习题课 #13 (Dec.06)

1) 用正交变换将实二次型化为标准型并判断正定性.

带不确定系数. 结合顺序主子式判断.

2) 关于正定问题的证明

3) 教材 $P_{202}$ 11, 12 题说明二次型函数在某曲面上的最值. (指导书 $P_{419}$ 17.18 已涉及)

---

△ 判断实二次型的正定性　令 $A=A^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $x^TAx>0$, $\forall x\neq 0$.

b) $\lambda(A)\subseteq(0,+\infty)$

c) 存在可逆 $P$, $A=P^TP$.

d) $A$ 的所有顺序主子式大于 0.

e) $A$ 的所有主子式大于 0.

---

(1) 判断二次型是否正定:

$f(x_1,x_2,x_3)=99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$.

$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

Proof. $f(x_1,x_2,x_3)=x^T\begin{pmatrix}99&-6&24\\-6&130&-30\\24&-30&71\end{pmatrix}x=:x^TAx$.

$99>0$. $\begin{vmatrix}99&-6\\-6&130\end{vmatrix}>0$. $|A|>0$ (对角占优). 故正定.

$g(x_1,x_2,x_3)=x^T\begin{pmatrix}1&t&5\\t&4&3\\5&3&1\end{pmatrix}x=:x^TBx$.

$B$ 正定 iff. $\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}>0$, $|B|>0$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(4-9) - t(t-15) + 5(3t-20)$$

$$= -5 - t^2 + 15t + 15t - 100$$

$$= -t^2 + 30t - 105 = -(t-15)^2 + 120.$$

$$\begin{cases} 4-t^2 \geq 0 \\ -(t-15)^2+120 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 2 \\ 15-2\sqrt{30} \leq t \leq 15+2\sqrt{30} \end{cases}$$ 矛盾.

故 $g(x_1,x_2,x_3)$ 始终不正定.

(2) (Cholesky 分解) $A=A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 若 $A$ 正定, 则存在对角元全为正的上三角阵 $L^T$ s.t. $A = LL^T$

Proof. 令 $A^{\frac{1}{2}}$ 的 QR 分解为 $A^{\frac{1}{2}} = QL^T$. $L^T$ 上三角, 对角元全为正.
于是有 $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = (QL^T)^T(QL^T) = LL^T$.

(3) 设 $A=A^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆. $A$ 正定 iff. 对任一正定 $B$, $tr(AB)>0$.

Proof. $\Rightarrow$) $tr(AB) = tr(AB^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) = tr(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) > 0$.

$\Leftarrow$) 取 $A$ 的正交对角化 $A = PDP^T$. $P$ 正交. $D$ 对角.

$tr(AB) = tr(DP^TBP) > 0$

取遍 $P^TBP$ 为所有正定对角矩阵, 知 $D$ 正定, 故而 $A$ 正定.

(4)* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $A$ 与 $B$ 正交相似 iff. $A$ 与 $B$, $A^T$ 与 $B^T$ 同时相似.
即存在正交 $P$ 使得 $AP=PB$ iff. 存在可逆 $Q$ s.t. $AQ=QB$. $A^TQ=QB^T$.

Proof. $\Rightarrow$) 当 $P$ 正交时. $A^TP = (PBP^T)^TP = PB^TP^TP = PB^T$.

(⇐) 反之有 $A=QBQ^{-1}=Q^{-T}BQ^{T}$. 于是 $(Q^TQ)B=B(Q^TQ)$

注意到此时必然有 $Q^TQ$ 对称正定，可取正交 $V$ 使得 $Q^TQ=VDV^T$.

其中 $D$ 为对角阵. 而 $AP=PB \Leftrightarrow A=PBP^{-1}$. 即

要找一个正交 $P$ 使得 $(Q^TP)B=B(Q^TP)$.

在分解 $Q^TQ=VDV^T$ 下. $(Q^TQ)B=B(Q^TQ) \Rightarrow D(V^TBV)=(V^TBV)D$

$$\Rightarrow D^{1/2}V^TBV=V^TBVD^{1/2} \Rightarrow VD^{1/2}V^TB=BVD^{1/2}V^T.$$

只需令 $Q^TP=VD^{1/2}V^T$, 验证 $P$ 正交即可.

$$P^TP=(Q^{-T}VD^{1/2}V^T)^T(Q^{-T}VD^{1/2}V^T)$$
$$=VD^{1/2}V^TQ^{-1}Q^{-T}VD^{1/2}V^T=I.$$

5. 令 $A=A^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆, $B=A-\alpha\alpha^T$. 记 $s(A)$, $s(B)$ 分别为 $A$, $B$ 符号差.

求证 $$s(A)=\begin{cases} s(B)+2, & \alpha^TA^{-1}\alpha>1 \\ s(B), & \alpha^TA^{-1}\alpha<1 \end{cases}$$

Proof. $$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ \alpha & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \\ \alpha & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & A-\alpha\alpha^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ & I \end{pmatrix}$$

即 $s\begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ \alpha & A \end{pmatrix}=1+s(B)$.

另一方面: $$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^TA^{-1} \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha^TA^{-1}\alpha & \\ & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ A^{-1}\alpha & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ \alpha & A \end{pmatrix}$$

于是 $\operatorname{sgn}(1-\alpha^TA^{-1}\alpha)+s(A)=1+s(B)$.

$$s(A)=s(B)+1-\operatorname{sgn}(1-\alpha^TA^{-1}\alpha).$$

(6) 讨论 $A=\lambda I+\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ 的符号差(惯性指数).

$$s(\lambda I)=\mathrm{sgn}(\lambda)\cdot n.$$

$$\Rightarrow s(A)=s(\lambda I)+1-\mathrm{sgn}(1-\mathbb{1}^TA^{-1}\mathbb{1})$$

$$\cancel{=s(\lambda I)+1-\mathrm{sgn}(1-\lambda n+n^2)}$$

由 $A\mathbb{1}=\lambda\mathbb{1}+\mathbb{1}\mathbb{1}^T\mathbb{1}=(\lambda+n)\mathbb{1}$ 知

$\lambda\neq-n$ 时, $A^{-1}\mathbb{1}=(\lambda+n)^{-1}\mathbb{1}$. 于是

$$s(A)=s(\lambda I)+1-\mathrm{sgn}\left(1-\frac{n}{\lambda+n}\right)$$

$$=n\,\mathrm{sgn}(\lambda)+1-\mathrm{sgn}\left(\frac{\lambda}{\lambda+n}\right)$$

① $\lambda>0$: $s(A)=n+1-1=n$

② $\lambda=0$: $s(A)=1$

③ $-n<\lambda<0$: $s(A)=-n+1-(-1)=2-n$

④ $\lambda<-n$: $s(A)=-n+1-1=-n$.

对于③: $\mathrm{rank}A\geqslant\mathrm{rank}(\lambda I)-\mathrm{rank}(\mathbb{1}\mathbb{1}^T)=n-1$.

于是正惯性指数为1, 负惯性指数为$(n-1)$.

对于 $C=\mathbb{1}\mathbb{1}^T$. $\mathrm{rank}C=1$.

$\det(\lambda I-C)=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$ $\lambda=n$ 对应特征值. $\mathbb{1}$为特征向量.

即存在正交$P$ s.t. $C=P\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}P^T$.

$$A=\lambda I+C=P\begin{pmatrix}\lambda+n&&&\\&\lambda&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda\end{pmatrix}P^T.$$

得 $\lambda=-n$ 时 $s(A)=1-n$.

(7) 求标准形:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j<k}(-1)^{j+k}x_jx_k,\qquad g(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j<k}|j-k|\,x_jx_k.$$

Proof. $A=\begin{pmatrix}0&-\frac12&\frac12&\\-\frac12&0&-\frac12&\\\frac12&-\frac12&0&\\&&&\ddots\end{pmatrix}=-\frac12 I+\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12&\\-\frac12&\frac12&-\frac12&\\\frac12&-\frac12&+\frac12&\\&&&\ddots\end{pmatrix}$

$$=-\frac12 I+\frac12\alpha\alpha^T,\quad \alpha=(1,-1,\cdots,\pm1)^T.$$

$$\det(\lambda I-A)=\det\left((\lambda+\tfrac12)I-\tfrac12\alpha\alpha^T\right)=(\lambda+\tfrac12)^{n-1}(\lambda+\tfrac12-\tfrac12\alpha^T\alpha)$$
$$=(\lambda+\tfrac12)^{n-1}(\lambda+\tfrac{1-n}{2})$$

得 $A$正交相似于 $\mathrm{diag}\left(\frac{n-1}{2},-\frac12,\cdots,-\frac12\right)$

对应标准形为 $\mathrm{diag}(1,-I_{n-1})$.

$$B=\frac12\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&n-1\\1&0&1&\ddots&\vdots\\2&\ddots&\ddots&\ddots&2\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\n-1&\cdots&2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}-2&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&n-2\\1&1&0&&\\\vdots&\vdots&&\ddots&\\1&n-2&&&\ddots\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}-2&0&1&\cdots&1\\0&-2&1&\cdots&1\\1&1&0&1\cdots&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\1&1&n-3&&\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}-2&&&1&\cdots&1\\&-2&&1&\cdots&1\\&&-2&1&\cdots&1\\1&1&1&&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&&\\1&1&1&&&\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{合同}}\cdots\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}-2&&&\vdots&\vdots\\&\ddots&&\vdots&\vdots\\1&&-2&0&1\\1&\cdots&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}-2&&&\vdots\\&\ddots&&\vdots\\&&-2&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}-2&&\\&\ddots&\\&&-2\end{pmatrix}_{n-1}\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}1&\\&-I_{n-1}\end{pmatrix}.$$