习题课 #5 (Oct. 11)

1) 求齐次、非齐次线性方程组的全部解, 包括含参变量系数.

强调解集结构(线性组合的形式) 注意解集与解空间的区别.

2) 选讲指导书 $P_{146-149}$ 4, 6, 9 之一.

3) 教材 P_{86} 11 对角占优矩阵.

△ 线性方程组解的存在唯一性:

考虑 s 行 n 元线性方程组 $Ax=b$. $A\in F^{s\times n}$. $x\in F^n$. $b\in F^s$.

(I) $(Ax=b$ 有解$)\Leftrightarrow(b\in \mathrm{span}A)$

$\Leftrightarrow \mathrm{span}(A,b)=\mathrm{span}A$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A,b)=\mathrm{rank}A$.

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A,b)\leq\mathrm{rank}A$.

直接推论: 若 A 行满秩, 则 $\mathrm{rank}(A,b)\leq s=\mathrm{rank}A \Rightarrow (Ax=b$ 有解$)$

而若 A 不为行满秩, 可能出现 $\mathrm{rank}(A,b)=\mathrm{rank}A+1>\mathrm{rank}A$. $Ax=b$ 无解.

几何意义: A 行满秩 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A=s \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}A=\dim\{Ax\mid x\in F^n\}=s$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}A=F^n \Leftrightarrow$ A 的列向量张成全空间 F^n $(\mathrm{span}A=F^n)$

因此不论 $b\in F^n=\mathrm{Im}A$ 取何值, 总有 $Ax=b$ 关于 x 有解.

若不然, 可能出现 $b\notin\mathrm{Im}A$. 使得 $Ax=b$ 关于 x 无解.

(II) $(Ax=b$ 至多一解$)\Leftrightarrow(Ax_1=b,\ Ax_2=b\Rightarrow x_1=x_2)$

$\Leftarrow (Ax=0\Rightarrow x=0)$ ("$\Rightarrow$" 需要 $Ax=b$ 解的存在性)

$\Leftrightarrow$ A 列向量线性无关 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A=n$. A 列满秩.

综上所述: ① A 行满秩 $\Rightarrow(Ax=b$ 有解$)$

② A 列满秩 $\Rightarrow (Ax=b$ 至多一解$)$

$\}$ (A 为满秩方阵 $\Rightarrow Ax=b$ 存在唯一解)

此外，$Ax=b$ 有解 iff. $\text{rank}A=\text{rank}(A,b)$ iff. $b\in \text{Im}A$.

在这一条件下，$Ax=b$ 解唯一 iff. A 列满秩（A 为单射）.

Recall：G-J算法的三种情形：对行阶梯形矩阵（增广）

① 存在前n个全为0的行：A 不为行满秩，可能不存在解.

② 不存在前n个全为0的行：A 为行满秩，必定存在解.

删去可能存在的零行后：

① 存在一行仅有最后一个元素（对应常向量非零：$b\notin \text{Im}A$. $Ax=b$ 无解.

② 否则 每行前 n 个不全为0. 对应 $b\in \text{Im}A$（若原矩阵不存在零行，这相当于 A 行满秩）. $Ax=b$ 有解.

在这一情形下，不考虑最后一列，a) 若剩余部分为方阵/对角元非零/不存在自由变量，则 $Ax=b$ 有唯一解（A 列满秩）. b) 否则 有无穷多解.

	不存在零行	存在零行
①	$b\notin \text{Im}A$，无解	$b\notin \text{Im}A$ 无解
② a)	A 行满秩. 列满秩，唯一解	A 行相关. $b\in \text{Im}A$ 列满秩，唯一解.
② b)	A 行满秩. 列相关，无穷多解	A 行相关. $b\in \text{Im}A$. 列相关. 无穷多解

△ 线性方程组的解的结构.

由存在性的相关论断，以下约定 $Ax=b$ 有解，即 $\text{rank}(A,b)\le \text{rank}A$，$b\in \text{Im}A$.

从几何上看，$Ax=b$ 的解可看做满足方程的一个特解 $x_0\,(Ax_0=b)$ 与 $\ker A=\{x\mid Ax=0\}$ 之中任意向量的组合. 故而猜想

$$\{x\in F^n\mid Ax=b\}=\{x_0+z\mid Az=0\}$$ for some fixed x_0 s.t. $Ax_0=b$.

任取 x 使得 $Ax=b$. 令 $z=x-x_0$，则 $Az=Ax-Ax_0=0$，那么

$x=x_0+(x-x_0)=x_0+z\in\{x_0+z\mid Az=0\}$. 反之 任取 z 使得 $Az=0$，均有 $A(x_0+z)=Ax_0+Az=b$. 故而上述猜想成立.

注意到上述集合的相等关系不依赖于 x_0 的取值，事实上这也由

$\{x_1+z \mid Az=0\} = \{x_2+z \mid Az=0\}$，$\forall x_1,x_2$ s.t. $Ax_1=Ax_2=b$. 可得.

在给出 $Ax=b$ 的一个特解的条件下，只需研究 $\ker A$ 的具体表示方式.

容易验证 $\ker A$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间，可取其一个极大无关组(基) $\eta_1,\cdots,\eta_t$.

与教材不同，这里直接给出对 t 的估计，记 A 的行向量一个极大无关组为 $\beta_1^T,\cdots,\beta_r^T$,

其中 $r=\operatorname{rank}A$，那么根据 $\ker A$ 定义 $\beta_i^T\eta_j=0$, $\forall i,j$.

断言 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\eta_1,\cdots,\eta_t$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一个极大无关组，于是 $t=n-r$.

a) 首先证明线性无关，令 $\sum_i k_i\beta_i+\sum_j l_j\eta_j=0$. 有

$$0=\Big(\sum_i k_i\beta_i+\sum_j l_j\eta_j\Big)^T\Big(\sum_i k_i\beta_i+\sum_j l_j\eta_j\Big)=\Big|\sum_i k_i\beta_i\Big|^2+\Big|\sum_j l_j\eta_j\Big|^2$$

利用 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 无关和 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 无关有 $k_1=\cdots=k_r=l_1=\cdots=l_t=0$.

~~b) 若存在 $\gamma\in\mathbb{F}^n$ 不能由 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\eta_1,\cdots,\eta_t$ 表出，~~

b) 任取 $\gamma\in\mathbb{F}^n$，需要找合适的 $k_1,\cdots,k_r$ 使得 $\gamma-\sum_i k_i\beta_i\in\ker A$,

即 $A\gamma=A(\sum_i k_i\beta_i)$. 等价地，需要证明 $\operatorname{Im}A\subseteq\operatorname{span}(A\beta_1,\cdots,A\beta_r)$

显然始终成立 $\operatorname{span}(A\beta_1,\cdots,A\beta_r)\subseteq\operatorname{Im}A$，而 $\dim\operatorname{Im}A=\operatorname{rank}A=r$.

只要证 $A\beta_1,\cdots,A\beta_r$ 线性无关即可.

令 $\sum_i c_iA\beta_i=0$. 则立即有 $\sum_i c_i\beta_i\in\ker A$.

那么 $\sum_i c_i\beta_i$ 必定可由 $\ker A$ 的极大无关组线性表出，于是由 a) 知 $c_1=\cdots=c_r=0$.

综上，我们证得了 A 的行向量的一组基与 $\ker A$ 的一组基构成了 $\mathbb{F}^n$ 的一组基.

且有几何含义：$\operatorname{Im}A^T$ 与 $\ker A$ 始终保持正交.

思考：上述推导是否有漏洞？ $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_2$. $|(1,1)^T|=0$.

对于 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_2^{2\times2}$. $\ker A=\operatorname{Im}A^T=\langle(1,1)^T\rangle$ 有正交关系，不构成基.

1) Thm. 对于 $A\in\mathbb{F}^{s\times n}$，设 $\operatorname{rank}A=r$. 则对

$\operatorname{Im}A^T$ 与 $\ker A$ 始终正交，当 $\mathbb{F}$ 为数域时，$\operatorname{Im}A^T$ 与 $\ker A$ 的极大无关组合成 $\mathbb{F}^n$ 的基

2) 令 $A\in F^{s\times n}$ $\operatorname{rank}A=r$. 以A为系数矩阵的基础解系为 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$,
设 $B=(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})^T\in F^{(n-r)\times n}$. 求以B为系数矩阵的一个基础解系.

Proof. 由 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关知 $\operatorname{rank}B=n-r$, 于是其基础解系个数为 $n-(n-r)=r$.
易知A的行向量均位于 $\ker B$ 中, 取其极大无关组, 由 $\operatorname{rank}A=r$ 知共有r个向量线性无关, 于是构成了以B为系数矩阵的一个基础解系.

注意几个专有名词的差别: 对于 $Ax=b$. 设W为其解集.
① 当 $b=0$ 时(齐次)称W为解空间, 称W的一组基为一个基础解系.
记 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 为一个基础解系, 则 $\sum_j k_j\eta_j$ $(k_j\in F)$ 称为通解
② 当 $b\neq 0$ 时 称 $Ax=0$ 为导出组. 设 x_0 为一特解, W为导出组解空间,
称 x_0+W 为解集. $x_0+\sum_j k_j\eta_j$, $k_j\in F$ 为通解.

3) 求通解与特解:
$$\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,\\7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,\\5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3.\end{cases}$$

增广矩阵:
$$\begin{pmatrix}3&-5&2&4&2\\7&-4&1&3&5\\5&7&-4&-6&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&6&-3&-5&0\\7&-4&1&3&5\\5&7&-4&-6&3\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&6&-3&-5&0\\&-46&+22&38&5\\&-23&+11&19&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&6&-3&-5&0\\&23&-11&-19&3\\&&&&1\end{pmatrix}$$

不存在通解与特解.

4) 求通解与特解:
$$\begin{cases}2x_1+5x_2-8x_3=8,\\4x_1+3x_2-9x_3=9,\\2x_1+3x_2-5x_3=7,\\x_1+8x_2-7x_3=12.\end{cases}$$

增广矩阵：$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ & -11 & 6 & -16 \\ & -29 & 19 & -39 \\ & -13 & 9 & -17 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & -3 & 1 & -5 \\ & -13 & 9 & -17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ & -1 & -2 & -4 \\ & -3 & 1 & -5 \\ & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ & 1 & 2 & 4 \\ & & 7 & 7 \\ & & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ & 1 & 2 & 4 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 19 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$

得通解与特解均为 $(3,2,1)^T$.

5) 求通解：$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

增广矩阵：$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ & & -2 & -4 & -6 \\ 2\lambda & -8 & 18 & 20 & 22 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ & \lambda-8 & 18-3\lambda & 20-4\lambda & 22-5\lambda \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda = 8$ 时，上式 $= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ & & -6 & -12 & -18 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

得一个特解为 $(-2,0,3,0)^T$. 导出组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4, \\ x_3 = -2x_4. \end{cases}$

得一个基础解系为 $\eta_1 = (1,2,0,0)^T$, $\eta_2 = (1,0,-2,1)^T$（分别令 $x_2=1, x_4=0$; $x_2=0, x_4=1$.）

通解为 $(-2,0,3,0)^T + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, $k_1, k_2 \in F$.

~~当 $\lambda \neq 8$ 时，若 $\lambda = 6$，有~~

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ & -2 & 0 & -4 & -8 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 2 & 4 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

得一个特解 $\xi=(0,4,3,0)^T$. 导出组一般解为 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-2x_4\\ x_3=-2x_4.\end{cases}$

得一个基础解系为 $\eta=(0,-2,-2,1)^T$. 通解为 $\xi+k\eta$. $k\in F$.

~~当λ≠8而λ≠6时,有~~ 当 $\lambda\neq 8$ 时:

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&4&5\\ &\lambda-8&18-3\lambda&20-4\lambda&22-5\lambda\\ &&1&2&3\\ &&&&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&-2&-4\\ &\lambda-8&0&2\lambda-16&4\lambda-32\\ &&1&2&3\\ &&&&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}2&&&&\\ &\lambda-8&&2(\lambda-8)&4(\lambda-8)\\ &&1&2&3\\ &&&&0\end{pmatrix}$$

6) 设 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 为 V 的真子空间.

若 $V=W_1\cup\cdots\cup W_s$. 则必有 $|\mathbb{F}|\leq s$.

特别地,数域上的线性空间不能写成有限个真子空间之并.

Proof. 对 V 的维数归纳. 显然 $\dim V=1$ 时结论成立.

当 $\dim V=2$ 时, 设 $W_1=\langle\eta_1\rangle$. 令 $v\in V\setminus W_1$.

$\forall\, k\in\mathbb{F}$, $\eta_1+kv\in V$. 不妨令 $\eta_1+kv\in W_{j_k}$. $j_k\in\{1,\cdots,s\}$.

若 $|\mathbb{F}|>s$. 则必存在 $k_1,k_2\in\mathbb{F}$, $k_1\neq k_2$ 且 $j_{k_1}=j_{k_2}$.

那么 $\eta_1+k_1v\in W_{j_{k_1}}=W_{j_{k_2}}$. $\eta_1+k_2v\in W_{j_{k_2}}=W_{j_{k_1}}$

而由 v 的取法, η_1+k_1v 与 η_1+k_2v 当 $k_1\neq k_2$ 时线性无关, 矛盾.

一般地, 假设 $\dim V=n$ 时成立, ~~令 $W_1=\langle\eta_1,\cdots,\eta_n\rangle$. ($\dim V=n+1$时)~~

~~取 $v\in V\setminus W_1$. 再设 $V_k=\langle\eta_1+kv,\eta_2,\cdots,\eta_n\rangle$~~

不妨 $W_1,\cdots,W_s$ 均为 $(\dim V-1)$ 维子空间. 当 $\dim V=n+1$ 时,

设 $W_1=\langle\eta_1,\cdots,\eta_n\rangle$, $\eta_1,\cdots,\eta_n,v$ 构成 V 的一组基.

那么 $V_k:=\langle\eta_1+kv,\eta_2,\cdots,\eta_n\rangle$ 也为 n 维子空间.

注意到 $V_{k_1}=V_{k_2}\Rightarrow k_1=k_2$，否则 $\dim V_{k_1}=\dim(V_{k_1}+V_{k_2})=n+1$，矛盾.

因此有 $|\mathbb{F}|$ 个互不相同的 $\{V_k\}_{k\in\mathbb{F}}$.

若存在 $k'\in\mathbb{F}$ 使得 $V_{k'}$ 与 $W_1,\cdots,W_s$ 均不相同，

考虑 $V_{k'}=V_{k'}\cap V=\bigcup\limits_{i=1}^{s}(V_{k'}\cap W_i)$，其中

$V_{k'}\cap W_i$ 必为 $V_{k'}$ 的真子空间，否则 $V_{k'}=V_{k'}\cap W_i$ 蕴含着 $V_{k'}=W_i$

由归纳假设，$V_{k'}$ 表示成为 s 个真子空间之并说明 $|\mathbb{F}|\leq s$.

若不然，每个 V_k，$k\in\mathbb{F}$ 均与 $W_1,\cdots,W_s$ 其中一个相等，于是 $|\mathbb{F}|\leq s$.

Proof' (数域限定). 令 $\alpha_k=(1,k,k^2,\cdots,k^{n-1})^T$，$k\in\mathbb{Z}$.

那么 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 任意 n 个均互不相关，于是任意 W_i，$i=1,\cdots,s$

至多包含 $(n-1)$ 个 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 中元素.

又 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subseteq V=W_1\cup\cdots\cup W_s$，矛盾.

7) $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关，可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 表出. 则存在 α_k 使得 $\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 无关.

Proof. 若不然，$\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 相关，$\forall k$.

$$\operatorname{rank}(\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_s)=\operatorname{rank}(\beta_2,\cdots,\beta_s)=s-1,\ \forall k.$$

那么 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 可由 $\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出.

由表出的传递性，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 可由 $\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，这与无关性矛盾.

8) $A^T=-A\Rightarrow \operatorname{rank}A$ 始终为偶数.

Proof. 当 $A=0$ 时结论成立.

不妨 A 的前 r 行为行向量的极大无关组. 由对称性，其前 r 列也无关.

$$A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r\quad & \quad n-r \end{array} & \end{array}$$

即 A 的前 r 列能表出后 $(n-r)$ 列.

特别地，(A_{11},A_{12}) 的前 r 列能表出后 $(n-r)$ 列.

于是 $\mathrm{rank}\,A_{11} = \mathrm{rank}(A_{11}\ A_{12}) = r$. 即 $A_{11}^T = -A_{11}$, 且 $\mathrm{rank}\,A_{11} = r$.

$\det A_{11} = \det A_{11}^T = \det(-A_{11}) = (-1)^r \det A_{11}$. 由 A_{11} 满秩知 $\det A_{11} \neq 0$.

于是 $(-1)^r = 1$, 即 $2 \mid r$.

9) $Ax=b$ 有解. 证明方程组任意解第k个分量为0 iff. (A,b) 划去第k列秩减少1.

Proof. $\Rightarrow$) Claim. α_k 不由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$ 线性表出.

否则 $(u_1, \cdots, u_{k-1}, -1, u_{k+1}, \cdots, u_n)^T$ 为导出组的解. 这与任意解第k个分量为0矛盾. 因此若记 A_k 为划去第k列的A. 则

$\mathrm{rank}\,A_k = \mathrm{rank}\,A - 1$.

由题设知. $\mathrm{rank}(A_k, b) = \mathrm{rank}\,A_k = \mathrm{rank}\,A - 1 = \mathrm{rank}(A,b) - 1$.

$\Leftarrow$) 若不然, 存在 $v_1, \cdots, v_n$ 使得 $\sum v_i \alpha_i = b$, 且 $v_k \neq 0$.

那么 α_k 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n, b$ 线性表出,

则 $\mathrm{rank}(A,b) = \mathrm{rank}(A_k, b)$. 矛盾.