

# 卡尔曼滤波器介绍

Greg Welch<sup>1</sup> and Gary Bishop<sup>2</sup>

TR 95-041

Department of Computer Science  
University of North Carolina at Chapel Hill<sup>3</sup>  
Chapel Hill, NC 27599-3175  
翻译：姚旭晨

更新日期: 2006年7月24日, 星期一  
中文版更新日期: 2007年1月8日, 星期一

## 摘要

1960年, 卡尔曼发表了他著名的用递归方法解决离散数据线性滤波问题的论文。从那以后, 得益于数字计算技术的进步, 卡尔曼滤波器已成为推广研究和应用的课题, 尤其是在自主或协助导航领域。

卡尔曼滤波器由一系列递归数学公式描述。它们提供了一种高效可计算的方法来估计过程的状态, 并使估计均方误差最小。卡尔曼滤波器应用广泛且功能强大: 它可以估计信号的过去和当前状态, 甚至能估计将来的状态, 即使并不知道模型的确切性质。

这篇文章介绍了离散卡尔曼理论和实用方法, 包括卡尔曼滤波器及其衍生: 扩展卡尔曼滤波器的描述和讨论, 并给出了一个相对简单的带图实例。

---

<sup>1</sup>welch@cs.unc.edu, <http://www.cs.unc.edu/~welch>

<sup>2</sup>gb@cs.unc.edu, <http://www.cs.unc.edu/~gb>

<sup>3</sup>北卡罗来纳大学教堂山分校, 译者注。

## 1 离散卡尔曼滤波器

1960年，卡尔曼发表了他著名的用递归方法解决离散数据线性滤波问题的论文 [Kalman60]。从那以后，得益于数字计算技术的进步，卡尔曼滤波器已成为推广研究和应用的课题，尤其是在自主或协助导航领域。[Maybeck79] 的第一章给出了一个非常“友好”的介绍，更全面的讨论可以参考 [Sorenson70]，后者还包含了一些非常有趣的历史故事。更广泛的参考包括 [Gelb74, Grewal93, Maybeck79, Lewis86, Brown92, Jacobs93]。

### 被估计的过程信号

卡尔曼滤波器用于估计离散时间过程的状态变量  $x \in \mathbb{R}^n$ 。这个离散时间过程由以下离散随机差分方程描述：

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}, \quad (1.1)$$

定义观测变量  $z \in \mathbb{R}^m$ ，得到量测方程：

$$z_k = Hx_k + v_k. \quad (1.2)$$

随机信号  $w_k$  和  $v_k$  分别表示过程激励噪声<sup>1</sup>和观测噪声。假设它们为相互独立，正态分布的白色噪声：

$$p(w) \sim N(0, Q), \quad (1.3)$$

$$p(v) \sim N(0, R). \quad (1.4)$$

实际系统中，过程激励噪声协方差矩阵  $Q$  和观测噪声协方差矩阵  $R$  可能会随每次迭代计算而变化。但在这儿我们假设它们是常数。

当控制函数  $u_{k-1}$  或过程激励噪声  $w_{k-1}$  为零时，差分方程1.1中的  $n \times n$  阶增益矩阵  $A$  将上一时刻  $k-1$  的状态线性映射到当前时刻  $k$  的状态。实际中  $A$  可能随时间变化，但在这儿假设为常数。 $n \times l$  阶矩阵  $B$  代表可选的控制输入  $u \in \mathbb{R}^l$  的增益。量测方程1.2中的  $m \times n$  阶矩阵  $H$  表示状态变量  $x_k$  对测量变量  $z_k$  的增益。实际中  $H$  可能随时间变化，但在这儿假设为常数。

### 滤波器的计算原型

定义  $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$ （ $-$  代表先验， $\hat{\cdot}$  代表估计）为在已知第  $k$  步以前状态情况下第  $k$  步的先验状态估计。定义  $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$  为已知测量变量  $z_k$  时第  $k$  步的后验状态估计。由此定义先验估计误差和后验估计误差：

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-,$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k$$

<sup>1</sup>原文为 process noise，本该翻译作过程噪声，由时间序列信号模型的观点，平稳随机序列可以看成是由典型噪声源激励线性系统产生，故译作过程激励噪声。

先验估计误差的协方差为：

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], \quad (1.5)$$

后验估计误差的协方差为：

$$P_k = E[e_k e_k^T], \quad (1.6)$$

式1.7构造了卡尔曼滤波器的表达式：先验估计  $\hat{x}_k^-$  和加权的测量变量  $z_k$  及其预测  $H\hat{x}_k^-$  之差的线性组合构成了后验状态估计  $\hat{x}_k$ 。式1.7的理论解释请参看“滤波器的概率原型”一节。

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (1.7)$$

式1.7中测量变量及其预测之差 ( $z_k - H\hat{x}_k^-$ ) 被称为测量过程的革新或残余。残余反映了预测值和实际值之间的不一致程度。残余为零表明二者完全吻合。

式1.7中  $n \times m$  阶矩阵  $K$  叫做残余的增益或混合因数，作用是使1.6式中的后验估计误差协方差最小。可以通过以下步骤计算  $K$ ：首先将1.7式代入  $e_k$  的定义式，再将  $e_k$  代入1.6式中，求得期望后，将1.6式中的  $P_k$  对  $K$  求导。并使一阶导数为零从而解得  $K$  值。详细推导请参照 [Maybeck79, Brown92, Jacobs93]。  $K$  的一种表示形式为：

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \\ &= \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

由1.8式可知，观测噪声协方差  $R$  越小，残余的增益越大  $K$  越大。特别地， $R$  趋向于零时，有：

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}.$$

另一方面，先验估计误差协方差  $P_k^-$  越小，残余的增益  $K$  越小。特别地， $P_k^-$  趋向于零时，有：

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0.$$

增益  $K$  的另一种解释是随着测量噪声协方差  $R$  趋于零，测量变量  $z_k$  的权重越来越大，而  $z_k$  的预测  $H\hat{x}_k^-$  的权重越来越小。另一方面，随着先验估计误差协方差  $P_k^-$  趋于零，测量变量  $z_k$  的权重越来越小，而  $z_k$  的预测  $H\hat{x}_k^-$  的权重越来越大。

## 滤波器的概率原型解释

1.7式的解释来源于贝叶斯规则： $\hat{x}_k$  的更新取决于在已知先前的测量变量  $z_k$  的情况下  $x_k$  的先验估计  $\hat{x}_k^-$  的概率分布。卡尔曼滤波器表达式中包含了状态分布的前二阶矩。

$$\begin{aligned} E[x_k] &= \hat{x}_k \\ E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] &= P_k. \end{aligned}$$

后验状态估计1.7式反应了状态分布的均值（一阶矩）——如果条件式1.3和1.4成立，均值的估计便是正态分布的。后验估计误差协方差1.6式反映了状态分布的方差（二阶非中心矩）。在已知  $z_k$  的情况下， $x_k$  的分布可写为：

$$\begin{aligned} p(x_k|z_k) &\sim N(E[x_k], E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]) \\ &= N(\hat{x}_k, P_k). \end{aligned}$$

有关卡尔曼滤波器的概率原型的更多讨论，请参考 [Maybeck79, Brown92, Jacobs93]。

## 离散卡尔曼滤波器算法

我们先给出卡尔曼滤波器的总体性概述，然后讨论方程式的具体细节及其作用。

卡尔曼滤波器用反馈控制的方法估计过程状态：滤波器估计过程某一时刻的状态，然后以（含噪声的）测量变量的方式获得反馈。因此卡尔曼滤波器可分为两个部分：*时间更新方程*和*测量更新方程*。时间更新方程负责及时向前推算当前状态变量和误差协方差估计的值，以便为下一个时间状态构造先验估计。测量更新方程负责反馈——也就是说，它将先验估计和新的测量变量结合以构造改进的后验估计。

时间更新方程也可视为*预估方程*，测量更新方程可视为*校正方程*。最后的估计算法成为一种具有数值解的*预估—校正算法*，如图1-1所示。

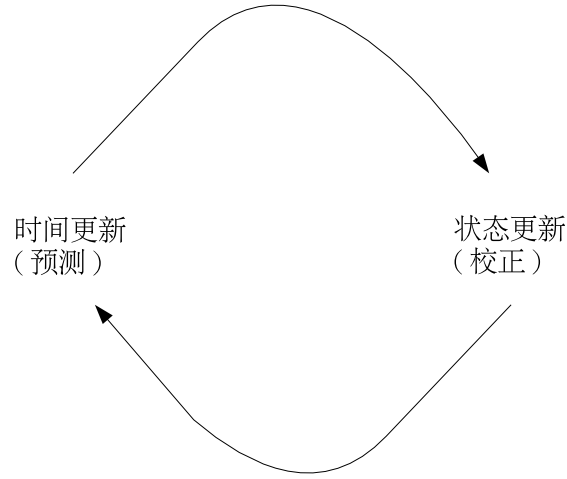


图 1-1: 离散卡尔曼滤波器循环更新图。时间更新方程将当前状态变量作为先验估计及时地向前投射到测量更新方程，测量更新方程校正先验估计以获得状态的后验估计。

表1-1和表1-2分别给出了时间更新方程和测量更新方程的具体形式。

表 1-1: 离散卡尔曼滤波器时间更新方程

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (1.9)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (1.10)$$

请再次注意表1-1中的时间更新方程怎样将状态估计  $\hat{x}_k^-$  和协方差估计  $P_k^-$  从  $k-1$  时刻向前推算到  $k$  时刻。 $A$  和  $B$  来自式1.1， $Q$  来自式1.3，滤波器的初始条件在早先的引用中讨论过。

表 1-2: 离散卡尔曼滤波器状态更新方程

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (1.11)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (1.12)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (1.13)$$

测量更新方程首先做的是计算卡尔曼增益  $K_k$ 。注意1.11式和1.8式是相同的。其次便测量输出以获得  $z_k$ ，然后按1.12式（与1.7式相同）产生状态的后验估计。最后按1.13式估计状态的后验协方差。

计算完时间更新方程和测量更新方程，整个过程再次重复。上一次计

算得到的后验估计被作为下一次计算的先验估计<sup>2</sup>。这种递归推算卡尔曼滤波器最吸引人的特性之一——它比其它滤波器更容易实现：例如维纳滤波器 [Brown92]，每次估计必须直接计算全部数据，而卡尔曼滤波器每次只根据以前的测量变量递归计算当前的状态估计。图1-2将表1-1和表1-2结合显示了滤波器的整个操作流程。

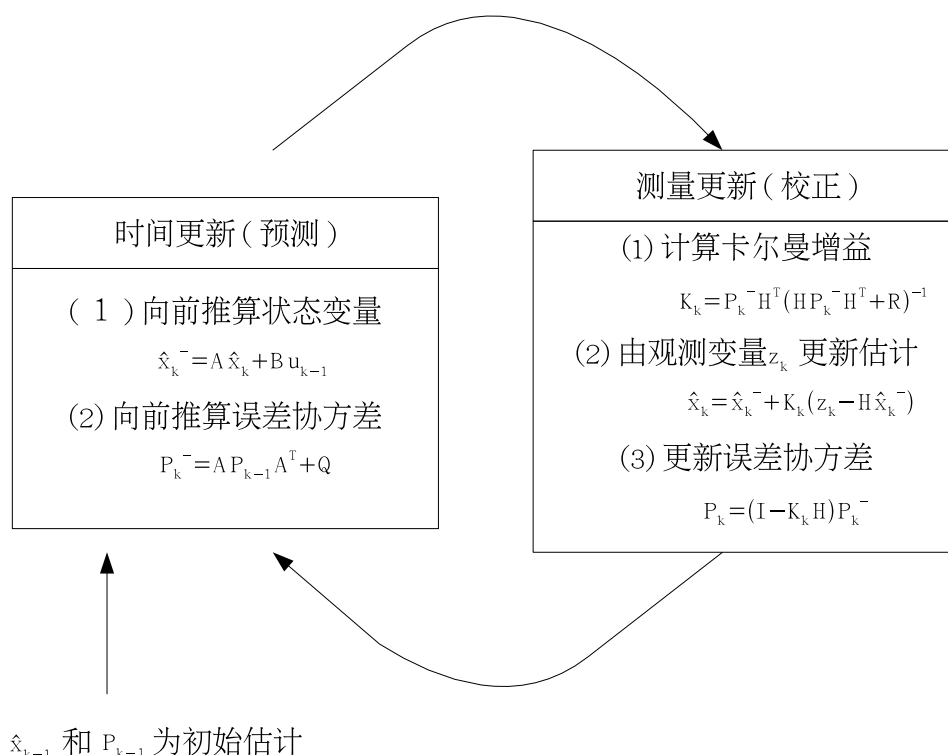


图 1-2: 卡尔曼滤波器工作原理图，由图1-1和表1-1及表1-2结合得到。

## 滤波器系数及调整

滤波器实际实现时，测量噪声协方差  $R$  一般可以观测得到，是滤波器的已知条件。观测测量噪声协方差  $R$  一般是可实现的（可能的），毕竟我们要观测整个系统过程。因此通常我们离线获取一些系统观测值以计算测量噪声协方差。

通常更难确定过程激励噪声协方差的  $Q$  值，因为我们无法直接观测到过程信号  $x_k$ 。有时可以通过  $Q$  的选择给过程信号“注入”足够的不确定性来建立一个简单的（差的）过程模型而产生可以接受的结果。当然在这种情况下人们希望信号观测值是可信的。

在这两种情况下，不管我们是否有一个合理的标准来选择系数，我们通常（统计学上的）都可以通过调整滤波器系数来获得更好的性能。调整

<sup>2</sup>即将1.12和1.13式的结果代入1.9和1.10式，译者注。

通常离线进行，并经常与另一个（确定无误的）在线滤波器对比，这个过程称为系统识别。

在讨论的结尾，我们指出在  $Q$  和  $R$  都是常数的条件下，过程估计误差协方差  $R$  和卡尔曼增益  $K_k$  都会快速收敛并保持为常量（参照图1-2中的更新方程）。若实际情况也如此，那么滤波器系数便可以通过预先离线运行滤波器计算，或者，比如说，用 [Grewal93] 中的方法计算  $P_k$  的稳定值。

实际中，观测误差  $R$  尤其不易保持不变。例如，用我们的光电跟踪仪观察挂在房间顶棚面板上的信号灯时，较近的信号灯会比较远的信号灯具有较小的观测噪声。不仅是观测噪声会变化，有时过程激励噪声协方差  $Q$  也会随着滤波器运行而动态变化——这样  $Q$  变成了  $Q_k$ ——来适应不同的动态状态。例如，在跟踪三维虚拟环境中用户头部位置时，如果用户头部缓慢移动，我们会减小  $Q_k$  的幅度，如果移动开始快速变化，则增加幅度。在这些情况下， $Q_k$  的幅度要根据用户的移动方向和模型的不确定性来选择。

## 2 扩展卡尔曼滤波器

### 被估计的过程信号

如第一节所述，卡尔曼滤波器估计一个用线性随机差分方程描述的离散时间过程的状态变量  $x \in \mathbb{R}^n$ 。但如果被估计的过程和（或）观测变量与过程的关系是非线性的，那应怎么办？一些最著名和有趣的卡尔曼滤波应用就是处理这些情况的。将期望和方差线性化的卡尔曼滤波器称作扩展卡尔曼滤波器（Extended Kalman Filter），简称EKF。

同泰勒级数类似，面对非线性关系时，我们可以通过求过程和量测方程的偏导来线性化并计算当前估计。我们将第一节中的公式换一种方式表示。假设过程仍具有状态向量  $x \in \mathbb{R}^n$ ，但其状态方程已变为非线性随机差分方程的形式。

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}), \quad (2.1)$$

观测变量  $z \in \mathbb{R}^m$  为：

$$z_k = h(x_k, v_k), \quad (2.2)$$

随机变量  $w_k$  和  $v_k$  仍代表过程激励噪声和观测噪声。差分方程式2.1中的非线性函数  $f$  将上一时刻  $k-1$  的状态映射到当前时刻  $k$  的状态。量测方程2.2中的驱动函数  $u_k$  和零均值过程噪声  $w_k$  是它的参数。非线性函数  $h$  反映了状态变量  $x_k$  和观测变量  $z_k$  的关系。

实际中我们显然不知道每一时刻噪声  $w_k$  和  $v_k$  各自的值。但是，我们可以将它们假设为零，从而估计状态向量和观测向量为：

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (2.3)$$

和



$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0), \quad (2.4)$$

其中,  $\tilde{x}_k$  是过程相对前一时刻  $k$  的后验估计。

有一点非常重要, 那就是扩展卡尔曼滤波器的一个基本缺陷: 离散随机变量的分布 (或连续随机变量的密度) 在经过非线性系统转化后不再是正态的了。扩展卡尔曼滤波器其实就是一个通过线性化而达到渐进最优贝叶斯决策的特殊状态估计器。[Julier96]中描述了一项有趣的研究, Julier et al. 设计了扩展卡尔曼滤波器的一种变体, 使得通过非线性转换后的随机变量仍具有正态分布特性。

## 滤波器的计算原型

为了估计一个具有非线性差分 and 量测关系的过程, 我们先给出式2.3和式2.4的一个新的线性化表示:

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + Ww_{k-1}, \quad (2.5)$$

$$z_k \approx \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + Vv_k. \quad (2.6)$$

其中,

- $x_k$  和  $z_k$  是状态向量和观测向量的真值,
- $\tilde{x}_k$  和  $\tilde{z}_k$  来自2.3式和2.4式, 是状态向量和观测向量的观测值,
- $\hat{x}_k$  是  $k$  时刻状态向量的后验估计,
- 类似于1.3式和1.4式, 随机变量  $w_k$  和  $v_k$  表示过程激励噪声和观测噪声。
- $A$  是  $f$  对  $x$  的偏导的雅可比矩阵:

$$A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0),$$

- $W$  是  $f$  对  $w$  的偏导的雅可比矩阵:

$$W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0),$$

- $H$  是  $h$  对  $x$  的偏导的雅可比矩阵:

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0),$$



- $V$  是  $h$  对  $v$  的偏导的雅可比矩阵:

$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0).$$

简单起见, 我们并没有在  $A, W, H, V$  中加入下标  $k$ , 但它们实际上是随时间变化的。

现在我们定义一个新的预测误差的表达式:

$$\tilde{e}_{x_k} \equiv x_k - \tilde{x}_k, \quad (2.7)$$

和观测变量的残余,

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv z_k - \tilde{z}_k, \quad (2.8)$$

请记住我们在实际中无法获得2.7式中的  $x_k$ , 它是状态向量的真值, 也就是我们要估计的对象。同样, 我们也无法获得2.8式中的  $z_k$ , 它是我们用来估计  $x_k$  的观测向量的真值。由2.7式和2.8式我们可以写出误差过程的表达式:

$$\tilde{e}_{x_k} \approx A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \epsilon_k, \quad (2.9)$$

$$\tilde{e}_{z_k} \approx H\tilde{e}_{x_k} + \eta_k, \quad (2.10)$$

$\epsilon_k$  和  $\eta_k$  代表具有零均值和协方差矩阵  $WQW^T$  和  $VRV^T$  的独立随机变量,  $Q$  和  $R$  分别来自1.3式和1.4式。

注意2.9式和2.10式是线性的, 它们很像离散卡尔曼滤波器中的状态差分方程1.1式和量测方程1.2式。这提示我们用2.8式中的观测残余真值  $\tilde{e}_{z_k}$  和第二个(假设的)卡尔曼滤波器去估计2.9式中的预测误差  $\tilde{e}_{x_k}$ 。估计的结果记为  $\hat{e}_k$ , 结合2.7式可以获得初始非线性过程的后验状态估计:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \hat{e}_k. \quad (2.11)$$

式2.9和式2.10中的随机变量具有如下概率分布(参看前面的脚注):

$$p(\tilde{e}_{x_k}) \sim N(0, E[\tilde{e}_{x_k} \tilde{e}_{x_k}^T])$$

$$p(\epsilon_k) \sim N(0, WQ_kW^T)$$

$$p(\eta_k) \sim N(0, VR_kV^T)$$

令  $\hat{e}_k$  的估计值为零, 由以上近似, 可以写出估计  $\hat{e}_k$  的卡尔曼滤波器表达式:

$$\hat{e}_k = K_k \tilde{e}_{z_k}. \quad (2.12)$$

将2.8式和2.12式代回2.11式, 我们看到实际上并不需要第二个(假设的)卡尔曼滤波器:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k \tilde{e}_{z_k} \\ &= \tilde{x}_k + K_k (z_k - \tilde{z}_k)\end{aligned}\quad (2.13)$$

式2.13现在可以用作扩展卡尔曼滤波器的观测变量的更新。其中  $\tilde{x}_k$  和  $\tilde{z}_k$  来自2.3式和2.4式，将1.11式中的观测误差协方差进行适当的替换可以得到卡尔曼增益  $K_k$ 。

表2-1和表2-2给出了扩展卡尔曼滤波器的全部表达式。注意我们用  $\hat{x}_k^-$  替换了  $\tilde{x}_k$  来表达先验概率的意思，并且雅可比矩阵  $A, W, H, V$  也被加上了下标，显式地表明了它们在不同的时刻具有变化的值，每次需要被重复计算。

表 2-1: 扩展卡尔曼滤波器时间更新方程

---


$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (2.14)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \quad (2.15)$$

就像基本的离散卡尔曼滤波器，表2-1中的时间更新方程将状态和协方差估计从  $k-1$  时刻向前推算到  $k$  时刻。2.14式中的  $f$  来自式2.3， $A_k$  和  $W_k$  是  $k$  时刻的过程雅可比矩阵， $Q_k$  是式1.3中  $k$  时刻的过程激励噪声协方差矩阵。

表 2-2: 扩展卡尔曼滤波器状态更新方程

---

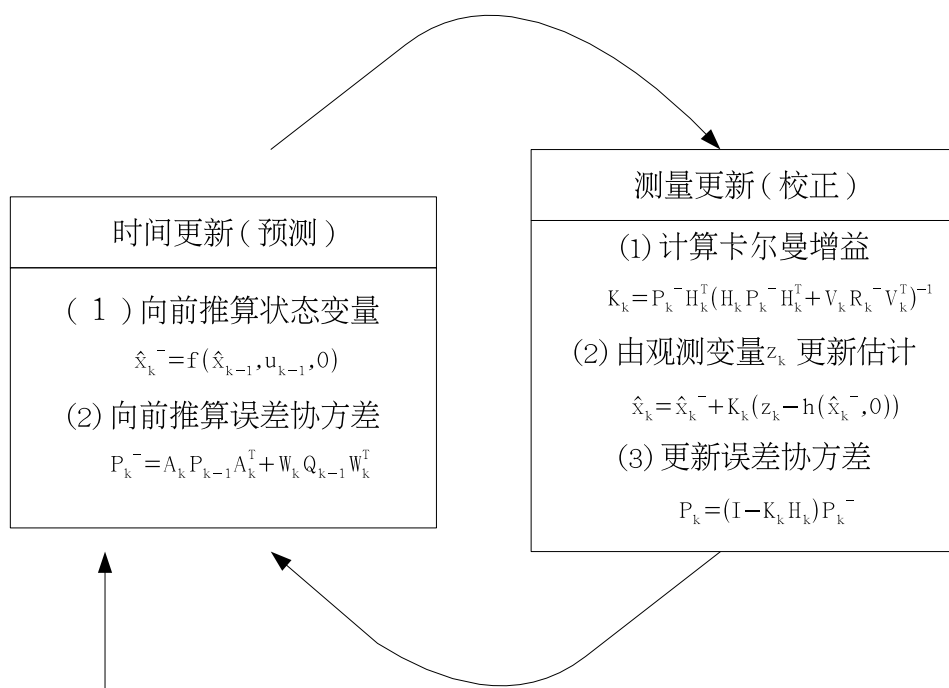

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (2.16)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (2.17)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (2.18)$$

就像基本的离散卡尔曼滤波器，表2-2中的测量更新方程利用观测值变量  $z_k$  的值校正状态估计和协方差估计。2.17式中的  $h$  来自式2.4， $H_k$  和  $V$  是  $k$  时刻的测量雅可比矩阵， $R_k$  是式1.4中  $k$  时刻的观测噪声协方差矩阵（注意下标  $k$  表示  $R_k$  随时间变化）。

扩展卡尔曼滤波器的基本运行流程与图1-1中的线性离散卡尔曼滤波器相同。图2-1将图1-1与表2-1和表2-2中的表达式结合。



$\hat{x}_{k-1}$  和  $P_{k-1}$  为初始估计

图 2-1: 扩展卡尔曼滤波器工作原理图, 由图1-1和表2-1及表2-2结合得到。

扩展卡尔曼滤波器的一个重要特性是卡尔曼增益  $K_k$  的表达式中的雅可比矩阵  $H_k$  能够正确地传递或“加权”观测信息中的有用部分。例如, 如果通过  $h$  观测变量  $z_k$  和状态变量没有一一对应的关系, 雅可比矩阵  $H_k$  便通过改变卡尔曼增益从而使得残余  $z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)$  中真正作用于状态变量的部分被加权。当然, 如果整个观测中观测变量  $z_k$  和状态变量通过  $h$  都没有一个一一对应的关系, 那么滤波器很快就会发散。这种情况下过程是不可观测的。

### 3 卡尔曼滤波器实践: 估计随机常数

前两节我们讨论了离散卡尔曼滤波器和扩展卡尔曼滤波器的基本形式。在这儿, 我们给出一个简单的例子以帮助读者更好地理解卡尔曼滤波器的实现和性能。Andrew Straw在 <http://www.scipy.org/Cookbook/KalmanFiltering> 上给出了使用Python/SciPy的具体实现方法。

#### 过程模型

在这个简单的例子里我们估计一个常数随机变量, 比如电压。假设我们可以测量这个常数的幅值, 但观测幅值中掺入了幅值均方根 (Root-

Mean-Square, RMS) 为 0.1 伏的白噪声 (比如在模数转换器不是很准确的情况下)。下面的线性差分方程描述了整个过程:

$$\begin{aligned} x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_k \\ &= x_{k-1} + w_k \quad , \end{aligned}$$

观测变量  $z \in \mathbb{R}^1$  为:

$$\begin{aligned} z_k &= Hx_k + v_k \\ &= x_k + v_k \quad . \end{aligned}$$

过程的状态不随时间变化, 所以  $A = 1$ ; 没有控制输入, 所以  $u = 0$ ; 包含噪声的观测值是状态变量的直接体现, 所以  $H = 1$ 。(注意有些地方我们忽略了下标  $k$ , 因为对应的系数在这个例子中为常数。)

### 滤波器方程和参数

时间更新方程为:

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1},$$

$$P_k^- = P_{k-1} + Q.$$

测量更新方程为:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- (P_k^- + R)^{-1} \\ &= \frac{P_k^-}{P_k^- + R} \quad , \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \hat{x}_k^-),$$

$$P_k = (I - K_k)P_k^-.$$

假设过程激励噪声方差  $Q$  非常小,  $Q = 10^{-5}$  (也可以令  $Q = 0$ , 但这是一个小的非零常数可以方便地调整滤波器参数, 下面将会证明)。再假设由经验我们知道随机常数的真值具有标准正态分布, 因此我们令滤波器的初始条件为零, 即  $\hat{x}_{k-1} = 0$ 。

类似地, 我们要选择  $P_{k-1}$  的初值  $P_0$ 。如果确定初始状态估计  $\hat{x}_0 = 0$ , 可以令  $P_0 = 0$ 。但因为初始状态估计  $\hat{x}_0$  并不确定, 令  $P_0 = 0$  可能会使滤波器一直产生  $\hat{x}_k = 0$  的结果。就像实验验证的那样,  $P_0$  的选择并不关键, 几乎任何  $P_0 \neq 0$  都会使滤波器最终收敛。在这里我们令  $P_0 = 1$ 。

## 模拟实验

首先我们令常标量  $x = -0.37727$ （因为  $x$  是真值所以并没有  $\hat{\phantom{x}}$  符号）。然后产生50个不同的观测值  $z_k$ ，其误差为正态分布，期望为0，标准偏移为0.1（先前我们假设观测值掺进了幅值均方根为0.1伏的白噪声）。我们本可以在滤波器运行时产生这些观测值，但预先准备好这些观测值然后再使用在几组不同的模拟中可以让对照更有意义。

第一组实验中我们固定测量方差为  $R = (0.1)^2 = 0.01$ 。因为这正好是预先产生的观测误差的方差的真值，所以在响应速度和估计方差方面这组实验应该具有最好的性能。这在与第二、三组实验的对比中更能显现出来。图3-1画出了第一组实验的结果。实线代表随机变量的真值  $x = -0.37727$ ，加号代表预先产生的观测噪声，剩下的曲线是滤波器的估计结果。

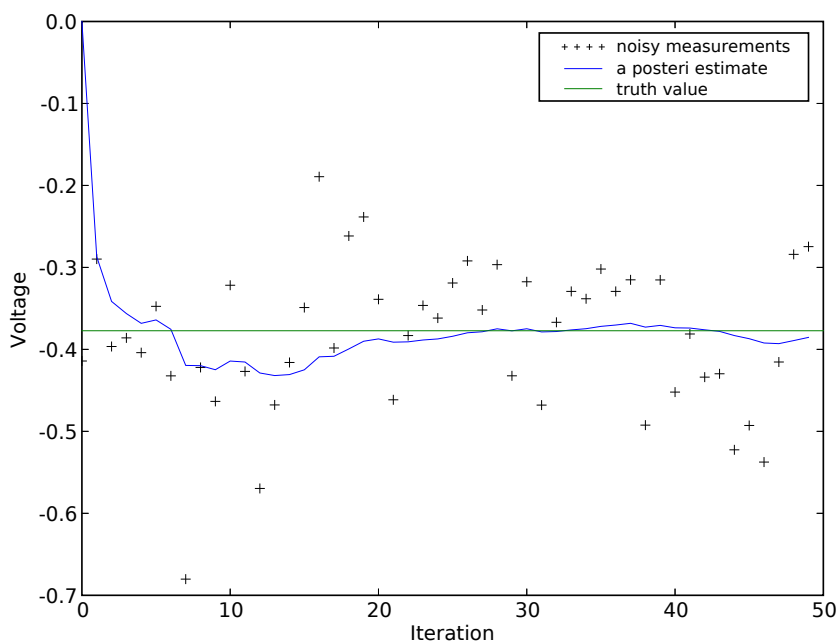


图 3-1: 第一组实验:  $R = (0.1)^2 = 0.01$ 。实线代表随机变量的真值  $x = -0.37727$ ，加号代表预先产生的观测噪声，剩下的曲线是滤波器的估计结果。

前面讨论  $P_0$  的选择时我们提到过只要  $P_0 \neq 0$  其取值并不是特别关键，因为最终滤波器总要收敛。下面的图3-2给出了每次重复迭代后的  $P_k$  值。第50次迭代后它已从最初的1下降到0.0002（平方伏特）了。

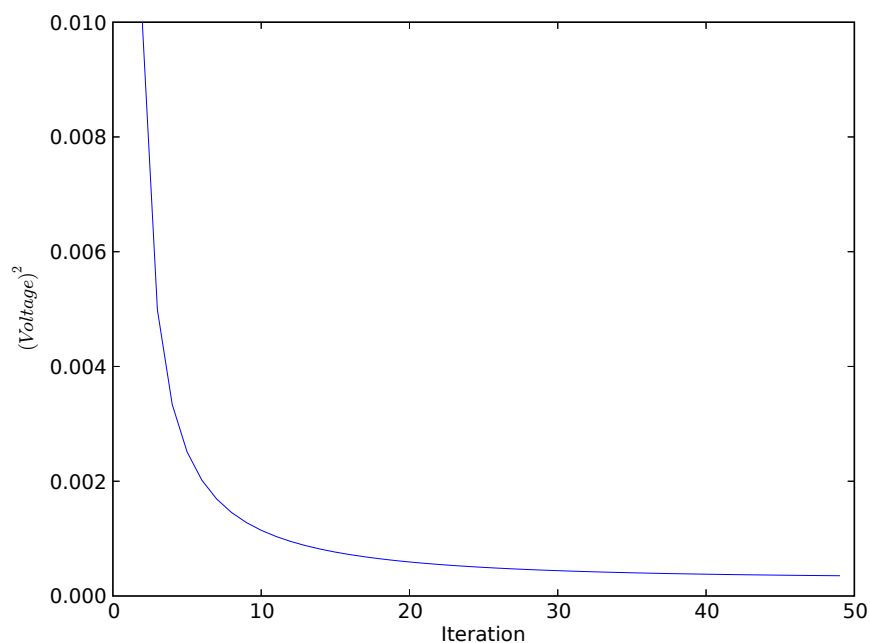


图 3-2: 第50次迭代后初始误差协方差  $P_k^-$  已从最初的1下降到0.0002（平方伏特）了。

第一节“滤波器系数和调制”中我们简单地讨论了改变或调整系数  $Q$  和  $R$  对性能的影响。图3-3和图3-4显示了将  $R$  增大或减少100倍的结果。图3-3中观测方差扩大到100倍（也就是  $R = 1$ ），因此滤波器收敛地更慢。

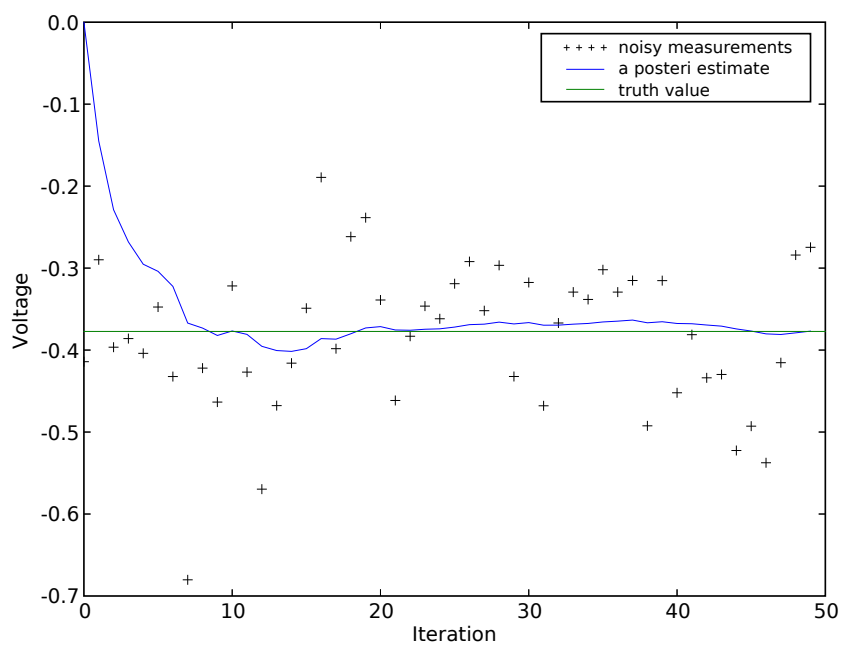


图 3-3: 第二次实验:  $R = 1$ 。滤波器对观测值的反应变慢, 导致估计方差减小。

图3-4中观测方差减小了100倍 ( 也就是  $R = 0.0001$  ), 因此滤波器收敛地更快。



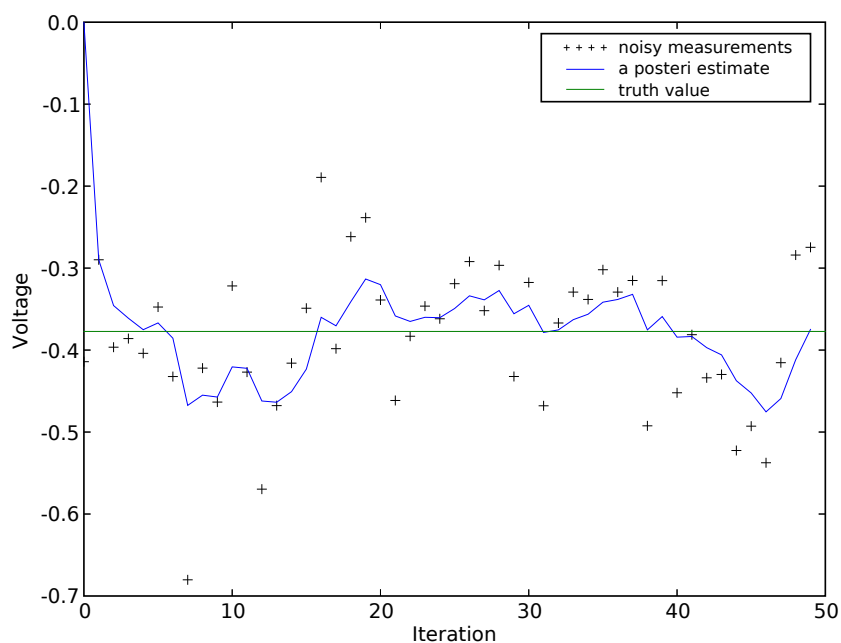


图 3-4: 第三次实验:  $R = 0.0001$ 。滤波器对观测值的反应变快, 导致估计方差增大。

对常数的估计相对比较直接, 这样便清晰地显示了卡尔曼滤波器的工作性能。特别是在图3-3中, 估计值要比含噪声的观测值平滑很多, 显著地表明了卡尔曼滤波器的“滤波”特性。

## 参考文献

- [Brown92] Brown, R. G. and P. Y. C. Hwang. 1992. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc.
- [Gelb74] Gelb, A. 1974. *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, MA.
- [Grewal93] Grewal, Mohinder S., and Angus P. Andrews (1993). *Kalman Filtering Theory and Practice*. Upper Saddle River, NJ USA, Prentice Hall.
- [Jacobs93] Jacobs, O. L. R. 1993. *Introduction to Control Theory*, 2nd Edition. Oxford University Press.
- [Julier96] Julier, Simon and Jeffrey Uhlman. “A General Method of Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions,” Robotics Research Group, Department of Engineering Science, University of Oxford [cited 14 November 1995]. Available from <http://www.robots.ox.ac.uk/~siju/work/publications/Unscented.zip>.  
Also see: “A New Approach for Filtering Nonlinear Systems” by S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, Proceedings of the 1995 American Control Conference, Seattle, Washington, Pages:1628-1632. Available from [http://www.robots.ox.ac.uk/~siju/work/publications/ACC95\\_pr.zip](http://www.robots.ox.ac.uk/~siju/work/publications/ACC95_pr.zip).  
Also see Simon Julier’s home page at <http://www.robots.ox.ac.uk/~siju/>.
- [Kalman60] Kalman, R. E. 1960. “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” *Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering*, pp. 35-45 (March 1960).
- [Lewis86] Lewis, Richard. 1986. *Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory*, John Wiley & Sons, Inc.
- [Maybeck79] Maybeck, Peter S. 1979. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Volume 1, Academic Press, Inc.
- [Sorenson70] Sorenson, H. W. 1970. “Least-Squares estimation: from Gauss to Kalman,” *IEEE Spectrum*, vol. 7, pp. 63-68, July 1970.