习题课 #1 (Sep. 13)

1) 含不确定系数的非齐次、齐次方程组
2) P_{15}. 8, P_{26}. 6
3) 6~7题练习量(建议 P_{15} 6 及类似, P_{24} 3)

△ Gauss - Jordan 算法.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{提取系数矩阵和常数项}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{*要求可逆}]{\text{初等行变换}} \underset{\text{(行阶梯形矩阵}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{简化}} \underset{\text{简化行阶梯形矩阵.}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\text{给出解的一般形式}} \begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

初等行变换? 保证方程组在化简的过程中始终可逆.

→ 考虑解如下~~方程~~不等式: $\frac{2x+3}{x+4} \leq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+4} \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) \leq 0 \Rightarrow x \in [-4, 1]$

$[-4, 1]$ 为上述~~方程~~的解集? ×

对于方程 $f(x)=0$, 其解集一般定义为 $\{x \mid f(x)=0\} =: S$.

若 $f(x)=0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in T$ 仅能说明 $S \subseteq T$.

要证 $T \subseteq S$ 一般需要"验算": 经检验, $x=-4$ 时无意义, 其余均满足原不等式.

G-J 算法需要"验算"这一步骤吗? ["$\Rightarrow$" 实为 "$\Leftrightarrow$"].

Remark: 对于一般的多元一次方程组, 在未知系数取值的情况下难以判断解集的表现.

解集的不同分类判断依据（$|S|=0,1$ or $+\infty$）

①剔除所有增广矩阵的零行.

②若存在系数矩阵部分零行对应非零常数项,则方程无解(不相容).（$|S|=0, S=\phi$）.

③行阶梯形矩阵结构保证了②不成立的情形下

非零行数量不超过未知元个数 $\begin{cases}\text{相等} \to \text{方程存在唯一解}(|S|=1)\\ \text{严格小于} \to \text{方程存在自由变量(无穷多解)}\end{cases}$

解集与数域的联系.

若系数及常数项均落于域(或一般地,整环) R 上,则通常认为在其分式域 $Frac(R)$ 上进行求解.如 $\mathbb{Z} \to Frac(\mathbb{Z})=\mathbb{Q}$.原G-J算法及相应解的表现一致.

但对解存在的域加以限制可能会减少甚至消灭解集中的元素.如:

$\begin{cases}2x_1+x_2=1\\ x_3=-4\end{cases}$ $\xrightarrow{in\ \mathbb{Q}}$ $x_1=-\frac{1}{2}(x_2-1), x_2\in\mathbb{Q}, x_3=-4$ 无穷多解

$\xrightarrow{in\ \mathbb{Z}}$ $x_1=-\frac{1}{2}(x_2-1), x_2\equiv 1 \pmod 2$ $x_3=-4$, 无穷多解

$\begin{cases}2x_1=4x_2+1\\ x_3=3\end{cases}$ $\xrightarrow{in\ \mathbb{Q}}$ $x_1=2x_2+\frac{1}{2}, x_2\in\mathbb{Q}, x_3=3$ 无穷多解.

$\xrightarrow{in\ \mathbb{Z}}$ $S=\phi$. 无解

思考:对于在 $\mathbb{Q}$ 中存在无穷多解的线性方程组,是否可能在 $\mathbb{Z}$ 中仅存在有限个甚至唯一解?

1) (P_{15} 8) 投资1万元至 A_1, A_2, A_3,利润率为12%, 15%, 22%.投至 A_3 的钱等于投至 A_1、A_2 的钱之和.求总利润 l 的最值及相应分配方案.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\\ x_3=x_1+x_2\end{cases}$$

$$l=0.12x_1+0.15x_2+0.22x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

解: $x_1=-x_2+5$, $x_3=5$. 由 x_1, x_2 的范围知 $x_1, x_2\in[0,5]$.

$$l = 0.12(-x_2+5)+0.15x_2+0.22\cdot 5 = 0.03x_2+1.7\in[1.7, 1.85].$$

2) (P_{26} 6) 令 $n\geq 2$, n阶矩阵A元素为±1, 则 det A 为偶数

Proof. $A\equiv (1)_{ij} \pmod 2 \Rightarrow \det A\equiv \det(1)_{ij}=0 \pmod 2$

Or: $\det A=\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ k个+1, (n-k)个-1.

3) 是否存在二次函数经过 (0,2), (-4,1), (-1,3), (1,2)

$$\begin{cases} c=2 \\ 16a-4b+c=1 \\ a-b+c=3 \\ a+b+c=2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 & -31 \\ & -2 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & -2 & & 1 \\ & & -15 & -41 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & -2 & & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & \underline{\underline{-11}} \end{pmatrix}$$ 无解

* 技巧: 尽量选取±1作为主元, 避免复杂分数的出现

思考: 至少几个点可以唯一确定一个二次函数 (或一般地, n次函数?)

n次函数需要确定(n+1)个参数, 至少需要(n+1)个方程, 即(n+1)个点.

反之是否任意(n+1)个点总能唯一确定一个n次函数?

首先有最低要求: (n+1)个点 $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ 互不相同,

且进一步地, $\{x_k\}_{k=0}^n$ 互不相同. 否则与函数定义矛盾.

(ref. Vandermonde matrix) P_{40}

4) $\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$ $\quad a_i \neq 0,\ \forall i.$ $\quad \sum_i a_i^{-1} \neq -1.$

解: 令 $X_0 = \sum_i x_i$, 有 $a_i x_i + X_0 = b_i,\ \forall i.$ $\Rightarrow x_i = -a_i^{-1}X_0 + a_i^{-1}b_i,\ \forall i.$

对i求和: $X_0 + (\sum_i a_i^{-1})X_0 = \sum_i a_i^{-1}b_i.$ $\Rightarrow X_0 = (1+\sum_i a_i^{-1})^{-1}\sum_i a_i^{-1}b_i.$

$x_k = -a_k^{-1}(1+\sum_i a_i^{-1})^{-1}\sum_i a_i^{-1}b_i + a_k^{-1}b_k.\ \forall k$ 即为解.

~~5)~~ 讨论线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 3&2&1&1&-3&a \\ &1&2&2&6&3 \\ 5&4&3&3&-1&b \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ &1&2&2&6&3 \\ &-1&-2&-2&-6&a-3 \\ &-1&-2&-2&-6&b-5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ &1&2&2&6&3 \\ &&&&&a \\ &&&&&b-2 \end{pmatrix}$$

方程有解 iff. $a=0,\ b=2.$

在此情形下有行简化阶梯形: $\begin{pmatrix} 1&&-1&-1&-5&-2 \\ &1&2&2&6&3 \end{pmatrix}$

得解集 $x_1 = x_3+x_4+5x_5-2$, $x_2 = -2x_3-2x_4-6x_5+3.$

6) $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&-1&4 \\ 3&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4&2&1&-1&0 \\ &a&-1&-2&1 \\ &&b-2&a&-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4&2a+2&3b-7&3a-5&-4 \\ 8&-a+4&4b-5&4a&-9 \\ 12&a+6&2&-5&1 \end{pmatrix}$

讨论线性方程组的解:

$$\begin{cases} 4x_1+(2a+2)x_2+(3b-7)x_3+(3a-5)x_4=-4 \\ 8x_1+(4-a)x_2+(4b-5)x_3+4ax_4=-9 \\ 12x_1+(a+6)x_2+2x_3-5x_4=1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2a+2 & 3b-7 & 3a-5 & -4 \\ 8 & 4-a & 4b-5 & 4a & -9 \\ 12 & a+6 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 2a+2 & 3b-7 & 3a-5 & -4 \\ & -5a & -2b+9 & -2a+10 & -1 \\ & -5a & -9b+23 & -9a+10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 2a+2 & 3b-7 & 3a-5 & -4 \\ & -5a & -2b+9 & -2a+10 & -1 \\ & & -7b+14 & -7a & 14 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 2a+2 & 3b-7 & 3a-5 & -4 \\ & -5a & -2b+9 & -2a+10 & -1 \\ & & b-2 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 2a+2 & -1 & -5 & +2 \\ & -5a & 5 & 10 & -5 \\ & & b-2 & a & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & +1 & -1 & 0 \\ & a & -1 & -2 & 1 \\ & & b-2 & a & -2 \end{pmatrix}$$

① $a \neq 0$. $b \neq 2$. 存在无穷多解

② $a \neq 0$, $b = 2$. 存在~~唯一解~~→无穷多解

③ $a = 0$. $\to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ & & -1 & -2 & 1 \\ & & b & +4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ & & -1 & -2 & 1 \\ & & & 4-2b & b-4 \end{pmatrix}$

$b = 2$ 无解

$b \neq 2$ 存在~~唯一解~~→无穷多解.

7) 讨论线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -a & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & -1 & -a-2 & 0 \\ & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & a+2 & 0 \\ & & 3a+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a = -\frac{2}{3}$ 时存在无穷多解.
否则存在唯一解(零解)

8) 计算:

$$A=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix} 0 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ 0 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ 0 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0.$$

$$B=\begin{vmatrix} -2c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ -2c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ -2c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 & a_1 \\ -c_2 & b_2 & a_2 \\ -c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

补充: G-J算法在实际应用中存在的潜在问题.

a) 计算复杂度: s行n列增广矩阵需要 $O(s^2n)$ flops

实际问题中若需多次对相同系数矩阵不同常数项进行求解,应如何简化?

b) 计算精度、稳定性: 在考虑计算机存储截断误差时,应对原有算法做怎样的改进?

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & \varepsilon+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{精确解为 } x_1=x_2=1.$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & \varepsilon+1 \\ & 1-\varepsilon^{-1} & 2-\varepsilon^{-1}(\varepsilon+1) \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1=(\varepsilon+1-x_2)/\varepsilon \\ x_2=(2-\varepsilon^{-1}(\varepsilon+1))/(1-\varepsilon^{-1}) \end{cases}$$

$\varepsilon<1e-15$ 时将有显著误差.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon+1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1=2-x_2 \\ x_2=(1-\varepsilon)/(1-\varepsilon) \end{cases}$$

9) 已知 $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0),(-3,2,2)$ 为线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解. 试求其所有解.

解: $\begin{cases} b=d \\ -3a+2b+2c=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}d. \\ b=d. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ \frac{2}{3}c+\frac{1}{3}d & d & c & d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ & 4 & -2 & 4 \\ & \frac{2}{3}c+\frac{4}{3}d & -\frac{1}{3}c-\frac{2}{3}d & \frac{2}{3}c+\frac{4}{3}d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ & 2 & -1 & 2 \\ & & & \end{pmatrix}$$

思考: 通解为何不含参数? (几何意义)