习题课 #6 (Oct. 18)

1) 课上已讲完矩阵分块运算和应用,乘积的行列式.

2) 教材 P_{122} 命题 2. 指导书含两个证明

3) 期中复习(前三章内容).

Prop. $A\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 则有 $\operatorname{rank}A^TA=\operatorname{rank}AA^T=\operatorname{rank}A$.

Prof. 由于 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A^T$. 不妨仅证 $\operatorname{rank}A^TA=\operatorname{rank}A$.

法一: $A^TAx=0 \Rightarrow x^TA^TAx=0 \Rightarrow |Ax|^2=0 \Rightarrow Ax=0$.

即 $\ker A^TA\subseteq\ker A \Rightarrow \dim\ker A^TA\leq\dim\ker A$

$\Rightarrow \operatorname{rank}A\leq\operatorname{rank}A^TA$. 又易知 $\operatorname{rank}A^TA\leq\operatorname{rank}A$. 原命题得证.

法二: 考虑 A^TA 的 r 阶子式: (主子式)

$$A^TA\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ i_1, i_2, \cdots, i_r\end{pmatrix}=\sum_{v_1<\cdots<v_r} A^T\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ v_1, \cdots, v_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} v_1, \cdots, v_r \\ i_1, \cdots, i_r\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{v_1<\cdots<v_r}\left(A\begin{pmatrix} v_1, \cdots, v_r \\ i_1, \cdots, i_r\end{pmatrix}\right)^2$$

对于 $\operatorname{rank}A=r$, 存在非零 r 阶子式, 对应 A^TA 存在非零 r 阶主子式.

故而 $\operatorname{rank}A^TA\geq r=\operatorname{rank}A$.

Rem. 对于 $A\in\mathbb{R}^{s\times n}$, 若 $s\ll n$, 则有

$\operatorname{rank}A^TA=\operatorname{rank}A\leq\min(s,n)=s$. 但 $A^TA\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

即: 我们由此得到了一个低秩矩阵(秩远远小于方阵的大小)

对于复方阵, 有反例 $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Prop. $A\in\mathbb{R}^{s\times n}$ 有 $\operatorname{rank} AA^TA=\operatorname{rank} A^TAA^T=\operatorname{rank} A$.

Proof. 同样地，仅需证明 $\operatorname{rank} A\leq \operatorname{rank} AA^TA$ 即可.

法一：由结论 $\operatorname{rank} ABC\geq \operatorname{rank} AB+\operatorname{rank} BC-\operatorname{rank} B$ 立得结论成立.

法二：$\operatorname{rank} AA^TA\geq \operatorname{rank} AA^TAA^T=\operatorname{rank} AA^T=\operatorname{rank} A$.

类似地，可以得到 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} AA^T=\operatorname{rank} AA^TA=\operatorname{rank} AA^TAA^T=\cdots$

Δ 已证得 $\operatorname{rank} AB\leq \operatorname{rank} A$，$\operatorname{rank} AB\leq \operatorname{rank} B$ $(A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times l})$. 下面研究/讨论等号何时成立.

a) $\operatorname{rank} AB=\operatorname{rank} A$ iff. $\operatorname{rank} AB\geq \operatorname{rank} A$.

又 $\operatorname{Im} AB\subseteq \operatorname{Im} A$，故上述命题也等价于 $\operatorname{Im} AB\supseteq \operatorname{Im} A$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} A\subseteq \operatorname{Im} AB &\Leftrightarrow \forall x\exists y\,(Ax=ABy)\\ &\Leftrightarrow \forall x\exists y\,(x-By\in\ker A)\\ &\Leftrightarrow \forall x\,(x\in\ker A+\operatorname{Im} B)\Leftrightarrow \ker A+\operatorname{Im} B=\mathbb{F}^n.\end{aligned}$$

b) $\operatorname{rank} AB=\operatorname{rank} B$ iff. $\ker AB=\ker B$ iff. $\ker AB\subseteq\ker B$.

$$\begin{aligned}\ker AB\subseteq\ker B &\Leftrightarrow (ABz=0\Rightarrow Bz=0)\\ &\Leftrightarrow (Bz\in\ker A\Rightarrow Bz=0)\\ &\Leftrightarrow (\operatorname{Im} B\cap\ker A=0)\end{aligned}$$

综上所述：$\operatorname{rank} AB=\operatorname{rank} A$ iff. $\ker A+\operatorname{Im} B=\mathbb{F}^n$.

$\operatorname{rank} AB=\operatorname{rank} B$ iff. $\ker A\cap\operatorname{Im} B=0$.

充分条件：$(\ker A=\mathbb{F}^n\ (A=0)$ 或 $\operatorname{Im} B=\mathbb{F}^n$ (B行满秩)$)\Rightarrow \ker A+\operatorname{Im} B=\mathbb{F}^n$.

$(\ker A=0$ (A行满秩)或 $\operatorname{Im} B=0\ (B=0))\Rightarrow \ker A\cap\operatorname{Im} B=0$.

* 基本事实：对于 $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$，$\ker A=0\Leftrightarrow$ A行满秩

$\operatorname{Im} A=\mathbb{F}^s$ (或 $\operatorname{coker} A=0$) $\Leftrightarrow$ A列满秩.

Corl. $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times l}$,

① $C\in\mathbb{F}^{s\times m}$. 有 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A\Rightarrow\operatorname{rank}CAB=\operatorname{rank}CA$.

② $C\in\mathbb{F}^{l\times p}$. 有 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}B\Rightarrow\operatorname{rank}ABC=\operatorname{rank}BC$.

Proof. ① $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A$

$\Rightarrow \ker A+\operatorname{Im}B=\mathbb{F}^n$

$\Rightarrow \ker CA+\operatorname{Im}B=\mathbb{F}^n \quad (\ker A\subseteq\ker(CA))$

$\Rightarrow \operatorname{rank}CAB=\operatorname{rank}CA$

② $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}B$

$\Rightarrow \ker A\cap\operatorname{Im}B=0$

$\Rightarrow \ker A\cap\operatorname{Im}BC=0 \quad (\operatorname{Im}B\supseteq\operatorname{Im}BC)$

$\Rightarrow \operatorname{rank}ABC=\operatorname{rank}BC$.

Corl. $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 易得包含关系

a) $\mathbb{F}^n\supseteq\operatorname{Im}A\supseteq\operatorname{Im}A^2\supseteq\cdots\supseteq\operatorname{Im}A^k\supseteq\operatorname{Im}A^{k+1}\supseteq\cdots$

b) $0\subseteq\ker A\subseteq\ker A^2\subseteq\cdots\subseteq\ker A^k\subseteq\ker A^{k+1}\subseteq\cdots$

求证: 1) 序列 a) 与 b) 均为有限长序列, 即其中真包含(于)关系个数有限.

2) 若 $\operatorname{Im}A^k=\operatorname{Im}A^{k+1}$, 则有 $\operatorname{Im}A^{k+1}=\operatorname{Im}A^{k+2}$;

若 $\ker A^k=\ker A^{k+1}$, 则有 $\ker A^{k+1}=\ker A^{k+2}$.

立即得上述序列可写为

a) $\mathbb{F}^n\supsetneq\operatorname{Im}A\supsetneq\operatorname{Im}A^2\supsetneq\cdots\supsetneq\operatorname{Im}A^s=\operatorname{Im}A^{s+1}=\operatorname{Im}A^{s'}\ \forall s'>s$.

b) $0\subsetneq\ker A\subsetneq\ker A^2\subsetneq\cdots\subsetneq\ker A^p=\ker A^{p+1}=\ker A^{p'}, \forall p'>p$.

3) $s=p$.

Proof. 由 $\dim \mathbb{F}^n = n$ 有限知 1) 成立. 下证 2):

$\mathrm{Im} A^k = \mathrm{Im} A^{k+1}$ iff. $\mathrm{rank} A^k = \mathrm{rank} A^{k+1}$

(注意! 一般地, $\mathrm{Im} A = \mathrm{Im} B \Rightarrow \mathrm{rank} A = \mathrm{rank} B \not\Rightarrow \mathrm{Im} A = \mathrm{Im} B$)

即 $\mathrm{rank}\, A^k A = \mathrm{rank} A^k$. 利用前述结论, 这等价于

$\ker A^k + \mathrm{Im} A = \mathbb{F}^n$.

又 $\mathrm{rank} A^k = \mathrm{rank} A^{k+1} \Rightarrow \dim\ker A^k = \dim\ker A^{k+1} \Rightarrow \ker A^k = \ker A^{k+1}$

于是有 $\ker A^{k+1} + \mathrm{Im} A = \mathbb{F}^n$, 有 $\mathrm{rank} A^{k+1} A = \mathrm{rank} A^{k+1}$. 故 $\mathrm{Im} A^{k+1} = \mathrm{Im} A^{k+2}$.

而另一方面, $\ker A^k = \ker A^{k+1} \Rightarrow \mathrm{rank} A^k = \mathrm{rank} A^{k+1} \Rightarrow \mathrm{Im} A^k = \mathrm{Im} A^{k+1}$

$\Rightarrow \mathrm{Im} A^{k+1} = \mathrm{Im} A^{k+2} \Rightarrow \mathrm{rank} A^{k+1} = \mathrm{rank} A^{k+2} \Rightarrow \ker A^{k+1} = \ker A^{k+2}$.

对于 3), 可由 $\ker A^k = \ker A^{k+1} \Leftrightarrow \mathrm{Im} A^k = \mathrm{Im} A^{k+1}$ 立即得到.

Rem*. $s=p$ 事实上描述了 $\lambda=0$ 对应最大 Jordan 块的尺寸. (极小多项式 λ 的次数).

$A \sim \begin{pmatrix} B & \\ & N \end{pmatrix}$. B 可逆, N 幂零. $s=p$ 为 N 的幂零指数.

Thm. 设 $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 若

a) C 行满秩 ($\mathrm{rank}\, C = m$), 则 C 存在右逆元, 即存在 $D \in \mathbb{F}^{n\times m}$. $CD = I_m$

b) C 列满秩 ($\mathrm{rank}\, C = n$), 则 C 存在左逆元, 即存在 $D \in \mathbb{F}^{n\times m}$. $DC = I_n$.

Proof. a) C 行满秩 $\Rightarrow \mathrm{Im}\, C = \mathbb{F}^m \Rightarrow \forall j\ \exists v_j$ s.t. $Cv_j = e_j$.

取 $D = (v_1, \cdots, v_m)$ 即有 $CD = I_m$.

d) C 列满秩 $\Rightarrow C^T$ 行满秩 $\Rightarrow C^T$ 存在右逆元 F ($C^T F = I_n$)

取 $D = F^T$, 则有 $DC = (C^T F)^T = I_n^T = I_n$.

综上所述，关于 $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$ 行/列满秩有如下等价刻画：

A 行满秩 $(\operatorname{rank}A=s)$	A 列满秩 $(\operatorname{rank}A=n)$
iff. A 行向量线性无关	iff. A 列向量线性无关
iff. A 的列向量秩为 s，张成全空间	iff. A 行向量秩为 n，张成全空间
iff. $\operatorname{Im}A=\mathbb{F}^s$ $(\operatorname{coker}A=0)$	iff. $\ker A=0$
iff. $Ax=b$ 对任一 $b\in\mathbb{F}^s$ 有解.	iff. 若 $Ax=b$ 有解，则解唯一
iff. A 存在右逆元	iff. A 存在左逆元.