)$.

Vamos agora analisar o caso $P(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Valeria então $c = c^3 - 2 \Leftrightarrow h(c) = c^3 - c - 2 = 0$. Essa equação do terceiro grau tem que ter um número ímpar de raízes reais e se tivesse 3 raízes teríamos derivada nula duas vezes entre suas raízes e então a equação terias sinais opostos nos dois pontos de derivada nula. Como a sua derivada $3c^2 - 1$ se anula para $\sqrt{\frac{1}{3}}$ e $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, e $h(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -2(1 + \frac{\sqrt{3}}{9}) < 0$ e $h(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = -2(1 - \frac{\sqrt{3}}{9}) < 0$, h tem apenas uma raíz e existe um único c tal que P(x)=c é solução de $P \circ f(x) = f \circ P(x)$.

Podemos resolver essa equação substituindo $c = a + \frac{1}{3a}$ e obtendo $a^3 + \frac{1}{27a^3} - 2 = 0$. Substituindo $a^3 = b$ a equação se torna $b^2 - 2b + \frac{1}{27} = 0$

As raízes dessa equação são $\frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{4}{27}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{26}{27}}$. Para calcularmos c as duas raízes acima são equivalentes e com ambas obtemos $c = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}}}$

Problema 3.

Vamos olhar as matrizes como transformções de Möbius

$$\phi_A(z) = z + 2; \phi_B(z) = \frac{z}{2z+1}$$

Vamos dividir o semiplano complexo superior Π^+ em 5 regiões

A^-: circunferência centrada em $-\frac{1}{2}$ com raio $\frac{1}{2}$.

A^+: circunferência centrada em $\frac{1}{2}$ com raio $\frac{1}{2}$.

B^-: conjunto dos pontos tais que $\Re z \leq -1$.

B^+: conjunto dos pontos tais que $\Re z \geq 1$.

C: o conjunto $\Pi^+ - (A^- \cup A^+ \cup B^- \cup B^+)$

Observemos agora que

$\phi_A(A^- \cup A^+ \cup B^+ \cup C) = B^+$
$\phi_A^{-1}(A^- \cup A^+ \cup B^- \cup C) = B^-$
$\phi_B(C \cup A^+ \cup B^+ \cup B^+) = A^+$
$\phi_B^{-1}(C \cup A^- \cup B^- \cup B^+) = A^-$

Para as duas últimas conclusões usamos a seguinte observação

$$j(z) = \frac{z}{2z+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2z+1)} \Leftrightarrow (j(z) - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

Essa transformação é semelhante à inversão no plano euclidiano na circunferência de centro $-\frac{1}{2}$ e raio $\frac{1}{2}$. Porém ela leva os vetores que teriam origem em $(-\frac{1}{2}, 0)$ (na inversão usual) nos vetores com origem em $(\frac{1}{2}, 0)$ e simétricos em relação à reta $\Re z = \frac{1}{2}$.

Queremos provar que as composições de transformações do tipo do enunciado não podem ser iguais à identidade. Para tal podemos observar aonde transformações desse tipo levam o número i. Chamemos de ϕ a transformação em questão. Observemos que se $i_0 > 0$, então $\phi(C) = B^+$, se $i_0 < 0$, então $\phi(C) = B^-$ e se $i_0 = 0$, então $\phi(C) = A^-$ ou $\phi(C) = A^+$. Como $i \in C$ temos que $\phi(i) \neq i$ e portanto $\phi \equiv id$ não pode acontecer.

Problema 4. Seja $g(x) = f(x+r) - f(x)$, que é contínua para todo $r > 0$. Suponhamos que $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Pela continuidade de g, ou temos $g(x) > 0$ para todo x, ou $g(x) < 0$ para todo x.

Se $g(x) > 0$, então $f(nr) > f((n-1)r) > \cdots > f(r) > f(0) > f(-r) > \cdots > f(-(n-1)r) > f(-nr)$ para todo inteiro positivo n e $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(nr) \geq f(r) > f(0) > f(-r) \geq \lim\limits_{n\to\infty} f(-nr) = \alpha$, uma contradição. (O caso $g(x) < 0$ é análogo)

Dessa forma $g(x)$ deve ser zero para algum x e, então, $f(x+r) = f(x)$ para algum x.

Problema 5. As operações possíveis nos permitem rodar as pessoas sentadas de 1 a n para colocarmos quem quisermos na posição 1 e nos deixam trocar de lugar as pessoas vizinhas no polígono estrelado de "tamanho" $k-1$. Isto é, sendo $P_1, \ldots, P_n$ os vértices do n-ágono regular, o poligono estrelado é $P_1 P_k P_{2k-1} \ldots P_{m(k-1)+k}$ onde os índices são tomados modulo n e m é o menor tal que $m(k-1) + k \equiv 1$ (mod n). Repare que isso ocorre para o menor t tal que $m(k-1) + k = tn + 1$, ou seja, $t = \frac{k-1}{mdc(n,k-1)}$.

A ideia é que podemos girar (k-1)u vezes no sentido horário e trocar as posições 1 e k. Isso gera as transposições do polígono estrrelado entre vizinhos e, portanto, gera todas permutações possíveis dentro de cada polígono estrelado e é fácil ver que o segundo movimento permitido só nos permite fazer essas permutações. Mas também podemos girar algumas vezes antes de considerar o polígono estrelado (assim consideramos todos polígonos estrelados de tamanho k-1) e também é claro que a permutação que podemos fazer em um polígono não interfere nas permutações que fazemos em outros polígonos.

Então, sendo L o número de polígonos estrelados distintos, temos $\frac{n}{L}$ vértices em cada polígono estrelado e o número de permutações que podemos fazer é $L((\frac{n}{L})!)^L$, pois temos L maneiras de escolher qual será a classe de polígono que estará na posição 1 e $(\frac{n}{L})!$ maneiras de permutarmos dentro de cada classe.

Como o número de vértices em cada polígono estrelado é $m + 1 = \frac{nt}{k-1} = \frac{n}{mdc(n,k-1)} = \frac{n}{L}$, $L = mdc(n, k-1)$ e temos $mdc(n, k-1)((\frac{n}{mdc(n,k-1)})!)^{mdc(n,k-1)}$ configurações distintas de pessoas na mesa.

Problema 6. Sejam $a_0 = a$ e $a_1 = a + x$, onde $a, x \in \mathbb{Z}$. Como $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ formam uma progressão aritmética, temos que

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} = \frac{x}{a(a+x)}$$
$$\frac{1}{a_2} = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

E portanto

$$\frac{1}{a_k} = \frac{a-(k-1)x}{a(a+x)}$$

Seja a progressão aritmética de inteiros $b_i = a - (n-i)x$. Temos então que $b_i | a_0 a_1$ e portanto $m.m.c.(b_1, b_2, \ldots, b_n) | a_0 a_1$. Observe que como a_i é um inteiro positivo para $0 \leq i \leq n$ temos que

$$a > (n-1)x \Rightarrow a + x < \frac{n}{n-1}a$$

$$a_0 a_1 < \frac{n}{n-1}a^2 < 2a^2$$

Da desigualdade acima também concluímos que $a > n-1$ e portanto $a \geq n$ e em particular $a_0 a_1 < a^3$

Vamos agora usar um resultado que diz que $m.m.c.(b_1, b_2, \ldots, b_n) \geq b_n(x+1)^{n-2}$. Primeiro verificamos que com esse resultado resolvemos o problema. De fato

$$a^3 > m.m.c.(b_1, b_2, \ldots, b_n) \geq b_n(x+1)^{n-2} \geq 2^{n-2}$$

$$4a^3 > 2^n \Rightarrow a^5 \geq 4a^3 > 2^n$$

$$a > (2^{\frac{1}{5}})^n$$

E então basta tomarmos $C = 2^{\frac{1}{5}}$.

Para provarmos o resultado desejado vamos provar, por simplicidade de notação, na seguinte forma:

Seja $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ uma progressão aritmética crescente de inteiros positivos de razão r primo relativo com u_0.

Lema 0.3. *Sejam $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sequência de inteiros e γ um inteiro tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}\frac{1}{\beta_i} = \frac{1}{\gamma}$$

Então vale que

$$\gamma | m.m.c.(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) m.m.c.(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

Demonstração. É trivialmente verdade, basta olhar os denominadores. □

Agora observemos que

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{u_j} \prod_{i\neq j} \frac{1}{u_i - u_j} = \frac{1}{u_k \ldots u_n}, 0 \leq k \leq n$$

Temos então como corolário do Lema que

$$u_k u_{k+1} \ldots u_n | m.m.c.(u_k, \ldots, u_n) r^{n-k}(n-k)!$$

Como assumimos u_0 e r primos relativos temos que r e $u_0 \ldots u_n$ são primos relativos. Portanto

$$\frac{u_k \ldots u_n}{(n-k)!} | m.m.c.(u_k, \ldots, u_n)$$

Agora vamos mostrar a seguinte fórmula

$$\frac{u_k \ldots u_n}{(n-k)!} = \frac{r^{n-k+1}}{\int_0^1 x^{k+\frac{u_0}{r}-1}(1-x)^{n-k}dx}$$

Ela segue da seguinte expressão

$$\frac{r^{n-k+1}\frac{u_k}{r}(\frac{u_k}{r}+1)\ldots(\frac{u_k}{r}+(n-k))}{(n-k)!} = r^{n-k+1}\frac{\Gamma(\frac{u_k}{r}+n-k+1)}{\Gamma(\frac{u_k}{r})\Gamma(n-k+1)}$$

$$\frac{u_k \ldots u_n}{(n-k)!} = \frac{r^{n-k+1}}{\beta(\frac{u_k}{r}, n-k+1)}$$

E substituindo a fórmula da função β o resultado segue.

Vamos usar a expressão acima para $k = \left\lfloor \frac{n-1}{r+1} + 1 \right\rfloor$. Tal k satisfaz $\frac{n-1}{r+1} < k \leq \frac{n-1}{r+1} + 1 = \frac{n+r}{r+1}$. Portanto

$$r^{n-k+1} \geq r^{\frac{(n-1)r}{r+1}+1}$$

Além disso, para $x \in [0,1]$ vale

$$x^{k+\frac{u_0}{r}-1}(1-x)^{n-k} \leq x^{\frac{n-1}{r+1}+\frac{u_0}{r}-1}(1-x)^{\frac{(n-1)r}{r+1}}$$

Observando que $x(1-x)^r \leq \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ e integrando a última desigualdade de 0 até 1 obtemos

$$\int_0^1 x^{k+\frac{u_0}{r}-1}(1-x)^{n-k} \leq (\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}})^{\frac{n-1}{r+1}} \frac{r}{u_0}$$

Juntando com a fórmula acima e a primeira desigualdade com r, obtemos:

$$\frac{u_k \ldots u_n}{(n-k)!} \geq u_0(r+1)^{n-1}$$

O que conclui a demonstração.

Se o termo inicial e a razão da progressão aritmética não forem primos relativos obtemos a cota inferior acima multiplicada pelo $m.d.c.$ desses.

CIIM 2016

CIIM 2017

Problema 2.

Inicialmente, podemos tomar $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo x com $0 < x < \epsilon_1$ temos $f(x)$ com o mesmo sinal (podendo haver pontos nos quais f é nula). Suponha, sem perda de generalidade que $f(x) \geq 0$ para $0 < x < \epsilon_1$. Como $f(0) = 0$ e f é contínua, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| < 1/2$ para $0 < x < \epsilon_2$. Tomando $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, temos que $0 \leq f(x) < 1/2$ para $x \in (0, \epsilon)$.

Logo, para $x \in (0, \epsilon)$ tal que $f(x) > 0$, vale que:

$$|f'(x)| \leq |f(x) \log |f(x)|| = -f(x) \log f(x) \Rightarrow f'(x) \leq -f(x) \log f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + \log f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} e^x + \log f(x) e^x \leq 0 \Rightarrow (e^x \log f(x))' \leq 0.$$

Logo, para qualquer intervalo $(a, b) \subset (0, \epsilon)$ no qual $f(x) > 0$ para todo x nele, temos que

$$g(x) = e^x \log f(x)$$

é decrescente. Veja também que $g(x) = e^x \log f(x)$ é tal que $g(x) < 0$, já que $0 < f(x) < 1/2$.

Vamos mostrar que existe um intervalo (a, b) como acima tal que $f(a) = 0$. Se f não é 0 em todos os pontos do intervalo $(0, \epsilon)$ existe t tal que $f(t) > 0$. Agora, considere o conjunto

$$C = \{x | x \in [0, t) \text{ e } f(x) \leq 0\}.$$

Como $f(0) = 0$, temos que C é não vazio e limitado. Logo, C tem supremo e seja $c = \sup C$.

Vamos mostrar que (c, t) satisfaz o desejado. De fato, se $x \in (c, t)$, como $x \in [0, t)$ e $x > c$, então $f(x) > 0$. Além disso, é fácil ver que existe uma sequência de pontos de C que tende a c. Portanto, por continuidade $f(c) \leq 0$. Mas se $f(c) < 0$, existe um ponto u em (c, t) próximo de c tal que $f(u) < 0$, absurdo, pois $c = \sup C$ e teríamos $u \in C$. Logo $f(c) = 0$ e temos o desejado.

Agora, considere o limite de $g(x)$ quando x tende a c pelos positivos. Temos que $g(x)$ é decrescente em (c, t) e, como $f(x) > 0$, temos $g(x) < 0$ para todo x em (c, t). Logo, $g(x)$ é limitada superiormente e por isso existe

$$\lim_{x \to c^+} g(x).$$

Mas, como $f(c) = 0$, temos que $\log f(x)$ vai para $-\infty$ e e^x vai para e^c. Logo $g(x)$ vai para $-\infty$ e portanto o limite não existe, absurdo.

Portanto, $f(x) = 0$ para todo $x \in (0, \epsilon)$.

Podemos então repetir o argumento começando de ϵ. Vamos então cobrindo os reais positivos com intervalos nos quais $f(x) = 0$. Seja $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência dos tamanhos desse intervalo. Veja que de fato os intervalos devem cobrir todos os reais positivos, pois caso contrário, teríamos que a soma

$$d_1 + d_2 + d_3 + ... = c$$

iria convergir e, por continuidade, teríamos $f(x) = 0$ para $x \leq c$. Em particular, poderíamos repetir o argumento para c, aumentando a união de intervalos, absurdo. Repetindo o argumento para $x < 0$, temos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como desejado.

CIIM 2019

Problema 1.

Note que não podemos ter nenhuma solução com $z = 0$, pois 0^0 é indefinido e $n^0 = 1$ caso contrário. Tendo em mente que o lado esquerdo cresce muito mais rápido que o lado direito, pois $2^z > z$ para todo inteiro z, nós vamos separar em diversos casos, com respeito a $|x|$ e $|y|$.

(i) $x = 0$**:** Então temos a equação $y^z = z$, que tem como única solução $y = 1$ e $z = 1$ ($z > 0$, caso contrário x^z não estaria definido), que nos dá a tripla $(0, 1, 1)$.

(ii) $y = 0$**:** Analogamente ao caso acima, encontramos a solução $(1, 0, 1)$

(iii) $|x| = |y| = 1$: Nós podemos separar nos casos $x = 1$ e $y = 1$; $x = 1$ e $y = -1$; $x = -1$ e $y = 1$; $x = -1$ e $y = -1$. Em todos eles, nós concluímos que $z = 2$, o que nos dá as triplas $(1, 1, 2)$, $(1, -1, 2)$, $(-1, 1, 2)$ e $(-1, -1, 2)$.

(iv) $|x| \geq 2$ **e** $|x| \geq |y|$**:** Se

Problema 2.

A cada $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nós associamos o vetor $v(X) = (x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\cdots+x_n)$. Note que se $X \neq Y$, então $v(X) \neq v(Y)$. Mais ainda, podemos associar a cada X a soma das coordenadas de $v(X)$, i.e.

$$s(X) = x_1 + (x_1 + x_2) + \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Note que, se $X < Y$, então $s(X) < s(Y)$. Além disso, toda cadeia maximal $Z_1 > Z_2 > \cdots > Z_k$ deve ter elemento maximal $Z_1(1, 1, \ldots, 1)$ e como como elemento minimal $Z_k = (0, 0, \ldots, 0)$, que têm como somas associadas os valores $\frac{n(n+1)}{2}$ e 0, respectivamente. Como a cada outro $Z_1 > Z_i > Z_k$ temos associado um número

$$0 < s(Z_i) < \frac{n(n+1)}{2},$$

temos, no máximo, tantos elementos em nossa cadeia quanto inteiros em $\left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$. Isto é, $k \leq \frac{n(n+1)}{2} + 1$. Por outro lado, esta função também nos dá uma cadeia máxima. Basta associar a cada número k nesse intervalo um vetor X_k tal que $s(X_k)$=k

Problema 3.