习题课#10 (Nov. 15)

(1) 判断是否可对角化，求对角化矩阵

(2) 特征值、特征向量的证明，建议指导书 P_{342} 例16. 不涉及正交矩阵相似分类.

△ 线性映射与相抵等价: $(\mathrm{Hom}(V,W))$

考虑 $\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$. 一切线性映射可写为 $x \longmapsto Ax$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的形式.

一般地，对于 $\dim V=n$, $\dim W=m$. 设 $\sigma: V\to W$ 为线性映射.

取定 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$; W 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_m$, 则

$(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n))=(\beta_1,\cdots,\beta_m)A$ 中的矩阵 A 唯一决定 σ 的映射关系.

$$\sigma((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X)=(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n))X=(\beta_1,\cdots,\beta_m)AX.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "X\mapsto(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{F}^m \arrow[d, "X\mapsto(\beta_1,\cdots,\beta_m)X"] \\
V \arrow[r, "\sigma"] & W \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "B"] \arrow[u, "X\mapsto(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)X"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{F}^m \arrow[u, "X\mapsto(\delta_1,\cdots,\delta_m)X"']
\end{tikzcd}$$

类似地，可考虑 σ 在另一组基下的矩阵表示 B

$\uparrow$

$\gamma_1,\cdots,\gamma_n;\ \delta_1,\cdots,\delta_m$

即：同一个线性映射在不同定义域、值域基的选取方式下矩阵表示，相抵.

反之，相抵的两个矩阵可看作同一个线性映射在不同基下的表达方式.

△线性变换与相似等价：$(\mathrm{End}(V))$

线性变换可看做线性映射的一种特殊情形.

对于线性映射 $\sigma: V \to V$. 若取定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 一般考虑同样的基下的矩阵表达：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "X \mapsto (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{F}^n \arrow[d, "X \mapsto (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X"] \\
V \arrow[r, "\sigma"] & V \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "B"] \arrow[u, "X \mapsto (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)X"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{F}^n \arrow[u, "X \mapsto (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)X"']
\end{tikzcd}$$

类似地，可考虑 σ 在另一组基 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 下的矩阵表示 B

此时有 $A \sim B$. 结论与前文类似.

Prop. 设 V 为线性空间. $\mathcal{Q} \in \mathrm{Aut}(V)$（自同构），则 $\mathcal{Q} \circ - \circ \mathcal{Q}^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(V))$

特别地，对于 $V = \mathbb{F}^n$ 的情形，设 $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆，则 $Q \circ - \circ Q^{-1}$ 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 自同构.

Proof. 对于 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$.

$$\mathcal{Q} \circ (k\mathcal{A} + l\mathcal{B}) \circ \mathcal{Q}^{-1} = k\mathcal{Q} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{Q}^{-1} + l\mathcal{Q} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{Q}^{-1}.$$ 线性变换.

$$\begin{cases} \mathcal{Q}^{-1} \circ (\mathcal{Q} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{Q}^{-1}) \circ \mathcal{Q} = (\mathcal{Q}^{-1} \circ \mathcal{Q}) \circ \mathcal{A} \circ (\mathcal{Q}^{-1} \circ \mathcal{Q}) = \mathcal{A} \\ \mathcal{Q} \circ (\mathcal{Q}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{Q}) \circ \mathcal{Q}^{-1} = (\mathcal{Q} \circ \mathcal{Q}^{-1}) \circ \mathcal{A} \circ (\mathcal{Q} \circ \mathcal{Q}^{-1}) = \mathcal{A} \end{cases}$$ 同构.

思考：$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}^n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^n))$：$Q \longmapsto Q \circ - \circ Q^{-1}$

是否为线性映射？ 是否为单射？ 是否为满射？ $QIQ^{-1} = I$.

$$QAQ^{-1} = Q_1AQ_1^{-1} \Rightarrow QQ_1^{-1} = \lambda I.$$

△ 相抵标准形与相似标准形

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则 A 相抵于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ iff. 存在可逆 P，Q s.t. $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

即 A 相抵于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=r$. 反之利用 A 的阶梯形知其成立.

故 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 在相抵关系中可划分为 $\min(m,n)+1$ 类，对应于

$$\left\{ \left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \,\middle|\, 0\le r\le \min(m,n) \right\}.$$

$$A\in\left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \text{ iff. } \mathrm{rank}A=r.$$

再设 $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 由于 $B_1\sim B_2 \Rightarrow \det(\lambda I-B_1)=\det(\lambda I-B_2) \Leftrightarrow f_{B_1}(\lambda)=f_{B_2}(\lambda)$.

那么不同的特征多项式必定对应相似关系下不同的等价类.

例如 $I \nsim -I$. 于是 $|\mathbb{F}|=+\infty$ 时相似等价类必定有无穷个，远远多于相抵等价类. 为讨论方便，下面仅针对可对角化的矩阵进行分析.

Prop. 若 B_1 和 B_2 均可对角化，则 $B_1\sim B_2 \Leftrightarrow f_{B_1}(\lambda)=f_{B_2}(\lambda)$.

Proof. 只需说明必要性. 令 $f_{B_1}(\lambda)=f_{B_2}(\lambda)$. $B_1\sim \mathrm{diag}\{d_1^{(1)},\cdots,d_n^{(1)}\}$. $B_2\sim\mathrm{diag}\{d_1^{(2)},\cdots,d_n^{(2)}\}$.

于是有 $\prod_{k=1}^{n}(x-d_k^{(1)})=\prod_{k=1}^{n}(x-d_k^{(2)})$

由归纳法不难得到 $d_1^{(1)},\cdots,d_n^{(1)}$ 与 $d_1^{(2)},\cdots,d_n^{(2)}$ 至多相差 n 元排列.

要证 $B_1\sim B_2$ 只要证 $\mathrm{diag}\{d_1^{(1)},\cdots,d_n^{(1)}\}\sim\mathrm{diag}\{d_1^{(2)},\cdots,d_n^{(2)}\}$.

进而只需说明 $\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} b & \\ & a \end{pmatrix}$，$\forall a,b\in\mathbb{F}$，再利用归纳即可.(?)

而 $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & \\ & a \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

Cor. 设 $\mathcal{D}_n$ 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中可对角化的矩阵全体，则其在相似关系中可划分为

$$\left\{ [\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)] \,\middle|\, (d_1,\cdots,d_n)\in \mathbb{F}^n/S_n \right\}.$$

也由其特征多项式唯一决定.

(1) (相似不变)

(a) $A_1\sim A_2 \Rightarrow kA_1\sim kA_2,\ A_1^T\sim A_2^T,\ f(A_1)\sim f(A_2)$

(b) $A_1B_1=B_1A_1$, $A_1\overset{P}{\sim}A_2,\ B_1\overset{P}{\sim}B_2 \Rightarrow A_2B_2\sim B_2A_2$.

($A_1=PA_2P^{-1}$, $B_1=PB_2P^{-1}$ 须为同一可逆矩阵)

(c) $A_1\sim A_2 \Rightarrow \det A_1=\det A_2,\ f_{A_1}(\lambda)=f_{A_2}(\lambda),\ \mathrm{Tr}A_1=\mathrm{Tr}A_2$.

(d) $A_1\sim A_2,\ A_1^2=A_1 \Rightarrow A_2^2=A_2$.

(e) $A_1\sim A_2,\ A_1^2=I \Rightarrow A_2^2=I$.

(f) $A_1\sim A_2,\ A_1^k=0 \Rightarrow A_2^k=0$

$A_1\sim A_2,\ A_1^{k-1}\neq 0 \Rightarrow A_2^{k-1}\neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F^n \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "P"] & F^n \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "P"] & F^n \arrow[r] \arrow[d, "P"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^n \arrow[r, "A_2"] & F^n \arrow[r, "A_2"] & F^n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Δ 特征多项式与特征子空间.

令 $A\in F^{n\times n}$, $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

称 λ_i 为A的一个特征值, 若 $f(\lambda_i)=0$. 此时存在非零 x 使得 $(\lambda_i I-A)x=0$.

称 $\ker(\lambda_i I-A)$ 为关于 λ_i 的一特征子空间.

* $f(\lambda)$ 次数为 n. 但可能不存在任何零点, 对应于A不存在特征值.

存在特征值的充分条件: $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ (代数闭域). $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 且 $2\nmid n$.

* 若 λ_i 为特征值, 则 $V_{\lambda_i}=\ker(\lambda_i I-A)\neq 0$. ($\dim V_{\lambda_i}\geq 1$). 特征向量始终存在

Prop. 若A存在多个不同的特征子空间 $V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_s}$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同, 则

特征子空间中的向量互相线性无关: $\sum_{j=1}^{s}k_jv_j=0\Rightarrow k_j=0,\ \forall j$.

Proof. $\sum_{j=1}^{s}k_jv_j=0 \Rightarrow A^l\sum_{j=1}^{s}k_jv_j=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s}k_j\lambda_j^l v_j=0.\ \forall l$.

$$\Rightarrow (v_1,\cdots,v_s)\begin{pmatrix} k_1 & k_1\lambda_1 & \cdots & k_1\lambda_1^{s-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ k_s & k_s\lambda_s & \cdots & k_s\lambda_s^{s-1}\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (k_1v_1,\cdots,k_sv_s)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \lambda_s & \cdots & \lambda_s^{s-1}\end{pmatrix}=0.$$

Corl. 若 A 有 n 个互不相同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $A\sim \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$（可对角化）.

(2) 判断下列矩阵是否可对角化？求出所有特征值与特征向量？计算方幂的一般形式？

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}4&-5&7\\1&-4&9\\-4&0&5\end{pmatrix}$$

① $\det(\lambda I-A_1)=\begin{vmatrix}\lambda+1&-3&1\\3&\lambda-5&1\\3&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-6\lambda+5+3)-3(-3\lambda+3+3)+3(-3-\lambda+5)$

$=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4)+6\lambda-12=(\lambda-2)\big((\lambda+1)(\lambda-4)+6\big)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

$\lambda=2$ 时：$2I-A_1=\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-3&1\\3&-3&1\end{pmatrix}$. 易得两个线性无关的特征向量 $(1,1,0)^T,(1,0,-3)^T$

$\lambda=1$ 时：$I-A_1=\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&-4&1\\3&-3&0\end{pmatrix}$. 易得一个特征向量为 $(1,1,1)^T$.

于是有 $A_1\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$.

综上所述，A_1 的所有特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$.

相应的特征向量可选为 $v_1=(1,1,0)^T$，$v_2=(1,0,-3)^T$ 对应 $\lambda_1=2$ 且线性无关.

$v_3=(1,1,1)^T$ 对应 $\lambda_2=1$.

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$A_1^m=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^m&&\\&2^m&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}^{-1}$$

其中 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}^{-1}=(-1)\begin{pmatrix}3&-4&1\\-1&1&0\\-3&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4&-1\\1&-1&0\\3&-3&1\end{pmatrix}$.

$$A_1^m=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^m&&\\&2^m&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&-1\\1&-1&0\\3&-3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^m&2^m&1\\2^m&0&1\\0&-3\cdot2^m&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&-1\\1&-1&0\\3&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2^{m+1}&3\cdot2^m-3&1-2^m\\3-3\cdot2^m&2^{m+2}-3&1-2^m\\3-3\cdot2^m&3\cdot2^m-3&1\end{pmatrix}$$

※ 注意验算 $A_1^0=I$. $A_1^1=A_1$.

② $\det(\lambda I-A_2)=\begin{vmatrix}\lambda-4&5&-7\\-1&\lambda+4&-9\\4&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+4)(\lambda-5)+5(\lambda-5)+4(-45+7\lambda+28)$

$=(\lambda-4)(\lambda+4)(\lambda-5)+33\lambda-93$ （常数项为 $80-93=-13$. 只需尝试 $\lambda=\pm1,\pm13$）

$=(\lambda^2-16)(\lambda-5)+33\lambda-93$

$=\lambda^3-5\lambda^2+17\lambda-13$

$=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+13)=(\lambda-1)((\lambda-2)^2+3^2)$

若只考虑 $\mathbb{R}$. 则特征值只有 $\lambda=1$, 对应

$I-A_2=\begin{pmatrix}-3&5&-7\\-1&5&-9\\4&0&-4\end{pmatrix}$. $\ker(I-A_2)=\langle(1,2,1)^T\rangle$

（技巧: 代数重数大于等于几何重数）.
只用给出一个非零解.

对应于 A_2 不可实对角化. 仅有特征值 $\lambda=1$. 特征向量可选为 $(1,2,1)^T$.

若考虑 $\mathbb{C}$: 特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2+3i$, $\lambda_3=2-3i$.

$\lambda_1=1$ 的特征向量可选为 $v_1=(1,2,1)^T$.

$\lambda_2I-A_2=\begin{pmatrix}-2+3i&5&-7\\-1&6+3i&-9\\4&0&-3+3i\end{pmatrix}$ $\ker(\lambda_2I-A_2)=\langle(3-3i,5-3i,4)^T\rangle$

得 $\lambda_2=2+3i$ 对应特征向量 $v_2=(3-3i,5-3i,4)^T$.

由于 $A_2\in\mathbb{R}^{3\times3}$. 立即得 $\lambda_3=2-3i$ 对应的一个特征向量 $v_3=(3+3i,5+3i,4)^T$.

综上所述, A_2 有特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2+3i,\ \lambda_3=2-3i$,

分别对应特征向量可选为 $v_1=(1,2,1)^T,\ v_2=(3-3i,5-3i,4)^T,\ v_3=(3+3i,5+3i,4)^T$

$$A_2\begin{pmatrix}1&3-3i&3+3i\\2&5-3i&5+3i\\1&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3-3i&3+3i\\2&5-3i&5+3i\\1&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2+3i&\\&&2-3i\end{pmatrix}.$$

类似地: $$A_2^m=\begin{pmatrix}1&3-3i&3+3i\\2&5-3i&5+3i\\1&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&(2+3i)^m&\\&&(2-3i)^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3-3i&3+3i\\2&5-3i&5+3i\\1&4&4\end{pmatrix}^{-1}.$$

另外, 由于A为实矩阵, 可将 $Av_2=\lambda_2v_2$, $Av_3=\lambda_3v_3$ 分为实部, 虚部:

$$A_2\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix};\quad A_2\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}.$$

于是有 $$A_2\begin{pmatrix}1&3&-3\\2&5&-3\\1&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-3\\2&5&-3\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&3\\&-3&2\end{pmatrix}$$

即 $$A_2^m=\begin{pmatrix}1&3&-3\\2&5&-3\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&\begin{pmatrix}2&3\\-3&2\end{pmatrix}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-3\\2&5&-3\\1&4&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

其中 $$\begin{pmatrix}2&3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+3i&\\&2-3i\end{pmatrix}$$

当 $2\pm3i$ 对应特殊辐角时有较为简捷的表达式

(3) (Gershgorin circle theorem) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $A=(a_{ij})_{i,j}$

令 $D_i=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a_{ii}|\le\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\},\ i=1,\cdots,n$

则 A 的任一特征值 λ 必定落于至少一个 D_i 中 ($\lambda(A)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}D_i$).

Proof. 令 $Ax=\lambda x$. $x\neq0$. 令 $|x_i|=\max_j|x_j|>0$, 那么由

$$e_i^TAx=e_i^T(\lambda x)\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i\Rightarrow(\lambda-a_{ii})x_i=\sum_{j\ne i}a_{ij}x_j.$$

$$|\lambda-a_{ii}|=|x_i|^{-1}\Big|\sum_{j\ne i}a_{ij}x_j\Big|\le|x_i|^{-1}\sum_{j\ne i}|a_{ij}||x_j|\le\sum_{j\ne i}|a_{ij}|.$$

(4) 任一n阶复矩阵必定相似于一个上三角矩阵.

Proof. 令 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 对阶数 n 归纳. 显然 n=1 时结论成立.

假设结论对 (n-1) 阶复矩阵都成立.

取 λ, $\alpha (\neq 0)$ 为 A 的一个特征值和相应的特征向量.

取 $P=(\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 使得 P 可逆. 那么有

$$A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow AP=(\lambda\alpha, A\alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda & \gamma^T \\ 0 & *\end{pmatrix}$$

于是 $A \sim \begin{pmatrix}\lambda & \gamma^T \\ & *\end{pmatrix}$. 利用归纳假设即得结论成立.

Remark: a) 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上可考虑正交矩阵 ($QQ^T=I_n$). 推广至 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上可考虑酉矩阵 (unitary). ($QQ^*=I_n$). 上述证明中 P 可取酉矩阵满足条件, 则最终结论变为: 任一 n 阶复矩阵酉相似于一个上三角矩阵 (Schur分解)

b) 对于 n 阶实矩阵, 若已知其特征多项式在 $\mathbb{C}$ 上的根全为实数, 则其正交相似于一个(实)上三角阵.

c) 利用 2) 中区分特征值, 特征向量的思想, 可知任一 n 阶实矩阵相似于一个准上三角矩阵. 对角元为 1 阶或 2 阶, 且 1 阶块个数对应特征多项式实根个数

(5) 特征子空间维数不超过特征值作为特征多项式的零点重数.

(代数重数 $\geq$ 几何重数)

Proof. 令 $A \in F^{n\times n}$. V_λ 为特征子空间. 设其维数为 s, 即存在 $v_1, \cdots, v_s \in V_\lambda$ 线性无关, $Av_1=\lambda v_1, \cdots, Av_s=\lambda v_s$.

取可逆矩阵 $P=(v_1, \cdots, v_s, w_{s+1}, \cdots, w_n)$, 则有

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda I_s & * \\ & *\end{pmatrix} \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix}\lambda I_s & * \\ & *\end{pmatrix}$$

$$\det(\mu I-A)=\det\begin{pmatrix}(\mu-\lambda)I_s & -* \\ & \mu I-*\end{pmatrix} \Rightarrow (\mu-\lambda)^s \mid f_A(\mu).$$