第十二周——参数估计

题目目的

（一）掌握正态分布参数置信区间的计算。

（二）掌握 0-1 分布参数置信区间的计算。

（三）掌握指数分布参数置信区间的计算。

题目

题目一：方差未知时正态样本均值的区间估计。打开 test1201.R，完成下面任务。

方差未知，总体参数的区间公式如下：

- 双侧区间：$\bar{X} \mp t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$
- 右侧区间：$(\bar{X} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty$
- 左侧区间：$-\infty \; \bar{X} + t_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$

其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ t_{α} $t_{1-\alpha}$ 为自由度为 $n-1$ 的 t 分布对应于 $\frac{\alpha}{2}$ α $1-\alpha$ 的分位数。

在自定义函数中，alt='two.sided' 表示计算双侧区间，alt='greater' 表示计算右侧区间，alt='less' 表示计算左侧区间。

自定义函数的返回值为区间端点构成的向量。

用 x 中的数据测试自定义函数的运行结果；然后用 t.test 函数计算双侧区间，并对比自定义函数的计算结果，是否相同？

```
# 在大括号内完成函数的定义
fun1201 = function(x, alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){

}

# 用 fun1201 函数计算 x 的双侧与单侧区间
x = rnorm(100)


# 用 t.test 函数计算 x 的双侧区间
```

题目二：方差已知时，两个正态总体均值差的置信区间的计算。打开 test1202.R，完成下面任务。

当方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，两样本均值差的置信区间为：

- 双侧区间：$(\bar{X}-\bar{Y}) \mp u_{\frac{\alpha}{2}S_d}$
- 右侧区间：$((\bar{X}-\bar{Y}) + u_{\alpha S_d}, +\infty)$
- 左侧区间：$(-\infty, (\bar{X}-\bar{Y}) - u_{\alpha S_d})$

其中，$S_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ $u_{\frac{\alpha}{2}}$ u_α 为标准正态分布的分位数。

在自定义函数 fun1202 中，参数 sigma1 和 sigma2 表示 σ_1 和 σ_2，alt='two.sided' 表示计算双侧区间，alt='greater' 表示计算右侧区间，alt='less' 表示计算左侧区间。

自定义函数的返回值为区间端点构成的向量。

```
# 自定义函数
fun1202 = function(x, y, sigma1, sigma2,
                   alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){
```

```
}


# 测试自定义函数
x = rnorm(100, 1, 2)
y = rnorm(50, 1, 1)
```

题目三：均值已知时两正态总体方差比的区间估计。打开脚本文件test1203.R，完成下面任务。

两正态总体的均值 μ_1 μ_2 已知，其方差比的置信区间为：

- 双侧区间：$(\frac{s}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{s}{f_{\frac{\alpha}{2}}})$
- 右侧区间：$(\frac{s}{f_{1-\alpha}}, +\infty)$
- 左侧区间：$(0, \frac{s}{f_{\alpha}})$

其中 $s = \frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}$, $f_{\frac{\alpha}{2}}$ $f_{1-\frac{\alpha}{2}}$ f_{α} $f_{1-\alpha}$ 为 $F(m,n)$ 的分位数

自定义函数的参数 mu1 和 mu2 分别表示 μ_1 和 μ_2，alt='two.sided' 表示计算双侧区间，alt='greater' 表示计算右侧区间，alt='less' 表示计算左侧区间。

自定义函数的返回值为区间端点构成的向量。

```
# 自定义函数
fun1203 = function(x, y, mu1, mu2,
      alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){

}

# 测试
x = rnorm(100, 1, 1)
y = rnorm(200, 4, 2)
```

题目四：指数总体参数的区间估计。打开脚本文件 test1204.R，完成下面任务。

指数分布参数 λ 的置信区间为

- 双侧区间：$(\chi_{\frac{\alpha}{2}}S, \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}S)$
- 右侧区间：$(\chi_{\alpha}S, +\infty)$
- 左侧区间：$(0, \chi_{1-\alpha}S)$

其中 $\chi_{\frac{\alpha}{2}}, \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi_{\alpha}, \chi_{1-\alpha}$ 为 $\chi^2(2n)$ 的分位数。

参数 alt='two.sided' 表示计算双侧区间，alt='greater' 表示计算右侧区间，alt='less' 表示计算左侧区间。

自定义函数的返回值为区间端点构成的向量。

```
# 自定义函数
fun1204 = function(x, alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){

}

# 测试
x = rexp(100,6)
```

答案及解析

题目一：

```
# 在大括号内完成函数的定义
fun1201 = function(x, alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){
  n = length(x)
  ta = switch(
```

```
    alt,
    two.sided = qt(alpha/2, n-1),
    greater = qt(alpha, n-1),
    less = qt(1-alpha, n-1)
  )
  avg = mean(x)
  se = sd(x)/sqrt(n)
  switch(
    alt,
    two.sided = avg + c(ta, -ta)*se,
    greater = c(avg + ta*se, Inf),
    less = c(-Inf, avg + ta*se)
  )
}
# 用 fun1201 函数计算 x 的双侧与单侧区间
x = rnorm(100)
fun1201(x)
```

```
[1] -0.1913593  0.1473491
```

```
fun1201(x, alt = 'greater')
```

```
[1] -0.1637206        Inf
```

```
fun1201(x, alt = 'less')
```

```
[1]       -Inf 0.1197104
```

```
# 用 t.test 函数计算 x 的双侧区间
as.numeric(t.test(x)$conf.int)
```

```
[1] -0.1913593  0.1473491
```

题目二:

```r
# 自定义函数
fun1202 = function(
    x, y, sigma1, sigma2, alpha = 0.05,
    alt = 'two.sided'){
  m = length(x)
  n = length(y)
  ua = ifelse(
    alt == 'two.sided',
    qnorm(alpha/2),
    qnorm(alpha)
  )
  se = sqrt(sigma1^2/m + sigma2^2/n)
  avg = mean(x)-mean(y)
  switch (
    alt,
    two.sided = avg + c(ua, -ua)*se,
    greater = c(avg + ua*se, Inf),
    less = c(-Inf, avg - ua*se)
  )
}
# 测试自定义函数
x = rnorm(100, 1, 2)
y = rnorm(50, 1, 1)
fun1202(x,y,2,1)
```

```
[1] -0.3361822  0.6240002
```

```r
fun1202(x,y,2,1,alt = 'greater')
```

```
[1] -0.2589962        Inf
```

```r
fun1202(x,y,2,1,alt = 'less')
```

```
[1]      -Inf 0.5468142
```

题目三：

```r
# 自定义函数
fun1203 = function(x, y, mu1, mu2,
                   alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){
  m = length(x)
  n = length(y)
  fa = switch(
    alt,
    two.sided = c(qf(1-alpha/2, m, n), qf(alpha/2, m, n)),
    greater = qf(1-alpha, m, n),
    less = qf(alpha, m, n)
  )
  se = n*sum((x - mu1)^2)/(m*sum((y - mu2)^2))
  switch (
    alt,
    two.sided = se/fa,
    greater = c(se/fa, Inf),
    less = c(-Inf, se/fa)
  )
}
# 测试
x = rnorm(100, 1, 1)
y = rnorm(200, 4, 2)
fun1203(x, y, 1, 4)
```

```
[1] 0.1427973 0.2824565
```

```r
fun1203(x, y, 1, 4, alt = 'greater')
```

```
[1] 0.1505889       Inf
```

```r
fun1203(x, y, 1, 4, alt = 'less')
```

```
[1]      -Inf 0.266818
```

题目四：

```r
# 自定义函数
fun1204 = function(x, alpha = 0.05, alt = 'two.sided'){
  n = length(x)
  xa = switch(
    alt,
    two.sided = c(qchisq(alpha/2, 2*n), qchisq(1-alpha/2, 2*n)),
    greater = qchisq(alpha, 2*n),
    less = qchisq(1-alpha, 2*n)
  )
  se = 2*n*mean(x)
  switch(
    alt,
    two.sided = xa / se,
    greater = c(xa/se, Inf),
    less = c(0, xa/se)
  )
}
# 测试
x = rexp(100,6)
fun1204(x)
```

```
[1] 5.555968 8.230360
```

```r
fun1204(x, alt = 'greater')
```

```
[1] 5.745479      Inf
```

```r
fun1204(x, alt = 'less')
```

```
[1] 0.000000 7.989189
```