

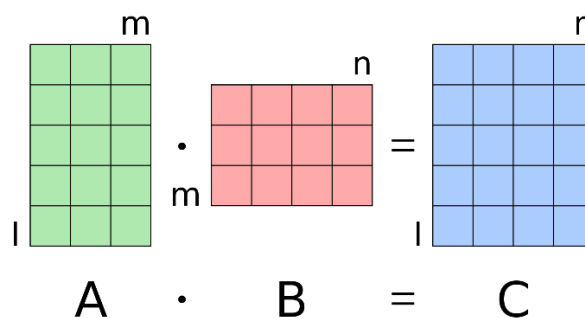
近代偉大工具 – 矩陣

矩陣是數學中的一種重要工具，在統計學、機器學習等領域也有廣泛應用。最早起源於線性代數。矩陣的歷史可以追溯到 19 世紀初，當時數學家 Gauss 和 Cauchy 獨立發明了矩陣的概念。然而，當時的矩陣只是一種工具，被用來簡化線性方程組的求解過程。

在 20 世紀初，矩陣被用於描述和解決更多的問題，例如機械和工程學中的動力學問題。1915 年，美國數學家 Sylvester 提出了“矩陣”這個詞，將矩陣這個概念正式命名。到了中期。隨著電腦的性能提升，矩陣計算力也獲得大幅提升。

而它是由數字或變量按照一定的規則排列在矩形形狀的表格中所構成的，常用來描述數量的變化、線性方程組的求解、向量空間的轉換等問題。其每個元素都可以進行加、減、乘等運算，矩陣乘法特別重要，它描述了向量的線性變換。矩陣的大小由行和列決定，可以用矩陣轉置、求逆、求行列式等方法進行運算。

矩陣相乘是屬於一種二元運算，從兩個矩陣中生成一個新的矩陣，其「第一個矩陣中的列數」必須等於「第二個矩陣中的行數」。生成的矩陣稱為**矩陣乘積**，具有第一個矩陣的行數和第二個矩陣的列數。**矩陣 A 和 B 的乘積**表示為 **AB**，如下圖所示。



計算的詳細系定義如下，設 A 為 $m \times i$ 矩陣、B 為 $i \times n$ 矩陣，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

矩陣乘積 $C = A \cdot B$ 同時大小為 $m \times n$ 的矩陣，

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

C 矩陣每個點的值為

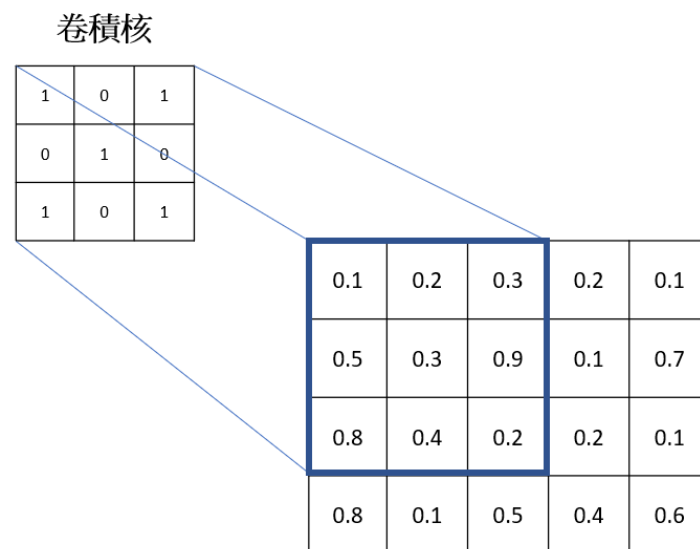
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

以上為矩陣的基本概念。

在資訊科學中，矩陣運算更可用於機器學習、圖像處理、音訊處理等方面，以下為矩陣在處理圖像的示範。

(一) 捲積處理

這是屬於捲積神經網路(CNN)的一部份，常用於圖像的處理。在處理的過程中需要一個圖像每個像素相對應的值，並與捲積核進行運算，而捲積核的作用有許多種，包含掃描形狀、邊緣特徵等，而全部處理完成後便會獲得表現特徵的「特徵圖」，計算過程如下圖所示。



$$\begin{aligned} \text{計算結果：} & 1 \times 0.1 + 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.3 + 0 \times 0.9 \\ & 1 \times 0.8 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.2 = 1.7 \end{aligned}$$

(二) 圖形旋轉

在圖形進行旋轉時，設該圖的每個點都擁有一個相對應的座標(x , y)，隨後再利用矩陣快速進行計算，當今天旋轉的角度為 α 度，所得出的新座標點為(x' , y')，以下為數學式。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

矩陣的應用已經廣泛地融入了我們的生活中，從科學、工程到資訊技術等領域，矩陣在解決問題和提高效率方面扮演著重要的角色。矩陣相乘作為矩陣運算的核心之一，不僅可以用於矩陣轉換和變換，還可應用於數學和科學問題的解決。矩陣的發展歷程中，許多著名的數學家和科學家都為其做出了貢獻，讓矩陣逐漸成為現代數學和科學研究中不可或缺的工具。

參考資料：

1、matrix multiplication。Wikipedia

(網址：https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication)