DEMONSTRAÇÃO DE UM TEOREMA DE TCHEBYCHEF

P. ERDÖS

Existem várias demonstrações na literatura para o teorema primeiro provado por Tchebychef, segundo o qual existe pelo menos um primo entre um número natural e seu dobro. A mais simples é sem dúvida a dada por Ramanujan[(1)]. No seu trabalho *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), vol. I, pp. 66-68 o senhor Landau dá uma demonstração particularmente simples a respeito da quantidade de primos abaixo de uma determinada cota, do qual segue imediatamente que, para um q adequado, sempre há um número primo entre um número natural e q vezes ele mesmo. Para os propósitos momentâneos do senhor Landau, a determinação numérica das constantes que aparecem na demonstração não importa; mas é fácil convencer-se por uma análise numérica da prova de que, em qualquer caso, q é maior que 2.

Nas linhas a seguir, eu irei mostrar que, ao afiar as ideias subjacentes na demonstração de Landau, é possível chegar a uma demonstração do teorema de Tchebychef mencionado acima, que - parece-me - não estar atrás da demonstração de Ramanujan no quesito simplicidade. A seguir, letras gregas são sempre positivas, letras latinas denotam números naturais; o nome p é reservado para números primos.

1. O coeficiente binomial

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

é divisível pelos números primos p com $a < p \leq 2a$, pois estes dividem o numerador, mas não o denominador; assim

$$\prod_{a<p\leq 2a} p \leq \binom{2a}{a}.$$

Mas para $a \geq 5$

$$\binom{2a}{a} \leq 4^{a-1};$$

de fato, a desigualdade é válida para $a = 5$ e, se ela é verdadeira para algum a, como

$$\binom{2(a+1)}{a+1} = \frac{(2a)!(2a+2)(2a+1)}{(a!)^2(a+1)^2} < 4\binom{2a}{a},$$

o mesmo ocorre para $a+1$. Portanto

$$\prod_{a<p\leq 2a} p < 2^{2(a-1)}. \tag{1}$$

(1)Sr. Ramanujan, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, **11** (1919), pp. 181-182 – *Collected Papers of* Srinivasa Ramanujan (Cambridge, 1927), pp. 208-209.

2. Seja $b \geq 10$; geralmente denotamos o menor número inteiro $\geq \xi$ com $\{\xi\}$, e sejam

$$a_1 = \left\{\frac{b}{2}\right\}, \quad a_2 = \left\{\frac{b}{2^2}\right\}, \ldots, a_k = \left\{\frac{b}{2^k}\right\}, \ldots$$

Então $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq \cdots$; além disso

$$a_k < \frac{b}{2^k} + 1 = 2\frac{b}{2^{k+1}} + 1 \leq 2a_{k+1} + 1,$$

logo, como a_k e $2a_{k+1}$ são inteiros,

$$a_k \leq 2a_{k+1}. \tag{2}$$

Seja m o maior número para o qual $a_m \geq 5$, então $a_{m+1} < 5$, e por causa de (2) $a_m < 10$. Ademais $2a_1 \geq b$; logo, usando (2), os intervalos

$$a_m < \eta \leq 2a_m, a_{m-1} < \eta \leq 2a_{m-1}, \ldots, a_1 < \eta \leq 2a_1$$

cobrem completamente o intervalo $10 < \eta \leq b$.

Voltamos agora à desigualdade (1) e aplicamos sucessivamente para $a = a_1$, a_2, $\ldots$, a_m. Por multiplicação nós obtemos

$$\prod_{a_1 < p \leq 2a_1} p \prod_{a_2 < p \leq 2a_2} p \cdots \prod_{a_m < p \leq 2a_m} p < 2^{2(a_1 - 1 + a_2 - 1 \cdots + a_m - 1)}$$
$$< 2^{2\left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2^2} + \cdots + \frac{b}{2^m}\right)} < 2^{2b},$$

e, usando o que temos acima, concluímos a fortiori

$$\prod_{10 < p \leq b} p < 2^{2b}. \tag{3}$$

3. Por um conhecido teorema de LEGENDRE[(2)], $n!$ contém o fator primo p com multiplicidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

onde, como de costume, $\lfloor \xi \rfloor$ denota o maior inteiro $\leq \xi$. Portanto p aparecerá em

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{4}$$

com multiplicidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \tag{5}$$

como fator primo. Cada termo acima é ≤ 1; de fato, ele é um número inteiro tal que

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2.$$

Mas os termos em (5) são nulos se $p^k > 2n$; portanto a multiplicidade dada por (5) não pode ser maior que o maior inteiro r com $p^r \leq 2n$. I. e. a potência do

(2) A. M. LEGENDRE, *Zahlentheorie* (tradução de H. MASER; Leipzig, 1886) vol. 1, p. 11, ou E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909) vol. 1, pp. 75-76.

primo p na fatoração prima de $\binom{2n}{n}$ é $\leq 2n$. Daqui segue também que os primos $p > \sqrt{2n}$ aparecem no máximo com potência um na fatoração prima de $\binom{2n}{n}$.

Percebemos agora - e esse é o ponto chave da demonstração - que para $n \geq 3$ os números primos com $\frac{2}{3}n < p \leq n$ não dividem o coeficiente binomial (4). De fato, pois então $3p > 2n$ e os dois únicos fatores divisíveis por p no numerador são p e $2p$ (e, como $p > 2$, apenas pela primeira potência do mesmo); e o denominador também é divisível por p^2.

Essas considerações implicam que para $n \geq 3$ vale a desigualdade

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p<\sqrt{2n}} (2n) \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \prod_{n<p\leq 2n} p,$$

assim, como o primeiro produtório possui no máximo e $\sqrt{2n}$ fatores e em geral é verdade que

$$2n \cdot \binom{2n}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-2}{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n}{n} > 2^{2n},$$

temos a desigualdade

$$2^{2n} < (2n)^{1+\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \prod_{n<p\leq 2n} p. \tag{6}$$

4. Seja agora $n \geq 50$ e suponha que não há primo entre n e $2n$. Então o segundo produtório em (6) é vazio; para o primeiro vale $\sqrt{2n} \geq 10$ e se aplica (3)

$$\prod_{\sqrt{2n}\leq p<\frac{2}{3}n} p \leq \prod_{10\leq p<\frac{2}{3}n} p < 2^{2\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor} \leq 2^{\frac{4}{3}n};$$

então (6) se torna

$$2^{2n} < (2n)^{1+\sqrt{2n}} 2^{\frac{4}{3}n}, \tag{7}$$

o que é impossível para n suficientemente grande.

Para encontrar uma cota não muito grande para a qual (7), i.e.

$$2^{\frac{2}{3}n} < (2n)^{1+\sqrt{2n}}, \tag{8}$$

não é mais válido, nós estimamos como a seguir. Por causa da desigualdade $a \leq 2^{a-1}$ (que pode ser facilmente demonstrada por indução),

$$2n = \left(\sqrt[6]{2n}\right)^6 < \left(\left\lfloor \sqrt[6]{2n} \right\rfloor + 1\right)^6 \leq 2^{6\left\lfloor \sqrt[6]{2n} \right\rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$$

então segue de (8) (se ainda assumimos $n \geq 50$) que

$$2^{2n} < 2^{\sqrt[6]{2n}\left(18+18\sqrt{2n}\right)} < 2^{\sqrt[6]{2n}\cdot 20\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{\frac{2}{3}}},$$

i.e. $(2n)^{\frac{1}{3}} < 20$, $n < \frac{1}{2}20^3 = 4000$.

Portanto para $n \geq 4000$ existe pelo menos um primo p com $n < p \leq 2n$.

5. Para finalizar o teorema de Tchebychef: *para* $n \geq 1$, *existe pelo menos um número primo* p *com* $n < p \leq 2p$, não é necessário, por uma observação do senhor Laudau[(3)], mostrar um p com $n < p \leq 2n$ para cada $n = 1, 2, \ldots, 3999$. É suficiente perceber que entre os primos

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001 \tag{9}$$

[(3)] E. Landau, 1. c., vol. 1, p. 92.

cada um é maior que o anterior e menor que duas vezes o mesmo, e que o último supera 4000. De fato, seja $1 \leq n < 4000$ e seja p o primeiro termo $> n$ da sequência (9), então se p' denota o termo anterior da sequência (ou o número 1 se $p = 2$),

$$n < p \leq 2p' \leq 2n.$$

6. Com a ajuda da desigualdade (6), também é fácil obter uma *cota inferior* da quantidade de números primos entre n e $2n$. De fato, como ocorrem (6) e (3), por um considerações análogas às acima, para $n \geq 4000$,

$$\prod_{n<p\leq 2n} p > 2^{2n-\frac{4}{3}n}(2n)^{-\left(1+\sqrt{2n}\right)} > 2^{\frac{1}{3}\left(2n-\sqrt[6]{2n}\left(18+18\sqrt{2n}\right)\right)} >$$
$$> 2^{\frac{1}{3}\left(2n-19(2n)^{\frac{2}{3}}\right)} = 2^{\frac{2}{3}n\left(1-19(2n)^{-\frac{1}{3}}\right)} \geq$$
$$\geq 2^{\frac{2}{3}n\left(1-\frac{19}{20}\right)} = 2^{\frac{1}{30}n},$$

portanto, como cada fazor do produto é $\leq 2n$, a quantidade de fatores do mesmo é (como usualmente denotado)

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{\log 2}{30}\frac{n}{2n},$$

logo

$$\pi(2n) - \pi(n) > \alpha\frac{n}{\log n} \tag{10}$$

para um número positivo adequado α.

Então o Teorema de Tchebychef segue pois (10) também vale para $2 \leq n < 4000$, se α for escolhido suficientemente pequeno.

(Recebido em 24 de Novembro de 1931.)