习题课#11 (Nov. 22)

1) 实对称矩阵的正交对角化. 求 A^k.

Recall: 对于 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 存在 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $U^*=U^{-1}$, $U^*AU=T$ 为上三角阵.

Prop. A 为正规矩阵 ($A^*A=AA^*$) iff. 存在 U 满足 $U^*=U^{-1}$, U^*AU 为对角阵.

Proof. 只需证充分性 ($\Rightarrow$): 取 A 的 Schur 分解 $U^*AU=T$ 为上三角阵.

$$A^*A=AA^*\Leftrightarrow (UTU^*)^*(UTU)=(UTU)(UTU)^*\Leftrightarrow T^*T=TT^*.$$

令 $T=\begin{pmatrix} t_{11} & \gamma^T \\ & T_{22}\end{pmatrix}$.

$$T^*T=\begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \\ \overline{\gamma} & T_{22}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & \gamma^T \\ & T_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_{11} & \gamma^T \\ & T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \\ \overline{\gamma} & T_{22}^*\end{pmatrix}=TT^*.$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} |t_{11}|^2 & \overline{t_{11}}\gamma^T \\ \overline{\gamma}t_{11} & \overline{\gamma}\gamma^T+T_{22}^*T_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |t_{11}|^2+\gamma^T\overline{\gamma} & \gamma^T T_{22}^* \\ T_{22}\overline{\gamma} & T_{22}T_{22}^*\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\gamma=0$. $T_{22}^*T_{22}=T_{22}T_{22}^*$. 利用归纳假设即有结论成立.

Cor. A 为 Hermite 矩阵 ($A^*=A$) iff. 存在 U 满足 $U^*=U^{-1}$, U^*AU 为实对角阵.

Proof. 只需证充分性 ($\Rightarrow$). 取 U 满足 $U^*=U^{-1}$, U^*AU 为对角阵.

$$(U^*AU)^*=U^*A^*U=U^*AU, \text{ 为实对角阵}.$$

综上所述, 在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中: 任意矩阵酉相似于上三角阵

任意正规矩阵酉相似于对角阵

任意 Hermite 矩阵酉相似于实对角阵.

而由于两个实矩阵在 $\mathbb{R}$ 上(正交)相似 iff. 在 $\mathbb{C}$ 上(酉)相似, 最后的结论也蕴含了

任意实对称矩阵正交相似于实对角阵.

Prop. $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. A与B在$\mathbb{R}$上相似 $\iff$ A与B在$\mathbb{C}$上相似.

Proof. 只需说明必要性($\Leftarrow$): 设 $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $\det(P+iQ)\neq 0$ 且

$$A(P+iQ)=(P+iQ)B \iff AP=PB.\ AQ=QB.$$

$$\iff A(P+\mu Q)=(P+\mu Q)B,\ \forall \mu\in\mathbb{R}.$$

取 $\mu\in\mathbb{R}$ 使得 $\det(P+\mu Q)\neq 0$, 则有 A与B在$\mathbb{R}$上相似.

1) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 记 $F(A)$ 为 A的所有多项式组成的集合

$C(A)$为与A可交换的所有矩阵组成的集合.

a) 按照矩阵加法和数乘, $F(A)$和$C(A)$为$\mathbb{R}^{n\times n}$的线性子空间. 且 $F(A)\subseteq C(A)$.

b) 若 $B\in C(A)$, 则 $F(B)\subseteq C(A)$.

c) 若B为实对称矩阵, $x^TBx\geq 0, \forall x$, $B^2\in C(A)$, 则 $F(B)\subseteq C(A)$.

Proof. 仅证 c). 由 b) 知只需说明 $B\in C(A)$ 即可, 只需证

存在多项式 g 使得 $g(B^2)=B$ 即可.

令 $B=PDP^{-1}$, 其中 P 为正交矩阵, 那么

$$g((PDP^{-1})^2)=P(g(D^2))P^{-1}, \text{即}$$

只需找 g 使得 $g(D^2)=D$.

这里需要 g 为多项式. 设 $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 那么

$g(D^2)=D \iff g(\lambda_j^2)=\lambda_j.\ j=1,\cdots,n.$

而由于 λ_j 为B的特征值, 设 x_j 为一个特征向量, 于是

$0\leq x_j^TBx_j=\lambda_j x_j^Tx_j=\lambda_j\|x_j\|^2 \Rightarrow \lambda_j\geq 0.$

故而 $\lambda_{j_1}^2=\lambda_{j_2}^2$ 必定蕴含 $\lambda_{j_1}=\lambda_{j_2}$.

不妨记 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中元素互不相同的最长子列.

取 g 为满足 $g(\lambda_k^2)=\lambda_k$, $k=1,\cdots,s$ 即可.

记 $\mathscr{D}$ 为对角矩阵构成的集合，满足：

$\forall D_1, D_2 \in \mathscr{D}$，$D_1$ 对角元按任意次序排列不与 D_2 相等 $(f_{D_1}(\lambda) \neq f_{D_2}(\lambda))$

$\forall$ 对角矩阵 D $\exists \tilde{D} \in \mathscr{D}$ 使得 $\tilde{D}$ 对角元按某一次序排列得到 D $(f_D(\lambda) = f_{\tilde{D}}(\lambda))$.

设 $[A]_{相抵} = \{PAQ \mid P, Q 可逆\}$

$[A]_{相似} = \{P^{-1}AP \mid P 可逆\}$

$[A]_{正交相似} = \{P^{-1}AP \mid P 正交\}$

(i) $\mathbb{F}^{m\times n} = \bigcup\limits_{r=0}^{\min(m,n)} \left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}\right]_{相抵}$

(ii) $\{可对角化 n 阶矩阵\} = \bigcup\limits_{D\in\mathscr{D}} [D]_{相似}$

(iii) $\{实对称 n 阶矩阵\} = \bigcup\limits_{D\in\mathscr{D}} [D]_{正交相似} = \bigcup\limits_{D\in\mathscr{D}} [D]_{相似}$.

且上述集合之并均互不相交，构成相抵/相似/正交相似等价类.

2) 正规矩阵对应不同特征值的特征向量一定正交. 特别地，这对于实对称矩阵也成立.

Proof. 令 A 为正规矩阵. $A^*A = AA^*$.

设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$.

$x_1^*(\lambda_2 x_2) = x_1^* A x_2 = (A^* x_1)^* x_2$.

Claim. $A^*A = AA^*$. $A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^*\alpha = \bar{\lambda}\alpha$.

由于 A^* 与 A 可交换，$(\lambda I - A)$ 与 $(\bar{\lambda} I - A^*)$ 也可交换.

$\|(\bar{\lambda} I - A^*)\alpha\|^2 = \alpha^*(\bar{\lambda} I - A^*)^*(\bar{\lambda} I - A^*)\alpha$

$= \alpha^*(\bar{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A)\alpha = \|(\lambda I - A)\alpha\|^2 = 0$.

于是 $x_1^*(\lambda_2 x_2) = (\bar{\lambda}_1 x_1)^* x_2 = \lambda_1 x_1^* x_2$. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x_1^* x_2 = 0$.

3) (Fibonacci) $a_0=0$. $a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $\forall n=0,1,2,\cdots$.
求 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的通项公式.

令 $\alpha_n=(a_{n+1},a_n)^T$，则有

$$\alpha_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A\alpha_n.$$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 实对称.

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1=(\lambda-\varphi)(\lambda+\varphi^{-1}).\quad \varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}.$$

① $\lambda_1=\varphi$. $\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}\varphi-1&-1\\-1&\varphi\end{pmatrix}$. 得一个特征向量为 $(\varphi,1)^T$.

② $\lambda_2=-\varphi^{-1}$. $\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}-\varphi^{-1}-1&-1\\-1&-\varphi^{-1}\end{pmatrix}$. 得一个特征向量为 $(1,-\varphi)^T$.

*对于一般的实对称矩阵，需要在每个特征子空间进行一次正交化.

得 $AP=PD$. $P=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}\begin{pmatrix}\varphi&1\\1&-\varphi\end{pmatrix}$. $D=\mathrm{diag}\{\varphi,-\varphi^{-1}\}$

$$\alpha_n=A^n\alpha_0=(PDP^{-1})^n\alpha_0=PD^nP^T\alpha_0$$

$$=\frac{1}{1+\varphi^2}\begin{pmatrix}\varphi&1\\1&-\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^n&\\&(-\varphi^{-1})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi&1\\1&-\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+\varphi^2}\begin{pmatrix}\varphi&1\\1&-\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}\\(-1)^n\varphi^{-n}\end{pmatrix}$$

$$a_n=(0,1)\alpha_n=(1+\varphi^2)^{-1}(1,-\varphi)\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}\\(-1)^n\varphi^{-n}\end{pmatrix}$$

$$\cancel{=(1+\varphi^2)^{-1}(\varphi^n+(-1)^n\varphi^{2-n})}$$

$$=\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\left(\varphi^n-(-\varphi^{-1})^n\right)$$

其中 $\frac{\varphi}{1+\varphi^2}=\frac{1}{\sqrt5}$. $-\varphi^{-1}=\frac{1-\sqrt5}{2}$. $a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)$

(4)(矩阵范数) 令 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\lambda(A)$ 为 A 的所有复特征值构成的集合。

定义 $\|A\|_2=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$，$\rho(A)=\max\limits_{\lambda\in\lambda(A)}|\lambda|$。

a) $0\leq\|A\|_2<+\infty$，且 $\|A\|_2=0$ iff. $A=0$

Proof. 令 $z=\|x\|^{-1}x$，则 $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\|Az\|$，且 $\|z\|=1$。

显然 $z=(z_1,\cdots,z_n)^T$ 满足 $|z_j|\leq\|z\|=1$，$\forall j$，于是

$$\|Az\|=\|z_1\alpha_1+\cdots+z_n\alpha_n\|$$

$$\leq|z_1|\|\alpha_1\|+\cdots+|z_n|\|\alpha_n\|\leq\|\alpha_1\|+\cdots+\|\alpha_n\|$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 依次为 A 的列向量。

b) $\rho(A)\leq\|A\|_2$。

取 $\lambda\in\lambda(A)$ 使得 $|\lambda|=\rho(A)$。记 λ 对应的一个特征向量为 γ，则

$$\frac{\|A\gamma\|}{\|\gamma\|}=\frac{\|\lambda\gamma\|}{\|\gamma\|}=|\lambda|\leq\|A\|_2\quad(\gamma\neq 0)$$

c) 当 A 为 Hermite 矩阵或实对称矩阵时，$\rho(A)=\|A\|_2$。

设 P 为酉/正交矩阵，满足 $P^{-1}AP=D$ 为对角/实对角矩阵。

$$\|Ax\|^2=x^*A^*Ax=(Px)^*D^*D(Px)$$

$$\|x\|^2=\|Px\|^2.\qquad x\neq 0\Leftrightarrow Px\neq 0$$

于是 $\|A\|_2^2=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*D^*Dx}{x^*x}$

令 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，于是有

$$x^*D^*Dx=\sum_j|\lambda_j|^2|x_j|^2\leq\rho(A)^2\sum_j|x_j|^2=\rho(A)^2\|x\|^2$$

设 $|\lambda_{j_0}|=\rho(A)$，则当 $x=e_{j_0}$ 时可取到等号。故有 $\rho(A)=\|A\|_2$。

d) 举例说明对于一般的实矩阵 A，可能有 $\rho(A)<\|A\|_2$。

只需取 A 使得 $\rho(A)=0$，$A\neq 0$ 即可。

例如 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$。

$\|A+B\|_2 \le \|A\|_2+\|B\|_2$

e) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 有 $\|AB\|_2\le\|A\|_2\|B\|_2$. 进而有 $\|A^n\|_2\le\|A\|_2^n$.

任取 $x\neq 0$, 有 $\|ABx\|\le\|A\|_2\|Bx\|\le\|A\|_2\|B\|_2\|x\|$.

故而 $\|AB\|_2\le\|A\|_2\|B\|_2$.

(f) 令 $S_n=\sum_{k=0}^{n}(k!)^{-1}A^k$. 证明

$\forall i,j$, $\lim_{n\to\infty}S_n(i,j)$ 存在. 记为 $S_\infty(i,j)$. $e^A=(S_\infty(i,j))_{ij}$.

$$\|S_m-S_{m+p}\|_2=\Big\|\sum_{k=m+1}^{m+p}(k!)^{-1}A^k\Big\|_2$$

$$\le\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{1}{k!}\|A\|^k\to 0 \text{ as } m,p\to+\infty.$$

$\left(\frac{\|A\|^k}{k!}\le 2^{-k}\right.$ as long as $\left.k\gg 1\right)$.

由于 $|A(i,j)|^2\le\|\alpha_j\|^2=\|Ae_j\|^2\le\|A\|_2^2$.

$\|S_m-S_{m+p}\|_2\to 0$, $m,p\to+\infty$ 蕴含着

$|S_m(i,j)-S_{m+p}(i,j)|=|(S_m-S_{m+p})(i,j)|\le\|S_m-S_{m+p}\|_2\to 0$, $m,p\to+\infty$.

为 Cauchy 列. 故而收敛. e^A 良定义.

(g) $\rho(A)=0$ iff $\mathrm{Tr}A^k=0,\ \forall k\ge 1$ iff A 幂零.

设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP=T$ 为上三角矩阵.

由 $\lambda(A)=\lambda(T)$ 知 T 的对角元为 A 的全部特征值.

$\rho(A)=0\Rightarrow\lambda(T)=\{0\}\Rightarrow T$ 的对角元全为 0

$\Rightarrow T^k$ 的对角元全为 0, $\forall k\ge 1$.

$\Rightarrow \mathrm{Tr}\,T^k=0,\ \forall k\ge 1$

$\Rightarrow \sum_j \lambda_j^k=0,\ \forall k\ge 1$

设 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 中有 n_0 个 0, n_1 个 λ_{j_1}, $\cdots$, n_s 个 λ_{j_s}; $0,\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_s}$ 互不相同.

$n_0+n_1+\cdots+n_s=n$. 那么 $\sum_{l=1}^{s}n_l\lambda_{j_l}^k=0,\ \forall k\ge 1$

$\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_s}V(\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_s})\begin{pmatrix}n_1\\ \vdots\\ n_s\end{pmatrix}=0$ 知矛盾. 于是 $\lambda_j=0,\ \forall j$.

而 A 幂零 $\Leftrightarrow T$ 幂零 $\Leftrightarrow \exists N$ s.t. $\lambda_j^N=0,\ \forall j$. 故原命题得证.

(5) 正交矩阵对应于不同特征值的特征向量正交.

(酉矩阵)对应于不同特征值的特征向量正交.

Proof. $Ax=\lambda x,\ Ay=\mu y.$

a) $\lambda x^Ty=(Ax)^Ty=x^TA^Ty=x^TA^{-1}y=\mu^{-1}x^Ty.$

$\Rightarrow \lambda=\mu^{-1}$ 或 $x^Ty=0.$

对于正交矩阵而言特征值仅为 ± 1, 即 $\lambda=\mu^{-1}\Leftrightarrow\lambda=\mu.$

b) $(\lambda x)^*y=(Ax)^*y=x^*A^*y=\mu^{-1}x^*y$

$\Rightarrow \bar\lambda=\mu^{-1}$ 或 $x^*y=0$. 类似地有结论成立.

(6) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. TFAE:

(i) $\exists B\in\mathbb{R}^{n\times n},\ A=B^TB$

(ii) A 为实对称矩阵, 且 $x^TAx\geq 0,\ \forall x$

(iii) $\exists C\in\mathbb{R}^{n\times n},\ C^T=C,\ A=C^2$, 且这样的 C 唯一.

Proof. 只需证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii): 取 A 的正交对角化: $A=P^{-1}DP$. P 正交. D 对角.

任取 A 的特征值 λ 及相应的一个特征向量 v, 有

$v^TAv=\lambda v^Tv=\lambda\|v\|^2\geq 0\Rightarrow\lambda\geq 0$. 故 $D^{\frac12}$ 存在.

取 $C=P^{-1}D^{\frac12}P$ 即有 $C^T=C,\ A=C^2$.

若 $\tilde C^T=\tilde C,\ A=\tilde C^2$, 取 $\tilde C$ 的正交对角化: $\tilde C=Q^{-1}\tilde DQ$, Q 正交 $\tilde D$ 对角.

于是 $A=\tilde C^2=Q^{-1}\tilde D^2Q=P^{-1}DP$. 得 $\tilde D^2\sim D$. 不妨 $\tilde D^2=D$.

那么 $D(QP^{-1})=(QP^{-1})D$. 令 $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{n_s}\end{pmatrix}$, $QP^{-1}=\begin{pmatrix}* & & 0\\ & * & \\ 0 & & *\end{pmatrix}$.

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同

$\tilde C C^{-1}=Q^{-1}D^{\frac12}QP^{-1}D^{-\frac12}P$

$=Q^{-1}(QP^{-1})D^{\frac12}D^{-\frac12}P=I$ $\leftarrow$ 由 D 和 QP^{-1} 的结构, $D^{\frac12}QP^{-1}=QP^{-1}D^{\frac12}$.