**资源全局优化问题**

**研究报告**

中国科学院数学与系统科学研究院

2023年6月28日

目录

[一、 引言 4](#_Toc139370435)

[(一) 问题介绍 4](#_Toc139370436)

[(二) 问题描述 4](#_Toc139370437)

[(三) 关键概念 5](#_Toc139370438)

[(四) 问题假设 6](#_Toc139370439)

[二、 问题参数和问题分析 7](#_Toc139370440)

[(一) 符号约定 7](#_Toc139370441)

[(二) 目标与约束的数学描述 8](#_Toc139370442)

[(三) 核心算法（线性化）思路 9](#_Toc139370443)

[(四) 评价指标 10](#_Toc139370444)

[(五) 主要的数值结果 11](#_Toc139370445)

[三、 报告与合同的对应关系 13](#_Toc139370446)

[(一) 报告对应的项目指标 13](#_Toc139370447)

[(二) 研究内容 14](#_Toc139370448)

[四、数学模型构建 15](#_Toc139370449)

[(一) 问题的场景描述 15](#_Toc139370450)

[(二) 目标与约束的数学表征 16](#_Toc139370451)

[i. 优化目标 16](#_Toc139370452)

[ii. 约束条件 17](#_Toc139370453)

[(三) 问题的数学形式 17](#_Toc139370454)

[i. 原模型的数学表述 17](#_Toc139370455)

[ii. 线性化模型的数学表述 19](#_Toc139370456)

[五、算法设置与最优性证明 20](#_Toc139370457)

[(一) 研究思路 20](#_Toc139370458)

[(二) 算法应用的主要技术说明 21](#_Toc139370459)

[(三) 算法的求解流程 24](#_Toc139370460)

[i. 算法的整体流程 24](#_Toc139370461)

[ii. 模型转化方法：线性化方法 24](#_Toc139370463)

[iii. 分支定界算法 25](#_Toc139370464)

[iv. 列生成算法 26](#_Toc139370465)

[v. 外逼近算法 26](#_Toc139370466)

[(四) 最优性证明 27](#_Toc139370467)

[i. 原模型与线性化模型的等价性证明 27](#_Toc139370468)

[ii. 列生成算法及最优性证明 31](#_Toc139370469)

[iii. 列生成算法在资源全局分配问题中的表现形式。 35](#_Toc139370470)

[六、 仿真模拟 40](#_Toc139370476)

[(一) 仿真模拟参数设置 40](#_Toc139370477)

[i. 测试集一（与主承研单位对比分析） 40](#_Toc139370478)

[ii. 测试集二（合同要求规模） 42](#_Toc139370479)

[(二) 典型算例结果 43](#_Toc139370480)

[i. 结果评价指标 43](#_Toc139370481)

[i. 与智能优化算法对比算例结果 44](#_Toc139370482)

[i. 合同要求算例结果 46](#_Toc139370483)

[(三) 结果分析 47](#_Toc139370484)

[七、 总结 48](#_Toc139370485)

# 引言

在引言部分，将对问题背景进行基本的介绍，指出问题的具体描述，给出问题中涉及的关键概念以及我们在此问题中采取的主要假设。

## 问题介绍

现代战争的强度和复杂性日益提高，诸如无人机、战术歼击机、强击机、轰炸机、各种直升机、各种巡航导弹、各型战役-战术导弹、远程雷达探测系统、各型防空反导系统等种类繁多、数量庞大的兵器频繁参与到战斗中。面对这种形势，帮助指挥员在任何情况下都能有效地应对各种类型的目标并完成作战目标，需要充分利用现代科学技术对作战资源进行优化。

在本问题中资源优化的实质含义是对我方的作战资源进行统筹调度，针对每个来袭目标建立有效的包含“目标-雷达-发射车-弹药”完整序列的杀伤链，在过去的研究与事件中中，并没有从全局的角度整体统筹各个资源，而是针对每个目标使用贪婪方法进行杀伤链的构建，因此研究希望能够从全局角度考虑，针对来袭目标设计杀伤网，根据真实作战需求实现效能最大化。

## 问题描述

我们的目标是对战场中存在的各种威胁进行识别和评估，然后根据这些信息动态地对作战资源进行优化。优化作战资源的关键是针对每个目标建立有效的“杀伤链”，每条杀伤链都代表一种具体的作战方案，包括“目标-指控-雷达-发射车-弹药”的完整序列。每个目标都可以设计一条或多条杀伤链，这取决于我们的战略目标、敌方威胁的具体情况以及我们的资源状况。

我们的优化目标是使得在资源限制的条件下，对所有作战目标的整体效能（如最小化作战时间、最大化杀伤效果、最小化作战费效比等）达到最优。这需要我们有效地协调各类资源（雷达、发射车、弹药等）。在优化的过程中，我们不仅要考虑每个单独目标的最优作战方案，还需要从全局视角出发，对所有目标的作战方案进行整体优化，以达到整体的最优性能。

## 关键概念

本部分中列出了一些模型中的关键概念，方便后续的理解和操作，如目标、杀伤链、杀伤网、毁伤概率、精确算法等。

概念及解释：

* 目标：对方的威胁，需要我们进行打击的对象。
* 雷达：我们用来监控和定位目标的设备。
* 发射车：装载弹药并进行发射的作战装备。
* 杀伤链：由目标、雷达、发射车和弹药构成的完整的打击流程。在这个流程中，指控部分可以解耦，而弹药与发射车则是绑定在一起的。
* 杀伤网：是整个打击目标的分配方案，每个目标都会被分配至少一条杀伤链进行打击。杀伤网的构建考虑了所有的资源限制和作战目标，目标是全局最优。
* 毁伤概率：每个目标被毁伤的可能性，即1减去目标的存活概率。
* 精确算法：本文中重点介绍的基于列生成的精确算法
* 智能算法：来源于主承研单位的非精确性快速算法

本报告将考虑对战场中存在的各种威胁进行识别和评估，然后根据这些信息动态地对作战资源进行优化，利用整数规划求解技巧，从全局角度考虑，为每个目标建立一条或多条“目标-指控-雷达-发射车-弹药”的杀伤链，构成整体的杀伤网，实现杀伤效果最大化打击方案的精确求解。

## 问题假设

本部分提出了问题模型中的主要假设，包括确定性假设、毁伤概率假设、优化目标假设以及资源限制假设，为接下来的模型构建和分析提供基础。

在对全局资源优化问题进行特征提取后，我们做出如下假设：

* + 确定性假设：每个目标的价值是固定的，不随着时间发生变化。同时在给定目标、雷达、发射车、弹药的条件下，雷达-发射车-弹药组成的杀伤链对目标的毁伤概率是定值，不随时间发生变化。
  + 毁伤概率假设：我们假设每条杀伤链之间是相互独立的。如果一个目标被多个杀伤链同时打击，那么该目标的存活概率就是每个杀伤链打击后的存活概率的乘积。我们计算该目标中的毁伤概率就是用1减去存活概率的大小。
  + 优化目标假设：我们的目标是最大化消除的来袭目标威胁值。即最大化每个目标的权重乘以消灭它的概率（毁伤概率）之和。
  + 资源限制假设：由于资源特性，我们假设为每个目标分配杀伤链时，需要考虑到各类限制，具体而言包括：
    1. 杀伤链使用雷达的次数应小于等于其通道数
    2. 杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数，
    3. 针对每个目标，最多可构建的杀伤链条数有上限。

请注意，这些假设是在我们的优化问题中所需的，而实际情况可能会更为复杂。但是，这些假设提供了一个处理这个问题的实用框架，并可以根据更具体的场景进行调整和扩展。

# 问题参数和问题分析

在问题参数和问题分析部分，给出了问题中的符号约定、问题目标和约束的数学形式、关键算法的思路、衡量数学模型求解能力的评价标准以及主要的数值结果。

## 符号约定

这一部分主要定义了所有在模型中使用的**参数、含义及设置的值**。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 符号 | 含义 | 取值 |
|  | 第目标的威胁值 | [25,75]上的整数均匀分布 |
|  | 决策变量，针对目标，使用雷达和发射车构建的杀伤链数量。 | 没有构建这条杀伤链，则，否则为正整数 |
|  | 毁伤概率。雷达和发射车分配给目标时的毁伤概率 | [0.6,0.9]上的均匀分布 |
|  | 发射车集合 | 数量 = 10 \* 雷达个数 |
|  | 目标集合 | 数量 = 7 \* 雷达个数 |
|  | 雷达集合 | 实际场景给出 |
|  | 发射车个数 |  |
|  | 目标个数 |  |
|  | 雷达数量 |  |
|  | 雷达使用次数限制。 | 8 |
|  | 发射车使用次数限制 | 1 |
|  | 第目标允许分配的杀伤链个数限制 | 1 |

## 目标与约束的数学描述

这部分描述了优化问题的**目标函数和约束条件及其数学形式**。

优化目标：最大化消除的来袭目标威胁值

雷达通道约束：杀伤链使用雷达的次数应小于等于其通道数。

发射车通道约束：杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数。

杀伤链数目约束：目标最多可构建的杀伤链条数为。

## 核心算法（线性化）思路

在整个问题的求解过程中，涉及多个不同的算法，其中核心算法是线性化方法，因此在此将这个关键技术的基本思路进行呈现：

**线性化方法**的执行步骤如下：

1. 打击场景分析：针对每个目标，共有 个备选的杀伤链，由于有资源容量约束，因此针对一个目标，同一杀伤链最多分配 个。
2. 打击场景枚举：给定目标后，由于每个杀伤链可以选择是否打击，共有 个可选的打击场景。
3. 打击场景分配：每个目标需要从打击场景中选择一个，因此共有 个打击方案，将这些打击方案作为线性规划的列，即可获得问题的线性规划模型。
4. 调整约束条件：将雷达与发射车的约束条件调整为新形式。
5. 增加新约束：增加额外的约束，确保每个目标只能被分配一个打击场景。

应用以上步骤，将原问题转化为等价的线性化模型。使用整数规划求解策略求解该模型即可保证得到原模型的精确最优解，证明详见本报告第五章。

## 评价指标

这部分定义了用来评价解决方案性能的一系列指标。包括：算法的计算时间，算法快速性指标和算法的杀伤能力指标。

**（1）算法的计算时间**

使用精确算法计算时间被记为，我们将对比在不同的规模下，算法的执行时间。

**（2）算法快速性指标**

为了衡量精确算法的快速性，我们采用以下公式来衡量两种算法所获得方案对应的快速性指标的差异比例：

其中， 和 分别表示精确算法和智能算法的运行时间。

**（3）算法的杀伤能力指标**

由于精确算法可以保证在目标函数上优于智能算法，因此我们关注的是精确算法对智能算法的提升程度。我们采用以下公式来衡量两种算法所获得方案对应的优化指标的差异比例：

其中， 和 分别表示精确算法和智能算法所得到的方案的优化指标值（即降低的威胁值）。

## 主要的数值结果

在本部分中，给出了上述评价指标的主要数值结果，并将结果与合同要求进行了对比，证明了求解算法及软件能够满足合同要求，并具有较好的计算性能和较快的求解时间。

**（1）算法的计算时间（合同指标）**

合同要求计算80目标与300资源的条件下，进行资源全局优化问题的精确求解，根据目标与资源的比例，并真实的作战资源配比，按照

**目标：指控：雷达：发射车：弹药 = 7：1：1：4：20**

的资源配比进行设置。其中发射车与总资源的比例为1：3.714，与合同要求的80：300 = 1：3.75接近。根据不同的大小规模设置不同的算例，其规模及计算结果如下（最后一列是求解时间）：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 目标 | 雷达 | 发射车 | 弹药 | 资源总数 | 计算时间(s) |
| 1 | 7 | 1 | 4 | 20 | 26 | 0.28 |
| 2 | 28 | 4 | 16 | 80 | 104 | 0.31 |
| 3 | 56 | 8 | 32 | 160 | 208 | 0.70 |
| 4 | 84 | 12 | 48 | 240 | 312 | 2.85 |
| 5 | 98 | 14 | 56 | 280 | 364 | 5.14 |
| 6 | 196 | 28 | 112 | 560 | 728 | 168.02 |
| 7 | 294 | 42 | 168 | 840 | 1092 | 1092.43 |
| 8 | 392 | 56 | 224 | 1120 | 1456 | 1800+ |

合同要求规模与类型4接近（要求为80：300，类型四为84：312，在上表中标红），在这个规模下，**问题的求解时间为2.85秒，与相比合同要求的1800秒有极大的提升**。

**（2）算法快速性指标**

本部分分析基于主承研单位提供的405个算例，算例的具体设置可以查阅报告第六章。在这405个算例中，统计了精确算法与智能算法的时间关系，按照精确算法与智能算法求解时间的比例得到如下数据：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 时间比例 | 算例个数 | 占比（算例个数/405） |
| >200% | 81 | 20.00% |
| 100% - 200% | 19 | 4.69% |
| 50% - 100% | 14 | 3.46% |
| <50% | 291 | 71.85% |

上述结果指出，大部分算例（占71.85%）中，精确算法的运行时间都低于智能算法的50%。尽管在某些特定的算例中，精确算法的运行时间可能会更长，但是在绝大多数情况下，精确算法都能够在更短的时间内得出结果。

**（3）算法的杀伤能力指标**

在这405个算例中，统计了精确算法相比于智能算法的的效能提升，统计了不同的提升区间得到如下数据：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 提升比例区间 | 算例个数 | 占比 |
| >5% | 10 | 2.47% |
| >1% | 38 | 9.38% |
| >0.1% | 152 | 37.53% |
| >0.01% | 185 | 45.68% |

在405个算例上，有9.38%的案例显示出精确算法相对于智能算法的提升比例超过了1%，有37.53%的案例显示出精确算法相对于智能算法的提升比例超过了0.1%。同时最大的提升比例高达49.03%，平均的提升比例为0.63%。

所有的案例都显示出了精确算法不差于智能算法的结果，从侧面佐证了精确算法的最优性。同时在部分算例中精确算法体现出了计算性能的优越性。

# 报告与合同的对应关系

在报告与合同的对应关系部分中，主要给出了本次报告对应合同中的哪些研究内容与项目指标。

## 报告对应的项目指标

本次报告对应**两个研究指标**，具体如下：

**指标1名称**：体系资源全局优化的整数规划模型

**指标要求**：可给出体系资源全局优化的数学模型与整数规划解

**考核方式**：可给出智能防空反导体系资源全局优化数学描述和约束条件，并在此基础上给出整数规划解。形成模型研究报告，通过专家评审方式进行考核。

**完成情况：已完成**

**指标2名称**：体系资源全局优化的整数规划型快速求解

**指标要求**：整数规划模型 30 分钟内求得解析最优解，给出其他解不优于解析最优解的理论证明。

**考核方式**：在飞机目标80个，我方防御要素不少于300个的攻防场景下整数规划模型30 分钟内求得解析最优解，给出其他解不优于该解析最优解的理论证明。通过现场测试和专家审查方式进行考核。

**完成情况：已完成**

## 研究内容

本报告对应的研究内容包括**数学模型的构建、精确算法设计、仿真模拟结果**。其细节对应的章节如下。

针对数学建模部分，在第四章中的第1节对防空反导体系作战环境进行特征提取，对作战资源进行能力表征，在第四章的第2节中根据体系资源全局优化问题的整数规划结构特点，提出体系资源全局优化问题中的作战目标与条件约束。

针对算法设计部分，在第四章第3节中给出智能防空反导体系资源约束与能力数学描述，建立体系资源全局优化的整数规划模型。在第五章第1节至第3节给出体系资源全局优化的整数规划精确求解模型，求解模型依据体系资源全局优化的问题特征，利用预处理算法、割平面算法、启发式方法等求解技术，完成分支定界框架下的算法设计。并在第五章第4节给出算法的全局最优性数学证明。

针对仿真模拟部分，在第六章中，将给出数学求解模型的仿真模拟实验结果，其中第六章第1节给出了仿真模拟的参数设置，第2节给出了典型算例的求解结果展示，第3节中给出了结果分析，其中包括与合同要求的对比。

# 四、数学模型构建

## 问题的场景描述

场景假设在同一时间会有多个敌方目标来袭，且每个目标的威胁程度都不同。为了有效地对抗这些威胁，我方将利用不同种类的作战资源进行协调以完成对威胁目标的打击。这些资源包括但不限于指控设备、雷达监控、发射车和弹药。针对每个来袭的目标，我们可以设计一条或多条“目标 - 雷达 - 指控 - 发射车 - 弹药”的杀伤链，其中，指控部分可以解耦，而弹药与发射车则是绑定在一起的，我方的目的即在资源限制的情况下，针对多个作战目标（最小化作战时间、最大化杀伤效果、最小化作战费效比等）进行综合优化。

在具体的场景假设中，我们假设每条杀伤链之间都是相互独立的。即如果一个目标被多个杀伤链同时打击，那么该目标的存活概率就是每个杀伤链打击后的存活概率的乘积。而对该目标的毁伤概率就是用1减去存活概率的大小。此外，由于雷达和发射车的资源特性和它们的容量限制，我们必须在为每个目标分配杀伤链时，考虑到杀伤链数量的上限。

当我们考虑到所有这些因素时，我方的目标就变成了针对多个作战目标进行综合优化。这个优化目标可以是最小化作战时间、最大化杀伤效果或者最小化作战费效比等。具体来说，最大化杀伤效果指的是最大化所有目标的威胁值乘以对目标的击毁概率之和。

在本文的讨论范畴内，考虑在雷达通道约束、发射车通道约束和每个目标的杀伤链数目约束约束条件下，最大化消除的来袭目标威胁值。

## 目标与约束的数学表征

### 优化目标

最大化消除的来袭目标威胁值

**符号解释**

第目标的威胁值

: 决策变量。表示雷达和发射车分配给目标，否则。

: 决策变量矩阵。

: 毁伤概率。雷达和发射车分配给目标时的毁伤概率。

: 毁伤概率矩阵

发射车集合

目标集合

雷达集合

### 约束条件

雷达通道约束：杀伤链使用雷达的次数应小于等于其通道数。

发射车通道约束：杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数。

杀伤链数目约束：目标最多可构建的杀伤链条数为。

**符号解释**

雷达使用次数限制

发射车使用次数限制

: 第目标允许分配的杀伤链个数限制

## 问题的数学形式

### 原模型的数学表述

原模型的数学形式为：

* 第目标的威胁值。
* : 决策变量，表示针对目标，使用雷达和发射车构建的杀伤链数量。如果没有构建这条杀伤链，则。
* : 决策变量矩阵。
* : 毁伤概率。雷达和发射车分配给目标时的毁伤概率。
* : 毁伤概率矩阵
* 发射车集合。
* 目标集合。
* 雷达集合。
* ：发射车个数（）。
* ：目标个数（）。
* ：雷达数量（）。
* ：雷达使用次数限制。
* ：发射车使用次数限制。
* : 第目标允许分配的杀伤链个数限制。

### 线性化模型的数学表述

**数学符号：**

* ：打击场景，表示一些杀伤链被使用，另外一些杀伤链没有被使用。集合所包含的元素个数为
* ：针对目标 ，在阶段允许被使用的杀伤链组合。对于上述模型，。
* ：针对某个目标的杀伤链分配组合，
* ：决策变量，是否对目标应用杀伤链。
* ：目标目标在杀伤链打击下的加权毁伤概率，其计算公式为：
* 备选武器集合。
* 备选雷达集合。
* ：打击场景是否使用发射车 (0-1常量，1代表使用该发射车，0代表未使用该发射车）。
* ：打击场景是否使用雷达 (0-1常量，1代表使用该雷达，0代表未使用该雷达）。
* ：雷达使用限制。
* ：发射车使用。

# 五、算法设置与最优性证明

## 研究思路

在数学模型的研究和应用中，求解效率和准确性的权衡是非常重要的一环。基于上一段提到的数学模型，我们的目标是设计一个有效且理论上保证最优性的精确算法，同时希望衡量这个算法的性能。针对这个目标，我们将引入我们采用的基于整数规划列生成的精确算法和主承研单位设计的启发式算法，进行问题的求解。这两种算法都有其各自的优点和局限，我们期望通过深入研究和实验，找出它们在特定条件下的最优应用方式。

在问题求解过程中，精确算法和启发式算法分别展现出了各自的优点和局限性。精确算法能够保证找到问题的最优解，这是其最大的优势；但在面对大规模复杂问题时，其计算过程可能需要指数级的时间（即NP难问题）因此，精确算法无法在多项式时间内使用找到问题的最优解。相较而言，启发式算法提供了一个适应性强、适合解决大规模问题的求解算法，但是这种启发式算法并不能保证得到最优解。

为了有效评估精确算法的实际性能，我们设计了一系列不同规模的算例，并考察不同规模下精确算法的求解效果。针对每个算例，我们运统计了精确算法与现有的启发式算法进行求解的结果，将两种算法的结果进行对比。在比较时，我们关注两个主要指标：计算时间和优化效果（在这个问题中表现为杀伤效果）。这两个方面的评价将为我们提供关于精确算法在不同规模问题中的性能，以及它与启发式算法的相对优劣的重要信息。

## 算法应用的主要技术说明

**① 分支定界方法**

根据问题分支过程中不同子问题的关系，提出强有效的分支策略，割掉不同子问题之间的可行域相交部分，减少搜索树的规模，提升问题的求解效率。通过大量数值实验反复论证，验证新的分支策略的有效性。在此问题中，设计了针对问题结构的分支策略，以优化求解速率。

在全局资源匹配问题中，分支定界方法同样展现了其独特的优势。我们尝试将列生成方法应用于求解松弛问题，并将其融入到分支定界的框架中。这种独特的方法结合使得整个求解过程更为高效，不仅保证了问题的整数最优解的获得，而且极大地提高了问题的求解速度。

**② 列生成方法**

列生成方法的总体思想是许多线性规划问题的列数（变量）太多而无法明确考虑所有变量，因此在算法的开始仅使用其变量的子集求解所考虑的子问题开始求解。 然后迭代地，将有可能改进目标函数的变量添加到数学规划模型中。一旦可以证明添加新变量将无法再提高目标函数的值，该过程就会停止。应用列生成算法时，希望只生成很小一部分变量即可得到最优解，对于这个想法是基于以下思路的支持：在最优解中，大多数变量将是非基本变量并假定值为零，因此可以在没有它们的情况下找到最优解。

在算法的执行过程中，该算法考虑了两个问题：主问题和子问题。主要问题即如上面指出的，仅考虑部分变量，依次构造出一列规模逐渐变大的线性规划问题，知道能够保证得到问题的精确解。子问题则是为识别改进变量（即选择出可以改进主问题的变量）而创建的新问题。当问题的结构让子问题可以使用高效算法（通常是专用组合算法）解决子问题时，列生成方法特别有效。通常原问题是大规模的线性规划问题，此时可以保证子问题同样是线性规划问题。

在资源全局匹配问题中，我们已经通过理论推导，证明该问题的子问题是一个凸优化问题，因此可以采用相应的凸优化方法来对问题进行求解，从而保证了整体列生成方法的全局最优性与快速性。

**③ 外逼近方法**

外逼近方法是针对一类特定的凸优化问题，基于对最优值的逼近来求解问题。该方法在每一次迭代中，都会在现有的可行域中寻找一个局部最优解，并根据该局部最优解形成一个割平面，用以割去部分可行域，使得新的可行域仍包含全局最优解。在实际操作过程中，通过调整这个割平面的生成策略，可以有效地控制迭代过程，以提高收敛速度和解的精度。

在全局资源匹配问题中，已经证明了列生成子问题具有凸性，因此我们决定采用外逼近方法对子问题进行求解。这种方法能够有效地缩小问题规模，提高求解效率，尤其在处理大规模问题时表现出色。

**④ 割平面方法**

依据资源的具体结构，推导定制的割平面算法，改善模型质量，以加速问题的求解速度，通过数值实验，分析该问题中涉及的整数规划求解器，进行参数调优，确定割平面算法在每个分支定界节点的执行频率；在某一分支定界节点产生的割平面应用到其他节点的标准；在每个节点添加割平面的数量等参数，以最大化割平面方法效率的最大化。

在全局资源匹配问题中，割平面方法发挥了关键性的作用。考虑到问题的特性，我们针对我方的资源配置情况，设计了一种特定的割平面。这种方法有效地利用了问题的结构信息，以优化割平面的生成策略，从而大大减小了问题的规模，同时也提高了求解的效率。

**⑤ 次模割方法**

次模割方法是一种专用于处理带有次模结构的优化问题的方法。次模函数是一种在整个定义域上具有凸性的函数，因此，次模问题可以被看作是一种特殊的凸优化问题。次模割方法利用了次模函数的特性，通过在每次迭代中引入一个割平面，逐步逼近全局最优解。对于整数问题，可以通过构造有效的不等式将问题转化为次模问题，从而应用次模割方法进行求解。

在全局资源匹配问题中，决策变量均为二元变量，目标函数可以通过次模函数描述，因此我们决定采用次模割方法进行求解。这种方法的应用，使我们能够得到更有效的不等式，从而有效地降低了问题规模，提升了求解速度。

## 算法的求解流程

### 算法的整体流程

资源全局匹配问题的求解过程涉及到一个模型等价转换与三个求解算法，模型等价转换将问题等价转换为一个线性规划整数模型，并调用算法一进行求解，算法一的求解过程中会调用算法二，算法二的求解过程中会调用算法三，三个算法共同保证了问题解的最优性。

等价转化方法被称为**线性化方法**，三个求解算法是：**（一）分支定界求解算法**，**（二）列生成求解算法**与**（三）外逼近求解算法**，线性化方法及三个求解算法的主要求解流程及算法间的关系如下：



### 模型转化方法：线性化方法

1. 初始化打击场景：将 个不同的打击场景作为线性规划的列，设定其上下界以及目标函数系数。
2. 调整约束条件：将雷达与发射车的约束条件调整为新形式。
3. 增加新约束：增加额外的约束，确保每个目标只能被分配一个打击场景。

应用以上步骤，将原问题转化为等价的线性化模型。

### 分支定界算法

1. 问题初始化：对于一个整数规划问题，先解其线性规划松弛问题，得到初值。**求解线性松弛的步骤调用了算法二**。
2. 分支操作：基于当前解，选择一个分数解进行分支，创建两个新的子问题。
3. 定界操作：求解子问题的线性规划松弛问题，得到解作为界，如果解为整数解则可能是最优解，如果解的目标函数值小于当前已知的最优解，则剪枝（舍弃该子问题）。
4. 选择操作：从当前未被剪枝的子问题中选择一个子问题作为下一个求解的问题，**子问题求解的步骤调用了算法二**。
5. 迭代过程：重复执行2-4步，直到所有子问题都被剪枝或者求得最优解。
6. 终止条件：当所有子问题都被处理后，得到的整数解即为问题的最优解，算法执行结束。

### 列生成算法

1. 初始化主问题：通过启发式方法或随机选择的方式，为每个目标分配少量的备选杀伤链（打击方案）。
2. 求解主问题：从每个目标当前的备选杀伤链（打击方案）中构建杀伤网，得到局部最优杀伤网。
3. 求解子问题：计算尚未选择的杀伤链（打击方案）对当前杀伤网是否有改进潜力，依此判断局部最优杀伤网是否还具有优化空间，**列生成子问题求解的过程调用了算法三**。
4. 步骤三的结果分为可以改进与不可改进两种情况。如果存在具有对当前杀伤网具有改进潜力的杀伤链，则将该杀伤链加入到备选杀伤链中，回到步骤二接待求解。否则进入步骤五。
5. 依照数学证明（在下一节），当前的求解得到的局部最优杀伤网就是全局最优杀伤网，算法执行结束。

### 外逼近算法

1. 问题初始化：选择一组初始解，计算目标函数值，定义收敛精度。
2. 线性化：在当前解处对非线性问题进行线性化，形成切平面，将非线性问题转化为一个线性问题。
3. 求解线性问题：求解线性问题，得到一个新的解。
4. 收敛性检验：比较新解与旧解之间的差异，如果小于定义的收敛精度，则停止迭代，输出当前解作为最优解。否则，进入步骤5。
5. 更新：将新解作为旧解，返回步骤2，进行新的迭代。
6. 终止条件：满足收敛性条件后，算法执行结束，输出最优解。

## 最优性证明

### 原模型与线性化模型的等价性证明

首先重新表述原模型及线性化模型。

原模型的数学形式为：

线性化模型的数学形式为：

其中

两个模型的等价性证明包含两步，第一步是两个模型的定义域相同（即约束相同，从而保证两个模型可以选择的杀伤网方案相同），第二步是证明两个模型会在同样的点取到最优解，即两种优化模型计算出的最优打击方案（杀伤网）相同，下面将分别就这两步进行数学证明。

**步骤一：模型的定义域相同（允许构造的杀伤网相同）**

假设为原模型的定义域，模型为新模型的定义域。

，考虑

其中中的每个元素都对应了一个杀伤链（一个雷达和一个发射车）

原模型的约束等价于：

定义为所包含的杀伤链集合，将第个目标分配打击场景，则有如下结果：

1. 由于，根据和之间的一一对应关系, 对应的打击场景一定满足：

从而有，从而是满足约束的变量，同时由于对每个目标仅指定分配了一个打击场景，线性模型中的约束

一定成立。

反之，，由于有约束

限制，每个目标恰被分配了一个场景，考虑第个目标分配的场景：

由于，由于一个杀伤链恰好对应一个雷达与一个发射车，因此一定有。这就保证了原模型中的约束：

一定成立。

1. 当一组满足原问题中的约束

时，有。

由于一个杀伤链恰好对应一个雷达与一个发射车的性质， 中包含的发射车与雷达个数分别是与，即，因此原模型中的约束等价于约束

这就证明了原模型与线性模型的约束一一对应。

1. 类似地，原模型中的约束

与线性模型中的约束

一一对应。

利用上面三条性质，可以知道，任何一个原模型的可行解，都可以等价地转化为一个线性模型的可行解，因此二者的可行域（允许分配的杀伤网）相同。

**步骤二：目标函数相同（降低的毁伤能力相同）**

根据的定义可知，线性模型的目标函数为：

而原问题的目标函数为：

在之前的步骤中已经证明：

因此两个目标函数相等。

通过上述两个步骤，即证明了线性模型与原模型是等价模型，线性模型得到的解可以等价地转化为一个原模型得到的解，且线性模型的最优解一定对应原模型的最优解，二者的最优值相等。

### 列生成算法及最优性证明

**（1）列生成算法概述**

列生成方法是一种在大规模优化问题中广泛应用的技术，它的核心思想是在一个较小的、更易于管理的问题（即主问题）上求解，而不是在问题的所有可能性上一次性求解。这种方法主要应用在大规模的线性规划和整数规划问题中，尤其适用于那些具有大量可能决策变量，但在任何最优解中只有少数决策变量非零的情况。

**（2）列生成算法的算法流程**

列生成方法求解的是一个标准的线性规划问题：

其中代表的决策变量个数非常多，通过以下步骤迭代地求解这个线性规划问题：

**步骤一：初始化主问题**。

这一步通常通过启发式方法或随机选择的方式，选取一个较小的、可解的问题作为主问题的初始版本，主问题的数学模型可以描述为：

使用 表示仅选择了原问题的部分列。

**步骤二： 求解主问题**。

接下来我们使用线性规划方法（如单纯形法或者内点法）来求解这个初步限制的注问题，获取当前的最优解和对偶变量值。

注意，这个步骤产生的结果实际上构成了原问题的一个可行解。在这个过程中，尚未选取的变量被视为零，从而在满足所有原始约束的情况下进一步简化了问题。然而，这个解可能不是原问题的最优解，这是由于我们在初步限制的问题中并没有包含所有的决策变量，也即尚未选取的变量。因此，在后续的步骤中，我们需要通过逐步引入新的列来改进这个初步的解，以期达到原问题的最优解。

**步骤三：求解子问题**。

对于子问题，我们实际上是在尝试寻找那些未被包含在当前主问题中的列（即尚未选取的变量），若加入主问题后有可能改进当前解。这一过程被称为定价过程。在定价过程中，我们会计算每个未选取变量的约化费用（Reduced cost）。约化费用是一个衡量将一个未选取的变量（也就是一列）加入主问题后，主问题的目标函数值改变程度的指标。约化费用的计算公式为

得到，其中 是对偶问题的解，和分别是决策变量的系数向量和成本。如果某个变量的约化费用为负，那么将此变量加入主问题有可能得到更优的解。因此，我们将计算所有未选取变量的约化费用中的最小值，如果最小值小于0，说明主问题尚有改进的空间。

具体而言，子问题的数学形式为：

若该问题的最优值小于0，对应的将被加入到主问题的备选解中。

**步骤四： 判断当前主问题是否达到最优解。**

如果在步骤三的定价过程中，我们找到了一个约化费用小于零的决策变量，那么我们就将这个决策变量（也即新的列）加入到主问题中，并回到步骤二，对扩充了的主问题进行求解。否则，如果所有未选取的决策变量的约化费用都大于或等于零，那么我们就停止算法，因为这表明当前的主问题解就是全局最优解。

（3）**列生成算法可以得到理论最优解的数学证明**。

上述步骤指出了列生成方法的迭代步骤，算法终止条件为步骤四中的判断是否所有的约化费用都大于等于0。因此证明的步骤分两步：如果这个条件成立，则一定可以得到问题的最优解。算法迭代一定可以在有限步终止于这个条件。

对于第一步，证明需要用到如下定理：

**引理（对偶定理）**：对于任意的线性规划问题，如果原问题

和对偶问题

都存在可行解，则必有原问题的目标函数值大于等于对偶问题的目标函数值。同时，如果存在一组原问题的解和对偶问题的解，使得原问题的目标函数值和对偶问题的目标函数值相等，即有 ，则和 分别是原问题和对偶问题的最优解。

在列生成方法中，主问题求解结果是原问题的一组可行解，但主问题的对偶问题的解未必是原问题对偶问题的可行解，如果验证了所有的约化费用都大于等于0，即保证了对偶问题的约束

一定成立，从而得到了原问题的对偶问题的一组可行解。由于和分别是主问题和主问题对偶问题的最优解，因此可以保证，即根据弱对偶定理，保证了解的最优性。

对于第二步，证明如下：

假设原问题有列（变量），主问题初始化有列（变量），如果在步骤四的判断过程中发现存在使得约化系数小于0的变量（列），则将其加入到主问题的备选列当中，每次迭代至少使得备选列增加1，因此经过至多次迭代，主问题就会包含原问题全部的列，此时一定会得到原问题的最优解。而当在步骤四的判断过程中发现不存在使得约化系数小于0的变量（列），则问题已经达到了最优解。

综上所述，可以得到如下定理：

**定理：**使用上述的列生成算法，问题一定可以在次迭代内终止，且此时可得到原问题的最优解。

### 列生成算法在资源全局分配问题中的表现形式。

列生成算法的步骤应用于全局资源匹配后可以得到如下迭代步骤：

1. 初始化主问题：通过启发式方法或随机选择的方式，为每个目标分配少量的备选杀伤链（打击方案）。
2. 求解主问题：从每个目标当前的备选杀伤链（打击方案）中构建杀伤网，得到局部最优杀伤网。
3. 求解子问题：计算尚未选择的杀伤链（打击方案）对当前杀伤网是否有改进潜力，依此判断局部最优杀伤网是否还具有优化空间。
4. 步骤三的结果分为可以改进与不可改进两种情况。如果存在具有对当前杀伤网具有改进潜力的杀伤链，则将该杀伤链加入到备选杀伤链中，回到步骤二接待求解。否则进入步骤五。
5. 依照数学证明，当前的求解得到的局部最优杀伤网就是全局最优杀伤网，算法执行结束。

上述流程步骤中的原模型即第i节指出的线性化模型，列生成主问题的形式依然可以使用下面的数学模型表述：

其中即为第次迭代后的备选杀伤链集合，其依然要满足之前提到的每个目标的杀伤链约束。

列生成方法使用范围是线性规划，因此需要计算该问题的松弛模型，其数学表述如下：

列生成需要计算该问题的对偶模型，其数学表述如下：

其中代表武器容量约束的对偶变量，代表雷达容量约束的对偶变量，代表目标分配场景约束的对偶变量变量。列生成算法需要求解最小化的约化费用，在此问题中为判断是否有满足条件

的行，由于该形式能够对目标进行分离，因此每次迭代步骤中可以求解个互不影响的子问题，由于这些子问题并没有相互影响，可以进行并行计算，并且在依此求解子问题步骤中可以同时检验个目标，上述两个原因保证了算法具有较好的计算性能。

对于子问题的求解，将的定义代入，可以得到第个目标的子问题形式为：

如果原问题中有对于每个目标构建杀伤链数目的约束，则第个目标的子问题的形式为：

**命题**：目标函数可以转化为下面的形式

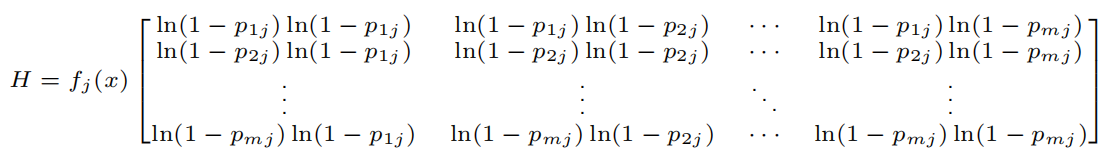
且这个函数是凸函数。

**证明**：转化只需要将视为一个变量，且将替换为即可。

而对于上述函数，考虑

它的海森矩阵中的每一项为

因此可以得到：



假设

则海森矩阵为：

因为海森矩阵是秩一矩阵，所以目标函数是凸函数。

证毕。

在子问题是凸问题的基础上，可以采用分支定界、外逼近等方法来对问题进行求解，其具体求解细节在此不再赘述，过程中应用了一些适合此问题的加速求解方法，但整体而言是比较成熟的求解凸问题的求解流程。

值得注意的是，当设置每个目标杀伤链约束为1时，约束

保证了可选的解仅有全部为0，或者恰有一个变量为1，剩下的变量都为0，因此可以采用加速求解技巧来增加求解速率。



# 仿真模拟

## 仿真模拟参数设置

在仿真模拟中，共设计两个测试集，测试集一来源于主承研合同单位，用于与主承研合同的智能算法效能进行分析对比，其中包含超过合同规模的大规模数据集。数据集二为随机生成的合同要求规模的测试集。两个测试集的参数设置如下：

### 测试集一（与主承研单位对比分析）

测试集一包含小规模测试算例与大规模测试算例。

**小规模测试算例的参数设置如下：**

（1）算例规模参数设置

雷达数目t=3/8/20

发射车数目m=3/8/20

目标数目n=3/8/20

共27种规模。

（2）杀伤概率设置

为杀伤概率最大值，为杀伤概率最小值。所有链的杀伤概率为在到之间均匀分布的随机数。

（3）目标威胁值设置

第一种类型（目标威胁值随机）：所有目标的威胁值为在到之间均匀分布的随机整数。

第二种类型（目标威胁值差异大）：一半目标威胁值为在1到10之间均匀分布的随机整数，另一半目标为在900-1000之间均匀分布的随机整数

第三种类型（目标威胁值相近）：所有目标的威胁值为在100到110之间均匀分布的随机整数。

对不同雷达数目、发射车数目、目标数目和不同威胁值进行组合，共构成81类算例；每一类算例对杀伤概率和目标危胁值在对应范围内随机采样5组，最终共产生405组随机算例。

**大规模算例的参数设置如下：**

（1）算例规模参数设置

设置目标数目集合为[30,50,80,100,200,300,500]，按照资源数目为目标数目的3倍，对应的资源要素数目集合为[90,150,240,300,600,900,1500]。共7种规模。

（2）杀伤概率设置

为杀伤概率最大值，为杀伤概率最小值。所有链的杀伤概率为在到之间均匀分布的随机数。

（3）目标威胁值设置

第一种类型（目标威胁值随机）：所有目标的威胁值为在到之间均匀分布的随机整数。

第二种类型（目标威胁值差异大）：一半目标威胁值为在1到10之间均匀分布的随机整数，另一半目标为在900-1000之间均匀分布的随机整数

第三种类型（目标威胁值相近）：所有目标的威胁值为在100到110之间均匀分布的随机整数。

对不同目标资源规模和不同威胁值类型进行组合，共构成21类算例；每一类算例对杀伤概率和目标危胁值在对应范围内随机采样3组，最终共产生63组随机算例

### 测试集二（合同要求规模）

（1）算例规模参数设置

根据武器资源特点与合同要求，设置目标与作战资源比例为：

**目标：指控：雷达：发射车：弹药 = 7：1：1：4：20**

发射车与总资源的比例为1：3.714，与合同要求的80：300 = 1：3.75接近。根据不同的大小规模设置不同的算例，其规模如下：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 目标 | 指控 | 雷达 | 发射车 | 弹药 | 资源总数 |
| 1 | 7 | 1 | 1 | 4 | 20 | 26 |
| 2 | 28 | 4 | 4 | 16 | 80 | 104 |
| 3 | 56 | 8 | 8 | 32 | 160 | 208 |
| 4 | 84 | 12 | 12 | 48 | 240 | 312 |
| 5 | 98 | 14 | 14 | 56 | 280 | 364 |
| 6 | 196 | 28 | 28 | 112 | 560 | 728 |
| 7 | 294 | 42 | 42 | 168 | 840 | 1092 |
| 8 | 392 | 56 | 56 | 224 | 1120 | 1456 |

共有8种不同的规模类型，其中类型4与合同规模要求相近（合同要求为80目标，300资源，类型四为84目标，312资源）

（2）杀伤概率与目标威胁值设置

为杀伤概率最大值，为杀伤概率最小值。所有链的杀伤概率为在到之间均匀分布的随机数。

为目标威胁值的最大值， 为目标威胁值的最小值。所有目标的威胁值设定为在 到 之间均匀分布的随机整数。

（3）随机数设置

针对上述算例规模，每种计算规模随机采样10组，最终共产生80组随机算例。

## 典型算例结果

### 结果评价指标

（1）算法的杀伤能力指标

对于所有的案例，我们记录了精确算法相对于智能算法在优化目标上的提升情况。由于精确算法可以保证在目标函数上优于智能算法，因此我们关注的是精确算法对智能算法的提升程度。我们采用以下公式来衡量两种算法所获得方案对应的优化指标的差异比例：

其中， 和 分别表示精确算法（列生成CG）和智能算法（杀伤网SSW）所得到的方案的优化指标值（即降低的威胁值）。

（2）算法的计算时间

使用列生成算法计算时间被记为，我们将对比在不同的规模下，算法的执行时间。

（3）算法快速性指标

为了比较两种算法的快速性，我们采用以下公式来衡量两种算法所获得方案对应的快速性指标的差异比例：

其中， 和 分别表示精确算法（列生成CG）和智能算法（杀伤网SSW）的运行时间。如果 ，那么精确算法的运行时间较短；如果，那么智能算法的运行时间较短。

### 与智能优化算法对比算例结果

在对比算例中，我们主要统计了相比于智能算法在杀伤能力指标与算法快速性指标的统计结果。具体的分析如下：

针对杀伤能力指标，在进行的405个随机算例试验中，我们观察到以下的结果：有10个算例显示出精确算法相对于启发式算法的提升比例超过5%，这些算例占所有算例的2.47%。另外，28个算例的提升比例在1%到5%之间，这些算例占总数的6.91%。接下来，有114个算例的提升比例位于0.1%到1%之间，占总算例的28.15%，同时，有33个算例的提升比例在0.01%到0.1%之间，这部分算例占总算例的8.15%。而精确算法在所有算例中都比智能算法的计算结果要好，从侧面印证了算法的最优性。

平均来看所有算例的提升比例是0.63%，而前1/3结果的提升比例则高达1.58%。最大提升比例为49.03%。其统计结果如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 提升比例区间 | 算例个数 | 占比 |
| >5% | 10 | 2.47% |
| >1% | 38 | 9.38% |
| >0.1% | 152 | 37.53% |
| >0.01% | 185 | 45.68% |

针对算法快速性指标，在比较精确算法与启发式算法的运行时间占比时，我们发现81个算例（占总算例的20.00%）的运行时间是启发式算法的200%以上。另有19个算例（占总算例的4.69%）的运行时间是启发式算法的100%到200%。有14个算例（占总算例的3.46%）的运行时间是启发式算法的50%到100%。而大部分算例，共291个（占总算例的71.85%），的运行时间低于启发式算法的50%。

在单个算例上，我们观察到最大的时间占比为688.94%，这意味着在这个特定算例上，精确算法的运行时间是启发式算法的约6.89倍。而最小的时间占比为0.38%，在这个特定算例上，精确算法的运行时间只有启发式算法的约0.38倍。总体来看，精确算法的平均运行时间占比为103%，这意味着精确算法的平均运行时间略高于启发式算法。其具体统计结果如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 运行时间占比区间 | 算例个数 | 占比 |
| >200% | 81 | 20.00% |
| 100% - 200% | 19 | 4.69% |
| 50% - 100% | 14 | 3.46% |
| <50% | 291 | 71.85% |

### 合同要求算例结果

在合同要求的算例中，我们主要考察了算法的计算时间，针对每种不同的规模，我们随机生成了10个算例，经过仿真模拟后对10个算例的求解时间进行统计并求平均，得到如下结果：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 目标 | 雷达 | 发射车 | 弹药 | 资源总数 | 计算时间(s) |
| 1 | 7 | 1 | 4 | 20 | 26 | 0.28 |
| 2 | 28 | 4 | 16 | 80 | 104 | 0.31 |
| 3 | 56 | 8 | 32 | 160 | 208 | 0.70 |
| 4 | 84 | 12 | 48 | 240 | 312 | 2.85 |
| 5 | 98 | 14 | 56 | 280 | 364 | 5.14 |
| 6 | 196 | 28 | 112 | 560 | 728 | 168.02 |
| 7 | 294 | 42 | 168 | 840 | 1092 | 1092.43 |
| 8 | 392 | 56 | 224 | 1120 | 1456 | 1800+ |

可以看出，随着问题规模的增加，计算时间也会增加，并且在大规模算例中，计算耗时增加的较快。对于合同要求的类型4，合同要求在1800秒内计算得到问题的精确解，目前采用的算法能够在2.85秒内得到精确解，满足合同要求并较大地提升了指标要求。目前在1800秒内能够计算的最大算例是有294个目标和1092个资源的算例，用时1092.43秒。

## 结果分析

在计算效能上，精确算法对智能算法有所提升。在我们进行的405个随机算例中，所有的案例都显示出了精确算法不差于智能算法的结果，者从侧面佐证了精确算法的最优性。而对于具体的结果分析，最大的提升比例高达49.03%，平均的提升比例为0.63%。在这些案例中，有37.53%的案例显示出精确算法相对于智能算法的提升比例超过了0.1%，这充分证明了精确算法的优越性和在优化目标上的最优性。

在运行时间上，大部分算例（占71.85%）中，精确算法的运行时间都低于智能算法的50%。尽管在某些特定的算例中，精确算法的运行时间可能会更长，但是在绝大多数情况下，精确算法都能够在更短的时间内得出结果。

在合同部分，精确求解算法能够在在平均2.85秒内得到规模为80目标，300资源的算例上的精确解，在1800秒内能够求解的最大规模是294个目标和1092个资源，完成了合同的指标。

总的来说，精确算法不仅能够在各类问题中得到精确解，而且在优化效能和时间效率上也表现出了优越性，同时也完成了合同要求。这对我们今后在解决更大规模或者更复杂问题时，提供了信心和可能性。

# 总结

在第一章在引言部分，对问题背景进行基本的介绍，指出问题的具体描述，给出问题中涉及的关键概念以及我们在此问题中采取的主要假设。

在第二章问题参数和问题分析部分，给出了问题中的符号约定、问题目标和约束的数学形式、关键算法的思路、衡量数学模型求解能力的评价标准以及主要的数值结果。

第四章开始针对研究目标进行深入探究，第四章中对全局资源优化问题进行了详细的描述。首先，我们描绘了问题的场景（4.1），提供了问题的背景和应用环境。然后，我们给出了优化目标和约束条件的数学表征（4.2），明确了优化目标以及约束条件。最后，我们提出了问题的数学形式（4.3），包括原模型的数学表述以及线性化模型的数学表述。这一部分为后续的算法设计和最优性证明提供了清晰的数学框架。

第五章主要讲述了算法的设置与最优性证明。我们首先介绍了研究的主要思路（5.1），然后详细说明了在算法应用过程中使用的主要技术（5.2）。接着，我们给出了算法的求解流程（5.3），包括算法的整体流程，模型转化方法，分支定界算法，列生成算法以及外逼近算法。在这一部分中，我们深入探讨了各项技术的应用及其效果。最后，我们进行了最优性证明（5.4），第五章详述了算法思路并证明了我们的算法是基于坚实的理论基础的，并且能够保证得到全局最优解。

在第六章中，我们进行了仿真模拟实验，详细展示了我们的数学求解模型在实际问题中的应用效果。我们设置了一系列详细的参数，并对一些典型的算例进行了求解。实验结果显示，我们的精确算法在优化效能和时间效率上表现出了优越性。尤其是在一些复杂的问题中，我们的精确算法不仅能得到满意的解，而且其运行时间同样低于智能算法。这些结果充分验证了我们的算法的有效性和实用性，为未来的研究提供了强有力的支持。

这份报告的内容指出，在资源全局匹配问题上，基于列生成的精确算法能够完成合同要求的指标，完成了研究目标。