习题课#9 (Nov.08)

1) 求线性映射的核和像.(辅导书P_{245}例16)

2) 建议 指导书P_{229}例16; 准三角阵的逆; P_{279}例21; P_{294}例16. 不涉及广义逆.

△ 线性映射的ker, Im. (on $\mathbb{F}$)

For vector space V_1, V_2, $f: V_1 \to V_2$ is a linear map if

① $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$ $v_1, v_2 \in V_1$.

② $f(kv)=kf(v)$, $k\in\mathbb{F}$, $v\in V_1$

or equivalently, $f(kv_1+lv_2)=kf(v_1)+lf(v_2)$, $\forall k,l\in\mathbb{F}$, $v_1,v_2\in V_1$.

Prop. f is surjective iff. $\mathrm{Im} f = V_2$ by definition;

f is injective iff. $\ker f = 0$ by its linearity.

令 $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$. 可定义 $\mathcal{A}: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^s$, $x\longmapsto Ax$.

那么 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 为 A 的列空间, $\ker\mathcal{A}$ 为 $Ax=0$ 的解集(解空间).

* 在不引起歧义的场景, 一般可用 A 指代对应的线性映射 $\mathcal{A}$.

研究同态/同构映射的出发点.

维持代数结构运算 同态 $\xrightarrow{\text{双向}}$ 同构 → 对代数结构进行分类、化归思想

→ 推广结论至一般情形, 等价替换.

例如: 线性代数中 $\mathbb{F}^n$ $(n<+\infty)$ $\longleftrightarrow$ 有限维线性空间

抽象代数中 C_n, D_{2n}, A_n 描述常见结构 $(\{\zeta^k\}_{k=0}^{n-1}, \times)$

拓扑、几何中引入的各种不变量可在同胚对象之间相互转换

集合论中利用双射对集合本身大小(势)的研究.

北京大学数学科学学院
School of Mathematical Sciences
Peking University

1) 令 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\3&1&4&7\\-1&1&0&3\end{pmatrix}$. 求 $\mathrm{Im}A$ 和 $\ker A$ 的一个基和维数.

Proof. 使用初等行变换: $A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\&1&1&4\\&1&1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\&1&1&4\\&&&0\end{pmatrix}$

得 A 的第1,2列为 $\mathrm{Im}A$ 的一组基, 且 $\dim\mathrm{Im}A=2$.

于是立即有 $\dim\ker A=4-\dim\mathrm{Im}A=4-2=2$.

考虑由 A 决定的齐次线性方程组 $Ax=0$. 结合上述~~简化~~阶梯形矩阵知

$\eta_1=(-1,-1,1,0)^T$, $\eta_2=(-1,-4,0,1)^T$ 为一个基础解系,

故亦也为 $\ker A$ 的一组基.

综上所述: $\mathrm{Im}A$ 的一组基为 $\alpha_1=(1,3,-1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$. $\dim\mathrm{Im}A=2$

$\ker A$ 的一组基为 $\eta_1=(-1,-1,1,0)^T$, $\eta_2=(-1,-4,0,1)^T$. $\dim\ker A=2$.

2) (矩阵方程) 求解关于 X 的形如 $AXB=C$ 的方程组.

① 简单情形 (A, B 均可逆) 可直接通过 $X=A^{-1}CB^{-1}$ 得到.

例如要求 $A^{-1}C$ 时, 可

a) 利用伴随矩阵等方式直接求得 A^{-1}, 再进行矩阵乘法 $A^{-1}C$.

b) 对 (A, C) 进行初等行变换得到 (I, Z). $Z=A^{-1}C$ 即为所求.

这是因为若 $P(A, C)=(I, Z)$, 则有

$PA=I\Rightarrow P=A^{-1}$, $PC=Z$.

而要求 ZB^{-1} 时, 可 $(Z=A^{-1}C)$

a) 直接求得 B^{-1}, 再进行矩阵乘法 ZB^{-1}.

b) 考虑 $(ZB^{-1})^T=B^{-T}Z^T=(B^T)^{-1}Z^T$

对 (B^T, Z^T) 进行初等行变换得到 (I, W). $W^T=((B^T)^{-1}Z^T)^T=ZB^{-1}$

即为所求.

北京大学数学科学学院
School of Mathematical Sciences
Peking University

② $AX=C$. A不可逆. 令 $X=(x_1,\cdots,x_n)$. $C=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$.

对 $k=1,\cdots,n$ 求解 $Ax_k=\gamma_k$ 得到 x_k 的一般形式,再组装成 X 的一般形式.

而求解 $Ax_k=\gamma_k$ 时若考虑对增广矩阵进行初等行变换,则不妨直接对 (A,C) 进行初等行变换得到 $(\tilde{A},\tilde{C})$,其中 $\tilde{A}$ 为阶梯形.

[$AX=C$ 与 $\tilde{A}X=\tilde{C}$ 同解].

例如 求解 $\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-3&3\\1&3&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&9&7\\1&11&7\\7&5&7\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}3&-1&2&3&9&7\\4&-3&3&1&11&7\\1&3&0&7&5&7\end{array}\right)\longrightarrow\begin{pmatrix}5&0&3&8&16&14\\&5&-1&9&3&7\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

得 $x_1=(\frac{8}{5},\frac{9}{5},0)^T+c_1(-\frac{3}{5},\frac{1}{5},1)^T$

$x_2=(\frac{16}{5},\frac{3}{5},0)^T+c_2(-\frac{3}{5},\frac{1}{5},1)^T$

$x_3=(\frac{14}{5},\frac{7}{5},0)^T+c_3(-\frac{3}{5},\frac{1}{5},1)^T$.

注意到 X 的每一列 x_1,x_2,x_3 自由分量相同,事实上它们都描述 $Ax=0$ 的解空间

于是 $X=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\xi_3+\eta_3)$. ξ_k 为 $Ax=\gamma_k$ 的一个特解, $\eta_k\in\ker A$.

由此可想到对于一般的 $AX=C$,其解集可表示为

$$\{X_0+(\eta_1,\cdots,\eta_s)Y \mid AX_0=C,\ \eta_1,\cdots,\eta_s \text{ 为 } \ker A \text{ 一组基},\ Y\text{任取}\}.$$

③ $XB=C$. B不可逆.

考虑求解 $B^TX^T=C^T$,得解集为

$$\left\{X_0+Y\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_s^T\end{pmatrix} \;\middle|\; X_0B=C,\ \eta_1,\cdots,\eta_s \text{ 为 } \ker B^T \text{ 一组基},\ Y\text{任取}\right\}.$$

补充阅读

*④ $AXB=C$. A,B 均不可逆.

记 $\ker A$ 的一组基为 $\mu_1,\cdots,\mu_s$；$\ker B^T$ 的一组基为 $\nu_1,\cdots,\nu_t$.

$$AXB=C \Leftrightarrow \exists X_1, Y_1 \text{ s.t. } AX_1=C,\ XB=X_1+(\mu_1,\cdots,\mu_s)Y_1$$

$$\Leftrightarrow \exists X_1, Y_1 \text{ s.t. } AX_1=C,\ \exists X_2, Y_2 \text{ s.t. } X_2B=X_1+(\mu_1,\cdots,\mu_s)Y_1,$$

$$X=X_2+Y_2\begin{pmatrix}\nu_1^T\\ \vdots \\ \nu_t^T\end{pmatrix}.$$

Recall: For $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. $\operatorname{rank}A=r$. P, Q. invertible

(I) $A=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^T =: (P_1\ P_2)\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^T\\ Q_2^T\end{pmatrix}=P_1Q_1^T$.

有 $\begin{cases} I_mA=I_mP_1\\ I_mA^T=I_mQ_1\end{cases}$

(II) 反之若 $A=P\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}Q^T =: (P_1\ P_2)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^T\\ Q_2^T\end{pmatrix}$.

有 $\begin{cases} I_mA=I_mP_1 \Rightarrow A_{21}=0,\ A_{22}=0.\\ I_mA^T=I_mQ_1 \Rightarrow A_{12}=0.\ A_{22}=0.\end{cases}$

类似地，能否推广至 ker？

(I) $\ker A=\ker P_1Q_1^T=\ker Q_1^T$.

$\ker A^T=\ker Q_1P_1^T=\ker P_1^T$.

(II) $\ker A=\ker Q_1^T \Rightarrow A_{21}=0.\ A_{22}=0$

$\ker A^T=\ker P_1^T \Rightarrow A_{12}=0.\ A_{22}=0.$

同时满足上述条件时 A_{11} 为方阵，可逆，且与 A 秩相同.

Proof. $\ker A = \ker P\begin{pmatrix} A_{11}Q_1^T + A_{12}Q_2^T \\ A_{21}Q_1^T + A_{22}Q_2^T \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} A_{11}Q_1^T + A_{12}Q_2^T \\ A_{21}Q_1^T + A_{22}Q_2^T \end{pmatrix}$

$$= \ker(A_{11}Q_1^T + A_{12}Q_2^T) \cap \ker(A_{21}Q_1^T + A_{22}Q_2^T)$$

$\ker A = \ker Q_1^T \Rightarrow \ker Q_1^T \subseteq \ker(A_{11}Q_1^T + A_{12}Q_2^T)$

$\ker Q_1^T \subseteq \ker(A_{21}Q_1^T + A_{22}Q_2^T)$

$$(Q_1^T x = 0 \Rightarrow (A_{11}Q_1^T + A_{12}Q_2^T)x = 0)$$

$$\Rightarrow (Q_1^T x = 0 \Rightarrow A_{12}Q_2^T x = 0)$$

$$\cancel{\Rightarrow (Q_1^T x = 0 \Rightarrow (0\ A_{12})\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} x = 0)}$$

$$\cancel{\Rightarrow \forall y:\ A_{12}y = (0, A_{12})\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} =}$$

$\Rightarrow (\forall y$ 取 x 使得 $Q^T x = \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$，则 $A_{12}y = A_{12}Q_2^T x = 0) \Rightarrow A_{12} = 0$.

现考虑 $AXB = O$. 取 $P_A = (P_{A1}, P_{A2})$ ~~$P_{A1} = (\mu_1, \cdots, \mu_s)$~~ $Q_A^T = \begin{pmatrix} Q_{A1}^T \\ Q_{A2}^T \end{pmatrix}$.

$P_B = (P_{B1}, P_{B2})$, $Q_B^T = \begin{pmatrix} Q_{B1}^T \\ Q_{B2}^T \end{pmatrix}$. ~~$Q_{B1} = (\nu_1, \cdots, \nu_t)$~~

再设 $A = P_A\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} Q_A^T$. $B = P_B\begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} \end{pmatrix} Q_B^T$，那么在一定条件下

$$AXB = 0 \Longleftrightarrow P_A\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_A^T X P_B \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_B^T = 0.$$

$$\Longleftrightarrow Q_A^T X P_B = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow X = Q_A^{-T}\begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} P_B^{-1}$$

所需条件为 $(\ker A = \ker Q_{A1}^T$ 或 $\operatorname{Im} A^T = \operatorname{Im} Q_{A1})$

且 $(\ker B^T = \ker P_{B1}^T$ 或 $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P_{B1})$

① Q_A^{-T}是否可取为(Q_1, Q_2)使得$Q_2=(\mu_1,\cdots,\mu_s)$?

② P_B^{-1}是否可取为$\begin{pmatrix}P_1^T\\ P_2^T\end{pmatrix}$使得$P_2=(\nu_1,\cdots,\nu_t)$?

$$I = Q_A^T Q_A^{-T} = \begin{pmatrix}Q_{A_1}^T\\ Q_{A_2}^T\end{pmatrix}(Q_1\ Q_2) \Rightarrow Q_{A_1}^T Q_2 = 0.$$

提应如下构造Q_A:取$Q_2=(\mu_1,\cdots,\mu_s)$并扩充至可逆$Q_A^{-T}=(Q_1,Q_2)$.

那么$Q_A^T=\begin{pmatrix}Q_{A_1}^T\\ Q_{A_2}^T\end{pmatrix}$满足$Q_{A_1}^TQ_2=0$,即$\ker A\subset \ker Q_{A_1}^T$.

再结合$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} Q_{A_1}^T$得$\ker A=\ker Q_{A_1}^T$,即为所求.

类似地,取$P_2=(\nu_1,\cdots,\nu_t)$并扩充至可逆$P_B^{-T}=(P_1\ P_2)$.

最后利用非齐次线性方程组的结构:

$AXB=C$的通解为 $X_0+(Q_1\ Q_2)\begin{pmatrix}0&X_{12}\\ X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1^T\\ P_2^T\end{pmatrix}$.

其中X_0为方程的一个特解,X_{12},X_{21},X_{22}为自由变量

$Q_2=(\mu_1,\cdots,\mu_s)$,构成$\ker A$的一组基.

$P_2=(\nu_1,\cdots,\nu_t)$,构成$\ker B^T$的一组基.

3) 令 $A=\begin{array}{c|cc} & r & s \\ \hline r & A_{11} & A_{12} \\ s & A_{21} & A_{22}\end{array}$. A_{11}可逆. 讨论何时A可逆,并给出A^{-1}.

Proof. $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\ A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\ 0&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}$

$$\not\longrightarrow\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\ 0&A_{22}-A_{12}A_{11}^{-1}A_{21}\end{pmatrix}$$ 尺寸不符!

考虑行列式,有A可逆 iff $(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$可逆

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&I&\\ A_{21}&A_{22}&&I\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&I&\\ &S&-A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{pmatrix}$$

$(S=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}))$.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I & \\ & S & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & \\ & I & -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & & A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ & I & -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

4) $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$. $B\in\mathbb{F}^{n\times s}$. 求证

$$\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(I_n-BA)-n.$$

Proof. $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(I_n-BA)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & I_n-BA \end{pmatrix}$

而 $\begin{pmatrix} A & \\ & I_n-BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & \\ BA & I_n-BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ BA & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-ABA & \\ BA & I_n \end{pmatrix}$

得 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(I_n-BA)\geq \operatorname{rank}(A-ABA)+n$.

结合 Sylvester 秩不等式：$\operatorname{rank}(A-ABA)\geq \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(I-BA)-n$ 即得结论成立.

* 这也等价于 $\ker A\subseteq \operatorname{Im}(I_n-BA)$ $\left(Ax=0\Rightarrow (I_n-BA)x=x\right)$

5) $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$. $B\in\mathbb{F}^{n\times m}$. 求证 $ABX=A$ 有解 iff $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A$.

Proof. $ABX=A$ 有解 iff. $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(AB,A)$

iff. $\operatorname{Im}AB=\operatorname{Im}(AB,A)$ $\left(\operatorname{Im}AB\subseteq \operatorname{Im}(AB,A)\right)$

iff. $\operatorname{Im}AB\supseteq \operatorname{Im}(AB,A)$

iff. $\forall x,y\ \exists z$ $ABx+Ay=ABz$.

$\left(\text{iff. } \forall x,y\ \exists z\ \ Bx+y-Bz\in\ker A\right)$

iff. $\forall y \exists z\ Ay = ABz$ iff. $\mathrm{Im} A \subseteq \mathrm{Im} AB$

iff. $\mathrm{Im} A = \mathrm{Im} AB$ ($\mathrm{Im} A \supseteq \mathrm{Im} AB$) iff. $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} AB$.

6) $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 证明 $\mathrm{rank}(I-AB) \le \mathrm{rank}(I-A) + \mathrm{rank}(I-B)$

Prof. $\begin{pmatrix} I-A & \\ & I-B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I-A & B-AB \\ & I-B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I-A & I-AB \\ & I-B \end{pmatrix}$

7) $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 证明若 $AB=BA=0$. $\mathrm{rank} A^2 = \mathrm{rank} A$, 则有

$\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank} A + \mathrm{rank} B$

Prof. $\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ A^2 & A^2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} A+B & (A+B)-(A+B)AC \\ A^2 & A^2 - A^2AC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ A^2 & \end{pmatrix}$

其中 $A^2C = A$. $\mathrm{rank}(A+B) \ge \mathrm{rank} A^2 + \mathrm{rank} B = \mathrm{rank} A + \mathrm{rank} B$.

Corl. $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $AB=BA=0$. $\Rightarrow \exists m$: $\mathrm{rank}(A^m + B^m) = \mathrm{rank} A^m + \mathrm{rank} B^m$.

8) (LU 分解) 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 所有顺序主子式不为 0, 则存在可逆下三角 L, 可逆上三角 U 使得 $A = LU$.

Prof. 对 A 的阶数 n 归纳: $n=1$ 时显然成立.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \\ \beta^T A_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta^T A_{11}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & \\ \beta^T A_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}\alpha \\ & a_{nn} - \beta^T A_{11}^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (A_{11} = L_{11}U_{11}).$$

√.

Rem. 若 A 为一般的 n 阶矩阵，可找到一排列矩阵 P 使得 $PA=LU$.

L 为可逆下三角. U 为上三角.

9) (Householder 变换) 令 $P=I-2ww^T$. $w\in\mathbb{R}^n$.

a) w 满足什么条件，P 为正交矩阵.

固定 $x\in\mathbb{R}^n$

b) 求证存在 w 满足上述条件使得 $Px=\|x\|e_1$

c) 利用形如 $P=I-2ww^T$ 的矩阵构造 QR 分解.

Proof. $P^T=P$. $P^TP=P^2=I-4ww^T+4\|w\|^2ww^T$

于是 $P^TP=I$ iff $\|w\|=0$ 或 1.

若 $Px=x-2(w^Tx)w=\|x\|e_1$，有 $w^Tx=0$. $x=\|x\|e_1$ 或 $w\,/\!/\,(x-\|x\|e_1)$.

故考虑取 $w=\begin{cases}0\ , & x=\|x\|e_1\\ \|x-\|x\|e_1\|^{-1}(x-\|x\|e_1)\ , & x\neq\|x\|e_1\end{cases}$.

验证: $x=\|x\|e_1$ 显然满足题意. 否则

$$x-2(w^Tx)w=x-2\|x-\|x\|e_1\|^{-2}(x-\|x\|e_1)^Tx\,(x-\|x\|e_1)$$

其中 $\|x-\|x\|e_1\|^2=\|x\|^2-2\|x\|x^Te_1+\|x\|^2=2(\|x\|^2-\|x\|x^Te_1)$

$(x-\|x\|e_1)^Tx=\|x\|^2-\|x\|x^Te_1$. 满足题意

令 $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$ 列满秩. 对 A 的列数 n 归纳.

当 $n=1$ 时 取 Q_1 为 A 对应的单位向量, R_1 为相应的长度

假设命题对 $(n-1)$ 成立. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,A_2)$

取适当的 w 使得 $(I-2ww^T)\alpha_1=\|\alpha_1\|e_1$. 令 $P=I-2ww^T$

于是有 $PA=(P\alpha_1,PA_2)=\begin{pmatrix}1&\gamma^T\\0&\tilde{A}_{22}\end{pmatrix}$. $PA_2=\begin{pmatrix}\gamma^T\\ \tilde{A}_{22}\end{pmatrix}$.

$n=\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}PA=1+\operatorname{rank}\tilde{A}_{22}\Rightarrow\tilde{A}_{22}$ 列满秩. 利用归纳假设即得结论成立.