北京大学数学科学学院
School of Mathematical Sciences
Peking University

习题课 #4 (Oct. 04)

1) 求向量组极大无关组和秩
2) 求矩阵的秩，包含不定元
3) 求一个向量组生成子空间的一组基和维数 $P_{135-136}$ 5
4) 线性相关性、秩等基本事实的证明.

考虑线性空间 $\mathbb{F}^n$ 及其全体有限子集构成的集合 $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{F}^n)$. 可定义

$\operatorname{span} A := \{\sum_i k_i v_i \mid k_i \in \mathbb{F}, v_i \in A, \forall i\}$, $\forall A \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{F}^n)$.

~~Lem. 若 A 能被 B 线性表出, 则 span A~~

Lem. A 能被 B 线性表出 iff. $\operatorname{span} A \subseteq \operatorname{span} B$ $(A, B \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{F}^n))$.

故可定义如下序关系 (preorder)

$A \lesssim B$ iff. $\operatorname{span} A \subseteq \operatorname{span} B$.

* 由教材 P_{72} 定义 2 可得上述关系满足反身性 (reflexivity), 传递性 (transitivity)

预序 $(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{F}^n), \lesssim)$ 可自然诱导出一个等价关系

$A \sim B$ iff. $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$.

Rem. $A \sim B$ iff. A 与 B 作为两个向量组等价.

自然的想法: $\varnothing$ 作为 $(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{F}^n), \lesssim)$ 的唯一的最小元 $(\forall A (\varnothing \lesssim A))$.

反之 $(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{F}^n), \lesssim)$ 是否存在最大元 M $(\forall A (A \lesssim M))$?

例如 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 可作为最大元. 是否唯一? $\{e_1 + \cdots + e_n, e_2 + \cdots + e_n, \cdots, e_n\}$ 亦可

猜想: 在集合元素大小的意义下唯一. 事实上, 由于最大元之间必定互相等价,

可转而考虑证明如下命题:

Prop. $A \lesssim B \Rightarrow |A| \leq |B|$.

进一步思考后可以发现当A可能线性相关时上述命题将很可能不成立.

一种解决方式是限定A与B本身即线性无关,即

Prop1. 令 $P' = \{C \in \mathcal{P}_{fin}(F^n) \mid C$ 线性无关$\} = \{C \in \mathcal{P}(F^n) \mid C$ 线性无关$\}$.

P' 继承了 $\mathcal{P}_{fin}(F^n)$ 上的preorder $\lesssim$, 在 $(P', \lesssim)$ 中, $A \lesssim B \Rightarrow |A| \leq |B|$.

另一种解决方式是计算A或B中极大无关组的数目而不是全体元素个数. 即

Prop2. 令 $|A|' = \max\{|S| \mid S \subseteq A, S$ 线性无关$\}$

$= |S|$ for some $S \subseteq A$, S 线性无关 $=:$ rank A.

其中第二个等号的良定义性需要教材 P_{85} 推论5保证

有 $A \lesssim B \Rightarrow \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B$.

结合前述分析可知:

① $A \lesssim B \Rightarrow \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B$

② $A \sim B \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

③ M 为 $(\mathcal{P}_{fin}(F^n), \lesssim)$ 最大元 $\Rightarrow \operatorname{rank} M = n$.

△ 矩阵的秩 (矩阵运算见教材 P_{105} 定义2与 P_{107} 结合律 P_{111} 线性方程组的矩阵表示. P_{112}-P_{113} 转置的运算) P_{118} 初等矩阵.

首先定义行/列向量的秩为行/列秩.

基本事实: ① 初等行变换均可逆 $(P^{-1}PA = A)$

② 初等行变换不改变任意多个列向量的线性相关性 $(PAx = 0 \Leftrightarrow Ax = 0)$

③ 初等行变换可能改变某些位置行向量的线性相关性,

但不改变整体的线性相关性及行秩 $(x^TA = 0 \Leftrightarrow (P^{-T}x)^T PA = 0)$

④ 观察行简化阶梯形矩阵得到行秩与列秩相等.

上述推导可立即得到矩阵行秩始终与列秩相等, 进一步可得其也与非零子式的最高阶数相等

1) 令 $A \in \mathbb{F}^{s\times n}$. A_1 为其前 $(s-1)$ 行构成的子矩阵.
若以 A_1 为系数矩阵的解都是方程 $a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0$ 的解,
那么 A 的第 s 行可由 A 的前 $(s-1)$ 行线性表出.

Proof. 利用解空间的维数与矩阵秩的关系可知: $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A_1$.
若不能表出, 则 $\mathrm{rank}A > \mathrm{rank}A_1$. 矛盾.

2) (扩充的向量组的秩的变化关系) 考虑 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{F}^n$. 下面研究
$\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 与 $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta)$ 及 $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$ 的关系.

① $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$, $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta)$, $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) \le \dim \mathbb{F}^n = n$.

② $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + \mathrm{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_t) \ge \mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$.
令 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_p}, \beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_q}$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 的一个极大无关组,
则由定义知 $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) = p + q$, 因
$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_p}$ 线性无关; $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_q}$ 线性无关, 继而
$\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \ge p$; $\mathrm{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_t) \ge q$.
最终得到 $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) = p + q \le \mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + \mathrm{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_t)$.

③ 由②特别地: $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta) \le (\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + 1) \wedge n \wedge (s+1)$

$$\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) \le (\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + \mathrm{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_t)) \wedge n \wedge (s+t)$$
$$\le (\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + t) \wedge n \wedge (s+t).$$

④ $$\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta) = \begin{cases} \mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s), & \beta \text{ 可由 } \alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{ 线性表出}, \\ \mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + 1, & \beta \text{ 不可由 } \alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{ 线性表出}. \end{cases}$$
(不妨 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, ……)

⑤ $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) = \mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ iff. $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出

3) 求矩阵的秩：$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 及相应的极大无关组.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ & 10-\lambda & -5 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ & \lambda-10 & 5 & 1 \\ & 2\lambda+1 & -\lambda-2 & -1 \end{pmatrix}$$

若 $\lambda=10$：上式即为 $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 & 2 \\ & & 5 & 1 \\ & 21 & -12 & -1 \end{pmatrix}$. 秩为3. 第1,2,3个列向量构成极大无关组.

若 $\lambda\neq 10$：上式可化为 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ & \lambda-10 & 5 & 1 \\ & & -\lambda-2-5\frac{2\lambda+1}{\lambda-10} & -1-\frac{2\lambda+1}{\lambda-10} \end{pmatrix}$

若 $\lambda+2+5\frac{2\lambda+1}{\lambda-10}=0$. 有 $(\lambda+5)(\lambda-3)=0$. $\lambda\neq 10 \Rightarrow \lambda=3$ 或 -5.

当 $\lambda=3$ 时. 原矩阵可化为 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ & -7 & 5 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$ 秩为2. 第1,2个列向量构成一组极大无关组.

当 $\lambda=-5$ 时原矩阵可化为 $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ & -15 & 5 & 1 \\ & & & -8/5 \end{pmatrix}$ 秩为3. 第1,2,4个列向量构成极大无关组.

若 $\lambda+2+5\frac{2\lambda+1}{\lambda-10}\neq 0$. 有 $\lambda\neq 3$ 或 5. 原矩阵秩为3. 第1,2,3个列向量构成极大无关组.

4) $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. $\mathrm{rank}A=r$. 令 A_1 为 A 的前 s 行组成的子阵. 则

$\mathrm{rank}A_1 \geq r+s-m$.

类似地, 令 A_2 为 A 的前 s 列组成的子阵, 则

$\mathrm{rank}A_2 \geq r+s-n$.

Proof. 上述命题等价于 对向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$,

$\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) \geq \mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)+s-(s+t)$.

$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t) \leq \mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+t$

这可由 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t) \leq \mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 立即得到.

5) 求矩阵的秩：$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 25 & 21 & 37 & 75 & -42 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$ 及列向量的极大无关组.

原式 $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \\ 25 & 21 & 37 & 75 & -42 \\ -2 & -4 & -13 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 13 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 25 & 21 & 37 & 75 & -42 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ & & 11 & & \\ & -29 & 12 & & 58 \\ & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ & -29 & 12 & & 58 \\ & & 11 & & \\ & & & & \end{pmatrix}$

秩为3. 第1,2,3个列向量构成极大无关组.

6) Recall：对于三对角、Toeplitz矩阵 $\begin{pmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{pmatrix}$

试分析矩阵的秩及极大无关组.

Proof. ① 由前文已证得

$$D_1=\begin{cases} \eta^n(\eta^{-1}a+(n-1)\eta^{-2}(a^2-bc-\eta a)) & (x-\eta)^2\equiv x^2-ax+bc. \\ (\eta_2-\eta_1)^{-1}(\eta_2^{n-2}(a^2-bc-\eta_1 a)-\eta_1^{n-2}(a^2-bc-\eta_2 a)). & \eta_1,\eta_2 \text{为 } x^2-ax+bc=0 \text{ 的两个不同的解.} \end{cases}$$

当 $D_1\neq 0$ 时矩阵满秩.全体列向量为极大无关组.

当 $D_1=0$ 时 若 $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$. 考虑 $(n-1)$ 阶子式不为0, 有秩为 $(n-1)$. 且后 $(n-1)$ 个列向量或前 $(n-1)$ 个列向量为极大无关组.

否则 $b=c=0$. 由 $D_1=0=a^n$ 知 $a=0$. 矩阵秩为0. ϕ 为极大无关组.

② $$D_2=\begin{cases} (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b) & b=c. \\ (b-c)^{-1}(b(a-c)^n-c(a-b)^n) & b\neq c. \end{cases}$$

分析同上,仅讨论 $D_2=0$ 的情形.

若 $b=c$, 有 $a=b$ 或 $a+(n-1)b=0$.

当 $a=b$ 时 $a=b=c$. 矩阵秩为1, 任一向量构成极大无关组.

当 $a=(1-n)b$ 时矩阵为(不严格)对角占优.

当 $b\neq 0$ 时前 $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列构成严格对角占优, 行列式不为 0.

得此时矩阵秩为 $(n-1)$, 前 $(n-1)$ 列为极大无关组.

当 $b=0$ 时 $a=0$, 此时 $a=b=c=0$, 原矩阵秩为 0, ϕ 为极大无关组.

若 $b\neq c$, 有 $b(a-c)^n=c(a-b)^n$.

若 $b(a-c)^{n-1}\neq c(a-b)^{n-1}$, 于是左上角 $(n-1)$ 阶子式不为 0.

否则有 $b(a-c)^{n-1}=c(a-b)^{n-1}$.

若 $c=0$, 由 $b\neq c=0$ 知 $a=c=0$, 秩为 $(n-1)$, 得后 $(n-1)$ 列向量为极大无关组.

若 $c\neq 0$, 则 $a-c\neq 0$, 否则 $a-c=a-b=0$, 这与 $b\neq c$ 矛盾.

于是有 $b/c=(a-b)^n/(a-c)^n=(a-b)^{n-1}/(a-c)^{n-1}$.

$(a-b)/(a-c)=1$ 或 0.

$(a-b)/(a-c)=1$ 蕴含着 $b=c$, 矛盾.

$(a-b)/(a-c)=0$ 蕴含着 $a=b=0$, 得秩 $(n-1)$, 前 $(n-1)$ 列向量为极大无关组.

综上所述: ① $a=b=c\neq 0$: 秩 1, 任一向量构成极大无关组;

② $a=(1-n)b\neq 0$, $b=c$: 秩 $(n-1)$ 前 $(n-1)$ 列为极大无关组.

③ $a=b=c=0$: 秩 0, ϕ 为极大无关组.

④ $b\neq c=a=0$: 秩 $(n-1)$, 后 $(n-1)$ 列为极大无关组,

⑤ $b\neq c$, $a\neq c$ 或 $a\neq 0$, 秩 $(n-1)$, 前 $(n-1)$ 列为极大无关组.